Научно-образовательный центр при МИАН, весна 2024

Структуры на многообразиях,
задачи к лекции 4

Ниже предлагается план доказательства триангулируемости произвольной компактной связной поверхности. Идея и обозначения (увы, не очень современные) заимствованы из статьи P.H. Doyle, D.A.Moran, *A Short Proof that Compact 2-Manifolds Can Be Triangulated,* Inventiones math. 5,160-162(1968).

Термины и обозначения

Компактная связная поверхность называется просто *поверхностью.*

Основная поверхность обозначается $\boxed{M}$.

Дугой называется образ непрерывного вложения отрезка в поверхность.

Топологической окружностью называется образ непрерывного вложения окружности в поверхность.

(*Открытой* или *замкнутой*) *клеткой* называется образ непрерывного вложения открытого или замкнутого диска в поверхность.

Для множества $E \subseteq M$ через $\overline{E}$ обозначается его замыкание.

Для множества $E \subseteq M$ через $\mathring{E}$ обозначается множество его внутренних точек.

Границей замкнутого множества $F \subset M$ называется множество его <u>не</u>внутренних точек $\partial F := F \setminus \mathring{F}$.

Подмножество топологического пространства называется *вполне несвязным*, если все его связные подмножества одноточечны.

Известные используемые результаты

Теорема Жордана-Шёнфлиса. *Простая замкнутая кривая разбивает* $\mathbb{R}^2$ *на две области. Некоторый гомеоморфизм* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *переводит такую кривую в окружность.*

Доказательство можно найти во многих учебниках.

Утолщение дуги. *Любая дуга на поверхности лежит во внутренности открытой клетки. Эта клетка может быть выбрана не пересекающейся с любым наперёд заданным множеством в дополнении к дуге.*

Следует из *леммы о воротнике*, см., например, А. Хатчер, *Алгебраическая топология,* М., "Мир", 2011.

Критерий стягиваемости замкнутого подмножества. *Пусть множество $K \subset M$ может быть представлено как пересечение замкнутых клеток*

$$K = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i, \text{ где } \mathring{E}_i \supset E_{i+1} \text{ для } i \in \{1, 2, \dots\}.$$

Тогда фактор-пространство M/K гомеоморфно M, и для любого открытого в M множества U, содержащего K, существует гомеоморфизм $h : M/K \to M$, совпадающий с $h \circ \pi$ на $M \setminus U$, где $\pi : M \to M/K$ – каноническая проекция.

Доказательство этой (по-видимому, довольно редкой) теоремы, верной и в старших размерностях, можно найти в A. Douady, *Plongements des sphères*, Séminaire Bourbaki 13, exposé 205 (1960).

Ещё один термин[1]: подмножество поверхности будет называться *несущественным*, если оно содержится в некоторой замкнутой клетке.

1. Докажите, что компактное вполне несвязное множество несущественно, если оно содержится в конечном объединении топологических окружностей.

Один из подходов. Доказательство можно найти в основной для нас работе Doyle, Moran(1968).

2. Докажите, что поверхность может быть покрыта конечным множеством замкнутых клеток

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

так, что все границы

$$C_i := \partial B_i$$

– топологические окружности.

В дальнейшем такое покрытие будет фиксировано и будет предполагаться *минимальным*, то есть никакое его собственное подпокрытие не является покрытием.

[1] Предложен мной, ГБШ.

Важную роль будет играть неклассическое (напомним, что мы не предполагаем гладкой структуры на поверхности!) объединение топологических окружностей

$$\boxed{C} := \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

и его *сингулярное подмножество*

$$\boxed{A} :=$$

$\{$точки множества $C,$ НЕ имеющие 1-мерных евклидовых окрестностей в $C\}$.

3. Докажите, что множество A компактно и вполне несвязно.

4. Докажите, что множество A несущественно.

Замечание. С учётом критерия Дуади это утверждение тавтологично.

Полученные результаты позволяют ввести такую замкнутую клетку

$$\boxed{D} \subset M,$$

что

$$A \subset \overset{\circ}{D}.$$

5. Докажите, что множество $M \setminus C$ состоит из счётного множества попарно не пересекающихся открытых клеток, замыкания которых – замкнутые клетки.

Указание. Примените теорему Жордана-Шёнфлиса.

6. Докажите, что множество $C \setminus D$ состоит из счётного множества попарно не пересекающихся открытых дуг, границы которых лежат на ∂D.

7. Докажите, что фактор-пространство

$$\boxed{M_1} := M/D$$

является поверхностью, гомеоморфной поверхности M.

Обозначим $\boxed{\varphi_1} : M \longrightarrow M_1$ каноническую проекцию и $\boxed{p} := \pi_1(D)$. На новой поверхности лежит *роза*

$$\boxed{R} := \varphi_1\left(\overline{C \setminus D}\right).$$

8. Докажите, что R – букет конечного или счётного множества окружностей, склеенных в точке p.

9. Докажите, что дополнение $M_1 \setminus R$ гомеоморфно дополнению $M \setminus (C \cup D)$.

10. Докажите, что любая окрестность точки p содержит почти все окружности букета R.

Указание. Примените соображения компактности.

Далее фиксируем такую окрестность $\boxed{V} \supset p$ и заклеим дисками все окружности из задачи **10**.
Обозначим полученный букет дисков $\boxed{T}$.

10. Докажите, что множество T стягиваемо.

11. Построив при необходимости аналогично предыдущему новую поверхность

$$\varphi_2 : M_1 \longrightarrow M_1/T := M_2,$$

докажите, что на этой поверхности имеется естественный *детский рисунок*[2], то есть граф, дополнение к которому гомеоморфно несвязному объединению открытых клеток.

12. Докажите, что из триангулируемости поверхности M_2 следует триангулируемость поверхности M_1, а из триангулируемости поверхности M_1 следует триангулируемость поверхности M.

13. Докажите, что поверхность, на которой имеется детский рисунок, триангулируема.

4 марта, *Г.Б. Шабат*

[2]См. обильную литературу.