

Научно-образовательный центр при МИАН, весна 2024
Структуры на многообразиях, листок 5

Ниже слово *поверхность* означает *компактная связная ориентируемая поверхность*.

5.1. Докажите, что гомотопически эквивалентные поверхности гомотеоморфны.

5.2. Докажите, что любая поверхность допускает гладкую структуру.

Указание. Воспользуйтесь триангулируемостью поверхностей.

5.3. Приведите пример компактной комплексной алгебраической поверхности произвольного рода.

5.4. (Для знакомых с геометрией Лобачевского, реализованной как *верхняя полуплоскость* $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$). Постройте правильный восьмиугольник на верхней полуплоскости (например, конформно отображив верхнюю полуплоскость на единичный круг) и рассмотрите *замощение* верхней полуплоскости, отражая восьмиугольники относительно их сторон. Рассмотрите сохраняющую это замощение группу дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости

$$\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right\}.$$

Найдите образующие A_1, B_1, A_2, B_2 группы Γ , позволяющую представить эту группу в виде

$$\Gamma = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 \mid A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} = 1 \rangle.$$

Каков род поверхности \mathcal{H}/Γ ? Определите комплексную структуру на этой поверхности.

Один из возможных советов. Подсмотрите ответ в книге Светланы Каток "Фуксовы группы".

5.5*. Вычислите группу *биголоморфных* автоморфизмов поверхности \mathcal{H}/Γ из предыдущей задачи.

5.6*. Найдите алгебраическую кривую, биголоморфно эквивалентную поверхности \mathcal{H}/Γ из двух предыдущей задач.

Указание. Сначала докажите, что с точностью до бирегулярного изоморфизма существует единственная кривая того же рода, что \mathcal{H}/Γ , с той же группой автоморфизмов.

11 марта, Г.Б. Шабат