Одиннадцатая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Самара
19–24 августа 2024

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Самара

2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

Одиннадцатая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Самара, Россия
19–24 августа 2024 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А.Н. Панова

The Eleventh School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Samara, Russia
August 19–24, 2024

ABSTRACTS

Одобрено редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

САМАРА
Издательство Самарского университета
2024

УДК 512.81+512.74+512.745.2
ББК 22.1
O422

O422 Одиннадцатая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Самара, Россия, 19–24 августа 2024 г.: тезисы докладов. — Самара: Издательство Самарского университета, 2024. — 72 с.

ISBN 978-5-7883-2060-1

Сборник содержит тезисы докладов участников Одиннадцатой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», проводившейся в Самаре с 19 по 24 августа 2024 года. Содержит научную информацию и адресован научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

УДК 512.81+512.74+512.745.2
ББК 22.1

ISBN 978-5-7883-2060-1

Предисловие

Одиннадцатая школа-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Самаре с 19 по 24 августа 2024 года. Организаторы: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва, Научно-учебная лаборатория алгебраических групп преобразований, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН), г. Москва. Информацию о предыдущих школах-конференциях см. на сайте `https://lie-school.ru/`.

Программный комитет школы-конференции: И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), М.Х. Гизатуллин (ТГУ), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), М.В. Игнатьев (НИУ ВШЭ), А.Н. Панов (Самарский университет), В.А. Петров (СПбГУ), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), К.А. Шрамов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: А.А. Грисяк (Самарский университет, сопредседатель), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, сопредседатель), А.Н. Панов (Самарский университет, заместитель председателя), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), М.В. Игнатьев (Самарский университет), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.А. Шевченко (Самарский университет), М.А. Сурков (Самарский университет), Т.В. Вилкин (НИУ ВШЭ).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Гипергеометрические функции в теории представлений простых алгебр Ли*
  (Артамонов Дмитрий Вячеславович, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия);

- *Метод пар Хариш-Чандры в теории локально алгебраических супергрупп*
  (Зубков Александр Николаевич,Омский филиал Института математики имени С.Л. Соболева, Омск, Россия);

- *Построение весовых систем и инвариантов узлов по алгебрам Ли*
  (Ландо Сергей Константинович, НИУ ВШЭ, Москва, Россия);

- *Инвариантная геометрия нильмногообразий*
  (Миллионщиков Дмитрий Владимирович, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия);

- *Производные категории однородных пространств и представления параболических подгрупп*
  (Фонарев Антон Вячеславович, МИАН, ВШЭ, Москва, Россия).

Сборник содержит тезисы докладов участников школы-конференции.

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265).

Оргкомитет

Корневые подгруппы на орисферических многообразиях

Р.С. Авдеев
НИУ ВШЭ
suselr@yandex.ru

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ — аддитивная группа поля $\mathbb{K}$. Если группа $\mathbb{G}_a$ нетривиально действует на неприводимом алгебраическом многообразии X, то её образ H в группе автоморфизмов многообразия X называется *$\mathbb{G}_a$-подгруппой* на X. Пусть теперь на X регулярно действует алгебраическая группа F. Если F нормализует группу H, то H называется *F-корневой подгруппой* на X. В этом случае F действует на одномерной алгебре Ли $\operatorname{Lie} H$ умножением на характер χ, называемый *весом* F-корневой подгруппы H.

Пусть T — алгебраический тор. Нормальное неприводимое T-многообразие X называется *торическим*, если оно обладает открытой T-орбитой. Важную роль при изучении групп автоморфизмов торических T-многообразий играют корневые T-подгруппы. Полное описание всех T-корневых подгрупп на произвольном торическом многообразии X хорошо известно и восходит к знаменитой работе Демазюра [3]. Оказывается, что всякая T-корневая подгруппа на X однозначно определяется своим весом, а множество весов всех T-корневых подгрупп на X (эти веса называются *корнями Демазюра*) допускает комбинаторное описание в терминах веера, задающего многообразие X.

Пусть теперь G — произвольная связная редуктивная группа. Естественным обобщением понятия торического многообразия для G-многообразий служит понятие сферического многообразия. А именно, нормальное неприводимое G-многообразие X называется *сферическим*, если оно обладает открытой орбитой для индуцированного действия борелевской подгруппы $B \subset G$. В работе [1] в качестве обобщения T-корневых подгрупп на торических T-многообразиях было предложено изучать B-корневые подгруппы на сферических G-многообразиях.

Сферическое G-многообразие X называется *орисферическим*, если стабилизатор точки общего положения в X содержит максимальную унипотентную подгруппу группы G. Орисферические многообразия по некоторым свойствам напоминают торические многообразия и потому представляют собой наиболее доступный для изучения класс сферических многообразий. В докладе планируется обсудить результаты работы [2], в которой получено частичное описание B-корневых подгрупп на орисферических G-многообразиях.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, R. Avdeev. Root subgroups on affine spherical varieties. Selecta Math. (N. S.) **28** (2022), no. 3, Article 60, 37 pp.; см. также arXiv: `math.AG/2012.02088`.

[2] R. Avdeev, V. Zhgoon. Root subgroups on horospherical varieties. arXiv: `math.AG/2312.03377` (2023).

[3] M. Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **3** (1970), no. 4, 507–588.

Однозначность сложения в алгебрах Ли

И.В. Аржанцев
НИУ ВШЭ
`arjantsev@hse.ru`

Будем говорить, что кольцо Ли R называется кольцом Ли с однозначным сложением, или UA-кольцом Ли, если каждая сохраняющая коммутаторы биекция из R в произвольное кольцо Ли сохраняет сложение. Мы приведем примеры колец Ли, не обладающих этим свойством, и покажем, что если конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит два элемента, централизаторы которых имеют нулевое пересечение, то $\mathfrak{g}$ является UA-кольцом Ли. Этот результат показывает, что многие конечномерные алгебры Ли обладают свойством однозначности сложения. Также будет сформулирован ряд открытых вопросов по этой теме. Доклад базируется на работе [1].

Список литературы

[1] Ivan Arzhantsev. Uniqueness of addition in Lie algebras revisited. arXiv: `math.RA/2401.06241`, (2024).

О конечномерных однородных алгебрах Ли дифференцирований кольца многочленов

С.А. Гайфуллин
МГУ им. М.В. Ломоносова и НИУ ВШЭ
sgayf@yandex.ru

Доклад основан на совместной работе с И.В. Аржанцевым и В.Е. Лопаткиным.

Пусть k — поле нулевой характеристики. Рассмотрим алгебру $B = k[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от n переменных над k. На этой алгебре есть естественная $\mathbb{Z}^n$-градуировка, при которой все переменные являются однородными и $\deg x_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = e_i$ — i-й вектор стандартного базиса $\mathbb{Z}^n$.

Мы рассматриваем дифференцирования алгебры многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$. То есть линейные операторы $\delta\colon B \to B$, удовлетворяющие тождеству Лейбница $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$. Дифференцирование называется однородным, если оно переводит однородные элементы в однородные. Несложно показать, что для любого однородного дифференцирования δ корректно определена его степень, то есть такое целое число r такое, что $\delta(B_i) \subseteq B_{i+r}$ для всех i. Несложно показать, что степень дифференцирования может быть либо $-e_i$, либо она лежит в $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. В первом случае дифференцирование имеет вид

$$\lambda x_1^{a_1} \ldots x_{i-1}^{a_{i-1}} x_{i+1}^{a_{i+1}} \ldots x_n^{a_n} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad a_i \geq 0, \lambda \in k.$$

Такие однородные дифференцирования мы будем называть дифференцированиями I типа. Это в точности локально нильпотентные однородные дифференцирования алгебры B. Остальные дифференцирования имеют вид

$$x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad p_j \geq 0, \beta_j \in k.$$

Будем говорить, что такие дифференцирования имеют тип II.

Известный факт, что дифференцирования образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования $[\delta, \rho] = \delta \circ \rho - \rho \circ \delta$. Нас интересует вопрос при каких условиях алгебра Ли, порождённая конечным числом однородных дифференцирований, конечномерна. Для дифференцирований типа I ответ на этот вопрос был получен в работах [1] и [2]. Ответ формулируется в терминах ориентированного графа, построенного по множеству порождающих дифференцирований. Условие конечномерности алгебры Ли равносильно ацикличности этого графа.

В докладе будет рассказано о решении данного вопроса в случае набора дифференцирований типа II. Критерий конечномерности также будет сформулирован в виде ацикличности некоторого ориентированного графа. Также будет рассказано про структуру получающихся конечномерных алгебр.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, A. Liendo, T. Stasyuk. Lie algebras of vertical derivations on semiaffine varieties with torus actions. J. Pure Appl. Algebra, **225**:2 (2021), article 106499.

[2] I. Arzhantsev, M. Zaidenberg. Tits-type alternative for groups acting on toric affine varieties. Int. Math. Res. Not. IMRN, **2022**:11 (2022), 8162-8195.

О вложениях некоторых полупростых алгебраических групп в группы автоморфизмов аффинных многообразий

М.Х. Гизатуллин

Самара, Россия

gizmarat@yandex.ru

Предполагаю рассказать о некоторых сравнительно маломерных многообразиях, их линейных и полиномиальных автоморфизмах. Каждое из возникающих многообразий порождает два следующих сорта объектов, возникших в своё время в приложениях математики к естественным наукам. Во-первых, дифференциальная 1-форма (называемая контактной формой) и связанный с ней аналог преобразования Лежандра (точнее, контактное преобразование Лежандра-Ли). Во-вторых, тернарная трилинейная операция, которая вместе с некоторым косым скалярным произведением (связанным с упомянутой контактной формой) составляет тернарную систему Фройденталя-Титса-Шпрингера-Кантора (уточню, что упомянутый Т. А. Шпрингер — не книжный издатель, а последняя персона — это покойный Исай Львович Кантор). Простейшие тернарные системы начал рассматривать в квантовой механике П. Йордан. Первые примеры рассматриваемых мной многообразий и преобразований возникли в работах Г.Эйзенштейна (1844) и А.Кэли (1845, 1850). А. Кэли развил и применил к возникающим проблемам теорию инвариантов, в частности, теорию гипердетерминантов пространственных матриц. Последняя теория изложена в книге (1959, Физматгиз) киевского математика

Н. П. Соколова, я использую его результаты. Отмечу, что все возникающие здесь аффинные многообразия гибкие (flexible) в смысле определения, введённого И. В. Аржанцевым с соавторами (соавторы — Г. Фленнер, Ш. Калиман, Ф. Кутшебаух и М.Г. Зайденберг; 2012).

Обобщённая задача Хорна

А. А. Гуренкова
Университет Женевы, Женева, Швейцария
gurenkovaa@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с А. Алексеевым, А. Беренштейном, Я. Ли.

В классической задаче Хорна спрашивается: как связаны наборы собственных значений эрмитовых $n \times n$ матриц X, Y и $X+Y$? Ответ на этот вопрос, угаданный А.Хорном и впервые доказанный в работах [3] и [4], представляет собой систему линейных неравенств — неравенств Хорна. С тех пор появились и другие доказательства. Как минимум два из известных доказательств используют идеи из тропической геометрии ([6], [1]).

Естественно спросить: а что будет, если складывать не две, а три или больше матриц? Оказывается, в этом случае ответ нелинеен уже в простейшем случае 2×2 матриц и описать его трудно. Куда проще, вдохновившись работами [6] и [1], решать тропическую версию задачи. Тропические аналоги собственных значений удовлетворяют линейным неравенствам, аналогичным неравенствам Хорна, и некоторым тропическим равенствам. При определённых условиях эти равенства воспроизводят т.н. «октаэдрическую рекурренту» ([5] и ссылки), которая служит ассоциатором в категории $\mathfrak{gl}_n$-кристаллов. Объяснить это совпадение можно с помощью геометрических кристаллов [2].

Список литературы

[1] A. Alekseev, M. Podkopaeva, A. Szenes. The Horn problem and planar networks. Adv. Math. **318** (2017), 618–710.

[2] A. Berenstein, D. Kazhdan. Geometric and unipotent crystals. Geom. Funct. Anal., Special Volume, Part I (2000), 188–236.

[3] A. A. Klyachko. Stable vector bundles and Hermitian operators. Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), 419–445.

[4] A. Knutson, T. Tao. The honeycomb model of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tensor products I: proof of the saturation conjecture. J. Am. Math. Soc. **12** (1999), 1055–1090.

[5] A. Knutson, T. Tao, C.Woodward. A positive proof of the Littlewood–Richardson rule using the octahedron recurrence. Electron. J. Combin. **11** (2004), no. R61.

[6] D. Speyer. Horn's problem, Vinnikov curves, and the hive cone. Duke Math. J. **127** vol.3 (2005), 395–427.

Критерий жесткости триномиальных многообразий

П.И. Евдокимова
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
`polina.evdokimova@math.msu.ru`

Доклад основан на совместной работе автора с С.А. Гайфуллиным и А.А. Шафаревичем [1].

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, X — аффинное алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{K}$, $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа поля $\mathbb{K}$. Многообразие X называется *жестким*, если оно не допускает нетривиальных действий $\mathbb{G}_a$.

Доклад посвящен *триномиальным многообразиям*, то есть таким аффинным многообразиям, которые задаются системами уравнений следующего вида:

$$c_0T_{01}^{l_{01}}\dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + c_1T_{11}^{l_{11}}\dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + c_2T_{21}^{l_{21}}\dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} = 0,$$

где T_{ij} выступают в роли переменных, $c_i \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ должны удовлетворять некоторым условиям, $n_0 \geq 0, n_1, n_2 \geq 1, l_{ij}$ — положительные целые числа, причем если $n_0 = 0$, то первый моном считается равным единице. В случае, если такая система состоит только из одного уравнения, то соответствующее триномиальное многообразие называется *триномиальной гиперповерхностью.*

Определим моном $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}}\dots T_{in_i}^{l_{in_i}}$. В зависимости от условий, наложенных на c_i, триномиальные многообразия делятся на два типа. Уравнения из системы, задающей многообразие, принимают вид

в случае *типа 1:*

$$T_i^{l_i} - T_{i+1}^{l_{i+1}} = a_{i+1} - a_i,$$

где $1 \leq i \leq r$, a_i попарно различны;

в случае *типа 2:*

$$det \begin{pmatrix} T_i^{l_i} & T_{i+1}^{l_{i+1}} & T_{i+2}^{l_{i+2}} \\ a_{0i} & a_{0i+1} & a_{0i+2} \\ a_{1i} & a_{1i+1} & a_{1i+2} \end{pmatrix} = 0,$$

где $0 \leq i \leq r-2$ и столбцы следующей матрицы попарно линейно независимы

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0r} \\ a_{10} & \dots & a_{1r} \end{pmatrix}.$$

В работе [2] был доказан критерий жесткости факториальных триномиальных гиперповерхностей. В работе [3] получены два обобщения предыдущего результата: критерий жесткости произвольной триномиальной гиперповерхности, а также критерий жесткости факториального триномиального многообразия.

В докладе будет доказан критерий жесткости произвольных триномиальных многообразий, обобщающий предыдущие результаты и завершающий классификацию жестких триномиальных многообразий.

Список литературы

[1] P. Evdokimova, S. Gaifullin, A. Shafarevich. Rigid Trinomial Varieties. arXiv: `math.AG/2307.06672` (2023).

[2] I. Arzhantsev. On rigidity of fac torial trinomial hypersurfaces. Int. J. Algebra Comput. **26** (2016) no. 5, 1061–1070.

[3] S. Gaifullin. On rigidity of trinomial hypersurfaces and factorial trinomial varieties. arXiv: `math.AG/1902.06136` (2019).

Об алгебрах Ли, задаваемых касательными направлениями к однородным проективным многообразиям

А.О. Завадский

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

zavadskiao@gmail.com

Доклад основан на работе [1].

Пусть $X \subset \mathbb{P}^m$ — вложенное комплексное проективное многообразие. Рассмотрим соответствующее ему аффинное коническое многообразие $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{m+1}$. Мы исследуем алгебру Ли $\mathfrak{L}$, которая порождается векторным пространством $\mathbb{C}^{m+1}$ и задана определяющими соотношениями вида

$$[\xi, \eta] = 0 \quad \forall \xi \in \widehat{X}^{\mathrm{reg}}, \eta \in \mathcal{T}_\xi \widehat{X},$$

где $\mathcal{T}_\xi \widehat{X}$ — касательное пространство к $\widehat{X}$ в точке ξ. Алгебры такого вида интересны тем, что они возникают в связи с исследованиями многообразий минимальных рациональных касательных, определенных Д. Хваном и Н. Моком [2, 3]. В некоторых случаях такие алгебры изоморфны алгебрам символов фильтрованных систем распределений на многообразиях Фано, порожденными конусами над многообразиями минимальных рациональных касательных в точках общего положения.

Мы исследуем алгебры Ли, которые задаются касательными направлениями к однородным многообразиям. Более точно, пусть R — неприводимое представление полупростой комплексной группы Ли G в пространстве V с младшим весом Λ, v_Λ — младший вектор представления, $\widehat{X} = R(G)v_\Lambda \cup \{0\}$ — замыкание орбиты младшего вектора. Тогда $\widehat{X}$ — коническое аффинное алгебраическое многообразие, а его проективизация X — однородное проективное многообразие, вложенное в пространство $\mathbb{P}(V)$.

Неприводимые представления полупростых алгебр Ли естественным образом содержатся внутри алгебр Каца–Муди. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Каца–Муди, построенная по обобщенной матрице Картана $\widetilde{A}$. Выделим некоторую вершину диаграммы Дынкина этой алгебры и предположим, что диаграмма без этой вершины имеет конечный тип. Пусть e_i, f_i, h_i — система канонических образующих алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, где e_0, f_0, h_0 соответствуют выделенной вершине. Зададим $\mathbb{Z}$–градуировку $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathfrak{g}}_k$ на алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$, присвоив элементу e_0 степень 1, элементу f_0 степень -1, а остальным образующим и всем элементам подалгебры Картана — степень 0. Тогда слагаемое $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ — редуктивная алгебра Ли, полупростую часть которой обозначим через $\mathfrak{g}$, а слагаемое $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ в $\mathbb{Z}$–градуировке является неприводимым $\mathfrak{g}$–модулем. Представление $\mathfrak{g}$ в $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ интегрируется до представления полупростой группы Ли G. Этой конструкцией можно получить любое неприводимое представление полупростой группы Ли.

Можно показать, что при этом алгебра $\mathfrak{L}$, соответствующая орбите младшего вектора представления G в $\tilde{\mathfrak{g}}_1$, является факторалгеброй подалгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_2 \oplus \ldots \subset \tilde{\mathfrak{g}}$.

Таким образом, задача описания алгебр, задаваемых касательными направлениями, сводится к вычислениям в алгебрах Каца-Муди. Кроме того, алгебры, задаваемые касательными направлениями к таким многообразиям, удается описать в терминах образующих и соотношений. В тех случаях, когда соответствующая алгебра Каца-Муди конечного или аффинного типа, мы можем полностью описать структуру алгебры, задаваемой касательными направлениями.

Список литературы

[1] А.О. Завадский. Об алгебрах Ли, задаваемых касательными направлениями к однородным проективным многообразиям. Мат. заметки **114** (2023), no. 5, 1037–1052.

[2] J.-M. Hwang. Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds. School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000), ICTP Lect. Notes, **6**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001, 335–393.

[3] J.-M. Hwang, N. Mok. Deformation rigidity of the rational homogeneous space associated to a long simple root. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **35:2** (2002), 173–184.

Компактификации моделей математической физики

А.И. Ильин
Сколтех, Москва, Россия
alex.omsk2@gmail.com

Я расскажу об общей процедуре рассмотрения всех возможных пределов классической или квантовой интегрируемой модели. В качестве примера будут рассмотрены разные версии моделей Годена (однородная, неоднородная, тригонометрическая). Я опишу связь этих моделей с компактификацией Деліня-Мамфорда и новым пространством модулей цветочных кактусовых кривых. Этот доклад основан на работе, проводимой с Л. Рыбниковым и J. Kamnitzer.

Список литературы

[1] A. Ilin, J. Kamnitzer, Y. Li, P. Przytycki, L. Rybnikov. The moduli space of cactus flower curves and the virtual cactus group. arXiv: `math.AG/2308.06880` (2023).

[2] A. Ilin, J. Kamnitzer, L. Rybnikov. Gaudin models and moduli space of flower curves. arXiv: `math.AG/24xx.xxxxx` (2024).

О связности группы автоморфизмов аффинного торического многообразия

В.В. Киктева
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
VVKikteva@yandex.ru

Далее $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Пусть X — алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{K}$, а $\mathrm{Aut}(X)$ — группа регулярных автоморфизмов многообразия X. В общем случае группа $\mathrm{Aut}(X)$ не является алгебраической группой. Однако для подгрупп в группе $\mathrm{Aut}(X)$ можно определить понятие связности. Данный термин был введен в работе [2], см. также [1].

Известны примеры аффинных торических многообразий как со связной, так и с несвязной группой автоморфизмов. В [3, лемма 4] и [1, теорема 6] доказывается, что группа автоморфизмов n-мерного аффинного пространства при любом натуральном n является связной. Примером аффинного торического многообразия с несвязной группой автоморфизмов является алгебраический тор $T = (\mathbb{K}^\times)^n$.

Доклад содержит критерий связности группы автоморфизмов аффинного торического многообразия в комбинаторных терминах и в терминах группы классов дивизоров многообразия. Также автором описана группа компонент группы автоморфизмов невырожденного аффинного торического многообразия. В частности, показано, что для таких многообразий число компонент связности группы автоморфизмов конечно.

Список литературы

[1] V. Popov. On infinite dimensional algebraic transformation groups. Transform. Groups **19** (2014), no. 2, 549–568.

[2] C. Ramanujam. A note on automorphism group of algebraic varieties. Math. Ann. **156** (1964), 25–33.

[3] I. Shafarevich. On some infinite-dimensional groups. II. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **45** (1981), no. 1, 214–226.

Гипотеза Джонса для узлов на 4 нитях

Д.В. Корзун, Е.Н. Ланина, А.В. Слепцов
НИУ МФТИ, Москва, Россия
Korzun.DV@phystech.edu

Доклад основан на работе авторов [1].

Полином Джонса $J(q)$ один из самых известных и сильных полиномиальных инвариантов узлов. Открыт он был в 1984 году [2], но до сих пор неизвестно, различает ли он тривиальный узел. Гипотеза Джонса заключается в предположении, что различает, но проверена она только для отдельных классов узлов. Например, для тех, что получаются замыканием кос на 2 и 3 нитях [3]. Мы же в своей работе сосредоточились на узлах на 4 нитях. Во-первых, это простейший из неисследованных случаев с точки зрения представления узлов в виде кос. Во-вторых, проблема Джонса на 4 нитях связана с классическим вопросом о точности представления Бурау группы кос на 4 нитях [4]. С. Бигелоу удалось показать, что если представление Бурау на 4 нитях неточное, то существует нетривиальный узел с тривиальным не только полиномом Джонса, но и полиномами Александера и ХОМФЛИ-ПТ (обобщением Джонса на 2 переменные).

Мы же подошли к проблеме Джонса с другой стороны и рассмотрели случай гипотетических узлов на 4 нитях с тривиальным полиномом Джонса и нетривиальным ХОМФЛИ-ПТ. В рамках данного подхода мы рассмотрели условия, которые накладываются на дифференциальное разложение и разложение по характерам для ХОМФЛИ-ПТ из требования на удовлетворения ширины полинома ХОМФЛИ-ПТ по второй переменной $\mathrm{span}_A H^{\mathcal{K}}(q,A)$ и индекса косы $\mathfrak{b}^{\mathcal{K}}$ неравенству Мортона-Франка-Уильямса [5]:

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{span}_A H^{\mathcal{K}}(q,A)\right) \leq \mathfrak{b}^{\mathcal{K}} - 1. \quad (1)$$

Из этого нами были получены следующие утверждения.

Теорема. *Не существует нетривиального узла на 4 нитях с тривиальными полиномами Джонса и Александера и нетривиальным полиномом ХОМФЛИ-ПТ. Если не требовать тривиальности Александера, то у гипотетического семейства узлов с тривиальными полиномами Джонса полиномы ХОМФЛИ-ПТ будут иметь определённые значения.*

$$H^{\mathcal{K}}(q,A) = 1 + (A^2-q^2)(A^2-q^4)(A^2-q^{-2})(A^2-q^{-4}) \cdot F^{\mathcal{K}}(q,A), \quad (2)$$

где циклотомические функции в дифференциальном разложение принимают следующий вид при неотрицательном целом m, которая выражается через алгебраическую сумму зацеплений узла в представлении косы $m = \frac{W-5}{2}$.

$$\begin{aligned} F^{\mathcal{K}_m} &= -\sum_{j=0}^{m} \frac{[2j+4]_q[j+3]_q[j+1]_q}{[3]_q[4]_q} A^{-2j-8}\,, \\ \bar{F}^{\bar{\mathcal{K}}_m} &= -\sum_{j=0}^{m} \frac{[2j+4]_q[j+3]_q[j+1]_q}{[3]_q[4]_q} A^{2j}\,. \end{aligned} \quad (3)$$

Если полином $F^{\mathcal{K}_m}$ соответствует некоторому реальному узлу $\mathcal{K}_m$,то полином $\bar{F}^{\bar{\mathcal{K}}_m}$ будет соответствовать узлу $\bar{\mathcal{K}}_m$, который зеркален к $\mathcal{K}_m$.

Данный подход мы несложным образом обобщили на узлы на большем числе нитей, однако в этом случае нам пришлось требовать тривиальность от редуцированных полиномов ХОМФЛИ-ПТ, то есть инвариантов при фиксированных вторых переменных $A = q^N$. Для нечётного числа нитей необходимо также добавить условие на тривиальность полинома Александера.

Сразу возникает вопрос, как убедиться, что данным полиномам соответствуют какие-то реальные узлы? Для этого мы разработали несколько проверок, сравнили разложения по характерам и инвариантам Васильева с получившимся дифференциальным разложением, рассмотрели добавление топологической накрутки в произвольной чётной степени. Оказалось, что все характеристические коэффициенты, которые являются следом $\mathfrak{R}$-матричного представления узла, параметризуются двухкомпонентным зацеплением на 3 нитях. Поскольку $\mathfrak{R}$-матрицы являются унитарными на некоторых корнях из единицы, то и собственные значения $\mathfrak{R}$-матричного представления на этих корнях должны лежать на единичной окружности. Проверкой этого условия нам удалось отбросить большое число двухкомпонентных зацеплений для первых нескольких уровней наших полиномов. При этом, часть таких зацеплений указанные проверки проходит.

Таким образом, нами были получены новые ограничения на гипотетический вид узлов на 4 нитях, решающих проблему Джонса, и полиномов ХОМФЛИ-ПТ для них.

Список литературы

[1] D. Korzun, E. Lanina, A. Sleptsov. Closed 4-braids and the Jones unknot conjecture. arXiv: `math.GT/2402.02553` (2024).

[2] V. F. R. Jones. Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials Annals of Mathematics **126** (1987), no. 2, 335–388.

[3] A. Stoimenow. Properties of closed 3-braids and braid representations of links. Springer, 2017.

[4] S. Bigelow. Does the Jones polynomial detect the unknot? Journal of Knot Theory and Its Ramifications **11** (2002), no. 4, 493–505.

[5] H. R. Morton. Mutant knots. New ideas in low dimensional topology, 2015, 379–412.

Алгебры ветвления особых простых групп Ли

А.И. Кучеренко
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
kuchkiper@gmail.com

Пусть G — связная полупростая комплексная группа Ли, $H \subset G$ — ее связная полупростая подгруппа. Рассмотрим комплексное конечномерное неприводимое рациональное представление $R: \ G \to \mathrm{GL}(V)$. Его ограничение на H уже, вообще говоря, не будет неприводимым, а разложится в сумму неприводимых H-представлений:

$$R|_H = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_k,$$

где R_i — неприводимые представления группы H. Набор слагаемых в этом разложении определен однозначно с точностью до изоморфизма.

Определение. Зафиксируем пару групп $H \subset G$. Тогда *задачей ветвления* называется задача получения такого разложения для произвольного неприводимого представления R группы G. Ответ к этой задаче называется *правилом ветвления.*

Ввиду классификации полупростых групп, в первую очередь задачу ветвления стоит рассматривать для простых групп. Для классических простых групп правила ветвления известны уже достаточно давно: случай унимодулярной группы был решен Г. Вейлем [2], ортогональной группы И.М. Гельфандом и М.Л. Цетлиным [4], для симплектической группы Д.П. Желобенко [3]. Однако для большинства особых простых групп G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 правило ветвления не было получено до сих пор.

В своем докладе я расскажу о геометрическом подходе к получению правил ветвления, который подходит для любых пар полупростых групп $H \subset G$. Метод основан на описании так называемой *алгебры ветвления.*

Пусть $T_H \subset T$ — максимальные торы в H и G соответственно, $U_H \subset U$ — максимальные унипотентные подгруппы, нормализуемые этими торами в H и G. За U^- обозначим противоположную к U максимальную унипотентную подгруппу. Рассмотрим действие группы $G \times G$ на алгебре регулярных функций $\mathbb{C}[G]$ сдвигами аргумента

$$((g,h)\cdot f)(x) = f(g^{-1}xh), \quad \forall g,h \in G, \ f \in \mathbb{C}[G].$$

Тогда алгеброй ветвления будет называться алгебра инвариантов $\mathbb{C}[G]^{U^- \times U_H}$ относительно этого действия.

С помощью действия $T \times T_H$ мы введем на алгебре ветвления естественную градуировку и покажем, почему описание алгебры ветвления в однородных образующих и соотношениях (относительно этой градуировки) эквивалентно выводу правила ветвления. Далее мы обсудим геометрический метод, с помощью которого можно удобно получать подобного рода описания алгебры ветвления. В завершении я сформулирую полученные с применением данного метода результаты для ветвления с особой группы G_2 на A_2 и с F_4 на B_4.

Теорема (Алгебра ветвления с G_2 на A_2). В классе коммутативных ассоциативных алгебр с единицей алгебра ветвления с G_2 на A_2 задается такими образующими и соотношениями

$$\mathbb{C}[G]^{U^- \times U_H} \simeq \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 |\, f_1 f_2 + f_3 f_4 + f_5 f_6 = 0].$$

Теорема (Алгебра ветвления с F_4 на B_4). В классе коммутативных ассоциативных алгебр с единицей алгебра ветвления с F_4 на B_4 задается такими образующими и соотношениями

$$\mathbb{C}[G]^{U^- \times U_H} \simeq \mathbb{C}[f_1, f_2, \ldots, f_{20} |\, 27 \text{ соотношений}].$$

В обеих теоремах порождающие полуинвариантны относительно действия $T \times T_H$ и их веса известны.

Стоит отметить, что правило ветвления с G_2 на A_2 было получено ранее Д. Панюшевым и Д. Ахиезером в [1]. Авторы получили ответы для этой и других пар групп сложности $c_G(G/B_H) \leqslant 1$, используя оценки для размерностей однородных пространств алгебры ветвления. Результат же для группы F_4 является новым.

Список литературы

[1] D.N. Akhiezer, D.I. Panyushev. Multiplicities in the branching rules and the complexity of homogeneous spaces. Mosc. Math. J **2** (2002), 17–34.

[2] Г. Вейль. Теория групп и квантовая механика. Библиотека Теоретической Физики. Москва: Наука. 496 стр., 1986.

[3] Д.П. Желобенко. Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений. УМН, **17** (1962), 27–120.

[4] И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин. Конечномерные представления группы ортогональных матриц. Докл. АН СССР, Новая Серия, **71** (1950), 1017–1020.

«Исчисление тэнглами» для полиномов Хованова

Е.Н. Ланина
НИУ МФТИ, НИЦ Курчатовский институт, Москва, Россия
lanina.en@phystech.edu

Доклад основан на работе автора [1]. В рамках данной работы мы изучали, работает ли техника «исчисления тэнглами» для полиномов Хованова и каким образом. Опишем сначала саму технику, а также ее применение для квантовых инвариантов узлов серии $\mathfrak{sl}_N$ — цветных полиномов ХОМФЛИ, предварительно введя некоторые объекты.

Рассмотрим пространства представлений алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ V_{R_i}, $i = 1, \ldots, m$.

Определение 1 $\mathcal{R}$-матрицы — это обратимые линейные операторы, определяемые

$$\mathcal{R}_i = 1_{V_{R_1}} \otimes 1_{V_{R_2}} \otimes \ldots \otimes P\check{\mathcal{R}}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes 1_{V_{R_m}} \in \mathrm{End}\left(V_{R_1} \otimes \ldots, \otimes V_{R_m}\right), \quad (1)$$

где $P(x \otimes y) = y \otimes x$ и $\check{\mathcal{R}}$ — универсальная $\mathcal{R}$-матрица.

Хорошо известно, что $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, m$ задают представление группы кос $\mathcal{B}_m$ на m нитях:

$$\pi : \mathcal{B}_m \to \mathrm{End}\left(V_{R_1} \otimes \ldots \otimes V_{R_m}\right), \quad \pi\left(\sigma_i\right) = \mathcal{R}_i\,. \quad (2)$$

Пусть $\mathcal{L}$ — зацепление с L компонентами $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_L$, а $\beta_L \in \mathcal{B}_m$ — некоторая коса из m нитей, замыкание которой дает $\mathcal{L}$. С каждой компонентой зацепления ассоциируем пространства неприводимых конечномерных представлений $V_{R_1}, \ldots, V_{R_L}$ алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_N)$.

Определение 2 Цветной полином ХОМФЛИ («раскрашенный» представлениями $R_1, \ldots, R_L$) — это квантовый инвариант зацепления $\mathcal{L}$, определяемый следующим образом:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{R_1,\ldots,R_L} = {}_q\,\mathrm{tr}_{V_{R_1} \otimes \cdots \otimes V_{R_m}}\left(\pi\left(\beta_{\mathcal{L}}\right)\right), \quad (3)$$

где ${}_q\,\mathrm{tr}$ — квантовый след.

В «исчислении тэнглами» зацепление получается путем склеивания из тэнглов. Каждому тэнглу можно сопоставить некоторую рациональную функцию или матрицу, которая входит в результирующий полином ХОМФЛИ в качестве фактора. Склеивание тэнглов приводит к суммированию по неприводимым представлениям промежуточных состояний в полиноме зацепления. Описанный выше подход Решетихина–Тураева объясняет, как строить полиномы ХОМФЛИ из тэнглов, связанных с элементарными вершинами — $\mathcal{R}$-матрицами. Однако вычисление квантовых инвариантов узлов методом Решетихина–Тураева становится чрезвычайно трудным при усложнении уз-

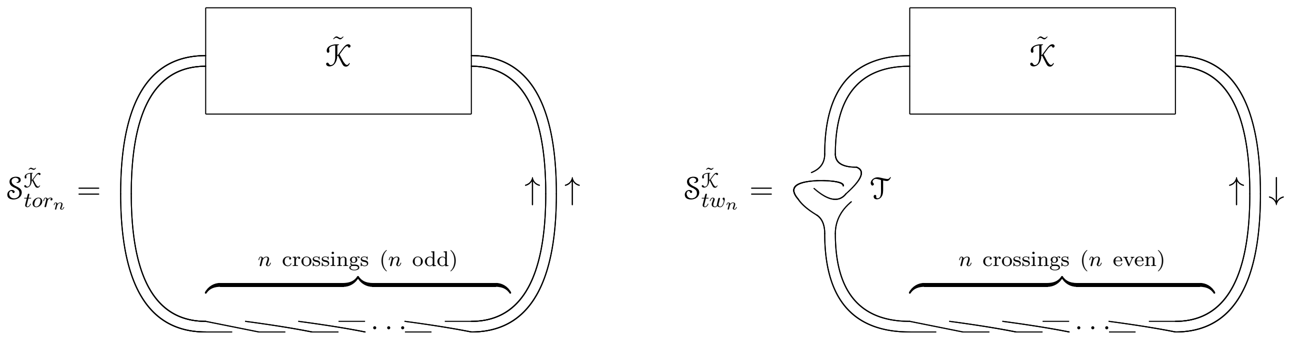


Рис. 1: Два семейства сателлитов Уайтхеда. Тэнгл $\mathcal{T}$ называется «замковым». Возможный вид $\tilde{\mathcal{K}}$ показан на рис. 2. Заметим, что определение этих сателлитов включает не просто узел $\mathcal{K}$, а его конкретную диаграмме $\tilde{\mathcal{K}}$. Однако зависимость от диаграммы простая. Она может быть устранена сдвигом n на $2w_{\tilde{\mathcal{K}}}$, где $w_{\tilde{\mathcal{K}}}$ — алгебраическое число пересечений диаграммы (разница между числом положительных и отрицательных пересечений в $\tilde{\mathcal{K}}$): $\mathcal{S}_{T_n}(\mathcal{K}) := \mathcal{S}^{\tilde{\mathcal{K}}}_{T_{n-2w_{\tilde{\mathcal{K}}}}}$ не зависит от диаграммы узла, где $T = tor$ или $T = tw$

ла и представления. К счастью, большая часть известных узлов из таблицы Рольфсена вкладываются в семейства узлов, которые можно разбить на тэнглы универсального вида, состоящие из нескольких пересечений. Вклады этих тэнглов можно вычислить из квантовых инвариантов простейших узлов семейства и потом использовать для вычислений более сложных узлов. В качестве примера рассмотрим узлы-сателлиты Уайтхеда, см. рис. 1, для которых полиномы ХОМФЛИ можно посчитать по следующим формулам:

$$\begin{gathered}
\mathcal{H}_{\square}^{\mathcal{S}^{\tilde{\mathcal{K}}}_{tw_n}} = \mathcal{T}_{\varnothing} + \overbrace{(-A)^{-n}}^{\lambda_{\text{adj}}^{-n}} \cdot \overbrace{\frac{\{Aq\}\{A/q\}}{\{q\}^2}}^{\text{qdim}_{\text{adj}}} \cdot \mathcal{T}_{\text{adj}} \cdot (-A)^{-2w_{\tilde{\mathcal{K}}}} H^{\mathcal{K}}_{\text{adj}}\,, \\
\mathcal{H}_{\square}^{\mathcal{S}^{\tilde{\mathcal{K}}}_{tor_n}} = \left(\frac{q}{A}\right)^{-n} \cdot \overbrace{\frac{\{A\}\{Aq\}}{\{q\}\{q^2\}}}^{\text{qdim}_{[2]}} \cdot \left(\frac{q}{A}\right)^{-2w_{\tilde{\mathcal{K}}}} H^{\mathcal{K}}_{[2]} + \left(-\frac{1}{qA}\right)^{-n} \cdot \overbrace{\frac{\{A\}\{A/q\}}{\{q\}\{q^2\}}}^{\text{qdim}_{[1,1]}} \cdot \left(-\frac{1}{qA}\right)^{-2w_{\tilde{\mathcal{K}}}} H^{\mathcal{K}}_{[1,1]}\,,
\end{gathered} \tag{4}$$

где $H^{\mathcal{K}}_R = \frac{\mathcal{H}^{\mathcal{K}}_R}{\text{qdim}(R)}$ — редуцированный полином ХОМФЛИ, $\text{qdim}(R)$ — квантовая размерность. Заметим, что здесь выражения $\mathcal{T}_R$, соответствующие «замковым» блокам, могут быть вычислены из самых простых узлов семейства — твистованных узлов.

Для сателлитов Уайтхеда $\mathcal{S}_{T_n}(\mathcal{K})$ с рис. 1 для узлов $\mathcal{K}$ из таблицы 1 мы посчитали полиномы Хованова — t-деформацию полиномов Джонса (полиномов ХОМФЛИ для $\mathfrak{sl}_2$) в фундаментальном представлении. Оказалось, что метод «исчисления тэнглами», по крайней мере, для перечисленных в таблице узлов работает, и для полиномов Хованова мы имеем t-деформированные формулы () при $A = q^2$:

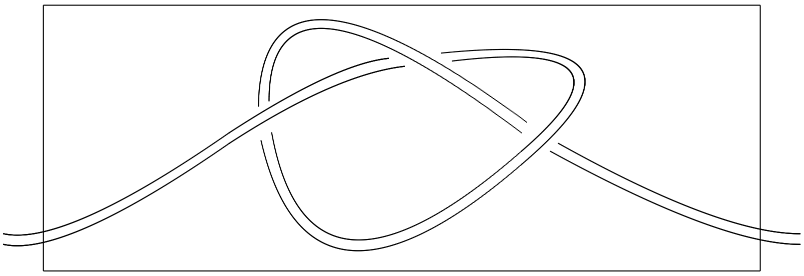


Рис. 2: 2-каблированный узел-трилистник как пример возможной диаграммы $\tilde{\mathcal{K}}$ на рис. 1

$\mathcal{K}$	3_1 $tor_3 = tw_{-2}$	4_1 tw_2	5_1 tor_5	5_2 tw_{-4}	6_1 tw_4	6_2	6_3	7_1 tor_7	7_2 tw_{-6}	7_3	7_4	7_5	7_6	7_7	8_1 tw_6	$\mathbf{8_{19}}$ $T[3,4]$	8_{20}	8_{21}	9_1 tor_9
$\mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}$	3	0	6	3	0	3	0	9	3	6	3	6	3	0	0	**8**	0	3	12
$\mathrm{RSI}_{\mathcal{K}}$	2	0	4	2	0	2	0	6	2	4	2	4	2	0	0	6	0	2	8

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Kh}^{\mathcal{S}^{\tilde{\mathcal{K}}}_{tw_{n-2w_{\tilde{\mathcal{K}}}}}}} &= \overbrace{\underline{(-\mathbf{t})^{\theta(n+2\,\mathrm{Sh}_{\mathcal{K}})}} \cdot q^2\,\frac{1+q^4\mathbf{t}^2}{1-q^2\mathbf{t}}}^{\underline{\tau_{\varnothing}}} \qquad \overbrace{-\,\mathbf{t}^{-1}\frac{1+q^6\mathbf{t}^3}{1-q^2\mathbf{t}}}^{\tau_{\mathrm{adj}}} \cdot \overbrace{(q^2\mathbf{t})^{-n}}^{\lambda_{\mathrm{adj}}^{-n}} \cdot \underline{\mathrm{Kh}^{\mathcal{K}}_{\mathrm{adj}}}\,, \\
\underline{\mathrm{Kh}^{\mathcal{S}^{\tilde{\mathcal{K}}}_{tor_{n-2w_{\tilde{\mathcal{K}}}}}}} &= \overbrace{\underline{(-\mathbf{t})^{\theta(n+2\,\mathrm{Sh}_{\mathcal{K}})}} \cdot \frac{q}{1-q^2\mathbf{t}}}^{\underline{\mu_{[1,1]}}} \cdot \overbrace{(q^3\mathbf{t})^n}^{\lambda_{[1,1]}^n} \quad + \overbrace{\frac{q^4\mathbf{t}^2-q^2\mathbf{t}+1}{q\mathbf{t}\,(q^2\mathbf{t}-1)}}^{\mu_{\mathrm{adj}}} \cdot \overbrace{q^n}^{\lambda_{[2]}^n} \cdot \underline{\mathrm{Kh}^{\mathcal{K}}_{\mathrm{adj}}}\,,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где подчеркнуты величины, испытывающие скачки по параметрам узла. Здесь $\mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}$ — новый введенный нами инвариант узла, который можно получить из редуцированного полинома Хованова узла $\mathcal{K}$, как мы показываем в нашей работе [1].

Нетривиальным приложением метода «исчисления тэнглами» является возможность получения цветных полиномов узлов. Например, из формул (4), (5) можно выразить соответствующие квантовые инварианты узлов в присоединенном представлении. Для цветных полиномов ХОМФЛИ известно множество ответов для разных узлов из таблицы Рольфсена и даже для непрямоугольных представлений, а также несколько непертурбативных методов их вычисления. Однако для их t-деформированных аналогов — цветных полиномов Хованова–Рожанского, практического метода вычисления автору не было известно. Даже исходное определение «нераскрашенного» («раскрашенного» фундаментальным представлением) полинома Хованова–Рожанского основывается на вычислении когомологий комплекса, построенного по узлу, что делает его вычисление крайне трудоемким даже при использовании современных компьютерных мощностей. При «окрашивании» полинома Хованова–Рожанского размерности отображаемых пространств и сложность дифференциалов в соответствующих комплексах сильно возрастает,

$\mathcal{K}$	9_2 tw_{-8}	$\mathbf{9_{42}}$	9_{43}	10_1	$\mathbf{10_{124}}$ tw_8	$\mathbf{10_{128}}$ $T[3,5]$	$\mathbf{10_{132}}$	$\mathbf{10_{136}}$	$\mathbf{10_{139}}$	$\mathbf{10_{145}}$	$\mathbf{10_{152}}$	$\mathbf{10_{153}}$	$\mathbf{14n_{21881}}$ $T[3,7]$
$\mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}$	3	0	6	0	**11**	**8**	3	0	**11**	6	**11**	0	**16**
$\mathrm{RSI}_{\mathcal{K}}$	2	0	4	0	8	6	2	0	8	4	8	0	12

Таблица 1: Узлы, их инварианты Расмуссена $\mathrm{RSI}_{\mathcal{K}}$ и инварианты $\mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}$. Торические узлы обозначены как $T[l,m]$. Для краткости узлы $T[2,k]$ в тексте обозначаются как tor_k

что делает практическое вычисление даже для первого нетривиального узла-трилистника крайне сложным. Наш же метод позволяет вычислять цветные полиномы Хованова из «нераскрашенных» полиномов Хованова, что значительно упрощает вычисления.

Более того, оказывается, что из формулы (5) можно выделить цветные полиномы Хованова, не испытывающие скачков по параметру n, а также являющиеся полиномами с положительными коэффициентами, что соответствует когомологическому определению полиномов Хованова:

$$\underline{\mathrm{Kh}^{\mathcal{S}_{T_n}(\mathcal{K})}} = \underline{\mathrm{Kh}^{T_{n+2\,\mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}}}} + \mathfrak{c}_T \cdot \lambda_{\mathrm{adj}}^{-n} \cdot \mathfrak{Kh}_{\mathrm{adj}}^{\mathcal{K}}\,, \quad \text{где } \ \mathfrak{c}_{tor} = \mu_{\mathrm{adj}} \ \text{ и } \ \mathfrak{c}_{tw} = \tau_{\mathrm{adj}}. \qquad (6)$$

Список литературы

[1] A. Anokhina, E. Lanina, A. Morozov. Towards tangle calculus for Khovanov polynomials. Nuclear Physics B **998** (2023), 116403.

Понятно о пользе схем для алгебраических групп

Р.А. Лубков

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

RomanLubkov@yandex.ru

В развитии алгебраической геометрии традиционно выделяют два больших этапа. Первый — классическая геометрия, разработанная в конце 19 века Риманом, использующего теоретико-функциональный язык, Бриллем и Нётером, использующие более геометрический язык и Кронекером, Дедекиндом и Вебером с чисто алгебраическим подходом. В дальнейшем, основываясь на уже наработанных идеях, итальянская школа Кастельнуово, Энериквеса и Севери смогла выполнить одну из главных задач теории — они классифицировали алгебраические поверхности, что стало главным итальянским достижением в этой области.

Современный подход к алгебраической геометрии начался с работ Чжоу, Вейля и Зариского в начале 20 века. И уже совсем скоро после этого Серр и Гротендик основали знаменитую французскую школу, которая пересмотрела основания алгебраической геометрии в терминах схем и когомологий. Используя новый язык, им удалось в короткий промежуток времени решить огромное количество открытых старых проблем. Этот подход представляет собой систематическое описание всех процессов, проходящих при изучении многообразий, при этом разрабатывается техника, которая работает над произвольным коммутативным кольцом и не зависит от особенностей конкретных полей, функций на многообразиях, точек и др.

Однако, у такого подхода есть свой огромный недостаток — он, подобно языку теории категорий, даётся с трудом начинающим математикам. Необходимо не только понять и выучить огромное количество новых определений и фактов, а выработать интуицию, которая часто бывает очень обманчива даже для коммутативного случая, не говоря уже про более общие ситуации.

В докладе мы обсудим без формальных определений некоторые проблемы классического подхода к алгебраической геометрии, а также покажем, как современный язык может легко решить все эти сложности, если рассматривать многообразия с современной точки зрения.

Критические радиусы орбит представлений изотропии римановых симметрических пространств

М.В. Мещеряков

НИУ ВШЭ, Москва, Россия

1953mmv@mail.ru

Цель доклада состоит в рассмотрении метода вычисления определенного метрического инварианта орбит представлений изотропии полупростых римановых симметрических пространств, называемого критическим радиусом, в терминах системы ограниченных корней и группы Вейля симметрического пространства. Этот метрический инвариант, характеризующий расположение подмножеств в объемлющем метрическом пространстве, был впервые введен для подмножеств евклидова пространстве Г. Федерером в работе [1]. Грубо говоря, критический радиус $R(F)$ подмножества F объемлющего метрического пространства это максимальный размер окрестности F, каждая точка которой имеет единственную ближайшую точку в F.

Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}$ — разложение Картана полупростой вещественной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы Ли G симметрической пары (G, K), определяющей симметрическое пространство. Представление изотропии симметрического пространства эквивалентно присоединенному представлению Ad группы изотропии K пары (G, K) на пространстве $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{G}$. Под орбитами представления изотропии будут пониматься орбиты действия группы K в пространстве $\mathfrak{P}$. Каждая орбита ортогонально пересекает максимальные абелевы подалгебры $\mathfrak{A}$ пространства $\mathfrak{P}$. Пара $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A})$ определяет систему $\Sigma(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}) \subset \mathfrak{P}$ ограниченных корней симметрического пространства и отвечающую ей группу Вейля $W = W(\mathfrak{P}, \mathfrak{A})$, порожденную отражениями относительно гиперплоскостей, ортогональных корням $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{P}, \mathfrak{A})$. Группа Вейля вместе с системой ограниченных корней суть основные комбинаторные данные, связанные с симметрическим пространством. Отражающие гиперплоскости H_α, ортогональные корням α, делят картановское подпространство $\mathfrak{A}$ на многогранные конусы C, называемые камерами. Из теории симметрических пространств хорошо известно [2], что любая орбита $O(\lambda)$ представления изотропии пересекает замыкание любой камеры в единственной точке λ. Пересечение $O(\lambda) \cap \mathfrak{A}$ совпадает с орбитой $W(\lambda)$ этой точки относительно естественного действия группы W.

Основные наши результаты о критических радиусах для орбит представления изотропии составляют следующие две теоремы.

Теорема A. Пусть $O(\lambda)$ орбита представления изотропии риманова полупростого симметрического пространства, отвечающая внутренней точке λ камеры C. Пусть на картановском подпространстве $\mathfrak{A}$ выбрано W?инвариантное евклидово скалярное произведение, продолженное до инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{P}$. Тогда критический радиус орбиты $O(\lambda) \subset \mathfrak{P}$ равен евклидову расстоянию от λ до ближайшей к ней грани коразмерности 1 камеры C.

В отличие от орбит общего положения, в случае сингулярных орбит $O(\lambda)$ точка λ лежит в пересечении некоторых граней коразмерности 1 камеры C. Вычисление критического радиуса $R(O(\lambda))$ уже требует рассмотрения разбиения картановского пространства $\mathfrak{A}$, которое реализуется нормальным веером выпуклого многогранника $\mathfrak{P}(\lambda) = convW(\lambda)$, являющегося выпуклой оболочкой орбиты $W(\lambda)$. Точка λ в этой ситуации будет внутренней точкой нормального конуса N_λ нормального веера многогранника $\mathfrak{P}(\lambda)$.

Теорема B. Пусть $O(\lambda)$ — сингулярная орбита представления изотропии риманова полупростого симметрического пространства и N_λ нормальный конус в вершине λ выпуклого многогранника $convW(\lambda)$. Тогда критический радиус $R(O(\lambda))$ орбиты $O(\lambda)$ равен евклидову расстоянию от точки λ до ближайшей к ней грани коразмерности 1 конуса N_λ.

Смежной задаче о вычислении фокальных радиусов орбит линейных неприводимых представлений простых компактных групп Ли посвящена работа [3].

Список литературы

[1] H. Federer. Curvatures measures. Amer. Math. Soc., v. **93** (1959), 418–491.

[2] С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М.: Факториал Пресс, 2005.

[3] Gorodski C., Saturino A. Focal radii of orbits. Linear and Multilinear Algebra, v. **67** (2019), issue 10, 2082–2103.

Разрешимые супералгебры Лейбница с нильрадикалом с характеристической последовательностью $(n \mid m-1, 1)$ нильиндекса $n+m$

Х.А. Муратова

Международный университет Кимё в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

muratovakhosiyat12@gmail.com

В этой работе представлена классификация разрешимых супералгебр Лейбница, нильрадикал которых является супералгеброй с нильиндексом $n+m$ и характеристической последовательностью $(n \mid m-1, 1)$. Следует отметить, что нильпотентная супералгебра Лейбница с нильиндексом $n+m$ может иметь характеристическую последовательности вида $(n \mid m)$, $(n-1, 1 \mid m)$ или $(n \mid m-1, 1)$. Поскольку разрешимые супералгебры Лейбница, характеристические последовательности которых $(n \mid m)$ и $(n-1, 1 \mid m)$ уже были классифицированы [3, 4], эта работа завершает классификацию разрешимых супералгебр Лейбница, нильрадикалом которых является супералгеброй с нильиндексом $n+m$.

Определение. $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $L = L_0 \oplus L_1$ называется супералгеброй Лейбница, если оно снабжено произведением $[-,-]$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - (-1)^{\alpha\beta}[[x,z],y] \text{ – супертождество Лейбница}$$

для любых $x \in L, y \in L_\alpha, z \in L_\beta$.

Нильпотентные супералгебры Лейбница с характеристической последовательностью $(n \mid m-1, 1)$ и нильиндексом $n+m$ возможны только при $m = n+1$ или $m = n+2$.

Теорема 1. [1] Пусть L — супералгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n \mid m-1, 1)$ и нильиндексом $n+m$. Тогда в случае $m =$

$n+1$ существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}$ алгебры L, в котором произведения имеют следующий вид:

$$L(\beta_{[\frac{n+4}{2}]}, \beta_{[\frac{n+4}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1}, \gamma): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \le j \le n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \le j \le n, \\ [y_{n+1}, y_{n+1}] = \gamma e_n, & \\ [e_i, y_{n+1}] = \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n+1-i} \beta_k y_{k-1+i}, & 1 \le i \le [\frac{n-1}{2}], \\ [y_1, y_{n+1}] = -2 \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n} \beta_k e_{k-1} + \beta_{n+1} e_n, & \\ [y_j, y_{n+1}] = -2 \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n+2-j} \beta_k e_{k-2+j}, & 2 \le j \le [\frac{n+1}{2}]. \end{cases}$$

Теорема 2. [1] Пусть L — супералгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n \mid m-1, 1)$ и нильиндексом $n+m$. Тогда в случае $m = n+2$ существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n, y_1, y_2, \dots, y_{n+2}\}$ супералгебры L, в котором она изоморфна следующей супералгебре:

$$L(\beta_{[\frac{n+5}{2}]}, \beta_{[\frac{n+5}{2}]+1}, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}).$$

Максимальный нильпотентный идеал N супералгебры Лейбница L такой, что $[L, L] \subset N$, называется нильрадикалом. Аналогично случаю алгебр Ли, разрешимые супералгебры Лейбница могут быть описаны с помощью нильнезависимых четных дифференцирований нильрадикала (см. [2]).

Если L — не нильпотентная разрешимая супералгебра Лейбница с нильрадикалом из класса $L(\beta_{[\frac{n+4}{2}]}, \beta_{[\frac{n+4}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1}, \gamma)$, тогда:

$$(\beta_{[\frac{n+4}{2}]}, \beta_{[\frac{n+4}{2}]+1}, \dots, \beta_{n+1}, \gamma) = \begin{cases} (0, \dots, 0, 0), & \\ (0, \dots, \beta_t, \dots, 0, 0), & \beta_t \neq 0, \quad [\frac{n+4}{2}] \le t \le n+1, \\ (\beta_{\frac{n+3}{2}}, 0, \dots, 0, \gamma), & \gamma \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ — разрешимая супералгебра Лейбница, нильрадикал которой изоморфен супералгебре $L(0, 0, \dots, 0, 0)$. Тогда L изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных супералгебр:

$$MS_1: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \le j \le n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \le j \le n, \\ [e_i, x_1] = 2ie_i, & 1 \le i \le n, \\ [y_i, x_1] = (2i-1) y_i, & 1 \le i \le n, \\ [y_{n+1}, x_2] = y_{n+1}, & \\ [x_1, e_1] = -2e_1, & \\ [x_1, y_1] = -y_1, & \end{cases} \qquad MS_2: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \le j \le n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \le j \le n, \\ [e_i, x_1] = 2ie_i, & 1 \le i \le n, \\ [y_i, x_1] = (2i-1) y_i, & 1 \le i \le n, \\ [y_{n+1}, x_2] = y_{n+1}, & \\ [x_1, e_1] = -2e_1, & \\ [x_1, y_1] = -y_1, & \\ [x_2, y_{n+1}] = -y_{n+1}, & \end{cases}$$

$$S_1^{\alpha}: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-1,\\ [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,y_1]=e_j, & 1\le j\le n,\\ [e_i,x]=2e_i, & 1\le i\le n,\\ [y_1,x]=y_1, & \\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, & 2\le i\le n,\\ [y_{n+1},x]=\alpha y_{n+1}, & \\ [x,e_1]=-2e_1, & \\ [x,y_1]=-y_1, & \\ [x,y_{n+1}]=-\alpha y_{n+1}, & \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-1,\\ [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,y_1]=e_j, & 1\le j\le n,\\ [e_i,x]=2e_i, & 1\le i\le n,\\ [y_1,x]=y_1+y_{n+1}, & \\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, & 2\le i\le n,\\ [y_{n+1},x]=y_{n+1}, & \\ [x,e_1]=-2e_1, & \\ [x,y_1]=-y_1-y_{n+1}, & \\ [x,y_{n+1}]=-y_{n+1}, & \end{cases}$$

$$S_3^{\alpha}: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-1,\\ [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,y_1]=e_j, & 1\le j\le n,\\ [e_i,x]=2e_i, & 1\le i\le n,\\ [y_1,x]=y_1, & \\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, & 2\le i\le n,\\ [y_{n+1},x]=\alpha y_{n+1}, & \\ [x,e_1]=-2e_1, & \\ [x,y_1]=-y_1, & \end{cases} \qquad S_4^{a_2,\dots,a_n,\gamma}: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-1,\\ [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,y_1]=e_j, & 1\le j\le n,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{k=2}^{n-i+1}a_ke_{i+k-1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_i,x]=\sum\limits_{k=2}^{n-i+1}a_ky_{i+k-1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_{n+1},x]=y_{n+1}, & [x,x]=\gamma e_n, \end{cases}$$

$$S_5^{a_2,\dots,a_n,\gamma}: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-1,\\ [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_j,y_1]=e_j, & 1\le j\le n,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{k=2}^{n-i+1}a_ke_{i+k-1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_i,x]=\sum\limits_{k=2}^{n-i+1}a_ky_{i+k-1}, & 1\le i\le n-1,\\ [y_{n+1},x]=y_{n+1}, & [x,y_{n+1}]=-y_{n+1},\\ [x,x]=\gamma e_n. & \end{cases}$$

Теорема 4. Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ — разрешимая супералгебра Лейбница, нильрадикал которой изоморфен не разложимой супералгебре из класса $L(\beta_{[\frac{n+4}{2}]}, \beta_{[\frac{n+4}{2}]+1}, \dots, \beta_n, \gamma, \beta)$. Тогда L изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных супералгебр:

$$S(t), ([\frac{n+4}{2}] \leq t \leq n+1): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [e_i, y_{n+1}] = y_{t-i+1}, & 1 \leq i \leq [\frac{n-1}{2}], \\ [y_1, y_{n+1}] = -2e_{t-1}, & \\ [y_i, y_{n+1}] = -2e_{t-2+i}, & 2 \leq j \leq [\frac{n+1}{2}], \\ [e_i, x] = 2ie_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_{n+1}, x] = (2t-3)y_{n+1}, & \\ [x, y_1] = -y_1, & \\ [x, e_1] = -2e_1, & \\ [x, y_{n+1}] = -2y_{t-1} - (2t-3)y_{n+1}. & \end{cases}$$

$$S(\gamma): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, y_1] = e_j, & 1 \leq j \leq n, \\ [y_{n+1}, y_{n+1}] = \gamma e_n, & \\ [e_i, y_{n+1}] = \beta_{\frac{n+3}{2}} y_{i+\frac{n+1}{2}}, & 1 \leq i \leq [\frac{n-1}{2}], \\ [y_i, y_{n+1}] = -2\beta_{\frac{n+3}{2}} e_{i+\frac{n-1}{2}}, & 1 \leq i \leq [\frac{n+1}{2}], \\ [e_i, x] = 2ie_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, & 1 \leq i \leq n, \\ [y_{n+1}, x] = ny_{n+1}, & \\ [x, e_1] = -2e_1, & \\ [x, y_1] = -y_1, & \\ [x, y_{n+1}] = -\beta_{\frac{n+3}{2}} y_{\frac{n+1}{2}} - ny_{n+1}. & \end{cases}$$

Список литературы

[1] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, B.A. Omirov. Classification of some nilpotent class of leibniz superalgebras. Acta Mathematica Sinica, English Series, **26** (2010), no. 5, 799–816.

[2] L.M. Camacho, R.M. Navarro, B.A. Omirov. On solvable Lie and Leibniz superalgebras with maximal codimension of nilradical. Journal of Algebra, **591** (2022), 500–522.

[3] A.Kh. Khudoyberdiyev, M. Ladra, Kh.A. Muratova. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is a Lie superalgebra of maximal nilindex. Bulletin of National University of Uzbekistan, **2** (2019), no. 1, 52–68.

[4] A.Kh. Khudoyberdiyev, Kh.A. Muratova. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical has the characteristic sequence $(n-1, 1|m)$ and nilindex $n+m$. Communications in Mathematics, **32** (2024), no 2.

Аналоги инварианта Макар-Лиманова и инварианта Дерксена

А.В. Никитина
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
avnikitina@hse.ru

В качестве основного поля будем рассматривать алгебраически замкнутое поле k характеристики ноль. Пусть $B \supset k$ — область целостности. *Дифференцированием* на B называется функция δ: $B \to B$ такая, что $\forall a, b \in B$: $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$, $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. Дифференцирование δ *локально-нильпотентное*, если $\forall b \in B\ \exists n \in \mathbb{N} : D^n(\delta) = 0$. Обозначим через $\mathrm{LND}\,(X)$ множество всех локально-нильпотентных дифференцирований на X.

Инвариант Макар-Лиманова многообразия X — это пересечение ядер всех ЛНД на X.

$$\mathrm{ML}\,(X) = \bigcap_{\delta \in \mathrm{LND}} \mathrm{Ker}\,\delta.$$

Инвариант Дерксена — подалгебра в $k[X]$, порождённая ядрами всех ненулевых ЛНД на X.

$$\mathrm{HD}\,(X) = k[\mathrm{Ker}\,\delta \mid \delta \in \mathrm{LND}\,(X) \setminus \{0\}].$$

Функция $s \in k[X]$ называется *слайсом* ЛНД δ, если $\delta(s) = 1$. Далее предлагается рассматривать модификации ML^* и HD^* инвариантов ML и HD для ЛНД со слайсами. Обозначим $\mathrm{LND}^*(X)$ множество всех ЛНД со слайсами на X.

В работе [1] было доказано, что для аффинных неприводимых многообразий X с ненулевым множеством LND^* инварианты $\mathrm{ML}\,(X)$ и $\mathrm{ML}^*(X)$ совпадают. Также в работе [2] получены результаты для HD^*.

В докладе будет рассматриваться некоторое обобщение инварианта Макар-Лиманова:

$$\mathrm{ML}\,(X) = \bigcap_{\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{LND}} (\mathrm{Ker}\,\delta_1 \cap \mathrm{Ker}\,\delta_2),$$

которое строится для всевозможных пар коммутирующих δ_1 и δ_2.

Будет показан критерий существования таких коммутирующих ЛНД в терминах конусов для торических многообразий X, а также доказан аналог теоремы [1] в этом случае.

Список литературы

[1] S. Gaifullin, A. Shafarevich. Modified Makar-Limanov and Derksen invariants. arXiv: `math.AG/2212.05899` (2022).

[2] I. Boldyrev, S. Gaifullin, A. Shafarevich. Modified Derksen invariant. arXiv: `math.AG/2312.08421` (2023).

Локальные переклейки семейств кривых и расслоений и относительная теорема Римана-Роха

Д.В. Осипов

МЦМУ МИАН, НИУ ВШЭ, НИТУ МИСИС, Москва, Россия

d_osipov@mi – ras.ru

Пусть A — произвольное коммутативное кольцо. Пусть $A((t)) = A[[t]][t^{-1}]$ — кольцо рядов Лорана над кольцом A. Кольцо $A((t))$ становится топологическим кольцом, если за базу окрестностей нуля взять A-подмодули $t^n A[[t]]$.

Пусть $A((t))^*$ — группа обратимых элементов кольца $A((t))$, и пусть $\mathcal{A}ut^{r,c}(\mathcal{L})(A)$ — группа непрерывных A-автоморфизмов A-алгебры $A((t))$. Ясно, что вторая группа естественно действует на кольце $A((t))$, и, следовательно, на группе $A((t))^*$. Поэтому возникает естественная некоммутативная группа

$$\mathcal{G}(A) = A((t))^* \rtimes \mathcal{A}ut^{\mathrm{c,alg}}(\mathcal{L})\,.$$

Назовём квинтетом над коммутативным кольцом A набор геометрических данных, состоящий из семейства проективных кривых над базой $\operatorname{Spec} A$, сечения этого семейства, такого, что семейство гладко в окрестности этого сечения, обратимого пучка на семействе, относительного формального локального параметра для сечения, формальной тривиализации пучка в сечении.

В [1] было показано, что элементы группы $\mathcal{G}(A)$ «переклеивают» в квинтете (над кольцом A) семейство кривых и обратимый пучок в проколотой формальной окрестности сечения семейства кривых.

Более точно, функтор $A \mapsto \mathcal{G}(A)$ представим групповой инд-схемой $\mathcal{G}$. Групповая инд-схема $\mathcal{G}$ действует на стеке модулей $\mathcal{M}_{\mathrm{pr}}$ всех квинтетов (где стек возникает, если варьировать кольцо A).

На стеке модулей квинтетов $\mathcal{M}_{\mathrm{pr}}$ есть естественное детерминатное линейное расслоение. Для каждого квинтета с семейством кривых $\pi : C \to \operatorname{Spec} A$ и обратимым пучком $\mathcal{F}$ на C это детерминантное расслоение есть обратимый пучок $\det R\pi_* \mathcal{F}$ на $\operatorname{Spec} A$.

Групповая инд-схема $\mathcal{G}$ не действует на детерминантном линейном расслоении на $\mathcal{M}_{\mathrm{pr}}$, но действует естественным образом её каноническое центральное расширение при помощи мультипликативной группы $\mathbb{G}_m$.

В работах автора [1]-[2] был вычислен класс во второй группе когомологий этого канонического центрального расширения после расширения скаляров до поля $\mathbb{Q}$. Этот класс выписывается через линейную комбинацию выражений от $\cup$-произведений некоторых явных 1-коциклов на $\mathcal{G}$. Возникает локальная теорема Делиня-Римана-Роха для линейных расслоений на семействах проективных кривых.

Об этих результатах я расскажу в своём докладе.

Список литературы

[1] Осипов Д.В. Формальный коцикл Ботта-Тёрстона и часть формальной теоремы Римана-Роха. Труды МИАН, т. **320** (2023), 243–277, см. также arXiv: `math.AG/2211.15932v4`.

[2] Осипов Д.В. Локальный аналог изоморфизма Делиня-Римана-Роха для линейных расслоений в относительной размерности 1. Изв. РАН. Сер. матем., т. **88** (2024), вып. 5 (в печати), см. также arXiv: `math.AG/2308.06049v2`.

Представления колчанов и их U-инварианты

А.Н. Панов

Самарский университет, Самара, Россия

apanov@list.ru

Пусть $Q = (V, A)$ — колчан, где V множество вершин и A множество ребер. Каждое ребро $\alpha \in A$ имеет начало (source) $s(\alpha)$ и вершину (target) $t(\alpha)$. Пусть K поле. Представление колчана Q — это набор линейных пространств $\{W_v,\ v \in V\}$, определенных над полем K, и соответствие, которое каждому ребру α сопоставляет линейное отображение $W_{s(\alpha)} \to W_{t(\alpha)}$. Каждое представление определяет вектор размерности $n_Q = (n_v)$, где $n_v = \dim W_v$.

Отождествим каждое линейное пространство W_v с координатным пространством K^{n_v}. Пространство линейных отображений $\mathcal{H}_\alpha$ из $W_{s(\alpha)}$ в $W_{t(\alpha)}$ отождествим с пространство матриц $\mathrm{Mat}(n_{t(\alpha)}, n_{s(\alpha)}, K)$ размера $n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}$. Для каждой вершины $v \in V$ определена группа $\mathrm{GL}_v = \mathrm{GL}(n_v)$ с элементами в поле K и ее унитреугольная подгруппа $U_v = \mathrm{UT}(n_v)$, состоящая из всех верхнетреугольных $(n_v \times n_v)$-матриц с единицами на диагонали. Рассмотрим прямое произведение $G = \mathrm{GL}_Q = \prod_{v\in V} \mathrm{GL}_v$, ее подгруппу $U = U_Q = \prod_{v\in V} U_v$ и линейное пространство

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q = \oplus_{\alpha\in A}\mathcal{H}_\alpha.$$

Группа G действует в пространстве $\mathcal{H}$ по формуле

$$g.h = (g_{t(\alpha)}X_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1})_{\alpha\in A}, \quad g = (g_v) \in G, \quad h = (X_\alpha) \in \mathcal{H}.$$

Действие G на $\mathcal{H}$ определяет представление ρ_g группы G в пространстве регулярных функций $K[\mathcal{H}]$ по формуле

$$\rho_g f(h) = f(g^{-1}.h).$$

Ставится задача построения системы свободных образующих элементов в поле U-инвариантов $K(\mathcal{H})^U$. Развивая методы построения U-инвариантов [1, 2, 3], в докладе будет предложено два подхода к решению этой задачи.
Подход 1. Частный случай равноразмерного представления [4], когда $n_v = n$, для любого $v \in V$. В этом случае конструкция сечения и системы свободных образующих зависит от выбора отображения $\psi : V \to A$, сопоставляющего каждой вершине в $v \in V$ инцидентное ему ребро $\psi(v) \in A$.
Подход 2. Общий случай. В этом случае конструкция сечения и системы свободных образующих зависит от выбора отображения, сопоставляющего каждой вершине $v \in V$ линейный порядок на множестве все ребер A_v, инцидентных v.

Список литературы

[1] Вяткина К.А., Панов А.Н. Поля U-инвариантов присоединенного представления группы $\mathrm{GL}(n, K)$. Матем. заметки, т. **93** (2013), вып. 1, 144–147.

[2] Panov A.N. Fields of invariants for unipotent radicals of parabolic subgroups. Linear and Multilinear algebra, vol. **71** (2023), no.15, 2499–2512.

[3] Panov A.N. Fields of U-invariants of matrix tuples. Electronic Journal of Linear Algebra, vol. **39** (2023), 117–123.

[4] Panov A.N. Equidimensional quiver representations and their U-invariants. arXiv: `math.RT/2405.07254` (2024).

Подгруппы автоморфизмов, состоящие из унипотентных элементов

А.Ю. Перепечко
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
aperepechko@hse.ru

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Подгруппа $U \subset \mathrm{Aut}(X)$ называется *унипотентной*, если любой её элемент можно выразить как экспоненту некоторого локально нильпотентного дифференцирования на $\mathbb{K}[X]$. Подгруппа $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ называется *исчерпаемой*, или *матрёшкой*, если она является объединением возрастающей цепочки алгебраических подгрупп. В [2] поставлен вопрос о замкнутости связных исчерпаемых подгрупп относительно инд-топологии в $\mathrm{Aut}(X)$. Опираясь на описание максимальных исчерпаемых унипотентных подгрупп в $\mathrm{Aut}(X)$, мы ответили на этот вопрос положительно [3].

Мы разберём более общую ситуацию произвольной унипотентной подгруппы $U \subset \mathrm{Aut}(X)$, необязательно исчерпаемой. Мы укажем некоторые условия, при которых U содержится в исчерпаемой унипотентной подгруппе.

Данные результаты имеют значение для вопроса об альтернативе Титса в $\mathrm{Aut}(X)$ [1], для описания алгебраически порождённых подгрупп в $\mathrm{Aut}(X)$ и для изучения групп автоморфизмов гибких многообразий.

Доклад основан на работе автора [3]. Работа поддержана грантом РНФ №22-41-02019.

Список литературы

[1] A. Arzhantsev, M. Zaidenberg. Tits-type alternative for certain groups acting on algebraic surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. **151** (2023) no. 7, 2813–2829.

[2] H. Kraft, M. Zaidenberg. Algebraically generated groups and their Lie algebras. J. London Math. Soc. **109**:e12866 (2024), no. 2, 1–39.

[3] A. Perepechko. Structure of connected nested automorphism groups. arXiv: `math.AG/2312.08359v2` (2024).

Конфигурации подрешёток

В.П. Покидкин
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
pokidkin.vladislav@gmail.com

Произвольный набор подрешёток наделён рядом дискретных структур. Важной числовой характеристикой набора является дефект. Набор является линейно независимыми (неприводимым), если не содержит собственного поднабора с отрицательным (неположительным) дефектом. Линейно независимый набор нулевого дефекта называется БК-набором. Мы покажем, что множество линейно независимых наборов образует геометрическую решётку и является матроидом. Также мы докажем, что множество БК-поднаборов БК-набора образует произвольную дистрибутивную решётку и является антиматроидом. Мотивация к изучению конфигураций подрешёток исходит из предполагаемого описания дискриминантов полиномиальных систем. Доклад основан на незавершённой работе.

Алгебра Ли конформных векторных полей

Э.О. Ражабов
Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Ташкент, Узбекистан
rajabov_2019@bk.ru

Пусть (M, g) риманова многообразие с метрикой g и X гладкое векторное поле на M.

Определение 1 [2, 4] Векторное поле X конформно, если $L_X g = \sigma g$, где σ- функция на (M, g), $L_X g = \sigma g$ обозначает приводную Ли от метрики g относительна X, где σ есть функция на M.

Пусть D- семейство гладких векторных полей, определенных на многообразии M. Семейство D может содержать конечное или бесконечное число гладких векторных полей.

Определение 2 [3, 1] Для каждой точки $x \in M$ множество векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ порождает некоторое подпространство $P(x)$ касательного пространства $T_x M$. Разумеется, размерности подпространств $P(x)$ может меняться от точки к точке. Это распределение обозначим через P_D.

Определение 3 [3, 1] Распределение P называется вполне интегрируемым, если для каждой точки $x \in M$ существуют подмногообразие N_x многообразия M такое, что $T_y N_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$. Подмногообразие N_x называется интегральным подмногообразием распределения P. Для векторного поля X будем писать $X \in P$, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$.

Распределение P называется инволютивным, если из $X, Y \in P$ вытекает $[X, Y] \in P$, где $[X, Y]$ скобка Ли векторных полей X,Y.

Теорема(Фробениус) Для того чтобы распределение P на многообразии M было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.

Теорема(R.Hermann) $D = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$- семейство векторных полей на многообразии M. Семейство D порождает вполне интегрируемое распределение тогда и только тогда, когда оно инволютивно.

Пусть $A(D)$- наименьшая алгебра Ли, содержащая множества D. Полагая

$$A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\},$$

получим инволютивное распределение $P_D : x \to A_x(D)$.

Если размерность $\dim A_x(D)$ постоянно независима от x, то, по теореме Фробениуса, распределение $P_D : x \to A_x(D)$ вполне интегрируемо.

Если размерность $\dim A_x(D)$ зависит от x, то, распределение $P_D : x \to A_x(D)$ не обязательно должно быть вполне интегрируемым.

Если множество D состоит из конформных векторных полей, то распределение

$$P_D : x \to A_x(D)$$

вполне интегрируемо.

Теперь через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли в $\mathrm{Conf}(M)$ множество всех конформных векторных полей на M, содержащую множество D. Поскольку алгебра $\mathrm{Conf}(M)$ конечномерна, то следует, что существует конечное число векторных полей $X_1, X_2, ..., X_m$ в $A(D)$ таких, что векторы $X_1(x), X_2(x), ..., X_m(x)$ образуют базис подпространства $A_x(D)$ для каждого $x \in M$.

Поэтому для случая семейства D конформных векторных полей из теоремы Херманна вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $n \geq 3$, $D-$семейство конформных векторных полей. Тогда каждая орбита D является интегральным многообразием вполне интегрируемого распределения $P_D : x \to A_x(D)$.

Следующая теорема показывает, что каждая точка на орбите $L(x_0)$ может быть достигнута из x_0 с помощью конечного числа «переключений» с использованием векторных полей $X_1, X_2, ..., X_m$ в определенном порядке.

Теорема 2. Множество точек вида

$$y = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}(...(X_1^{t_1}(x_0)...)))$$

где $(t_1, t_2, ..., t_m) \in V$ совпадает с орбитой $L(x_0)$.

Теорема 3. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, множество D состоит из конформных векторных полей и $\mathrm{dim} A_x(D) = k$ для любого $x \in M$, где $0 < k \leq n$. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.

Пример 1. Рассмотрим множество полей D, содержащих следующие векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

и

$$Y = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x_1, x_2. Эти векторные поля порождают гладкое распределение: $(x_1, x_2) \to P(x_1, x_2)$, где $P(x_1, x_2)$ — подпространство, натянутое на набор векторов $\{X(x_1, x_2) : X \in D\}$. Мы имеем $dimP(x, y) = 2$ для каждой точки (x, y), отличной от точек $(0, x_2)$, где $dimP(x, y) = 1$. Это гладкое распределение конечно порождено, но D не находится в инволюции. В этом случае наименьшая подалгебра Ли $A(D)$ алгебры Ли $\mathrm{Conf}(M)$, содержащая множество D, является трехмерной. Векторные поля X, Y и $Z = \frac{\partial}{\partial x_2}$ являются базисными полями алгебры $A(D)$. Мы можем проверить, что $\mathrm{dim} A_x(D) = 2$ для каждой точки $x \in \mathbb{R}^2$. Распределение $x \to A_x(D)$ вполне интегрируемо по теореме Херманна, каждая орбита D совпадает с плоскостью.

Список литературы

[1] A.Y. Narmanov, E.O. Rajabov. On the geometry of orbits of conformal vector fields. Journal of Geometry and Symmetry in Physics **51** (2019), 29–39.

[2] Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. т. **1**, 284 с.

[3] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989, 644 с.

[4] Deshmukh Sh. Geometry of Conformal Vector Fields. Arab J. Math. Sci. **23** (2017), 44–73.

Инварианты на проективно-перестановочных классах эквивалентности фреймов Парсеваля

В.В. Севостьянова[1]
Самарский университет
berlua@mail.ru

Пусть $\mathbb{H}^d$ — евклидово (унитарное) пространство размерности d над вещественным (соотв. комплексным) полем $\mathbb{F}$. Конечным фреймом в $\mathbb{H}^d$ называется набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $n \geqslant d$, для которого $\operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$, другими словами, конечный фрейм — это обобщение понятия базиса без свойства минимальности. Дадим другое определение.

Определение 1 Набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в пространстве $\mathbb{H}^d$ будем называть фреймом, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^d$,

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Данные два определения эквивалентны, [1].

Фреймы находят широкое применение в анализе сигналов, обработке изображений, кодировании и восстановлении данных, квантовой теории информации и теории сжатых измерений.

В анализе традиционно выделяют ряд связанных с фреймами операторов. Оператором *синтеза* фрейма $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{H}^d$ называется $\mathbf{\Phi} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{H}^d$, $\mathbf{\Phi x} := \sum\limits_{j=1}^n \mathbf{x}(j)\varphi_j$, где $\mathbf{x}(j)$ — j-я координата $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$. Матрица оператора синтеза $\mathbf{\Phi}$ — $d \times n$-матрица, столбцами которой являются векторы фрейма. Оператором *анализа* называется оператор $\mathbf{\Phi}^* : \mathbb{H}^d \to \mathbb{F}^n$, для которого $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{y})(j) = \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle$, $j = 1, \ldots, n$. Подробнее о фреймах см. [2].

Если $a = b$ в определении 1, то имеет место равенство $\mathbf{\Phi\Phi}^* = a\mathbf{I}$, и такие фреймы называются *a-жесткими*. 1-жесткие фреймы будем называть *фреймами Парсеваля*.

Введем на множестве фреймов различные классы эквивалентности. Например, в вещественном случае естественно отождествить те фреймы, которые совмещаются друг с другом в результате поворота.

Определение 2 Фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$, такое, что $\psi_i = \mathbf{U}\varphi_i$, $\forall i$.

---

[1]Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1456).

Хорошо известно, что матрицы Грама двух систем векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ совпадают тогда и только тогда, когда эти системы унитарно эквивалентны. Тогда унитарно эквивалентные фреймы однозначно определяются значениями скалярных произведений $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle$, $i \leqslant j$.

Заметим, что класс унитарно эквивалентных фреймов зависит от порядка, в котором расположены векторы фрейма.

Определение 3 Будем говорить, что два фрейма Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ *перестановочно унитарно эквивалентны*, если существует перестановка $\sigma \in S_n$, для которой фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ унитарно эквивалентны.

В работе [3] изучены инварианты на перестановочно унитарных классах эквивалентности фреймов Парсеваля, в частности, найдены инварианты, разделяющие такие классы эквивалентности в общем положении.

Определение 4 Фреймы $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *проективно унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$ и числа $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $|\alpha_i| = 1$, для которых $\psi_i = \alpha_i\,\mathbf{U}\varphi_i$.

Заметим, что из унитарной эквивалентности не следует проективно унитарная эквивалентность. Инвариантами на проективно унитарных классах эквивалентности являются так называемые m-произведения, т.е. произведения вида

$$\Delta(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},\ldots,\varphi_{i_m}) = \langle\varphi_{i_1},\varphi_{i_2}\rangle\langle\varphi_{i_2},\varphi_{i_3}\rangle\ldots\langle\varphi_{i_m},\varphi_{i_1}\rangle.$$

В работе [4] показано, что фреймы в $\mathbb{H}^d$ — проективно унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают все их m-произведения.

Определение 5 Фреймы Парсеваля $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *проективно-перестановочно унитарно эквивалентными*, если существуют унитарное $\mathbf{U}$, $\sigma \in S_n$ и числа $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $|\alpha_i| = 1$, для которых $\psi_i = \alpha_i\,\mathbf{U}\varphi_{\sigma(i)}$.

В докладе пойдет речь об инвариантах на проективно-перестановочно унитарных классах эквивалентности на фреймах Парсеваля. В частности, будут показаны регулярные функции, постоянные на таких классах, которые в общем положении разделяют проективно-перестановочно унитарные классы эквивалентности фреймов Парсеваля.

Список литературы

[1] O. Christensen. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston, Birkhäuser, 2002.

[2] S.F.D. Waldron. An Introduction to Finite Tight Frames. Boston, Birkhäuser, 2018.

[3] Севостьянова В.В. Инварианты на классах эквивалентности жестких фреймов. Математика и теоретические компьютерные науки, т. **1** (2023), вып. 3, 46–58.

[4] Abdollahi A., Najafi H. Frame Graphs.// Linear and Multilinear Algebra, v. **66** (2018), iss. 6, 2018, 1229–1243.

О характерах неприводимых представлений супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m,n)$

А.Н. Сергеев
Саратовский государственный университет, Саратов, Россия
`sergeevan@info.sgu.ru`

Доклад основан на работе автора [1].

В докладе приводится новая формула для характеров конечномерных неприводимых представлений для супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m,n)$. Мы следуем схеме доказательства Су и Жанга [2] со следующими нововведениями. Во первых дается новое доказательство и новая формулировка гипотезы Ван Дер Югта, Ходжеса, Кинга и Терри-Мег. Далее используются весовые диаграммы и кэп диаграммы введенные Дж. Брандоном и К. Строппел. Затем определяется полиэдр связанный с весовой диаграммой. Характер неприводимого представления интерпретируется как производящая функция целых точек содержащихся в полиэдре. Для вычисления этой функции используется теорема Бриона.

Список литературы

[1] A.N. Sergeev. Combinatorics of irreducible characters for Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m,n)$. arXiv: `math.RT/2401.12534` (2024).

[2] Yucai Su, R.B. Zhang. Character and dimension formulae for general linear superalgebra. Adv. in Math. **211** (2007).

Короткие SL_2-структуры на лиевских модулях

Р.О. Стасенко
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
theromestasenko@yandex.ru

Пусть S — произвольная редуктивная алгебраическая группа. Назовём S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ гомоморфизм $\Phi\colon S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. S-структуры ранее изучались различными авторами, в том числе Э.Б. Винбергом.

В докладе рассматриваются SL_2-структуры. SL_2-структуру назовём короткой, если представление Φ группы SL_2 разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3. Если рассматривать неприводимые представления размерностей только 1 и 3, то получится известная конструкция Титса-Кантора-Кехера, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли определённого вида.

Аналогично теореме Титса-Кантора-Кехера в случае коротких SL_2-структур можно установить взаимно-однозначное соответствие между простыми алгебрами Ли с такой структурой и так называемыми простыми симплектическими структурами Ли-Йордана.

Пусть на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана SL_2-структура и отображение $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(U)$ — линейное представление. Гомоморфизм $\Psi\colon S \to GL(U)$ называется SL_2-структурой на лиевском $\mathfrak{g}$-модуле U, если

$$\Psi(s)\rho(\xi)u = \rho(\Psi(s)\xi)\Psi(s)u, \quad \forall s \in S,\ \xi \in \mathfrak{g},\ u \in U.$$

Подобная конструкция имеет интересные приложения к теории представлений йордановых алгебр, о которых будет рассказано в докладе. Также в докладе будет представлена полная классификация неприводимых коротких $\mathfrak{g}$-модулей для простых алгебр Ли.

Группоид Вейля и его действие на аффинном суперянгиане

В.А. Стукопин
НИУ МФТИ, Москва, ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия
stukopin@mail.ru

Доклад основан на совместных работах автора с В.Д. Волковым [1], [2] и поддержан грантом РНФ 23-21-00282.

Мы определяем действие группоида Вейля на аффинном суперянгиане $Y_\hbar(\hat{sl}(m|n,\Pi))$ специальной линейной супералгебры Каца-Муди $\hat{sl}(m|n,\Pi)$, заданной произвольной системой простых корней П. Аффинные суперянгианы такого вида образуют категорию. Морфизмы в этой категории задаются действием элементов группоида Вейля. Все суперянгианы из этой категории изоморфны как ассоциативные супералгебры, но морфизмы определяемые действием элементов группоида Вейля не сохраняют копроизведение. Мы описываем копроизведения на суперянгианах и их отношение с действием группоида Вейля.

Список литературы

[1] В.Д. Волков, В.А. Стукопин. Группоид Вейля и его действие на аффинном суперянгиане. Записки ПОМИ, «Квантовая теория поля и статистическая физика», т. **30** (2024), принято в печать.

[2] Волков В.Д., Стукопин В.А. Аффинный суперянгиан и квантовы группоид Вейля. ТМФ, т. **216** (2023), вып. 3, 476–489, см. также arXiv: `math.QA/2306.14598v2`.

Кольца когомологий гиперболических многообразий, склеенных по раскраскам прямоугольных многогранников

Д.А. Цыганков

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

`Dimamadrid@yandex.ru`

Пусть P прямоугольный многогранник конечного объёма в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$. Пусть P имеет m гиперграней $F_1, \ldots, F_m$. По многограннику P можно построить прямоугольную группу Коксетера:

$$G(P) = \left\langle g_1, \ldots, g_m | g_i^2 = 1, g_i g_j = g_j g_i \text{ при } F_i \cap F_j \neq \varnothing \right\rangle$$

Образующие группы $G(P)$ соответствуют отражениям относительно гиперграней. Группа $G(P)$ действует отражениями на $\mathbb{L}^n$. Факторпространство $\mathbb{L}^n / G(P)$ представляет собой исходный многогранник P.

Однако такое действие не является свободным. Имеется способ (из [1]) найти подгруппы индекса 2^k в $G(P)$ такие, что они действуют свободно на $\mathbb{L}^n$.

Пусть $\phi^{(k)} : G(P) \to \mathbb{Z}_2^k$ эпиморфизм, ядро которого не имеет элементов конечного порядка. Тогда $Ker\phi^{(k)}$ действует свободно на $\mathbb{L}^n$, а $\mathbb{L}^n / Ker\phi^{(k)}$ представляет собой гиперболическое многообразие, склеенное из 2^k копий многогранника P.

Я расскажу о методах вычисления (использованы результаты из [2], [3]) когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, которые применимы для некоторых многогранников P для минимально возможного k. В случае компактных многогранников P это соответствует вычислению когомологий малых накрытий над P.

Эпиморфизм $\phi^{(k)}$ раскладывается в композицию: $G(P) \xrightarrow{Ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$, где Λ $\mathbb{Z}_2-$линейное отображение, Ab гомоморфизм абеленизации. То есть, все многообразия вида $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ строятся по комбинаторным данным: многогранник P и матрица Λ. Введём обозначение $\lambda_i = \lambda_{i1}v_1 + \cdots + \lambda_{im}v_m$, где $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_2$ элементы матрицы Λ, а v_i стандартные образующие алгебры Стенли-Райснера $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]$, K_P — нерв-комплекс многогранника P.

Теорема. Пусть P прямоугольный многогранник конечного объёма в $\mathbb{L}^n$. Тогда:
1)Если все вершины P лежат на абсолюте $\partial\mathbb{L}^n$, то

$$H^*(\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n-1)};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]/(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$$

2)Если только одна вершина P лежит на абсолюте $\partial\mathbb{L}^n$, то

$$H^*(\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n)};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]/(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

Стоит заметить, что для других многогранников P такого простого описания кольца когомологий нет, хотя и существует дга модель [3].

Список литературы

[1] А.Ю. Веснин. Трёхмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля. Сиб. матем. журн. **28:5** (1987), 50–53.

[2] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J. **62:2** (1991), 417–451.

[3] M. Franz, The cohomology rings of real toric spaces and smooth real toric varieties. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **152** (2022), 720–737.

Многообразия с действием тора сложности 1, имеющие конечное число орбит группы автоморфизмов

Д.А. Чунаев

МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия

dchunaev@hse.ru

Доклад основан на совместной работе автора с С. Гайфуллиным [1].

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда *триномиальной гиперповерхностью* мы называем аффинную гиперповерхность в $\mathbb{A}^n$, заданную уравнением

$$T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} = 0,$$

где $l_i = (l_{i1}, \dots l_{in_i})$, все $l_{ij} > 0$ и $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}$, $n_0 \geqslant 0$ (если $n_0 = 0$, то первый моном считаем равным единице), $n_1, n_2 > 0$, $n_0 + n_1 + n_2 = n$.

Триномиальные гиперповерхности являются частным случаем более общего класса *триномиальных многообразий* — таких аффинных многообразий, которые можно задать системами уравнений $\{g_i = 0\}$, где g_i имеют следующий вид:

Тип 1.

$$g_i = T_i^{l_i} - T_{i+1}^{l_{i+1}} + a_i - a_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r-1,$$

где a_i — попарно различные числа.

Тип 2.

$$g_i = \det \begin{pmatrix} T_i^{l_i} & T_{i+1}^{l_{i+1}} & T_{i+2}^{l_{i+2}} \\ a_{0i} & a_{0i+1} & a_{0i+2} \\ a_{1i} & a_{1i+1} & a_{1i+2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant i \leqslant r-2,$$

где a_{ij} — такие числа, что у следующей матрицы столбцы попарно независимы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0r} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1r} \end{pmatrix}.$$

Триномиальные многообразия являются примерами многообразий, допускающих действие тора сложности 1, то есть эффективное действие тора размерности на 1 меньшей, чем у многообразия. Кроме того, как доказано в [2], у произвольного нормального рационального неприводимого многообразия без непостоянных обратимых функций, которое допускает действие тора сложности 1, тотальное координатное пространство, полученное с помощью конструкции Кокса, будет триномиальным многообразием.

Будем называть аффинное многообразие X *жестким*, если оно не допускает нетривиальных $\mathbb{G}_a$ - действий. Критерий жесткости для триномиальных многообразий был получен в [3]. В работе [4] было доказано, что у нежесткой триномиальной гиперповерхности X число орбит группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ конечно. При этом из [5] известно, что у жестких триномиальных гиперповерхностей число орбит группы автоморфизмов бесконечно.

В докладе мы рассмотрим результаты работы [1], обобщающие результаты работы [4]: будет рассказано про то, что у нежесткого триномиального многообразия конечное число орбит группы автоморфизмов, а также про обобщения этого результата, полученные с использованием конструкции Кокса, на некоторые многообразия с действием тора сложности 1.

Список литературы

[1] С.А. Гайфуллин, Д.А. Чунаев, Многообразия с действием тора сложности 1, имеющие конечное число орбит группы автоморфизмов. arXiv: `math.AG/2311.02481` (2023).

[2] J. Hausen and M. Wrobel. Non-complete rational T-varieties of complexity one. Math. Nachr. **290** (2017), no. 5–6, 815–826.

[3] P. Evdokimova, S. Gaifullin, A. Shafarevich. Rigid trinomial varieties. arXiv: `math.AG/2307.06672` (2023).

[4] S. Gaifullin, G. Shirinkin. Orbits of automorphism group of trinomial hypersurfaces. arXiv: `math.AG/arXiv:2205.02513` (2022).

[5] I. Arzhantsev, S. Gaifullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Math. Nachr. **290** (2017), no. 5–6, 662–671.

Многообразия, допускающие действия унипотентных групп с конечным числом орбит

А.А. Шафаревич
МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
shafarevich.a@gmail.com

В своем докладе я расскажу про полные многообразия, на которых есть действие унипотентной группы с конечным числом орбит. Такие многообразия представляют интерес, так как являются конечными объединениями аффинных пространств. Среди полных симплициальных торических многообразий удалось описать все те, на которых есть действие унипотентной группы с конечным числом орбит.

Пусть X полное торическое многообразие, на котором эффективно действует тор T с открытой орбитой, а Σ — соответствующий ему веер в решетке однопараметрических подгрупп T. Веер Σ называется радиальным, если в решетке можно выбрать базис таким образом, чтобы на каждом из базисных векторов лежал луч из веера Σ, а все остальные лучи из Σ лежали в отрицательном октанте.

Для каждого конуса $\sigma \in \Sigma$ можно определить моноид $\Gamma(\sigma)$, содержащийся в группе классов дивизоров на X, который порожден классами $[D_\rho]$, где D_ρ — простой T-инвариантный дивизор на X, соответствующий лучу ρ, который не лежит в конусе σ.

Теорема. Пусть X — полное симплициальное торическое многообразие и Σ — соответствующий веер. Тогда на X есть действие унипотентной группы с конечным числом орбит тогда и только тогда, когда веер Σ радиальный и моноиды $\Gamma(\sigma)$ свободные для всех $\sigma \in \Sigma$.

Список литературы

[1] A. Shafarevich. Toric varieties admitting an action of a unipotent group with a finite number of orbits. arXiv: math.AG/2405.08108.

Об обращении отображения Абеля–Прима

О.К. Шейнман
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН
sheinman@mi-ras.ru

Преобразование Абеля отображает симметрическую степень римановой поверхности с показателем, равным её роду, в абелево многообразие — якобиан этой римановой поверхности. Это отображение является бирациональной эквивалентностью. Обращение преобразования Абеля является классической проблемой, известной как проблема обращения Якоби. Если риманова поверхность снабжена голоморфной инволюцией, то с ней связано другое абелево многообразие — многообразие Прима, или примиан. Например, инвариантные торы систем Хитчина со структурной группой $GL(n)$ являются якобианами спектральных кривых, а для систем со структурными группами $SO(2n)$ и $Sp(2n)$ — примианами.

Для примианов, вообще говоря, имеется препятствие даже для того чтобы поставить проблему обращения, не говоря уже о её решении. Как следствие, не известно и представлений примианов в виде симметрических степеней кривых. Мы утверждаем, что при наличии на римановой поверхности второй голоморфной инволюции, коммутирующей с первой, причём дифференциалы Прима относительно первой инволюции инвариантны относительно второй, проблему обращения можно поставить и решить, а также получить представление примиана в виде симметрической степени некоторой кривой.

Этот результат имеет приложения в теории интегрируемых систем, в том числе позволил впервые решить в тэта функциях систему Хитчина со структурной группой $SO(4)$.

Доклад основан на работах [1, 2].

Список литературы

[1] О.К. Шейнман. Обращение преобразования Абеля–Прима при наличии дополнительной инволюции (готовится к печати).

[2] О.К. Шейнман. Разделение переменных для системы Хитчина со структурной группой $SO(4)$, на кривой рода 2. Труды МИАН, том **325** (2024), №2 (принято к печати), см. также arXiv: `math-ph/2404.13453`.

Конечные простые группы лиева типа ранга 1, удовлетворяющие сильной π-теореме Силова

В.Д. Шепелев
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
v.shepelev@g.nsu.ru

Пусть зафиксировано некоторое множество π простых чисел. Конечная группа называется π-группой, если все простые делители ее порядка принадлежат π. В соответствии с определением X. Виланда конечная группа удовлетворяет сильной π-теореме Силова, если максимальные π подгруппы любой ее подгруппы H сопряжены в H.

Виланд [1] поставил вопрос о классификации конечных простых групп, удовлетворяющих сильной π-теореме Силова. Манзаева [2] описала простые спорадические и знакопеременные группы, удовлетворяющие сильной π-теореме Силова. Ранее докладчиком [3] были найдены условия, характеризующие выполнение сильной π-теоремы Силова для групп из серии $L_2(q)$.

В докладе в терминах естественных арифметических параметров будут приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы конечные простые группы лиева типа, принадлежащие сериям ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ и $U_3(q)$, удовлетворяли сильной π-теореме Силова. Таким образом, проблема Виланда решена для всех групп лиева типа ранга 1.

Определение. Пусть $r \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{N}, (a, r) = 1$.

$$\operatorname{ord}^*_r a = \min\{d \in \mathbb{N} \mid a^d \equiv 1 \pmod{r \cdot (r, 2)}\}.$$

Теорема. Пусть $p \in \mathbb{P}$, $q = p^{2^k m}$ для некоторых нечётного m и неотрицательного k. Положим также $q_0 := p^m$ и $\tau := \pi \cap \pi(\mathrm{PSL}_2(q))$. Тогда $\mathrm{PSL}_2(q) \in W_\pi$ если и только если выполнено одно из следующих условий:

- $\pi(\mathrm{PSL}_2(q)) \subseteq \pi$;
- $p = 2, \tau = \{2\}$;
- $2 \notin \pi, p \in \pi, |\{3, 5\} \cap \tau| \leq 1$ и $\tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q_0 - 1)$;
- $p \notin \pi$, $|\{2, 3, 5\} \cap \tau| \leq 1$ и $\operatorname{ord}^*_r q_0 = \operatorname{ord}^*_s q_0$ для любых $r, s \in \tau$.

Теорема. Пусть $q = 2^{2m+1}$ для некоторого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Положим также $\tau := \pi \cap \pi(\mathrm{Sz}(q))$. Тогда $\mathrm{Sz}(q) \in W_\pi$ если и только если $\mathrm{Sz}(q) \in D_\pi$, то есть если выполнено одно из следующих условий:

- $\pi(\mathrm{Sz}(q)) \subseteq \pi$;
- $\tau = \{2\}$;
- $\tau \subseteq \pi(q-1)$;
- $\tau \subseteq \pi(2^{2m+1} - 2^{m+1} \cdot \varepsilon + 1)$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Теорема. Пусть $q = 3^{3^k \cdot m}$ для некоторого неотрицательного k и нечётного m такого, что $(m, 3) = 1$. Положим также $q_0 := 3^m$ и $\tau := \pi \cap \pi(\mathrm{Ree}(q))$. Тогда $\mathrm{Ree}(q) \in W_\pi$ если и только если выполнено одно из следующих условий:

- $\pi(\mathrm{Ree}(q)) \subseteq \pi$ или $|\tau| \leq 1$;
- $2 \notin \pi$ и $\tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q-1)$;
- $2 \notin \pi$ и $\tau \subseteq \pi(3^{2m+1} - 3^{m+1} \cdot \varepsilon + 1)$, где $\varepsilon = \pm 1$;
- $2 \in \pi$ и $\tau \subseteq \pi(q_0 + 1)$.

В частности, если $k = 0$, то $\mathrm{Ree}(q) \in W_\pi$ если и только если $\mathrm{Ree}(q) \in D_\pi$.

Определение. Пусть $p \in \mathbb{P}$, $q = p^{2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot m}$ для некоторых нечётного m такого, что $(m, 3) = 1$ и $\alpha, \beta \geq 0$. Положим также $q_0 := p^{3^\beta \cdot m}$, $q_1 := p^{2^\alpha \cdot m}$ и $\tau := \pi \cap \pi(\mathrm{PSU}_3(q))$.

Будем говорить, что для $\mathrm{PSU}_3(q)$ справедливо *условие* $(*)$, если имеет место один из следующих пунктов:

- $\pi(\mathrm{PSU}_3(q)) \subseteq \pi$ или $|\tau| \leq 1$;
- $p \in \pi, 2 \notin \pi$, $|\{3, 5\} \cap \tau| \leq 1$ и $\tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q_0 - 1)$;
- $2, p \notin \pi, \tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q^2 - q + 1)$, причём если $3 \in \pi$, то $(q-1)_3 = 3$;
- $p \notin \pi, |\tau \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$, $7 \notin \tau \cap \pi(q^3 + 1)$, $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, и $\mathrm{ord}_r^* \, q_{\frac{1-\varepsilon}{2}} = \mathrm{ord}_s^* \, q_{\frac{1-\varepsilon}{2}}$ для любых $r, s \in \tau$.

Теорема. Группа $\mathrm{PSU}_3(q) \in W_\pi$, если и только если для $\mathrm{PSU}_3(q)$ справедливо условие $(*)$ и имеет место один из следующих пунктов:

- $p \neq 5$ или $q \neq q_0$;
- $p = 5, q = q_0$ и $|\tau \cap \{2, 3, 5, 7\}| \leq 1$.

Список литературы

[1] H. Wielandt. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute, Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), 161–173.

[2] Н.Ч. Манзаева. Решение проблемы Виланда для спорадических групп, Сиб. электрон. матем. изв., **9** (2012), 294–305.

[3] В.Д. Шепелев. О конечных простых группах, удовлетворяющих сильной π-теореме Силова. в сб. Математика, Материалы 61-й Международной студенческой конференции, Новосибирск, 2023, с. 66.

Группы автоморфизмов комплексных многообразий

К.А. Шрамов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, НИУ ВШЭ

Москва, Россия

costya.shramov@gmail.com

Группы автоморфизмов компактных комплексных многообразий могут быть устроены довольно сложно, однако во многих случаях их конечные подгруппы демонстрируют хорошие свойства. Я сделаю обзор результатов и ожиданий об ограниченности конечных подгрупп в группах автоморфизмов компактных комплексных многообразий и в некоторых их фактор-группах. В частности, мы обсудим условия, при которых группа связных компонент группы автоморфизмов компактного комплексного многообразия имеет ограниченные конечные подгруппы.

Галереи для подсистем корней

В.В. Щиголев

Финансовый университет при Правительстве РФ

shchigolev_vladimir@yahoo.com

Доклад основан на работе автора [3]. Пусть Φ — (конечная) система корней. Подмножество $\Psi \subset \Phi$ называется *подсистемой корней* системы Φ, если оно не пусто и устойчиво относительно отражений относительно корней $\alpha \in \Psi$ (другими словами, если Ψ сама является корневой системой). Подсистемы корней изучались различными авторами, например [4] и [2]. Особенно широкую известность получила теория Бореля-Зибенталя [1], установившая связь между замкнутыми связными подгруппами компактных подгрупп

Ли максимального ранга и максимальными замкнутыми корневыми подсистемами.

Удобно предполагать, что система корней Φ и её подсистема Ψ являются подмножествами одного и того же евклидова пространства E. Хотя это предположение и заставляет отказаться от требования о том, что система корней должна порождать объемлющее евклидово пространство (иногда рассматриваемое как обязательную аксиому), оно позволяет существенно упростить развиваемую теорию. *Камерой Вейля* системы Φ (системы Ψ) называется любая связная компонента разности $E - \bigcup_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$ (разности $E - \bigcup_{\alpha\in\Psi} L_\alpha$), где L_α — гиперплоскость в E, перпендикулярная корню α, называемая *стенкой*. Таким образом, любая камера Вейля системы Φ является подмножеством единственной камеры Вейля системы Ψ, которая называется её *проекцией*. В докладе я расскажу, как устроена обратная операция *поднятия* камер.

Операции проекции и поднятия могут применяться к *размеченным галереям* камер Вейля, то есть к последовательностям

$$\Gamma = (C_0, L_1, C_1, L_2, \ldots, C_{n-1}, L_n, C_n),$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_n$ — камеры и $L_1, \ldots, L_n$ — стенки такие, что для любого $i = 1, \ldots, n$ камеры C_{i-1} и C_i связаны через стенку L_i, то есть пересечение замыканий и стенки $\overline{C}_{i-1} \cap \overline{C}_i \cap L_i$ имеет коразмерность 1.

Планируется обсудить, как вышеописанные операции приводят к косоэквивариантным вложениям модулей Ботта-Самельсона и вычислить индуцированные такими вложениями морфизмы групп эквивариантных когомологий. Точная формула получена в случае колец коэффициентов, для которых выполняется теорема о локализации.

Список литературы

[1] A. Borel, J. de Siebenthal. Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos. Commentarii Mathematici Helvetici **23** (1949), 200–221.

[2] T. Oshima. A classification of subsystems of a root system. arXiv: `math.RT/0611904`.

[3] V. Shchigolev. Galleries for root subsystems. Algebras and Representation Theory (2024).

[4] N. R. Wallach. On maximal subsystems of root systems. Canad. J. Math. **20** (1968).

Local super-derivations of the n-th super Schrödinger algebras

A.K. Alauadinov, B.B. Yusupov
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
amir_t85@mail.ru, baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

Local derivations and automorphisms have been objects of many research works in recent years. Even many results have been addressed in this direction, there are still lots of related unsolved problems. R.V.Kadison, D.R.Larson and A.R.Sourour first introduced the notion of local derivations on algebras in their remarkable paper [8, 10]. After that many research papers have been published regarding local derivations of non-associative algebras (e.g. see [6, 5, 9, 1]). For instance, it is proved that every local derivation on a finite-dimensional semisimple Lie algebra $\mathcal{L}$ over an algebraically closed field of characteristic zero is a derivation (see [6]). Moreover, local derivations of solvable Lie algebras are investigated in [5], and it is shown that there exist solvable Lie algebras which admit local derivations which are not ordinary derivation. However, it is also proved that there are solvable Lie algebras for which every local derivation is a derivation (see [5]). Recently, in [9], the authors proved that every local derivation on solvable Lie algebras whose nilradical has maximal rank is a derivation. Further, it also is proved that every local derivation on the conformal Galilei algebra is a derivation (see [1]). Recently, in [2, 3], the authors proved that every local derivation on the Schrödinger algebra $\mathfrak{s}_n$ in $(n+1)$-dimensional space-time is a derivation when $n \in \mathbb{N}$. A.Alauadinov and B.Yusupov proved similar results concerning local super-derivations on the super Schrödinger algebras in their recent paper [4].

In this paper, we will study local super-derivations on the n-th super Schrödinger algebras.

We begin by providing some conventions in this paper. Denote the degree for $\mathbb{Z}_2$-graded vector spaces $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\overline{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\overline{1}}$ by

$$|x| = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in \mathfrak{g}_{\overline{0}} \\ 1, & \text{if } x \in \mathfrak{g}_{\overline{1}} \end{cases}.$$

Elements in $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ or $\mathfrak{g}_{\overline{1}}$ are called homogeneous. We regard x as a $\mathbb{Z}_2$-homogeneous element when $|x|$ occurs in some expression. A linear map $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ is a homogeneous linear map of degree $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, i.e. $|\phi| = \alpha$, provided that

$$\phi(\mathfrak{g}_\beta) \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, \forall \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Similarly, a bilinear map $\varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ is a homogeneous bilinear map of degree $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, i.e. $|\varphi| = \alpha$ if it satisfies that

$$\varphi\left(\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\gamma\right) \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}, \forall \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2.$$

Moreover, if $|\phi|$ or $|\varphi|$ occurs in some expression, we regard it as a homogeneous map.

Definition 1. The n-th super Schrödinger algebra $\mathcal{S}_n=(\mathcal{S}_n)_{\overline{0}}\oplus(\mathcal{S}_n)_{\overline{1}}$ is a $(3n+6)$-dimensional Lie superalgebra with the even part $(\mathcal{S}_n)_{\overline{0}}=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e, f, h, z, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\}$ and the odd part $(\mathcal{S}_n)_{\overline{1}}=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{E, F, G_1, \cdots, G_n\right\}$ satisfying the following non-vanishing Lie super brackets:

$$[h, e]=2e, [h, f]=-2f, [h, p_i]=p_i, [h, q_i]=-q_i;$$

$$[e, f]=h, [p_i, q_j]=\delta_{ij} z, [e, q_i]=p_i, [p_i, f]=-q_i;$$
$$[h, E]=E, [h, F]=-F, [e, F]=-E, [f, E]=-F, [p_i, F]=G_i, [q_i, E]=G_i;$$
$$[E, E]=2e, [F, F]=-2f, [G_i, G_j]=\delta_{ij} z, [E, F]=h, [E, G_i]=-p_i, [F, G_i]=q_i.$$

Definition 2. Let $\mathfrak{g}$ be a Lie superalgebra. A homogeneous linear map $D: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ is called a super-derivation of g if

$$D([x, y])=[D(x), y]+(-1)^{|D||x|}[x, D(y)], \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Write $\operatorname{Der}_\alpha(\mathfrak{g})$ for the set of all homogeneous super-derivations of degree $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ of $\mathfrak{g}$. Then $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})=\operatorname{Der}_{\overline{0}}(\mathfrak{g}) \oplus \operatorname{Der}_{\overline{1}}(\mathfrak{g})$. For arbitrary $x \in \mathfrak{g}$, it is easy to see that the map $\operatorname{ad} x: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ defined by $\operatorname{ad} x(y)=[x, y]$ for all $y \in \mathfrak{g}$ is a super-derivation of $\mathfrak{g}$, which is termed an inner super-derivation. The set of all inner super-derivations is denoted by $\operatorname{IDer}(\mathfrak{g})$. Clearly, $\operatorname{IDer}(\mathfrak{g})=\operatorname{IDer}_{\overline{0}}(\mathfrak{g}) \oplus \operatorname{IDer}_{\overline{1}}(\mathfrak{g})$.

In the rest of this section, we will determine all super-derivations of the n-th super Schrödinger algebra $\mathcal{S}_n$. Assume that $n \geq 2$. For any $1 \leq i<j \leq n$, we define an even linear map $\rho_{ij}: \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$ as follows:

$$\rho_{ij}|_{\operatorname{lsp}(1|2)}=0, \rho_{ij}(z)=0, \rho_{ij}\left(p_k\right)=\delta_{ik} p_j-\delta_{jk} p_i; \tag{2.1}$$
$$\rho_{ij}\left(q_k\right)=\delta_{ik} q_j-\delta_{jk} q_i, \rho_{ij}\left(G_k\right)=\delta_{ik} G_j-\delta_{jk} G_i, \forall 1 \leq k \leq n. \tag{2.2}$$

One can easily verify that $\rho_{ij}(1 \leq i<j \leq n)$ is an even outer super-derivation of $\mathcal{S}_n$. We define another outer super-derivation δ of $\mathcal{S}_n$ by

$$\delta|_{\operatorname{osp}(1|2)}=0, \delta\left(p_i\right)=p_i, \delta\left(q_i\right)=q_i, \delta(z)=2z, \delta\left(G_i\right)=G_i, \forall 1 \leq i \leq n. \tag{2.3}$$

In particular, we note that $\rho_{ij}|_{(\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}}$ $(1 \leq i < j \leq n$ and $\delta|_{(\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}}$ are outer derivations of the n-th Schrödinger algebra $(\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}$. Next, we recall the derivation algebra of the n-th Schrödinger algebra given in [11], which is also obtained in [7] by a different approach.

We use the following Theorem given in [7],[11].

Theorem 1. $\operatorname{Der}(\mathcal{S}_n) = \operatorname{IDer}(\mathcal{S}_n) \oplus \left(\underset{1\leq i<j\leq n}{\oplus} \mathbb{C}\rho_{ij} \right) \oplus \mathbb{C}\delta$, where $\rho_{ij}(1 \leq i < j \leq n)$ and δ are defined by Eqs. (2.1)-(2.3).

Now we give the main theorem concerning local super-derivations on the n-th super Schrödinger algebras $\mathcal{S}_n$.

Theorem 2. Every local super-derivation on $\mathcal{S}_n$ is a super-derivation.

References

[1] A.K. Alauadinov, B.B. Yusupov. Local derivations of conformal Galilei algebra, Communications in Algebra, **52:6** (2024), 2489–2508.

[2] A.K. Alauadinov, B.B. Yusupov. Local derivations of the Schrödinger algebras. Algebra Colloquium, (2024), inpress.

[3] A.K. Alauadinov, B.B. Yusupov. Local derivation on the Schrödinger Lie algebra in $(n+1)$-dimensional space-time. arXiv: `math.RA/2402.07576` (2024).

[4] A.K. Alauadinov, B.B. Yusupov. Local super-derivations of the super Schrödinger algebras. arXiv: `math.RA/2405.18835` (2024).

[5] Sh. Ayupov, A. Khudoyberdiyev. Local derivations on solvable Lie algebras. Linear and Multilinear Algebra **69** (2021), 7, 1286–1301.

[6] Sh. A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras, Linear Algebra Appl. **493** (2016), 381–398.

[7] Z. Chen, Y. Wang. Derivations and biderivations of the n-th Schrödinger algebra. Comm. Algebra **51** (3) (2023), 1049–1062.

[8] R.V. Kadison. Local derivations. J. Algebra **130** (1990), 494–509.

[9] K.K. Kudaybergenov, B.A. Omirov, T.K. Kurbanbaev, Local derivations on solvable Lie algebras of maximal rank, Communications in Algebra **50:9** (2022), 1–11.

[10] D.R. Larson, A.R. Sourour. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proc. Sympos. Pure Math., **51** (1990) 187–194.

[11] B. Lei, H. Yang. The derivation algebra and automorphism group of the n-th Schrödinger algebra. Comm. Algebra **52** (1) (2024), 283–294.

On the description of Leibniz dialgebras

M.E. Aziziv
Institute of mathematics, Tashkent, Uzbekistan
azizovmajidkhan@gmail.com

In this work we investigate Leibniz dialgebras and give the complete classification of two dimensional Leibniz dialgebras.

Leibniz algebras are non-commutative analogues of Lie algebras. The identity of the variety of right Leibniz algebras is the condition stating that each operator of right multiplication is a derivation, i.e. [1]:

$$(xy)z = x(yz) + (xz)y.$$

Firstly, J.–L. Loday gives definition of associative dialgebras in [2], which is the vector space A with two bilinear operations "$\dashv$","$\vdash$", which satisfies following identities:

$$(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z), \quad (1)$$
$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \quad (2)$$
$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z). \qquad (3)$$

The notion of dialgebras can be defined for any class of algebras. In [3] Kolesnikov gave the method of construction of dialgebra for any variety of algebras. In [3] assumed that (1) identity must hold for any kind of dialgebras.

Definition 1 A vector spaces A with two "$\dashv$", "$\vdash$" bilinear operations is said to be a "0$-$dialgebra" if A satisfies the identities (1). By using the method of Kolesnikov, we find identities of Leibniz dialgebras and it given by following definition.

Definition 2 A 0-dialgebra A is said to be a Leibniz dialgebra if A satisfies the identities

$$(x \dashv y) \dashv z - (x \dashv z) \dashv y - x \dashv (y \dashv z) = 0, \quad (4)$$

$$(x \vdash y) \dashv z - (x \vdash z) \vdash y - x \vdash (y \dashv z) = 0, \quad (5)$$

$$(x \vdash y) \vdash z - (x \vdash z) \dashv y - x \vdash (y \vdash z) = 0. \quad (6)$$

From (4) it implies that $(A, \dashv)$ is the (right) Leibniz algebra. From this assertion it can be concluded that any Leibniz dialgebra corresponds to certain Leibniz algebra. In this work we consider the description of 2-dimensional Leibniz dialgebras by using the classification of 2-dimensional Leibniz algebras [4].

Theorem 1 [4]. Up to isomorphism, there exist four families of two dimensional Leibniz algebras over any field:

$L(1)$: abelian algebra

$L(2)$: $e_1 \dashv e_2 = -e_2 \dashv e_2 = e_1$;

$L(3)$: $e_2 \dashv e_2 = e_1$;

$L(4)$: $e_1 \dashv e_2 = e_1$.

(Omitted products are zero.)

Theorem 2 Up to isomorphism, there exist one parametric and five non parametric families of two dimensional Leibniz dialgebras over any field F:

$(L1(1), \dashv, \vdash) : e_1 \vdash e_1 = e_2$;

$(L1(2), \dashv, \vdash) : e_1 \dashv e_2 = e_1, e_1 \dashv e_2 = -e_1, e_1 \vdash e_2 = e_1$;

$(L2(2), \dashv, \vdash) : e_1 \dashv e_2 = e_1, e_1 \dashv e_2 = -e_1, e_1 \vdash e_2 = e_1, e_2 \vdash e_1 = -e_1$;

$(L1(3), \dashv, \vdash) : e_2 \dashv e_2 = e_1, e_2 \vdash e_2 = \delta e_1, \forall \delta \in F$;

$(L1(4), \dashv, \vdash) : e_1 \dashv e_2 = e_1, e_1 \vdash e_2 = e_1$;

$(L2(4), \dashv, \vdash) : e_1 \dashv e_2 = e_1, e_2 \vdash e_1 = -e_1$

(Omitted products are zero).

References

[1] J.–L. Loday. Une version non commutative des alg‘ebres de Lie: les alg‘ebres de Leibniz. Enseign. Math. **39** (1993) 269–293.

[2] J.–L. Loday. Dialgebras. in: Dialgebras and Related Operads, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1763**, pp. 7–66. Springer Verl., Berlin, 2001.

[3] P. Kolesnikov. Variaties of dialgebras and conformal algebras,Siberian Mathematical Journal, **49** (2), 257–272.

[4] Sh. Ayupov, B. Omirov, I. Rakhimov. Leibniz Algebras Structure and Classification, CRC Press, Taylor and Francis Group.

Classification of symmetric Leibniz algebras associated to quasi-filiform Lie algebras

I.B. Choriyeva
Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences Tashkent, Uzbekistan.
irodachoriyeva1@gmail.com

In recent years, the theory of Leibniz algebras has been intensively studied and many results on Lie algebras have been extended to Leibniz algebras. A left (right) Leibniz algebra is a non-associative algebra where the left (right) multiplications are derivations. Symmetric Leibniz algebra is an algebra which is simultaneously left and right Leibniz algebra. The initial property and theory of symmetric Leibniz algebras are given in the works of Benayadi and Hidri [2]. They gave a method for the classification of symmetric Leibniz algebras, which is based on the property that a symmetric Leibniz algebra forms a Poisson algebra with respect to the commutator and anticommutator [1].

Using this method, the classification of symmetric Leibniz algebras underlying Lie algebra is a naturally-graded filiform Lie algebras $\mathbf{n}_{n,1}$ and $\mathcal{Q}_{2n}$ is obtained in [3]. Moreover, the classification of 5-dimensional symmetric Leibniz algebras is given in [4]. In this work, we focus on the classification of symmetric Leibniz algebras associated with Lie naturally-graded quasi-filiform Lie algebras.

Definition 1 An algebra $(\mathcal{L}, [-,-])$ over a field F is called Lie algebra if for any $x, y, z \in \mathcal{L}$ the following identities hold:

$$[x,y] = -[y,x], \quad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Definition 2 An algebra $(\mathcal{L}, \cdot)$ is said to be a symmetric Leibniz algebra, if for any $x, y, z \in \mathcal{L}$ it satisfies the following identities:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z + y \cdot (x \cdot z), \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) + (x \cdot z) \cdot y.$$

Let $\mathcal{L}$ be a vector space equipped with a bilinear map $\cdot : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. For all $x, y \in \mathcal{L}$, we define [-,-] and $\circ$ as follows

$$[x,y] = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x), \qquad x \circ y = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x).$$

Proposition 1 [1]. Let $(\mathcal{L}, \cdot)$ be an algebra. The following assertions are equivalent:

1. $(\mathcal{L}, \cdot)$ is a symmetric Leibniz algebra.

2. The following conditions hold:
   (a) $(\mathcal{L}, [-,-])$ is a Lie algebra.
   (b) For any $u, v \in \mathcal{L}$, $u \circ v$ belongs to the center of $(\mathcal{L}, [-,-])$.
   (c) For any $u, v \in \mathcal{L}$, $([u,v]) \circ w = 0$ and $(u \circ v) \circ w = 0$.

According to this Proposition, we derive that any symmetric Leibniz algebra is given by a Lie algebra $(\mathcal{L}, [-,-])$ and a symmetric bilinear form $\omega : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to Z(\mathcal{L})$, where $Z(\mathcal{L})$ is the center of the Lie algebra, such that for any $x, y, z \in \mathcal{L}$

$$\omega([x,y], z) = \omega(\omega(x,y), z) = 0.$$

Then the product $u \cdot v = [u,v] + \omega(u,v)$ gives a symmetric Leibniz algebra structure.

In the following Proposition the criteria of isomorphism of two symmetric Leibniz algebras with the symmetric bilinear forms ω and μ is given.

Proposition 2[1] Let $(\mathcal{G}, [-,-])$ be a Lie algebra and ω and μ two solutions of (). Then $(\mathcal{G}, \cdot_\omega)$ is isomorphic to $(\mathcal{G}, \cdot_\mu)$ if and only if there exists an automorphism A of $(\mathcal{G}, [-,-])$ such that

$$\mu(u,v) = A^{(-1)}\omega(Au, Av).$$

For an arbitrary symmetric Leibniz algebra $(\mathcal{L}, \cdot)$, we define the series:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}, \; \mathcal{L}^{k+1} = \mathcal{L}^k \cdot \mathcal{L}, \quad k \geq 1.$$

Definition 3 A n-dimensional symmetric Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is called *nilpotent* if there exists $k \in N$ such that $\mathcal{L}^k = 0$. Such minimal number is called *index of nilpotency*.

A n-dimensional symmetric Leibniz algebra with index of nilpotency n and $n-1$ is called filiform and quasi-filiform, respectively.

Definition 4 Given a nilpotent Lie algebra $\mathcal{L}$, with index of nilpotency s. Put $\mathcal{L}_i = L^i/\mathcal{L}^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, and denote $Gr(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-1}$. Define the product in $Gr(\mathcal{L})$ as follows:

$$[x + \mathcal{L}^{i+1}, y + \mathcal{L}^{j+1}] := [x,y] + \mathcal{L}^{i+j+1},$$

where $x \in \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}, y \in \mathcal{L}^j/\mathcal{L}^{j+1}$. Then $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \mathcal{L}_{i+j}$ and we obtain the graded algebra $Gr(\mathcal{L})$.If $Gr(\mathcal{L})$ and $\mathcal{L}$ are isomorphic, then we say that the algebra $\mathcal{L}$ is naturally-graded.

The complete algebraic classification of naturally-graded quasi-filiform Lie algebras was given in [5]. In this work, we give the description of all symmetric Leibniz algebras whose underlying Lie algebra is a naturally-graded quasi-filiform Lie algebra.

References

[1] H. Abchir, F. Abid, M. Boucetta. A class of Lie racks associated to symmetric Leibniz algebras. Journal of Algebra and Its Applications. **21** (2022), no. 11, 225–230.

[2] S. Benayadi, S. Hidri. Quadratic Leibniz algebras. J. Lie Theory **24** (2014), no. 3, 737–759.

[3] I. Choriyeva, A. Khudoyberdiyev. Classification of symmetric Leibniz algebras accosiated by naturally graded filiform Lie algebras. AIP Conference Proceedings **2781** (2023), 020072.

[4] I. Choriyeva, A. Khudoyberdiyev. Classification of five-dimensional symmetric Leibniz algebras. Bulletin of the Iranian Mathematical Society. **50** (2024), no. 3, 33.

[5] J.R. Gomez, A. Jimenez-Merchan. Naturally graded quasi-filiform Lie algebras. Journal of Algebra **256** (2002), 211–228.

About geometry of completely integrable Hamiltonian systems

Sh.R. Ergashova

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

shohida.ergashova@mail.ru

We are interested in geometry of Liouville foliation generated by completely integrable Hamiltonian systems.

Definition 1 [2] Let M^{2n} be a symplectic manifold and $sgradH$ Hamiltonian vector field with a smooth Hamiltonian function H.

Hamiltonian system $sgradH$ is called *completely integrable in the sense of Liouville or completely integrable*, if exists set of smooth functions $f_1, ..., f_n$ as:

1) $f_1, ..., f_n$ are first integrals of $sgradH$ Hamiltonian vector field,

2) they are functionally independent on M, that is, almost everywhere on M their gradients are linearly independent,

3) $\{f_i, f_j\} = 0$ for any i and j,

4) the vector fields $sgradf_i$ are complete, that is natural parameter on their integral trajectories is defined on the whole number line.

Definition 2 [1] Partition of the manifold M^m into connected components of joint level surfaces of the integrals $f_1, ..., f_n$ is called *The Liouville foliation* corresponding to the completely integrated system.

Level surfaces of these first integrals generates Liouville foliation. If the dimension of the leaf L is maximal, it is called regular, otherwise L is called singular.

Definition 3 [3] A partition F of the manifold M by path-connected immersed submanifolds L_α is called *a singular foliation of* M if it verifies condition:

for each leaf L_α and each vector $v \in T_pL_\alpha$ at the point p there is $X \in XF$ such that $X(p) = v$, where T_pL_α is the tangent space of the leaf L_α at the point p, XF is the module of smooth vector fields on M tangent to leaves (XF acts transitively on each leaf).

If the dimension of L is maximal, it is called regular, otherwise L is called singular. It is known that orbits of vector fields generate singular foliation.

Definition 4 [4]. *The orbit* $L(x)$ of a system D of vector fields through a point x is the set of points y in M such that there exist $t_1, t_2, \ldots, t_k \in R$ and vector fields $X_1, X_2, \ldots, X_k \in D$ such that

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1}))),$$

where k is an arbitrary positive integer.

The fundamental result in study of orbits is Sussman theorem.

Definition 5 [3] A *distribution* P on M is a map which assigns to every point $x \in M$ an vector subspace $P(x)$ of T_xM.

Every set of smooth vector fields D generates distribution, where for every point $x \in M$ matches subspace $P(x) \subset T_xM$, that generated by set of vectors $D(x) = \{X(x) \colon X \in D\}$.

The distribution P is called *completely integrable*, if for every $x \in M$ there is a submanifold L_x of the manifold M such, that $T_yL_x = P(y)$ for all $y \in L_x$. The submanifold L_x of M is called an *integral submanifold (or integral manifold)* of the distribution P. A *maximal integral manifold of* P is a connected submanifold L of M such that

(a) L is an integral manifold of P,

(b) every connected integral manifold of P which intersects L is an open submanifold of P.

We say that P is completely integrable if through every point $x \in M$ there passes a maximal integral manifold of P.

Sussman Theorem [4]. Let M be a smooth manifold, and let D be a set of vector fields. Then

(a) L is an orbit of D, then L admits a unique differentiable structure such that L is a submanifold of M. The dimension of L is equal to its rank.

(b) With the topology and differentiable structure of (a), every orbit of D is a maximal integral submanifold of distribution P.

(c) P has the maximal integral manifolds property,

(d) P is involutive.

Let $sgradH$ completely integrable Hamiltonian vector field and with Hamiltonian function $H\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ on the four dimensional Euclidean space with the Cartesian coordinates (p_1, p_2, q_1, q_2) with equation:

$$H = H(p_1, p_2, q_1, q_2).$$

We assume that Hamiltonian system is completely integrable and following functions

$$F^1 = F^1(p_1, q_1), \quad F^2 = F^2(p_2, q_2)$$

are first integrals of Hamiltonian system (1).

Let us denote by P the distribution generated by vector fields

$$\begin{array}{l} gradf^1 = \{p_1'(u); 0; q_1'(u); 0\} \\ gradf^2 = \{0, p_2'(v), 0, q_2'(v)\}. \end{array} \qquad (1)$$

Theorem. The distribution P generates foliation $\mathcal{F}^{\perp}$, which is orthogonal to Liouville foliation $\mathcal{F}$.

References

[1] A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko. Integrable Hamiltonian systems. Udmurtskiy universitet, Izhevsk, 1999.

[2] A.Ya. Narmanov, Sh.R. Ergashova. On the geometry of Liouville foliations. TransSiberia 2023, E3S Web of Conferences., **402** (2023), 03032, 1–9.

[3] A.Ya. Narmanov, E.O. Rajabov. The Geometry of Vector Fields and Two Dimensional Heat Equation. International electronic journal of geometry. 2023; **16** (2023), no. 1, 73–80.

[4] H. Sussman. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Transactions of the AMS. **180** (1973), 171–188.

Universal enveloping algebra of a set of compatible Lie brackets

V.Yu. Gubarev
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
v.gubarev8@g.nsu.ru

Hamiltonian pairs (or bihamiltonian structures) play an important role in the theory of integrable systems from mathematical physics. Such structures correspond to pairs of compatible Poisson brackets defined on the same manifold. Two Poisson brackets $\{\cdot,\cdot\}_1$ and $\{\cdot,\cdot\}_2$ are said to be compatible if $\alpha\{\cdot,\cdot\}_1 + \beta\{\cdot,\cdot\}_2$ is a Poisson bracket for all $\alpha, \beta \in \Bbbk$, where $\Bbbk$ denotes the ground field. In terms of operads, algebras with compatible Poisson brackets form a so called bi-Hamiltonian operad [1, 2].

In the case of linear Poisson brackets, all such structures arise from a pair of compatible Lie brackets. An algebra $\langle L, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2, +\rangle$ belongs to a variety Lie_2 of pairs of compatible Lie brackets if $\alpha[\cdot,\cdot]_1 + \beta[\cdot,\cdot]_2$ is a Lie bracket for all $\alpha, \beta \in \Bbbk$.

In [5], the operadic (multiplicative) universal enveloping associative algebra $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ of a given algebra $\mathfrak{g} \in \mathrm{Lie}_2$ in the sense of V. Ginzburg and M. Kapranov [3] was considered, and the Poincaré—Birkhoff—Witt (PBW) property for it was proved. By the definition, the associative algebra $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ satisfies the following property: the category of modules over $\mathfrak{g}$ and the category of left modules over $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ are equivalent.

In [4], we find the Gröbner—Shirshov basis of the universal enveloping algebra $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g}_0)$ of an algebra $\mathfrak{g}_0$, where $\mathfrak{g}_0$ denotes the vector space $\mathfrak{g}$ with both zero Lie brackets. It allows us, applying the PBW property, to get the linear basis of the algebra $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g})$. We state that the (exponential) growth rate of this universal enveloping over m-dimensional compatible Lie algebra equals $m+1$.

In a joint work with Zhan Zhen, we extend these results to the case of a Lie algebra of n compatible brackets. Denote $\dim \mathfrak{g} = m$. When $m, n \gg 1$, we prove that the growth rate of $U_{\mathrm{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ equals αmn, where $\alpha = \frac{4}{q_0^2} \approx 0,69166$, and q_0 is a minimal root of Bessel function of the first kind.

The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 23-71-10005, https://rscf.ru/project/23-71-10005/

References

[1] M. Bershtein, V. Dotsenko, A. Khoroshkin. Quadratic algebras related to the bihamiltonian operad. Int. Math. Res. Notices, vol. **24** (2007), 1–30.

[2] V. Dotsenko, A. Khoroshkin. Character formulas for the operad of two compatible brackets and for the bi-Hamiltonian operad. Funktsional. Anal. i Prilozhen., vol. **41** (2007), iss. 1, 1–22.

[3] V. Ginzburg, M. Kapranov. Koszul duality for operads. Duke Math. J., vol. **76** (1994), iss. 1, 203–272.

[4] V. Gubarev. Universal enveloping algebra of a pair of compatible Lie brackets. Int. J. Algebr. Comput. vol. **32** (2022), iss. 7, 1335–1344.

[5] A. Khoroshkin. PBW Property for Associative Universal Enveloping Algebras Over an Operad. Int. Math. Res. Notices, vol. **2022** (2022), iss. 4, 3106–3143.

Nagata and Keller Automorphisms

R.K. Kerimbayev
Kazakh National University after Al-Farabi,
Almaty, Kazakhstan
`v.gubarev8@g.nsu.ru`

The article is dedicated to study the algebraic automorphisms. Author prove that Nagata polynomial automorphism is algebraic and A Keller algebraic endomorphism is an automorphism.

In paper [1] van der Kulk proved that automorphisms of polynomial ring $K[x, y]$ on two variables are tame.

The group of automorphisms of the algebra $K[x, y]$ admits the structure of an amalgamated free products of the subgroup of affine automorphisms and the subgroup of triangular automorphisms. For the first time, the exact formulation was given by I. R. Shafarevich [2]. D. Wright in his [3] proved an analogue of this result for tame automorphisms $R[x, y]$ over an arbitrary integrity domain R. L. Makar-Limanov showed that automorphisms free associative algebras of rank two over arbitrary fields are tame. L. Makar-Limanov, U. Turusbekova and U.U. Umirbaev proved that automorphisms of free Poisson algebras of rank two over fields of characteristic zero are tame [4] Nagata proved in the article [5] that the automorphism $\sigma = (x + 2y(zx - y^2) + z(zx - y^2), y + z(zx - y^2), z)$ is wild automorphism of the algebra $K[z][x, y]$ over $K[z]$. In our work we study algebraicity of automorphisms.

Theorem 1. *Nagata automorphism is algebraic*

Theorem 2. *A Keller algebraic endomorphism is an automorphism*

This research was supported by grant IRN AR14869863 "Development of a methodology for assessing the impact of income inequality on the level utilization of medical services.

Keywords: Algebraic Automorphisms, Keller polynomial maps, Polynomial automorphisms.

References

[1] W. Van der Kulk. On Polynomial Rings in Two Variables. Nieuw Archief voor Wisk **1** (1953), no. 3, 33–41.

[2] I.R. Shafarevich. On some infinite-dimensional groups. Rend. Mat. e Appl. **25** (1966), no. 5, 208–212.

[3] D. Wright. The amalgamated free product structure of $\mathrm{GL}_2(k[x_1, ..., x_n])$. J.Pure Appl. Algebra **12** (1978), 235–251.

[4] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U.U. Umirbaev. Automorphisms and derivations of Poisson algebras in two variables. Journal of Algebra, **322** (2009), no. 9, 3318–3330.

[5] M. Nagata. On the automorphism group of $k[x, y]$. Lect. in Math. Kinokuniya, Tokio, Kyoto Univ., 1972.

On ω-Leibniz algebras

A.Kh. Khudoyberdiyev , Z.A. Rakhmatova
Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan.
`khabror@mail.ru, rahmatovazohida04@gmail.com`

The notion of ω-Lie algebras was introduced by P. Nurowski in [2], as a generalization of Lie algebras. P. Zusmanovich developed fundamental results about finite-dimensional Lie algebras in [3]. Tree-dimensional non-Lie real ω-Lie algebras were classified in [2] and the classification of complex ω-Lie algebras was obtained in [1]. In this work, we introduce the notion of ω-Leibniz algebras and give some elementary properties of ω-Leibniz algebras. In particular, we investigate some ideals and annihilators of ω-Leibniz algebras.

An ω-Lie algebra is a vector space L over the field F, equipped with a skew-symmetric bracket $[-,-] : L \times L \to L$ and a bilinear form $\omega : L \times L \to F$ such that

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = \omega(x, y)z + \omega(y, z)x + \omega(z, x)y \quad (1)$$

for all $\forall\ x, y, z \in L$.

Definition 1 The triple $(L,\ [-, -],\ \omega)$ is called an *ω-Leibniz algebra* if the following condition is hold

$$[[x, y], z] - [[x, z], y] - [x, [y, z]] = \omega(x, y)z - \omega(x, z)y + \omega(y, z)x \quad (2)$$

for all $\forall\ x, y, z \in L$.

Any Leibniz algebra is an ω-Leibniz algebra with $\omega \equiv 0$.

Let us denote the right (respectively left) kernel of ω as follows

$$Ker_r\omega = \{x \in L \mid \omega(x, y) = 0, \forall y \in L\},$$
$$Ker_l\omega = \{x \in L \mid \omega(y, x) = 0, \forall y \in L\}.$$

For an ω-Leibniz algebra L, we define *right* and *left annihilators* as follows

$$Ann_r(L) = \{x \in L \mid [L, x] = 0\} \text{ and } Ann_l(L) = \{x \in L \mid [x, L] = 0\}.$$

Theorem 1 Let I be a two-sided ideal of the ω-Leibniz algebra L. Then $\omega(I, I) = 0$. In additionally, if I is a right ideal of *codimension*$>$*1*, then $I \subseteq Ker_r\omega$.

Corollary 1 A right (respectively left) ideal of an ω-Leibniz algebra is a Leibniz algebra.

Theorem 2 Let I be a right ideal of the ω-Leibniz algebra L and $codimI > 1$. Then

i. $\omega(x, y) = 0$ for any $\forall x, y \in L$, i.e., L is a Leibniz algebra.

ii. $[h, h] = 0$ for any $\forall h \in I$.

Theorem 3 The following are true:

i. $Ann_l(L)$ is the right ideal of the ω-Leibniz algebra L.

ii. If $dimAnn_lL > 1$, then $\omega(x, y) = 0$ for any $\forall x, y \in L$, i.e., L is a Leibniz algebra.

iii. If $dimAnn_lL = 1$, then $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$, $[[y, y], a] = [[y, a], y]$, $[y, [y, a]] = 0$, and $[y, [x, x]] = 0$ for any $\forall x, y \in L$ and $a \in Ann_lL$.

References

[1] Y. Chen., C. Liu., R. Zhang. Classification of tree dimensional complex ω-Lie algebras. Port Math. (EMS) **71** (2014), 97–108.

[2] P. Nurovskiy. Deforming a Lie algebra by means of a 2-form. J. Geom. Phys. **57** (2007), 1081–1098.

[3] Zusmanovich P. ω-Lie algebras. J. Geom. Phys. **60** (2010), 1028–1044.

Algebraic Automorphisms

K.M. Tulenbaev
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
Almaty, Kazakhstan
kaysart1@mail.ru

The article is dedicated to study the algebraic automorphisms. Author prove that elementary and triangular polynomial automorphisms are algebraic.

In paper [1] van der Kulk proved that automorphisms of polynomial ring K[x,y] on two variables are tame.

The group of automorphisms of the algebra $K[x,y]$ admits the structure of an amalgamated free products of the subgroup of affine automorphisms and the subgroup of triangular automorphisms. For the first time, the exact formulation was given by I. R. Shafarevich [2]. D. Wright in his [3] proved an analogue of this result for tame automorphisms $R[x,y]$ over an arbitrary integrity domain R. L. Makar-Limanov showed that automorphisms free associative algebras of rank two over arbitrary fields are tame. L. Makar-Limanov, U. Turusbekova and U.U. Umirbaev proved that automorphisms of free Poisson algebras of rank two over fields of characteristic zero are tame [4] Nagata proved in the article [5] that the automorphism $\sigma = (x + 2y(zx - y^2) + z(zx - y^2), y + z(zx - y^2), z)$ is wild automorphism of the algebra $K[z][x,y]$ over $K[z]$. In our work we study algebraicity of automorphisms.

Theorem 1. *Elementary polynomial automorphisms are algebraic*

Theorem 2. *Triangular polynomial automorphisms are algebraic*

This research was supported by grant BR20281002 SC MSEH RK.

Keywords: Algebraic Automorphisms, Keller polynomial maps, Polynomial automorphisms

References

[1] W. Van der Kulk. On Polynomial Rings in Two Variables. Nieuw Archief voor Wisk **1** (1953), no. 3, 33–41.

[2] I.R. Shafarevich. On some infinite-dimensional groups. Rend. Mat. e Appl. **25** (1966), no. 5, 208–212.

[3] D. Wright. The amalgamated free product structure of $GL_2(k[x_1, ..., x_n])$. J.Pure Appl. Algebra **12** (1978), 235–251.

[4] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U.U. Umirbaev. Automorphisms and derivations of Poisson algebras in two variables. Journal of Algebra, **322** (2009), no. 9, 3318–3330.

[5] M. Nagata. On the automorphism group of $k[x, y]$. Lect. in Math. Kinokuniya, Tokio, Kyoto Univ., 1972.

Lifting of elements in a Weyl group to the normalizer of the torus

A.M. Staroletov
Sobolev Institute of Mathematics
staroletov@math.nsc.ru

The splitting problem for the normalizer of a maximal torus was first formulated by J. Tits [1]. Let G be a simple connected linear algebraic group over an algebraically closed field $\mathbb{F}$. Consider a maximal torus T in G. This is well-known that the quotient group $N_G(T)/T$ is isomorphic to the Weyl group W of G. The natural question is for which groups G the normalizer $N_G(T)$ splits over T. The answer was obtained independently by J. Adams, X. He in [2] and in a series of papers by A. Galt.

J. Adams and X. He in [2] considered a related question: what is the minimal order of a lift for an element $w \in W$ to $N_G(T)$? It is easy to see that if the order of w is d, then the minimal order of a lift for w is either d or $2d$. Clearly, if $N_G(T)$ splits over T, then the minimal order is d.

In [2, 3, 4], the minimal orders of lifts are found for the elements belonging to the so-called regular or elliptic conjugacy classes of W. It is known that elliptic classes correspond exactly to those elements whose all lifts are of finite order [4].

We find the minimal orders for all elements in the case of exceptional groups of Lie type [5]. This allows us to describe all orders of lifts in these cases.

The work is supported by the Program of Fundamental Research RAS, project FWNF-2022-0002.

References

[1] J. Tits. Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus. J. Algebra, vol. **4** (1966), 96–116.

[2] J. Adams, X. He. Lifting of elements of Weyl groups. J. Algebra, vol. **485** (2017), 142–165.

[3] Matthew C.B. Zaremsky. Representatives of elliptic Weyl group elements in algebraic groups. J. Group Theory, vol. 17 (2014), iss. 1, 49–71.

[4] S. N. Fedotov. Affine algebraic groups with periodic components. Sb. Math., vol. **200** (2009), iss. 7,1089–1104.

[5] A.A. Galt, A.M. Staroletov. Splitting of normalizers of maximal tori in finite groups of Lie type. Algebra Logic, **62** (2023), iss. 1, 22–40.

Содержание

Научное издание

Одиннадцатая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Самара, Россия
19–24 августа 2024 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Eleventh School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Samara, Russia
August 19–24, 2024

ABSTRACTS

Тексты статей печатаются в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX
Макет: М.В. Игнатьев и А.А. Шевченко
Технический редактор А.С. Никитина

Подписано в печать 06.08.2024.
Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,5.
Тираж 80 экз. Заказ № 118.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА» (САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

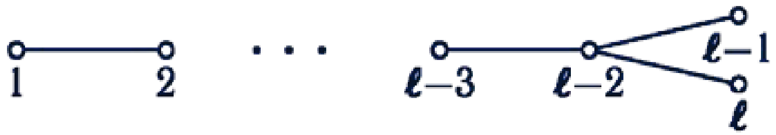
Издательство Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

A_ℓ ($\ell \geqslant 1$)

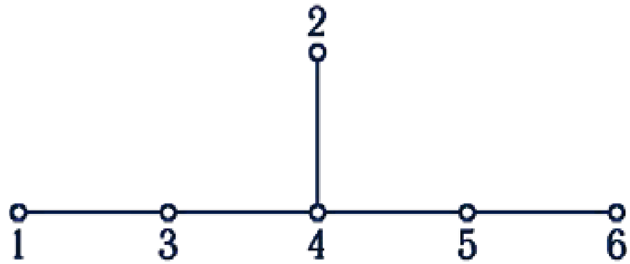
B_ℓ ($\ell \geqslant 2$)

C_ℓ ($\ell \geqslant 3$)

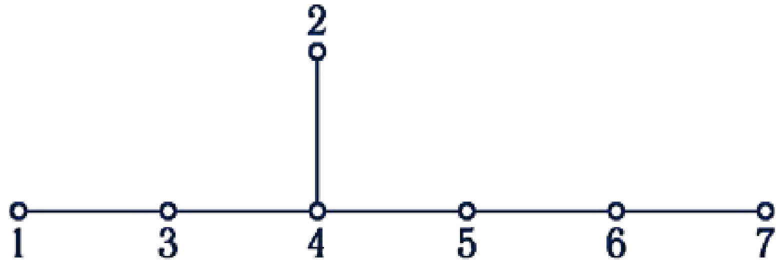
D_ℓ ($\ell \geqslant 4$)



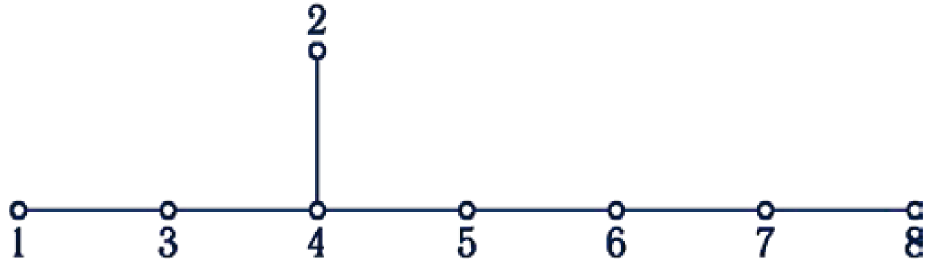
E_6



E_7



E_8



F_4

G_2