ISSN 2658-4948 (Online)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Сборник статей

Выпуск 22
Материалы 22-й международной Саратовской зимней школы,
посвященной 300-летию РАН
(Саратов, 28 января – 31 января 2024 г.)

Саратов
2024

УДК 517:518:519:533
ББК 22.161.5
С56

С56 **Современные проблемы теории функций и их приложения** : сборник статей / редакционная коллегия: А. П. Хромов (главный редактор) [и др.]. – Саратов : Саратовский университет [издание], 2024. – Вып. 22: материалы 22-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 300-летию РАН (Саратов, 28 января–31 января 2024 г.). – 324 с. : ил. – URL: https://www.sgu.ru/research/nauchnye-izdaniya-sgu/prodolzhayushchiesya-izdaniya/sovremennye-problemy-teorii-funkciy-i-ih-prilozheniya/arhiv/22-ya-mezhdunarodnaya-saratovskaya-zimnyaya-shkola. – Режим доступа: Продолжающиеся издания СГУ на сайте www.sgu.ru.

ISSN 2658-4948 (Online). – Изображение. – Текст : электронный.

В выпуске представлены результаты исследований участников конференции по актуальным проблемам современной теории функций действительного и комплексного переменного, гармоническому анализу и преобразованиям Фурье, спектральной теории операторов, задачам оптимизации и негладкому анализу, а также их приложениям.

Для научных работников, студентов и аспирантов.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265)

УДК 517:518:519:533
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 2658-4948 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

О р г к о м и т е т   ш к о л ы :

Председатель:
Кашин Борис Сергеевич, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Москва

Заместители председателя:
Голубов Борис Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Саратов

Секретарь:
Агафонова Нина Юрьевна, кандидат-физико математических наук, доцент, Саратов

Члены организационного комитета:
Бердышев Виталий Иванович, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Екатеринбург
Конягин Сергей Владимирович, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Антонов Николай Юрьевич, профессор Российской академии наук, Екатеринбург
Бородин Петр Анатольевич, профессор Российской академии наук, Москва
Абанин Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Ростов-на-Дону
Бурлуцкая Мария Шаукатовна, доктор физико-математических наук, профессор, Воронеж
Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Саратов
Дьяченко Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Минск, Беларусь
Лосев Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Волгоград
Насыров Семен Рафаилович, доктор физико-математических наук, профессор, Казань

Олевский Александр Моисеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Тель-Авив, Израиль
Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Плотников Михаил Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, Саратов
Солодов Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, доцент, Москва
Сидоров Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, доцент, Саратов
Скопина Мария Александровна, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербург
Темляков Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Москва

УДК 517.51

Об оценках наилучших M–членных приближений функций многих переменных в пространстве с равномерной метрикой [1]

Г. Акишев (Астана, Казахстан)

akishev_g@mail.ru

В статье рассматриваются пространство непрерывных функций с равномерной метрикой и анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда периодических функций многих переменных и класс Никольского–Бесова в этом пространстве. Установлены оценки наилучших M–членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского-Бесова в равномерной метрике.

Ключевые слова: равномерная метрика, пространство Лоренца–Зигмунда, класс Никольского–Бесова, M–членное приближение..

Благодарности: Работа выполнена в рамках грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК (Проект AP19677486).

On estimates of the best M–term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric [1]

G. Akishev (Astana, Kazakhstan)

akishev_g@mail.ru

The paper considers the space of continuous functions with a uniform metric and the anisotropic Lorentz-Zygmund space of periodic functions of many variables and the Nikol'skii–Besov class in this space. We have established estimates of the best M-term trigonometric approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in a uniform metric.

Keywords: a uniform metric, Lorentz–Zygmund space, Nikol'skii–Besov class, M–term approximation..

Acknowledgements: This research was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677486).

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^m$—m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ с вещественными координатами, $\mathbb{Z}_+^m$— множество точек пространства $\mathbb{R}^m$, с неотрицательными целыми координатами, $\mathbb{T}^m=[0,2\pi)^m$.

$C(\mathbb{T}^m)$—пространство непрерывных функций имеющих период 2π по каждой переменной с нормой $\|f\|_\infty := \max_{\overline{x}\in\mathbb{T}^m}|f(\overline{x})|$

Пусть $\overline{p}=(p_1,\ldots p_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,\ldots\tau_m)$, $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots\alpha_m)$ и $p_j,\tau_j\in(1,\infty)$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,...,m$. Через $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} := \|\ldots\|f^{*_1,\ldots,*_m}\|_{p_1,\alpha_1,\tau_1}\ldots\|_{p_m,\alpha_m,\tau_m}<\infty,$$

где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,...,t_m)$ - невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j\in[0,1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [1]) и

$$\|g\|_{p,\alpha,\tau} := \left\{\int_0^1\big(g(t)\big)^\tau\big(1+|\log_2 t|\big)^{\alpha\tau}t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

Для $\alpha_j=0$, $j=1,...,m$ пространство $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ является анизотропным пространством Лоренца и обозначается $L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, а $\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}=\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\tau}}$ (см. [1]).

Если $\alpha_j=0$ и $p_j=\tau_j=p$, $j=1,...,m$, то $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)=L_p(\mathbb{T}^m)$ – известное пространство Лебега с нормой $\|f\|_p$.

$l_{\overline{p}}$ — пространство последовательностей $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}$ действительных чисел с нормой

$$\left\|\Big\{a_{\overline{n}}\Big\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\overline{p}}}=\Big\{\sum_{n_m=0}^\infty\Big[...\Big[\sum_{n_1=0}^\infty|a_{\overline{n}}|^{p_1}\Big]^{\frac{p_2}{p_1}}...\Big]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\Big\}^{\frac{1}{p_m}}<+\infty,$$

для $1\le p_j<+\infty$, $j=1,2,...,m$, $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_m)$ и $\big\|\{a_{\overline{n}}\}\big\|_{l_\infty}=\sup\limits_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}|a_{\overline{n}}|$ для $p_j=\infty,\ \ j=1,...,m$.

Введем обозначения : $a_{\overline{n}}(f)$—коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}$ и $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle=\sum\limits_{j=1}^m y_jx_j$,

$$\delta_{\overline{s}}\left(f,\overline{x}\right)=\sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}\left(f\right)e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\rho(\bar{s}) = \big\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\big\}$, $[y]$– целая часть действительного числа y и $s_j \in \mathbb{Z}_+$.

В теории функций и ее приложениях важное значение имеет $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$– пространство Никольского–Бесова в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p < \infty$ и его различные обобщения (см. [2], [3]).

Рассматривается аналог класса Никольского–Бесова в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда:

$$\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B := \Big\{ f \in \mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) :\ \|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} + \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} \Big\}_{\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \le 1 \Big\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $0 < \theta_j \leqslant +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$.

В случае $\alpha_j = 0$ и $\tau_j = p_j = p$, $j = 1, \dots, m$ класс $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}B$, совпадает с известным классом Никольского — Бесова $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$ (см. [2], [3]).

Для функции $f \in C(\mathbb{T}^m)$ рассматривается $e_M(f)_\infty$ — наилучшее M–членное тригонометрическое приближение, $M \in \mathbb{N}$ (см. [4], [5]). Если F – некоторый функциональный класс в пространстве $C(\mathbb{T}^m)$, то положим $e_M(F)_\infty = \sup_{f \in F} e_M(f)_\infty$.

Оценки порядка M–членного приближения функций класс Никольского–Бесова $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в равномерной метрике установлены Э.С. Белинским [4], А.С. Романюком [5] соответственно в случаях $\theta = \infty$ и $2 \leqslant \theta < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r_1 > \max\{1/p,\ 1/2\}$. При малых гладкостях $1/p < r_1 \leqslant 1/2$ оценки величины $e_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\infty}B)_\infty$ установлены в недавней совместной работе В. Н. Темлякова и Т. Ульриха [6], теоремы 6.2–6.3.

В докладе будут представлены оценки величины $e_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}B)_\infty$.

В частности,

Теорема. *Пусть* $\overline{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\overline{r} = (r_1, \dots, r_m)$ *и* $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $1 \leqslant \theta_j \le \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$ *и* $0 < r_{j_0} - \max\{\frac{1}{p_{j_0}}, \frac{1}{2}\} = \min\{r_j - \max\{\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\} : j = 1, ..., m\}$, $A = \{j : r_j - \max\{\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\} = r_{j_0} - \max\{\frac{1}{p_{j_0}}, \frac{1}{2}\},\ j = 1, ..., m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$.

1. Если $2 \leqslant \theta_j \le +\infty$, $p_j \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, $1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty \ll M^{-(r_{j_0} - (\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{2})_+)} (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0} - (\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{2})_+) - \sum\limits_{j \in A} \alpha_j}$$

$$\times (\log M)^{\sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} (\log M)^{1/2},$$

при условии $\min\{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})-\sum\limits_{j\in A\setminus\{j'\}}\alpha_j,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_{j'}}-\alpha_{j'}\}>0$, *где* $j'=\max\{j\in A\}$.

2. Если $\alpha_j=0$ *и* $2\leqslant\theta_j\leq+\infty$, $p_j\in(1,2)\cup(2,\infty)$, $1<\tau_j<\infty$, $j=1,...,m$, *то*

$$M^{-(r_{j_0}-(\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{2})_+)}(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}-(\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{2})_+)}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}\ll e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{0},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty$$

3. Если $p_j=2$ *и* $1<\tau_j<\infty$, $2\leqslant\theta_j\leqslant\infty$, $\alpha_j=0$, $j=1,...,m$, *то*

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\overline{0},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty\ll\Big(\frac{\log^{|A|-1}}{M}\Big)^{r_{j_0}}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})+\sum\limits_{j\in A}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})_+}(\log M)^{1/2}.$$

Теорема доказана конструктивным методом, с использованием леммы 6. 1 [7].

Замечание. В случае $\tau_j=p_j=p$, $\theta_j=\theta$, $\alpha_j=0$, для $j=1,...,m$ из сформулированной теоремы следует теорема 1 [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Blozinski A.P.* Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms //Trans. Amer. Math. Soc., 1981, Vol. 263, P. 146–167.

[2] *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.

[3] *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата : Наука, 1976. 224 с.

[4] *Belinskii E.S.* Approximation of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics and estimates of ϵ–entropy // Anal. math. , 1989, Vol. 15 , N 2, P. 67–74.

[5] *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 2. С. 247–261.

[6] *Temlyakov V. N. , Ullrich T.* Approximation of functions with small mixed smoothness in the uniform norm // J. Approx. Theory. 2022. Vol. 277, № 105718. (ArXiv:2012.11983v1, 2020. 21 pp.).

[7] *Темляков В. Н.* Конструктивные разреженные тригонометрические приближение функций и другие задачи для функций смешанной гладкости // Матем. сб. 2016. Т. 206, № 11. С. 131–160.

УДК 517.935.2

Оптимизация алгоритмов моделирования динамики комбинированных систем[1]

Андрейченко Д. К., Мельничук Д. В., Роках Г. Е.
(Саратов, Россия)
andreichenkodk@gmail.com, melnichukdv@sgu.ru, g.rokah@yandex.ru

Предложена оптимизация алгоритмов моделирования переходных процессов в нелинейных комбинированных динамических системах на основе проекционного метода Галеркина и «жестко устойчивых» методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: комбинированные динамические системы, проекционный метод.

Optimization of algorithms for modeling the dynamics of hybrid systems[1]

D. K. Andreichenko, D. V. Melnichuk, G. E. Rokakh
(Saratov, Russia)
andreichenkodk@gmail.com, melnichukdv@sgu.ru, g.rokah@yandex.ru

Optimization of algorithms for modeling transients in nonlinear hybrid dynamical systems based on the Galerkin projection method and "rigidly stable"methods of numerical integration of ordinary differential equations is proposed

Keywords: hybrid dynamical systems, projection method.

Введение

Комбинированные динамические системы (КДС) [1] являются математическими моделями технических систем с объектами управления с сосредоточенными и распределенными по пространству параметрами. Моделирование переходных процессов в КДС после дискретизации по независимым пространственным переменным приводит к численному интегрированию «жестких» систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности и значительно ускоряется на основе «жестко устойчивых» методов [2] при оптимизации вычисления матрицы Якоби.

Алгоритмы моделирования динамики

Уравнения движения нелинейной КДС с входной $\mathbf{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_x}$ и выходной $\mathbf{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_y}$ функциями времени t в форме связанных посредством граничных условий и условий связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях можно привести к виду, аналогичному [3]

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{h});\ \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u})dS \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}),\ \mathbf{r}\in\Omega;\ \mathbb{G}(\mathbf{u},\mathbf{y})|_S = 0,\ S=\partial\Omega \tag{2}$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,\ \mathbf{u}(\mathbf{r},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^{N_r}$ – независимые пространственные координаты, $\Omega\subset\mathbb{R}^{N_r}$ – область, занятая объектами с распределенными параметрами, S – граница области, $\mathbf{u}:\mathbb{R}^{N_r}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_u}$ характеризует движение объектов с распределенными параметрами, $\mathbf{h}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_h}$, $\mathbf{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N_x}\times\mathbb{R}^{N_y}\times\mathbb{R}^{N_h}\to\mathbb{R}^{N_y}$, операторы $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ соответствуют уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи; $\dot{()} = d()/dt$ либо $\dot{()} = \partial()/\partial t$. Начальные условия соответствуют равновесному состоянию, и $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ являются решением (1), (2) при $\dot{()}\equiv 0$. Функция $\mathbf{f}$ дифференцируема по $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, а операторы $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ дифференцируемы по Фреше по $\mathbf{u}$ и дифференцируемы по $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, $\dot{\mathbf{y}}$. Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$, $\mathbf{W}_k{:}\Omega\to\mathbb{R}^{N_u}$ $k=1,2,\ldots$ – полная система функций в области Ω; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_s)$, $\Gamma_k:S\to\mathbb{R}^{N_G}$, $k=1,2,\ldots$ – полная система функций на границе S. Дискретизация уравнений в частных производных и граничных условий (2) по независимым пространственным переменным $\mathbf{r}$ выполняется проекционным методом Галёркина

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\approx\textstyle\sum_{k=1}^{N_\Omega+N_S} u_k(t)\mathbf{W}_k(\mathbf{r});\ \ \int_S \mathbb{G}(\mathbf{u},\mathbf{y})\cdot\Gamma_k(\mathbf{r})dS = 0,\ k=\overline{1,N_S}\\ &\textstyle\int_\Omega \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{W}_k(\mathbf{r})d\Omega = \int_\Omega \mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{W}_k(\mathbf{r})d\Omega,\ k=\overline{1,N_\Omega}\end{aligned} \tag{4}$$

где $()\cdot()$ – скалярное произведение векторов. Из (1), (4) следует задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t,\mathbf{Y}),\ \mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}_0;\ \mathbf{Y} = (y_1,y_2,\ldots,y_{N_y},u_1,u_2,\ldots,u_{N_\Omega})^T \tag{5}$$

$$\mathbf{F}(-0,\mathbf{Y}_0) = 0 \tag{6}$$

Линейные уравнения возмущенного движения КДС имеют вид

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \tfrac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{h})}{\partial\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \tfrac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{h})}{\partial\mathbf{h}}\hat{\mathbf{h}};\ \hat{\mathbf{h}} = \textstyle\int_S \tfrac{\partial\mathbb{H}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}dS\\ &\dot{\hat{\mathbf{u}}} = \tfrac{\partial\mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})}{\partial\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}} + \tfrac{\partial\mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})}{\partial\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \tfrac{\partial\mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\dot{\hat{\mathbf{y}}},\ \mathbf{r}\in\Omega;\\ &\left(\tfrac{\partial\mathbb{G}(\mathbf{u},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}} + \tfrac{\partial\mathbb{G}(\mathbf{u},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}\right)\Big|_S = 0\end{aligned} \tag{7}$$

Дискретизация (7) на основе (4) приводит к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{N_y}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_{N_\Omega})^T$. Численное решение (6) методом Ньютона и дальнейшее численное интегрирование (5) на основе «жестко устойчивых» методов требует вычисления матрицы Якоби $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})/\partial \mathbf{Y}$, что весьма трудоемко для задач большой размерности. Эффективное вычисление матрицы Якоби реализуется на основе следующих утверждений:

Теорема. *Если функция* $\mathbf{f}$ *дифференцируема по* $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, *операторы* $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ *дифференцируемы по Фреше по* $\mathbf{u}$ *и дифференцируемы по* $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, $\dot{\mathbf{y}}$, *то, в предположении* $\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{Y}_j]$, $\hat{Y}_j = \delta_k^j$, $k, j = \overline{1, N_y + N_\Omega}$ *(*δ_k^j *– символ Кронекера),* k*-й столбец матрицы Якоби* $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})/\partial \mathbf{Y}$ *может быть вычислен применением к линейным уравнениям возмущенного движения КДС* (7) *того же варианта проекционного метода* (4), *на основе которого из исходных нелинейных уравнений КДС* (1)-(3) *получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений* (5).

Следствие. *Столбцы матрицы* $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})/\partial \mathbf{Y}$ *могут быть вычислены независимо, т.е. параллельно.*

Моделирование цилиндрического гидродинамического подвеса

Математическая модель подвеса в безразмерных переменных имеет вид

$$\pi\beta(\rho_2/\rho - 1)\ddot{\mathbf{y}} = \pi(\rho_2/\rho - 1)\gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{N},\ \pi\rho_2 J\dot{\omega}/\rho = -\beta G/\sigma \tag{8}$$

$$\mathbf{g} = (0, -1)^T,\ h = 1 - \mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_r - \tfrac{1}{2}\beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_\varphi)^2,\ \mathbf{e}_r = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)^T$$

$$v_r = -(1 - \beta\xi)\textstyle\int_0^\xi d\xi \partial v_\varphi/\partial\varphi,\ p = p|_{\xi=0} + \beta\textstyle\int_0^\xi (v_\varphi^2 + 2v_\varphi)d\xi$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\varphi}\textstyle\int_0^h v_\varphi d\xi = \tfrac{\partial}{\partial\varphi}\left[(1 + \beta h)(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{e}_\varphi)\right],\ \mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi)^T \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \left[1 + (1 - \beta\xi)v_\varphi\right]\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi} + \beta v_r(2 + v_\varphi) = \tag{10}$$

$$= -(1 - \beta\xi)\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\xi^2} + \beta\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi} + \beta^2\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$v_\varphi|_{\xi=0} = -\omega,\ v_\varphi|_{\xi=h(\varphi,t)} = \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{e}_\varphi) \tag{11}$$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\beta}{\sigma}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\varphi d\varphi,\ G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} d\varphi \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ и ω – смещение внутреннего тела и разность угловых скоростей внешнего и внутреннего тел; $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ – вектор перегрузок; $\mathbf{x}_{\text{кдс}}(t) = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{y}_{\text{кдс}}(t) = (y_1(t), y_2(t), \omega(t))^T$ - входная и выходная функции; β – относительный зазор; $\mathbf{N}$, G – сила и момент сил; ρ_2, ρ –

плотности внутреннего тела и жидкости; ξ, φ – радиальная координата и полярный угол; h – толщина поддерживающего слоя; p, v_r, v_φ – давление и компоненты скорости в жидкости; σ – колебательное число Рейнольдса. По сравнению с [4] в (10) учтено слагаемое $\beta^2\sigma^{-1}\partial^2 v_\varphi/\partial\varphi^2$. После перехода к деформированной координате $x=\xi/h$ к (8)-(12) применялся проекционный метод (4) при $v_\varphi(x,\varphi,t)\approx\sum_{n=0}^{N_x+2}\sum_{k=-N_\varphi}^{N_\varphi} v_{\varphi_{nk}}(t)T_n(2x-1)e^{ik\varphi}$, $v_{\varphi_{n,-k}}=\bar{v}_{\varphi_{nk}}$, $\partial p/\partial\varphi|_{x=0}\approx\sum_{k=1}^{N_\varphi}(p_k(t)e^{ik\varphi}+p_{-k}(t)e^{-ik\varphi})$, $p_{-k}=\bar{p}_{-k}, T_n(x)=\cos(n\arccos x)$. Численное интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений выполнялось явно-неявным методом Адамса переменного шага и порядка с 1 по 13 либо «жестко устойчивым» ФДН-методом [2] переменного шага и порядка с 1 по 5, в том числе и с распараллеливанием вычислений. Математическая модель (8)-(12) приводит к меньшим смещениям внутреннего тела и амплитудам его колебаний по сравнению с [4]. Для подвеса с параметрами $\beta=0.2$, $\rho_2/\rho=0.594$, $J=0.5$, $\gamma=1.847$, $\sigma=10$ при $\mathbf{a}(t)=(0,a\cdot 1(t))^T$, $a=0.355$ данные о затратах времени при моделировании выходных функций на процессоре Intel i7 1065G7 x4 приведены в таблице 1.

Таблица 1: Время численного моделирования, *c.*

N_x	N_φ	Адамс, послед.	ФДН, послед.	ФДН, парал.
7	10	4909	23.8	10.9
9	10	25346	41.3	17.3
11	10	45783	58.7	23.6
13	10	66220	76.2	29.9
15	10	86657	93.6	36.2
7	15	13434	125	54.0

Переход к оптимизированной версии алгоритма на основе ФДН-метода позволяет на порядок сократить время компьютерного моделирования. Далее, оптимизированный алгоритм ощутимо ускоряется за счет распараллеливания вычисления столбцов матрицы Якоби. Сокращение времени компьютерного моделирования составляет от 250 до 2400 раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

[2] *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М : Мир, 1999. 512 с.

[3] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., Портенко М. С.* Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических си-

стем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 465–475.

[4] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 13-26.

УДК 517.518+517.983

Приближение операторов дифференцирования в пространствах Лебега на оси и родственные задачи в преддуальных пространствах для пространств мультипликаторов[1]

В. В. Арестов (Екатеринбург, Россия)

vitalii.arestov@urfu.ru

Будут обсуждаться свойства преддуальных пространств для пространств мультипликаторов пары пространств Лебега на $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, и их применение в задаче Стечкина о наилучшем приближении в пространствах Лебега на оси оператора дифференцирования порядка k на классе n раз $(0 \leq k < n)$ дифференцируемых функций. Будут приведены новые случаи решения задачи Стечкина и двусторонние конструктивные оценки значения задачи при конкретных значениях параметров.

Ключевые слова: Пространства мультипликаторов, преддуальное пространство, оператор дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова.

Approximation of differentiation operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in predual spaces of spaces of multiplier[1]

V. V. Arestov (Ekaterinburg, Russia)

vitalii.arestov@urfu.ru

We will discuss the properties of predual spaces of the spaces of multipliers for a pair of Lebesgue spaces in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, and their application to Stechkin's problem on the best approximation in Lebesgue spaces on the axis of the differentiation operator of order k on the class of n times $(0 \leq k < n)$ differentiable functions. New cases of solving Stechkin's problem and two-sided constructive estimates of the value of the problem for particular values of the parameters will be given.

Keywords: spaces of multipliers, predual space, differentiation operator, Stechkin problem, Kolmogorov inequality.

Преддуальное пространство для пространства (p, q)-мультипликаторов

Ниже используются стандартные обозначения классических функциональных комплексных пространств: $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq \gamma < \infty$ — пространство Лебега измеримых на $\mathbb{R}^m$ функций x, у которых $|x|^\gamma$ суммируем на $\mathbb{R}^m$; $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, $C = C(\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$ и $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ — подпространство функций из C, имеющих нулевой предел на бесконечности.

Пусть $\mathcal{S}$ есть пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$, а $\mathcal{S}'$ — соответствующее двойственное пространство обобщенных функций, см., например, [1]. Значение функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ на элементе $x \in \mathcal{S}$ будем обозначать через $\langle \theta, x \rangle$. Пространство $\mathcal{S}'$ содержит множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ функций x, измеримых, локально суммируемых на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условию $\int (1+|t|)^d |x(t)| dt < \infty$ с некоторым $d = d(x) \in \mathbb{R}$; здесь и ниже в интегралах по $\mathbb{R}^m$ множество интегрирования не указывается. Функции $x \in \mathcal{L}$ сопоставляется функционал $x \in \mathcal{S}'$ по формуле $\langle x, \phi \rangle = \int x(t)\phi(t)dt$, $\phi \in \mathcal{S}$.

Преобразование Фурье функций (по крайней мере, из пространства $L = L_1(\mathbb{R}^m)$) определим формулой $\widehat{x}\,(t) = \int e^{-2\pi t\eta i} x(\eta)\, d\eta$; обратное преобразование Фурье будем обозначать символом $\check{x}$. Преобразование Фурье $\widehat{\theta}$ функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathcal{S}'$, действующий по формуле $\langle \widehat{\theta}, x \rangle = \langle \theta, \widehat{x} \rangle$, $x \in \mathcal{S}$.

Для $1 \le p, q \le \infty$ обозначим через $\mathcal{T}_{p,q} = \mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ множество линейных ограниченных операторов из $L_p = L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_q = L_q(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно (любого) сдвига. Свойствам инвариантных ограниченных операторов посвящены обширные исследования (см. [1–3] и приведенную там библиографию). Так известно, что если $p > q$, то [2, теорема 1.1] при $p < \infty$ множество $\mathcal{T}_{p,q}$ состоит лишь из оператора $T \equiv 0$, а при $p = \infty$ сужение оператора $T \in \mathcal{T}_{\infty,q}$ на множество $(L_\infty)_0$ функций из L_∞, имеющих нулевой предел на бесконечности, есть нулевой оператор. В связи с этим ниже будет предполагаться, что $1 \le p \le q \le \infty$.

A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry (1967) в совместной работе [4] доказали, что при $1 \le p \le q < \infty$ пространство $\mathcal{T}_{p,q}(G)$ линейных ограниченных операторов из $L_p(G)$ в $L_q(G)$ на локально компактной абелевой группе G, инвариантных относительно сдвига (точнее, операции группы), является сопряженным пространством для конструктивно описанного ими функционального пространства $A_{p,q}(G)$. Двумя годами ранее (1965) A. Figà-Talamanca [5] получил подобный результат для случая $1 < q = p < \infty$. Относительно пары линейных нормированных пространств X, Y со свойством, что Y является сопряженным для X, т. е. $X^* = Y$, говорят также, что пространство X является преддуальным для Y. В этой терминологии пространство $A_{p,q}(G)$ является преддуальным для пространства $\mathcal{T}_{p,q}(G)$.

Результаты A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry справедливы, в частности, для пространств $\mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ линейных ограниченных операторов из пространства $L_p(\mathbb{R}^m)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно группы сдвигов.

Известно (см. [2, теорема 1.2] или [1, гл. I, теорема 3.16]), что если $q \geq p$, то на $\mathcal{S}$ оператор $T \in \mathcal{T}_{p,q} = \mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ имеет вид свертки $Tx = \theta * x$, $x \in \mathcal{S}$, с элементом $\theta = \theta_T \in \mathcal{S}'$. Множество $M_{p,q} = \{\theta_T \colon T \in \mathcal{T}_{p,q}\} \subset \mathcal{S}'$ является банаховым пространством относительно нормы $\|\theta_T\|_{M_{p,q}} = \|T\|_{L_p \to L_q}$. Элементы $\theta \in M_{p,q}$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, называют (p,q)-мультипликаторами.

Конструктивное описание мультипликаторов известно лишь в отдельных случаях. Известна структура пространств $M(2,2)$ и $M(p,\infty) = M(1,p')$ (см., например, [2, § 1.2], [1, гл. 1, § 3]); а именно, справедливы равенства (вместе с равенством норм элементов)

$$M_{2,2} = \widehat{L}_\infty = \{\widehat{\theta} \colon \theta \in L_\infty\},$$

$$M_{p,\infty} = M_{1,p'} = L_{p'} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$M_{\infty,\infty} = M_{1,1} = V;$$

здесь $V = V(\mathbb{R}^m)$ есть пространство (комплексных) ограниченных борелевских мер на $\mathbb{R}^m$.

При $1 \leq p \leq q \leq \infty$ определим на множестве $\mathcal{S}$ функционал

$$\|\phi\|_{p,q} = \sup\{|\langle\theta,\phi\rangle| \colon \theta \in M_{p,q},\ \|\theta\|_{M_{p,q}} \leq 1\}, \quad \phi \in \mathcal{S}. \tag{1}$$

При всех $1 \leq p \leq q \leq \infty$ функционал (1) на множестве $\mathcal{S}$ конечен и является нормой.

При $1 \leq p \leq q \leq \infty$ обозначим через $F_{p,q} = F_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ пополнение пространства $\mathcal{S}$ относительно нормы (1). Пространство $F_{p,q}$ описано в других терминах в сравнении с пространством $A_{p,q} = A_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry [4], однако пространство $F_{p,q}$ также является преддуальным для пространства мультипликаторов $M_{p,q}$, т. е. для любых $1 \leq p \leq q \leq \infty$ имеет место равенство

$$F_{p,q}^* = M_{p,q}. \tag{2}$$

Конструкция пространства $F_p = F_{p,p}$ и доказательство свойства (2) были даны в работах автора [6] и [7] соответственно при $q = p$ и в общем случае $p \leq q$.

Приведем несколько свойств пространств $F_{p,q}$ для конкретных значений параметров.

Теорема 1. *Пространство $F_{p,q}$ обладает следующими свойствами.*

1. *При* $q = \infty$ $(p = 1)$

$$F(p,\infty) = F(1,p') = L_p, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$F(\infty,\infty) = F(1,1) = C_0.$$

2. *При* $q = p = 2$

$$F_{2,2} = \check{L} = \{f \in C_0 \colon \widehat{f} \in L\}, \quad \|f\|_{F_{2,2}} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_{2,2}.$$

3. *Пусть* $q = p$ *и* $\overline{p} = \max\{p, p'\}$. *Пространство* $F_{p,p}$ *по* $\overline{p}$ *не убывает, а точнее, если* $2 \le \overline{p}_1 \le \overline{p}_2 \le \infty$, *то*

$$F_{p_1,p_1} \subset F_{p_2,p_2} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p_2,p_2}} \le \|f\|_{F_{p_1,p_1}}, \quad f \in F_{p_1,p_1},$$

в частности, при всех значениях p, $1 \le p \le \infty$,

$$F_{p,p} \subset C_0 \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p,p}} \ge \|f\|_{C_0}, \quad f \in F_{p.p},$$
$$F_{2,2} \subset F_{p,p} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p,p}} \le \|f\|_{F_{2,2}} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_{2.2}.$$

Пространства $F_{p,q}$ появились в исследованиях автора задачи Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными линейными операторами в пространствах Лебега на оси (см. историю в [7]).

Применение в задаче Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования

Пусть p, q, r, s — параметры, удовлетворяющие ограничениям $1 \le p, q, r, s \le \infty$. Для целого $n \ge 1$ определим пространство $W^n_{r,p}$ функций $f \in L_r$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_p$. В пространстве $W^n_{r,p}$ выделим класс $Q^n_{r,p} = \{f \in W^n_{r,p} \colon \|f^{(n)}\|_{L_p} \le 1\}$. Обозначим через $\mathcal{B}(L_r, L_s)$ множество всех линейных ограниченных операторов из L_r в L_s, а через $\mathcal{B}(N; L_r, L_s)$ при $N > 0$ — множество операторов $T \in \mathcal{B}(L_r, L_s)$ с нормой $\|T\|_{L_r \to L_s} \le N$. Пусть $0 \le k < n$ — целые, причем $k > 0$, если $r = s$. Для оператора $T \in \mathcal{B}(L_r, L_s)$ положим

$$U(T) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_{L_q} \colon f \in Q^n_{r,p}\}.$$

При $N > 0$ величина

$$E_{n,k}(N) = E_{n,k}(N; r, s; p, q) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathcal{B}(N; L_r, L_s)\} \tag{3}$$

есть наилучшее приближение (в пространстве L_q) оператора дифференцирования D^k порядка k на классе $Q^n_{r,p}$ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N; L_r, L_s)$. Задача Стечкина состоит в вычислении величины (3) и экстремального оператора, на котором в (3) достигается нижняя грань; см. [8] и обзор исследований в [9] и [10].

Наиболее полно исследована задача Стечкина (3) в трехпараметрическом варианте, т. е. при $s = q$. В этом случае используется оценка снизу Стечкина величины наилучшего приближения (3) через наилучшую константу в неравенстве Колмогорова между нормами Лебега функции и ее производных [9]. В четырехпараметрическом случае, для s и q, не связанных между собой, в исследовании задачи Стечкина важное значение имеет свойство инвариантности задачи (3) относительно сдвига. Именно это свойство приводит к теореме 2, см. библиографию в [10].

Пусть $K = K_{n,k}(r, s; p, q)$ есть наилучшая константа в неравенстве

$$\|x^{(k)}\|_C \le K\|x\|^{\alpha}_{r,s}\|x^{(n)}\|^{1-\alpha}_{p,q}, \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{n - k + 1/q - 1/p}{n + 1/q - 1/p + 1/r - 1/s}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Теорема 2. *Если $s \ge r \ge 1$, $q \ge p > 1$, причем $s > r$ при $k = 0$, то для любого значения $N > 0$ имеет место равенство*

$$E_{n,k}(N; r, s; p, q) = \beta\alpha^{\alpha/\beta}K^{1/\beta}N^{-\alpha/\beta},$$

где K — наименьшая константа в (4).

Теорема 2 позволила автору получить точное или близкое к точному решение задачи Стечкина в ряде новых случаев, см. [10] и приведенную там библиографию. Так имеет место такое утверждение.

Для параметров $1 \le r, p \le \infty$ положим $\overline{r} = \max\{r, r'\}$, $\overline{p} = \max\{p, p'\}$. В утверждениях теоремы 3 будет присутствовать условие

$$\overline{r}_1 \le \overline{r}_2, \quad \overline{p}_1 \le \overline{p}_2, \tag{5}$$

на две пары параметров r_1, r_2 и p_1, p_2.

Теорема 3. *При $1 \le r \le \infty$, $1 < p \le \infty$, $0 < k < n$ для величины $E_{n,k}(N; r, r; p, p)$ справедливы следующие два утверждения.*

1. *При любом $N > 0$ значение $E_{n,k}(N; r, r; p, p)$ задачи Стечкина не убывает по параметрам $\overline{r}, \overline{p}$, а точнее, если две пары параметров r_1, r_2 и p_1, p_2 удовлетворяют условиям* (5), *то имеет место неравенство*

$$E_{n,k}(r_1, r_1; p_1, p_1) \le E_{n,k}(r_2, r_2; p_2, p_2).$$

2. *При любом* $N > 0$ *для значений задачи Стечкина справедливы двусторонние оценки*

$$\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta} \le E_{n,k}(N; r, r; p, p) \le \beta\alpha^{\alpha/\beta}\,(\pi/2)^{1/\beta}\,N^{-\alpha/\beta},$$

где $\alpha = (n-k)/n,\ \beta = k/n.$

Данное сообщение продолжает тематику сообщения автора на предыдущей, 21-й международной Саратовской зимней школе [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 333 с.

[2] *Хермандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.

[3] *Larsen R.* An introduction to the theory of multipliers. Berlin etc. : Springer, 1971. 282 p.

[4] *Figà-Talamanca A., Gaudry G. I.* Density and representation theorems for multipliers of type (p, q) // J. Australian Math. Soc. 1967. Vol. 7, № 1. P. 1–6.

[5] *Figà-Talamanca A.* Translation invariant operators in L^p // Duke. Math. J. 1965. Vol. 32. P. 495–502.

[6] *Арестов В. В.* О сопряженности пространства мультипликаторов // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 3–15.

[7] *Arestov V. V.* Predual spaces for the space of (p, q)-multipliers and their application in Stechkin's problem on approximation of differentiation operators // Anal. Math. 2023. Vol. 49, № 1. P. 43–65.

[8] *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.

[9] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.

[10] *Arestov V. V.* Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in the spaces of (p, q)-multipliers and their predual // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, № 2. P. 4–27.

[11] *Арестов В. В.* Преддуальные пространства для пространства (p, q)-мультипликаторов и их применение в задаче Стечкина о приближении операторов дифференцирования // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Саратовский университет, 2022. С. 33–39.

УДК 517.9

О периодическом аналоге одного интегрального преобразования[1]

А. Б. Афанасьева, В. Б. Васильев, А. Б. Каманда Бонгай
(Белгород, Россия)
vbv57@inbox.ru

В работе рассматривается периодический аналог одного интегрального преобразования, которое применялось для построения решений дискретных эллиптических псевдодифференциальных уравнений в конических областях. Рассмотрен случай угла на плоскости и выписан явный вид этого преобразования, содержащий периодический аналог преобразования Гильберта.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, дискретное преобразование, периодический аналог преобразования Гильберта.

On periodic analogue of a certain integral transform[1]

A. B. Afanaseva, V. B.'Vasilyev, A. B. Kamanda Bongay
(Belgorod, Russia)
vbv57@inbox.ru

We consider periodic analogue of a certain integral transform which was applied for constructing solutions for discrete elliptic pseudo-differential equations in conical domains. the case of a plane sector was considered and explicit form for this transform with periodic analogue of the Hilbert transform is written.

Keywords: digital pseudo-differential operator, discrete transform, periodic analogue of the Hilbert transform.

Введение

В работах [1,2,3] изучались вопросы разрешимости эллиптических псевдодифференциальных уравнений в конических областях. Для модельных псевдодифференциальных уравнений были построены решения в простых канонических областях с помощью специальной факторизации эллиптических символов. однако с вычислительной точки зрения полученные формулы трудно использовать и в связи с этим появилась необходимость дискретизации полученных результатов. Появилась концепция дискретных псевдодифференциальных операторов [4] и некоторые результаты получили дискретную интерпретацию.При построении решений в непрерывном случае использовались некоторое интегральное преобразование, дискретный аналог которого приводится в этой заметке.

Дискретные функции и операторы

Пусть $\mathbb{Z}^2$ – целочисленная решетка на плоскости, $h > 0, \hbar = h^{-1}$. Обозначим $K_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a_n|x_1| a_n > 0\}$ угол раствора $2 \operatorname{arctg} a_n$, где a_n может принимать значения вида $n, 1/n, n \in \mathbb{N}$, $K_{n,d} = h\mathbb{Z}^2 \cap K_n$. Мы работаем с функциями дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2, \hbar = h^{-1}$. Функции, определенные на $\hbar\mathbb{T}^2$, мы трактуем как периодические функции на $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

На функциях u_d дискретного аргумента можно определить дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

По заданной в $\mathbb{R}^2$ измеримой периодической функции $\widetilde{A}_d(\xi)$ (называемой символом) с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$ можно определить дискретный псевдодифференциальный оператор A_d в дискретном угле $K_{n,d}$ следующей формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_{n,d}.$$

Дискретные и периодические преобразования

При исследовании разрешимости уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_{n,d} \tag{1}$$

возникает необходимость применения замены переменных, которая переводит точки дискретного угла $K_{n,d}$ в точки верней полуплоскости. Более точно, для $\tilde{x} \in K_{n,d}$ новые переменные выглядят так

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{x}_2 - a_n|\tilde{x}_1| \quad . \end{aligned}$$

Если обозначить оператор замены переменной T_{a_n}, то мы получим

$$(T_{a_n} u_d)(\tilde{y}) = u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 - a_n|\tilde{x}_1|).$$

Решение уравнения (1) конструируется в образах Фурье, и поэтому желательно знать, как выглядит в образах Фурье оператор T_{a_n}, действующего на дискретную функцию, сосредоточенную на $K_{n,d}$.

$$(F_dT_{a_n}u_d)(\xi)=\lim_{\tau\to+0}\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2-a_n|\tilde{x}_1|)h^2=$$

$$=\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}}he^{i\tilde{x}_1\cdot\xi_1}\left(\sum_{\tilde{x}_2\in h\mathbb{Z}}e^{i\tilde{x}_2\cdot\xi_2}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2-a_n|\tilde{x}_1|)h\right)=$$

$$=\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}}he^{i\tilde{x}_1\cdot\xi_1}\sum_{\tilde{y}_2\in h\mathbb{Z}}e^{i(\tilde{y}_2+a_n|x_1|)\cdot\xi_2}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{y}_2)h$$

после замены $\tilde{y}_2=\tilde{x}_2-a_n|\tilde{x}_1|$. Тогда

$$(F_dT_{a_n}u_d)(\xi)=\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}}he^{i\tilde{x}_1\cdot\xi_1}e^{ia_n|\tilde{x}_1|\cdot\xi_2}\hat{u}_d(x_1,\xi_2),$$

где $\hat{u}_d(x_1,\xi_2)$ - дискретное преобразование Фурье по второй переменной. Положим $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\dots\}$, $\mathbb{Z}_-=\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+$ и разобьем последнюю сумму на два слагаемых. Тогда

$$(F_dT_{a_n}u_d)(\xi)=\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_+}he^{i\tilde{x}_1\cdot(\xi_1+a_n\xi_2)}\hat{u}_d(x_1,\xi_2)+\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_-}he^{i\tilde{x}_1\cdot(\xi_1-a_n\xi_2)}\hat{u}_d(x_1,\xi_2)$$

Последние две суммы вычислялись в [5] при $h=1$ путем регуляризации введением комплексного параметра и применения свойства преобразования Фурье о свертке. В результате имеем следующее выражение

$$(F_dT_{a_n}u_d)(\xi)=\frac{\tilde{u}_d(\xi_1+a_n\xi_2,\xi_2)+\tilde{u}_d(\xi_1+a_n\xi_2,\xi_2)}{2}+$$

$$+v.p.\frac{ih}{4\pi}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1+a_n\xi_2-\eta_1)}{2}\tilde{u}_d(\eta_1,\xi_2)d\eta_1-$$

$$-v.p.\frac{ih}{4\pi}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-a_n\xi_2-\eta_1)}{2}\tilde{u}_d(\eta_1,\xi_2)d\eta_1.$$

С помощью последней формулы конструируется решение дискретного уравнения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М : URSS, 2010. 135 с.

[2] *Васильев В. Б.* Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах // Сибирск. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 1129–1149.

[3] *Vasilyev V.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opuscula Math. 2019. V. 39, No 1. P. 109–124.

[4] *Vasilyev V. B.* On a digital version of pseudo-differential operators and its applications // Lect. Notes Comput. Sci. V. 11386. Cham : Springer, 2019. P. 596–603.

[5] *Vasilyev A., Vasilyev V.* Discrete singular operators and equations in a hal-space // Azerb. J. Math. 2013. V. 3, No 1. P. 84–93.

УДК 517.9

Градиентные методы минимизации [1]

М. В. Балашов (ИПУ РАН, Москва, Россия)
balashov73@mail.ru

В работе обсуждается современное состояние дел в градиентных методах решения задач поиска минимума функции на множестве: методе проекции градиента и методе условного градиента. Будут сформулированы результаты о линейной сходимости для выпуклых задач, а также рассмотрены возможные обобщения этих результатов на невыпуклый случай.

Ключевые слова: Метод проекции градиента, метод условного градиента, сильная выпуклость, липшицев градиент, метрическая регулярность, негладкий анализ.

Gradient minimization methods [1]

M. V. Balashov (ICS RAS, Moscow, Russia)
balashov73@mail.ru

In the paper, we discuss the current state of arts in gradient methods for solving problems of finding the minimum of a function on a set: about the gradient projection method and about the conditional gradient method. Results on linear convergence for convex problems will be formulated, and possible generalizations of these results to the non-convex case will be considered.

Keywords: gradient projection method, conditional gradient method, strong convexity, Lipschitz continuous gradient, metric regularity, nonsmooth analysis.

Введение

В $\mathbb{R}^n$ через (x, y) обозначим скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и соответствующую евклидову норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Для функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ через $f'(x)$ будем обозначать градиент Фреше f в точке x.

Рассмотрим задачу

$$f_0 = \min_{x \in \mathcal{Q}} f(x), \tag{1}$$

где $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ замкнутое подмножество и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция с непрерывным по Липшицу градиентом. Через $\Omega_0 \subset \mathcal{Q}$ будем обозначать непустое множество решений (1). Условие Липшица для градиента $f'(x)$ достаточно требовать в некоторой равномерной окрестности множества $\mathcal{Q}$. Везде ниже мы будем предполагать, что решение по x задачи (1) существует, т.е. $\Omega_0 \neq \emptyset$ и $f_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $P_{\mathcal{Q}}x$ — метрическая проекция точки x на множество $\mathcal{Q}$ и $\varrho(x, \mathcal{Q})$ — расстояние от точки x до множества $\mathcal{Q}$.

В докладе будут обсуждаться условия линейной сходимости, т.е. сходимости со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем < 1, метода проекции градиента

$$x_1 \in \mathcal{Q}, \qquad x_{k+1} \in P_{\mathcal{Q}}\left(x_k - tf'(x_k)\right), \quad t > 0, \tag{2}$$

и метода условного градиента $x_1 \in \mathcal{Q}$

$$z_k \in \operatorname{Arg}\max_{x \in \mathcal{Q}}(-f'(x_k), x), \qquad x_{k+1} = (1 - t_k)x_k + t_k z_k, \quad t_k \in [0, 1]. \tag{3}$$

В частности, точку x_{k+1} по точкам x_k, z_k можно выбирать в алгоритме (3) по правилу

$$x_{k+1} \in \operatorname{Arg}\min_{x \in [x_k, z_k]} f(x). \tag{4}$$

Для простоты мы будем рассматривать ситуацию в $\mathbb{R}^n$, хотя большинство фактов легко переносится на случай вещественного гильбертова пространства.

Общая ситуация. Монотонность алгоритмов. Выпуклый случай

Начнём с рассмотрения алгоритмов (2) и (3) для произвольного замкнутого множества $\mathcal{Q}$ и достаточно произвольного вида функции f.

Напомним, что функция $f : U \to \mathbb{R}$ слабо вогнута на выпуклом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$ с константой $L_1 > 0$, если функция $h(x) = f(x) - \frac{L_1}{2}\|x\|^2$ вогнута (выпукла вверх) на U. Дифференцируемость функции f не предполагается. *Супердифференциал Фреше* функции f в точке $x_0 \in U$ есть

$$\partial_F^+ f(x_0) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \quad \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (p, x - x_0)}{\|x - x_0\|} \leq 0 \right\}.$$

Для слабо вогнутой с константой L_1 функции f имеет место равенство [1, Proposition 1.107(i)]

$$\partial_F^+ f(x_0) = \partial^+ h(x_0) + L_1 x,$$

где $\partial^+ h(x_0)$ супердифференциал вогнутой функции h. Будем говорить, что функция удовлетворяет условию верхней квадратичной аппроксимации с константой L_1, если

$$f(x) \leq f(x_0) + (f'(x_0), x - x_0) + \frac{L_1}{2}\|x - x_0\|^2, \qquad \forall x_0, x, \ \forall f'(x_0) \in \partial_F^+ f(x_0).$$

Из определения слабой вогнутости легко вытекает, что слабо вогнутая функция (и только слабо вогнутая функция) удовлетворяет условию верхней квадратичной аппроксимации с одной константой L_1.

Лемма 1. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ слабо вогнутая с константой $L_1 > 0$, множество $\mathcal{Q}$ замкнуто, $x_1 \in \mathcal{Q}$, $t \in \big(0, \frac{1}{L_1}\big)$, суперградиент Фреше $f'(x_1) \in \partial_F^+ f(x_1)$ и $x_2 \in P_{\mathcal{Q}}\big(x_1 - tf'(x_1)\big)$ произвольны. Тогда*

$$f(x_1) - f(x_2) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - L_1\right)\|x_2 - x_1\|^2. \tag{5}$$

Заметим, что в лемме 1 множество $\mathcal{Q}$, как и функция f, не выпукло, поэтому проекция $P_{\mathcal{Q}}\big(x_1 - tf'(x_1)\big)$ вообще говоря не одноточечна.

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом суперградиент Фреше $f'(x_1) \in \partial_F^+ f(x_1)$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$\psi(x) = f(x_1) + \big(f'(x_1), x - x_1\big) + \frac{1}{2t}\|x - x_1\|^2.$$

В силу условия слабой вогнутости f с константой L_1 выполнена квадратичная аппроксимация f, откуда для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнена оценка

$$\psi(x) \geq f(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - L_1\right)\|x - x_1\|^2.$$

Для функции $\psi(x)$ точка $x_1 - tf'(x_1)$ является глобальным минимумом. Из того, что линии уровня $\psi(x) = C$ — сферы с центром $x_1 - tf'(x_1)$, получаем $\psi(x_2) \leq \psi(x_1)$. Отсюда

$$f(x_1) = \psi(x_1) \geq \psi(x_2) \geq f(x_2) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t} - L_1\Big)\|x_2 - x_1\|^2.$$

$\square$

Аналогично, из условия верхней квадратичной аппроксимации в методе (3), для всякого для $\varepsilon \in (0,1)$ и $t \in (\varepsilon, (2-\varepsilon)/L_1)$ найдётся константа $C(\varepsilon) > 0$ такая, что [2, §6]

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -C(\varepsilon)\min\left\{\big(f'(x_k), x_k - z_k\big), \frac{\big(f'(x_k), x_k - z_k\big)^2}{\|x_k - z_k\|^2}\right\} \leq 0.$$

Таким образом, для слабо вогнутой функции алгоритм (3) также является строго монотонным.

В дальнейшем мы будем считать, что функция f имеет липшицев градиент с константой L_1. Известно, что такие функции слабо вогнутые с той же константой L_1 [3, теорема 2.1.2]. Приведённые результаты гарантирует монотонность алгоритма для такой функции.

При условии липшицевой дифференцируемости и выпуклости (выпуклости вниз) f, а также выпуклости и компактности множества $\mathcal{Q}$, оценка в алгоритмах (2) и (3) по функции имеет вид

$$f(x_k) - f_0 \leq \frac{C}{k}$$

для некоторой константы $C > 0$, зависящей от f и $\mathcal{Q}$ [2]. Пример функций $f_m(x) = x^{2m}$, $m \in \mathbb{N}$, в задаче $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f_m(x)$ (с очевидным решением $x_0 = 0$) показывает, что скорость сходимости $\|x_k - x_0\|$ в методе градиентного спуска может быть сколь угодно медленной. Аналогичный пример можно привести для алгоритма (3).

Градиентный спуск в случае $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^n$

Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Лежанского-Поляка-Лоясевича (условию LPL)* [4], если f дифференцируема по Фреше, множество $\Omega_0 = \operatorname{Arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ ее глобальных минимумов непусто и существует такая константа $\mu > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|f'(x)\|^2 \geq \mu\big(f(x) - f(x_0)\big) \qquad \forall x_0 \in \Omega_0. \tag{6}$$

Совместно с формулой (5) леммы 1 для липшицево дифференцируемой функции f, удовлетворяющей условию (6), получаем для шага $0 < t < 1/L_2$

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - L_1\right)\|tf'(x_k)\|^2 \geq \frac{\mu}{2}\left(t - t^2 L_1\right)\left(f(x_k) - f_0\right),$$

и для $q = q(\mu, t) = \frac{\mu}{2}\left(t - t^2 L_1\right)$ и $\varphi_k = f(x_k) - f_0$ имеем

$$\varphi_k - \varphi_{k+1} \geq q\varphi_k, \quad \varphi_{k+1} \leq (1-q)\varphi_k,$$

т.е. получаем линейную сходимость $\{\varphi_k\}$ к нулю. По точке

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 = t^2\|f'(x_k)\|^2 \leq \frac{\varphi_k}{\frac{1}{2}(\frac{1}{t} - L_1)}$$

также получаем линейную сходимость.

Отметим, что сильно выпуклая с константой $\varkappa > 0$ функция (т.е. такая функция f, что функция $f(x) - \frac{\varkappa}{2}\|x\|^2$ выпуклая вниз) удовлетворяет условию в духе (LPL) вида

$$\|p\|^2 \geq \varkappa\big(f(x) - f_0\big) \quad \forall p \in \partial f(x),$$

где $\partial f(x) = \{p \in \mathbb{R}^n \ : \ f(z) \geq f(x) + (p, z - x), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n\}$ есть субдифференциал функции f в точке x (дифференцируемость f не предполагается). Существуют также невыпуклые функции, удовлетворяющие условию (LPL). В градиентном спуске можно эффективно применять шаг Армихо, для вычисления которого не нужно знание констант.

Минимизация на многообразиях

Рассмотрим частный случай задачи (1), когда множество $\mathcal{Q}$ является гладким компактным многообразием без края, а функция f является вещественно-аналитической, т.е. для каждой точки найдётся окрестность, где функция представима некоторым сходящимся степенным рядом. Тогда для всякой точки $x \in \mathcal{Q}$ найдётся $\delta > 0$, $\alpha \in (1, 2]$ и $\mu > 0$ такие, что для всякого $y \in \mathcal{Q}$, $\|y - x\| \leq \delta$, выполнено неравенство в духе неравенства Лоясевича [5, Proposition 2.2]

$$\mu|f(y) - f(x)| \leq \|P_{T_y} f'(y)\|^{\alpha}, \tag{7}$$

где T_y — касательное подпространство в точке $y \in \mathcal{Q}$ к многообразию $\mathcal{Q}$.

Компактное гладкое многообразие без края является проксимально гладким с некоторой константой $R > 0$ [3, теорема 1.19.1]. Последнее эквивалентно тому, что для всякого $r \in (0, R)$ и точек $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $0 < \varrho(x_i, \mathcal{Q}) < r$, $i = 0, 1$, выполнено условие Липшица $\|P_{\mathcal{Q}}x_0 - P_{\mathcal{Q}}x_1\| \leq \frac{R}{R-r}\|x_0 - x_1\|$ [6]. Напомним, что основные матричные многообразия: Штифеля (матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$: $X^T X = I_{k\times k}$), Грассмана (может быть реализовано как множество проекторов XX^T, где $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ — матрица многообразия Штифеля) и т.д. проксимально гладкие; многообразие Штифеля с константой $R = 1$, а многообразие Грассмана с $R = 1/\sqrt{2}$ для всех n, k, $k \leq n$. Существуют эффективные формулы для проектирования точки (матрицы) на матричные многообразия через сингулярное разложение матриц [7, 8]. Можно также доказать, что аналогом формулы (5) для двух последовательных шагов метода проекции градиента (2), который принимает вид $x_{k+1} = P_S(x_k - tP_{T_{x_k}} f'(x_k))$, на гладком и проксимально гладком многообразии является неравенство [9, Theorem 2]

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -\|P_{T_{x_k}} f'(x_k)\|^2 \left(t - t^2\left(\frac{L}{R} + \frac{L_1}{2}\right)\right), \tag{8}$$

где L и L_1 — константы Липшица f и f' соответственно, а R — константа проксимальной гладкости S. Формулы (7) и (8) аналогично случаю безусловной минимизации дают линейную сходимость указанного алгоритма к локальному минимуму с сублинейной скоростью при $\alpha < 2$ и с линейной скоростью при $\alpha = 2$ [10]. Возможно эффективно применять шаг Армихо [8].

Общая ситуация

Нестеров и др. доказали [11], что если в задаче (1) с выпуклой и липшицево дифференцируемой функцией f и выпуклым компактным множеством $\mathcal{Q}$ выполнено условие квадратичного роста

$$\exists \nu > 0 \qquad f(x) - f_0 \geq \nu \varrho^2(x, \Omega_0) \quad \forall x \in \mathcal{Q}, \tag{9}$$

то алгоритм (2) с достаточно малым фиксированным шагом $t > 0$ сходится к решению (1) с линейной скоростью. Про алгоритм (3) давно известно [2], что для его линейной сходимости достаточно неравенство $\inf\limits_{x \in \mathcal{Q}} \|f'(x)\| > 0$ и условие сильной выпуклости множества $\mathcal{Q}$ с радиусом $R > 0$, т.е. $\mathcal{Q} = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$ есть пересечение замкнутых евклидовых шаров $B_R(x)$ для некоторого $R > 0$ и произвольного множества центров шаров $X \subset \mathbb{R}^n$. В работе [12] было отмечено, что для линейной сходимости достаточно, чтобы условие сильной выпуклости выполнялось локально, в точке-решении $x_0 \in \mathcal{Q}$ множество $\mathcal{Q}$ должно иметь локальный модуль выпуклости второго порядка.

Кроме того, известно, что если в задаче (1) функция (м.б. невыпуклая) имеет липшицев градиент с константой $L_1 > 0$, множество $\mathcal{Q}$ сильно выпукло с радиусом $R > 0$ и $\|f'(x)\| \geq m > 0$ при всех $x \in \mathcal{Q}$, то при условии $\frac{RL_1}{m} < 1$ алгоритм (3) сходится при выборе $x_{k+1} = z_k$. Этот результат и некоторые его уточнения могут быть найдены в [4]. Мы также рекомендуем недавний обзор [13], посвященный методу условного градиента.

При попытке отказа от выпуклости мы встречаемся с определенными трудностями. Так, условие (9) не является в общем случае достаточным для сходимости алгоритма (2) в невыпуклом случае, т.к. могут существовать локальные экстремумы. Про алгоритм (3) автору не известны какие-либо условия его сходимости с невыпуклым множеством $\mathcal{Q}$.

Для решения ряда задач вида (1) в выпуклом и невыпуклом случае мы планируем обсудить опорное условие сильной выпуклости для компактного и в общем случае невыпуклого множества $\mathcal{Q}$ [14]. Опорное условие для компактного множества $\mathcal{Q}$ определяется направлением

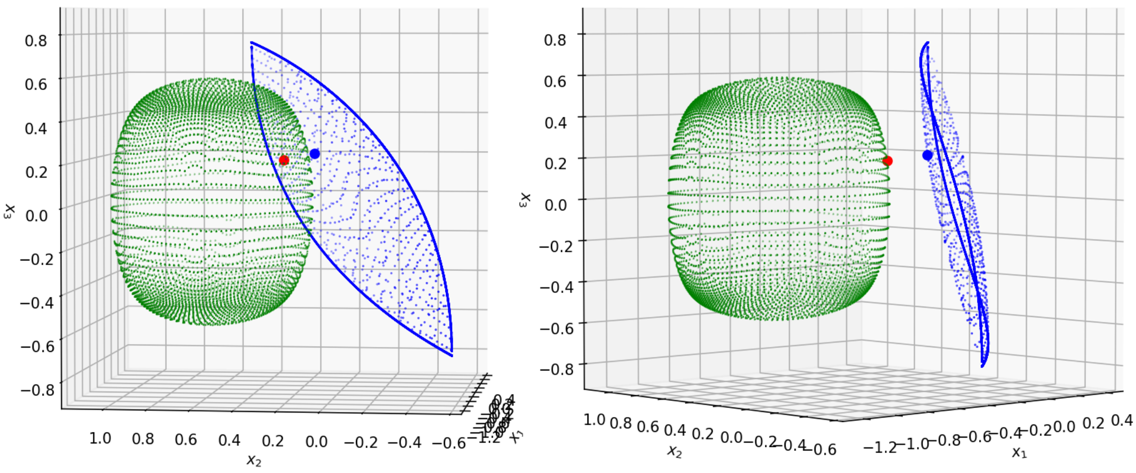

Рис. 1: Ближайшие точки множеств $\mathcal{R}(3)$ (множество справа) и $\mathcal{M}$ (множество слева), разный ракурс. Решается задача $\min\limits_{\|p\|=1} s(p, \mathcal{R}(3) + (-\mathcal{M}))$.

единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ и радиусом R и означает, что

$$\mathcal{Q} \subset B_R(\mathcal{Q}(p) - Rp), \qquad \mathcal{Q}(p) = \arg\max_{x \in \mathcal{Q}} (p, x). \tag{10}$$

Оказывается, что это условие и некоторое соотношение констант достаточно для сходимости ряда алгоритмов вида (2) и (3) с $x_{k+1} = z_k$.

Приведём пример, см. рис. 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ множество достижимости $\mathcal{R}(t) = \int\limits_0^t e^{As} U\, ds$ для $t = 3$, $U = [-e_3, e_3]$. Матрица A имеет вид жордановой клетки 3×3 с собственным значением $\lambda = -1.3$, а $\mathcal{M}$ есть сумма Минковского некоторых двух эллипсоидов. Ниже в таблице 1 приведена скорость сходимости опорной функции $f(p) = s(p, \mathcal{R}(3) + (-\mathcal{M}))$ к минимуму (т.е. $f(p_k) - f_0 \le Cq^k$) в алгоритме (2) при $\mathcal{Q} = \{p \in \mathbb{R}^n \ : \ \|p\| = 1\}$ для разных шагов t. При $t > 0.4$ алгоритм может разойтись.

Таблица 1: Скорость линейной сходимости

Шаг t	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
Показатель q	0.914	0.829	0.744	0.660	0.574	0.633	0.862

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory. Berlin: Springer, 2005.

[2] *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Ж. выч. матем. и матем. ф. 1966. Т. 6. № 5. С. 787–823.

[3] *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые функции и множества. М.: Физматлит, 2006.

[4] *Balashov M. V., Polyak B. T., Tremba A. A.* Gradient Projection and Conditional Gradient Methods for Constrained Nonconvex Minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2020 V. 41. №7. P. 822–849.

[5] *Schneider R., Uschmaev A.* Convergence results for projected line-search methods on varieties of low-rank matricies via Lojasiewicz inequality // SIAM J. Opt. 2015. V. 25. № 1. P. 622–646.

[6] *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of sets and functions // Mathematics of Operations Research. 1983. Vol. 8. No. 2. P. 231–259.

[7] *Балашов М.В.* Метод проекции градиента на матричных многообразиях // Ж. выч. матем. и матем. ф. 2020. Т. 60. № 9. С. 1453–1461.

[8] *Балашов М.В., Камалов Р. А.* Метод проекции градиента с шагом Армихо на многообразиях // Ж. выч. матем. и матем. ф. 2021. Т. 61. № 11. С. 1814–1824.

[9] *Balashov M. V.* The gradient projection algorithm for smooth sets and functions in nonconvex case // Set-Valued Var. Anal. 2021. V. 29. P. 341–360.

[10] *Balashov M. V.* The Lezanski – Polyak – Lojasiewicz inequality and the convergence of the gradient projection algorithm // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23. Вып. 1. С. 4–10.

[11] *Necoara I., Nesterov Yu., Glineur F.* Linear convergence of first order methods for non-strongly convex optimization // Math. Prog. Series A. 2019. Vol. 175. No. 1–2. P. 69–107.

[12] *Veliov V.M.* On the convexity of integrals of multivalued mappings: application in control theory // J. of Opt. Theory and Appl. 1987. Vol. 54. No. 3. P. 541–563.

[13] *Braun G., Carderera A., Combettes C.W., Hassani H., Karbasi A., Mokhtari A., Pokutta S.* Conditional gradient methods // arXiv:2211.14103v1. 2022.

[14] *Балашов М.В.* Достаточные условия линейной сходимости одного алгоритма для нахождения метрической проекции точки на выпуклый компакт // Матем. зам. 2023. Т. 113. № 5. С. 655–666.

УДК 517.9

Представляющие системы из воспроизводящих ядер в пространствах аналитических функций [1]

Т. Г. Батенёв (Санкт-Петербург, Россия)

tbatenev@mail.ru

В работе элементарными методами построены представляющие системы из воспроизводящих ядер в пространстве H^p, $1 \le p < \infty$, в шаре, полидиске и полуплоскости.

Ключевые слова: пространство Харди, весовое пространство Харди, воспроизводящее ядро, представляющая система.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-30002-П).

Representing systems of reproducing kernels in spaces of analytic functions[1]

T. G. Batenev (Saint Petersburg, Russia)

tbatenev@mail.ru

We give an elementary construction of representing systems of the Cauchy kernels in the Hardy spaces H^p, $1 \le p < \infty$, the ball, polydisc and half-plane.

Keywords: Hardy space, weighted Hardy space, reproducing kernel, representing system.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-30002-П).

Введение

Последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечномерного топологического векторного пространства X над $\mathbb{C}$ называется представляющей для X, если для любого элемента $x \in X$ существует такая последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n,$$

где ряд сходится в топологии пространства X. Представляющая система в локально-выпуклом пространстве X называется абсолютно представляющей, если любой элемент $x \in X$ допускает такое представление и ряд сходится абсолютно. В отличие от хорошо известного понятия базиса Шаудера, в случае представляющих систем не требуется, чтобы коэффиценты в разложении определялись единственным образом.

Систематически представляющие системы впервые изучались в работах А.Ф. Леонтьева, подытоженных монографией [1]. При этом наиболее глубокие результаты были получены для локально-выпуклых пространств или для некоторых специальных семейств функций (например, представляющие системы из экспонент в различных пространствах Фреше аналитических функций, см. [2, 3]). Однако, оказалось, что представляющие системы из воспроизводящих ядер в классических пространствах аналитических функций не изучались до недавнего времени.

Функциональное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ на множестве X называется пространством с воспроизводящим ядром, если для любого $y \in X$ функционал вычисления значения функции в точке $G_y f = f(y)$ непрерывен. Тогда по теореме Рисса $f(y) = (f, k_y)$ для некоторого элемента $k_y \in \mathcal{H}$. Функция $k(x, y) = k_y(x)$ называется воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{H}$. Воспроизводящие ядра часто оказываются собственными функциями различных операторов, например, дифференциальных или операторов Тёплица.

В работе [4] Э. Фрикена, Л. Х. Кхоя и П. Лефевра задали следующий вопрос. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром на множестве X и $k_x^{\mathcal{H}}$ его воспроизводящее ядро в точке $x \in X$. Как охарактеризовать последовательность $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ такую, что $\{k_{x_n}\}_{n\geq 1}$ есть представляющая система (абсолютно представляющая система) для замыкания своей линейной оболочки?

В той же работе [4] Э. Фрикен, Л. Х. Кхой и П. Лефевр показали, что во многих классических пространствах аналитических функций в круге, таких как пространства Харди, Дирихле, Бергмана, некоторые пространства де Бранжа-Ровняка, не существует абсолютно представляющих систем из воспроизводящих ядер. Вопрос же о существовании представляющих систем для $H^2(\mathbb{D})$ оставался открытым.

Положительный ответ на этот вопрос был дан К.С. Сперанским и П.А. Терёхиным в работах [5, 6]. Их метод основан на обобщённом понятии фрейма в банаховом пространстве (см. [7]).

В работе А.Д. Баранова и Т.Г. Батенёва [8] была описана элементарная конструкция представляющих систем из ядер Коши для пространств $H^p(\mathbb{D})$ при $p \in [1, \infty)$, а также представляющих систем из воспроизводящих ядер в весовых пространствах Харди.

В данной работе аналогичные реузльтаты получены для пространства Харди в полуплоскости, а также для пространств в полидиске и многомерном шаре.

Теорема 1. *Пусть* $K_\lambda(z)$ *– воспроизводящее ядро пространства Харди* $H^2(\mathbb{C}_+)$ *в верхней полуплоскости,* $h_k > 0, h_k \to 0, R_k \to \infty, d_k \in \mathbb{N}, d_k h_k \geq 2MR_k, M > (1+\sqrt{5})/2,$

$$E_{k,j} = \left[-R_k + j\frac{2R_k}{d_k}, -R_k + (j+1)\frac{2R_k}{d_k} \right], \qquad j = 0, ..., d_k - 1,$$

$t_{k,j} \in E_{k,j}, \lambda_{k,j} = t_{k,j} + ih_k$. *Тогда система* $\{K_{\lambda_{k,j}}(z)\}_{k,j}$ *является представляющей для* $H^p(\mathbb{C}_+)$ *при любом* $p \in (1, \infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $K_\lambda(z)$ *– воспроизводящее ядро пространства Харди* $H^2(\mathbb{B}^N)$ *в единичном шаре,* $r_k \to 1, E_{k,j}$ *– дизъюнктные (по* j*) измеримые подмножества единичной сферы* $\mathbb{S}^N$ *в* $\mathbb{C}^N$, $j = 1, ..., n_k$, $diam\ E_{k,j} \leq d_k$, $(1 - r_k)^N d_k^{-1} \geq M$, $M > N/2$, $\bigcup_{j=1}^{n_k} E_{k,j} = \mathbb{S}^N$ *для любого* k*, и пусть* $\Lambda = \{\lambda_{k,j} = r_k \zeta_{k,j} : \zeta_{k,j} \in E_{k,j}\}$. *Тогда* $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *является представляющей системой для* $H^p(\mathbb{B}^N)$ *при любом* $p \in (1, \infty)$.

Теорема 3. *Пусть* $K_\lambda(z)$ *– воспроизводящее ядро пространства Харди* $H^2(\mathbb{D}^N)$ *в полидиске,* $r_k \to 1, E_{k,j}$ *– дизъюнктные (по* j*) измеримые подмножества* $\mathbb{T}^N$, $j = 1, ..., n_k$, $diam\ E_{k,j} \leq d_k$, $(1 - r_k)^N d_k^{-1} \geq M$, $M > N/2^N$, $\bigcup_{j=1}^{n_k} E_{k,j} = \mathbb{T}^N$ *для любого* k*, и пусть* $\Lambda = \{\lambda_{k,j} = r_k \zeta^{k,j} : \zeta^{k,j} \in E_{k,j}\}$. *Тогда* $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *является представляющей системой для* $H^p(\mathbb{T}^N)$ *при любом* $p \in (1, \infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. Москва : Мир, 1976. 536 с.

[2] *Исаев К. П.* Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций. // Итоги науки и техники. Серия “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. 2019. Т. 161, Целые функции и их приложения. С. 3–64.

[3] *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, № 1. С. 73–126.

[4] *Fricain E., Khoi L. H., Leféfvre P.* Representing systems generated by reproducing kernels // Indagationes Mathematicae. 2018. V. 29, № 3. P. 860–872.

[5] *Speransky K. S., Terekhin P. A.* A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space // Indagationes Mathematicae. 2018. V. 29, № 5. P. 1318–1325.

[6] *Сперанский К. С., Терёхин П. А.* О существовании фреймов в пространстве Харди, построенных на основе ядра Сеге // Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. Т. 2. С. 57–68.

[7] *Терёхин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44, № 3. С. 50–62.

[8] *Baranov A., Batenev T.* Representing Systems of Reproducing Kernels in Spaces of Analytic Functions // Results in Mathematics. 2023. V. 78, № 4, article 143.

УДК 517.5

Об определении обобщенной вариации функции через двумерные колебания[1]

А. Н. Бахвалов (Москва, Россия)

an-bakh@yandex.ru

Показано, что для некоторых двумерных классов Ватермана в определенииии класса нельзя заменить смешанное приращение двумерным колебанием, т.е. точной верхней гранью смешанных приращений по вложенным прямоугольникам.

Ключевые слова: обобщенная вариация, классы Ватермана, двумерные колебания..

On the definition of the generalized variation of a function by means of two-dimensional oscillations[1]

A. N. Bakhvalov (Moscow, Russia)

an-bakh@yandex.ru

It is proved that for certain two-dimensional Waterman classes, the difference in the definition of the calss cannot be replaced by the two-dimensional oscillation, i.e. by the supremum of the differences over the subrectangles.

Keywords: generalized variation, Waterman classes, two-dimensional oscillations.

Хорошо известно следующий простой факт: при определении вариации функции на отрезке вместо супремума обычных вариационных сумм $V_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$, где $T = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\}$, можно рассматривать супремум величин $V_T^o(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{osc}(f, [x_{k-1}, x_k])$, где для множества I положено $\mathrm{osc}(f, I) = \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)|$.

Этот факт легко переносится на случай различных классов обобщенной ограниченной вариации на отрезке, например, для определенных ниже классов функций ограниченной Λ-вариации он использовался как очевидный уже в работе Ватермана [1].

Для функций двух переменных, имеющих ограниченную вариацию на прямоугольнике в смысле Харди, аналогичное утверждение было использовано (без подробного доказательства) в работе Морица [2].

В данной заметке мы покажем, что для двумерных классов ограниченной Λ-вариации аналогичное утверждение, вообще говоря, не выполняется.

Для промежутка Δ на прямой через $\Omega(\Delta)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}_{n=1}^N$, таких, что $\overline{I_n} \subset \Delta$.

Назовём последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ допустимой, если она не убывает, стремится к бесконечности и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$.

Для интервалов $I_n = (a_n, b_n)$ и $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ положим $f(I_n, y_0) = f(b_n, y_0) - f(a_n, y_0)$ и $f(I_n \times J_k) = f(I_n, \beta_k) - f(I_n, \alpha_k)$. Следуя [2], рассмотрим также двумерные колебания

$$\operatorname{osc}_2(f, I_n \times J_k) = \sup_{x,x' \in I_n,\, y,y' \in J_k} |f(x,y) - f(x,y') - f(x',y) + f(x',y')|.$$

Определение (Ватерман [3]). *Пусть Λ — допустимая. Функция $f(x)$ имеет ограниченную Λ-вариацию на промежутке I, если*

$$V_\Lambda(f; I) = \sup_{\{I_n\} \in \Omega(I)} \sum_n \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} < \infty.$$

Для функции двух переменных возьмем две допустимые последовательности Λ и M. Будем обозначать через $V_\Lambda^1(f(x, y_0); I)$ и $V_M^2(f(x_0, y); I)$ ее Λ-вариацию и M-вариацию как функции x при фиксированном $y = y_0$ и от y при $x = x_0$ соответственно. Двумерной компонентой вариации будем называть

$$V_{\Lambda,M}^{1,2}(f; I \times J) = \sup_{\substack{\{I_n\} \in \Omega(I)\\ \{J_k\} \in \Omega(J)}} \sum_{n,k} \frac{|f(I_n \times J_k)|}{\lambda_n \mu_k}.$$

Определение (Саакян [4], Саблин [5]). *Функция f имеет ограниченную (Λ, M)-вариацию на прямоугольнике $D = I \times J$ (обозначаем $f \in (\Lambda, M)BV(D)$), если конечна ее полная (Λ, M)-вариация*

$$V_{\Lambda,M}(f; D) = V_{\Lambda,M}^{1,2}(f; D) + \sup_{y_0 \in J} V_\Lambda^1(f(x, y_0); I) + \sup_{x_0 \in I} V_M^2(f(x_0, y); J).$$

В основе примера, который мы строим, лежит следующая лемма, идея и частные случаи которой принадлежат Саакяну [4, формула (6)] и Дьяченко [6, Теорема 1].

Лемма. *Пусть N фиксировано, а множество $E \subset [0,1]^2$ таково, что любое его сечение вертикальной или горизонтальной прямой состоит из не более чем N отрезков (возможно, некоторые или все отрезки вырождаются в точки). Пусть допустимые Λ и M таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \mu_k} < \infty. \tag{1}$$

Тогда $\chi_E(x,y) \in (\Lambda, M)BV([0,1]^2)$.

Доказательство. Пусть $f(x,y) = \chi_E(x,y)$. Рассмотрим произвольный фиксированный интервал $I=(a,b)$. Поскольку для любого J положено $f(I\times J) = f(b,J) - f(a,J)$, то $f(I\times J)$ может быть отлично от нуля лишь тогда, когда либо $f(b,J)\neq 0$, либо $f(a,J)\neq 0$. Но если взята система $\{J_j\}_{j=1}^p \in \Omega([0,1])$, то для фиксированной точки x среди величин $|f(x,J_j)|$ есть не более $2N$ единиц, а остальные равны нулю. Отсюда следует , что среди $|f(I\times J_j)|$ есть не более $4N$ ненулевых, по модулю не превосходящих двойки. Тем самым автоматически получаем оценку

$$V_M^y(f,[0,1]) \leq 2\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{\mu_k}.$$

Вариация по x оценивается аналогично.

Рассмотрим теперь еще и систему $\{I_k\}_{k=1}^p \in \Omega([0,1])$. Для каждого k положим $j(k) = \min\{j : f(I_k\times J_j)\neq 0\}$. Если же таких j нет, то возьмем $j(k)=p+k$. Тогда

$$S = \sum_{k,j}\frac{|f(I_k\times J_j)|}{\lambda_k\mu_j} \leq 8N\sum_k\frac{1}{\lambda_k\mu_{j(k)}}.$$

По построению все значения $j=j(k)>p$ принимаются только один раз. Если же $j=j(k)\leq p$, то $f(I_k\times J_j)\neq 0$. Поэтому, как и в рассуждениях выше, для фиксированного j_0 может найтись не более $4N$ штук таких k, что $j(k)=j_0$. Положим $j'(k)=j(k)$ для того из них, где произведение $\lambda_k\mu_{j(k)}$ наименьшее, а для остальных определим $j'(k)$ произвольно, но так, чтобы все значения $j'(k)$ были различны. Тогда $S\leq 32N^2\sum\limits_k\frac{1}{\lambda_k\mu_{j'(k)}}$. Но если $A\geq a$ и $B\geq b$, то $AB+ab\geq Ab+aB$. Поэтому в силу монотонности последовательностей Λ и M получаем, что $S\leq 32N^2\sum\limits_k\frac{1}{\lambda_k\mu_k}$. Тогда в силу (1) имеем

$$V_{\Lambda,M}^{1,2}(f,[0,1]^2)\leq 32N^2\sum_k\frac{1}{\lambda_k\mu_k}.$$

Лемма доказана. □

В качестве класса, удовлетворяющего условию (1), можно взять, например, класс функций $(\{n^a\},\{n^b\})BV([0,1]^2)$ при $a+b>1$.

Теорема. *Пусть допустимые последовательности* Λ *и* M *удовлетворяют условию* (1). *Тогда существует измеримая функция* f *из* *класса* $(\Lambda, M)BV([0,1]^2)$, *для которой*

$$\sup_{\{I_n\}\in\Omega([0,1]),\,\{J_k\}\in\Omega([0,1])} \sum_{n,k} \frac{\mathrm{osc}_2(f, I_n \times J_k)|}{\lambda_n \mu_k} = +\infty, \tag{2}$$

и, тем более,

$$\sup_{\{I_n\}\in\Omega([0,1])\,\{J_k\}\in\Omega([0,1])} \sum_{n,k} \frac{\mathrm{osc}_2(f, \overline{I_n} \times \overline{J_k})|}{\lambda_n \mu_k} = +\infty.$$

Доказательство. Как показано, например, в [7, гл. 10, п. 20], существует всюду плотное на $[0,1]^2$ измеримое множество E, которое пересекается с каждой вертикальной и горизонтальной прямой не более чем по одной точке. Возьмём $f = \chi_E$. По лемме она принадлежит классу $(\Lambda, M)BV([0,1]^2)$. В тоже время, для любой пары невырожденных интервалов (I, J) в силу плотности множества E найдутся две различных точки (x, y) и (x', y'), лежащие в $(I \times J) \cap E$. По свойствам множества E тогда $x \neq x'$, $y \neq y'$, $(x', y) \notin E$ и $(x, y') \notin E$. Отсюда получаем равенство

$$f(x, y) - f(x, y') - f(x', y) + f(x', y') = 2,$$

что автоматически влечёт оценку $\mathrm{osc}_2(f, I \times J) \geq 2$. (Из свойств множества E легко увидеть, что здесь имеет место равенство, но это и не нужно для доказательства.) Тем самым для любых систем $\{I_n\}_{n=1}^N \in \Omega([0,1])$ и $\{J_k\}_{k=1}^K \in \Omega([0,1])$ получаем неравенство

$$\sum_{n,k} \frac{\mathrm{osc}_2(f, I_n \times J_k)|}{\lambda_n \mu_k} \geq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \cdot \sum_{k=1}^K \frac{1}{\mu_k},$$

а при увеличении N и K приходим к (2). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Waterman D.* Estimating functions by partial sums of their Fourier series // JMAA. 1982. V. 87, № 1. P. 51–57.

[2] *Moricz F.* A quantitive version of the Dirichlet–Jordan test for double Fourier series // J. Approx. Theory. 1992. V. 71, P. 344–358.

[3] *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Stud. math. 1972. V. 44, № 1. P. 107–117.

[4] *Саакян А. А.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // Изв. АН Арм. ССР. 1986. Т. 21, № 6. С. 517–529.

[5] *Саблин А. И.* Λ-вариация и ряды Фурье // Изв. ВУЗов. Математика. 1987. № 10. С. 66–68.

[6] *Dyachenko M. I.* Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series // Analysis Math. 1995. V. 21, № 1. P. 3–21.

[7] *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М: Мир, 1967. 251 с.

УДК 517.982.256+517.982.252

О сечениях солнц в трёхмерных цилиндрических пространствах[1]

Б. Б. Беднов (Москва, Россия)
bednov_b_b@staff.sechenov.ru

Сечение солнца плоскостью уровня крайнего функционала в трёхмерном цилиндрическом пространстве остаётся солнцем в соответствующей норме.

Ключевые слова: солнце, сечение, цилиндр.

On cross sections of suns in three-dimensional cylindrical spaces[1]

B. B. Bednov (Moscow, Russia)
bednov_b_b@staff.sechenov.ru

The cross section of the sun by the level plane of the extreme functional in a three-dimensional cylindrical space stays the sun in the corresponding norm.

Keywords: sun, cross section, cylinder.

Расстоянием от элемента x банахова пространства $X = (X, \|\cdot\|)$ до непустого множества $M \subset X$, называется величина $\rho(x, M) := \inf\limits_{y\in M} \|x-y\|$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения) из множества M для заданного $x \in X$ обозначается $P_M(x) = \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x-y\|\}$.

Для непустого подмножества $M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует такая точка $y \in P_M(x)$ (*точка светимости*), что $y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big)$ для всех $\lambda \geq 0$, то есть для каждой точки на луче, выходящем из y к x, точка y является ближайшей в M. Множество $M \subset X$ называется *солнцем* [1], если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности для M.

Трёхмерное пространство X называется цилиндрическим, если сфера S пространства X есть цилиндр, то есть $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ и $\|(x_1, x_2, x_3)\|_X = \max\{\|(x_1, x_2)\|_Y, |x_3|\}$.

Далее X — трёхмерное цилиндрическое пространство. Пусть H — крайний единичный функционал из X^*, $\mathrm{Ker}H$ — ядро функционала H. Множество $\mathrm{Ker}H + \zeta$ есть плоскость (двумерное аффинное подпространство трёхмерного пространства X), параллельная $\mathrm{Ker}H$. На таком аффинном подпространстве рассматривается норма, индуцированная нормой пространства X на $\mathrm{Ker}H$: в качестве начала координат плоскости $\mathrm{Ker}H + \zeta$ можно выбрать любую точку θ из $\mathrm{Ker}H + \zeta$, а единичный шар B_H пространства $\mathrm{Ker}H + \zeta$ определяется пересечением $(S(X) \cap \mathrm{Ker}H) + \theta$. Таким образом, B_H — прямоугольник, если $H \neq (0, 0, 1)$. При $H = (0, 0, 1)$ верно равенство $S_H = S(Y)$.

Исследованию солнц в трёхмерных цилиндрических пространствах уже посвящены несколько работ (начало положено в [2]), и есть ещё несколько нерешённых вопросов, на один из которых отвечает следующая

Теорема. *Пусть M – солнце в трёхмерном цилиндрическом пространстве X, H — крайний функционал из X^*. Тогда $M \cap (\mathrm{Ker}H + x)$ либо пусто, либо солнце в пространстве* $\mathrm{Ker}H + x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Некоторые свойства чебышёвских множеств // ДАН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 17–19.

[2] *Алимов А. Р., Беднов Б. Б.* Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в трёхмерных пространствах // Математический сборник. 2021. Т. 212, № 5. С. 37–57.

УДК 517.9

Решение спектральной задачи для оператора Лапласа в областях со входящим углом[1]

С. И. Безродных, А. А. Иванникова
(Москва, Россия, ФИЦ ИУ РАН)
sbezrodnykh@mail.ru, aivannikova94@gmail.com

Доклад посвящен эффективному вычислению собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа в областях g, со смешанным однородным условием Дирихле — Неймана на границе ∂g, которая содержит входящий угол раствора $\pi\beta$, $\beta \in (1, 2)$. Искомые собственные функции $\{U_m\}$ представлены в виде пределов линейных комбинаций аппроксимативных функций из набора $\{\omega_m\}$, где каждая функция ω_m тождественно удовлетворяет уравнению $\Delta\omega_m + \lambda\omega_m = 0$ с параметром $\lambda > 0$ в области g и краевому условию на части ее границы. Собственные числа найдены путем решения специальных трансцендентных уравнений. Представлены результаты решения указанной спектральной задачи на примере несимметричной L–образной области.

Ключевые слова: Спектральные задачи, L–образная область, глобальные аппроксимативные системы функций.

Solution of the spectral problem for the Laplace operator in a domain with reentrant corner[1]

S. I. Bezrodnykh, A. A. Ivannikova
(Moscow, Russia, FRC CSC of the RAS)
sbezrodnykh@mail.ru, aivannikova94@gmail.com

The talk considers the issue of effective calculation of eigenvalues and eigenfunctions of the Laplace operator in domains g with mixed uniform Dirichlet — Neumann condition on its boundary ∂g, which contains a reentrant corner $\pi\beta$, $\beta \in (1, 2)$. The desired eigenfunctions $\{U_m\}$ are represented as limits of linear combinations of approximative functions $\{\omega_m\}$, where each function ω_m satisfies the equation $\Delta\omega_m + \lambda\omega_m = 0$ with the parameter $\lambda > 0$ in the domain g and satisfies to the uniform boundary condition on a part of its boundary. The eigenvalues are found by solving special transcendental equations. We present results of solving the spectral problem using the example of a non–symmetric L-shaped domain.

Keywords: Spectral problems, L–shaped domains, global approximative systems of fuctions.

Рассматривается следующая спектральная задача:

$$\Delta U(x) + \lambda U(x) = 0, \qquad x \in g, \tag{1}$$

$$U(x) = 0, \quad x \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \qquad \partial_\nu U(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \tag{2}$$

в плоской конечной односвязной области g с кусочно–гладкой границей ∂g без точек внешнего и внутреннего заострения; полярные координаты на плоскости переменного $x = (x_1, x_2)$ обозначаем (r, φ). Дуга $\mathcal{C}$, являющаяся частью угла раствора $\pi\beta$, $\beta \in (1,2)$, определяется по формуле

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+, \qquad \mathcal{C}_\pm := \big\{ r \in [0, r_\pm], \varphi = \pm\pi\beta/2 \big\}, \quad r_\pm > 0.$$

Предполагаем, что $\mathcal{D} = \cup_s \mathcal{D}_s$ и $\mathcal{N} = \cup_j \mathcal{N}_j$, так что кривая $\mathcal{D} \cup \mathcal{N}$ является объединением конечного числа последовательно соединенных звеньев $\mathcal{D}_s$, $\mathcal{N}_j$; символ ∂_ν означает производную по внешней нормали в точках гладкости $\mathcal{N} \subset \partial g$.

Представленное в докладе решение спектральной задачи (1), (2) построено с помощью развития результатов работ [1]– [4]. Для построения собственных функций $U_m = U_m(x, \lambda_m)$ будем использовать аппроксимативную систему функций $\big\{\omega_m(x,\lambda)\big\}_{m\in\mathbb{N}}$, определяемых в полярных коодинатах (r, φ) по следующим формулам:

$$\omega_m(x,\lambda) = J_{m/\beta}\big(\lambda^{1/2} r\big) \sin\Big(m\Big(\frac{\varphi}{\beta} + \frac{\pi}{2}\Big)\Big), \qquad m = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где $J_s(\rho)$ — функции Бесселя порядка s, см. [5]. Нетрудно убедиться в том, что функции $\omega_m(x,\lambda)$, $m \in \mathbb{N}$, тождественно удовлетворяют уравнению (1) в бесконечной угловой области $g_0 := \{(r,\varphi) : r \in (0,\infty), \varphi \in (-\pi\beta/2, \pi\beta/2)\}$ и однородному условию Дирихле (2) на ее границе ∂g_0:

$$\begin{gathered} \Delta\omega_m(x,\lambda) + \lambda\omega_m(x,\lambda) = 0, \qquad x \in g_0, \\ \omega_m(x,\lambda) = 0, \qquad x \in \partial g_0. \end{gathered} \tag{4}$$

Для нумерации решений $\{U_m(x), \lambda_m\}$ спектральной задачи (1), (2) далее мы используем пару индексов: $\{U_{k,n}(x), \lambda_{k,n}\}$, $k, n \in \mathbb{N}$. Будем искать $U_{k,n}(x)$ в виде предела

$$U_{k,n}(x) = \lim_{M\to\infty} U_{k,n}(M; x), \tag{5}$$

где приближенные собственные функции $U_{k,n}(M;x)$ имеют вид линейных комбинаций

$$U_{k,n}(M;x) := \sum\nolimits_{s=1}^{M} a_{s,k}(M)\omega_{s+k-1}(x, \lambda_{k,n}(M)); \tag{6}$$

фигурирующие здесь функции $\omega_m(x,\lambda)$ определены по формуле (3), а коэффициенты $a_{s,k}(M)$ и приближенные собственные числа $\lambda_{k,n} = \lambda_{k,n}(M)$, $n = 1, 2, \dots$, подлежат нахождению. Учитывая (4), нетрудно увидеть, что линейные комбинации (6) тождественно удовлетворяют уравнению (3) в области g и однородному условию Дирихле на $\mathcal{C}$ при любых значениях коэффициентов $a_{s,k}(M)$. Таким образом, для построения приближенной собственной функции $U_{k,n}(M;x)$ необходимо так подобрать коэффициенты $a_{s,k}(M)$ и значения $\lambda_{k,n}(M)$, чтобы при $M \to \infty$ последовательность функций $\{U_{k,n}(M;x)\}$ стремилась к нулю на $\mathcal{D}$, а последовательность $\{\partial_\nu U_{k,n}(M;x)\}$ стремилась к нулю на $\mathcal{N}$.

Для построения вычислительного алгоритма мы выполняем указанное требование в проекционном смысле в $L_2(\mathcal{D} \cup \mathcal{N})$. Определим $TU(x)$ так, что $TU(x) = U(x)$, $x \in \mathcal{D}$, и $TU(x) = \partial_\nu U(x)$, $x \in \mathcal{N}$. Проектируя $TU_{n,k}(x)$, где $U_{n,k}$ определены в (6), на специально выбранную систему функций $\{h_{j,k}(x)\}$, $j = \overline{1, M}$, приходим к следующей системе из M уравнений для коэффициентов $a_{s,k}(M)$, $s = \overline{1, M}$:

$$\mathfrak{P}_{M,k}(\lambda)\mathbf{q}_k = 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{q}_k := (a_{1,k}, \ldots, a_{M,k})$ — искомый вектор; $\mathfrak{P}_{M,k}(\lambda)$ — матрица размера $M \times M$, элементами которой являются проекции $\omega_{s+k-1}(x, \lambda)$ на применяемую систему функций $\{h_{j,k}(x)\}$, $j = \overline{1, M}$; примеры выбора таких систем см. в [4].

Система (7) однородна, поэтому для существования нетривиального решения $\mathbf{q}_k$ потребуем, чтобы детерминант матрицы $\mathfrak{P}_{M,k}$ обратился в нуль. Таким образом, получаем следующее трансцентентое уравнение относительно λ:

$$\det \mathfrak{P}_{M,k}(\lambda) = 0, \tag{8}$$

решениями которого являются приближенные собственные числа $\lambda_{k,n}(M)$. После нахождения корня $\lambda_{k,n}(M)$ с номером n уравнения (8) подставим его вместо λ в систему (7), вычеркнем из нее последнее уравнение и положим $a_{1,k}(M) = 1$. Решая построенную таким способом систему линейных уравнений относительно $(a_{2,k}, \ldots, a_{M,k})$, находим коэффициенты в формулах (6).

В докладе представлены результаты реализации изложенного алгоритма решения спектральной задачи на примере несимметричной L–образной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Fox L., Henrici P., Moler C.* Approximations and bounds for eigenvalues of elliptic operators // SIAM J. Numer. Anal. 2009. Vol. 4, № 1. P. 89–102.

[2] *Strang G., Fix J.* An Analysis of the Finite Element Method. NJ : Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1973.

[3] *Vlasov V. I.* A method for solving boundary value problems for the Laplace equation in domains with cones // Dokl. Math. 2004. Vol. 70, № 1. P. 599–602.

[4] *Безродных С. И., Власов В. И.* Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда–Шафранова с нелокальным условием // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Vol. 54, № 4. P. 619–685.

[5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра ортогональные многочлены. Москва : Наука, 1974. 297 с.

УДК 517.984

Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов высших порядков[1]

Н. П. Бондаренко (Саратов, Россия)

bondarenkonp@sgu.ru

В статье рассматривается обратная спектральная задача, состоящая в восстановлении дифференциального выражения произвольного порядка $n \geq 2$ с коэффициентом-распределением по спектральным данным — собственным значениям $(n-1)$ краевой задачи с распадающимися условиями и соответствующим весовым числам. Представлена теорема единственности решения обратной задачи, кратко описан конструктивный метод ее решения, сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, дифференциальные уравнения высших порядков, теорема единственности, метод спектральных отображений, необходимые и достаточные условия.

Благодарности: Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

An inverse spectral problem for the higher-order differential operators[1]

N. P. Bondarenko (Saratov, Russia)

bondarenkonp@sgu.ru

In this paper, we consider the inverse spectral problem that consists in the recovery of the differential expression of arbitrary order $n \geq 2$ with a distribution coefficient from the spectral data — the eigenvalues of $(n-1)$ boundary value problems with separated boundary conditions and the corresponding weight numbers. The uniqueness theorem for solution of the inverse problem is presented, a constructive method for its solution is briefly described, and the necessary and sufficient conditions for the problem solvability are formulated.

Keywords: inverse spectral problem, higher-order differential equations, uniqueness theorem, method of spectral mappings, necessary and sufficient conditions.

Acknowledgements: This work was implemented in Saratov State University and supported by the Russian Science Foundation (project № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Доклад посвящен обратной спектральной задаче для уравнения

$$\begin{aligned}\ell_n(y) :=& y^{(n)} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor-1} (\tau_{2k}(x)y^{(k)})^{(k)} \\ &+ \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor-1} \big((\tau_{2k+1}(x)y^{(k)})^{(k+1)} + (\tau_{2k+1}(x)y^{(k+1)})^{(k)}\big) = \lambda y, \qquad (1)\end{aligned}$$

где $n \geq 2$, $x \in (0,1)$, обозначение $\lfloor a \rfloor$ используется для целой части вещественного числа a, $\tau_\nu \in W_2^{\nu-1}[0,1]$, $\nu = \overline{0, n-2}$, λ — спектральный параметр.

Уравнение (1) с коэффициентом τ_0, являющимся обобщенной функцией из класса $W_2^{-1}[0,1]$, понимается в смысле регуляризационного подхода работы [1]. А именно, уравнение (1) сводится к системе первого порядка вида

$$Y'(x) = (F(x) + \Lambda)Y(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

где $Y(x)$ — вектор-функция (столбец) размера n, Λ — матрица размера $(n \times n)$, у которой элемент в позиции $(n,1)$ равен λ, а все остальные элементы — нулевые, $F(x) = [f_{k,j}(x)]_{k,j=1}^n$ — матрица-функция с суммируемыми на $(0,1)$ элементами, согласованная с дифференциальным выражением $\ell_n(y)$ и построенная в соответствии с результатами работы [2]. С использованием матрицы $F(x)$ вводятся квазипроизводные

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[k]} := (y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^{k} f_{k,j} y^{[j-1]}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ обозначим через $\{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1}$ собственные значения краевой задачи $\mathcal{L}_k$ для уравнения (1) с краевыми условиями

$$y^{[j-1]}(0) = 0, \quad j = \overline{1,k}, \qquad y^{[s-1]}(1) = 0, \quad s = \overline{1, n-k}.$$

Будем считать, что выполнены следующие предположения:

(A-1) При каждом $k = \overline{1, n-1}$ собственные значения $\{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1}$ простые.

(A-2) $\{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1} \cap \{\lambda_{l,k+1}\}_{l \geq 1} = \varnothing$ для $k = \overline{1, n-1}$.

Для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через $C_k(x, \lambda)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$C_k^{[j-1]}(0, \lambda) = \delta_{k,j}, \quad j = \overline{1,n},$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, и введем функции

$$\Delta_{k,k}(\lambda) := \det\left([C_r^{[n-j]}(1,\lambda)]_{j,r=k+1}^n\right),$$
$$\Delta_{k+1,k}(\lambda) := \det\left([C_r^{[n-j]}(1,\lambda)]_{j=\overline{k+1,n}, r=k,\overline{k+2,n}}\right).$$

Заметим, что нули целой аналитической функции $\Delta_{k,k}(\lambda)$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1}$. Определим весовые числа:

$$\beta_{l,k} := -\frac{\Delta_{k+1,k}(\lambda_{l,k})}{\frac{d}{d\lambda}\Delta_{k,k}(\lambda_{l,k})}, \quad l \geq 1, \ k = \overline{1, n-1},$$

и рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. *По спектральным данным* $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ *построить коэффициенты* $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ *уравнения* (1).

Доказана теорема единственности решения обратной задачи 1:

Теорема 1. *Спектральные данные* $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ *однозначно определяют коэффициенты* $\tau_\nu \in W_2^{\nu-1}[0,1]$ *при выполнении условий (A-1) и (A-2).*

Получено конструктивное решение обратной задачи 1, основанное на развитии идей метода спектральных отображений (см. [3, 4]). А именно, нелинейная обратная задача сведена к линейному уравнению

$$(I - \tilde{R}(x))\psi(x) = \tilde{\psi}(x), \tag{3}$$

в банаховом пространстве m ограниченных бесконечных последовательностей. Здесь $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \in m$, $\tilde{R}(x)$ — компактный оператор и I — единичный оператор в m. Вектор $\tilde{\psi}(x)$ и оператор $\tilde{R}(x)$ построены по спектральным данным $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}$ неизвестной задачи и модельной задаче того же вида, но с другими коэффициентами $\{\tilde{\tau}_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$. По вектору $\psi(x)$ могут быть найдены коэффициенты $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ (см. подробности в [5, 6]).

Будем говорить, что $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2} \in W_{simp}^+$, если $\tau_\nu \in W_2^{\nu-1}[0,1]$, $i^{n+\nu}\tau_\nu(x)$ — вещественные функции при $\nu = \overline{0, n-2}$ и соответствующие собственные значения $\{\lambda_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ удовлетворяют условиям (A-1) и (A-2). Для двух задач с коэффициентами $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ и $\{\tilde{\tau}_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ из W_{simp}^+ введем обозначение

$$\xi_l := \sum_{k=1}^{n-1} \left(l^{-(n-1)}|\lambda_{l,k} - \tilde{\lambda}_{l,k}| + l^{-n}|\beta_{l,k} - \tilde{\beta}_{l,k}| \right), \quad l \geq 1.$$

Получены следующие достаточные условия разрешимости обратной задачи 1.

Теорема 2. *Пусть числа* $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ *удовлетворяют (A-1), (A-2) и следующим условиям:*

$$\lambda_{l,k} = (-1)^n \overline{\lambda_{l,n-k}}, \quad \beta_{l,k} = (-1)^n \overline{\beta_{l,n-k}} \neq 0, \quad l \geq 1,\, k = \overline{1, n-1},$$
$$\textit{При } n = 2p: \quad (-1)^{p+1}\beta_{l,p} > 0, \quad l \geq 1.$$
$$\textit{При } n = 2p+1: \quad (-1)^{p+1} Re\, \lambda_{l,p} > 0, \quad l \geq 1.$$

Предположим также, что существует модельная задача с коэффициентами $\{\tilde{\tau}_\nu\}_{\nu=0}^{n-2} \in W_{simp}^+$*, такая, что* $\{l^{n-2}\xi_l\}_{l\geq 1} \in l_2$*. Тогда у обратной задачи 1 по данным* $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ *существует единственное решение* $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$*, причем* $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2} \in W_{simp}^+$.

При четном n условия теоремы 2 являются не только достаточными, но и необходимыми. При нечетном n по необходимости выполняются все условия, кроме $(-1)^{p+1}\mathrm{Re}\,\lambda_{l,p} > 0$.

Доказательство теоремы 2 приведено в [6]. Наиболее трудная его часть состоит в исследовании разрешимости основного уравнения (3). В [6] доказана теорема 5.1 о достаточных условиях его разрешимости, которая является новым результатом не только для случая коэффициентов-распределений, но и для регулярных коэффициентов. Условие $\{l^{n-2}\xi_l\}_{l\ge 1} \in l_2$ в теореме 2 означает совпадение коэффициентов $\tilde{c}_{j,k} = c_{j,k}$ и $\tilde{d}_{j,k} = d_{j,k}$ в точных асимптотических формулах для спектральных данных

$$\lambda_{l,k} = l^n \left(c_{0,k} + c_{1,k}l^{-1} + c_{2,k}l^{-2} + \cdots + c_{n-1,k}l^{-(n-1)} + l^{-(n-1)}\varkappa_{l,k}\right),$$
$$\beta_{l,k} = -\lambda_{l,k}\left(1 + d_{1,k}l^{-1} + d_{2,k}l^{-2} + \cdots + d_{n-2,k}l^{-(n-2)} + l^{-(n-2)}\varkappa^0_{l,k}\right).$$

для основной задачи и модельной. Здесь $\{\varkappa_{l,k}\}$, $\{\varkappa^0_{l,k}\} \in l_2$. Однако нахождение коэффициентов $c_{j,k}$ и $d_{j,k}$ для уравнений высоких порядков является технически трудной задачей. Точные асимптотические формулы и соответствующие теоремы о характеризации спектральных данных без требования существования модельной задачи к настоящему моменту получены только для $n = 2, 3, 4$ (см. [6–8]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 788–793.

[2] *Bondarenko N. P.* Linear differential operators with distribution coefficients of various singularity orders // Math. Meth. Appl. Sci. 2023. Vol. 46, № 6. P. 6639–6659.

[3] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 384 с.

[4] *Bondarenko N. P.* Reconstruction of higher-order differential operators by their spectral data // Mathematics. 2022. Vol. 10, № 20. Article ID 3882.

[5] *Bondarenko N. P.* Local solvability and stability of an inverse spectral problem for higher-order differential operators // Mathematics. 2023. Vol. 11, № 18.Article ID 3818.

[6] *Bondarenko N. P.* Necessary and sufficient conditions for solvability of an inverse problem for higher-order differential operators. Cornell University Library, ArXiv, 2023. URL: `https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.05222` (дата обращения: 21.11.2023).

[7] *Hryniv R. O.; Mykytyuk Y. V.* Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems. 2003. Vol. 19, № 3. P. 665–684.

[8] *Bondarenko N. P.* Inverse spectral problem for the third-order differential equation // Results Math. 2023. Vol 78. Article number: 179.

УДК 517.518.224

Колмогоровские поперечники пересечения семейства конечномерных шаров в смешанной норме[1]

А. А. Васильева (Москва, Российская Федерация)

vasilyeva_nastya@inbox.ru

Получены порядковые оценки колмогоровских поперечников пересечения произвольного семейства конечномерных шаров в смешанной норме в пространстве $l^{m,k}_{q,\sigma}$ при $2 \le q$, $\sigma < \infty$.

Ключевые слова: Колмогоровские поперечники, пересечения шаров, смешанные нормы.

Kolmogorov widths of an intersection of a family of finite-dimensional balls in a mixed norm[1]

A. A. Vasil'eva (Moscow, Russian Federation)

vasilyeva_nastya@inbox.ru

Order estimates for the Kolmogorov widths of an intersection of an arbitrary family of finite-dimensional balls in a mixed norm in the space $l^{m,k}_{q,\sigma}$ for $2 \le q$, $\sigma < \infty$ are obtained.

Keywords: Kolmogorov widths, intersections of balls, mixed norms.

Для $N \in \mathbb{N}$, $1 \le s \le \infty$, $(x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ полагаем $\|(x_i)_{i=1}^N\|_{l_s^N} = \left(\sum\limits_{i=1}^N |x_i|^s\right)^{1/s}$ при $s < \infty$, $\|(x_i)_{i=1}^N\|_{l_s^N} = \max_{1\le i\le N} |x_i|$ при $s = \infty$.

Пусть m, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. Через $l^{m,k}_{p,\theta}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{mk} = \{(x_{i,j})_{1\le i\le m,\, 1\le j\le k} : \ x_{i,j} \in \mathbb{R}\}$ с нормой

$$\|(x_{i,j})_{1\le i\le m,\, 1\le j\le k}\|_{l^{m,k}_{p,\theta}} = \left\|\left(\|(x_{i,j})_{i=1}^m\|_{l_p^m}\right)_{j=1}^k\right\|_{l_\theta^k}.$$

Через $B^{m,k}_{p,\theta}$ обозначим единичный шар пространства $l^{m,k}_{p,\theta}$.

Пусть A — непустое множество, для каждого $\alpha \in A$ заданы числа $p_\alpha \in [1,\infty]$, $\theta_\alpha \in [1,\infty]$, $\nu_\alpha > 0$, при этом $(p_\alpha, \theta_\alpha) \ne (p_\beta, \theta_\beta)$ при $\alpha \ne \beta$. Обозначим

$$M = \cap_{\alpha\in A} \nu_\alpha B^{m,k}_{p_\alpha,\theta_\alpha}. \qquad (1)$$

Исследуется задача об оценке колмогоровского n-поперечника $d_n(M,\, l^{m,k}_{q,\sigma})$.

Для $1\le p\le q$ положим

$$\omega_{p,q} = \begin{cases} \min\left\{\frac{1/p-1/q}{1/2-1/q},\, 1\right\}, & \text{если } q>2,\\ 1, & \text{если } q=2. \end{cases}$$

Определим величины $\Phi(p,\,\theta)=\Phi(p,\,\theta;\,q,\,\sigma,\,m,\,k,\,n)$ следующим образом:

1. при $p\ge q$, $\theta\ge\sigma$ положим $\Phi(p,\,\theta)=m^{1/q-1/p}k^{1/\sigma-1/\theta}$;
2. при $p\ge q$, $\theta\le\sigma$ положим $\Phi(p,\,\theta) = \min\left\{m^{1/q-1/p},\, m^{1/q-1/p}(n^{-\frac12}m^{\frac12}k^{\frac1\sigma})^{\omega_{\theta,\sigma}}\right\}$;
3. при $\theta\ge\sigma$, $p\le q$ положим $\Phi(p,\,\theta) = \min\left\{k^{1/\sigma-1/\theta},\, k^{1/\sigma-1/\theta}(n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac12})^{\omega_{p,q}}\right\}$;
4. при $2\le p\le q$, $1\le\theta\le\sigma$, $\omega_{p,q}\le\omega_{\theta,\sigma}$ положим
$\Phi(p,\,\theta)=\min\left\{1,\, (n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac1\sigma})^{\omega_{p,q}},\, m^{1/q-1/p}(n^{-\frac12}m^{\frac12}k^{\frac1\sigma})^{\omega_{\theta,\sigma}}\right\}$;
5. при $2\le\theta\le\sigma$, $1\le p\le q$, $\omega_{\theta,\sigma}\le\omega_{p,q}$ положим
$\Phi(p,\,\theta)=\min\left\{1,\, (n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac1\sigma})^{\omega_{\theta,\sigma}},\, k^{1/\sigma-1/\theta}(n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac12})^{\omega_{p,q}}\right\}$;
6. при $1\le p\le 2$, $1\le\theta\le 2$ положим $\Phi(p,\,\theta)=\min\{1,\, n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac1\sigma}\}$.

Для $\alpha,\,\beta,\,\gamma\in A$ через $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим треугольник с вершинами $(1/p_\alpha,\,1/\theta_\alpha)$, $(1/p_\beta,\,1/\theta_\beta)$, $(1/p_\gamma,\,1/\theta_\gamma)$. Будем писать $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathcal{R}$, если вершины этого треугольника не лежат на одной прямой.

Определим множества $\mathcal{N}_j$ $(1\le j\le 7)$ и величины Ψ_j $(0\le j\le 7)$ следующим образом:

$$\mathcal{N}_1=\left\{(\alpha,\,\beta)\in A\times A:\ p_\alpha\ne q,\ \exists\hat\lambda_{\alpha,\beta}\in(0,\,1):\ \tfrac1q=\tfrac{1-\hat\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\alpha}+\tfrac{\hat\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\beta}\right\},$$
$$\tfrac{1}{\hat\theta_{\alpha,\beta}}:=\tfrac{1-\hat\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha}+\tfrac{\hat\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta},\quad(\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_1, \tag{2}$$

$$\mathcal{N}_2=\left\{(\alpha,\,\beta)\in A\times A:\ \theta_\alpha\ne \sigma,\ \exists\hat\mu_{\alpha,\beta}\in(0,\,1):\ \tfrac1\sigma=\tfrac{1-\hat\mu_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha}+\tfrac{\hat\mu_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta}\right\},$$
$$\tfrac{1}{\hat p_{\alpha,\beta}}:=\tfrac{1-\hat\mu_{\alpha,\beta}}{p_\alpha}+\tfrac{\hat\mu_{\alpha,\beta}}{p_\beta},\quad(\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_2, \tag{3}$$

$$\mathcal{N}_3 = \left\{(\alpha,\, \beta) \in A \times A:\; p_\alpha \ne 2,\; \exists \tilde\lambda_{\alpha,\beta} \in (0,\, 1):\; \tfrac{1}{2} = \tfrac{1-\tilde\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\alpha} + \tfrac{\tilde\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\beta}\right\},$$
$$\tfrac{1}{\tilde\theta_{\alpha,\beta}} := \tfrac{1-\tilde\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha} + \tfrac{\tilde\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta}, \quad (\alpha,\, \beta) \in \mathcal{N}_3, \tag{4}$$

$$\mathcal{N}_4 = \left\{(\alpha,\, \beta) \in A \times A:\; \theta_\alpha \ne 2,\; \exists \tilde\mu_{\alpha,\beta} \in (0,\, 1):\; \tfrac{1}{2} = \tfrac{1-\tilde\mu_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha} + \tfrac{\tilde\mu_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta}\right\},$$
$$\tfrac{1}{\tilde p_{\alpha,\beta}} := \tfrac{1-\tilde\mu_{\alpha,\beta}}{p_\alpha} + \tfrac{\tilde\mu_{\alpha,\beta}}{p_\beta}, \quad (\alpha,\, \beta) \in \mathcal{N}_4, \tag{5}$$

$$\mathcal{N}_5 = \{(\alpha,\, \beta) \in A \times A:\; \exists \lambda_{\alpha,\beta} \in (0,\, 1),\; p_{\alpha,\beta} \in (2,\, q),\; \theta_{\alpha,\beta} \in (2,\, \sigma):$$
$$\tfrac{1}{p_{\alpha,\beta}} = \tfrac{1-\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\alpha} + \tfrac{\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\beta},\; \tfrac{1}{\theta_{\alpha,\beta}} = \tfrac{1-\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha} + \tfrac{\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta},\; \tfrac{1/p_{\alpha,\beta}-1/q}{1/2-1/q} = \tfrac{1/\theta_{\alpha,\beta}-1/\sigma}{1/2-1/\sigma},$$
$$\text{при этом } \tfrac{1/p_\alpha-1/q}{1/2-1/q} \ne \tfrac{1/\theta_\alpha-1/\sigma}{1/2-1/\sigma}\Big\}, \tag{6}$$

$$\mathcal{N}_6 = \{(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in A \times A \times A:\; \exists \tau_\alpha,\, \tau_\beta,\, \tau_\gamma > 0:\; \tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma = 1,$$
$$\tfrac{1}{q} = \tfrac{\tau_\alpha}{p_\alpha} + \tfrac{\tau_\beta}{p_\beta} + \tfrac{\tau_\gamma}{p_\gamma},\; \tfrac{1}{\sigma} = \tfrac{\tau_\alpha}{\theta_\alpha} + \tfrac{\tau_\beta}{\theta_\beta} + \tfrac{\tau_\gamma}{\theta_\gamma},\; \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{R}\Big\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{N}_7 = \{(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in A \times A \times A:\; \exists \overline{\tau}_\alpha,\, \overline{\tau}_\beta,\, \overline{\tau}_\gamma > 0:\; \overline{\tau}_\alpha + \overline{\tau}_\beta + \overline{\tau}_\gamma = 1,$$
$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{\overline{\tau}_\alpha}{p_\alpha} + \tfrac{\overline{\tau}_\beta}{p_\beta} + \tfrac{\overline{\tau}_\gamma}{p_\gamma},\; \tfrac{1}{2} = \tfrac{\overline{\tau}_\alpha}{\theta_\alpha} + \tfrac{\overline{\tau}_\beta}{\theta_\beta} + \tfrac{\overline{\tau}_\gamma}{\theta_\gamma},\; \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{R}\Big\}, \tag{8}$$

$$\Psi_0 = \inf_{\alpha\in A} \nu_\alpha \Phi(p_\alpha,\, \theta_\alpha), \quad \Psi_1 = \inf_{(\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_1} \nu_\alpha^{1-\hat\lambda_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\hat\lambda_{\alpha,\beta}} \Phi(q,\, \hat\theta_{\alpha,\beta}),$$

$$\Psi_2 = \inf_{(\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_2} \nu_\alpha^{1-\hat\mu_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\hat\mu_{\alpha,\beta}} \Phi(\hat p_{\alpha,\beta},\, \sigma), \quad \Psi_3 = \inf_{(\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_3} \nu_\alpha^{1-\tilde\lambda_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\tilde\lambda_{\alpha,\beta}} \Phi(2,\, \tilde\theta_{\alpha,\beta}),$$

$$\Psi_4 = \inf_{(\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_4} \nu_\alpha^{1-\tilde\mu_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\tilde\mu_{\alpha,\beta}} \Phi(\tilde p_{\alpha,\beta},\, 2), \; \Psi_5 = \inf_{(\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_5} \nu_\alpha^{1-\lambda_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\lambda_{\alpha,\beta}} \Phi(p_{\alpha,\beta},\, \theta_{\alpha,\beta}),$$

$$\Psi_6 = \inf_{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)\in\mathcal{N}_6} \nu_\alpha^{\tau_\alpha} \nu_\beta^{\tau_\beta} \nu_\gamma^{\tau_\gamma} \Phi(q,\, \sigma), \; \Psi_7 = \inf_{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)\in\mathcal{N}_7} \nu_\alpha^{\overline{\tau}_\alpha} \nu_\beta^{\overline{\tau}_\beta} \nu_\gamma^{\overline{\tau}_\gamma} \Phi(2,\, 2)$$

(считаем, что инфимум пустого множества равен $+\infty$); здесь числа $\hat\theta_{\alpha,\beta}$, $\hat\lambda_{\alpha,\beta}$ и т. д. определены в формулах (2)–(8).

Теорема. *Пусть* $2 \le q < \infty$, $2 \le \sigma < \infty$, $m,\, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \le \frac{mk}{2}$, *множество* M *определено формулой* (1). *Тогда*

$$d_n(M,\, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\asymp} \min_{0\le j\le 7} \Psi_j.$$

УДК 517.518

Приближение линейными средними рядов Фурье по мультипликативным системам в пространствах $S_p(\chi)$[1]

С. С. Волосивец, А. Н. Мингачев (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

Даны оценки приближения средними Зигмунда-Рисса, Эйлера и Абеля-Пуассона в пространствах $S_p(\chi)$ функций f с конечной нормой, равной l^p-норме последовательности коэффициентов Фурье ($1 \le p < \infty$) по мультипликативной системе через подходящий K-функционал. Для этого K-функционала получаем прямые и обратные теоремы приближения. Также характеризуются классы Липшица, связанные с пространствами $S_p(\chi)$ и стандартным модулем непрерывности, в терминах приближения указанными выше средними.

Ключевые слова: обобщенная абсолютная сходимость, мультипликативная система, наилучшее приближение, K-функционал, прямые и обратные теоремы приближения.

Approximation by linear means of Fourier series with respect to multiplicative systems in spaces $S_p(\chi)$[1]

S. S. Volosivets, A.N.Mingachev (Saratov, Russia)
VolosivetsSS@mail.ru

We give estimates of approximation by Riesz-Zygmund, Euler and Abel-Poisson means in $S_p(\chi)$ spaces of functions f with finite norm equal to the l^p-norm of the sequence of Fourier coefficients ($1 \le p < \infty$) with respect to multiplicative system in terms of appropriate K-functional. For this K-functional instead of modulus of continuity we obtain direct and converse approximation theorems. Also we characterize Lipschitz classes connected with $S_p(\chi)$ spaces and standard modulus of continuity in terms of approximation by cited above means.

Keywords: generalized absolute convergence, multiplicative systems, best approximation, K-functional, direct and converse theorems of approximation.

Введение

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$. Определим последовательность $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ следующим образом: $m_0 = 1$, $m_n = m_{n-1}p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда любое число $x \in [0, 1)$ представимо в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1},\ x_j \in \mathbb{Z}_j, \tag{1}$$

а каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \ k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Разложение (1) также однозначно, если при $x = s/m_n$, $0 < s < m_n$, $s \in \mathbb{Z}$, брать конечное число ненулевых x_j.

Для чисел $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложениями (1), (2) положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)\right)$. Система функций $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой. Известно, что она ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$ (см. [1, гл. 1,§ 1.5]). Легко видеть, что при $0 \le n < m_k$ функция $\chi_n(x)$ постоянна на $I_j^k = [(j-1)/m_k, j/m_k)$, $1 \le j \le m_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Для $f \in L^1[0,1)$ коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье по системе $\{\chi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ задаются формулами

$$\widehat{f}(j) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_j(t)}\, dt, \ j \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{f}(j)\chi_j(x), \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда средние Зигмунда-Рисса, Абеля-Пуассона и Эйлера ряда Фурье по мультипликативной системе вводятся следующим образом

$$\sigma_n^{(r)}(f) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(1 - k^r/n^r)\widehat{f}(k)\chi_k, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$A_r(f)(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k \widehat{f}(k)\chi_k(x), \quad 0 < r < 1,$$

$$e_n^{(q)}(f) = (1+q)^{-n} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} S_{k+1}(f), \quad q > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \widehat{f}(i) = 0, i \ge n\}$. Будем писать $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $1 \le p < \infty$, если $\|f\|_{\mathcal{S}_p} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\widehat{f}(j)|^p\right)^{1/p} < \infty$. Легко видеть, что $\mathcal{S}_p(\chi)$ содержит $\mathcal{P} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$ и что $\mathcal{P}$ плотно во всех $\mathcal{S}_p(\chi)$, $1 \le p < \infty$. Следующее свойство является очевидным, но очень важным. Для $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $1 \le p < \infty$, или для $f \in L^1[0,1)$ имеем $\|S_n(f)\|_{\mathcal{S}_p} \le \|f\|_{\mathcal{S}_p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Также легко видеть, что $\mathcal{S}_2(\chi) = L^2[0,1)$ и известно, что $L^p[0,1) \subset \mathcal{S}_q(\chi)$ для $1 < p < 2$ и $1/p + 1/q = 1$ (см. теорему Рисса в [2, гл. II, § 4]). Другие достаточные условия для $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$ можно найти в [3, гл. 4, § 2].

Для $x, y \in [0,1)$, записанных в виде (1), будем писать $x \oplus y = z$, если $z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i/m_i$, $z_i = x_i + y_i \pmod{p_i}$, и неверно, что z_i равны $p_i - 1$ при всех $i \ge i_0$. Тогда при фиксированном x число $x \oplus y$ определено для всех $y \in [0,1)$, кроме счетного числа (см. [1, § 1.5]).

Аналогичное $\mathcal{S}_p(\chi)$ пространство было определено для произвольной ортонормированной системы А.И.Степанцом (см. [4, гл. 11]). Определим наилучшее приближение и модуль непрерывности в пространстве $\mathcal{S}_p(\chi)$ формулами $E_n(f)_{\mathcal{S}_p} = \inf\{\|f - t_n\|_{\mathcal{S}_p} : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\omega_n(f)_{\mathcal{S}_p} = \sup\{\|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_{\mathcal{S}_p} : 0 \le h < 1/m_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ясно, что $E_n(f)_{\mathcal{S}_p} = \|f - S_n(f)\|_{\mathcal{S}_p}$. Отметим, что $x \oplus h$ не определено для всех пар $(x, h) \in [0, 1)^2$, но для $\tau_h f(x) = f(x \oplus h)$ все коэффициенты ts $\widehat{\tau_h f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, корректно определены. Будем говорить, что $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $1 \le p < \infty$, имеет **P**-производную порядка $r > 0$ в $\mathcal{S}_p(\chi)$, если ряд $\sum_{j=0}^{\infty} j^r \widehat{f}(j)\chi_j$ является рядом Фурье $g \in \mathcal{S}_p(\chi)$. В этом случае пишем $g = f^{[r]}$ и $f \in W^r\mathcal{S}_p(\chi)$. Для $r > 0$ и $1 \le p < \infty$ определим K-функционал

$$K_r(f, t)_{\mathcal{S}_p} = \inf\{\|f - g\|_{\mathcal{S}_p} + t\|g^{[r]}\|_{\mathcal{S}_p} : g \in W^r\mathcal{S}_p(\chi)\}.$$

Известно, что $\chi_n(x \oplus y) = \chi_n(x)\chi_n(y)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для п.в. $y \in [0, 1)$, если $x \in [0, 1)$ фиксировано (см. [1, § 1.5]).

Возрастающая и непрерывная на $[0, 1]$ функция $\omega(t)$ принадлежит классу Φ, если $\omega(0) = 0$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари B, если $\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\omega(k^{-1}) = O(\omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$, и классу Бари-Стечкина B_α, $\alpha > 0$, если $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}\omega(1/k) = O(n^\alpha\omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Эти определения и их эквивалентные формы см. в [5, леммы 2 и 3].

Основные результаты

Теорема 1 является неполным аналогом неравенства А.В.Ефимова [1, § 10.5].

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$2^{-1}\omega_n(f)_{\mathcal{S}_p} \le E_{m_n}(f)_{\mathcal{S}_p} = \|f - S_{m_n}(f)\|_{\mathcal{S}_p} \le C\left(\sum_{k=n}^{\infty} \omega_k^p(f)_{\mathcal{S}_p}\right)^{1/p}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $f \in L^1[0, 1)$, $r > 0$, $\omega \in B$. *Тогда условия*

$$\|S_n^{[r]}(f)\|_{\mathcal{S}_p} = O(n^r\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

и

$$\|f - \sigma_n^{(r)}(f)\|_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

равносильны. Если имеет место (3) *или* (4), *то справедливо соотношение*

$$\omega_n(f)_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Если же $\omega \in B \cap B_r$, *то условия* (3), (4) *т* (5) *равносильны.*

Следствие 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r > 0$, $\omega \in B \cap B_r$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$. *Тогда условия* (3) *и*

$$E_n(f)_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

равносильны.

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\omega \in B \cap B_r$ *для некоторого* $r > 0$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$. *Тогда условия* (3), (5) *и* $\|f - e_{n-1}^{(q)}(f)\|_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильны.*

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\omega \in B \cap B_1$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$. *Тогда условия* (3), (5) *при* $r = 1$ *и* $\|f - A_r(f)\|_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(1 - r))$, $r_0 < r < 1$, *являются равносильными.*

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r > 0$ *и* $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$. *Тогда*

$$E_n(f)_{\mathcal{S}_p} \le 2K_r(f, n^{-r})_{\mathcal{S}_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$K_r(f, n^{-r})_{\mathcal{S}_p} \le Cn^{-r} \sum_{k=1}^{n} k^{r-1} E_k(f)_{\mathcal{S}_p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r > 0$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $\omega \in B_r \cap B$. *Тогда условия* (3), (5), (6) *и* $K_r(f, t^r)_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(t))$, $0 < t < 1$, *равносильны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

[2] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

[3] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.

[4] *Stepanets A. I.* Methods of approximation theory. Leiden : VSP, 2005. 940 p.

[5] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Москов. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.

УДК 517.518.822

Теорема типа Джексона о приближении алгебраическими многочленами в равномерной метрике с весом Лагерра[1]

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)

ramis3004@gmail.com

И.И. Шарапудинов при исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра ввел взвешенную величину наилучшего приближения $E_n(f, u_r)$, зависящую от параметра r. В настоящей работе для этой величины при $r = 1$ доказана теорема типа Джексона.

Ключевые слова: полиномы Лагерра, специальный ряд, средние Валле Пуссена, скалярное произведение типа Соболева.

Jackson-type theorem on approximation by algebraic polynomials in the uniform metric with Laguerre weight[1]

R. M. Gadzhimirzaev (Makhachkala, Russia)

ramis3004@gmail.com

I.I. Sharapudinov introduced a weighted value of the best approximation $E_n(f, u_r)$ for investigating the approximative properties of partial sums of a special series in Laguerre polynomials. This value depends on the parameter r. In this paper, a Jackson type theorem for the value $E_n(f, u_1)$ is proved.

Keywords: Laguerre polynomials, special series, de la Vallée Poussin means, Sobolev type inner product.

Введение

Пусть $\alpha > -1$, $r \in \mathbb{N}$, f – непрерывная функция, заданная на полуоси $[0, \infty)$ и такая, что в точке $x = 0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$, $\nu = \overline{0, r-1}$. Для функции f в работе [1] были введены специальные ряды по полиномам Лагерра

$$f(x) \sim P_{r-1}(f, x) + x^r \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k^{\alpha,r} L_k^{\alpha}(x), \tag{1}$$

где

$$P_{r-1}(f) = P_{r-1}(f, x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i, \hat{f}_k^{\alpha,r} = \frac{1}{h_k^{\alpha}} \int_0^{\infty} f_r(t)\rho(t) L_k^{\alpha}(t) dt,$$

$$\rho(t) = t^\alpha e^{-t},\ h_k^\alpha = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!},\ f_r(x) = \frac{f(x) - P_{r-1}(f)}{x^r},\ x > 0.$$

Через $S_n^\alpha(x)$ обозначим частичную сумму ряда (1):

$$S_n^\alpha(x) = S_n^\alpha(f,x) = P_{r-1}(f) + x^r \sum_{k=0}^{n-r} \hat{f}_k^{\alpha,r} L_k^\alpha(x).$$

В той же работе были исследованы аппроксимативные свойства сумм $S_n^\alpha(x)$. В частности при $u_r(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}$ было показано, что имеет место неравенство типа Лебега

$$u_r(x)|f(x) - S_n^\alpha(x)| \leq E_n(f)(1 + \lambda_n^{\alpha,r}(x)),$$

в котором

$$E_n(f, u_r) = \inf_{p_n} \sup_{x>0} |p_n(x) - f(x)| u_r(x),$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам p_n степени не выше n, для которых $f^{(i)}(0) = p_n^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, r-1}$, а для функции Лебега $\lambda_n^{\alpha,r}(x)$ при $r - 1/2 < \alpha < r + 1/2$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$ были получены оценки:

$$\lambda_n^{\alpha,r}(x) \leq c(\alpha, r) \begin{cases} \ln(n+1) + n^{\alpha-r}, & x \in [0, 3/\theta_n]; \\ \ln(n+1) + \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, & x \in [3/\theta_n, \theta_n/2]; \\ \ln(n+1) + \left(\frac{x}{\theta_n^{1/3} + |x-\theta_n|}\right)^{1/4}, & x \in [\theta_n/2, 3\theta_n/2]; \\ n^{-r/2+5/4} x^{r/2+1/4} e^{-x/4}, & x \in [3\theta_n/2, \infty). \end{cases}$$

При этом поведение величины $E_n(f, u_r)$ не было исследовано. В настоящей работе для $E_n(f, u_r)$ при $r = 1$ доказана теорема типа Джексона. Для формулировки этого результата нам понадобятся некоторые обозначения. Через $L_{u_1}^\infty$ обозначим пространство измеримых функций, для которых $\|f\|_{\infty,u_1} = \operatorname{ess\,sup}_{x\geq 0} |f(x)u_1(x)| < \infty$, W_{∞,u_1}^1 – пространство функций, абсолютно непрерывных на произвольном отрезке $[a,b] \subset [0,\infty)$ и $f'\varphi \in L_{u_1}^\infty$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть* $u_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{4}}$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$ *и* $f \in W_{\infty,u_1}^1$. *Тогда имеет место оценка*

$$E_n(f, u_1) \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \|f'\varphi\|_{\infty,u_1},$$

где c *– константа, независящая от* f *и* n.

Вспомогательные утверждения

Через $V_{2n}(f,w,x)$, $w(x)=e^{-x}$ обозначим средние Валле Пуссена частичных сумм ряда Фурье функции f по системе полиномов Лагерра – Соболева $\{l^0_{1,n}(x)\}$ [2]:

$$V_{2n}(f,w,x)=f(0)+\frac{x}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{c_{1,j+1}(f)}{j+1}L^1_j(x),$$

где

$$c_{1,k+1}(f)=\int_0^\infty f'(t)L^0_k(t)e^{-t}dt. \tag{2}$$

Отметим, что для $V_{2n}(f,w,x)$ имеет место равенство $V_{2n}(f,w,0)=f(0)$. Кроме того, если $f=q_{2n}$, где q_{2n} алгебраический полином степени не выше $2n$, то $V_{2n}(q_{2n},w,x)=q_{2n}$. Эти свойства позволяют нам использовать $V_{2n}(f,w,x)$ при оценке величины $E_{2n}(f,u_1)$.

Доказательство теоремы 1 основано на следующих утверждениях.

Лемма 1. *Пусть* $f\in W^1_{\infty,u_1}$ *и*

$$f_n(x)=\begin{cases}f(0), & x\in[0,n^{-1}],\\ f(x), & x\in[n^{-1},2n],\\ f(2n), & x\geq 2n.\end{cases}$$

Тогда имеет место неравенство

$$u_1(x)|f(x)-f_n(x)|\leq\frac{c}{\sqrt{n}}\|f'\varphi\|_{\infty,u_1}.$$

Лемма 2. *Пусть* $w(x)=e^{-x}$, *функция* $f\in L^\infty_{u_1}$ *такая, что существуют коэффициенты* (2) *и* $f(0)=0$. *Тогда*

$$u_1(x)|V_{2n}(f,w,x)|\leq c\|f\|_{\infty,u_1}.$$

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$u_1(x)|f_n(x)-V_{2n}(f_n,w,x)|\leq\frac{c}{\sqrt{n}}\|f'\varphi\|_{\infty,u_1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 440–467.

[2] *Гаджимирзаев Р. М.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм ряда Фурье по полиномам Лагерра – Соболева // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 3. С. 545–561.

УДК 517.9

Об алгебрах операторов в функциональных пространствах с инволюцией[1]

Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова (Воронеж, Россия)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

В работе рассматриваются два вида ограниченных операторов с инволюцией: разностный и интегральный. Показано, что оба типа операторов обрвают алгебру, причем алгебра разностных операторов является наполненной. А также приведены формулы для спектра.

Ключевые слова: разностный оператор, интегральный оператор, инволюция, спектр.

On operator algebras in function spaces with involution[1]

G. V. Garkavenko, N. B. Uskova (Voronezh, Russia)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

The paper considers two types of bounded operators with involution: difference and integral. It is shown that both types of operators terminate the algebra, and the algebra of difference operators is complete. Formulas for the spectrum are also given.

Keywords: difference operator, integral operator, involution, spectrum.

Введение

Пусть $End\mathcal{X}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ с нормой $\|X\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Xx\|$, $X \in End\mathcal{X}$. Пусть $\ell_p = \ell_p(\mathbf{Z}, \mathbf{C}), p \in [1, \infty]$ — пространство двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ с нормой $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} |x(n)|^p\right)^{1/p}, p \in [1, \infty)$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbf{Z}} |x(n)|$. При $p = 2$ пространство ℓ_2 является гильбертовым со стандартным скалярным произведением. Пространство ℓ_∞ является алгеброй с поточечным умножением $(\alpha\beta)(n) = \alpha(n)\beta(n), n \in \mathbf{Z}, \alpha, \beta \in \ell_\infty$.

Пусть $L_p = L_p(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $p \in [1, \infty)$ банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и суммируемых со степенью $p = [1, \infty)$ функций с нормой $\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbf{R}} |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$, $\quad x \in L_p, p = [1, \infty)$ и

$L_\infty, (p=\infty)$ банахово пространство существенно ограниченных (классов эквивалентности) функций с нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |x(t)|$. Пространство $L_1(\mathbf{R})$ является банаховой алгеброй со сверткой функций в качестве операции умножения $(f*g)(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau, \qquad t\in\mathbf{R}, \qquad f,g\in L_1$. Через $\widehat{f}$ обозначается преобразование Фурье функции $f\in L_1$ (или $f\in L_2$).

Определение. *Оператор $J\in End\mathcal{X}$ называется инволюцией, если $J^2=I$.*

Во введенных выше пространствах стандартная инволюция задается формулой $(Jx)(n)=x(-n), n\in\mathbf{Z}, x\in\ell_p$ и $(Jx)(t)=x(-t), t\in\mathbf{R}, x\in L_p$ (иногда называется оператором отражения).

Операторы с инволюцией

Пусть $\alpha\in\ell_\infty$, определим оператор $E_\alpha\in End\,\ell_p$, $E_\alpha x=\alpha x$, $x\in\ell_p$, формулой $(E_\alpha x)(n)=\alpha(n)x(n)$, $n\in\mathbf{Z}$. Определим оператор с инволюцией $E_{\alpha,\beta}=E_\alpha+E_\beta J, \alpha,\beta\in\ell_\infty$, действующий по формуле $(E_{\alpha,\beta}x)(n)=\alpha(n)x(n)+\beta(n)x(-n)$, $n\in\mathbf{Z}, x\in\ell_p, p\in[1,\infty)$ и в стандартном базисе пространства $\ell_p, p\in[1,\infty)$ имеющий разреженную матрицу $E_{\alpha,\beta}\sim(\varepsilon_{ij})$, $i,j\in\mathbf{Z}$, где $\varepsilon_{ii}=\alpha(i)$, $\varepsilon_{i,-i}=\beta(i)$, $i\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$, $\varepsilon_{00}=\alpha(0)+\beta(0)$, а остальные элементы равны нулю. Оператор $E_{\alpha,\beta}$ ограничен и $\|E_{\alpha,\beta}\|\le\|\alpha\|_\infty+\|\beta\|_\infty$. Множество таких операторов обозначим через $\mathcal{M}$. Очевидно, что $I,J\in\mathcal{M}$, так как $I=E_{e,0}=eI+0J$, $J=E_{0,e}=0I+eJ$, где символом e обозначена такая последовательность, что $e(n)=1, n\in\mathbf{Z}$, а символом 0 – нулевая последовательность, т. е. $0(n)=0, n\in\mathbf{Z}$.

Пусть теперь $\alpha\in L_1(\mathbf{R})$ введем в рассмотрение оператор B_α, определенный формулой

$$(B_\alpha x)(t)=(\alpha*x)(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}\alpha(\tau)x(t-\tau)\,d\tau=\int\limits_{\mathbf{R}}\alpha(\tau)S(-\tau)x(t)\,d\tau, \quad (1)$$

где через S обозначен оператор сдвига функции $S(s)x(t)=x(t+s), s,t\in\mathbf{R}$. Формула (1) определяет на $L_p, p\in[1,\infty)$ структуру банахова $L_1(\mathbf{R})$ — модуля, ассоциированного с представлением S (см. [1, 2]).

Рассмотрим оператор $B_{\alpha,\beta}=B_\alpha+B_\beta J$, α, $\beta\in L_1, B_{\alpha,\beta}\in EndL_p, p\in[1,\infty)$. Оператор $B_{\alpha,\beta}$ является интегральным оператором с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов:

$$((B_\alpha+B_\beta J)x)(t)=\int_{\mathbf{R}}\alpha(t-\tau)x(\tau)\,d\tau+\int\limits_{\mathbf{R}}\beta(t+\tau)x(\tau)\,d\tau, \quad x\in L_p,$$

и $\|B_{\alpha,\beta}\| \le \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1$. Множество таких операторов обозначим $\mathcal{M}'$.

Операторы вида $E_{\alpha,\beta} \in End\,\ell_p$ с неограниченными последовательностями $\alpha, \beta : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ рассматривались в [3, 4].

Основные результаты

Лемма 1. *Множество $\mathcal{M}$ является наполненной банаховой подалгеброй в $End\,\ell_p, p \in [1,\infty)$ с единицей.*

Доказательство. Непосредственным подсчетом легко убедиться, что $E_{\alpha,\beta} \cdot E_{\alpha',\beta'} = E_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha} = \alpha * \alpha' + \beta * J\beta', \\ \widetilde{\beta} = \alpha * \beta' + \beta * J\alpha'. \end{cases} \tag{2}$$

Напомним, что некоторая банахова подалгебра $\mathcal{B} \in End\mathcal{X}$ называется наполненной, если каждый обратимый в $End\mathcal{X}$ оператор обратим и в $\mathcal{B}$. Для того, чтобы найти обратный $E_{\alpha',\beta'}$ к обратимому оператору $E_{\alpha,\beta}$, необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\alpha' + \beta J\beta' = e, \\ \alpha\beta' + \beta J\alpha' = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} \alpha' = J\alpha(\alpha J\alpha - \beta J\beta)^{-1}, \\ \beta' = -\beta(\alpha J\alpha - \beta J\beta)^{-1} \\ \alpha'(0) = 1/(\alpha(0) + \beta(0)). \end{cases}$$

Для любой последовательности $b \in \ell_\infty$ введем в рассмотрение ее множество нулей $Z(b) = \{n \in \mathbf{Z} : b(n) = 0\}$

Лемма 2. *Оператор $E_{\alpha,\beta}$ обратим тогда и только тогда, когда $Z(\alpha J\alpha - \beta J\beta) = \varnothing$ и $|\alpha(n)\alpha'(n) + \beta(n)\beta'(-n)| > \epsilon > 0$, для всех $n \in \mathbf{Z}_+$.*

Перейдем к рассмотрению операторов $B_{\alpha,\beta}$.

Лемма 3. *Операторы $B_{\alpha,\beta} \in End\,L_p, p \in [1,\infty)$, образуют подалгебру $\mathcal{M}'$.*

Лемма 3 проверяется непосредственным подсчетом, при этом в пространстве L_p имеем $B_{\alpha,\beta} \cdot B_{\alpha',\beta'} = B_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ определяются формулами (2), т. е. $B_{\alpha,\beta} \cdot B_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}'$, если $B_{\alpha,\beta}, B_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}'$.

Итак, множество разностных операторов с инволюцией является наполненной банаховой подалгеброй с единицей в пространстве соответствующих ограниченных операторов, а множество интегральных операторов — банаховой алгеброй. При этом они похожи тем, что произведение двух операторов и в первом и во втором случае определяется с использованием формулы (2).

Перейдем к спектрам оператора $E_{\alpha,\beta}$ в пространстве ℓ_2 и $B_{\alpha,\beta}$ в пространстве L_2.

Лемма 4. *Спектр оператора $E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}$ есть замыкание множества чисел*

$$\left\{\alpha(0)+\beta(0); 0.5\left(\alpha(n)+\alpha(-n) \pm ((\alpha(n)-\alpha(-n))^2 + 4\beta(n)\beta(-n))^{1/2}\right)\right\},$$

где $n \in \mathbf{N}$.

Так как спектр ограниченного оператора из $End\,\ell_p, 1 \leq p < \infty$ не зависит от p, то формулы для спектра в любом из пространств $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ останутся такими же, как для $E_{\alpha,\beta} : \ell_2 \to \ell_2$.

Переходим к оператору $B_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}'$.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{M}' \in EndL_2$ ($B_{\alpha,\beta}$ действует в L_2). Тогда спектр оператора $B_{\alpha,\beta}$ совпадает с множеством $\overline{RanS_1 \cap RanS_2}$, где*

$$S_{1,2} = 0.5\left(\widehat{\alpha}(t)+\widehat{\alpha}(-t) \pm \left((\widehat{\alpha}(t)-\widehat{\alpha}(-t))^2 + 4\widehat{\beta}(t)\widehat{\beta}(-t)\right)^{1/2}\right).$$

В работе [5] исследовались интегральные операторы с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов, действующие в L_2 и α, β также принадлежат L_2, это существенно использовалось при доказательстве результатов. Исследуемый же нами оператор $B_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}'$ такой, что $\alpha, \beta \in L_1$, $B_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}' \subset End\ L_p, p \in [1, \infty)$, поэтому результаты из [5] к оператору $B_{\alpha,\beta}$ не применимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Loomis L.H.* An introduction of abstract harmonic analysis. Van Nostrand Company Inc., Toronto-New York-London, 1953. 208 pp.

[2] *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005.Т. 69, № 3. С. 3–54.

[3] *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства разностных операторов с инволюцией // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2023. – С. 7–11.

[4] *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Некоторые свойства разностных операторов с инволюцией // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2023. – № 2. – С. 36–45.

[5] *Александров Е. Л.* Интегральные операторы с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов // Изв. вузов. Матем. 1991. Т. 35, № 8. С. 3–8.

УДК 511.84

О введении кватернионных потенциалов для обобщенной системы Коши-Римана[1]

Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева, (Калуга, Россия)
email@mail.ru

В данной работе рассмотрены некоторые свойства обобщенной системы Коши-Римана и приведен способ построения ее решений, использующий метод обобщенных степеней Берса.

Ключевые слова: обобщенные степени Берса, кватернионы, система Коши – Римана.

On the introduction of quaternion potentials for the generalized Cauchy-Riemann system[1]

Yu. A. Gladyshev, E. A. Loshkareva (Kaluga, Russia)
gladyshev.yua@yandex.ru, losh-elena@yandex.ru

The paper examines some properties of a generalized Cauchy-Riemann type system. As an effective way to construct solutions to the multidimensional Laplace equation, it is recommended to use the method of generalized powers.

Keywords: generalized Bers degrees, quaternion, Cauchy – Riemann system.

Введение

Для построения предложенного обобщения системы дифференциальных уравнений типа Коши-Римана [1] было использовано евклидово восьмимерное пространство. При этом используется декартова система координат x_i , где $i = \overline{1,8}$. Функции, зависящие от восьми переменных, обозначим греческими символами $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), ...$ и считаем их дважды непрерывно дифференцируемыми. Эти функции в алгебраическом смысле кватернионы

$$\alpha = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i e_i,$$

где e_i - базисные единицы системы кватернионов.

Используем ниже операторы

$$D_1 = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \quad D_2 = \sum_{i=1}^{4} e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+4}}, \tag{1}$$

и их кватернионы сопряжения $\overline{D}_1, \overline{D}_2$.

Кватернионный вариант системы Коши-Римана был введен в работе [1] и имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} D_1\varphi - \psi D_2 = 0, \\ \varphi\overline{D}_2 + \overline{D}_1\psi = 0 \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Для частных производных по x_i принято

$$e_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}e_i.$$

Если α, β гармонические кватернионные функции , т.е. все компоненты α, β есть гармонические функции переменных x_i , где $i = \overline{1,8}$, то функции $\varphi', \psi', \varphi'', \psi''$ определенные как

$$\begin{array}{l} \varphi' = \overline{D}_1\alpha, \quad \psi' = \alpha\overline{D}_2, \\ \varphi'' = \beta D_2, \quad \psi'' = D_1\beta, \end{array}$$

дают два решения системы (2). Таким образом, построение решения сводится к построению гармонического кватерниона. Можно составить общее решение

$$\begin{array}{l} \varphi = \overline{D}_1\alpha - \beta D_2, \\ \psi = \alpha\overline{D}_2 + D_1\beta. \end{array}$$

Если α, β удовлетворяют системе

$$\left.\begin{array}{l} \alpha D_2 + D_1\beta = 0, \\ \overline{D}_1\alpha + \beta\overline{D}_2 = 0 \end{array}\right\},$$

то значения φ, ψ не меняются, так как $\varphi' = \psi' = 0$. Эта ситуация напоминает калибровочную инвариантность в электродинамике, если α, β принять в качестве потенциалов.

Как следует из сказанного выше, нахождение решений обобщенного уравнения Коши-Римана сведено к построению решения уравнения Лапласа, поэтому можно предложить метод обобщенных степеней, предложенный в [2], [3]. Несколько изменим форму записи уравнения Лапласа. Положим

$$\Delta = \sum_{i=1}^{8} \partial s_i,$$

где $\partial s_i = \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$.

Построим обобщенные степени путем применения правых обратных операторов к обобщенной константе. Рассматривая обобщенные степени

как элементы некоторого линейного векторного пространства умножим степень на числовой множитель $h_1^{p_1}h_2^{p_2}...h_z^{p_z}$ и запишем символический полином
$$(h_1s_1 + ... + h_zs_z)^nC.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об одной физической интерпретации обобщенных условий Коши-Римана // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж : ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», 2021. С. 102–109.

[2] *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана // В сборнике: Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 2022. С. 101–104.

[3] *Лошкарева Е. А., Гладышев Ю. А., Малышев Е. Н.* Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 11–23.

УДК 517.518

Приближение полиномами Хаара и Уолша в весовых обобщенных гранд пространствах Лебега[1]

Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия), С.С. Волосивец (Саратов, Россия)

golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

В настоящей статье мы приводим прямые теоремы приближения полиномами Хаара и Уолша в весовом гранд пространстве Лебега. Также изучается порядок приближения средними Бореля, Эйлера, Зигмунда-Рисса и Нерлунда рядов Фурье-Уолша-Пэли в упомянутом выше пространстве.

Ключевые слова: Система Хаара, весовое гранд пространство Лебега, прямая теорема приближения; линейные средние ряда Фурье-Уолша.

Approximation by Haar and Walsh polynomials in weighted generalized grand Lebesgue spaces[1]

B. I. Golubov (Dolgoprudnyi, Russia), S. S. Volosivets (Saratov, Russia)

golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

In the paper we give direct theorems on approximation by Haar and Walsh polynomials in weighted generalized grand Lebesgue space. Also the degree of approximation by Borel, Euler, Riesz-Zygmund and Nörlund linear means of Walsh-Paley-Fourier series are treated in the above cited space.

Keywords: Haar system, weighted grand Lebesgue space, direct approximation theorem, linear means of Walsh-Fourier series.

Введение

Пусть $v : [0,1] \to \mathbb{R}_+ = [0. +\infty)$ является весовой функцией, т.е. интегрируема по Лебегу и п.в. положительна на $[0,1]$. Обычное весовое пространство Лебега $L^p_v[0,1]$, $1 \le p < \infty$, состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций f, таких что $\|f\|^p_{p,v} = \int_0^1 |f(x)|^p v(x)\,dx < \infty$. Для $v \equiv 1$ мы будем писать $\|f\|_p$ вместо $\|f\|_{p,v}$.

Для $1 < p < \infty$ и $\theta > 0$ обозначим через $L^{p),\theta}_v[0,1]$ весовое обобщенное гранд пространство Лебега, состоящее из всех действительнозначных измеримых на $[0,1]$ функций f, таких что $\|f\|_{p),\theta,v} = \sup\limits_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \|f\|_{p-\varepsilon,v} < \infty$.

Эти пространства введены для $\theta = 1$ и $v(x) \equiv 1$ Т.Иванцом и К.Сбордоне [1] и позже для $\theta > 1$ и $v(x) \equiv 1$ Л.Греко, Т.Иванцом и К.Сбордоне в [2]. Легко видеть, что $L^p[0,1] \subset L^{p)}[0,1] \subset L^{p-\varepsilon}[0,1]$ при $p > 1$ и $0 < \varepsilon < p-1$. Поскольку $L^p[0,1]$ не является плотным в $L^{p)}[0,1]$ (см., например, [3]), мы будем рассматривать подпространство $\mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$, которое является замыканием $L_v^p[0,1]$ в $L_v^{p),\theta}[0,1]$ и снабжено нормой $\|\cdot\|_{p),\theta,v}$. К.Сбордоне [4] установил, что $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\lim_{\varepsilon\to 0+0} \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)} \|f\|_{p-\varepsilon,v} = 0$.

Будем говорить, что весовая функция v принадлежит классу Б.Макенхаупта $A_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, если

$$\sup_I |I|^{-1} \int_I v(x)\,dx \left(|I|^{-1} \int_I (v(x))^{-1/(p-1)}\,dx \right)^{p-1} = [v]_{A_p[0,1]} < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем интервалам I из отрезка $[0,1]$ и $|I|$ означает меру Лебега I (см. [5]).

Для $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,\dots\}$ положим $I_j^k = [(j-1)/2^k, j/2^k)$, $j \in [1,2^k]\cap\mathbb{Z}$. Напомним, что система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задается следующим образом: $\chi_1(x) \equiv 1$ и, для $n = 2^k + j$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{Z} \cap [1,2^k]$,

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, x \in I_{2j-1}^{k+1}; \\ -2^{k/2}, x \in I_{2j}^{k+1}; \\ 0, x \notin I_j^k. \end{cases}$$

Система $\{\chi_i(x)\}_{i=1}^n$ ортогональна на $[0,1)$ и полна в $L^1[0,1)$ (см. [6, гл. 3, раздел 1]). Для $f \in L^1[0,1]$ и $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ определим коэффициенты Фурье-Хаара и частные суммы Фурье-Хаара $a_n(f) = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt$, $Q_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n a_k(f)\chi_k(x)$.

Наилучшее приближение полиномами по системе Хаара для $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1)$ определяется равенством $E_n(f)_{p),\theta,v} = \inf\left\{ \|f - \sum_{k=1}^n a_k\chi_k\|_{p),\theta,v} : a_k \in \mathbb{R} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Определим теперь систему Уолша-Пэли. Пусть $r_0(x) = 1$ для $x \in [0,1/2)$, $r_0(x) = -1$ для $x \in [1/2,1)$ и $r_0(x)$ продолжается на $\mathbb{R}_+$ 1-периодически. Тогда $r_n(x) = r_0(2^n x)$, $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ с двоичным разложением $n = \sum_{i=0}^{k(n)} \varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, мы полагаем $w_n(x) = \prod_{i=0}^{k(n)} (r_i(x))^{\varepsilon_i}$. Система Уолша-Пэли $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной и полной в $L^1[0,1]$ (см. [7, гл. 1,2]). Для $f \in L^1[0,1]$ зададим коэффициенты Фурье-Уолша-Пэли и частичные суммы Фурье-Уолша-Пэли следующим образом: $\widehat{f}(k) = \int_0^1 f(t)w_k(t)\,dt$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)w_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим наилучшее приближение полиномами Уолша-Пэли $E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v} = \inf\left\{\left\|f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k\right\|_{p),\theta,v} : a_k \in \mathbb{R}\right\}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$.

Для $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1)$, продолженной на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 1-периодически, определим рассмотрим средние Стеклова $s_h(f)(x) = h^{-1}\int_0^h f(x+t)\,dt$, $h > 0$, и модуль непрерывности $\Omega(f,\delta)_{p),\theta,v} = \sup\{\|f - s_h(f)\|_{p),\theta,v} : 0 \le h \le \delta\}$, $\quad \delta \in [0,1]$.

Будем писать $f \in W^1L_v^{p),\theta}[0,1]$, если f абсолютно непрерывна на $[0,1]$, 1-периодична и $f' \in L_v^{p),\theta}[0,1]$.

Теперь определим некоторые линейные средние рядов Фурье-Уолша-Пэли, такие, как средние Бореля $B_r(f)(x) = e^{-r}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} S_{k+1}(f)(x)$, $r \ge 1$, средние Эйлера $e_n^q(f)(x) = (1+q)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} q^{n-k} S_{k+1}(f)(x)$, $n \in \mathbb{N}$, средние Зигмунда-Рисса $\sigma_n^{(r)}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1 - k^r/n^r)\widehat{f}(k)w_k(x)$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Будем считать, что неубывающая и непрерывная на $[0,1]$ функция $\omega(t)$ принадлежит классу Φ, если $\omega(0) = 0$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари-Стечкина BS_α, $\alpha > 0$, если $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}\omega(1/k) = O(n^\alpha \omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Это определение и его эквивалентные формы см. в [8, лемма 3].

Целью работы является получение прямых теорем приближения полиномами по системам Хаара и Уолша и оценок сверху приближений средними Бореля, Эйлера и Зигмунда-Рисса рядов Фурье-Уолша-Пэли для функций из $\mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$. Отметим, что приближения тригонометрическими полиномами в подобных пространствах изучались Д.М.Исрафиловым и А.Тестичи в [9], а также В.М.Кокилашвили и А.Н.Месхи в [10].

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in W^1L_v^{p),\theta}[0,1]$. *Тогда*

$$E_n(f)_{p),\theta,v} \le \|f - Q_n(f)\|_{p),\theta,v} \le Cn^{-1}\|f'\|_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v} \le \|f - S_n(f)\|_{p),\theta,v} \le Cn^{-1}\|f'\|_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$.

Тогда

$$E_n(f)_{p),\theta,v} \le \|f - Q_n(f)\|_{p),\theta,v} \le C\Omega(f, 1/n)_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v} \le \|f - S_n(f)\|_{p),\theta,v} \le C\Omega(f, 1/n)_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$. *Тогда*

$$\|f - B_r(f)\|_{p),\theta,v} \le C_1 e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} E_{k+1}^{wp}(f)_{p),\theta,v} \le C_2\Omega(f, 1/r)_{p),\theta,v}, \quad r \ge 1,$$

где $[r]$ *— целая часть* r *и* C_1, C_2 *— некоторые постоянные.*

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1)$, $t > 0$. *Тогда*

$$\|f - e_n^t(f)\|_{p),\theta,v} \le C\Omega(f, 1/n)_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$, $\omega \in B_1$, $r \ge 1$ *и* $\Omega(f,t)_{p),\theta,v} = O(\omega(t))$, $t \in [0,1]$. *Тогда*

$$\|f - \sigma_n^{(r)}(f)\|_{p),\theta,v} \le C\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Константы в этих теоремах не зависят от номера n и функции f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Iwaniec T., Sbordone C.* On integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Ration. Mech. Anal. 1992. V. 119, № 2. P. 129–143.

[2] *Greco L.,Iwaniec T., Sbordone C.* Inverting the p-harmonic operator // Manuscr. Math. 1997. V. 92, № 2. P. 249–258.

[3] *D'Onofrio L., Sbordone C., Schiattarella R.* Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs // J. Fixed Point Theory Appl. 2013. V. 13, № 2. P. 309–340.

[4] *Sbordone C.* New estimates for div-curl products and very weak solutions of PDEs // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1997. V. 25, № 3-4. P. 739–756.

[5] *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.

[6] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.

[7] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

[8] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Москов. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.

[9] *Israfilov D. M., Testici A.* Approximation in weighted generalized grand Lebesgue spaces // Colloq. Math. 2016. V. 143, № 1. P. 113–126.

[10] *Кокилашвили В. М., Месхи А. Н.* Весовая экстраполяция в пространствах Иванеца-Сбордоне. Приложения к интегральным операторам и теории приближений // Труды МИРАН. 2016. Т. 293. С. 167–192.

УДК 517.55+517.96

Полиномиальные решения многомерных разностных уравнений[1]

А. А. Григорьев (Россия, г. Красноярск)
grigrow@yandex.ru
Е. К. Лейнартас (Россия, г. Красноярск)
lein@mail.ru
А. П. Ляпин (Россия, г. Красноярск)
aplyapin@sfu-kras.ru

В данной работе вводится понятие разностных операторов с суммирующим эффектом — операторов, позволяющих решать задачу суммирования. Для операторов, обладающих суммирующим эффектом, дается описание пространства полиномиальных решений.

Ключевые слова: числа Бернулли, многочлены Бернулли, задача суммирования, многомерные разностные уравнения, оператор Тодда..

Polynomial Solutions to a Multidimensional Difference Equation[1]

A. A. Grigoriev (Russia, Krasnoyarsk)
grigrow@yandex.ru
E. K. Leinartas (Russia, Krasnoyarsk)
lein@mail.ru
A. P. Lyapin (Russia, Krasnoyarsk)
aplyapin@sfu-kras.ru

We define a set of polynomial difference operators with a summing effect which allows us to solve the summation problem. The theorem describing the space of polynomial solutions for operators with the summing effect was proved.

Keywords: Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials, summation problem, multidimensional difference equation, Todd operator..

Введение

На комплекснозначных функциях $f(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \dots, x_n)$ определим оператор δ_j сдвига по j-ой переменной $\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $\delta_j^{\alpha_j} = \underbrace{\delta_j \circ \dots \circ \delta_j}_{\alpha_j \text{ раз}}$, δ_j^0

— тождественный оператор. Обозначим $P(\delta) = \sum\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant l} c_\alpha \delta^\alpha$ — полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами c_α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n_\geqslant$, а неравенство $l \geqslant \alpha$ означает, что $l_j \geqslant \alpha_j, j = 1, \ldots, n$. Будем также использовать обозначение $l \ngeqslant \alpha$, если найдется хотя бы одно j_0, для которого $l_{j_0} < \alpha_{j_0}$.

Разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ записывается следующим образом:

$$P(\delta)f(x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{Z}^n_\geqslant. \tag{1}$$

Для заданной функции нескольких дискретных аргументов $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$ рассматривается задача отыскания суммы ее значений по всем целочисленным точкам n-мерного параллелепипеда с «переменной» вершиной $x \in \mathbb{Z}^n_\geqslant$:

$$\Pi(x) = \{t \in \mathbb{R}^n_\geqslant : 0 \leqslant t_j \leqslant x_j, j = 1,\ \ldots, n\}.$$

Искомую сумму можно записать так:

$$S(x) = \sum_{t_1=0}^{x_1} \cdots \sum_{t_n=0}^{x_n} \varphi(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{t\in\Pi(x)} \varphi(t). \tag{2}$$

Решить задачу суммирования — значит найти формулу, выражающую сумму (2) через не зависящее от x (конечное) число слагаемых.

Разностные операторы с суммирующим эффектом

Определение 1. Полиномиальный разностный оператор $P(\delta)$ назовем *оператором, обладающим суммирующим эффектом,* если существует решение $f(x)$ уравнения (1), такое что сумма (2) выражается через значения $f(x)$ в конечном и не зависящем от $x = (x_1, \ldots, x_n)$ числе точек.

Пример 1. Найти сумму

$$S(x_1, x_2) = \sum_{t_1=0}^{x_1}\sum_{t_2=0}^{x_2} \varphi(t_1, t_2)$$

для функции

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{(t_1 + t_2 + 1)(t_1 + t_2 + 2)(t_1 + t_2 + 3)}.$$

Функция

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{t_1 + t_2 + 1}$$

является решением разностного уравнения

$$(\delta_1 - 1)(\delta_2 - 1)f(t) = \varphi(t).$$

Имеем

$$P(\delta) = (\delta_1 - 1)(\delta_2 - 1).$$

Искомая сумма равна

$$S(x) = f(x_1 + 1, x_2 + 1) - f(x_1 + 1, 0) - f(0, x_2 + 1) + f(0, 0) = \\ = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x_1 + x_2 + 3} - \frac{1}{x_1 + 2} - \frac{1}{x_2 + 2} + 1\Big).$$

В данном примере сумма $S(x)$ выражается через значения функции $f(x)$ в четырех точках, оператор $P(\delta) = (\delta_1 - 1)(\delta_2 - 1)$ обладает суммирующим эффектом.

Полиномиальные решения уравнения с полиномиальной правой частью

В данной работе нас интересует вопрос о полиномиальных решениях разностных уравнений (1) с полиномиальной правой частью. При этом, не теряя общности, можно рассматривать случай $\varphi(t) = t^\mu = t_1^{\mu_1} \cdots t_n^{\mu_n}$. Кроме того, нас интересуют полиномиальные разностные операторы $P(\delta)$ с суммирующим эффектом, которые можно записать (см. статью [1]) в виде

$$P(\delta) = R(\delta) \prod_{j=1}^{n} (\delta_j - 1)^{k_j}, \tag{3}$$

где $R(\delta)$ — некоторый полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами, $R(I) \neq 0$.

Рассмотрим разностное уравнение

$$R(\delta) \prod_{j=1}^{n} (\delta_j - 1)^{k_j} f(t) = t^\mu, \quad t \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}. \tag{4}$$

Будем искать его частные полиномиальные решения по аналогии с одномерным случаем, т. е. используем операторные равенства $\delta_j = e^{D_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Функция $Td(\xi) = \frac{1}{R(\xi)} \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{k_j}}{(\xi_j - 1)^{k_j}}$ голоморфна в точке $\xi = 0$ и поэтому разлагается в некоторой окрестности нуля в степенной ряд

$$Td(\xi) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{\tilde{b}_{k,m}}{m!} \xi^m. \tag{5}$$

Подставляя в (5) вместо переменной ξ_j оператор дифференцирования D_j, определим *дифференциальный оператор бесконечного порядка*:

$$Td(D) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{\tilde{b}_{k,m}}{m!} D^m. \tag{6}$$

При $k_1 = \ldots = k_n = 1,\ R(\delta) \equiv 1$ оператор, определенный формулой (6) называется *оператором Тодда* (См., например, [2], [3]). В общем случае его естественно называть *обобщенным оператором Тодда*, а числа $\tilde{b}_{k,m}$ — *обобщенными числами Бернулли. Многочленом Бернулли, ассоциированным с полиномиальным разностным оператором (3)*, назовем всякое полиномиальное решение уравнения (4).

Случай $R(\delta) \equiv 1$ рассматривался в работе [4].

Обозначим $\mu^{(m)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-(m-1))$.

Теорема 1. Пусть $P(\delta)$ — оператор с суммирующим эффектом вида (3). Тогда множество многочленов Бернулли, ассоциированных с этим оператором, описывается формулой

$$f(x) = \sum_{0\leqslant m\leqslant \mu} \frac{\tilde{b}_{k,m}}{m!} \frac{\mu^{(m)} x^{\mu+k-m}}{(\mu+k-m)^{(k)}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{m_i=1}^{k_i} x_i^{k_i-m_i} q_{m_i}(x_1, \ldots [i] \ldots, x_n),$$

где q_{m_i} — произвольные полиномы $(n-1)$-й переменной $x_1, \ldots [i] \ldots, x_n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Andrey A. Grigoriev, Evgeniy K. Leinartas, Alexander P. Lyapin* Summation of functions and polynomial solutions to a multidimensional difference equation // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 16:2 (2023), 153–161

[2] *M. Brion* Lattice points in simple polytopes // Journal of the American Mathematical Society. 1997. V. 10. №2. P. 371–392.

[3] *A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii* The Riemann–Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes // Algebra i Analiz, 4:4 (1992), 188–216; St. Petersburg Math. J., 4:4 (1993), 789–812

[4] *Шишкина О. А.* Формула Эйлера–Маклорена для рационального параллелотопа // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия «Математика». Иркутск: 2015. Т. 13. С. 56-71.

УДК 517.984

О теоремах равносходимости для операторов с инволюцией на графе[1]

Е. И. Григорьева (Воронеж, Россия)

elenabiryukova2010@yandex.ru

В работе устанавливается теорема равносходимости рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора с инволюцией, заданного на графе из двух ребер с циклом, и невозмущенного оператора. Кроме того, приводится теорема равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье для интегрального оператора на таком графе.

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, интегральный оператор, инволюция, резольвента, геометрический граф.

Equiconvergence theorems for operators with involution on a graph[1]

E. I. Grigorieva (Voronezh, Russia)

elenabiryukova2010@yandex.ru

The equiconvergence of Fourier series in eigen- and associated functions of functional-differential operator with involution and of unperturbed operator is established. The operators are defined on the simplest graph of two edges with a cycle. The equiconvergence theorem with trigonometric series for an integral operator on this graph is also given.

Keywords: functional-differential operator, integral operator, operator's resolvent, involution, graph.

Введение

Рассматривается оператор в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), заданный на графе $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$. Ребро γ_1 представляет собой цикл («кольцо»), ребро γ_2 примыкает к γ_1. В [1] установлена теорема равносходимости разложения по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф) для заданного на таком графе оператора с инволютивным отклонением с разложением в тригонометрический ряд Фурье. Теорема доказана для оператора вида

$$Ly = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \end{pmatrix},$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \quad (1)$$

Здесь предполагается, что α_k, β_k — комплексные числа, $\beta_k^2 - \alpha_k^2 \neq 0$, $\beta_k \neq 0$, $k = 1, 2$, $x \in [0, 1]$, $p_{i,j} \in C^1[0, 1]$. Краевые условия (1) порождены требованием непрерывности функций во внутреннем узле Γ.

Для изучения других спектральных свойств данного оператора, а также обобщающих его интегральных операторов удобнее использовать технику, основанную на равносходимости разложений по с.п.ф исследуемого оператора с разложением по с.п.ф. некоторого невозмущенного оператора [2]. В данной работе устанавливается соответствующий результат о равносходимости для операторов L и

$$L_0 y = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) \end{pmatrix}, \quad y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

Также исследуется интегральный оператор, заданный на графе Γ,

$$y(x) = Af(x) = \int_0^1 A(x,t) f(t)\, dt, \quad x \in [0, 1], \tag{2}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $A(x,t)$ — некоторая матрица. Для такого оператора в докладе представлены результаты, обобщающие результаты из [3].

Основные результаты

1. В [1] установлена связь оператора L с оператором, действующим в пространстве вектор-функций размерности 4:

$$\widetilde{L} z = Q z'(x) + P(x) z(x),$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0.$$

Здесь $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $Q = \mathrm{diag}(Q_1, Q_2)$, $P(x) = \mathrm{diag}(P_1(x), P_2(x))$, $Q_k(x) = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$,

$P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$, M_0, M_1 — квадратные матрицы размерности 4, причем $(M_0)_{11} = (M_0)_{31} = -(M_0)_{12} = -(M_0)_{33} = 1$, $(M_1)_{21} = (M_1)_{42} = -(M_1)_{22} = -(M_1)_{44} = 1$, остальные элементы $(M_k)_{ij} = 0$.

Пусть $y(x) = (R_\lambda f)(x)$, где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр),

$f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$. Соответственно, резольвенту оператора $\widetilde{L}$ будем обозначать $\widetilde{R}_\lambda$.

Лемма 1. *Если λ таково, что резольвенты операторов L и $\widetilde{L}$ существуют, и $y{=}R_\lambda f$, $z{=}\widetilde{R}_\lambda F$, где $F(x){=}(f_1(x), f_1(1{-}x), f_2(x), f_2(1{-}x))^T$, то $y(x) = \Big([(\widetilde{R}_\lambda F)(x)]_1, [(\widetilde{R}_\lambda F)(x)]_3\Big)$ ($[\cdot]_k$ означает k-ую компоненту вектора).*

Введем также следующие обозначения (см. [1]):
$D = \operatorname{diag}(i\sqrt{d_1}, -i\sqrt{d_1}, i\sqrt{d_2}, -i\sqrt{d_2})$, $d_k^{-1} = \beta_k^2 - \alpha_k^2$, $k = 1, 2$,
$\widetilde{M}_0 = M_0 B H_0(0)$, $\widetilde{M}_1 = M_1 B H_0(1)$,
$B = \operatorname{diag}(B_1, B_2)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$, $b_k = \beta_k^{-1}[i\sqrt{d_k} + \alpha_k]$,
$H_0(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x))$, $h_i(x) = \exp\Big\{-\int_0^x \widetilde{p}_{ii}(t)\,dt\Big\}$,
$\widetilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\widetilde{P}(x) = \operatorname{diag}(\widetilde{P}_1(x), \widetilde{P}_2(x))$,
$\widetilde{P}_k(x) = B_k^{-1} Q_k^{-1} P_k(x) B_k$;
$\widetilde{R}_{0\lambda}$ — резольвента оператора

$$D^{-1}w', \quad U_0(w) = \widetilde{M}_0 w(0) + \widetilde{M}_1 w(1) = 0.$$

Лемма 2 [1]. *Для любых функций $f_1(x) \in L[0,1]$, $f_2(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \int_{|\lambda|=r} \Big[\widetilde{R}_\lambda F - B H_0(x) \widetilde{R}_{0\lambda}(H_0^{-1} B^{-1} F)\Big]\, d\lambda \Big\|_\infty = 0.$$

Развивая далее технику из [2], получим

Теорема 1. *Для любой функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_k(x) \in L[0,1]$, $k = 1, 2$, имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f, x) - S_r^0(f, x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f, x)$ ($S_r^0(f, x)$) — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L (L_0), включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k (λ_k^0), для которых $|\lambda_k| < r$ ($|\lambda_k^0| < r$).

2. Приведем здесь результаты для интегрального оператора (2), обобщающие результаты из [3].

Пусть $\widetilde{A}_1(x, t)$, $\widetilde{B}_1(x, t)$, $\widetilde{B}_2(x, t)$ — произвольные функции, непрерывно дифференцируемые по x и непрерывные по t при $t \neq x$ и $t \neq 1 - x$, причем $\widetilde{A}(x,x) \equiv 1$, $\widetilde{B}_k(x,x) \equiv 1$. Установлено, что если ядро интегрального оператора (2) имеет вид

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} A_1(x,t) & 0 \\ \frac{g_2(x)}{g_2(0)} A_1(0,t) & A_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_1(x,t) = \varepsilon(x,t)\widetilde{A}_1(x,t) + g_1(x)\nu(t)$,
$A_2(x,t) = \alpha_1 \varepsilon(x,t)\widetilde{B}_1(x,t) + \alpha_2 \varepsilon(1-x,t)\widetilde{B}_2(1-x,t) - \alpha_2 \frac{g_2(x)}{g_2(0)} \widetilde{B}_2(1,t)$;
$\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \geq t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x \leq t$;
$g_1(x), g_2(x) \in C^1[0,1]$ $g_1(0) \neq g_1(1)$, $g_2(0) \neq 0$, $\nu(t) = \frac{\widetilde{A}_1(1,t)}{g_1(0)-g_1(1)}$,
α_k — комплексные числа, $\alpha_2 \neq 0$, то область значений оператора удовлетворяет соотношениям (1).

Теорема 2. *Если A^{-1} существует, то для любой функции $f(x)$ с компонентами из $L[0,1]$*

$$\lim \left\| S_r(f,x) - (\sigma_r(f_1,x), \sigma_r(f_2,x))^T \right\|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел λ_k, попадающих в круг $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f_j,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f_j по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 12. С. 1597–1605.

[2] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 3–10.

[3] *Бурлуцкая М. Ш.* Теорема равносходимости для интегрального оператора на простейшем графе с циклом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, № 4. С. 8–13.

УДК 517.9

Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным элементам одного дифференциального пучка с граничными условиями Неймана[1]

В. С. Гуреев (Саратов, Россия)

gureev.vladislaw@yandex.ru

В статье рассматривается обыкновенный дифференциальный квадратичный пучок второго порядка с постоянными коэффициентами и граничными условиями Неймана. Находятся собственные значения и собственные элементы этого пучка. Проводится его линеаризация и находится его резольвента, а именно находится функция Грина. В заключении формулируется теорема о разложении первой компоненты и поясняется где она используется.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный квадратичный пучок второго пордяка, функция Грина, теорема о разложении.

Decomposition of the first component of a vector function by eigenfunctions of a differential beam with Neumann boundary conditions[1]

V. S. Gureev (Saratov, Russian)

gureev.vladislaw@yandex.ru

The article considers an ordinary second-order differential quadratic beam with constant coefficients and Neumann boundary conditions. The eigenvalues and eigenvalues of this bundle are found. Its linearization is carried out and its resolvent is found, namely, the Green function is found. In conclusion, the theorem on the decomposition of the first component is formulated and it is explained where it is used.

Keywords: an ordinary second-order differential quadratic beam, Green's function, decomposition theorem.

Введение

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный квадратичный пучок второго порядка $L(\lambda)$ с постоянными коэффициентами, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и определяемый дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \tag{1}$$

и краевыми условиями Неймана

$$y'(0) = y'(1) = 0. \tag{2}$$

Далее используем определения и факты из [1], не оговаривая этого особо. Предполагается, что выполняется условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$, то есть корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

являются вещественными и различными. Пусть корни этого уравнения удовлетворяют условию регулярности

$$\omega_1 < 0 < \omega_2. \tag{3}$$

Теорема о разложении

Для оператор-функции $L(\lambda)$, определяемой (1)–(2) найдем собственные элементы и собственные значения. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу

$$L(\lambda)y = 0 \tag{4}$$

или, подробнее,

$$l(y,\lambda) = 0, \qquad y'(0) = y'(1) = 0.$$

Общее решение уравнения $l(y,\lambda) = 0$ задачи (4) имеет вид

$$y(x,\lambda) = C_1 e^{\lambda\omega_1 x} + C_2 e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Учитывая краевые условия (2), находим собственные значения и собственные элементы для оператор-функции $L(\lambda)$

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_k(x) = e^{\frac{2k\pi i\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} - e^{\frac{2k\pi i\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}}, \quad k \in \mathbb{Z}/\{0\}.$$

Линеаризуем задачу (4), как это сделано в [2]. Пусть $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$, тогда краевая задача (4) перейдет в задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = 0$, где $\mathcal{L}$ – линейный оператор в пространстве вектор-функций $Z = (z_1, z_2)^T$, определяемый выражением

$$AZ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{p_1}{p_2}\frac{d}{dx} \end{pmatrix} Z,$$

и следующими краевыми условиями

$$z_1'(0) = z_1'(1) = 0.$$

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E})^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$. Для этого решим задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = F$, где $F = (f_1, f_2)^T$, где $f_1, f_2 \in L_2[0,1]$. Первая компонента $Z = \mathcal{R}_\lambda F$ является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = f_\lambda, \qquad z'(0) = z'(1) = 0, \tag{6}$$

где $f_\lambda := -p_2 f_2 - p_1 f_1' - \lambda p_2 f_1$.

Для функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ задачи (6) справедлива формула

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)\delta(\lambda)} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1(1-\xi))} - e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right) -$$
$$- \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)} e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \chi(x-\xi) - \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \chi(\xi - x),$$

где $\delta(\lambda) = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1}$, а $\chi(x)$ есть функция Хевисайда.

Если обозначить через R_λ резольвенту пучка $L(\lambda)$, то получим

$$z_1(x,\lambda) = (R_\lambda f_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f_\lambda(\xi) d\xi =$$
$$= \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)(-p_2 f_2(\xi) - p_1 f_1'(\xi) - \lambda p_2 f_1(\xi)) d\xi.$$

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Обозначим

$$I_n = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-n}^{n} \int_{\gamma_k} \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f_\lambda(\xi) d\xi d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f_\lambda(\xi) d\xi d\lambda,$$

где Γ_n, $n \in \mathbb{N}$, есть круговые контуры, отстоящие от чисел λ_k на расстоянии не меньше некоторого достаточно малого фиксированного числа $\delta > 0$, между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k и имеют место оценки:

$$C_1 n < \text{длина } \Gamma_n < C_2 n \quad (0 < C_1 < C_2 < +\infty).$$

Такие контуры существуют на основании формул (5).

Основным результатом статьи является следующая теорема, которая доказывается методом, аналогичным методу в [2].

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (3). *Если* $f_1(x) \in W_p^1[0,1]$, $f_2(x) \in L_p[0,1]$, *где* $p > 1$, *то*

$$I_n(x) = f_1(x) + o_n(1),$$

где $o_n(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *равномерно по* $x \in [0,1]$.

Теорема 1 используется для доказательства теоремы единственности классического решения и получения формулы для него в виде контурного интеграла для гиперболической начально-граничной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t),$$
$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции φ, ψ, f комплексно-значные при соответствующих условиях гладкости на эти функции.

Подробности можно найти в статьях [3–6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М : Наука, 1969. 528 с.

[2] *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильнонерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф.. 2013. Т. 13, № 1. С. 21–26.

[3] *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения сл смешанной производной и формула для решения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф.. 2023. Т. 23, № 2. С. 183–194.

[4] *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 24. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2022. С. 53–58.

[5] *Рыхлов В. С.* Обобщенная начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл.. 2023. Т. 69, № 2. С. 342–363.

[6] *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.. 2023. Т. 226. С. 89–107.

УДК 517.2 + 519.853

Об остром минимуме в задаче чебышевского приближения[1]

С. И. Дудов, М. А. Осипцев (Саратов, Россия)
DudovSI@info.sgu.ru Osipcevm@gmail.com

Показано, что решение задачи наилучшего равномерного приближения непрерывной функции полиномом по чебышевской системе функций характеризуется острым минимумом. А именно, имеет место линейная оценка роста отклонения целевой функции коэффициентов полинома данной задачи от её минимального значения относительно отклонения вектора вектора коэффициентов от оптимального.

Ключевые слова: альтернанс, чебышевская система функций, острый минимум.

On the sharp minimum in the Chebyshev approximation problem[1]

Sergei I. Dudov, Mikhail A. Osiptsev (Saratov, Russia)
DudovSI@info.sgu.ru Osipcevm@gmail.com

It has been demonstrated that the solution to the problem of achieving the best uniform approximation of a continuous function by a polynomial over the Chebyshev system of functions is characterised by a sharp minimum. Specifically, there is a linear estimate of the growth of the deviation of the target function's coefficients for the polynomial of this problem from its minimum value with respect to the deviation of the coefficient vector from the optimal value.

Keywords: alternance, Chebyshev function system, sharp minimum.

1. Говорят, что в задаче на условный экстремум

$$f(x) \to \min_{x \in D}, \quad D \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

в точке $x_0 \in D$ имееет место острый минимум ([1]), если существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x) - f(x_0) \geq \delta \|x - x_0\|, \quad \forall x \in D. \tag{2}$$

Эта оценка роста (2) целевой функции задачи (1), выражаемая правой частью неравенства (2), имеет важное конструктивное значение при разработке численных методов решения задачи и оценке их скорости сходимости. Очевидно далеко не в любой экстремальной задаче острый минимум имеет место. Однако в определённых ситуациях сочетания свойств целевой функции $f(x)$ и допустимого множества аргументов D он может быть предопределен. Как будет показано ниже, эта предопределённость присутствует в задачах чебышевского приближения.

2. Пусть $f(t)$ – непрерывная на множестве $T \subset \mathbb{R}$ функция, $|T| \geq n+2$. Рассматриваем задачу

$$F(A) \equiv \max_{t\in T} |f(t) - P_n(A,t)| \to \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}} \tag{3}$$

равномерного на T приближение функции $f(t)$ обобщенным полиномом $P_n(A,t) = \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(t)$ по чебышевской ([2], [3]) на T системе функций $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$, где $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Для системы точек $t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ из T определим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} -\varphi_0(t_0) & \varphi_0(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_0(t_{n+1}) \\ -\varphi_1(t_0) & \varphi_1(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_1(t_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varphi_n(t_0) & \varphi_n(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_n(t_{n+1}) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Матрица D невырождена и элементы последнего столбца матрицы $C = D^{-1} = (c_{ij})_{i,j=1,n}$ положительны: $c_{k\,n+1} > 0$, $k = \overline{1,n+2}$.*

Теорема. *Пусть на векторе коэффициентов A^* функция $F(A)$ достигает минимального на $\mathbb{R}^{n+1}$ значения и, при этом, альтернанс реализуется на системе точек $\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \subset T : t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$:*

$$F(A^*) = |f(t_j) - P_n(A^*,t_j)|, \quad j = \overline{0,n+1},$$

$$f(t_j) - P_n(A^*,t_j) = P_n(A^*,t_{j+1}) - f(t_j), \quad j = \overline{0,n},$$

и, кроме того, $[t_0, t_{n+1}] \subset T$. Тогда для любого $A \in \mathbb{R}^{n+1}$ выполняется неравенство

$$F(A) - F(A^*) \geqslant \delta_0\|A - A^*\|, \tag{4}$$

где

$$\delta = \min_{k=\overline{1,n+2}} \frac{c_{k,n+2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} c_{k,j}^2}}. \tag{5}$$

3. Для практического применения полезно располагать хотя бы оценкой снизу для δ. Она естественно будет зависеть от используемой чебышевской системы и системы узлов, на которой реализуется альтернанс. Этот вопрос предполагается обсудить.

В наиболее простом случае величину δ по формуле (5) удается получить в явном виде. Приведем примеры.

1) $n=1$, $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=0,1}=\{1,t\}$, на системе узлов $\{t_0,t_1,t_2\}$

$$\delta=\min\left\{\frac{t_2-t_1}{\sqrt{4+(t_1+t_2)^2}},1,\frac{t_1-t_0}{\sqrt{4+(t_0+t_1)^2}}\right\}.$$

2) $n=2$, $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=0,1,2}=\{1,t,t^2\}$, на системе узлов $\{t_0,t_1,t_2,t_3\}$

$$\delta=\min\left\{\frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}{\sqrt{4(t_1-t_3)^2+4(t_1^2-t_3^2)^2+(t_1-t_3)^2(t_2(t_3-t_2)+t_1(t_2+t_3))^2}},\right.$$
$$\frac{(t_2-t_0)(t_3-t_0)(t_3-t_2)}{\sqrt{4(t_0-t_2)^2+4(t_0^2-t_2^2)^2+(t_2t_3(t_3-t_2)+t_0^2(t_2+t_3)-t_0(t_2^2+t_3^2))^2}},$$
$$\frac{(t_1-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_0)}{\sqrt{4(t_1-t_3)^2+4(t_1^2-t_3^2)^2+(t_1-t_3)^2(-t_0^2+t_1t_3+t_0(t_1+t_3))^2}},$$
$$\left.\frac{(t_1-t_0)(t_2-t_0)(t_2-t_1)}{\sqrt{4(t_0-t_2)^2+4(t_0^2-t_2^2)^2+(t_0-t_2)^2(t_1(-t_1+t_2)+t_0(t_1+t_2))^2}}\right\}.$$

Отметим, что альтернанс, следствием которого стал острый минимум в задаче (1), присутствует также в задачах по полиномиальным оценкам и приближении сегментных функций ([4]– [7]), где также могут быть получены оценки роста целевой функции, подобные оценке (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 383 с.

[2] *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: «Наука», 1976, 568с.

[3] *Дзядык, В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977, 510с.

[4] *Выгодчикова И. Ю., Дудов С.И., Сорина Е. В.* Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, N7, 1175–1183.

[5] *Дудов С.И., Сорина Е. В.* Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой фиксированной ширины // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т.51, N11, 1981–1994

[6] *Дудов С.И., Сорина Е. В.* Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Алгебра и анализ, 2012, т.24, N5, 44-71

[7] *Волосивец С.С., Дудов С.И., Прохоров Д.В., Хромова Г.В.* Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа // Саратов:Изд. Саратовского ун-та, 2016. 296 с.

УДК 517.982.256+512.546.3

Приближение суммами сдвигов одной функции на компактной абелевой группе[1]

Н. А. Дюжина (Москва, Россия)
natasha17954@yandex.ru

Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Получен следующий результат: действительная функция на G, суммы сдвигов которой плотны по норме L_2 в соответствующем действительном пространстве функций с нулевым средним, существует тогда и только тогда, когда G связная и имеет счетную группу характеров.

Ключевые слова: плотность, суммы сдвигов, компактные группы, пространство L_2.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

Approximation by sums of shifts of a single function on a compact abelian group[1]

N. A. Dyuzhina (Moscow, Russia)
natasha17954@yandex.ru

Let G be a nontrivial compact abelian group. We obtained that there exists a real function on G whose sums of shifts are dense with respect to L_2 norm in the corresponding real space of functions with zero mean if and only if G is connected and has a countable dual group.

Keywords: density, sums of shifts, compact groups, L_2 space.

Acknowledgements: This work was supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation "BASIS".

Существует функция, определенная на окружности $\mathbb{T}$, суммы сдвигов которой плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T})$ функций из $L_p(\mathbb{T})$ с нулевым средним ($1 \leq p < \infty$) [1]. В действительном пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей существует вектор, суммы сдвигов которого плотны во всех пространствах $l_p(\mathbb{Z})$, $2 \leq p < \infty$ [2]. Существует функция, определенная на действительной оси $\mathbb{R}$, суммы сдвигов которой плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $2 \leq p < \infty$ [3]. В работе [4] эти результаты перенесены соответственно на случай тора $\mathbb{T}^d$, решетки $\mathbb{Z}^d$ и пространства $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Естественным образом возникает задача, ранее сформулированная в [5].

Пусть G — локально компактная абелева группа с мерой Хаара m. Существует ли функция f, определенная на этой группе, для которой суммы

$$\sum_{k=1}^{n} f(g+g_k), \;\; g_k \in G, \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

ее сдвигов: а) плотны в действительном пространстве $L_2(G)$ (в случае некомпактной группы G); б) плотны в действительном пространстве

$$L_2^0(G) = \left\{ h \in L_2(G) : \int_G h(g)dm(g) = 0 \right\}$$

(в случае компактной группы G)?

Следующий результат дает исчерпывающий ответ на вопрос б) задачи.

Теорема. *Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Функция $f : G \to \mathbb{R}$, для которой суммы* (1) *сдвигов плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$, существует тогда и только тогда, когда G связная и имеет счетную группу характеров.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бородин П. А.* Приближение суммами сдвигов одной функции на окружности // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, № 6. С. 23–37.

[2] *Бородин П. А.* Плотность сумм сдвигов одного вектора в пространствах последовательностей // Труды МИАН. 2018. Т. 303, № 6. С. 39–44.

[3] *Borodin P. A., Konyagin S. V.* Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of a single function on the line // Anal. Math., 2018. Vol. 44, № 2. P. 163–183.

[4] *Дюжина Н. А.* Многомерные аналоги теорем о плотности сумм сдвигов одной функции // Матем. заметки. 2023. Т. 113, № 5. С. 775–779.

[5] *Бородин П. А., Шкляев К. С.* Плотность квантованных приближений // УМН. 2023. Т. 78, № 5(473). С. 3–64.

УДК 517.927.2

Об условиях экстремума энергетического функционала в классе разрывных функций[1]

М. Б. Зверева (Воронеж, Россия)
margz@rambler.ru

В настоящей работе вариационными методами получены необходимое и достаточное условия экстремума функционала потенциальной энергии для цепочки стилтьесовских струн, расположенной вдоль отрезка $[0, l]$. При этом предполагается, что в точках $x = 0$ и $x = l$ установлены ограничители на перемещение струн под воздействием внешней силы. Соответствующий аналог уравнения Эйлера представлен в виде интегро - дифференциального уравнения с производной по мере и обобщенным интегрированием по Стилтьесу. В точках $x = 0$ и $x = l$ установлены нелинейные краевые условия. Доказаны существование и единственность решения полученной краевой задачи.

Ключевые слова: минимум функционала, функция ограниченной вариации, производная по мере, интеграл Стилтьеса.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы QRPK-2023-0002).

On the conditions for the extremum of the energy functional in the class of discontinuous functions[1]

M. B. Zvereva (Voronezh, Russia)
margz@rambler.ru

In this work, using variational methods, we obtain necessary and sufficient conditions for the extremum of the potential energy functional for a chain of Stieltjes strings located along the segment $[0, l]$. It is assumed that at points $x = 0$ and $x = l$ limiters on the movement of the strings under the influence of an external force are installed. The corresponding analogue of the Euler equation is presented in the form of an integro-differential equation with measure derivative and generalized Stieltjes integral. Nonlinear boundary conditions at the points $x = 0$ and $x = l$ are established. The existence and uniqueness of the solution to the resulting boundary value problem are proved.

Keywords: minimum of a functional, function of bounded variation, derivative with respect to measure, Stieltjes integral.

Acknowledgements: This research was supported by the Ministry of Education of the Russian Federation within the framework of the state task in the field of science (topic number QRPK-2023-0002).

Введение

Пусть вдоль отрезка $[0, l]$ оси Ox расположена разрывная стилтьесовская струна (цепочка из струн, скрепленных между собой пружинами). Концы цепочки в точках $x = 0$ и $x = l$ прикреплены к спицам, по которым они могут скользить (без учета трения). При этом в точках $x = 0$ и $x = l$ дополнительно установлены ограничители на перемещения струн, представленные отрезками $[-m_1, m_1]$ и $[-m_2, m_2]$ соответственно, где $m_1 > 0$, $m_2 > 0$.

Обозначим через $BV[0, l]$ множество функций ограниченной вариации на отрезке $[0, l]$. Под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции $F \in BV[0, l]$, струна переходит из положения равновесия в положение, описываемое с помощью функции $u(x)$. Заметим, что скачки функции F в точках разрыва соответствуют сосредоточенным в этих точках силам. Условия нахождения концов струн внутри ограничителей означают, что $|u(0)| \leq m_1$, $|u(l)| \leq m_2$.

Мы рассматриваем случай, когда функция $u(x)$ может быть разрывна в не более чем счетном множестве точек. Заметим, что во всякой точке разрыва ξ функция $u(x)$ не определена, но определены и имеют физический смысл предельные значения $u(\xi - 0)$, $u(\xi + 0)$, описывающие отклонения от положения равновесия соответствующих концов струн.

Функционал потенциальной энергии такой физической системы имеет вид (см.[1],[2])

$$\Phi(u) = \int\limits_0^l \frac{pu_\mu'^2}{2} d\mu + \int\limits_0^l \frac{u^2}{2} d[Q] - \int\limits_0^l ud[F]. \tag{1}$$

Мы предполагаем существование строго возрастающей функции $\mu(x)$, масштабирующей отрезок $[0, l]$, такой, что функции $u(x)$ могут считаться μ – абсолютно - непрерывными. Функция $u(x)$ является μ – абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда

$$u(\beta) - u(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta f d\mu,$$

где интеграл понимается по Лебегу–Стилтьесу. Функция f называется μ производной от u по мере μ и обозначается через u'_μ. Заметим, что μ-абсолютно непрерывная функция $u(x)$ может быть разрывной лишь в точках разрыва $\mu(x)$. Причем, во всякой точке ξ разрыва функции μ справедливо равенство $u'_\mu(\xi) = \dfrac{u(\xi + 0) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0)}$.

Функция $p \in BV[0, l]$ характеризует натяжение струн, причем $\inf\limits_{(0,l)} p > 0$. Мы предполагаем, что значения функции $p(x)$ в точках разрыва $\mu(x)$

совпадают с коэффициентами упругости пружин, соединяющих соответствующие концы струн. Возрастающая функция $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды. В частности, мы допускаем наличие в не более чем счетном множестве точек дополнительных упругих опор (пружин). Скачки функции $Q(x)$ в точках разрыва совпадают с жесткостями соответствующих пружин.

В функционале (1) первый интеграл понимается по Лебегу - Стилтьесу по мере, порождаемой функцией $\mu(x)$ (мера всякой точки ξ разрыва $\mu(x)$ определяется с помощью скачка $\Delta\mu(\xi) = \mu(\xi+0) - \mu(\xi-0)$). Второй и третий интегралы понимаются в обобщенном смысле по Стилтьесу (когда мера сингулярных точек "расщепляется"). Интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} ud[v]$ впервые был введен Ю.В. Покорным в [2]. Такой интеграл мы называем π -интегралом. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о π - интеграле, мы будем заключать функцию, стоящую под знаком дифференциала, в квадратные скобки. Следуя [2], для функций ограниченной вариации $u(x)$ и $v(x)$ π - интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} ud[v]$ может быть представлен в виде

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} ud[v] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} udv_0 + \sum_{\alpha<s\leq\beta} u(s-0)\Delta^- v(s) + \sum_{\alpha\leq s<\beta} u(s+0)\Delta^+ v(s),$$

где v_0 — непрерывная часть функции v; $\Delta^- v(s) = v(s) - v(s-0)$, $\Delta^+ v(s) = v(s+0) - v(s)$; интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} udv_0$ понимается в обычном смысле по Лебегу-Стилтьесу.

Будем рассматривать функционал (1) на множестве E μ -абсолютно непрерывных функций, таких что $u'_\mu \in BV[0,l]$, и удовлетворяющих условиям

$$|u(0)| \leq m_1, \quad |u(l)| \leq m_2. \tag{2}$$

Согласно принципу Гамильтона - Лагранжа, реальная деформация u_0 минимизирует функционал Φ при условиях (2).

Основные результаты

Пусть $f_1 = F(0+0) - F(0)$, $f_2 = F(l) - F(l-0)$, $\gamma_1 = Q(0+0) - Q(0)$, $\gamma_2 = Q(l) - Q(l-0)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $u_0(x)$ минимизировала функционал потенциальной энергии $\Phi(u)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$u_0(x)$ *являлась решением задачи*

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0), \\ p(+0)u'_\mu(+0) - \gamma_1 u(0) + f_1 \in N_{[-m_1,m_1]}(u(0)), \\ -p(l-0)u'_\mu(l-0) - \gamma_2 u(l) + f_2 \in N_{[-m_2,m_2]}(u(l)). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь через $N_C(x)$ обозначен нормальный конус в точке $x \in C$ ко множеству C, определяемый числовым множеством

$$N_C(x) = \{\xi \in R : \xi(c - x) \leq 0 \quad \forall c \in C\}.$$

Из уравнения в (3) вытекает, что в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ справедливы равенства

$$-p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta\mu(\xi)} + p(\xi-0)u'_\mu(\xi-0) + u(\xi-0)\Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi),$$

$$p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta\mu(\xi)} - p(\xi+0)u'_\mu(\xi+0) + u(\xi+0)\Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi),$$

а в точках s, в которых функция $\mu(x)$ непрерывна, и хотя бы одна из функций p, Q, F разрывна, верно равенство

$$-p(s+0)u'_\mu(s+0) + p(s-0)u'_\mu(s-0) + u(s)\Delta Q(s) = \Delta F(s).$$

Теорема 2. *Решение задачи (3) существует и единственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kamenskii M., Raynaud de Fitte P., Wong N.-Ch., Zvereva M.* A model of deformations of a discontinuous Stieltjes string with a nonlinear boundary condition // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2021. V. 5, № 5. P. 737–759.

[2] *Pokorny Yu. V.* The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations // Doklady Mathematics. 1999. V. 59, № 1. P. 34–37.

УДК 519.714

Asymptotic estimates of cellular circuit area in arbitrary basis and universal synthesis method[1]

V. S. Zizov (Moscow, Russia)
vzs815@gmail.com

The arbitrary complete bases of cellular circuits of functional and switching elements are discussed in the paper. Previously obtained results of upper and lower estimates are generalized to the arbitrary basis. Lower estimates are proven on power reasons. Upper estimates are constructively built on the ground of universal synthesis method and generalized to the arbitrary basis case.

Keywords: celullar circuit, planar circuit, Shannon function, asymptotic estimates, circuit area, lower estimates, upper estimates.

Универсальный метод синтеза и асимптотические оценки сложности клеточных схем в произвольном полном базисе[1]

В. С. Зизов (Москва, Россия)
vzs815@gmail.com

В настоящей работе рассматриваются произвольные базисы клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов. Полученные раннее результаты верхних и нижних оценок обобщаются на произвольный базис. Нижние оценки доказываются исходя из мощностных соображений. Верхние оценки строятся конструктивно на основе универсального метода синтеза для одного базиса, и обобщаются на случай произвольного базиса.

Ключевые слова: клеточные схемы, плоские схемы, функция Шеннона, асимптотические оценки, площадь схемы, нижние оценки.

Introduction

The research of the complexity of descrete functions (the quantity of functional elements and contacts in different models) took place in many previous papers. The curcuit area becomes an important parameter while implementing of the real circuits in area, taking into account their sizes and geometric features, especially in the case of integrated circuits. In the paper is discussed the descrete function computation model similar to circuits of functional elements.

Similar mathematical model was described by Thompson in the monograph [1]. It is the ground for the integrated circuits research, but it doesn't take into account the delays during signal propagation in conductors. It is considered to be one of it's diadvantages. Chazelle and Louis [2] proposed a model describing the delays occuring in the circuit.

In 1967 Kravtsov in [3] was chronologically the first to propose similar planar circuit model, consisting of functional and switching elements. He gave the definition of «standard» basis. The model important feature is the Shannon function behaviour i.e. the complexity of the most complex function from n boolean variables. The asymptotics of Shannon function for the cellular circuit model [3] was proved by Albrecht in [4]. The paper showed that the asymptotics of Shannon function looks like $\sigma 2^n$ where $\sigma = const$. The exact constant σ value is still unknown, but from [3] and [4] can be seen that it is situated in the segment $[\frac{1}{4}, \frac{9}{2}]$.

Zizov and Lozhkin for the first time received asimptotically tight bounds $n2^{n-1}$ for the decoder area of order n [5] and lookup function of order n [6]. The lower estimate of Shannon function was improved in [7].

In that paper is discussed the basis from the paper [5] and received upper and lower estimates results are being generalized to the arbitrary basis.

Let's define the function f complexity $A(f)$ as the least of the complexities of cellular circuit Σ implementing f. Let's introduce the Shannon function $A(n)$:

$$A(n) = \max_{f \in P_2(n)} A(f).$$

Here $P_2(n)$ is a set of all boolean functions from n variables.

Theorem 1 (universal synthesis method). *For every boolean function f from n variables there is a cellular circuit S implementing f and repeating it's inputs one-time and has the area estimate:*

$$A(S) \leqslant 2^n + O(n2^{\frac{n}{2}}), \quad n \to \infty.$$

The proof is done by the construction of such a circuit according to the following principle (Pic. 1):

a) let the variables set $x_1, \dots, x_n$ be divided into two equal parts $x_1, \dots, x_{n/2}, x'_1, \dots, x'_{n/2}$;

b) top and left sides are consisting of decoders, constructed according [5] as a conjunctive decoder from the variables $x_1, \dots, x_{n/2}$ and a disjunctive decoder from the variables $x'_1, \dots, x'_{n/2}$;

c) intersection lines i, j contain matrix elements $M_{i,j}$ such that they are a functional element & when on that set $x_1, \dots, x_{n/2}, x'_1, \dots, x'_{n/2}$ the function takes the value 0 and a switching element in another case.

According to construction every vertical line implements partial function on the fixed set of variables $x_1, \dots, x_{n/2}$ and their disjunction is implementing

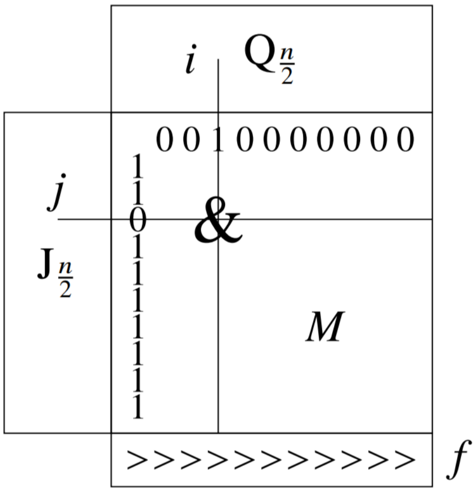

Рис. 1: Schematic diagram of implementation of arbitrary boolean function f from n variables. Here $Q_{\frac{n}{2}}$ is a conjunctive decoder from $\frac{n}{2}$ variables, $J_{\frac{n}{2}}$ is a disjunctive decoder from $\frac{n}{2}$ variables, M is an element matrix, f is implementing function.

the function f. □

Lemma 1. *Any complete basis B in celullar curcuit model consists of not more 641 functional and switching elements.*

Let's define the value $C(B)$ for the arbitrary basis B as a minimum implemention area of the boolean function system of basis B_0' such that inputs and outputs can be placed arbitrary on given sides. Let's denote as $|B|$ the number of all possible elements of the basis B taking into account rotations and reflections. It follows from the lemma 1 that every complete basis B consists of not more than 641 elements and $|B| = 641 * 4 = 2564 = E_{max}$.

Theorem 2 (about the upper estimate in arbitrary basis). *For every boolean function f from n variables in arbitrary complete basis B exists celullar circuit S implementing f and repeating it's inputs one-time with area:*

$$A(S) \leqslant C(B)2^n + O(n2^{\frac{n}{2}}), \quad n \to \infty.$$

Let's denote as $N(n,k)$ the number of cellular circuits with area k implementing different boolean functions from n variables with one output.

Lemma 2 (about the estimate of different circuits number)

$$\log_2(N(n,k)) < \log_2(|B|)k + n\log_2(k+1) + O(\log_2(k)).$$

Theorem 3 (about the lower estimate). *For the area $A(S)$ of cellular circuit without repeating inputs in the arbitrary basis B is true such an estimate for Shannon function:*

$$A(n) \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln(|B|)}2^n.$$

It is true for every $\epsilon > 0$ *and big enough* n

$$A(S) > C2^n(1-\epsilon), C = \frac{\ln(2)}{\ln(|B|)}.$$

Wherein the part of functions f *for which the inequality is not satisfied tends to zero as* n *grows.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Thompson C. D.* A complexity theory for VLSI //1980, 106 p.

[2] *Chazelle B., Monier L.* A Model of Computation for VLSI with Related Complexity Results //Journal of the ACM JACM, 1981. V.32 pp.318–325.

[3] *Kravtsov S. S.* Realization of Boolean functions in a class of circuits of functional and switching elements //Problems of Cybernetics. M.: Nauka, 1967. №19, pp.285–292.

[4] *Albrecht A.* On circuits of celullar elements //Problems of Cybernetics. M.: Nauka, 1975. №33, pp.209–214.

[5] *Lozhkin S. A., Zizov V. S.* Refined estimates of the decoder complexity in the model of cellular circuits with functional and switching elements //Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2020. vol. 162, no. 3. pp. 322–334. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334.

[6] *Lozhkin S. A., Zizov V. S.* Asympptotically tight bounds for the multiplexer estimates in celullar circuit model //Discrete Math. 2022. Vol.34, № 4. pp.52–68

[7] *Zizov V. S.* Some approaches to Shannon function estimates in the cellular circuit model // Modern methods of function theory and related problems. Materials of the International conference Voronezh Winter Mathematical School. — Publishing House VSU Voronezh. 2023. pp.164–167.

УДК 517.984

О спектральных данных систем дифференциальных уравнений с особенностью[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, Россия)
IgnatievMU@sgu.ru

В работе изучаются свойства спектральных данных систем дифференциальных уравнений с особенностью на полуоси в случае отсутствия дискретного спектра. В частности, устанавливается их связь с данными рассеяния.

Ключевые слова: Теория рассеяния, Обратные задачи, Системы с особенностью.

Благодарности: Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

On spectral data of differential systems with a singularity[1]

M. Yu. Ignatiev (Saratov, Russia)
IgnatievMU@sgu.ru

In the paper, we study spectral data of the differential systems with a singularity in the case of empty discrete spectrum. In particular, we establish its relation with the scattering data.

Keywords: Scattering theory, Inverse problems, Systems with a singularity.

Acknowledgements: This work was implemented in Saratov State University and supported by the Russian Science Foundation (project № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y, \tag{1}$$

где $A, B, q(x), x \in (0,\infty)$ – $n \times n$ $(n > 2)$ матрицы, причем матрицы A и B постоянны, $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$, $b_j \neq 0$, $b_j \neq b_k$ при $j \neq k$, ρ – спектральный параметр. Будем считать, кроме того, что матрицы A и B удовлетворяют тем же дополнительным условиям, что в работе [1].

Определим множество:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}.$$

Пусть $\mathbb{C} \setminus \Sigma = \bigcup_{\nu=1}^{N} \mathcal{S}_\nu$, где $\mathcal{S}_\nu$ – открытые непересекающиеся секторы с вершиной в нуле. При любом $\nu \in \{1, \dots, N\}$ для каждого $\rho \in \mathcal{S}_\nu$ существует перестановка $R_1, \dots, R_n$ чисел $b_1, \dots, b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1\rho) < \mathrm{Re}(R_2\rho) < \dots < \mathrm{Re}(R_n\rho)$. Перестановка $R_1, \dots, R_n$ зависит только от сектора $\mathcal{S}_\nu$ и не зависит от выбора $\rho \in \mathcal{S}_\nu$.

Определение. Пусть $\rho \in \mathcal{S}_\nu$, $k \in \{1, \dots, n\}$ фиксированы. Решение $\Phi_k(x, \rho)$, $x \in (0, \infty)$ системы (1) называется k-м решением Вейля, если оно удовлетворяет условиям:

$$\Phi_k(x, \rho) = x^{\mu_k} \left(\mathfrak{h}_k + o(1)\right), x \to 0,$$

$$\Phi_k(x, \rho) = O\left(\exp(\rho x R_k)\right), x \to \infty.$$

Здесь $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ – собственные значения матрицы A, $(\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n)$ – соответствующие собственные векторы.

Предположим, что для матриц A, B выполнено условие информативности [1], [2]. Это гарантирует, в частности, что при $q = 0$ решения Вейля существуют для всех $\rho \neq 0$. В общем случае, когда потенциал $q(\cdot)$ отличен от тождественного нуля, k-е решение Вейля существует и единственно для всех таких $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, для которых $\Delta_{k+1}(\rho) \neq 0$, где $\Delta_{k+1}(\rho)$ характеристическая функция [2].

Пусть некоторая функция $f(\rho)$ определена при $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Определим множество $\Sigma' := \bigcup_{\nu=1}^{N} Sigma_\nu$, где через Σ_ν обозначен открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$ ($\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$). Для $\rho \in \Sigma'$ через $f^{\pm}(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ обозначим пределы (при условии, что последние существуют):

$$f^{\pm}(\rho) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(\rho \pm i\varepsilon\rho).$$

Известно, в частности [2], что предельные значения $\Delta_k^{\pm}(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ существуют для всех k, ν.

Будем говорить, что $q(\cdot) \in G_0^p$, если для каждого $\nu = \overline{1, N}$ и для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$

$$\prod_{k=1}^{n} \Delta_k^{\pm}(\rho) \neq 0.$$

Всюду далее полагаем $q(\cdot) \in G_0^p$. В этом случае для любого $\rho \in \Sigma' := \bigcup_{\nu=1}^{N} \Sigma_\nu = \Sigma \setminus \{0\}$ существуют предельные значения $\Phi^{\pm}(x, \rho)$, где $\Phi(x, \rho) := (\Phi_1(x, \rho), \dots, \Phi_n(x, \rho))$. Поскольку каждая из матриц $\Phi^-(x, \rho)$, $\Phi^+(x, \rho)$ удовлетворяет системе (1), для каждого $\rho \in \Sigma'$ определена (единственная) матрица $w(\rho)$ такая, что $\Phi^+(x, \rho) = \Phi^-(x, \rho) w(\rho)$.

Матрицу-функцию $w(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ будем называть *спектральными данными.*

Доклад посвящен описанию свойств спектральных данных систем с особенностью вида (1). Ниже приведен один из результатов исследования.

Для $\rho \in \Sigma'$ определим I_- как множество k таких, что $\mathrm{Re}(\rho R_k^-) = \mathrm{Re}(\rho R_{k+1}^-)$.

Теорема 1. *При каждом фиксированном $\rho \in \Sigma'$ матрица $w = w(\rho)$ является блочно-диагональной. Диагональные блоки матрицы $w(\rho)$ имеют размеры 1×1 и 2×2, блоки второго типа расположены в строках с номерами k и $k+1$, где $k \in I_-$, и имеют вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w_{k+1,k} & 1 \end{pmatrix}.$$

Одним из важных вопросов теории обратных задач на полуоси является вопрос о связи спектральных данных, получаемых при наблюдении системы из точки $x = 0$ и данных рассеяния [3], получаемых при наблюдении из бесконечно удаленной точки. Выявляемые здесь свойства играют важную роль, в частности, в получении характеризации спектральных данных.

Теорема 2. *Пусть $v = v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ – данные рассеяния системы* (1), *где $q(\cdot) \in G_0^p$. Существует диагональная матрица-функция $\delta = \delta(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, имеющая конечные пределы $\delta^{\pm}(\rho)$ для всех $\rho \in \Sigma'$, такая, что $v(\rho)\delta^+(\rho) = \delta^-(\rho)w(\rho)$. Для матрицы $\delta(\rho)$ праведлива асимптотика $\delta(\rho) = \delta^{(0)}(\rho)(I + o(1))$, $\rho \to \infty$, где $\delta^{(0)}(\rho)$ соответствует системе* (1) *при $q = 0$.*

Приведенный ниже результат показывает, что данные рассеяния могут быть найдены по заданным спектральным данным с помощью некоторой конструктивной процедуры, не требующей решения обратной задачи. Отметим, что переход от одной постановки обратной задачи к другой может существенно влиять на эффективность использования численных алгоритмов их решения.

Следствие. *Для элементов матрицы-функции $\delta = \delta(\rho)$, выполнены следующие условия сопряжения при $\rho \in \Sigma'$: $\delta^+_{k,k}(\rho) = \delta^-_{k+1,k+1}(\rho)w_{k+1,k}(\rho),\ k \in I_-$, $\delta^+_{k,k}(\rho) = -\delta^-_{k-1,k-1}(\rho)w^{-1}_{k,k-1}(\rho),\ k-1 \in I_-$, $\delta^+_{k,k}(\rho) = \delta^-_{k,k}(\rho),\ k \notin I_-,\ k-1 \notin I_-$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ignatiev, M.* On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential // Mathematical Notes. 2020. v. 108, No. 6, P. 814–826.

[2] *Ignatyev, M.* Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity // Results Math. 2017. v. 71, P. 1531–1555.

[3] *Игнатьев, М. Ю.* О данных рассеяния дифференциальных систем с особенностью // Мат. заметки. 2022. т. 111, №. 6, С. 846–863.

УДК 517.982

Об одной последовательности функций с полным спарком[1]

И. М. Избяков (Самара, Россия)
izbyakov.im@ssau.ru

Доказано, что последовательность функций $\varphi_n(t) = e^{a_n t}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ имеет полный спарк в пространстве $L_2[0,1]$, но не является ни бесселевой последовательностью, ни фреймом.

Ключевые слова: полный спарк, фрейм, бесселева последовательность, гильбертово пространство.

Благодарности: Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-878).

About full spark function sequence[1]

I. M. Izbiakov (Samara, Russia)
izbyakov.im@ssau.ru

It's proved that the full spark function sequence $f_n(t) = e^{a_n t}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ in the space $L_2[0,1]$ is not a Bessel sequence or a frame either.

Keywords: full spark, frame, Bessel sequence, Hilbert space.

Acknowledgements: The work performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement No. 075-02-2023-878).

В статьях [1, 2] рассмотрены вопросы восстановления элемента f из сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ по модулям скалярных произведений $(|\langle f, \varphi_n\rangle|)_{n=1}^{\infty}$ этого элемента и некоторой системы «измерительных элементов» $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Важной особенностью таких систем является свойство альтернативной полноты.

Определение 1. *Будем говорить, что набор векторов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ обладает свойством альтернативной полноты (АП), если для любого подмножества $S \subseteq \mathbb{N}$ либо $\overline{span}\{\varphi_n\}_{n\in S} = \mathcal{H}$, либо $\overline{span}\{\varphi_n\}_{n\in S^C} = \mathcal{H}$.*

Следующая теорема сформулирована в [1] для фреймов, хотя существование таких фреймов вызывает вопросы.

Теорема 1. *а) Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — набор векторов в $\mathcal{H}$. Если $\Phi \in$ (ВМИ), то $\Phi \in$ (АП).*

б) Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство над полем вещественных чисел и пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — набор векторов в $\mathcal{H}$. Если $\Phi \in$ (АП), то $\Phi \in$ (ВМИ).

Определение 2. $[1, 2]$ *Система элементов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ бесконечномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется системой с полным спарком, если каждое бесконечное подмножество полно в $\mathcal{H}$.*

Очевидно, что система с полным спарком обладает свойством альтернативной полноты, и, в силу теоремы 1, обеспечивает восстановление по модулям измерений в вещественном гильбертовом пространстве. Видимо, впервые доказательство существования систем с полным спарком в бесконечномерном гильбертовом пространстве было дано в [3].

В [2] построена система с полным спарком в явном виде в пространстве $L_2[0,1]$. Рассмотрим эту систему подробнее. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных или комплексных чисел такая, что $\lim a_n = a$ и $a_n \neq a$. Тогда система $\{e^{a_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2[0,1]$. Действительно, пусть $\langle f, e^{a_n t}\rangle = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е.

$$\int\limits_0^1 f(t) e^{a_n t}\, dt = 0, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Функция комплексного переменного $\psi(z) = \int_0^1 f(t) e^{zt}\, dt$ является голоморфной в $\mathbb{C}$ (см., напр., [4]) и, по теореме единственности для голоморфных функций, из равенств $\langle f, e^{a_n t}\rangle = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ следует ортогональность f множеству всех экспонент, следовательно, $f = 0$. Так как любая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к a, то система $\{e^{a_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ оказывается системой с полным спарком.

Теорема 2. *Система функций $\{e^{a_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ не является бесселевой последовательностью, и следовательно, не является фреймом.*

Доказательство. Напомним, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесселевой последовательностью с границей B, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \ f \in L_2[0,1].$$

Фреймом пространства $L_2[0,1]$ называется система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что существуют числа $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для всех $f \in L_2[0,1]$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Предположим, что $\varphi_n = e^{a_n t}$, $n = 1, 2, \ldots$ является бесселевой последовательностью с границей B. Дальнейшие рассуждения проводятся для вещественных функций. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_1, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \, \|\varphi_1\|^2,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_1, \varphi_n \rangle|^2$ сходится.

С другой стороны,

$b_n = |\langle \varphi_1(t), \varphi_n(t) \rangle|^2 = \left(\int\limits_0^1 e^{(a_1+a_n)t} dt \right)^2 = \left(\frac{e^{a_1+a_n}-1}{a_1+a_n} \right)^2 = \left(\frac{e^{\tilde{a}_n}-1}{\tilde{a}_n} \right)^2.$

Если $\lim \tilde{a}_n = \tilde{a} \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \left(\frac{e^{\tilde{a}}-1}{\tilde{a}} \right)^2 \neq 0$, а следовательно, ряд $\sum b_n$ является расходящимся. Таким образом, последовательность $\varphi_n(t) = e^{a_n t}$ не может являться бесселевой, и не может являться фреймом.

Пусть теперь $\lim \tilde{a}_n = \tilde{a} = 0$. Такая ситуация возможна в том случае, когда a_n сходится к значению, равному первому члену, взятому с противоположным знаком, например, $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$. Предел этой последовательности равен $-\frac{1}{2}$, в то время как $a_1 = \frac{1}{2}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\tilde{a}_n}-1}{\tilde{a}_n} \right)^2 = \left(\lim\limits_{\tilde{a}_n\to 0} \frac{e^{\tilde{a}_n}-1}{\tilde{a}_n} \right)^2 = \left(\lim\limits_{\tilde{a}_n\to 0} \frac{e^{\tilde{a}_n}}{1} \right)^2 = 1.$

Следовательно, и в этом случае ряд $\sum b_n$ является расходящимся, а значит, функции $\varphi_n(t) = e^{a_n t}$ не образуют ни бесселеву последовательность, ни фрейм.

Таким образом, доказано, что последовательность функций $\varphi_n(t) = e^{a_n t}$ в пространстве $L_2[0, 1]$ не может являться фреймом при любой сходящейся последовательности a_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Cahill J., Casazza P. G., Daubechies I.* Phase retrieval in infinite dimensional Hilbert spaces // Transactions of the AMS, Series B. 2016. V. 3. P. 63-76.

[2] *Botelho-Andrade S., Casazza P., Cheng D., Haas J., Tran T.* Phase Retrieval in $\ell^2(\mathbb{R})$ // `http://arxiv.org/abs/math/1804.01139v1` (дата обращения: 14.11.2023).

[3] *Вершинин Р. В.* О представляющих и абсолютно представляющих системах в банаховом пространстве // Математическая физика, анализ, геометрия. 1998. Т. 5.;№ 1/2. С. 3-14.

[4] *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по ТФКП. Москва : Наука, 1989. 480 с.

УДК 517.518

Множества единственности для подсистем системы Виленкина–Крестенсона[1]

А. Д. Казакова, М. Г. Плотников (Москва, Россия)
anna.kazakova@math.msu.ru, mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Изучаются множества единственности для некоторых подсистем системы Виленкина–Крестенсона. Приводится p-ичный аналог теоремы Стечкина–Ульянова о множествах единственности для системы Радемахера.

Ключевые слова: системы Виленкина–Крестенсона, обобщенные системы Радемахера, множества единственности.

Sets of uniqueness for subsystems of the Vilenkin–Chrestenson system[1]

A. D. Kazakova, M. G. Plotnikov (Moscow, Russia)
anna.kazakova@math.msu.ru, mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Uniqueness sets for some subsystems of the Vilenkin–Chrestenson system are studied. A p-ary analogue of the Stechkin–Ul'yanov theorem on uniqueness sets for the Rademacher system is given.

Keywords: Vilenkin–Chrestenson systems, generalized Rademacher systems, sets of uniqueness.

Введение

Пусть на отрезке $[a, b]$ определены комплекснозначные функции $f_n(x)$. Множество $E \subset [a, b]$ — *множество единственности* (U-*множество*) для системы функций $\{f_n(x)\}$, если из сходимости к нулю ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x), \quad c_n \in \mathbb{C},$$

по этой системе следует, что все $c_n = 0$.

Множества единственности для тригонометрической системы функций служили предметом многочисленных исследований (см. напр., [1, гл. XIV], [2, гл. IX], [3]. Первые результаты о природе множеств, при сходимости вне которых к нулю рядов по тригонометрической системе не нарушается единственность, получал ещё Кантор в конце 19 века.

Изучались множества единственности и другим систем функций, в частности, для системы Уолша [4, гл. III], [5, гл.VII]. В данной работе мы исследуем множества единственности для подсистем системы Виленкина–Крестенсона.

Зафиксируем натуральное число $p \geq 2$. *Обобщенными функциями Радемахера* назовем функции $R_k(x) := \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\lfloor x \cdot p^{k+1}\rfloor\right)$, $k = 0, 1, \ldots$, $x \in [0, 1)$. Всевозможные конечные произведения функций R_k называют *функциями Виленкина–Крестенсона* (в двоичном случае — *функциями Уолша*). В нумерации Пэли функция Виленкина–Крестенсона VC_n есть $\prod\limits_{k=0}^{\infty}(R_k)^{n_k}$, где n_k — коэффициенты из p-ичного разложения числа n.

Множества единственности для подсистем системы Уолша исследовались в работах Стечкина и Ульянова [6], Coury [7], Лукомского [8], [9], Асташкина и Суханова [10], ряде других. В частности, в [6] доказывалось, что любое множество $A \in [0, 1)$ меры меньше $\frac{1}{2}$ является множеством единственности для системы Радемахера, а в [7], [8], [9], [10] были найдены классы множеств единственности положительной меры для некоторых подсистем системы Уолша.

Основные результаты

Лемма 1. *Пусть $E_0, \ldots, E_{p-1} \subset [0, 1)$ и $\mu E_j \geq a$ для всех j. Тогда $\mu(X) \geq \frac{pa-1}{p-1}$, где*

$$X = \{x \in [0, 1) \colon x \text{ элемент хотя бы двух из множеств } E_j\}.$$

Следующая теорема обобщает теорему 3 из [6], имеет схожее доказательство, которое мы не приводим.

Теорема 1. *Всякое множество $E \subset [0, 1)$ с $\mu(E) < \frac{p-1}{p}$ является множеством единственности для рядов по обобщенной системе Радемахера.*

Неравенство в теореме 1 является точным: многочлен $(R_0 - R_1)(x)$ равен нулю на множестве

$$\bigcup_{m=0}^{p-1}\left[\frac{m}{p} + \frac{m}{p^2}, \frac{m}{p} + \frac{m+1}{p^2}\right].$$

меры $\frac{1}{p}$.

Теперь для каждого натуральных $p \geq 2$ и $d \geq 1$ рассмотрим множество $V_p^{(d)}$, состоящее из всех натуральных n вида

$$n = p^{k_1} + p^{k_2} + \ldots + p^{k_s}, \qquad k_1 < k_2 < \ldots < k_s, \qquad s \leq d. \tag{1}$$

В случае $p = 2$ это в точности объединение хаосов Радемахера порядков меньших или равных d (см. [10]).

При доказательстве теоремы 2, которая обобщает теорему 1 из работы [10], используются лемма 1 и техника из доказательства упомянутой теоремы 1 из [10]. Здесь мы не рассматриваем более интересный случай, когда вместо сумм p^{k_j} из (1) рассматриваются суммы $n_j p^{k_j}$ с $n_j \in \{1, \ldots, p-1\}$.

Теорема 2. *Если ряд*

$$\sum_{n \in V_p^{(d)}} c_n VC_n(x) \tag{2}$$

сходится к некоторому C *на множестве* $E \subset [0,1)$ *с* $\mu E > 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^d$, *то* $C = 0$ *и все* $c_n = 0$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по d. При $d = 1$ утверждение верно согласно теореме 1. Допустим, утверждение верно для $d-1$ и предположим, что оно не верно для d и существует не тождественно нулевой ряд (2), который сходится к C на множестве E меры $\mu E > 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^d$. Рассмотрим все подобные ряды и из всех номеров n с ненулевыми c_n из этих рядов выберем n с минимальным k_1 из формулы (1). Обозначим $\widetilde{n}$ выбранное и $\widetilde{k}$ — соответствующее k_1. Положим:

$$E_i = E + \frac{i}{p^{\widetilde{k}+1}} \,(\mathrm{mod}\, 1), \quad i = 0, \ldots, p-1, \qquad F_{ij} = E_i \cap E_j, \quad i \neq j.$$

Если X — объединение всевозможных F_{ij}, то (лемма 1)

$$\mu(X) > \frac{p\mu(E) - 1}{p-1} > \frac{p\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^d\right) - 1}{p-1} = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{d-1}.$$

Возьмем произвольное F_{ij} и для всех $x \in F_{ij}$ рассмотрим выражение

$$\sum_{n \in V_p^{(d)}} c_n VC_n\left(x - \frac{i}{p^{\widetilde{k}+1}}\right) - \sum_{n \in V_p^{(d)}} c_n VC_n\left(x - \frac{j}{p^{\widetilde{k}+1}}\right) \tag{3}$$

(разности в скобках рассматриваются по модулю 1). С одной стороны, оно равно нулю, так как обе суммы равны C. С другой стороны, значение (3) не изменится, если из обеих сумм него удалить ненулевые члены с одинаковыми номерами n такими, что $k_1 > \widetilde{k}$ в разложении (1) числа n.

В оставшемся выражении можно вынести ненулевой общий множитель

$$VC_{p^{\tilde{k}}}\left(x - \frac{i}{p^{\tilde{k}+1}}\right) - VC_{p^{\tilde{k}}}\left(x - \frac{j}{p^{\tilde{k}+1}}\right).$$

и получить некоторый тождественно ненулевой ряд вида $\sum\limits_{n \in V_p^{(d-1)}} d_n VC_n(x)$, один и тот же для всех F_{ij}, который сходится к нулю на множестве X меры, большей $1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{d-1}$. Получено противоречие с предположением индукции. Теорема доказана.

Неравенство в теореме 2 точное, т.к. многочлен

$$(R_0 - R_1) \cdot \ldots \cdot (R_{2d-1} - R_{2d-2})(x)$$

равен нулю на множестве, мера которого равна $1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{d}$ в силу независимости обобщенных функций Радемахера.

Переформулируем теорему 2 в терминах множеств единственности.

Теорема 3. *Всякое множество* $E \subset [0,1)$ *с* $\mu(E) < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{d}$ *есть множество единственности для системы функций* $\{VC_n \colon n \in V_p^{(d)}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Zygmund A.* Trigonometric Series. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.

[2] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961.

[3] *Kechris A., Louveau A.* Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1987.

[4] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Изд-во ЛКИ, 2008.

[5] *Schipp F, Wade W. R., Simon P.* Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Academiai Kiado, 1990.

[6] *Стечкин С. Б., Ульянов П. Л.* О множествах единственности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26, № 2, С. 211—222.

[7] *Coury J.* Some results on lacunary Walsh series // Pacific J. Math. 1973. Vol. 45, № 2. P. 419—425.

[8] *Лукомский С. Ф.* О сходимости рядов Радемахера на множествах нулевой меры // Дифференц. уравнения и теория функций: Разложение и сходимость. Саратов: Изд-во СГУ, 1983. С. 30–37.

[9] *Лукомский С. Ф.* Необходимые условия для множеств единственности рядов Уолша с лакунами // Матем. сб. 1987. Т. 133(175), № 4(8), С. 469–480.

[10] *Асташкин С. В., Суханов Р. С.* О некоторых свойствах хаоса Радемахера // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 5, С. 654–666.

УДК 517.54

Об открывающих отображениях и их приложениях[1]

С. И. Калмыков (Москва, Россия; Шанхай, КНР)
kalmykovsergei@sjtu.edu.cn

Мы обсуждаем существование и единственность рациональных конформных отображений, обратные к которым открывают конечное число дуг на комплексной плоскости. Также нас будут интересовать связанные с такими отображениями вопросы и приложения, например, интерполяция, численные методы и полиномиальные неравенства.

Ключевые слова: конформные отображения, многосвязные области, открывающие отображения, интерполяция, группа кос.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-283.

On open up mappings and their applications[1]

S. I. Kalmykov (Moscow, Russia; Shanghai, China)
kalmykovsergei@sjtu.edu.cn

We discuss the existence and uniqueness of rational conformal maps of minimal degree for opening up finitely many arcs on the complex plane. Also we are interested in several related problems and applications, for example, rational interpolation, numerical solutions, polynomial inequalities.

Keywords: conformal mapping, multiply connected domains, open-up mapping, interpolation, critical values, braid group.

Acknowledgements: This work was supported by Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Agreement no. 075-15-2022-283 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

Мы будем говорить, что рациональная функция F имеет тип (n, m), если она может быть записана в виде $F = P/Q$, где P и Q – взаимно простые многочлены степеней n и m, соответственно. Как обычно, $z \in \mathbb{C}$ – критическая точка функции F, если $F'(z) = 0$, в этом случае $F(z)$ – критическое значение F.

Нас интересуют вопросы, связанные со следующей теоремой (см. [1, Theorem 1.1]).

Теорема 1. *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ – попарно непересекающиеся дуги на комплексной плоскости. Тогда существует рациональная функция F*

типа $(n+1,n)$ *и компактное множество* $K \subset \mathbb{C}$, *граница которого состоит из* n *попарно непересекающихся кривых Жордана, и* F – *конформное отображение* $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ *на* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \cup_{j=1}^{n} \gamma_j$, $F(\infty) = \infty$. *Кроме того,* F *и* K *единственны с точностью до линейного преобразования аргумента. В частности, нормировка* $F(z) = z + O(1/z)$ *в бесконечности однозначно определяет* F *и* K.

Такого рода результаты оказываются полезны при доказательстве неравенств бернштейновского и марковского типов для полиномов и рациональных функций (см. например, [2, 3]). А также могут применятся для вычисления логарифмической емкости [4] и в аппроксимациях Эрмита-Паде [5].

Теорема 1 непосредственно связана с задачей нахождения рациональной функции с предписанными критическими значениями, а также в определенной степени и с задачей, когда предписаны критические точки. Численное нахождение таких рациональных функций приводит к различным интерполяционным задачам [6].

Обратная задача к теореме 1 и связанные с ней топологические вопросы изучаются в настоящий момент в совместной работе с В. Лысовым, B. Nagy и O. Sète.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kalmykov S., Nagy B., Sète O.* Minimal degree rational open up mappings and related questions // Annales Fennici Mathematici. 2023. V. 48, № 2. P. 429–451.

[2] *Kalmykov S., Nagy B.* Polynomial and rational inequalities on analytic Jordan arcs and domains // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015. T. 430, № 2. P. 874-894.

[3] *Kalmykov S., Nagy B. Totik V.* Bernstein- and Markov- type inequalities for rational functions // Acta Math. 2017. V. 219, № 1. P. 21–63.

[4] *Liesen J., Sète O., Nasser M.* Publication Preview Numerical Computation of the Conformal Map onto Lemniscatic Domains // Computational Methods and Function Theory. 2016. V. 16. P. 609–635.

[5] *Aptekarev A. I., Kalyagin V. A., Lysov V. G., Toulyakov D. N.* Equilibrium of vector potentials and uniformization of the algebraic curves of genus 0 // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. V. 233, № 3. P. 602–616.

[6] *Kalmykov S., Nagy B., Sète O.* Rational Interpolation and Open-Up Mappings // Mathematical Notes. 2022. V. 112, № 3. P. 483–487.

УДК 517.518

О восстановлении интегрируемых функций[1]

А. Д. Кашина, П. В. Павлова, М. Г. Плотников
(Москва, Вологда, Россия)
alisa.kashina@math.msu.ru, pavlovapv2020@gmail.com,
mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Рассматриваются задачи о точном и приближенном восстановлении интегрируемых функций по их значениям на множестве малой меры. В качестве классов функций берутся классы Коробова на окружности $\mathbb{T}$.

Ключевые слова: восстановление функций, классы Коробова, коэффициенты Фурье.

On recovery of integrable functions[1]

A. D. Kashina, P. V. Pavlova, M. G. Plotnikov
(Moscow, Vologda, Russia)
alisa.kashina@math.msu.ru, pavlovapv2020@gmail.com,
mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Problems of exact and approximate recovery of integrable functions from their values on a set of small measure are considered. The Korobov classes on the circle $\mathbb{T}$ are taken as functional classes.

Keywords: recovery of functions, Korobov classes, Fourier coefficients.

Введение

Вопросы о возможности восстановления функции по ее значениям на множестве малой меры рассматривались в работе [1]. Было доказано, что любую функцию f из функционального класса Λ, который определяется скоростью сходимости мажоранты коэффициентов Фурье к нулю, можно однозначно восстановить по ее значениям на специальном множестве G сколь угодно малой меры, общем для всего класса. Скажем, что $G \subset X$ — δ-восстанавливающее множество ($\delta > 0$) для класса функций $\Lambda \subset L_1(X, \mu)$, если $\mu(G) < \delta$ и отображение $f \in \Lambda \mapsto f|_G$ инъективно. Здесь (X, μ) — пространство с неатомической мерой, $f|_G$ — сужение функции f на множество G.

Если μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$, пишем $L_1(X)$ вместо $L_1(X,\mu)$. Обозначим $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$. Будем рассматривать функциональные классы Коробова

$$E_\alpha(\mathbb{T})=\left\{f\in L_1(\mathbb{T})\colon \widehat{f}_n=O(n^{-\alpha})\right\},\quad \alpha>\frac{1}{2}.$$

$E_\alpha(\mathbb{T})$ является нормированным пространством с нормой

$$\|f\|_{E_\alpha(\mathbb{T})}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_n|\left(|n|+1\right)^\alpha.$$

В работе решаются две задачи. Первая — приблизить функцию $f\in E_\alpha(\mathbb{T})$ тригонометрическим полиномом, для построения которого используется информация о значениях функции f лишь на специальном множестве малой меры, а также оценить точность этого приближения. Вторая — точно восстановить функцию $f\in E_\alpha(\mathbb{T})$ по ее значениям на множестве малой меры.

Мы исследуем классы Коробова с параметром гладкости α, который не обеспечивает абсолютной сходимости ряда Фурье. Более того, существуют всюду разрывные функции из данных классов, которые остаются таковыми при любом их изменении на множестве меры нуль.

Основные результаты

Для н N нечетного $M=2N+1$ введем множество

$$G(M,h)=\bigcup_{j=-N}^{N}(x_j-2h,x_j+2h),\quad x_j=\frac{2\pi j}{2N+1},\quad 0<h<\frac{\pi}{2M}.\qquad(1)$$

В [2] было показано, что коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{T})$ с номерами $|m|\le N$ удовлетворяют соотношению $\widehat{f}_m=(\widehat{f}_m)\tilde{}+T$, где

$$(\widehat{f}_m)\tilde{}=\frac{1}{4Mh^2\mathrm{sinc}^2(mh)}\sum_{j=-N}^{N}\exp(-imx_j)\int\limits_{x_j-2h}^{x_j+2h}f(u)(2h-|u-x_j|)du,$$

$$T=T(m,M,h)=-\sum{}'\frac{\mathrm{sinc}^2(nh)}{\mathrm{sinc}^2(mh)}\,\widehat{f}_n,\qquad(2)$$

сумма $\sum'$ распространяется на все n такие, что $|n|>N$ и $n=m\pmod M$. При определенных условиях на M и h величину T можно сделать малой, а $(\widehat{f}_m)\tilde{}$ определяются только значениями функции f на множестве (1).

Рассмотрим тригонометрический полином $\widetilde{f}^L_{M,h}$ степени не выше L, $L \le M$, с коэффициентами $(\widehat{f}_m)^{\sim}$, которым будем приближать функции из класса $E_\alpha(\mathbb{T})$. Он полностью определяется значениями функции f на множестве (1).

Под $\|\ \|$ понимаем норму в $L_2(\mathbb{T})$. Величины C, $C_1, \dots$ ниже (разные в разных формулах) зависят от α, но не зависят от L, M, h и от функции $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$.

Лемма 1. *Если $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, где $\alpha > \frac{1}{2}$, то*

$$\|f(x) - S_L(f)\|_2 \le C_1 \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} L^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Здесь $S_L(f)$ — L-ая частичная сумма ряда Фурье функции f.

Доказательство. С учетом того, что $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, имеем

$$\|f(x) - S_L(f,x)\|_2 = C \left(\sum_{|n| \ge L+1} |\widehat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C_1 \|f\|_\alpha L^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Лемма 2. *Пусть $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, где $\alpha > \frac{1}{2}$. Тогда*

$$\|S_L(f,x) - \widetilde{f}^L_{M,h}\|_2 \le C_2 \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \frac{L^{\frac{1}{2}}}{h^2 M^{\alpha+2}}. \tag{3}$$

Доказательство. Воспользуемся (2) и тем, что $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$. Имеем:

$$\left| \sum\nolimits' \operatorname{sinc}^2(nh) \widehat{f}_n \right| \le \frac{1}{h^2} \sum\nolimits' \left| \frac{\widehat{f}_n}{n^2} \right| \le \frac{1}{h^2} \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \sum\nolimits' \frac{1}{|n|^{2+\alpha}}$$

$$= \frac{1}{h^2} \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{1}{|m + kM|^{2+\alpha}} \le \frac{C_3}{h^2 M^{2+\alpha}} \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})},$$

$$C_3 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left| k - \frac{1}{2} \right|^{2+\alpha}}.$$

Применяя проделаннные вычисления, оценим левую часть (3):

$$\|S_L(f)(x) - \widetilde{f}^L_{M,h}(x)\|_2 = \left\| \sum_{m=-L}^{L} \left(\sum\nolimits' \frac{\operatorname{sinc}^2(nh)}{\operatorname{sinc}^2(mh)} \widehat{f}_n \right) e^{inx} \right\|_2$$

$$\le C_4 \left(\sum_{m=-L}^{L} \left| \sum\nolimits' \operatorname{sinc}^2(nh) \widehat{f}_n \right|^2 \right)^{1/2} \le C_2 \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \frac{L^{\frac{1}{2}}}{h^2 M^{2+\alpha}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > \frac{1}{2}$, $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, $\lim\limits_{M\to\infty} \frac{L(M)}{M^{1-2\beta/\alpha}} = 1$. *Тогда при* $L = L(M) \in \mathbb{N}$ *и* $h = h(M) = \frac{1}{M^{1+\beta}}$ *справедлива оценка*

$$\|f - \widetilde{f}^L_{M,h}\|_2 \le C\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} M^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}.$$

Доказательство. Воспользуемся леммами 1 и 2:

$$\|f - \widetilde{f}^L_{M,h}\|_2 \le C_5\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \left(L^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{L^{\frac{1}{2}}}{h^2 M^{\alpha+2}}\right)$$

$$\le C_5\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \left(L^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{L^{\frac{1}{2}}}{h^2 M^{\alpha+2}}\right) \le C\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} M^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}.$$

Следствие 1. *Пусть* $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, *где* $\alpha > \frac{1}{2}$. *Тогда для каждого* $L \in \mathbb{N}$ *найдется тригонометрический полином* T^L *степени не выше* L, *который полностью определяется значениями функции* f *на некотором множестве вида* $G(M,h)$, *где* $M = M(L)$, $\lim\limits_{L\to\infty} M(L) L^{-\frac{1}{1-2\beta/\alpha}} = 1$, $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, *и для которого*

$$\|f - T^L\|_2 \le C\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} L^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Для доказательства возьмем в качестве T^L *построенный в теореме* 1 *тригонометрический полином* $f^L_{M,h}$ *и выразим* M *и* h *через* L.

Теорема 2. *Допустим,* $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, *где* $\alpha > \frac{1}{2}$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существуют последовательности функций* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *и множеств* $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ *такие, что* $f_k \to f$ *при* $k \to \infty$ *в норме* $L_2(\mathbb{T})$, f_k *определяются значениями функции* f *на множестве* G_k *и* $\mu G < \delta$, *где* $G = \bigcup\limits_{k=1}^\infty G_k$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1. Возьмем β такое, что $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, а затем найдем последовательность нечетных чисел $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что $\frac{1}{4(M_k)^\beta} < \delta$. Положим

$$G_k = G\left(M_k, h_k\right), \qquad h_k = \frac{1}{(M_k)^{1+\beta}}$$

(множества $G(M,h)$ определены в (1)). Пусть, наконец, $f_k = \widetilde{f}^{L_k}_{M_k,h_k}$, $L_k = L(M_k) \in \mathbb{N}$. Тогда множества G_k и функции f_k являются искомыми.

Замечание 1. Множество G из теоремы 2 является δ-восстанавливающим для класса $E_\alpha(\mathbb{T})$ при $\alpha > \frac{1}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Плотников М. Г.* Задачи восстановления интегрируемых функций и тригонометрических рядов // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 6. С. 109–125.

[2] *Плотников М. Г.* Множества единственности положительной меры дл перестановок тригонометрической системы // Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86, № 6. С. 161–186.

УДК 517.518.43

О коэффициентах формального произведения тригонометрических рядов[1]

Т. Д. Козловская (Москва, Россия)

tdkozl2018@mail.ru

Рассматривается формальное произведение $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{inx}$ тригонометрического ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ и абсолютно сходящегося тригонометрического ряда. Доказывается теорема, устанавливающая условие, при котором из $c_n \in l^p$ $(p \geq 2)$ вытекает, что и $K_n \in l^p$. Результат можно использовать при доказательстве теоремы об объединении замкнутых U_p-множеств для тригонометрической системы.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, формальное произведение, U_p-множества..

Благодарности: Работа выполнена при частичной поддержке Московского Центра фундаментальной и прикладной математики при МГУ.

On coefficients of formal product of trigonometric series[1]

T. D. Kozlovskaya (Moscow, Russia)

tdkozl2018@mail.ru

A formal product $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{inx}$ of trigonometric series $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ and absolutely convergent trigonometric series is considered. A theorem stating an a condition under which the assumption $c_n \in l^p$ $(p \geq 2)$ implies $K_n \in l^p$ is proved. This result can be used to obtain a theorem on the union of closed U_p- sets for trigonometric system.

Keywords: trigonometric series, formal product, U_p- sets..

Acknowledgements: This work was partially supported by Moscow center for fundamental and applied mathematics.

Формальным произведением двух тригонометрических рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$ назовем ряд, коэффициенты которого определяются равенством

$$K_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \gamma_{n-k}. \tag{1}$$

А. Райхман доказал (см., например, [1]), что если $c_n \to 0$ при $n \to +\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n|$ сходится, то все $K_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$. Множество

$E \subset [a,b]$ называется U_p-множеством для системы $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [a,b]$, если не существует нетривиального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$, $c_n \in l^p$, сходящегося к нулю всюду вне E.

В работе [2] была доказана

Теорема 1 (см. [2]). *Объединение счётного множества замкнутых U_p-множеств, $2 \le p < \infty$, для системы функций Уолша является U_p-множеством для этой системы.*

В доказательстве используется тот факт, что коэффициенты K_n формального произведения ряда Уолша и полинома Уолша принадлежат l^p, если коэффициенты ряда из l^p. Однако для тригонометрической системы функций не очевидно, что из условия $c_n \in l^p$ вытекает, что и $K_n \in l^p$. Пусть c_{m_n} – подпоследовательность последовательности c_n, состоящая из всех таких элементов последней, для которых $|c_{m_n}| > |c_k|$, если $k > m_n$.

Докажем для формального произведения тригонометрических рядов следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^p < \infty$ $(p \ge 2)$, $c_k = 0$, если $k \neq m_n$; $\lambda(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} \in C^{(3)}(T)$. Тогда $K_n \in l^p$.* **Доказательство**. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{[\frac{n}{2}]} |c_k||\gamma_{n-k}|,$$

$$T_n = \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{+\infty} |c_k||\gamma_{n-k}|,$$

так что $|K_n| \le S_n + T_n$.

Из условия $\lambda(x) \in C^{(3)}(T)$ следует, что коэффициенты Фурье этой функции $\lambda_n = o(1/|n|^3)$. Поэтому

$$|S_n| \le A \sum_{r=n-[\frac{n}{2}]}^{+\infty} |\gamma_r| \le \frac{B}{n^2}\ (\in l^p),$$

где A, B—- константы.

Докажем, что $T_n \in l^p$. Разобьем ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^p$ на пачки вида $\sum\limits_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n^p$.

$$T_{2m_k} = \sum_{j=m_k+1}^{+\infty} |c_j||\gamma_{2m_k-j}| = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}||\gamma_{2m_k-m_i}|,$$

так как $c_j = 0$ для $j \neq m_i$.

$$T_{2m_k+1} = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}||\gamma_{2m_k+1-m_i}|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T_{2m_{k+1}-1} = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}| \sum |\gamma_{2m_{k+1}-1-m_i}|.$$

Суммируем эти $2m_{k+1} - 2m_k$ слагаемых, затем используем монотонное убывание последовательности $|c_{m_n}| : |c_{m_i}| \leq |c_{m_{k+1}}|$ для всех $i \leq k+1$:

$$\sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}| \sum_{j=2m_k-m_i}^{2m_{k+1}-1-m_i} |\gamma_j| \leq |c_{m_{k+1}}| \sum_{j=2m_k-m_i}^{2m_{k+1}-1-m_i} |\gamma_j| \leq |c_{m_{k+1}}| \sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_j|.$$

Полученное неравенство приводит к следующей оценке:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^p = \sum_{k=\infty}^{+\infty} \sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n^p| \leq \sum_{k=\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n \right)^p \leq \sum_{k=\infty}^{+\infty} |c_{m_{k+1}}|^p \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_j| \right)^p.$$

По условию $c_{m_n} \in l^p$ и ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_j|$ сходится. Значит, $T_n \in l^p$. Итак, коэффициенты формального произведения $K_n \in l^p$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

[2] *Козловская Т. Д.* Об U_p-множествах для системы функций Уолша // Вестник МГТУ "СТАНКИН 2012 № 1(18). С. 85–88.

УДК 517.956.35

Смешанная задача с косой производной для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом[1]

В. И. Корзюк, Я. В. Рудько (Минск, Беларусь)

korzyuk@bsu.by, janycz@yahoo.com,

Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданного в первом квадранте, изучается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временной полуоси задаётся условие, которое содержит производную по направлению (косую производную), зависящему от времени. Рассмотрены вопросы существования и единственности глобального классического решения.

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, полулинейное уравнение, метод характеристик, классическое решение, смешанная задача, условия согласования.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Mixed problem with a directional derivative for the telegraph equation with a nonlinear potential[1]

V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko (Minsk, Belarus)

korzyuk@bsu.by, janycz@yahoo.com,

For the telegraph equation with a nonlinear potential given in the first quadrant, we study a mixed problem in which the Cauchy conditions are specified on the spatial half-line and the condition, which contains a directional (oblique) derivative with time-dependent direction, is specified on the time half-line. The existence and uniqueness of a global classical solution are considered.

Keywords: nonlinear wave equation, semilinear equation, method of characteristics, classical solution, mixed problem, matching conditions.

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

Statement of the problem

In the closure $\overline{Q}$ of the domain $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ of two independent variables (t, x) for the nonlinear equation

$$\partial_t^2 u(t,x) - a^2 \partial_x^2 u(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

where $a > 0$, we consider the mixed problem with the initial conditions

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty) \tag{2}$$

and one of the following boundary conditions:

$$\alpha(t)\partial_t u(t,0) + \beta(t)\partial_x u(t,0) + \gamma(t)u(t,0) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{3}$$

where $a\alpha(t) \neq \beta(t)$ for all $t \in [0,\infty)$, or

$$\frac{\beta(t)}{a}\partial_t u(t,0) + \beta(t)\partial_x u(t,0) + \gamma(t)u(t,0) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty). \tag{4}$$

Main result

Theorem 1. *Let the conditions*

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \quad \psi \in C^1([0,\infty)), \quad \mu \in C^1([0,\infty)),$$
$$\alpha \in C^1([0,\infty)), \quad \beta \in C^1([0,\infty)), \quad \gamma \in C^1([0,\infty))$$

be satisfied, and let the function f satisfy a Lipschitz type condition with respect to the third variable; i.e., assume that there exists a function $k \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$ such that $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$. The mixed problem (1) – (3) has a unique solution u in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions

$$\mu(0) = \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0), \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\mu'(0) = \alpha(0)\left(f(0,0,\varphi(0)) + a^2\varphi''(0)\right) + \psi(0)\alpha'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \\ + \beta(0)\psi'(0) + \varphi(0)\gamma'(0) + \gamma(0)\psi(0) = \mu'(0)\end{aligned} \tag{6}$$

are satisfied.

Theorem 2. *Let the conditions*

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C^3([0,\infty)), \quad \psi \in C^2([0,\infty)),$$
$$\beta \in C^2([0,\infty)), \quad \gamma \in C^2([0,\infty)), \quad \mu \in C^2([0,\infty))$$

be satisfied, let the inequalities $\gamma(t) \neq 0$ and $\gamma'(t) \neq 0$ be fulfilled for all $t \in [0,\infty)$, and let the function f satisfy a Lipschitz type condition with respect to the third variable; i.e., assume that there exists a function $k \in C(\overline{Q})$ such that $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$. The mixed problem (1), (2) and (4) has a unique solution u in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions

$$\mu(0) = \frac{\beta(0)\psi(0)}{a} + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0),$$

$$
\begin{aligned}
\mu'(0) &= \frac{\beta(0)\left(f(0,0,\varphi(0)) + a^2\varphi''(0)\right)}{a} + \frac{\psi(0)\beta'(0)}{a} + \beta'(0)\varphi'(0) + \\
&\quad + \beta(0)\psi'(0) + \varphi(0)\gamma'(0) + \gamma(0)\psi(0), \\
\mu''(0) &= \beta(0)\left(\varphi'(0)\partial_u f(0,0,u=\varphi(0)) + \partial_x f(0,0,\varphi(0)) + a^2\varphi'''(0)\right) + \\
&\quad + \frac{\beta(0)\left(\psi(0)\partial_u f(0,0,u=\varphi(0)) + \partial_t f(0,0,\varphi(0)) + a^2\psi''(0)\right)}{a} + \\
&\quad + \frac{2\beta'(0)\left(f(0,0,\varphi(0)) + a^2\varphi''(0)\right)}{a} + \gamma(0)\left(f(0,0,\varphi(0)) + a^2\varphi''(0)\right) + \\
&\quad + \frac{\psi(0)\beta''(0)}{a} + \beta''(0)\varphi'(0) + 2\beta'(0)\psi'(0) + \varphi(0)\gamma''(0) + 2\psi(0)\gamma'(0).
\end{aligned}
$$

are satisfied.

The **proof** of Theorems 1 and 2 is carried out by the scheme set forth in [1–4] using the results of the papers [5, 6].

Remark 1. *Assume that the boundary data of the problem* (1), (2), (4) *satisfy the equality* $\beta \equiv 0$ *and the inequality* $\gamma(t) \neq 0$ *for all* $t \geqslant 0$. *Then the conditions specified in Theorem 2 can be weakened: 1) the smoothness conditions* $\varphi \in C^3([0,\infty))$ *and* $\psi \in C^2([0,\infty))$ *can be replaced with* $\varphi \in C^2([0,\infty))$ *and* $\psi \in C^1([0,\infty))$, *respectively; 2) the condition* $\gamma'(t) \neq 0$ *can be dropped.*

Proof. Under the conditions of this remark, the boundary condition (4) transforms into the Dirichlet condition

$$
u(t,0) = \frac{\mu(t)}{\gamma(t)}, \quad t \in [0,\infty). \tag{7}
$$

Thus, the mixed problem (1), (2), (4) transforms into the well-studied first mixed problem (1), (2) and (7) [1–3].

If the given functions of the problem (1) – (3) do not satisfy the homogeneous matching conditions (5) and (6), then the solution of this problem is reduced to solving the corresponding matching problem in which the matching conditions are given on the characteristic $x - at = 0$. The following condition can be taken for the matching condition:

$$
[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{8}
$$

Problem (1) – (3) with matching conditions on characteristics. Find a classical solution of Eq. (1) with the Cauchy conditions (2), the boundary condition (3), and the matching condition (8).

Here by $()^{\pm}$ we have denoted the limit values of the function calculated on different sides of the characteristic $x - at = 0$, i. e. $(u)^{\pm}(t, x = at) = \lim\limits_{\delta \to 0+} u(t, at \pm \delta)$.

Now the problem (1) – (3) can be stated using the matching conditions (8) as follows.

Problem (1) – (3) with matching conditions on characteristics. Find a classical solution of Eq. (1) with the Cauchy conditions (2), the boundary condition (3), and the matching condition (8).

The same can be said about the problem (1), (2) and (4), but instead of the homogeneous matching condition (8) we should take the following inhomogeneous condition:

$$[(u)^{+} - (u)^{-}](t, x = at) = \frac{a\left(\beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) - \mu(0)\right) + \beta(0)\psi(0)}{a\gamma(0)}, \quad t \in [0, \infty).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant // Differential Equations. 2023. Vol. 59, № 8. pp. 1075–1089.

[2] *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential // Differential Equations. 2022. Vol. 58, № 2. pp. 175–186.

[3] *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. Vol. 43. pp. 48–63.

[4] *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Classical Solution of the Second Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential // Differential Equations. 2023. Vol. 59, № 9. pp. 1216–1234.

[5] *Baranovskaya S. N., Yurchuk N. I.* Mixed Problem for the String Vibration Equation with a Time-Dependent Oblique Derivative in the Boundary Condition // Differential Equations. 2009. Vol. 45, № 8. pp. 1188–1191.

[6] *Baranovskaya S. N., Novikov E. N., Yurchuk N. I.* Directional Derivative Problem for the Telegraph Equation with a Dirac Potential // Differential Equations. 2018. Vol. 54, № 9. pp. 1147–1155.

УДК 517.518.8, 517.955

Метрика Хаусдорфа в задачах математической физики с разрывными данными[1]

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

На примере задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности обсуждается вопрос о характере приближения решения к начальному условию в хаусдорфовой метрике. В качестве начального условия выбрана простейшая разрывная функция $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$. Для хаусдорфова расстояния между решением, задаваемым формулой Пуассона, и функцией $u_0(x)$ найдены двусторонняя оценка и асимптотика. Аналогичная модельная задача рассмотрена для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости. Доказаны соответствующие двусторонняя оценка и асимптотика хаусдорфова расстояния.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, уравнение Лапласа, задача Дирихле, формула Пуассона, метрика Хаусдорфа.

Hausdorff metric in problems of mathematical physics with discontinuous data[1]

A. B. Kostin, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

Using the example of the Cauchy problem for the one-dimensional heat equation, we study the problem of approximation of the solution to the initial condition in the Hausdorff metric. The simplest discontinuous function $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$ was chosen as the initial condition. A two-sided estimate and an asymptotics for the Hausdorff distance between the solution given by the Poisson formula and the function $u_0(x)$ are obtained. A similar model problem is considered for the Laplace equation in the upper half-plane. In such a problem, a two-sided estimate and an asymptotics for the corresponding Hausdorff distance are also obtained.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, Laplace equation, Dirichlet problem, Poisson formula, Hausdorff metric.

Понятие расстояния между множествами по Хаусдорфу возникло более ста лет назад (см. [1]). Начиная с середины прошлого века метрика Хаусдорфа (кратко, H- метрика) активно используется в теории аппроксимации разрывных функций (см., например, [2], [3]). Потребность в хаусдорфовых приближениях возникает в ситуациях, когда равномерная сходимость или сходимость в L_p к предельной функции отсутствует, а имеет место визуальное сближение графиков как множеств на плоскости. В статье [4] рассматривался наглядный пример аппроксимации в H-метрике функции знака $f(x) = \operatorname{sgn} x$ последовательностью непрерывных функций $g_n(x) = (2/\pi)\operatorname{arctg} nx$ и была получена асимптотика хаусдорфова расстояния

$$H(f,\, g_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty.$$

В процессе обсуждения нашего доклада профессор И. В. Тихонов задал вопрос о приближении в H-метрике разрывной функции соответствующим интегралом Пуассона. Часть утверждений, полученных в этом направлении, опубликована на английском языке в [5]. Сейчас мы дадим сжатое изложение основных результатов [5] и наметим вопросы для дальнейшего развития темы.

Напомним, что H-расстоянием между двумя замкнутыми множествами X, Y плоскости Oxy называется величина

$$H(X,Y) = \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid X \subset U_\varepsilon(Y), Y \subset U_\varepsilon(X)\right\},$$

где ε-окрестность множества X имеет вид

$$U_\varepsilon(X) = \left\{M \mid \rho(M;X) \leqslant \varepsilon\right\},$$

а расстояние от точки $M = M(x,y)$ до множества X задаётся формулой

$$\rho(M;X) = \inf\left\{\operatorname{dist}(M,M') \mid M' \in X\right\},$$

в которой

$$\operatorname{dist}(M,M') = \max\left(|x-x'|, |y-y'|\right)$$

есть расстояние между точками $M(x,y)$ и $M'(x',y')$ плоскости.

Под дополненным графиком функции f будем понимать наименьшее замкнутое множество $F(f)$ плоскости Oxy, содержащее график Γ_f этой функции и являющееся выпуклым относительно оси Oy. Последний термин означает, что вместе с любыми двумя точками $(x,y_1), (x,y_2) \in F(f)$ множеству $F(f)$ принадлежит и вертикальный отрезок, соединяющий точки (x,y_1) и (x,y_2). Хаусдорфовым расстоянием между двумя функциями f и g называется H-расстояние между их дополненными графиками $F(f)$ и $F(g)$, т. е. $H(f,g) = H(F(f),F(g))$.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности с модельной начальной функцией:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Классическая формула Пуассона для уравнения теплопроводности после несложных преобразований даст «решение» задачи (1), (2) в виде

$$u(x,t) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{x/(2\sqrt{t})} e^{-\eta^2}\, d\eta\,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{3}$$

Из (3) не вполне ясно, в каком смысле реализуется начальное условие (2). Оказывается, что в такой задаче очень естественной выглядит трактовка (2) как равенства нулю соответствующего предела в H-метрике: $\lim\limits_{t\to 0+} H\big(u(\cdot,t),\operatorname{sgn}\big) = 0$. Действительно, как показано в [5], для хаусдорфова расстояния $H\big(u(\cdot,t),\operatorname{sgn}\big)$ между «решением» $u(x,t)$ и начальной функцией $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$ при всех достаточно малых значениях $t > 0$ верна оценка

$$2\sqrt{t\left(\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} - \ln\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)} \;<\; H\big(u(\cdot,t),\operatorname{sgn}\big) \;<\; 2\sqrt{t\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}}\,,$$

влекущая асимптотику

$$H\big(u(\cdot,t),\operatorname{sgn}\big) \;=\; 2\sqrt{t\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}} \;+\; O\left(\sqrt{t\left(\ln\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)}\right)\,, \qquad t\to 0+\,.$$

Тем самым указанное расстояние с известной скоростью стремится к нулю при $t \to 0+$. В то же время, функция (3) не имеет предела при $(x,t) \to (0,0)$ изнутри верхней полуплоскости (множество предельных значений целиком заполняет отрезок $[-1,1]$), что не позволяет понимать начальное условие (2) в привычном смысле.

Близкая картина наблюдается и в задаче Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, когда требуется найти функцию $u(x,y)$ так, чтобы

$$\Delta\, u \;=\; 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) \;=\; \theta(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Здесь в граничном условии стоит функция Хевисайда

$$\theta(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ограниченное «решение» задачи Дирихле (4), (5) в полуплоскости даётся известной формулой Пуассона

$$u(x,y) \;=\; \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi$$

и легко упрощается к виду

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \qquad x\in\mathbb{R}, \quad y>0. \tag{6}$$

Как в таком случае следует понимать граничное условие (5)? Ведь в точке $(0,0)$ у функции (6) предела изнутри области не существует, а предел

$$\lim_{y\to 0+} u(0,y) \;=\; \frac{1}{2}\neq 0=\theta(0).$$

На помощь снова приходит метрика Хаусдорфа. В статье [5] авторы проверили, что H-расстояние $H\big(u(\cdot,y),\,\theta\big)$ между функцией (6) и функцией Хевисайда стремится к нулю при $y\to 0+$, доказав двустороннюю оценку

$$\sqrt{\frac{y}{2\pi}\left(1+\sqrt{1-\frac{4\pi y}{3}}\right)} \;<\; H\big(u(\cdot,y),\,\theta\big) \;<\; \sqrt{\frac{y}{\pi}}\,, \qquad 0\;<\;y\;\leqslant\;\frac{3}{4\pi}\,,$$

и, как следствие, — асимптотику

$$H\big(u(\cdot,y),\,\theta\big) \;=\; \sqrt{\frac{y}{\pi}}\;+\;O(y\sqrt{y}), \qquad y\to 0+\,.$$

Таким образом, постановка рассматриваемой задачи Дирихле становится разумной, если граничное условие (5) понимать как соответствующий передел в метрике Хаусдорфа, а именно — как $\lim\limits_{y\to 0+} H\big(u(\cdot,y),\,\theta\big)=0.$

В докладе планируется обсудить дальнейшее развитие обозначенных выше вопросов на более широкие классы разрывных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М: ОНТИ, 1937.

[2] *Сендов Б. Х.* Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, № 5(149). С. 141–178.

[3] *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций // Матем. сб. 1976. Т. 101(143), № 4(12). С. 508–541.

[4] *Костин А. Б., Садекова Е. Х., Шерстюков В. Б.* Два модельных примера приближения разрывных функций гладкими в метрике Хаусдорфа // Системы компьютерной математики и их приложения. 2022. Вып. 23. С. 251–257.

[5] *Kostin A. B, Sherstyukov V. B.* Application of the Hausdorff metric in model problems with discontinuous functions in boundary conditions // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 274, No. 4. P. 511–522.

УДК 517.55/57

Неравенства Харди–Литтлвуда для классов Харди–Лоренца[1]

В. Г. Кротов, М. М. Логиновская (Минск, Беларусь)
krotov@bsu.by, mary.loginovskaya@gmail.com

Приводится усиление оценок Харди–Литтлвуда для аналитических функций в единичном круге, состоящее в том, что H^p-квазинормы в правых частях этих неравенств заменяются на слабые $H^{p,\infty}$-квазинормы. Такое усиление возможно провести в рамках некоторой абстрактной схемы, не связанной со свойствами аналитичности, гармоничности и т.п. Приведены конкретные примеры применения этой схемы для единичного шара B^n в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ и для действительного полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Ключевые слова: неравенства Харди–Литтлвуда, пространства типа Харди, пространства Харди–Лоренца.

Hardy–Littlewood inequalities for Hardy–Lorentz classes[1]

V. G. Krotov, M. M. Loginovskaya (Minsk, Belarus)
krotov@bsu.by, mary.loginovskaya@gmail.com

A strengthening of the Hardy–Littlewood estimates for analytic functions in the unit disk is given, which consists in replacing the H^p-quasinorms on the right-hand sides of these inequalities with weak $H^{p,\infty}$-quasinorms. Such strengthening can be carried out within the framework of some abstract scheme that is not related to the properties of analyticity, harmonicity, etc. Specific examples of the application of this scheme for the unit ball B^n in the multidimensional complex space $\mathbb{C}^n$ and for the real half-space $\mathbb{R}^{n+1}_+$ are given.

Keywords: Hardy–Littlewood inequalities, Hardy-type spaces, Hardy–Lorentz spaces.

0.1 Основные определения и обозначения

Пусть (X,μ) — множество с σ-конечной мерой μ, $L^0(X)$ — множество классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций на X.

Для $0<p<\infty$ обозначим $L^p(X)$ — подмножество $L^0(X)$, состоящее из функций для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{1/p},$$

Для $0 < p, r \leq \infty$ обозначим $L^{p,r}(X)$ пространства Лоренца (см., например, [1, § 1.4.2]) с квазинормой

$$\|f\|_{L^{p,r}(X)} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^r \dfrac{dt}{t}\right)^{1/r}, & 0 < r < \infty, \\ \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & r = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

где f^* — убывающая равноизмеримая перестановка функции f на X:

$$f^*(t) := \inf\{s > 0 : \mu(\{|f| > s\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

При фиксированном p и возрастании r квазинорма (1) убывает, а класс $L^{p,r}(X)$ расширяется. При $r = \infty$ квазинорма (1) совпадает с

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)} := \sup_{\lambda > 0} \lambda [\mu(\{|f| > \lambda\})]^{1/p}, \quad p > 0.$$

Пусть X — хаусдорфово пространство, топология которого порождена квазиметрикой d, т.е. задана функция $d : X \times X \to [0, \infty)$ удовлетворяющая всем аксиомам метрики, только неравенство треугольника заменяется более слабым условием: существует такое число $K_1 \geq 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x, y) \leq K_1[d(x, z) + d(z, y)].$$

Пусть на X задана также σ-конечная борелевская мера, причем мера каждого шара

$$B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, \ t > 0,$$

конечна и положительна.

Произведение

$$\mathbf{X} := \mathbf{X} \times \mathbf{I}, \quad \text{где} \quad \mathbf{I} = (\mathbf{0}, \mathbf{t_0}), \ \mathbf{0} < \mathbf{t_0} \leq +\infty,$$

снабдим стандартной мерой-произведением $\mu \times m_1$, где m_1 — одномерная мера Лебега на I.

Рассмотрим «некасательные» области

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \mathbf{t}\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

подхода к точкам $x \in X$ «границы» $\mathbf{X}$ и соответствующую максимальную функцию

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}, \quad x \in X,$$

для любой функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$.

Введем обозначение $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ для множества всех измеримых функций (эквивалентные функции не отождествляются) $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$, для которых максимальная функция $\mathcal{N}u$ конечна μ-почти всюду. Далее для $p, r > 0$ введем классы $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, состоящие из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})} := \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)} .$$

При $r = p$ будем писать $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ вместо $\mathcal{H}^{p,p}(\mathbf{X})$.

При конкретном выборе тройки (X, d, μ) классы $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ являются расширениями классических пространств Харди (см. п. 0.3).

0.2 Усиление неравенств Харди–Литтлвуда

Введем обозначение

$$M_p(t, u) := \left(\int\limits_X |u(y,t)|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p}$$

Теорема. *Пусть $0 < p < q \leq \infty$ и мера μ удовлетворяет условию*

$$\mu(B(x,t)) \geq K_2 t^n, \quad x \in X, \ t \in I,$$

при некоторых $n > 0$ и $K_2 > 0$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x,t)| \leq C_1 t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)} , \quad x \in X, \ t \in I, \tag{2}$$

где $C_1 = C_1(K_2, p)$,

$$M_q(t, u) \leq C_2 t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)} , \quad t \in I, \tag{3}$$

где $C_2 = C_2(K_2, p, q)$.

В [2] приведены неравенства, аналогичные (2) и (3), но с $\|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}$ вместо $\|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}$ в правых частях.

В [2] имеется также неравенство

$$\left(\int\limits_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} M_q(t,u) \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \leq C \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)} , \tag{4}$$

где $l \geq p$ и $r = p$ (C — некоторая постоянная). В связи с этим отметим, что при $r \in (p, \infty]$ неравенство (4) теряет силу для каждого $l \geq p$.

0.3 Примеры

Пусть $X = S \subset \mathbb{C}^n$ — единичная сфера, $n \geq 1$, $I = (0,1)$, $\mu = \sigma$ — поверхностная мера Лебега на S

$$d(\zeta,\eta) = |1 - \langle\zeta,\eta\rangle|, \quad \langle\zeta,\xi\rangle := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \overline{\xi}_j$$

неизотропная квазиметрика на S, тогда класс Харди $H^p(B^n)$ [3, п. 5.6] голоморфных функций в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$ содержится в $\mathcal{H}^p(S \times (0,1))$, если отождествить $B^n \setminus \{0\}$ и $S \times (0,1)$ с помощью отображения $S \times (0,1) \ni (\zeta, t) \leftrightarrow (1-t)\zeta \in B^n \setminus \{0\}$.

В одномерном случае $n = 1$ неравенства (2) и (3) для аналитических функций в единичном круге восходят к Г.Харди и Дж.Литтлвуду [4, теорема 2], а при любом $n \geq 1$ были доказаны в [5] для функций из $H^p(B^n)$ и с $\|\cdot\|_{H^p(B^n)}$ в правых частях.

Рассмотрим теперь действительный случай $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $I = (0,\infty)$, μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = |x-y|$ — евклидова метрика. Тогда множество гармонических функций из $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ совпадает с классом Харди $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ [6].

Неравенства, подобные (2) и (3), доказывались в [7] для абстрактных интегралов Пуассона функций из L^p, $p > 1$, а также при $p > 0$ для функций, у которых некоторая степень $k \leq p$ субгармонична. Здесь также слабые квазинормы $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ не рассматривались

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Grafakos L.* Classical Fourier Analysis, Third Edition, Graduate Texts in Math., No. 249. New York : Springer, 2014. 638 с.

[2] *Катковская И. Н., Кротов В. Г.* Интерполяционная теорема Марцинкевича и касательное граничное поведение функций из классов типа Харди // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 66. XVI Международная Казанская школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Сборник трудов. Казань : КФУ, 2023. С. 128–131.

[3] *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М. : Мир, 1984. 455 с.

[4] *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A convergence criterion for Fourier series // Math. Zeit. 1932. V. 28, № 1. C. 612–634.

[5] *Mitchell J., Hahn K. T.* Representation of linear functionals in H^p spaces over bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$ // J. Math. Anal. Appl. 1976. V. 568, № 2. C. 379–396.

[6] *Fefferman C., Stein E. M.* H^p spaces of several variables // Acta Math. 1972. V. 129, № 3–4. C. 137–193.

[7] *Flett T. M.* On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions // Proc. London Math. Soc. 1970. V. 20, № 4. C. 749–768.

УДК 517.518

Синус и косинус-преобразования Фурье из классов Липшица[1]

Ю.И. Кротова (Саратов, Россия)
julia.krotova.sgu@gmail.com

Для функций $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ с косинус- (синус-) преобразованием Фурье $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) мы приводим необходимые и достаточные условия принадлежности $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) обобщенным классам Липшица $H^{\omega,m}$ и $h^{\omega,m}$ в терминах поведения некоторых интегралов связанных с f или скорости убывания f в бесконечности. Также получено условие существования производной Шварца для косинус- или синус-преобразований Фурье в точке.

Ключевые слова: косинус-преобразование Фурье, синус-преобразование Фурье, характеризация обобщенных классов Липшица, производная Шварца.

Sine and cosine Fourier transforms from generalized Lipschitz classes[1]

Yu. I. Krotova (Saratov, Russia)
julia.krotova.sgu@gmail.com

For functions $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ with cosine (sine) Fourier transforms $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) we give necessary and sufficient conditions for $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) to belong the generalized Lipschitz classes $H^{\omega,m}$ and $h^{\omega,m}$ in terms of behavior of some integrals connected with f or of rate of decreasing of f in infinity. The condition for the existence of Schwarz derivative for cosine or sine Fourier transform in a point is also obtained.

Keywords: cosine Fourier transform, sine Fourier transform, characterization of generalized Lipschitz classes, Schwarz derivative.

Введение

Пусть $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу ($f \in L^1(\mathbb{R}_+)$). Тогда можно определить косинус- и синус-преобразование Фурье функции f равенствами для $x \in \mathbb{R}_+$

$$\widehat{f_c}(x) = (2/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \cos xt \, dt; \quad \widehat{f_s}(x) = (2/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \sin xt \, dt.$$

Тогда $\widehat{f_c}(x)$ и $\widehat{f_s}(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+$ и $\lim_{x\to+\infty} \widehat{f_c}(x) = \lim_{x\to+\infty} \widehat{f_s}(x) = 0$ (см. [1, гл.1]). Другими словами, $\widehat{f_c}, \widehat{f_s} \in C_0(\mathbb{R}_+)$. Будем считать, что $\widehat{f_c}$ продолжена на $\mathbb{R}$ четным образом, а $\widehat{f_s}$ — нечетным.

Для $m \in \mathbb{N}$ и f, заданной на $\mathbb{R}$, рассмотрим m-ю симметрическую разность $\dot{\Delta}_h^m f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x+(m-2j)h/2)$. Если $f \in C_0(\mathbb{R})$ и $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, то функция $\omega_m(f,\delta) := \sup\{\|\dot{\Delta}_h^m f\| : 0 \le h \le \delta\}$ называется m-м модулем гладкости.

Обозначим через Φ множество всех непрерывных и возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций ω, таких что $\omega(0) = 0$. Если $\omega \in \Phi$ и $\omega(2t) \le C\omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, то пишем $\omega \in \Delta_2$. Если $\omega \in \Phi$ и $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, то ω принадлежит классу Бари B; если же $\omega \in \Phi$ и $\delta^m \int_\delta^\infty t^{-m-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $m > 0$, то ω принадлежит классу Бари-Стечкина B_m (см. [2]).

По определению, функция f имеет производную Шварца порядка $m \in \mathbb{N}$ в точке x и эта производная равна A, если существует предел $\lim\limits_{h\to 0} h^{-m}\dot{\Delta}_h^m f(x) = A$.

По определению, $H^{\omega,m} = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : \omega_m(f,t) \le C\omega(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ и $h^{\omega,m} = \{f \in H^{\omega,m} : \omega_m(f,t) = o(\omega(t)), t \to 0\}$ for $\omega \in \Phi$. Класс $H^{\omega,1}$ ($h^{\omega,1}$) при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, будем обозначать через $Lip(\alpha)$ ($lip(\alpha)$), а классы $H^{\omega,2}$ ($h^{\omega,2}$) при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 2$, будем обозначать через $Zyg(\alpha)$ ($zyg(\alpha)$). Ф.Мориц [3] установил следующий результат.

Теорема A. 1) *Пусть $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такова, что $f \in L^1_{loc}$, $m = 1,2$. Если для некоторого $\alpha \in (0,m]$, $m = 1,2$, верно соотношение*

$$\int_0^y t^m|f(t)|\,dt = O(y^{m-\alpha}), \quad y > 0, \tag{1}$$

то $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и а) при $m = 1$ верно включение $\widehat{f}_s \in Lip(\alpha)$, б) при $m = 2$ верно включение $\widehat{f}_c \in Zyg(\alpha)$.

2) *Если $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (т.е. f неотрицательна на $\mathbb{R}_+$) и $\widehat{f}_s \in Lip(\alpha)$ при некотором $\alpha \in (0,1]$, то выполнено* (1) *при $m = 1$. Если же $\widehat{f}_c \in Zyg(\alpha)$ при некотором $\alpha \in (0,2]$, то* (1) *имеет место при $m = 2$.*

3) *Аналогичные 1) и 2) утверждения справедливы для $m = 1$, $0 < \alpha < 1$ и $\widehat{f}_c$, а также для $m = 2$, $0 < \alpha < 2$ и $\widehat{f}_s$.*

Близкие к теореме A результаты получены в [3] для "малых"классов $h^{\omega,m}$, $m = 1,2$. Утверждения типа теоремы A можно называть двойственными теоремами типа Боаса (в классических теоремах типа Боаса изучается связь поведения преобразований Фурье функции и принадлежности самой функции классам Липшица или Гельдера). Для тригонометрических рядов результаты типа Боаса см. в [4] и [5]. Целью работы является обобщение теоремы A на случай мажорант ω из классов Бари или Бари-Стечкина и $m \in \mathbb{N}$.

Основные результаты

Теорема 1. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$ *и*

$$\int_0^y t^m |f(t)|\, dt = O(y^m \omega(1/y)), \quad y > 0. \tag{2}$$

Тогда $\widehat{f_c} \in H^{\omega,m}$.

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$ *четно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, *то из условия* $\widehat{f_c}(t) \in H^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (2). *Если же* $m \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, $\omega \in B_m \cap B$, *то из условия* $\widehat{f_c}(t) \in H^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (2).

Теорема 2. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$ *и выполнено условие* (2) *Тогда* $\widehat{f_s} \in H^{\omega,m}$.

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, *то из условия* $\widehat{f_s}(t) \in H^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (2). *Если же* $m \in \mathbb{N}$ *четно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, $\omega \in B_m \cap B$, *то из условия* $\hat{f_s}(t) \in H^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (2).

Следствие 1. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $f(t)$ *сохраняет знак на* $\mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B_m \cap B$. *Тогда условия* $\widehat{f_c} \in H^{\omega,m}$, (2) *и*

$$\int_y^\infty f(t)\, dt = O(\omega(1/y), \quad y > 0. \tag{3}$$

равносильны. Аналогичное утверждение верно для $\widehat{f_s}$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$ *и*

$$\int_y^\infty f(t)\, dt = o(y^{-m}), \quad y > 0.$$

Тогда производная Шварца функции $\widehat{f_c}$ *порядка* m *существует в точке* $x > 0$ *и равна* $A(x)$ *в том и только в том случае, когда формально продифференцированный интеграл* $(2/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} t^m f(t) \cos(xt + m\pi/2)\, dt$ *сходится к* $A(x)$.

Аналогичный результат верен для $\widehat{f_s}$.

Будем писать, что $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ слабо монотонно убывает, если $Cf(x_1) \geq f(x)$ при всех $x_1 \in [x/2, x]$. Дадим обобщение одной теоремы Лоренца (см. [4, § 7, теорема 7.23]).

Теорема 4. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B_m \cap B$, f *слабо монотонно убывает. Тогда условия 1)* $f(x) = O(x^{-1}\omega(x^{-1}))$, $x > 0$; *2)* $\widehat{f_c} \in H^{\omega,m}$; *и 3)* $\widehat{f_s} \in H^{\omega,m}$ *равносильны.*

Теперь дадим два аналога теорем 1 и 2 для "малых"обобщенных классов Липшица.

Теорема 5. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$ *и выполнены условия* (2) *и*

$$\int_0^y t^m |f(t)|\, dt = o(y^m \omega(1/y)), \quad y \to +\infty. \tag{4}$$

Тогда $\widehat{f_c} \in h^{\omega,m}$.

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$ *четно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, *то из условия* $\widehat{f_c}(t) \in h^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (4). *Если же* $m \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, $\omega \in B_m \cap B$, *то из условия* $\widehat{f_c}(t) \in h^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (4).

Теорема 6. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$ *и выполнены условия* (2), (4). *Тогда* $\widehat{f_s} \in h^{\omega,m}$.

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, *то из условия* $\widehat{f_s}(t) \in h^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (4). *Если же* $m \in \mathbb{N}$ *четно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, $\omega \in B_m \cap B$, *то из условия* $\hat{f}_s(t) \in h^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Титчмарш Е. С.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л. : Гостехтеориздат, 1948. 480 с.

[2] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Москов. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.

[3] *Móricz F.* On the degree of continuity and smoothness of sine and cosine Fourier transforms of Lebesgue integrable functions // Acta Math. Hung. 2012. V. 134, № 3. P. 356–368.

[4] *Boas R. P.* Integrability theorems for trigonometric transforms. New York : Springer-Verlag, 1967. 80 p.

[5] *Tikhonov S.* Smoothness conditions and Fourier series // Math. Ineq. Appl. 2007. V. 10, № 2. P. 229–242.

УДК 517.984

О решениях систем дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра[1]

М. А. Кузнецова (Саратов, Россия)
kuznetsovama@info.sgu.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений первого порядка на полуоси с суммируемыми коэффициентами и нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Получены наборы решений, имеющие экспоненциальные асимптотики и свойства аналитичности по спектральному параметру в некоторых секторах. Эти результаты являются основой для исследования спектральных свойств операторов высокого порядка с коэффициентами-распределениями.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, суммируемые коэффициенты, асимптотические формулы, нелинейная зависимость от параметра.

Благодарности: Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

On solutions of systems of differential equations with nonlinear dependence on the spectral parameter[1]

M. A. Kuznetsova (Saratov, Russia)
kuznetsovama@info.sgu.ru

We consider a system of first-order differential equations on the half-line with summable coefficients, containing a nonlinear dependence on the spectral parameter. We obtain sets of its solutions having exponential asymptotics and analyticity properties on the spectral parameter in certain sectors. These results are basic for studying spectral properties of the high-order operators whose coefficients are distributions.

Keywords: systems of differential equations, summable coefficients, asymptotic formulae, nonlinear dependence on a parameter.

Acknowledgements: This work was implemented in Saratov State University and supported by the Russian Science Foundation (project № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на полуоси

$$\mathbf{y}' = \big[\lambda V(x) + A(x) + C(x,\lambda)\big]\mathbf{y}, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — спектральный параметр, а $\mathbf{y}(x) = [y_j(x)]_{j=1}^n$ — вектор с абсолютно локально непрерывными компонентами. Предположим, что матрицы V, A и C порядка n удовлетворяют следующим условиям:

I. $V(x) = r(x)B$, где $r(x) \in L_{loc}[0,\infty)$ и $r(x) > 0$ п.в., а постоянная матрица B диагональна: $B = \operatorname{diag}\{b_j\}_{j=1}^n$, $b_j \neq 0$ при $j = \overline{1,n}$.

II. $A(x) = [a_{jk}(x)]_{j,k=1}^n$, где элементы $a_{jk}(x) \in L[0,\infty)$.

III. $C(x,\lambda) = [c_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1}^n$, где $c_{jk}(x,\lambda)$ — голоморфные отображения $\lambda \in \mathbb{C}_0 \to L[0,\infty)$. Кроме того, выполнено

$$\|C(\cdot,\lambda)\|_{L[0,\infty)} := \max_{j,k=\overline{1,n}} \|c_{jk}(\cdot,\lambda)\|_{L[0,\infty)} \to 0, \quad \lambda \to \infty,$$

$$\exists m(\alpha) > 0,\ \alpha \geq 0\colon\ m(\alpha) \to 0,\ \sup_{|\lambda| \geq m(\alpha)} \|C(\cdot,\lambda)\|_{L[\alpha,\infty)} \to 0,\ \alpha \to \infty. \quad (2)$$

Получим ФСР системы (1), имеющие экспоненциальные асимптотики и свойства аналитичности по параметру λ при достаточно больших $|\lambda| > \lambda_0$. Построение таких систем рассматривается отдельно для каждого сектора $\lambda \in \Gamma_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{C}_0\colon\ \arg\lambda \in (\alpha_\kappa, \alpha_{\kappa+1})\}$, для которого существует такая нумерация $\{b_j\}_{j=1}^n$, что выполнено

$$\operatorname{Re}\lambda b_1 \geq \operatorname{Re}\lambda b_2 \geq \ldots \geq \operatorname{Re}\lambda b_n, \quad \lambda \in \overline{\Gamma_\kappa}. \quad (3)$$

ФСР с описанными свойствами впервые рассматривались Дж. Биркгофом в работе [1] для случая конечного интервала $x \in [a,b]$. Метод последовательных приближений, использованный в ней и более поздних работах, требует, чтобы норма некоторого интегрального оператора была меньше 1, что накладывает ограничение $a_{jk} \in AC[a,b]$. Впоследствии удалось ослабить это ограничение до $a_{jk} \in L[a,b]$, оценивая норму квадрата оператора (см. [2, 3]). Результаты для систем (1) с суммируемыми коэффициентами являются основой для исследования операторов n-го порядка с коэффициентами-распределениями (см. [3, 4]).

Подавляющее большинство работ по построению ФСР систем первого порядка посвящено случаю конечного интервала. Случай полуоси рассматривался В. Юрко в [5], но только для матриц A с абсолютно непрерывными коэффициентами. Здесь же исследуется более общий случай и строится семейство ФСР, зависящих от параметра $\alpha \geq 0$ и определенных при $|\lambda| > \lambda_\alpha > 0$. Условие (2) позволяет добиться того, чтобы $\lambda_\alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$.

Также будут построены наборы решений (1), аналитические по параметру λ в больших секторах, где не сохраняется нумерация (3), в случае, когда $\{b_j\}_{j=1}^n$ — различные корни n-й степени из 1. Именно этот случай имеет приложение к исследованию дифференциальных уравнений n-го порядка. Полученные ФСР и наборы решений в больших секторах играют важную роль при постановке и решении обратных спектральных задач для операторов на полуоси (см. [6]).

Построение ФСР

При $x \geq 0$ рассмотрим $p(x) = \int_0^x r(t)\,dt$,

$$D(x) = [d_{jk}(x)]_{j,k=1}^n, \quad d_{jk}(x) = \begin{cases} a_{jk}(x), & b_j = b_k, \\ 0, & b_j \neq b_k, \end{cases} \qquad j,k = \overline{1,n}.$$

Пусть $M_\alpha(x) = [m_{jk}(x)]_{j,k=1}^n$ является решением задачи Коши

$$M'_\alpha(x) = D(x)M_\alpha(x),\ x \geq 0, \quad M_\alpha(\alpha) = I,$$

где I обозначает единичную матрицу и $\alpha \geq 0$.

Пусть $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^n$ — набор решений системы (1). Ему единственным образом соответствует матрица-функция $Y(x,\lambda)$, k-й столбец которой совпадает с $\mathbf{y}_k$. В дальнейшем набором решений (1) будем также называть матрицу $Y(x,\lambda)$. В случае линейной независимости столбцов будем называть данную матрицу ФСР (1).

Теорема 1. *Для любого $\alpha \geq 0$ существует такое $\lambda_\alpha > 0$, что при $\lambda \in \overline{\Gamma_\kappa^\alpha}$, $\Gamma_\kappa^\alpha := \{\lambda \in \Gamma_\kappa \colon |\lambda| > \lambda_\alpha\}$, существует ФСР (1) $Y_\alpha(x,\lambda) = [y_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1}^n$ со следующими свойствами.*

1. *Равномерно по $j,k = \overline{1,n}$ и $x \geq \alpha$*
$$y_{jk}(x,\lambda) = e^{\lambda b_k (p(x)-p(\alpha))}\big(m_{jk}(x) + o(1)\big), \quad \overline{\Gamma_\kappa^\alpha} \ni \lambda \to \infty.$$
2. *При каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $y_{jk}(x,\lambda)$, $j,k = \overline{1,n}$, являются непрерывными в $\overline{\Gamma_\kappa^\alpha}$ и аналитическими в Γ_κ^α.*
3. *$y_{jk}(\alpha,\lambda) = \delta_{jk}$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{k,n}$.*

Кроме того, $\lambda_\alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$.

Наборы решений в больших секторах

Рассмотрим случай, когда $\{b_j\}_{j=1}^n$ — все корни n-й степени из 1. Тогда плоскость спектрального параметра λ разбивается на секторы

$$\Gamma_\kappa = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \frac{\pi(\kappa-1)}{n} < \arg\lambda < \frac{\pi\kappa}{n}\right\}, \quad \kappa = \overline{1,2n},$$

в каждом из которых существует своя нумерация $\{b_j\}_{j=1}^n$, при которой выполнено (3). При $m \in \overline{2,n}$ рассмотрим большой сектор

$$G_m = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}_0 \colon \arg\lambda \in \left([(-1)^{m-1} - 1]\frac{\pi}{2n};\ [(-1)^{m-1} + 3]\frac{\pi}{2n} \right) \right\}.$$

Легко видеть, что $\overline{G_m} = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_\sigma}$, где $\sigma = 2n$, если m четное, и $\sigma = 2$, если m нечетное. Зафиксируем нумерацию чисел $\{b_j\}_{j=1}^n$ так, чтобы (3) выполнялось при $\kappa = 1$. При переходе в соседний сектор с $\kappa = \sigma$ неравенства в (3) меняются на противоположные для каждой пары (b_j, b_{j+1}), где $j \in \overline{1, n-1}$ имеет ту же четность, что и m. Таким образом, (3) не выполняется в большом секторе G_m.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \geq 0$ и $G_m^\alpha = \{\lambda \in G_m \colon |\lambda| > \lambda_\alpha\}$. При $\lambda \in \overline{G_m^\alpha}$ существует набор решений (1) $U_\alpha(x,\lambda) = [u_{jk}(x,\lambda)]_{\substack{j=\overline{1,n},\\ k=\overline{m,n}}}$ со следующими свойствами.*

1. *Равномерно по $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{m,n}$ и $x \geq \alpha$*

$$u_{jk}(x,\lambda) = \begin{cases} O\left(e^{\lambda\omega_m[p(x)-p(\alpha)]}\right), & \lambda \in \overline{\Gamma_1^\alpha}, \\ O\left(e^{\lambda\omega_s[p(x)-p(\alpha)]}\right), & \lambda \in \overline{\Gamma_\sigma^\alpha}, \end{cases} \qquad s := \min(m+1, n).$$

2. *При каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $u_{jk}(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{m,n}$, являются непрерывными в $\overline{G_m^\alpha}$ и аналитическими в G_m^α.*

3. *$u_{jk}(\alpha,\lambda) = \delta_{jk}$, $j,k = \overline{m,n}$.*

В силу свойств 3 теорем 1 и 2 набор решений $U_\alpha(x,\lambda)$ можно дополнить первыми $m-1$ столбцами набора $Y_\alpha(x,\lambda)$, чтобы получить ФСР в $\overline{\Gamma_1}$ или $\overline{\Gamma_\sigma}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear diferential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9. P. 219–231.

[2] *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Result. Math. 1999. Vol. 36. P. 342–353.

[3] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 11. С. 129–166.

[4] *Bondarenko N. P.* Inverse Spectral Problems for Arbitrary-Order Differential Operators with Distribution Coefficients // Mathematics. 2021. Vol. 9, № 22. A. 2989.

[5] *Yurko V. A.* Asymptotics of solutions of differential equations with a spectral parameter // arXiv.org e-Print archive. URL: `https://arxiv.org/abs/2204.07505` (дата обращения: 12.11.2023).

[6] *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов : Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001. 499 с.

УДК 517.54

Однолистность и неподвижные точки[1]

О. С. Кудрявцева (ВолгГТУ, Волгоград, Россия),
А. П. Солодов (МГУ, Москва, Россия)
kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Найдены точные области однолистности на классах голоморфных отображений круга в себя с отталкивающей граничной неподвижной точкой в зависимости от расположения притягивающей неподвижной точки и значения угловой производной в отталкивающей неподвижной точке.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, область однолистности.

Благодарности: Работа Солодова А.П. выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

Univalence and fixed points[1]

O. S. Kudryavtseva (VSTU, Volgograd, Russia),
A. P. Solodov (MSU, Moscow, Russia)
kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

The sharp domains of univalence on classes of holomorphic self-mappings of the disc with repulsive boundary fixed point are found depending on the localization of the attracting fixed point and the value of the angular derivative at the repulsive fixed point.

Keywords: holomorphic map, fixed points, angular derivative, domain of univalence.

Acknowledgements: The work of Solodov A.P. was supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation «BASIS».

В работе изучается задача об области однолистности на классах ограниченных голоморфных в круге функций.

Пусть $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ — класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ в себя, которые оставляют неподвижной граничную точку $z = 1$ (неподвижность понимается в смысле углового предела) и имеют ограничение на значение угловой производной: $f'(1) \leqslant \alpha$, $\alpha > 1$. В [1] показано, что ни при каком $\alpha > 1$ на классе $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ нет непустых областей однолистности. Поскольку любая функция из $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ наряду с отталкивающей неподвижной точкой обязательно имеет притягивающую неподвижную точку, то класс $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ естественно представить в виде объединения непересекающихся подклассов, выделяемых условием расположения притягивающей неподвижной точки q (внутри или на границе круга $\mathbb{D}$): $\mathscr{B}_\alpha\{1\} = \bigcup_{q\in\overline{\mathbb{D}}} \mathscr{B}_\alpha[q, 1]$.

Существование непустых областей однолистности на указанных подклассах класса $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ при некоторых значениях α было установлено в работе [2].

Точная область однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha[q,1]$, где q — внутренняя неподвижная точка, при $\alpha \in (1,4]$ была найдена в [3].

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (1,4]$. Если $f \in \mathscr{B}_\alpha[q,1]$, $q \in \mathbb{D}$, то f однолистна в области*

$$\mathscr{D} = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{\left|(1+q)(1-q)^{-1}\left(1 - 2\mathrm{Re}\, z + |z|^2\right) - 2i\mathrm{Im}\, z\right|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{V}$, $\mathscr{D} \subset \mathscr{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathscr{V} \neq \mathscr{D}$, найдется функция $f \in \mathscr{B}_\alpha[q,1]$, не однолистная в области $\mathscr{V}$.

В [4] получена оценка сверху области однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha[q,1]$, где q — граничная притягивающая неподвижная точка. Следующая теорема показывает, что при $\alpha \in (1,4]$ эта оценка точна.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (1,4]$. Если $f \in \mathscr{B}_\alpha[q,1]$, $q \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$, то f однолистна в области*

$$\mathscr{U} = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{2}{|1-q|} \frac{|1-z||q-z|}{1-|z|^2} < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{V}$, $\mathscr{U} \subset \mathscr{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathscr{V} \neq \mathscr{U}$, найдется функция $f \in \mathscr{B}_\alpha[q,1]$, не однолистная в области $\mathscr{V}$.

Тем самым теоремы 1 и 2 дают полный ответ на вопрос о точной области однолистности на подклассах $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$, $\alpha \in (1,4]$, с фиксированным расположением притягивающей неподвижной точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Кудрявцева О. С., Солодов А. П.* Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210, № 7. С. 120–144.

[2] *Горяйнов В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.

[3] *Солодов А. П.* Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, № 5. С. 190–218.

[4] *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С., Солодов А. П.* Оценка области однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с двумя граничными неподвижными точками // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2023. Т. 512, С. 96–101.

УДК 517.5

О наилучшем среднеквадратическим приближением аналитических функций в пространстве Бергмана[1]

М. Р. Лангаршоев (Старая Купавна, Российская Федерация)
mukhtor77@mail.ru

В работе найдены точные неравенства между наилучшими приближениями аналитических в единичном круге функций и усредненным значением модуля непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, пространство Бергмана.

On the best root-mean-square approximation of analytic functions in the Bergman space[1]

M. R. Langarshoev (Staraya Kupavna, Russian Federation)
mukhtor77@mail.ru

In this work, the exact inequalities between the best approximations of analytic in the unit disk functions and the average value of the modulus of continuity of the m-th order in the Bergman space B_2 are found.

Keywords: best approximation, modulus of continuity, Bergman space.

Введение

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Аналитическая в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \le \rho < 1$$

принадлежит пространству Бергмана B_2, если [1]

$$\|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Величину

$$\omega_m(f^{(r)},u)_2 = 2^{m/2}\sup_{|u|\le t}\Big\{\sum_{k=r}^{\infty}c_k|^2\frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+1}|(1-\cos(k-r)u)^m\Big\}^{1/2} \qquad (1)$$

назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка в пространстве B_2.

Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $a_k\in\mathbb{C}$, $k=0,1,\cdots,n$ символом

$$\mathcal{P}_{n-1}=\left\{p_{n-1}(z):p_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k\right\}$$

обозначим множество всех комплексных полиномов степени $\le n-1$.

Величину

$$E_n(f)_{B_2}=\inf\Big\{\|f-p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}}:p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}\Big\}$$

назовем наилучшим приближением функции $f(z)\in B_2$ подпространством полиномов $\mathcal{P}_{n-1}$.

Для произвольной $r\in\mathbb{Z}$ обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ обозначим $f^{(r)}(z)=d^rf/dz^r$. Через $\mathcal{B}_2^{(r)}$ обозначим класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)\in B_2$, для которых $\|f^{(r)}\|_{B_2}\le\infty$.

Основной результат

Теорема 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$, $1\le p\le 2$, $0<u\le\pi/(n-r)$, $\varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,u]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место точное неравенства*

$$E_n(f)_2\le\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h(1-\cos(n-r)t)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (2)$$

Неравенство (3) для функции $f_0(z)=z^n$ обращается в равенство.

Доказательство. Из соотношения (1) получаем

$$\omega_m^2(f^{(r)},t)_2\ge 2^m\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{kr}^2\frac{|c_k|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t)^m. \qquad (3)$$

Возведем обе части неравенства (3) в степень $p/2$:

$$\omega_m^p(f^{(r)},t)_2 \geq 2^{mp/2}\Big\{\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t)^m\Big\}^{mp/2}. \qquad (4)$$

Теперь умножаем неравенство (4) на $\varphi(t)$, проинтегрируем по отрезке $[0,u]$, $0<u\leq \pi/(n-r)$, затем, возведем обе части полученного неравенство в степень $1/p$, имеем

$$\left(\int_0^u \omega_m^p(f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$\geq \left\{\int_0^u \left[2^m\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{kr}^2\frac{|c_k|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t)^m\right]^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}.$$

Применяя к последнему неравенству, неравенство Минковского [2], а также с учетом того, что функция $\varphi(t)$ выполняет некоторые определенные условия, получаем

$$\left(\int_0^u \omega_m^p(f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$\geq 2^{m/2}\left[\int_0^u (1-\cos(n-r)t)^{mp/2}\varphi(t)dt\right]^{1/p} E_{n-r-1}(f^{(r)})_2. \qquad (5)$$

Используя леммы 1 из работы [3], получаем неравенство (2). Точность неравенство (2) для функции $f_0(z)=z^n$ проверяется непосредственным вычислением. Теорема 1 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Charles H.* Zeros of functions in Bergman Space // Bull. Amer. Math. Soc., 1974. Vol. 80, № 4. P. 713–714.

[2] *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. Москва : Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 326 с.

[3] *Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С.* Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значение n-поперечников // Математические заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 617–631.

УДК 517.55

Об одной краевой задаче для двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами[1]

А. Б. Лейнартене (Красноярск, Россия)

aleina@mail.ru

В данной работе сформулирована краевая задача с несмежными начальными данными для двумерного разностного уравнения. Приведена постановка задачи, основные термины, пример схемы решения.

Ключевые слова: разностные уравнения, задача Коши.

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2023-936).

On a boundary value problem for a two-dimensional difference equation with constant coefficients[1]

A. B. Leinartene (Krasnoyarsk, Russia)

aleina@mail.ru

In this paper, a boundary value problem with non-adjacent initial data for a two-dimensional difference equation is formulated. The problem statement, basic terms, and an example of a solution scheme are given.

Keywords: boundary value problem, two-dimensional difference equation.

В работах [1] – [4] изучалась задача Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами вида:

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha f(x-\alpha) = g(x). \tag{1}$$

А именно, найти такую функцию $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, которая удовлетворяет (1) и совпадает с некоторой заданной функцией начальных данных $\varphi(x)$ на множестве X_0:

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_0 \tag{2}$$

Задачи вида (1) – (2) возникают в перечислительном комбинаторном анализе [5], теории вейвлетов [6], теории разностных схем при аппроксимации дифференциальных уравнений [7], теории цифровых рекурсивных фильтров [8].

Наряду с задачами Коши в литературе рассматриваются краевые задачи для разностных уравнений [9], когда начальные данные не смежные.

Приведем формулировку такой краевой задачи для двумерного разностного уравнения

$$\sum_{\substack{0\leqslant\alpha_1\leqslant m_1\\0\leqslant\alpha_2\leqslant m_2}} c_{\alpha_1,\alpha_2} f(x-\alpha_1, x-\alpha_2)=0.$$

Пусть $A\subset\mathbb{Z}^n_{\geqslant}$ — конечное множество точек, такое, что найдется $m=(m_1,m_2)\in A$, что для любой точки $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in A$ выполняется условие $\alpha\leqslant m$, т.е. $0\leqslant\alpha_1\leqslant m_1, 0\leqslant\alpha_2\leqslant m_2$. Для $m\in\mathbb{Z}^2_{\geqslant}$ построим множество краевых данных X_0 следующим образом. Пусть $0\leqslant k_1<k_2<\dots<k_{m_1}$ и $0\leqslant l_1<l_2<\dots<l_{m_2}$ — некоторые целые неотрицательные числа. Тогда X_0 — это объединение множеств X_1 и X_2:

$$X_1=\bigcup_{i=1}^{m_1}\{(k_i,y)\}_{y=0}^{\infty}, X_2=\bigcup_{j=1}^{m_2}\{(x,l_j)\}_{x=0}^{\infty}$$

Зададим функцию краевых данных

$$\varphi: X_0\to\mathbb{C}. \tag{3}$$

Будем искать решение уравнения (1), совпадающего с заданной функцией φ краевых данных (3) на X_0. Задачу (1), (3) назовем краевой задачей для двумерного разностного уравнения (1).

Отметим, что если найдется $s\in\mathbb{Z}^2$ такое, что $s+A\subset X_0$, тогда начальные данные на множестве $s+A$ должны удовлетворять условию согласования, а именно:

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha f(m+s-\alpha)=g(m+s).$$

Отметим, что при $k_1=0, k_2=1,\dots,k_{m_1}=m_1-1$ и $l_1=0, l_2=1,\dots,l_{m_2}=m_2-1$ получается хорошо изученная в работах [1,4] задача Коши для уравнения (1).

Рассмотрим пример. Дано разностное уравнение

$$f(x_1,x_2)-f(x_1-1,x_2)-f(x_1,x_2-1)=0$$

и пусть краевые данные заданы на множестве (x_1,k_1), $x_1=0,1,2,\dots$, (l_1,x_2), $x_2=0,1,2,\dots$, $k_1>0, l_1>0$.

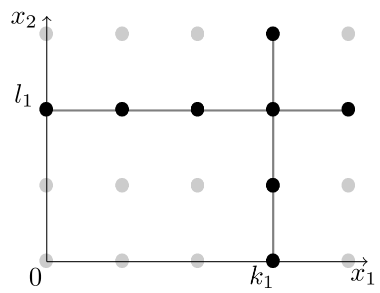

Рис. 1: Множество краевых данных X_0

На множестве $(x_1, x_2) \in (k_1, l_1) + \mathbb{Z}^2_{\geqslant}$ $(x_1 \geqslant k_1, x_2 \geqslant l_1)$ данная задача сводится к задаче Коши для разностного уравнения (1).

В полосах $0 \leqslant x_1 \leqslant k_1, x_2 \geqslant l_1$ и $x_1 \geqslant k_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant l_1$ для вычисления значений функции можно использовать метод сечений производящего ряда, описанный в статье [10].

В прямоугольнике $0 \leqslant x_1 \leqslant k_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant l_1$ восстановить значения функции $f(x)$ можно, решая соответствующую систему уравнений с $k_1 l_1$ неизвестными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Leinartas E. K., Nekrasova T. I.* Constant Coefficient Linear Difference Equations On The Rational Cones Of The Integer Lattice // Siberian Math. J., 2016, 57(1), P. 74–85.

[2] *Leinartas E. K.* Multiple Laurent Series And Difference Equations // Siberian Mathematical Journal, 2004, 45(2), P. 321–326.

[3] *Лейнартас Е. К., Ляпин А. П.* О рациональности многомерных возвратных степенных рядов // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 2:4 (2009), С. 449—455.

[4] *Apanovich M. S., Leinartas E. K.* Correctness of a two-dimensional Cauchy problem for a polynomial difference operator with constant coefficients // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 10:2 (2017), С. 199-–205.

[5] *Stanley R.* Enumerative Combinatorics // Volume 1, 1990.

[6] *Daubechies I.*, Ten Lectures on Wavelets // SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[7] *Рябенький В. С., Филиппов А. Ф.* Об устойчивости разностных уравнений // Гос. изд-во техн.-теорет. лит., М., 1956, 174 с.

[8] *Dudgeon D. E., Mersereau R. M.* Multidimensional digital signal processing // Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1984.

[9] *Самарский А. А.* Теория разностных схем // Наука, М., 1977, 656 с.

[10] *Ляпин А. П., Ахтамова С. С.* Рекуррентные соотношения для сечений производящего ряда решения многомерного разностного уравнения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 31:3 (2021), С. 414—423.

УДК 517.5

Односторонние неравенства дискретизации и восстановление по выборке[1]

И. В. Лимонова, Ю. В. Малыхин, В. Н. Темляков
(Москва, Россия)
limonova_irina@rambler.ru, malykhin@mi-ras.ru, temlyak@math.sc.edu

В последнее время в ряде работ результаты о дискретизации по значениям в точках успешно применялись в задачах восстановления по выборке. Более того, оказалось, что для некоторых из этих приложений достаточно иметь одностороннее неравенство дискретизации. Это обстоятельство побудило нас к изучению односторонних неравенств дискретизации и их приложений к задачам восстановления по выборке.

Ключевые слова: дискретизация по значениям в точках, неравенство Никольского, восстановление.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-71-30001) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

One-sided discretization inequalities and sampling recovery[1]

I. V. Limonova, Yu. V. Malykhin, V. N. Temlyakov
(Moscow, Russia)
limonova_irina@rambler.ru, malykhin@mi-ras.ru, temlyak@math.sc.edu

Recently, in a number of papers it was understood that results on sampling discretization can be successfully used in the problem of sampling recovery. Moreover, it turns out that it is sufficient to only have a one-sided discretization inequality for some of those applications. This motivated us to research one-sided discretization inequalities and their applications to sampling recovery.

Keywords: sampling discretization, Nikol'skii inequality, recovery.

Acknowledgements: This research was supported by the Russian Science Foundation Grant No. 23-71-30001 and performed at Lomonosov Moscow State University.

Введение

Систематическое изучение дискретизации по значениям в точках L_p-норм функций из заданного конечномерного подпространства было начато В. Н. Темляковым в 2017 г. Первые результаты в этом направлении были получены в 1930-е годы С. Н. Бернштейном, Й. Марцинкевичем и А. Зигмундом для одномерных тригонометрических полиномов. В настоящее время это обширная и активно развивающаяся область исследований, имеющая глубокие связи с другими важными направлениями (см. [1], [2]), в частности, с восстановлением функций по выборке (то есть по значениям в точках).

Пусть (Ω, μ) — вероятностное пространство. Мы рассматриваем измеримые функции на Ω, определенные в каждой точке, L_p-норма функций при $1 \le p < \infty$ определяется стандартным образом:

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Под $L_\infty(\Omega)$-нормой мы понимаем равномерную норму ограниченных функций

$$\|f\|_\infty := \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|.$$

Мы также рассматриваем дискретное пространство L_p^m векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|\mathbf{x}\|_p := \begin{cases} \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |x_j|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le j \le m} |x_j|, & p = \infty. \end{cases}$$

Функции f, определенной на Ω, и набору точек $\xi^1, \dots, \xi^m \in \Omega$ мы ставим в соответствие вектор–выборку (sampling vector)

$$S(f, \xi) := (f(\xi^1), \dots, f(\xi^m)).$$

До сих пор в работах, посвященных дискретизации по значениям в точках L_p-норм функций из N-мерного подпространства X_N, основное внимание уделялось двусторонним неравенствам, которые показывают, что дискретная норма вектора–выборки ограничена снизу и сверху интегральной L_p-нормой функции (умноженной на некоторые константы):

$$C_1 \|f\|_p^p \le \|S(f, \xi)\|_p^p \le C_2 \|f\|_p^p, \quad \forall f \in X_N.$$

Подобные результаты также известны в литературе как неравенства Марцинкевича–Зигмунда. Было обнаружено, что для некоторых приложений к задачам о восстановлении функции по выборке достаточно иметь одностороннюю оценку.

Мы рассматриваем следующие более общие постановки, в которых параметры дискретной нормы вектора–выборки и интегральной нормы функции могут отличаться. Это обусловлено тем, что в приложениях можно требовать более слабые условия (см., например, теорему 1 ниже).

Односторонняя дискретизация. Пусть заданы вероятностное пространство (Ω, μ), N-мерное подпространство X_N функций на Ω и параметры $1 \le p, q \le \infty$, $D > 0$. Нас интересует выполнение следующих свойств при как можно меньших $m \in \mathbb{N}$.

ЛНД. Будем говорить, что X_N допускает Левое Неравенство Дискретизации, если

$$\|f\|_p \leq D\|S(f,\xi)\|_q, \quad \forall f \in X_N$$

для некоторых точек $\xi^1, \ldots, \xi^m \in \Omega$. Обозначим это свойство как $X_N \in \mathcal{LD}(m,p,q,D)$.

ПНД. Будем говорить, что X_N допускает Правое Неравенство Дискретизации, если

$$\|S(f,\xi)\|_q \leq D\|f\|_p, \quad \forall f \in X_N$$

для некоторых точек $\xi^1, \ldots, \xi^m \in \Omega$. Обозначение: $X_N \in \mathcal{RD}(m,p,q,D)$.

Сформулируем несколько полученных результатов, непосредственно о ЛНД и ПНД.

Предложение 1. Пусть $2 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и подпространство X_N удовлетворяет неравенству Никольского с параметрами 2 и p, то есть для некоторого $M > 0$

$$\|f\|_p \leq M\|f\|_2, \ \ \forall f \in X_N.$$

Пусть X_N имеет ортонормированный базис $\{u_i\}_{i=1}^N$ со следующим свойством: $\sum_{i=1}^N |u_i(\omega)|^2 \geq cN$, $c > 0$, для любого $\omega \in \Omega$. Пусть $X_N \in \mathcal{RD}(m,p,q,D)$. Тогда

$$(cN)^{q/2} \leq m(DM)^q.$$

В качестве следствия получается нижняя оценка на число точек для выполнения ПНД для лакунарных тригонометрических систем.

Также доказаны положительные результаты о дискретизации для разных значений p. Здесь мы формулируем их для случая $p = 2$.

Предложение 2. *Существуют две абсолютные положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что для любого N-мерного подпространства $X_N \subset L_2(\Omega,\mu)$ выполнено $X_N \in \mathcal{LD}(m,2,C_2)$ с $m \leq C_1 N$, то есть существует набор точек $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ такой, что*

$$\|f\|_2 \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{m} |f(\xi^j)|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall f \in X_N.$$

Предложение 3. *Пусть X_N — N–мерное подпространство $L_2(\Omega,\mu)$, тогда $X_N \in \mathcal{RD}(N,2,C)$ для некоторой абсолютной постоянной $C > 0$.*

Приложения к задачам восстановления

Рассмотрим следующий оператор (алгоритм) восстановления:

$$\ell\infty(\xi)(f) := \ell\infty(\xi, X_N)(f) := \arg\min_{u \in X_N} \|S(f-u,\xi)\|_\infty.$$

Напомним, что наилучшее приближение $f \in L_p(\Omega, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, элементами X_N определяется следующим образом:

$$d(f, X_N)_p := \inf_{u \in X_N} \|f-u\|_p.$$

Приведем в качестве примера следствия ЛНД результат о восстановлении функции по выборке.

Теорема 1. *Пусть $p \in [1, \infty)$ и набор $\xi = \{\xi^j\}_{j=1}^m$ обеспечивает свойство $X_N \in \mathcal{LD}(m, p, \infty, D)$ для подпространства $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$, то есть для любого $u \in X_N$*

$$\|u\|_p \le D \max_{1 \le j \le m} |u(\xi^j)|.$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\|f - \ell\infty(\xi)(f)\|_p \le (2D+1) d(f, X_N)_\infty.$$

В докладе будут рассмотрены и другие алгоритмы восстановления и приведены соответствующие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Дай Ф., Примак А., Темляков В. Н., Тихонов С. Ю.* Дискретизация интегральной нормы и близкие задачи // УМН. 2019. Т. 74, № 4(448). С. 3—58.

[2] *Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V.* Sampling discretization and related problems // J. Complexity. 2022. Vol. 71, Paper No. 101653.

УДК 517. 956.32+517.984

Метод Фурье и построение обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения[1]

И. С. Ломов (Москва, Россия)

lomov@cs.msu.ru

При минимальных условиях на правую часть волнового уравнения построено обобщенное решение смешанной задачи. Решение представлено в виде ряда из метода Фурье, найдена его сумма. Приведен вид обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, резольвентный метод, обобщенная задача.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284..

The Fourier method and the construction of the generalized solution of the mixed problem for the inhomogeneous wave equation[1]

I. S. Lomov (Moscow, Russia)

lomov@cs.msu.ru

Under minimal conditions, a generalized solution of the mixed problem is constructed on the right side of the wave equation. The solution is presented as a series from the Fourier method, its sum is found. The form of a generalized solution of a mixed problem for an inhomogeneous telegraphic equation is given.

Keywords: mixed problem, wave equation, resolvent method, generalized problem..

Acknowledgements: The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the implementation of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under Agreement No. 075-15-2022-284..

Введение. Рассматривается следующая смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,\infty)\}, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u_x(0,t) + a_1 u(0,t) + b_1 u(1,t) = 0,$$

$$U_2(u) \equiv u_x(1,t) + a_2 u(0,t) + b_2 u(1,t) = 0, \; t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

где коэффициенты $a_i, b_i, i = 1,2,$ — произвольные комплексные числа, а комплекснозначная функция $f(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$, суммируемая функция, $Q_T = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T)\}$, $T > 0$ — произвольно зафиксированное число. Будем называть функцию $f(x,t)$ локально суммируемой в полуполосе Q.

Отметим, что задача (1)–(3) при $f(x,t) = 0$, ненулевых потенциале и начальной функции, была исследована в работе [1]. Найдены необходимые и достаточные условия существования сильного решения задачи. Применен метод А.П. Хромова, основаннный на использовании подхода А.Н. Крылова для ускорения сходимости рядов Фурье и на идее Л. Эйлера по работе с расходящимися рядами. Для исследования неоднородной задачи (1)–(3) этот метод применить не удается. Будет использована другая схема, предложенная В.В. Корневым и А.П. Хромовым.

1. Задаче (1), (2) поставим в соответствие дифференциальный оператор L, действующий в пространстве $\mathcal{L}^2(0,1)$:

$$L: \quad ly = -y''(x), x \in (0,1), \quad U_j(y) = 0, j = 1,2, \tag{4}$$

где U_j — краевые формы (2). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор.

Выпишем формальный ряд из метода Фурье, отвечающий задаче (1)–(3) (см. [2]):

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\Big[\int\limits_0^t \big(R_\lambda f(\cdot,\tau)\big)\frac{\sin\varrho(t-\tau)}{\varrho}d\tau\Big]d\lambda, \tag{5}$$

$x \in [0,1]$, $t \geqslant 0$. Здесь $R_\lambda\big(f(\cdot,\tau)\big)$ означает, что оператор R_λ применяется к функции $f(x,\tau)$ по переменной x (τ — параметр), $\lambda = \varrho^2$, $\mathrm{Re}\varrho \geqslant 0$, γ_n — образ в λ–плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\varrho : \ |\varrho - \pi n| = \delta\}$, число $\delta > 0$ и достаточно мало, число $r > 0$ достаточно велико и зафиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geqslant n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все контуры γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне круга радиуса $|\lambda| = r$, а остальные собственные значения — внутри этого круга.

Для вывода формулы (5) использован резольвентный подход, связанный с методом Коши–Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты по спектральному параметру. Он имеет преимущество по сравнению с традиционным методом разделения переменных, поскольку не требует ни уточнения асимптотики собственных значений, ни информации о кратности спектра или о наличии присоединенных функций. Вид контуров интегрирования в формуле (5) может быть и иным. Главное здесь, что все собственные значения оператора (4) находятся в объединении областей, охватываемых этими контурами.

Решение задачи (1)–(3) называем *сильным*, если оно удовлетворяет условиям (2), (3) в обычном смысле, а уравнению (1) — почти всюду в области Q.

Теорема 1 ([2], теорема 1). *Если* $u(x,t)$ *— сильное решение задачи* (1)–(3), *причем дополнительно выполняется условие единственности* $u_{tt}(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ *при любом* $T > 0$, *то оно единственно и находится по формуле* (5), *в которой ряд справа при любом зафиксированном* $t \geqslant 0$ *сходится абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$.

Теорема 1 говорит о том, что формальный ряд (5) и смешанная задача (1)–(3) тесно связаны. Расширим понятие этой связи.

Правая часть равенства (5) имеет смысл для любой функции $f(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ при любых $T > 0$. В этом случае будем говорить, что выражение (5) также является формальным решением смешанной задачи (1)–(3), понимаемой чисто формально. Будем называть ее *обобщенной смешанной задачей.*

Таким образом, мы сначала определяем формальное решение (5), которое теперь выглядит как реальный объект (несмотря на то, что ряд (5), вообще говоря, расходящийся), и заключаем, что он соответствует новой смешанной задаче (обобщенной) (1)–(3). То есть и здесь мы устанавливаем связь смешанной задачи с рядом (5).

Наша цель: доказать, что для всех значений $(x,t) \in Q$ ряд (5) сходится для любой функции $f(x,t)$ из указанного класса. Этот ряд мы и назовем *обобщенным решением* (обобщенной) смешанной задачи (1)–(3).

Для того чтобы выяснить, какой вид имеет сумма ряда (5), заметим следующее: $\varrho^{-1}\sin\varrho(t-\tau) = \int_0^{t-\tau}\cos\varrho\eta\,d\eta$, применим новую аксиому для расходящихся рядов [1] $\int\sum = \sum\int$, где $\int$ — определенный интеграл, тогда ряд (5) можно записать следующим образом:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\Big[\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\tau}\big(R_\lambda f(\cdot,\tau)\big)\cos\varrho\eta\,d\eta d\tau\Big]d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau} Z_0\big(x,\eta,f(\cdot,\tau)\big)d\eta,$$

где $Z_0\big(x,\eta,f(\cdot,\tau)\big)$ — формальное решение задачи (1)–(3) в случае однородного уравнения (1), с начальной функцией $\varphi(x) = f(x,\tau)$, τ —

параметр. За сумму ряда Z_0 примем следующее выражение [1]:

$$Z_0\big(x,\eta,f(\cdot,\tau)\big)=\frac{1}{2}\big[\tilde f(x+\eta,\tau)+\tilde f(x-\eta,\tau)\big],$$

где $\tilde f(\eta,\tau)$ есть продолжение по η функции $f(\eta,\tau)$ с отрезка $[0,1]$ на всю прямую. Тогда имеем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\big[\tilde f(x+\eta,\tau)+\tilde f(x-\eta,\tau)\big]\,d\eta=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde f(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{6}$$

Теперь правая часть равенства (6) определена при всех $(x,t)\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$.

Припишем сумму (6), вообще говоря, расходящемуся ряду (5). Если функция $f(x,t)$ достаточно гладкая, то ряд (5) есть сильное решение задачи (1)–(3).

2. Теорема 2. *Пусть функция $f(x,t)$ — локально суммируема в полуполосе Q. Тогда при любом зафиксированном числе $t\geqslant 0$ ряд* (5) *сходится к функции $u(x,t)$, определяемой формулой* (6), *равномерно по x на любом отрезке $[a,b]\subset(0,1)$. При этом на всем отрезке $[0,1]$ имеет место следующая оценка скорости сходимости ряда* (5) *к функции* (6):

$$\Big\|S_n(x,t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde f(\eta,\tau)\,d\eta\Big\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}\leqslant\frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

где через $S_n(x,t)$ обозначена n–я частичная сумма ряда (5).

В дальнейшем будет построено обобщенное решение задачи (1)–(3) с ненулевым суммируемым потенциалом, зависящем от двух переменных, и с ненулевой начальной функцией, суммируемой на отрезке $[0,1]$. Это решение можно получить одним из двух методов, предложенных А.П. Хромовым, — секвенциальным или аксиоматическим методами [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238.

[2] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731.

[3] *Ломов И. С.* Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 11. –С. 1471–1483.

УДК 517.9

Гармонические потенциалы на некомпактных римановых многообразиях[1]

А. Г. Лосев (Волгоград, Россия)
alexander.losev@volsu.ru

Данная работа посвящена развитию емкостной техники, связанной с понятиям массивного множества, в исследовании асимптотического поведения гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях. В том числе, построена компактификация римановых многообразий, обеспечивающая точное описание пространств гармонических функций.

Ключевые слова: массивные множества, гармонические функции, краевые задачи.

Harmonic potentials on non-compact Riemannian manifolds[1]

A. G. Losev (Volgograd, Russia)
alexander.losev@volsu.ru

This article is devoted to the development of capacitive techniques associated with the concepts of a massive set in the study of the asymptotic behavior of harmonic functions on non-compact Riemannian manifolds. In particular, a compactification of Riemannian manifolds was constructed, which provides an exact description of the spaces of harmonic functions.

Keywords: massive sets, harmonic functions, boundary problems.

Введение

Изучение эллиптических уравнений на римановых многообразиях является достаточно новым направлением в современной математике. Истоки указанной проблематики восходят, в том числе, к классификационной теории двумерных некомпактных римановых многообразий и поверхностей. Отличительным свойством многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данном многообразии является тождественной постоянной.

Ряд работ был посвящен исследованию решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях с конечным числом концов. В подавляющем большинстве работ разделяют концы параболического и гиперболического типа. Заметим, что гиперболичность типа конца E эквивалентна существованию нетривиальной гармонической функции v на E

такой, что $0 \leq v < 1$ и $v|_{\partial E} = 0$. Такую функцию v принято называть емкостным потенциалом E.

Большая часть исследований, проводившихся в данном направлении, посвящены получению оценок размерностей пространств решений эллиптических уравнений в терминах количества концов параболического и гиперболического типа или других емкостных характеристиках.

Однако ограничение на структуру многообразий с концами является достаточно жестким. Развивая емкостный подход, А. А. Григорьян ввел понятие массивного (D - массивного) множества [1]. С помощью данного понятия была получена оценка размерности пространств ограниченных гармонических функций (с конечным интегралом энергии). Позже с помощью понятия q - массивных множеств в работах [2] и [3] была получена оценка размерности пространств ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера. Применяемый подход позволил определить точные условия существования нетривиальных ограниченных решений полулинейных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях [4].

Массивные множества и емкостные потенциалы

Важную роль в дальнейших исследованиях будет иметь понятие *массивного* множества.

Пусть $\Omega \subset M$ – открытое множество. Будем говорить, что неотрицательная функция v является допустимой субгармонической функцией для Ω, если она является ограниченной субгармонической функцией на M такой, что $v = 0$ на $M \setminus \Omega$ и $\sup_{\Omega} v > 0$. Открытое множество Ω называется *массивным* если существует как минимум одна допустимая субгармоническая функция для Ω.

Перейдем к исследованию связи структуры массивных множеств и поведением гармонических функций на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Будем считать, что M – полное некомпактное риманово многообразие с пустым краем. Обозначим через $HB(M)$ – пространство ограниченных гармонических на M функций.

Обозначим h_k решение следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v_k(x) = 0, x \in B_k \\ h_k|_{\partial B_k \bigcap \Omega} = 1 \\ h_k|_{\partial B_k \bigcap \{M \setminus \Omega\}} = 0 \end{cases},$$

и

$$h_{\Omega} = \lim_{k \to \infty} h_k.$$

Заметим. что если $\Omega = M$, то $h_M = 1$, если Ω – массивное множество, то $h_\Omega = 0$, а если Ω – немассивное множество, то $h_\Omega \neq 0$.

Функцию h_Ω будем называть базовым гармоническим потенциалом, порожденным областью Ω. Обозначим линейную оболочку множества гармонических потенциалов на M как $HG(M)$. Введем на $HG(M)$ стандартную норму пространства непрерывных функций. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Подпространство $HG(M)$ является плотным в $HB(M)$.*

Используя свойства гармонических потенциалов было доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пространство $HB(M)$, снабженное частичным порядком $\leq$ является банаховой решеткой с сильной единицей.*

Доказанное утверждение позволяет применять теорему Крейнов-Какутани. Сформулируем ее.

Теорема 3. *Всякая банахова решетка линейно изометрична и порядково изоморфна пространству $C(Q)$ для подходящего компакта Q (причем такой компакт Q является единственным с точностью до гомеоморфизма).*

Однако, в общем случае, компакт, соответствующий теореме Крейнов-Какутани оказывается слишком неявным и геометрические аспекты риманова многообразия в нем практически не просматриваются. При этом сами массивные множества, а точнее, гармонические потенциалы, порожденные ими, достаточно точно описывают пространство ограниченных гармонических функций на M.

Дальнейшая часть работы посвящена построению подобного компакта на основе массивных множеств и соответствующих гармонических потенциалов.

Пусть v_1 и v_2 – базовые гармонические потенциалы, порожденные, соответственно, множествами Ω_1 и Ω_2. Будем говорить, что $\Omega_1 \sim \Omega_2$, если $v_1 = v_2$ на M.

Данное отношение эквивалентности разбивает все массивные множества на классы эквивалентности. Всюду далее класс эквивалентности, содержащий множество Ω будем также обозначать Ω.

Будем писать $\Omega_1 \succeq \Omega_2$, если $v_1 \geq v_2$, где v_1 и v_2, как и выше, базовые гармонические потенциалы, порожденные Ω_1 и Ω_2.

Далее рассмотрим последовательности открытых множеств

$$S\Omega^\alpha = (\Omega_1^\alpha, \Omega_2^\alpha, \cdots, \Omega_m^\alpha, \cdots)$$

таких, что

$$\Omega_1^\alpha \succeq \Omega_2^\alpha \succeq \cdots \succeq \Omega_m^\alpha \cdots .$$

Будем говорить, что $S\Omega^1$ и $S\Omega^2$ эквивалентны и писать $S\Omega^1 \sim S\Omega^2$, если для всех достаточно больших номеров i найдутся такие j и k, что выполнено

$$\Omega_j^2 \succeq \Omega_i^1 \succeq \Omega_{j+k}^2,$$

и для всех достаточно больших j найдутся такие i и l что выполнено

$$\Omega_i^1 \succeq \Omega_j^2 \succeq \Omega_{i+l}^1.$$

Будем говорить, что последовательность $S\Omega^\alpha$ обладает свойством неделимости, если не существует последовательности массивных множеств $S\Omega^\beta$ такой, что для всех i выполнено $\Omega_i^\alpha \succeq \Omega_i^\beta$ и $S_\Omega^\alpha \not\sim S_\Omega^\beta$.

Множество всех последовательностей $\{S\Omega^\alpha\}$, обладающих свойством неделимости, будем обозначать Q, а его элементы называть точками Q.

Введем топологию на Q. Обозначим $OsM = \{\Omega^a\}$ – множество всех открытых подмножеств M. Пусть $\Omega \in OsM$. Множество точек $S\Omega^\alpha \in Q$ таких, что для некоторых $j(\alpha)$ выполнено

$$\Omega \succeq \Omega_{j(\alpha)}^\alpha$$

будем называть окрестностью и обозначать $O\Omega$.

Теорема 4. *Множество Q – топологический компакт.*

Установлена связь между пространством непрерывных на компакте Q функций и пространством ограниченных гармонических на M функций. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Существует взаимно однозначное отображение из $C(Q)$ в $HB(M)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Григорьян А .А.* О размерности пространств гармонических функций // Мат. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 55–60.

[2] *Григорьян А. А., Лосев А. Г.* О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20. № 3. С. 34–42.

[3] *Losev A. G., Filatov V. V.* Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-compact Riemannian Manifolds // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. pp. 1363–1370.

[4] *Losev A. G., Filatov V. V.* On Capacitary Characteristics of Noncompact Riemannian Manifolds // Russian Mathematics. 2021. V. 65. № 3. pp. 61-67.

УДК 517.518.82

Линейные операторы конечного ранга на нескольких отрезках[1]

А. Л. Лукашов (Москва, Россия)
alexey.lukashov@gmail.com

Построены семейства линейных операторов конечного ранга на нескольких отрезках, обобщающие конструкции Й. Сабадоша и В.С. Виденского, исследованы их аппроксимативные свойства.

Ключевые слова: Полиномы Бернштейна, несколько отрезков, операторы конечного ранга.

Finite-rank operators on several intervals[1]

A. L. Lukashov (Moscow, Russia)
alexey.lukashov@gmail.com

Constructions of linear finite-rank operators on several intervals are given. They generalize J. Sabados' and V.S. Videnskii's operators.

Keywords: Bernstein polynomials, several intervals, finite-rank operators.

При решении ряда задач гармонического анализа и теории приближений важную роль играет метод полиномиальных прообразов отрезка (см., например, обзор [1], а также более поздние работы со ссылками на него). Одной из составляющих этого метода является приближение произвольных систем отрезков полиномиальными прообразами путем вариации некоторых концов отрезков.

Тем не менее даже в вопросах полиномиальных аппроксимаций иногда такая вариация не приносит хороших результатов (см., например, [2]). В работе [3] было продемонстрировано, что даже в случае интерполирования многочленами на нескольких отрезках полезным может оказаться аналог этого метода для прообразов отрезка при отображениях рациональными фунциями с фиксированным знаменателем.

Цель данной заметки - показать, как можно строить семейства линейных операторов конечного ранга (со значениями в конечномерных пространствах рациональных функций с фиксированным знаменателем) на нескольких отрезках.

Начнем с конструкции операторов типа Бернштейна (развивая конструкцию соответствующих линейных полиномиальных операторов, определенных в [4] лишь для весьма ограничительного случая систем отрезков, являющихся полиномиальными прообразами одного отрезка).

Пусть $s \geq 1$, $0 = a_1 < b_1 < \ldots < a_s < b_s = 1$ – разбиение отрезка $[0,1]$, $J_s = \cup_{j=1}^{s} I_j$, $I_j = [a_j, b_j]$ – система отрезков. Пусть $m > s$, $r(x)$ – рациональная функция степени m со знаменателем $S(x)$ степени s такая, что $r^{-1}([0,1]) = J_s$, причем $r(0) = 0$. Существование такой функции r было отмечено, например, в [3].

Для $n \in \mathbb{N}$ через $x_{k1} < \ldots < x_{km_k}$ обозначим такие точки системы отрезков J_s, для которых

$$r(x_{ki}) = \frac{k}{n},\ i = 1, \ldots, m_k;\ k = 0, \ldots, n,$$

где

$$m_k = \begin{cases} m + s - \left[\frac{m+s}{2}\right], & k = 0, \\ m, & k = 1, \ldots, n-1, \\ \left[\frac{m+s}{2}\right], & k = n. \end{cases}$$

Теперь для произвольной непрерывной на J_s функции обозначим через

$$L_k(f, x) = \sum_{i=1}^{m_k} f(x_{ki}) \ell_{ki}(x),\ k = 0, \ldots, n,$$

ее интерполяционные многочлены Лагранжа,

$$\ell_{ki}(x) = \prod_{\substack{j = 1 \\ j \neq i}}^{m_k} \frac{x - x_{kj}}{x_{ki} - x_{kj}}$$

– фундаментальные многочлены Лагранжа.

Линейные операторы типа Бернштейна определяются по формуле

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(f, x) b_{nk}(r(x)),\ x \in J_s,$$

где

$$b_{nk}(x) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

– фундаментальные многочлены Бернштейна. Очевидно, что $B_n(f, x)$ являются рациональными функциями степени $mn + m - 1$ со знаменателями $S^n(x)$. Если система отрезков J_s является полиномиальным прообразом отрезка, то есть найдется многочлен $p(x)$ степени $m \geq s$ такой, что $J_s = p^{-1}([0,1])$, то, положив $r(x) = p(x)$, получим операторы, построенные Й. Сабадошем [4].

Построенные операторы не являются положительными, но обладают следующими воспроизводящими свойствами: $B_n(q,x) = q(x)$ для любого многочлена $q(x)$ степени m_n, $B_n(r,x) = r(x)$. Кроме того, они интерполируют заданную функцию во всех концах отрезков данной системы (и в других точках вида $r^{-1}(0), r^{-1}(1)$).

На них также переносятся оценки скорости аппроксимации из работы [4].

Более общая конструкция получится, если вместо многочленов Бернштейна рассмотреть линейные положительные операторы конечного ранга на отрезке, введенные В.С. Виденским (см. [5, п.13,с.60–62], [6]).

Операторы Виденского имеют вид

$$U_n\left(f,x\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tau_{nk}\right) u_{nk}\left(x\right)$$

где τ_{nk} определяются равенствами

$$\phi_n\left(\tau_{nk}\right) = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, .., n,$$

$$\phi_n\left(x\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}\left(x\right),$$

и фундаментальные функции операторов Виденского (впервые рассмотренные Дж. П. Кингом) определяются с помощью порождающей функции по формулам

$$h_{ni}\left(x\right) = \frac{\rho_{ni}x}{1+\rho_{ni}-x}, \ \rho_{ni} > 0, i = 0, 1, ...,$$

$$g_n\left(x,y\right) = \sum_{k=0}^{n} y^k u_{nk}(x),$$

$$g_n\left(x,y\right) = \prod_{i=0}^{n-1}\left(h_{ni}\left(x\right)y + \left(1 - h_{ni}\left(x\right)\right)\right).$$

Теперь для определения линейных операторов на системе отрезков J_s надо, как и ранее, ввести рациональную функцию $r(x)$, для которой $J_s = r^{-1}([0,1])$. На сей раз $L_k(f,x)$ – интерполяционные многочлены Лагранжа по узлам x_{ki}, являющимся решениями уравнений

$$r(x_{ki}) = \tau_{nk}, \ i = 1, \ldots, m_k; \ k = 0, \ldots, n,$$

и операторы определяются по формуле

$$V_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(f,x) u_{nk}(r(x)).$$

Из свойств операторов Виденского следует, что $V_n(f,x)$ являются рациональными функциями со знаменателями

$$S^n(x) \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \rho_{ni} - r(x)\right),$$

они сохраняют те же воспроизводящие свойства для полиномов, что и операторы типа Бернштейна, а для рациональных функций соответствующее свойство имеет вид $V_n(\phi_n \circ r, x) = \phi_n \circ r(x)$.

В случае $\phi_n(x) = x$ операторы $V_n(f,x)$ совпадают с $B_n(f,x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Totik V.* The polynomial inverse image method // Approximation theory XIII: San Antonio 2010, Springer Proc. Math., 2013. Vol. 13. P. 345–365.

[2] *Kroo A., Szabados J.* Inverse polynomial mappings and interpolation on several intervals // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 436. P. 1165–1179.

[3] *Lukashov A. L., Szabados J.* The order of Lebesgue constant of Lagrange interpolation on several intervals // Period. Math. Hung. 2016. Vol. 72. P. 103–111.

[4] *Szabados J.* Bernstein-type polynomials on several intervals // Progress in approximation theory and applicable complex analysis, Springer Optimization and its applications, 2017. Vol. 117. P. 301–315.

[5] *Виденский В. С.* Линейные положительные операторы конечного ранга. Многочлены Бернштейна. Санкт-Петербург : Лань, 2023. 144 с.

[6] *Dikmen A. B.,Lukashov A.* Generating functions method for classical positive operators, their q-analogues and generalizations // Positivity. 2016. Vol. 20. P. 385–398.

УДК 517.5

Аппроксимация жесткими Фреймами в нульмерных группах[1]

С. Ф. Лукомский, А. М. Водолазов (Саратов, Россия)
LukomskiiSF@info.sgu.ru VAM21@yandex.ru

В нульмерных группах получена общая оценка аппроксимации жесткими фреймами функций, из которой следует оценка аппроксимации для функций из пространств Соболева с логарифмическим весом.

Ключевые слова: жесткий фрейм, аппроксимация, нульмерные группы.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект No 22-21-00037).

Approximation by tight Frames in zero-dimensional groups[1]

S. F. Lukomskii, A. M. Vodolazov (Saratov, Russia)
LukomskiiSF@info.sgu.ru VAM21@yandex.ru

In zero-dimensional groups we obtain a general estimate of approximation by tight frames, which implies an estimate of the approximation for functions from Sobolev spaces with logarithmic weight.

Keywords: tight frame, approximation, zero-dimensional groups.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No 22-21-00037)..

Введение

В работе [1] , была получена оценка аппроксимации жесткими фреймами для функций из пространства Соболева со степенным весом. В работе [2] был указан способ построения жестких время́ов в группе p-адических чисел, но порядок аппроксимации не был получен. В этой заметке мы укажем порядок аппроксимации жесткими фреймами в группе Виленкина и группе p-адических чисел для функций из пространств более общих, чем пространства Соболева со степенным весом.

Используемые обозначения. G – локально компактная нульмерная группа. G_n – подгруппы, определяющие топологию, $G_{n+1} \subset G_n$, p– простое число. $\sharp G_n/G_{n+1} = p$, $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. В группе Виленкина: $pg_n = 0$, в p-адической группе: $pg_n = g_{n+1}$. Оператор растяжения $\mathcal{A}G \mapsto G$: $\mathcal{A}x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$, если $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$.

$H_0 = \{h \in G : h = \sum_{j=1}^{s} a_{-j} g_{-j} s \in \mathbb{N},\ a_j = \overline{0, p-1}\}$ – множество сдвигов.
$\chi : G \mapsto \mathbb{R}$ -характеры, X–группа характеров. $G_n^\perp$ аннулятор группы G_n, r_n функции Радемахера, $(\chi\mathcal{A}, x) \stackrel{\text{def}}{=} (\chi, \mathcal{A}x)$.
$\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N}) = \{f \in L_2(G) : \operatorname{supp} f \subset G_{-N}, f(x)\ \textit{постоянна на}\, G_M \dot{+} g\}$.

Порядок аппроксимации

Следующие две теоремы справедливы в любой нульмерной группе.

Теорема 1 (Принцип двойственности). *Пусть* $M, N \in \mathbb{N}$ *и* $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ *масштабирующая функция с маской* m_0. *Определим маски* $m_j : j = \overline{1, q}$ *так, что*
1)$\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) m_j(\chi) = \mathbf{1}_{E_j}(\chi)$, *где* $E_j = G^\perp_{-s(j)} r^{\alpha_{-s(j)}}_{-s(j)} r^{\alpha_{-s(j)+1}}_{-s(j)+1} ... r_0^{\alpha_0}$ *есть дизъюнктные смежные классы и* $E_j \mathcal{A}^t$ *также дизъюнктные ,*
2)существуют целые $t(j) \geq 0$, *такие, что* $\bigsqcup_j E_j \mathcal{A}^{t(j)} = G^\perp_{M+1} \setminus G^\perp_M$.
Определим функции $\psi^{(j)}(x), j = 1, ..., q-1$ *равенствами*

$$\hat{\psi}^{(j)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(j)} \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) m_j(\chi).$$

Тогда аффинная система $\psi_{n,h}^{(j)}(x) = p^{\frac{n}{2}} \psi^{(j)}(\mathcal{A}^n x \dot{-} h), \quad n \in \mathbb{Z}, h \in H_0$, *образует жесткий фрейм в* $L_2(G)$

По теореме 1, функции $\{\psi_{n,h}^{(j)}\}$ образуют жесткий фрейм. Поэтому

$$\lim_{\tilde{N} \to +\infty} \|f - \sum_{n=-\infty}^{\tilde{N}} \sum_{j=1}^{q} \sum_{h \in H_0} \langle f, \psi_{n,h}^{(j)} \rangle \psi_{n,h}^{(j)} \|_2 = \lim_{\tilde{N} \to +\infty} \|f - S_{\tilde{N}}\| = 0.$$

Мы указываем порядок этой аппроксимации.

Теорема 2. *Пусть функции* $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, ..., \psi^{(q)}$ *и числа* $t(j)$ *построены как в теореме 1. Обозначим* $l = \max t(j)$. *Тогда для* $\tilde{N} > N$

$$\|f - S_{\tilde{N}}\| \leq (N+1) p^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=\tilde{N}+1}^{\infty} \left(\int\limits_{G^\perp_{n-l+1} \setminus G^\perp_{n-l}} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы воспользоваться этими теоремами надо иметь масштабирующую функцию $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ с маской m_0. В различных группах методы построения масок различны, ибо в них различны групповые операции. Мы укажем способы построения масштабирующих функций в Q_p и группе Виленкина.

Масштабирующие функции в Q_p и группе Виленкина

Пусть $M,N\in\mathbb{N}$. Масштабирующая функция $\varphi\in\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$, в частотной форме удовлетворяет уравнению $\hat{\varphi}_(\chi)=\hat{\varphi}(\chi A^{-1})m_0(\chi)$. с маской $m_0(\chi)=\sum_{h\in H_0^{(N+1)}}\beta_h\overline{(\chi,A^{-1}h)}$ постоянной на смежных классах $G_{-N}^{\perp}r_{-N}^{\alpha_{-N}}...r_{-N+s}^{\alpha_{-N+s}}$. Если обозначим значения маски m_0 на смежных классах $G_{-N}^{\perp}r_{-N}^{\alpha_{-N}}r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}}...r_M^{\alpha_M}$ через $\lambda_{\alpha_{-N}\alpha_{-N+1}...\alpha_0...\alpha_M}=\lambda_m$, $q_n=e^{-\frac{2\pi i}{p}}\sum\limits_{k=-N}^{M}\alpha_k p^{-N-k}$, $n=a_{-N-1}+a_{-N}p+...+a_{-1}p^N$, то получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} q_0^0 & q_0^1 & \cdots & q_0^{p^{N+1}-1}\\ q_1^0 & q_1^1 & \cdots & q_1^{p^{N+1}-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{p^{N+1}-1}^0 & q_{p^{N+1}-1}^1 & \cdots & q_{p^{N+1}-1}^{p^{N+1}-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{p^{M+N+1}-1}^0 & q_{p^{M+N+1}-1}^1 & \cdots & q_{p^{M+N+1}-1}^{p^{N+1}-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{p^{N+1}-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_{p^{M+N+1}-1}\end{pmatrix} \tag{1}$$

в которой неизвестными являются λ_m и β_n. Мы должны их найти так, чтобы $\hat{\varphi}(\chi)=m_0(\chi)m_0(\chi\mathcal{A}^{-1})...m_0(\chi\mathcal{A}^{-N-M})=0$ на множестве $G_{M+1}^{\perp}\setminus G_M^{\perp}$. Для нахождения λ_m и β_n строим дерево $T=T(m_0)$. Для любого $m\in\mathbb{N}: p^{M+N}\le m\le p^{M+N+1}-1$ строим путь из листа λ_m к корню λ_0 $\lambda_m\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p}\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p^2}\cdots\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p^{M+N}}\to\lambda_0=1$. Ясно, что $H=M+N$ есть высота p-ичного дерева T. (см. Рис.1).

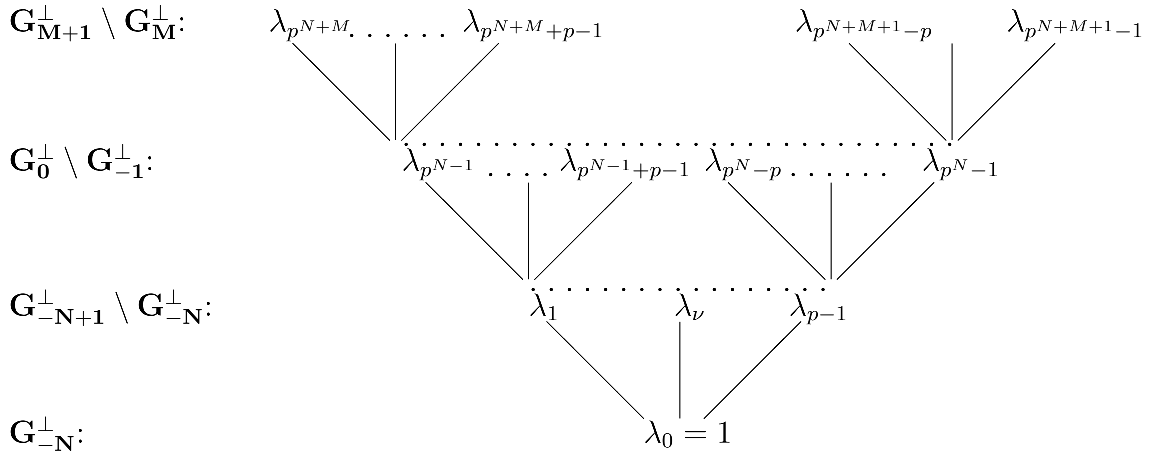

Рис.1 Дерево $T=T(m_0)$.

Множество всех произведений $\lambda_m\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p}...\lambda_0$ совпадает с множеством всех значений функции $\hat{\varphi}(\chi)$ на множестве $G_{M+1}^{\perp}\setminus G_M^{\perp}$. На каждом пути $\lambda_m\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p}\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p^2}\cdots\to\lambda_{m\,\mathrm{div}\,p^{M+N}}$ выбираем один узел и помещаем туда ноль. Множество этих нулей обозначим $\Lambda_0(T)$.

Теорема 3. *Если* $\sharp\Lambda_0(T)) \le p^{N+1}-1$, *то соответствующие значения* $\lambda_\nu \in \Lambda_0(T)$ *определяют маску* m_0 *некоторой масштабирующей функции. Если* $\lambda_\nu \notin \Lambda_0(T)$ *то* $\lambda_\nu \ne 0$.

В группе Виленкина для построения масштабирующей функции используются N-валидные деревья [3]. Дерево T называется N-валидным, если
1) В корне дерева и его вершинах уровней $1,2,\ldots,N-1$ стоят нули.
2) Любой путь $(\alpha_k \to \alpha_{k+1} \to \cdots \to \alpha_{k+N-1}),\ \alpha_j = \overline{0,p-1}$ длины $N-1$ представлен в дереве точно один раз.

Для любого узла α_{-N} уровня больше $N-1$ существует единственный путь $(\alpha_{-1} \leftarrow \cdots \leftarrow \alpha_{-N+1} \leftarrow \alpha_{-N})$ длины $N-1$. Соединим узел α_{-N} со всеми путями $\alpha_{-l+N-1} \leftarrow ... \leftarrow \alpha_{-l+2} \leftarrow \alpha_{-l+1}$ меньшего уровня так, что $\alpha_{-1} \leftarrow ... \leftarrow \alpha_{-N+2} \leftarrow \alpha_{-N+1} = \alpha_{-l+N-1} \leftarrow ... \leftarrow \alpha_{-l+2} \leftarrow \alpha_{-l+1}$.
Обозначим полученный граф через Γ. Определяем $N+1$ мерный массив равенствами
(a)$\lambda_{0,0,\ldots,0} = 1$,
(b)$\lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0} = 1$ for $(\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0) \in \Gamma$,
(c)$\lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0} = 0$ for $(\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0) \notin \Gamma$.
Зададим маску m_0 на $G_1^\perp$ равенствами
$m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} ... r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) = \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0}$,
продолжим ее периодически на X и положим $\hat\varphi(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi\mathcal{A}^{-k})$.

Теорема 4. *[3] Пусть T есть N-валидное дерево высоты H. Тогда*
(a) $\hat\varphi(\chi) = \prod_{k=0}^{H-N+1} m_0(\chi\mathcal{A}^{-k})$ *при* $\chi \in G_{H-2N+2}^\perp \setminus G_{H-2N+1}^\perp$,
(b) $\hat\varphi(\chi) = 0$ *при* $\chi \in G_{H-2N+2}^\perp \setminus G_{H-2N+1}^\perp$.
(c) $\hat\varphi \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_M^\perp),\ M = H-2N+1$.

Т.о. каждое N-валидное дерево высоты H порождает масштабирующую функцию $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ с $M = H-2N+1$ и мы можем использовать теоремы 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Farkov Y., Lebedeva E, Skopina M.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties. // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. T. 13, № 5.

[2] *Lukomskii S., Vodolazov A.* p-adic tight wavelet frames. // JMAA. 2023. Vol. 527, Issue 1, Part 1, 1 November, 127372.

[3] *S. F. Lukomskii, G. S. Berdnikov.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups. // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. T. 13, № 5, 11-22

УДК 517.521

Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, Владикавказ, Россия)
rasuldev@gmail.com

Получены необходимые и достаточные условия на вес, при которых система Хаара является базисом в весовом пространстве Лебега с переменным показателем.

Ключевые слова: система Хаара, базисность, пространство Лебега с переменным показателем, вес.

Basis property of the Haar system in weighted variable Lebesgue spaces[1]

M. G. Magomed-Kasumov (Makhachkala, Vladikavkaz, Russia)
rasuldev@gmail.com

Necessary and sufficient conditions for the weight are obtained under which the Haar system is a basis in the weighted variable Lebesgue space.

Keywords: Haar system, basis property, variable Lebesgue space, weight.

Введение

Функции Хаара можно определить посредством формул [1]

$$\chi_1(x) = 1, \quad \chi_n(x) = \begin{cases} 0, x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, x \in \Delta_n^-, \end{cases}$$

где двоичный интервал $\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $n = 2^k + i$, $i = 1, \ldots, 2^k$, $k \geq 0$, а Δ_n^+ и Δ_n^- обозначают соответственно левую и правую половины интервала Δ_n. Заметим, что

$$|\chi_n(x)| = |\Delta_n|^{-1/2} \widetilde{\chi}_{\Delta_n}(x). \tag{1}$$

Для каждой функции $f \in L^1(E)$ можно определить ряд Фурье и его частичную сумму:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\chi_k(x), \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\chi_k(x),$$

где $c_k(f) = \int_0^1 f(t)\chi_k(t)dt$.

Пусть на множестве $E = [0,1]$ задана измеримая функция $p : E \to [1,\infty]$ (показатель) и неотрицательная почти всюду (п.в.) положительная суммируемая функция $w(x)$ (вес). Определим модуляр [2]:

$$\rho(f) = \rho_{p(\cdot),w,E}(f) = \int_{E\setminus E_\infty} |f(x)|^{p(x)} w(x)dx + \|f\|_{L^\infty(E_\infty)},$$

где $E_\infty = \{x \in E : p(x) = \infty\}$.

Через $L_w^{p(\cdot)} = L_w^{p(\cdot)}(E)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, для которых $\rho(f/\lambda) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$. Пространство $L_w^{p(\cdot)}$ представляет собой линейное нормированное пространство, в котором одну из эквивалентных норм можно определить равенством [2–5]

$$\|f\|_{L_w^{p(\cdot)}(E)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho(f/\lambda) \le 1\} < \infty.$$

Через $p'(x)$ будем обозначать сопряженный показатель:

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1,$$

полагая при этом $1/\infty = 0$.

Основной результат

В работе [6] получены необходимые и достаточные условия на вес, при которых система Хаара образует базис в весовых пространствах Лебега с постоянным показателем. На переменный показатель этот результат частично перенесен в статье [7], в которой выведены лишь достаточные условия на вес. Основной целью данной работы является получение необходимых и достаточных условий базисности системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем.

Пусть $R = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1\}$ — некоторое разбиение отрезка $[0,1]$. Множество измеримых на $E = [0,1]$ функций $p(x) : E \to [1,\infty)$, удовлетворяющих на каждом интервале разбиения (a_i, a_{i+1}) условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x-y|} \le C, \tag{2}$$

обозначим символом $\mathcal{P}^{log}(R)$. Через $\widetilde{\chi}_Q(x)$ будем обозначать характеристическую функцию множества Q.

Теорема. *Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}(R)$. Система Хаара является базисом пространства $L_w^{p(\cdot)}(E)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Delta_n^{-1} \|w^{1/p}\widetilde{\chi}_{\Delta_n}\|_{L^{p(\cdot)}} \|w^{-1/p}\widetilde{\chi}_{\Delta_n}\|_{L^{p'(\cdot)}} < C(p,w). \tag{3}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Кашин Б.С., Саакаян А.А.* Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. М.: Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.

[2] *Cruz-Uribe D.V., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Basel: Springer, 2013. P. 312.

[3] *Шарапудинов И.И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки, 1979. Том 26, вып. 4. С. 613–632.

[4] *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем / Отв. ред. А. Г. Кусраев. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. 270 с.

[5] *L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ruzicka* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. P. 509.

[6] *Кранцберг А.С.* О базисности системы Хаара в весовых пространствах // Московский ин-т электронного машиностроения, 1971. Вып. 24. С. 14–21.

[7] *Магомед-Касумов М.Г.* Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказский математический журнал, 2014. Вып. 3. С. 38–46.

УДК 517.53

О нижнем порядке субгармонической функции с мерой на конечной системе лучей[1]

К. Г. Малютин, М. В. Кабанко (Курск, Россия)
malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru

Дж. Майлз (1979) рассматривал целые функции с нулями на конечным числе лучей. В частности, было доказано, что если f – целая функция бесконечного порядка с нулями на конечным числе лучей, то ее нижний порядок равен бесконечности. В данной статье мы доказываем аналогичный результат для класса субгармонических функций бесконечного порядка относительно функции роста, определяемой модельной функцией. Точнее, если субгармоническая функция с мерой на конечном числе лучей имеет бесконечный порядок, относительно функции роста, определяемой модельной функцией, то ее нижний порядок также равен бесконечности.

Ключевые слова: субгармоническая функция, модельная функция, порядок функции.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-21-00012, https://rscf.ru/project/22-21-00012/).

On the lower order of a subharmonic function with measure on a finite system of rays[1]

K.G. Malyutin, M. V. Kabanko (Kursk, Russia)
malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru

J. B. Meles (1979) considered entire functions with zeros restricted to a finite number of rays. In particular, it was proved that if f is an entire function of infinite order with zeros restricted to a finite number of rays, then its lower order equals infinity. In this paper, we prove a similar result for a class of subharmonic functions of infinite order with respect to the growth function determined by the model function. More precisely, if a subharmonic function with a measure on a finite number of rays has infinite order with respect to the growth function determined by the model function, then its lower order is also equal to infinity.

Keywords: subharmonic function, model function, order of function.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 22-21-00012).

Введение

Порядком и нижним порядком целой функции f называются соответственно величины

$$\beta[f] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}, \quad \alpha[f] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},$$

где $M(r,f)=\max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}|f(re^{i\theta})|$.

В работе [1] Дж. Майлз рассмотрел целые функции с нулями на конечном числе лучей. В частности, было доказано, что если f — целая функция бесконечного порядка с нулями на конечном числе лучей, то ее нижний порядок также равен бесконечности. Результат Дж. Майлза был распространен на аналитические в полуплоскости функции бесконечного порядка [2]. В данной статье мы доказываем аналогичный результат для класса субгармонических функций бесконечного порядка относительно функции роста, определяемой модельной функцией. Точнее, если субгармоническая функция с мерой на конечном числе лучей имеет бесконечный порядок, относительно функции роста, определяемой модельной функцией, то ее нижний порядок также равен бесконечности. Понятие модельной функции роста введено Б.Н. Хабибуллиным [3].

Вспомогательные сведения

Следующее определение принадлежит Б.Н. Хабибуллину [3].

Определение 1. Строго положительная возрастающая неограниченная функция M на $(0,+\infty)$ при выпуклости суперпозиции $M\circ\exp$ на $(-\infty,+\infty)$ называется *модельной функцией роста.*

Введенное здесь понятие модельной функции роста, охватывает большой класс функций. Функции f конечного порядка относительно модельной функции, могут иметь порядок роста в классическом его понимании равный бесконечности или нулю. Например, к модельным функциям роста относятся функции от $r>0$ вида $\exp^{\circ n} r$, где $\exp^{\circ n}$ — n-кратная суперпозиция с $n=1,2,\ldots$ показательной функции exp, степени логарифмической функции $\ln^p(e+r)$ при любом $p\ge 1$, и вообще любая дифференцируемая функция $M(r)>0$ при всех $r>0$ с возрастающей функцией $rM'(r)>0$ при всех $r>0$.

Определение 2. Строго положительная дифференцируемая функция V на некотором луче $R_{\rightarrow}:=(a,+\infty)$ называется *уточненной функцией роста относительно модельной функции роста M*, если существует хотя бы один из равных между собой пределов $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'}=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{(\ln v(x))'}{(\ln m(x))'}=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{m(x)v'(x)}{m'(x)v(x)}\in[0,+\infty)$, где функция $m\colon x\mapsto M(e^x)$ по определению 1 выпуклая на действительной прямой, а $v\colon x\mapsto V(e^x)$ дифференцируемая на $\ln R_{\rightarrow}:=\{\ln r: r\in R_{\rightarrow}\}$.

Для субгармонической функции v на плоскости $\mathbb{C}$ обозначим $\mathcal{M}_v(r)=\sup\limits_{|z|=r}v(z)$.

Определение 3. Порядком и нижним порядком функции v называются, соответственно, числа

$$\rho_v = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \mathcal{M}_v(r)}{\ln M(r)}, \quad \alpha_v = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \mathcal{M}_v(r)}{\ln M(r)}\,.$$

Если $\rho_v < \infty$, то v называется функцией конечного порядка, в противном случае ($\rho_v = \infty$) — функцией бесконечного порядка.

Главный результат

Основным результатом исследований является следующая теорема.

Теорема. *Пусть v — субгармоническая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ бесконечного порядка ρ_v относительно функции роста V, определяемой модельной функцией M, с риссовской мерой на конечном числе лучей $\mathbb{L}_k$:*

$$\mathbb{L}_k = \left\{z : \arg z = e^{i\theta_k}, \quad 0 \le \theta_k < 2\pi,\ k \in \overline{1, N_0},\ N_0 \in \mathbb{N}\right\}\,.$$

Тогда ее нижний порядок α_v также равен бесконечности.

Для доказательства этого утверждения мы использовали метод рядов Фурье, разработанный Рубелом и Тейлором [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Miles J. B.* On entire functions of infinite order with radially distributed zeros // Pacif. J. Math. 1979. Vol. 81, No 1. Pp. 131–157.

[2] *Malyutin K. G., Kabanko M. V., Shevtsova T. V.* Analytic functions of infinite order in half-plane // Probl. Anal. Issues Anal. 2022. Vol. 11(29), No 2. Pp. 59–71.

[3] *Хабибуллин Б. Н.* Обобщение уточненного порядка // Доклады Башкирского университета. 2020. Т. 5, № 1. С. 1–5.

[4] *Rubel L. A, Taylor B. A.* Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France. 1968. Vol. 96. Pp. 53–96.

УДК 517.5

Равномерная рациональная аппроксимация нечетного продолжения степенной функции[1]

Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)

mardvilko@mail.ru

В работе найдена слабая асимптотика наилучших равномерных рациональных приближений на $[-1, 1]$ нечетного продолжения степенной функции. Сильная асимптотика наилучших рациональных приближений на $[0, 1]$ степенной функции и ее четного на $[-1, 1]$ продолжения ранее найдена Г.Шталем. Из полученных результатов следует, что наилучшие рациональные приближения четного и нечетного продолжений степенной функции имеют одинаковую асимптотику.

Ключевые слова: степенная функция, равномерные рациональные приближения, четное и нечетное продолжения функции.

Благодарности: Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция» (№ГР 20211888).

Uniform rational approximation of the odd continuation of a power function[1]

T. S. Mardvilko (Minsk, Belarus)

mardvilko@mail.ru

The paper presents weak asymptotic behavior of the best uniform rational approximations on $[-1, 1]$ of the odd continuation of a power function. Strong asymptotics of the best rational approximations on $[0, 1]$ of a power function and its even continuation on $[-1, 1]$, found earlier by G. Stahl. From the results obtained it follows that the best rational approximations of the even and odd continuation of a power function have the same asymptotics.

Keywords: power function, uniform rational approximations, even and odd continuations of the function.

Acknowledgements: This work was supported by SPSR "Convergence-2025"(No. 20211888).

Обозначим через $C[a, b]$ пространство непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Для $f \in C[a, b]$ введем наилучшее равномерное рациональное приближение посредством рациональных функций r степени не выше n:

$$R_n(f; [a, b]) = \inf_r \|f - r\|_{C[a,b]}.$$

В теории аппроксимации изучению наилучших рациональных приближений степенной функции x^α, $x \in [0, 1]$, и ее четного продолжения

$|x|^\alpha$, $x \in [-1,1]$, посвящены работы Д.Ньюмена, А.А. Гончара, А.П. Буланова, Н.С. Вячеславова, Г. Шталя и других авторов. Наиболее сильные результаты получены Г. Шталем [1,2]. Именно, он доказал, что при $\alpha \in (0,+\infty) \setminus \mathbb{N}$ справедлива сильная асимптотика

$$R_n\left(x^\alpha;[0,1]\right) \sim 2^{2\alpha+2}|\sin \pi\alpha| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \to \infty,$$

а при $\alpha \in (0,+\infty) \setminus 2\mathbb{N}$ для $|x|^\alpha$, $x \in [-1,1]$, — четного продолжения x^α, $x \in [0,1]$, имеет место сильная асимптотика

$$R_n\left(|x|^\alpha;[-1,1]\right) \sim 2^{\alpha+2}\left|\sin \frac{\pi\alpha}{2}\right| e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \to \infty,$$

Для наилучших равномерных приближений $|x|^\alpha \operatorname{sign} x$, $x \in [-1,1]$, — нечетного продолжения x^α, $x \in [0,1]$, справедлива следующая теорема 1. Нижняя оценка из теоремы 1 и верхняя оценка для $\alpha \in \mathbb{Q}$ ранее были получены Н.С. Вячеславовым [3]. Нами доказана верхняя оценка для произвольного действительного $\alpha > 0$, $\frac{\alpha+1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0,+\infty)$ *и не является нечетным натуральным числом. Тогда справедлива слабая асимптотика*

$$R_n\left(|x|^\alpha \operatorname{sign} x;[-1,1]\right) \asymp e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где положительные величины, скрытые символом $\asymp$, *зависят лишь от* α.

Отметим, что асимптотики наилучших рациональных приближений четных и нечетных продолжений некоторых других функций можно найти в работах [4] и [5]. Там также рассмотрены вопросы о связи между наилучшими рациональными приближениями $f \in C[0,1]$, $f(0)=0$, и ее четным и нечетным продолжениями на $[-1,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Stahl H.* Best uniform rational approximation of x^α на $[0,1]$ // Acta Math. 2003. Т. 190, № 2. С. 241–306.

[2] *Lorenz G. G., Golitschek M. v., Makovoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems // Springer-Verlag: New York, Berlin, Heidelberg. 1996.

[3] *Вячеславов С. Н.* Рациональные аппроксимации в весовых пространствах на прямой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1985. № 5. С. 3–10.

[4] *Мардвилко Т. С., Пекарский А. А.* Применение действительного пространства Харди-Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 16–36.

[5] *Мардвилко Т. С.* Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжений функций // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 2. С. 261–269.

УДК 517.518.2

Вложение классов функций обобщенной ограниченной вариации в классы функций с фрактальным графиком[1]

Д. И. Масютин (Екатеринбург, Россия)

newselin@mail.ru

Для непрерывной на отрезке вещественнозначной функции f вводится понятие модуля фрактальности $\nu(f,\varepsilon)$, сопоставляющего каждому $\varepsilon > 0$ минимальное число квадратов, со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f. Для невозрастающей функции $\mu : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ рассматривается класс F^{μ} непрерывных на отрезке функций таких, что $\nu(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))$. Описано соотношение классов F^{μ_1} и F^{μ_2} при различных μ_1 и μ_2. Установлена связь между классами F^{μ} и классами непрерывных функций ограниченной вариации $BV_{\Phi}[a,b] \cap C[a,b]$ для произвольных выпуклых функций Φ.

Ключевые слова: фрактальная размерность, обобщенная ограниченная вариация.

Embedding classes of functions of generalized bounded variation into classes of functions with a fractal graph[1]

D. I. Masyutin (Ekaterinburg, Russia)

newselin@mail.ru

For a real-valued function f continuous on a closed interval, its modulus of fractality $\nu(f,\varepsilon)$ is defined as the function that maps any $\varepsilon > 0$ to the smallest number of squares of size ε parallel to the coordinate axes that cover the graph of f. For a nonincreasing function $\mu : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, we consider the class F^{μ} of functions continuous on an interval such that $\nu(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))$. The relation between the classes F^{μ_1} and F^{μ_2} is described for different μ_1 and μ_2. The connection is established between the classes F^{μ} and the classes of continuous functions of bounded variation $BV_{\Phi}[a,b] \cap C[a,b]$ for arbitrary convex functions Φ.

Keywords: fractal dimension, generalized bounded variation.

Пусть дана непрерывная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Модулем фрактальности* функции f будем называть функцию $\nu(f) : (0,+\infty) \to \mathbb{N}$, которая любому $\varepsilon > 0$ сопоставляет минимальное число квадратов со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f.

Пусть $\mu : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ — невозрастающая функция такая, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \mu(\varepsilon) = +\infty.$$

Определим класс F^{μ} следующим образом

$$F^{\mu} := \big\{f \in C[a,b] : \nu(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))\big\}.$$

Естественно рассматривать функции μ такие, что

$$\frac{C_1}{\varepsilon} \leqslant \mu(\varepsilon) \leqslant \frac{C_2}{\varepsilon^2}, \quad C_1, C_2 > 0;$$

тогда соответствующие классы F^{μ} будут удовлетворять условию

$$F^{\frac{1}{\varepsilon}} \subset F^{\mu} \subset F^{\frac{1}{\varepsilon^2}}.$$

Нетрудно видеть, что если $\mu_1(\varepsilon) = O(\mu_2(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to +0$, то $F^{\mu_1} \subset F^{\mu_2}$. Более того, если порядки стремления к $+\infty$ у функций μ_1 и μ_2 разные, то классы F^{μ_1} и F^{μ_2} не совпадают. Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Пусть $\mu_1(\varepsilon) = o(\mu_2(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to +0$. Функция μ_2 такая, что $\varepsilon\mu_2(\varepsilon)$ — невозрастающая, а $\varepsilon^2\mu_2(\varepsilon)$ — неубывающая. Тогда существует функция f, принадлежащая F^{μ_2}, но не принадлежащая F^{μ_1}.*

Следуя [1], непрерывную выпуклую вниз функцию $\Phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такую, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to+\infty}\frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty,$$

будем называть *N-функцией.*

Рассмотрим разбиение τ отрезка $[a,b]$:

$$\tau = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}.$$

Функцию f (см., например, [1, гл. 4, §5]) будем называть функцией с обобщенной ограниченной Φ-вариацией на отрезке $[a,b]$, если сумма

$$V_{\Phi}(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n}\Phi\big(|f(t_k) - f(t_{k-1})|\big)$$

ограничена по всем разбиениям τ отрезка $[a,b]$. Класс таких функций будем обозначать $BV_{\Phi}[a,b]$.

В статье [3] изучена связь классов F^{μ} с классами $BV_{\Phi}[a,b]$ при $\mu(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ и $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^p$, $p \geqslant 1$. В данной работе результаты, полученные в [3], обобщаются на произвольные классы F^{μ} и функции обобщенной ограниченной Φ-вариации. В частности, в терминах функций μ и Φ получено неулучшаемое условие вложения класса $BV_{\Phi}[a,b]$ в класс F^{μ}. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть* Φ — N*-функция и* $\frac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = O(\mu(\varepsilon))$ *при* $\varepsilon \to +0$. *Тогда*

$$BV_\Phi[a,b] \cap C[a,b] \subset F^\mu.$$

Теорема 7. *Пусть* Φ — N*-функция. При этом* $\mu(\varepsilon) = o\left(\frac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right)$ *при* $\varepsilon \to +0$. *Тогда существует функция* f*, принадлежащая* $BV_\Phi[0,1] \cap C[0,1]$*, но не принадлежащая* F^μ*.*

При $\mu(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ и $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon$ справедливо $BV_\Phi[a,b] \cap C[a,b] = F^\mu$. Более того, верна

Теорема 8. *Для любой функции* $f \in C[a,b]$

$$\frac{1}{8} \cdot Vf \leqslant \sup_{0<\varepsilon<1} \varepsilon\nu(f,\varepsilon) \leqslant Vf + (b-a) + 1,$$

где Vf *— классическая ограниченная вариация функции* f*.*

В случае, когда $\varepsilon\mu(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$ классы F^μ "значительно шире", чем классы BV_Φ.

Теорема 9. *Пусть* μ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\mu_2(\varepsilon) = +\infty.$$

и $\varepsilon\mu(\varepsilon)$ *— убывающая функция, а* $\varepsilon^2\mu(\varepsilon)$ *— возрастающая функция. Тогда для любой* N*-функции* Φ

$$F^\mu \not\subset BV_\Phi[0,1].$$

Доказательства теорем 5 - 9 изложены в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича // М.: ГИМФЛ, 1958. 272 с.

[2] *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. // М.: ГИМФЛ, 1961. 937 с.

[3] *Гриднев М.Л.* О классах функций с ограничением на фрактальность их графиков // Proceedings of the 48th International Youth School-Conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. – Екатеринбург, 2017. – С. 167–173.

[4] *Масютин Д.И.* О связи классов функций ограниченной вариации и классов функций с фрактальным графиком // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 155-168.

УДК 517.518.126

A-интеграл для измеримых по Риману векторнозначных функций[1]

К. М. Нараленков (Москва, Россия)

naralenkov@gmail.com

В настоящей работе предложены два возможных обобщения A-интеграла в классе измеримых по Риману функций, изучены их основные свойства, а также взаимосвязь друг с другом и с интегралом Биркгофа.

Ключевые слова: интегралы Биркгофа, Мак-Шейна и Хенстока, A-интеграл Римана, A-интеграл, измеримая по Риману функция, постоянный масштаб.

The A-integral for Riemann-measurable vector-valued functions[1]

K. M. Naralenkov (Moscow, Russia)

naralenkov@gmail.com

We propose two possible generalizations of the A-integral within the Riemann measurable functions class and study their basic properties, relation to one another, and to the Birkhoff integral.

Keywords: Birkhoff, McShane, Henstock, A-Riemann, and A-integrals, Riemann measurable function, constant gauge.

Измеримая действительная функция f, определённая на отрезке $[a,b]$, называется A-*интегрируемой* на $[a,b]$, с A-*интегралом* w, если $n \cdot \mu\{t \in [a,b] : |f(t)| > n\} \to 0$ и $\int\limits_{\{t\in[a,b]:|f(t)|\leqslant n\}} f(t)\, d\mu \to w$ при $n \to \infty$. В 1929 году Э. Титчмарш [1] предложил A-интеграл для интегрирования сопряжённых функций и отметил, что первое из двух приведённых выше условий необходимо для обеспечения его аддитивности по отношению к подынтегральной функции. А.Н. Колмогоров в 1933 году [2] ввёл понятие обобщённого математического ожидания случайной величины фактически в терминах A-интеграла. На протяжении многих лет определение интеграла, введённое Титчмаршем, привлекает значительное внимание математиков (см. обзорные статьи [3] и [4]).

В векторнозначной ситуации очевидно не существует канонического обобщения определения Титчмарша, поскольку *«измеримая функция»*, как и *«суммируемая функция»*, могут быть определены многими различными способами. Единственными опубликованными обобщениями A-интеграла на векторный случай, по-видимому, являются определения

В.И. Рыбакова 1970 года (A-O)- и A-интегралов [5] и определение И. Тагучи 1983 года (ER)-интеграла [6] в классе *измеримых по Бохнеру* функций. В настоящей статье представлены два определения A-интеграла в классе *измеримых по Риману* функций [7]. Наше первое определение риманового типа с *постоянными масштабами* даёт *A-интеграл Римана*, в то время как наше второе определение является прямым обобщением конструкции Титчмарша. Эти два определения оказываются эквивалентны для функций, к которым они оба применимы. Хотим сделать ещё одно наблюдение: Рыбаков и Тагучи для определения (A-O)- и A-интегралов и (ER)-интеграла соответственно используют другой тип срезок подынтегральной функции, который Рыбаков называет *срезками первого рода* (срезки, используемые в настоящей работе, в его терминологии называются *срезками второго рода*). Тем не менее, A-интеграл Рыбакова, (ER)-интеграл и наше второе определение A-интеграла совпадают (для измеримых по Бохнеру функций) вследствие того, что все эти три понятия интеграла включают упомянутое выше первое условие Титчмарша для подынтегральной функции.

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a, b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I будет обозначать произвольный невырожденный подотрезок отрезка $[a, b]$. *Характеристическая функция* множества E будет обозначаться через χ_E. Положительная функция, определённая на множестве E, будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ есть конечный набор $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ пар отрезок-точка такой, что отрезки $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно не перекрываются и $t_k \in [a, b]$ для каждого k. Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ называется *частичным разбиением Хенстока* отрезка $[a, b]$ если $t_k \in I_k$ для всех k. Частичное разбиение Мак-Шейна (Хенстока) отрезка $[a, b]$ называется *разбиением Мак-Шейна (Хенстока)* отрезка $[a, b]$ если его отрезки *покрывают* отрезок $[a, b]$.

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *интегрируемой по Мак-Шейну (Хенстоку)* на $[a, b]$, с *интегралом Мак-Шейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a, b]$ такой, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого разбиения Мак-Шейна (Хенстока) $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ отрезка $[a, b]$ с условием $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$ для всех k.

Определение 2. Функция $f : [a, b] \to X$ *$\mathcal{M}$-интегрируема* ($\mathcal{H}$-

интегрируема) на $[a,b]$ если она интегрируема по Мак-Шейну (Хенстоку) на $[a,b]$ и каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Мак-Шейна (Хенстока) функции f по $[a,b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ.

Определение 3. Функция $f : [a,b] \to X$ называется *измеримой по Риману* на измеримом множестве $E \subset [a,b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{f(t_k) - f(t_k')\} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1 \le k \le K} \mu(I_k) < \delta$ и для всех $t_k, t_k' \in I_k \cap F$.

Все $\mathcal{H}$-интегрируемые функции обязательно измеримы по Риману, более того, интеграл Мак-Шейна (Хенстока) оказывается эквивалентен $\mathcal{M}$-интегралу ($\mathcal{H}$-интегралу) для измеримых по Риману функций [7]. Также для наших целей весьма важным является тот факт, что любая ограниченная измеримая по Риману функция необходимо $\mathcal{M}$-интегрируема [7].

Определения *интеграла Биркгофа* (эквивалентного $\mathcal{M}$-интегралу [8]) и *абсолютного интеграла Биркгофа* можно найти в работе [9].

Для данных функции $f : [a,b] \to X$ и натурального числа n, мы будем обозначать множество $\{t \in [a,b] : \|f(t)\| > n\}$ через $E_n(f)$, а функцию $f \cdot \chi_{[a,b] \setminus E_n(f)}$ через $[f]^n$.

Определение 6. Функция $f : [a,b] \to X$ называется *A-интегрируемой по Риману* на $[a,b]$, с *A-интегралом Римана* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого бесконечного множества $S \subset \mathbb{N}$ найдутся $N \in S$, открытое множество G, удовлетворяющее условиям $E_N(f) \subset G$ и $N\mu(G) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k: I_k \not\subset G} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ разбиения Хенстока отрезка $[a,b]$ с условиями $\max\limits_{1 \le k \le K} \mu(I_k) < \delta$ и $t_k \notin G$, если $I_k \not\subset G$, для всех k.

Определение 7. Пусть функция $f : [a,b] \to X$ измерима по Риману на отрезке $[a,b]$ и множество $E_n(f)$ измеримо для каждого $n \in \mathbb{N}$ кроме, возможно, конечного множества $T \subset \mathbb{N}$. Функция f называется *A-интегрируемой* на отрезке $[a,b]$, с *A-интегралом* $w \in X$, если $n \cdot \mu(E_n(f)) \to 0$ и $(\mathcal{M}) \int\limits_a^b [f]^n \to w$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть $f : [a, b] \to X$. Тогда A-интеграл Римана функции f по $[a, b]$, если он существует, единствен.*

Теорема 2. *Если функции $f_1, f_2 : [a, b] \to X$ A-интегрируемы по Риману на $[a, b]$ к $w_1 \in X$ и $w_2 \in X$ соответственно, то функция $f_1 + f_2$ A-интегрируема по Риману на $[a, b]$ к $w_1 + w_2$.*

Теорема 3. *Если функция $f : [a, b] \to X$ абсолютно интегрируема по Биркгофу на $[a, b]$, то она A-интегрируема по Риману на $[a, b]$ к $(Bk)\int\limits_a^b f$.*

В то же время, существует измеримая по Бохнеру функция, которая интегрируема по Биркгофу и A-интегрируема по Риману, но не является абсолютно интегрируемой по Биркгофу. Также отметим, что существует измеримая по Бохнеру функция, которая интегрируема по Биркгофу и не является A-интегрируемой по Риману.

Теорема 4. *Если функция $f : [a, b] \to X$ A-интегрируема на $[a, b]$ к $w \in X$, то она A-интегрируема по Риману на $[a, b]$ к w.*

Теорема 5. *Если функция $f : [a, b] \to X$ A-интегрируема по Риману на $[a, b]$ к $w \in X$ и множество $E_n(f)$ измеримо для каждого $n \in \mathbb{N}$ кроме, возможно, конечного множества $T \subset \mathbb{N}$, то она A-интегрируема на $[a, b]$ к w.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Titchmarsh E. C.* On Conjugate Functions // Proc. London Math. Soc. (2) 1929. V. 29, № 1. P. 49–80.

[2] *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. // М.–Л. : ОНТИ, 1936. 80 с.

[3] *Виноградова И. А., Скворцов В. А.* Обобщенные интегралы и ряды Фурье // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. М. : ВИНИТИ, 1971. С. 65–107.

[4] *Лукашенко Т. П.* A-интеграл и его применение в исследованиях П. Л. Ульянова и других математиков // Изв. вузов. Матем. 2008. № 5. С. 77–82.

[5] *Рыбаков В. И.* A-интегралы от векторнозначных функций // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-т. 1970. Сб. 102. С. 36–41.

[6] *Taguchi Y.* A generalization of the Bochner integral by the method of ranked spaces // TRU Math. 1983. V. 19, № 2, P. 141–162.

[7] *Naralenkov K. M.* A Lusin type measurability property for vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 417, № 1. P. 293–307.

[8] *Солодов А. П.* О границах обобщения интеграла Колмогорова // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 2. С. 258–272.

[9] *Нараленков К. М.* Об абсолютной интегрируемости измеримых по Риману векторнозначных функций // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Научная книга, 2020. С. 268–272.

УДК 517.5

Свойства линий уровня биполярной функции Грина на торе и разложение Наттолла[1]

С. Р. Насыров (Казань, Россия)

semen.nasyrov@yandex.ru

Мы изучаем биполярную функцию Грина на трехлистной римановой поверхности, являющейся комплексным тором. Нахождение ее нулевых линий уровня дает возможность описать разложение Наттолла этого тора. Это разложение связано с нахождением максимальных областей сходимости аппроксимантов Паде-Эрмита в случае приближения ими многозначных аналитических функций с тремя особыми точками. Мы даем полное описание топологической структуры разложения Наттолла в случае, когда особые точки располагаются в вершинах равнобедренного треугольника с углом при вершине, не превосходящем $\pi/3$. В остальных случаях мы даем такое описание при дополнительном предположении о геометрической структуре нулевой линии уровня биполярной функции Грина.

Ключевые слова: биполярную функцию Грина, разложение Наттолла, аппроксимации Паде-Эрмита, область сходимости.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00066).

Properties of level sets of bipolar Green function on a torus and Nuttall decomposition[1]

S. R. Nasyrov (Kazan, Russia)

semen.nasyrov@yandex.ru

We study the bipolar Green function on a three-sheeted Reiemann surface which is a complex torus. Finding the null set of this function give a possibility to describe the Nuttall decomposition of the torus. Such decomposition is connected with the problem of finding maximal convergence domains for Pade–Hermite approximants when se approximate multi-valued functions with three branch points. We give a full description of the topological structure of the Nuttall decomposition in the case when the branch points form an isosceles triangle with angle at vertex less than $\pi/3$. In other cases, we give such description under an additional requirement on the null set of the bipolar Green function.

Keywords: bipolar Green function, Nuttall decomposition, Pade-Hermite approximants, convergence domain.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-11-00066).

Мы исследуем разложение Наттолла трехлистного тора T, являющегося римановой поверхностью функции $w = \sqrt[3]{(\tau - a_1)(\tau - a_2)(\tau - a_3)}$, где a_j попарно различны. Это разложение связано с абелевым интегралом, имеющим логарифмические особенности в точках T, лежащих над бесконечно удаленной точкой. Действительная часть этого интеграла является однозначной гармонической функций V на T, и разложение Наттолла тора T на три листа связано со значениями функции V в трех точках, проекции которых на сферу Римана совпадают. Пусть точки $\tau^{(0)} = \tau^{(0)}(\tau)$, $\tau^{(1)} = \tau^{(1)}(\tau)$ и $\tau^{(2)} = \tau^{(2)}(\tau)$ лежат над точкой τ и значения функции V в этих точках попарно различны. Выберем нумерацию этих точек таким образом, что выполняется неравенство $V(\tau^{(0)}) > V(\tau^{(1)}) > V(\tau^{(2)})$. Тогда множество точек $\tau^{(0)}(z)$, $\tau \in \mathbb{C}$, образует нулевой лист поверхности. Аналогично определяются первый и второй листы. На кривых, являющихся проекциями линий склейки листов на плоскость нумерация точек определяется, естественно, неоднозначно. Описанное разложение тора на листы называется разложением Наттолла. Согласно гипотезе Наттолла [1], эти линии на комплексной плоскости притягивают полюсы диагональных аппроксимантов Паде–Эрмита. В работе А. И. Аптекарева и Д. Н. Тулякова [2] полностью описана структура листов Наттолла в случае, когда треугольник Tr с вершинами a_1, a_2 и a_3 близок к правильному. Здесь мы используем подход, связанный с эллиптическими функциями Вейерштрасса на универсальном накрытии тора.

Абелев интеграл на торе T определяется соответствующий абелев интеграл на универсальной накрывающей этого тора, которая является комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Действительная часть этого интеграла является гармонической функцией, которая может быть выражена через эллиптическую σ-функцию Вейерштрасса:

$$v(z) = -2\ln\sigma|z-\alpha| + \ln\sigma|z-\alpha e^{i2\pi/3}| + \ln\sigma|z-\alpha e^{i2\pi/3}| - \sqrt{3}\eta_1 \mathrm{Re}\,(z\overline{\alpha}).$$

Здесь $\sigma(z)$ — σ-функция Вейерштрасса с периодами

$$\omega_1 = \sqrt{3} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{3}e^{i\pi/3};$$

$\eta_1 = 2\zeta(\omega_1/2)$, где $\zeta(z)$ — ζ-функция Вейерштрасса с периодами ω_1 и ω_2; α — точка, лежащая в треугольнике Δ с вершинами в точках 0, $e^{i\pi/6}$ и $e^{-i\pi/6}$ и не совпадающая с его вершинами. Отметим, что положение точки α в треугольнике Δ характеризуется геометрическими свойствами треугольника Tr с вершинами a_1, a_2 и a_3. В случае правильного треугольника Tr точка α лежит в центре треугольника Δ, в случае равнобедренного треугольника Tr — на одной из биссектрис Δ, наконец, если точки a_1, a_2 и a_3 лежат на одной прямой, то α находится на одной из сторон треугольника Δ.

Отметим, что универсальное накрытие тора $p : \mathbb{C} \to T$ устроено таким образом, что при повороте точки плоскости z на углы $\pm 2\pi/3$ точка $p(z)$ переходит в точки $p(e^{\pm i2\pi/3}z)$ на торе с той же проекцией на комплексную плоскость. Поэтому для описания структуры листов в разложении Наттолла достаточно сравнить значения функции v в точках z и $e^{\pm i2\pi/3}z$. В силу симметрии поворота можно сравнивать значения $v(e^{i2\pi/3}z)$ и $v(e^{-i2\pi/3}z)$. При этом, равенство этих значений равносильно равенству $u(z)=0$, где

$$u(z)=\ln\sigma|z-\alpha e^{-i2\pi/3}|-\ln\sigma|z-\alpha e^{i2\pi/3}|-\eta_1\mathrm{Im}\,(z\overline{\alpha}).$$

Отметим, что функция $u(z)$ является двоякопериодической функцией (с периодами ω_1 и ω_2) на плоскости с двумя логарифмическими особенностями в каждой фундаментальной области (т.е. области, содержащей по одной точке из класса эквивалентности по модулю решетки Ω, порожденной векторами ω_1 и ω_2), поэтому она индуцирует однозначную гармоническую функцию на торе с двумя логарифмическими особенностями, которую можно назвать биполярной функцией Грина.

Таким образом, для описания разложения Наттолла следует изучить нулевое множество

$$L(u,0)=\{z\in\mathbb{C}\mid u(z)=0\}$$

функции u. Его структура зависит от того, содержит оно критические точки функции u или нет. Установлено, что в каждой фундаментальной области функция $u(z)$ имеет ровно две критические точки (с учетом кратности). При этом, критическая точка двойная тогда и только тогда, когда α совпадает с центром треугольника Δ. Кроме того, установлено, что критические точки лежат в нулевом множестве $L(u,0)$ тогда и только тогда, когда α либо лежит на границе треугольника Δ, либо на одном из перпендикуляров, опущенных из центра Δ на одну из его сторон. Заметим, что второй случай означает, что треугольник Tr является равнобедренным с углом при вершине, большим $\pi/3$.

После установления структуры множества $L(u,0)$ возникает задача об описании множества, которое является пересечением $L(u,0)$ и множеств, которые получаются из него поворотами на углы $\pm i2\pi/3$. В силу специфики функции $u(z)$ оказывается, что пересечение всех трех множеств указанных совпадает с пересечением любых двух из них.

Многочисленные численные эксперименты позволяют высказать гипотезу о том, что в любой фундаментальной области это пересечение состоит из трех точек, эквивалентных вершинам треугольника Δ, а также трех точек, которые получаются друг из друга поворотами на углы $\pm i2\pi/3 \pmod{\Omega}$.

Нам удалось строго доказать справедливость этой гипотезы в случае, когда Tr является равнобедренным с углом при вершине, меньшим

$\pi/3$; в терминах параметра α это означает, что α лежит на одном из отрезков, соединяющих вершины треугольника Δ с его центром. В этом случае полностью описана структура разложения Наттолла трехлистного тора. В остальных случаях дано полное описание в предположении справедливости этой гипотезы.

Доказательство в случае равнобедренных треугольников с углом при вершине, меньшим $\pi/3$, основано на следующем факте.

Теорема. *Множество $L(u, 0)$ состоит из объединения бесконечного числа горизонтальных прямых и кривых, являющихся графиками периодических функций с периодом ω_1; это множество инвариантно при сдвигах на векторы решетки Ω. Угол наклона касательной в любой точке любой кривой этого семейства по абсолютной величине строго меньше $\pi/3$.*

Доказательство теоремы дает основания надеяться, что справедливость гипотезы о точках пересечении может быть установлена аналогичным образом и для треугольников, достаточно близких к равнобедренным с углом при вершине, меньшим $\pi/3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials // J. Approx. Theory. — 1984. — V. 42, No 4. — P. 299–386.

[2] *Аптекарев А. И., Туляков Д. Н.* Абелев интеграл Наттолла на римановой поверхности кубического корня многочлена третьей степени // Изв. РАН. Сер. матем. — 2016. — Т. 80, No 6. — Р. 5–42.

УДК 517.9

Системы векторов, восстанавливающие сигнал по модулям измерений в гильбертовом пространстве[1]

С. Я. Новиков (Самара, РФ), П. А. Терехин (Саратов, РФ)
nvks@ssau.ru, terekhinpa@mail.ru

Рассмотрены системы элементов бесконечномерного гильбертова пространства, которые позволяют восстановить элемент пространства (сигнал) по модулям скалярных произведений сигнала и выбранных элементов. Выявлены различия конечномерной и бесконечномерной моделей для решения проблемы восстановления.

Ключевые слова: гильбертово пространство, системы элементов, полные системы, фреймы.

Благодарности: Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2023-931.
Работа второго автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

Vector systems for the signal reconstruction by modules of measurements in the Hilbert space[1]

S. Ya. Novikov (Samara, Russia), P. A. Terekhin (Saratov, Russia)
nvks@ssau.ru, terekhinpa@mail.ru

Systems of elements of an infinite-dimensional Hilbert space are considered, which make it possible to reconstruct an element of space (a signal) by modules of scalar products of the signal and selected elements. The differences between finite-dimensional and infinite-dimensional models for solving the problem of reconstruction are revealed.

Keywords: Hilbert space, systems of vectors, frames.

Acknowledgements: The work of the first author was performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-931).
The work of the second author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-71-30001) at Lomonosov Moscow State University..

Введение

Модель восстановления сигнала по большому количеству модулей измерений может быть построена в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Сигнал будем рассматривать как элемент f сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Наблюдателю доступны модули измерений $(|\langle f, \varphi_n \rangle|)_{n\in I}$, для некоторого счетного набора т.н. «измерительных векторов» $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in I} \subset \mathcal{H}$. Если $\tilde{f} = \alpha f$ для некоторого α с $|\alpha| = 1$, то $|\langle \tilde{f}, \varphi_n \rangle| = |\langle f, \varphi_n \rangle|$ для всех $n \in I$ независимо от выбора Φ. Будем говорить, что Φ восстанавливает сигнал по модулям измерений (ВМИ), если верно обратное утверждение: из равенств $|\langle \tilde{f}, \varphi_n \rangle| = |\langle f, \varphi_n \rangle|$ для всех $n \in I$ следует существование унимодулярного скаляра α такого, что $\tilde{f} = \alpha f$. В конечномерных евклидовых и унитарных пространствах такие модели активно изучаются, в них все (ВМИ)-наборы являются гильбертовыми фреймами (определение см. ниже) [1, 2]. Недавно появилось несколько работ, в которых такая модель рассматривается в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве [3, 4].

Определение 1. *Последовательность элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется гильбертовым фреймом или фреймом Даффина-Шеффера для гильбертова пространства $\mathcal{H}$, если существуют константы $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для всех $f \in \mathcal{H}$,*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Числа A и B называются фреймовыми границами, соответственно, нижней и верхней.

Восстановление по модулям измерений и альтернативная полнота

Следующее свойство набора векторов оказалось важным для (ВМИ).

Определение 2. *Будем говорить, что набор векторов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ обладает свойством альтернативной полноты (АП), если для любого подмножества $S \subseteq \mathbb{N}$ либо $\overline{span}\{\varphi_n\}_{n\in S} = \mathcal{H}$, либо $\overline{span}\{\varphi_n\}_{n\in S^C} = \mathcal{H}$.*

Следующая теорема сформулирована в [3] для фреймов, хотя существование таких фреймов вызывает вопросы. Доказательство конечномерного аналога этой теоремы имеет историю [1, 2]. Получено новое доказательство части а) без предположения, что набор векторов образует фрейм.

Теорема 1. *а) Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — набор векторов в $\mathcal{H}$. Если $\Phi \in$ (ВМИ), то $\Phi \in$ (АП).*

б) Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство над полем вещественных чисел и пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — набор векторов в $\mathcal{H}$. Если $\Phi \in$ (АП), то $\Phi \in$ (ВМИ).

Определение 3. *Гильбертов фрейм* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *обладает свойством* σ*-сильной альтернативной полноты, если для любого* $S \subseteq \mathbb{N}$*, либо* $\{\varphi_n\}_{n\in S}$*, либо* $\{\varphi_n\}_{n\in S^C}$ *образует фрейм для* $\mathcal{H}$ *с нижней границей* $\geq \sigma$.

Пример фрейма с таким свойством в конечномерном пространстве построен в [2] .

Доказано, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве не существует фрейма с нормами, отделенными от нуля, со свойством σ-строгой альтернативной полноты.

Теорема 2.*Пусть* $\mathcal{H}$ *— бесконечномерное гильбертово пространство и* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— гильбертов фрейм для* $\mathcal{H}$ *с* $\|\varphi_n\| \geq \delta > 0,\ n = 1, 2, \ldots,$ *и с верхней фреймовой границей* B*. Фрейм* Φ *не может обладать* σ*-строгим свойством альтернативной полноты ни для какого* $\sigma > 0$.

Системы с полным спарком

В конечномерном пространстве $\mathcal{H}^d$ спарком системы векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ называют минимальное количество линейно *зависимых* векторов. Если каждая подсистема из d векторов состоит из линейно *независимых* векторов, говорят о системе с *полным спарком.* Примеры таких систем приведены в [5].

Определение 4. [3] *Система элементов* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *бесконечномерного гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ *называется системой с полным спарком, если каждое бесконечное подмножество полно в* $\mathcal{H}$.

Очевидно, что система с полным спарком обладает свойством альтернативной полноты, и, в силу теоремы 1, обеспечивает восстановление по модулям измерений в вещественном гильбертовом пространстве. Видимо, впервые доказательство существования систем с полным спарком в бесконечномерном гильбертовом пространстве было дано в [6].

Теорема 3.*Пусть* $\mathcal{H}$ *— бесконечномерное гильбертово пространство и* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— система элементов гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ *с* $\|\varphi_n\| \geq \delta > 0,\ n = 1, 2, \ldots,$ *и с конечной верхней фреймовой границей* B*. Тогда* Φ *не может быть системой с полным спарком.*

Системы дискретизированных значений ядра Сеге

Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ состоит их всех аналитических функций $f(z)$ в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для которых конечна

норма
$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$
Ядро Сеге
$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad z, \lambda \in \mathbb{D},$$
является воспроизводящим ядром гильбертова пространства H^2. Это означает, что для всех $f \in H^2$ и всех $\lambda \in \mathbb{D}$ справедливо равенство
$$f(\lambda) = \langle f, K_\lambda\rangle_{H^2}.$$

Пусть Λ — счетное множество точек единичного круга $\mathbb{D}$ и $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H^2$ — система значений ядра Сеге.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является системой с полным спарком в H^2;

2) $\Lambda \subset \overline{\mathbb{D}_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ для некоторого $0 < r < 1$.

Пример. *Пусть счетное множество Λ состоит из точек*
$$\lambda_{k,j} = (1-\tfrac{1}{k})e^{2\pi ij/k}, \qquad j = 0,\dots,k-1, \qquad k = 1,2,\dots,$$
являющимся корнями k-й степени из единицы, перемещенными на окружность радиуса $1-\frac{1}{k}$. Тогда система $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ обладает свойством альтернативной полноты (АП) в пространстве Харди H^2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Balan R.,Casazza P., Edidin D.* On signal reconstruction without phase // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. V. 20. № 3. P. 345-356.

[2] *Bandeira A., Cahill J., Mixon D., Nelson A.* Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2014. V. 37. № 1, P. 106-125.

[3] *Cahill J., Casazza P. G., Daubechies I.* Phase retrieval in infinite dimensional Hilbert spaces // Transactions of the AMS, Series B. 2016. V. 3. P. 63-76.

[4] *Botelho-Andrade S., Casazza P., Cheng D., Haas J., Tran T.* Phase Retrieval in $\ell^2(\mathbb{R})$ // `http://arxiv.org/abs/math/1804.01139v1` (2018)

[5] *Novikov S. Ya.* Equiangular Tight Frames with Simplices and with Full Spark in R^d // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. № 1. P. 155-166.

[6] *Вершинин Р. В.* О представляющих и абсолютно представляющих системах в банаховом пространстве // Математическая физика, анализ, геометрия. 1998. Т. 5.№ 1/2. С. 3-14.

УДК 517.538;517.518

Обобщённая формула следа и асимптотика сдвинутого определителя Форсайта для полиномов Соболева[1]

Б. П. Осиленкер (Москва,Россия)
b_osilenker@mail.ru

Изучаются системы полиномов Соболева,мера ортогональности которых содержит непрерывные и дискретные слагаемые.Для такого класса полиномов с помощью единого метода доказаны обобщенная формула следа, асимптотика сдвинутого определителя Форсайта и получена оценка порядка аппроксимации.

Ключевые слова: Полиномы Соболева, весовые пространства Соболева, обобщенная формула следа, сдвинутый определитель Форсайта..

Generalized Trace formula and asumptotics of the shifted Forsythe determinant for Sobolev polynomials[1]

B. P. Osilenker (Moscow, Russia)
b_osilenker@mail.ru

Systems of Sobolev polynomials are studied,the measure of orthogonality of which contains continuous and discrete components. Using a unified method , for this class of polynomials a generalized trace formula, asymptotics of the shifted Forsythe determinant are proved, and the estimates of the order of approximation are obtained.

Keywords: Sobolev polynomials, weighted Sobolev spaces, generalized trace formula, shifted Forsythe determinant, asymptotic of Forsythe determinant..

Рассмотрим весовое пространство Соболева $W^2_\mu(\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots \mu_n))$, в котором задано скалярное произведение

$$(f, g)_W = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\mu_k(x) \tag{1}$$

для натурального числа N, $\mu_k (0 \leqslant k \leqslant N)$– конечные положительные борелевские меры. На пространстве всех полиномов $\mathcal{P}$ существует полином $h(x), deg\, h \geqslant 1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что выполняется

$$(hp, q)_W = (p, hq)_W \ (p, q \in \mathcal{P})$$

тогда и только тогда, когда каждая из мер $\mu_k (1 \leqslant k \leqslant N)$ чисто точечна (атомична) с конечным числом точечных масс [1], при этом $deg\, h \geqslant N+1$. Обозначим экстремальный полином через $\pi_{N+1}(x)$, способ нахождения которого дан в [1].

Пусть E – носитель меры μ_0, состоит из конечного числа непересекающихся интервалов

$$E = \cup_{k=1}^{p} (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \text{где} (-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2p} < \infty),$$

и будем считать меру μ_0 абсолютно непрерывной на E относительно меры Лебега: $d\mu_0(x)/dx = \omega(x)$.

Рассмотрим линейное пространство со скалярным произведением

$$< f, g >= \int\limits_E f(x) g(x) \omega(x)\, dx + \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{N_k} R_{k,i} f^{(k)}(a_{k,i}) g^{(k)}(a_{k,i}), \qquad (2)$$

где $R_{k,i} \geqslant 0$, $k = 0, 1, \dots N$, $N_k \in \mathbb{N}$, $a_{k,i}$– вещественные корни полинома $\pi_{N+1}(x)$ и его производных.

Пусть $\{\hat{q}_n\}_{n=0}^{\infty}$— система полиномов Соболева, ортонормированных относительно скалярного произведения (1):

$$\hat{q}_n(x) = k(\hat{q}_n) x^n + l(\hat{q}_n) x^{n-1} + \dots,\ k(\hat{q}_n) > 0, \text{ где } n \in \mathbb{Z}_+ = 0, 1, 2, \dots,$$

$$< \hat{q}_n, \hat{q}_m >= \delta_{n,m}\, , \text{где } n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ортонормированные полиномы $\hat{q}_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению [1]

$$\pi_{N+1}(x) \hat{q}_n(x) = \sum_{j=0}^{N+1} d_{n,n+j} \hat{q}_{n+j}(x) + \sum_{j=1}^{N+1} d_{n,n-j} \hat{q}_{n-j}(x),$$

$$\text{где } n \in \mathbb{Z}_+,\ \hat{q}_{-j}(x) = 0,\ j = 1, 2, \dots;\ d_{n,s} = 0,\ s = 0, 1, \dots, n-1.$$

Следовательно, они задаются обобщенной якобиевой матрицей J порядка $2N + 3$.

Сдвинутым определителем Форсайта [2] назовем выражение

$$G_{n,r}(x) = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=n+1}^{n+j} d_{k,k-j} d_{k-j,k-j+r} \Delta_{k,j,r}(x), \qquad (3)$$

где

$$\Delta_{k,j,r}(x) = \hat{q}_k(x) \hat{q}_{k+r-j}(x) - \frac{d_{k+r,k}}{d_{k+r-j,k-j}} \hat{q}_{k-j}(x) \hat{q}_{k+r}(x) =$$

$$= \frac{1}{d_{k+r-j,k-j}} \begin{vmatrix} \hat{q}_k(x) & d_{k+r,k}\hat{q}_{k+r}(x) \\ \hat{q}_{k-j}(x) & d_{k+r-j,k-j}\hat{q}_{k+r-j}(x) \end{vmatrix},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+,\ r = 0,1,2\ldots,N+1,\ x \in E.$$

При $j = r = 1$ для ортогональных полиномов $p_n(x), n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих трехчленному рекуррентному соотношению, из соотношения (3) получаем сдвинутый определитель Турана [3].

Следующее утверждение устанавливает связь между обобщенной матрицей Якоби J и её спектральной мерой.

Теорема 1. *Пусть для ортонормированной системы полиномов Соболева $\{\hat{q}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеют место следующие предположения:*

1. *для рекуррентных коэффициентов* (2) *выполняются условия:*

$$(i) \lim_{m\to\infty} d_{m,m\pm j} = \lim_{m\to\infty} d_{m\pm j,m} = d_j^{(0)},\ j = 0,1,\ldots,N+1,\ m \in \mathbb{Z}_+;$$

$$(ii) \sum_{j=-(N+1)}^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} (|d_{k,k+j} - d_{k+r,k+j+r}| + |d_{k,k+r} - d_{k+j,k+r+j}|) < \infty;$$

2. *система $\{\hat{q}_n\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно ограничена на любом компактном подмножестве Kиз E:*

$$|\hat{q}_n(x)| \leqslant C,\ x \in K \subset E, n \in \mathbb{Z}_+;$$

3. *существует непрерывная функция $L_n(x), n \in \mathbb{Z}_+, x \in E$ такая,что для любой непрерывной функции f и произвольных фиксированных целых k, j выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \int_E f(x) q_{m+j}(x) q_{m+k}(x) \omega(x)\, dx = \int_E f(x)[L_{k-j}(x) + L_{j-k}(x)]\, dx.$$

Тогда равномерно на $K \subset E$ справедливы следующие утверждения:

1. *имеет место "обобщенная формула следа"*

$$\sum_{j=-(N+1)}^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} [d_{k,k+r} d_{k+r,k+r+j} - d_{k+j,k+j+r} d_{k+j,k}] \hat{q}_k(x) \hat{q}_{k+r+j}(x) =$$

$$= \frac{d_r^{(0)}}{\omega(x)} \sum_{j=1}^{N+1} j d_j^{(0)} \{[L_{j-r}(x) + L_{r-j}(x)] - [L_{j+r}(x) + L_{-(j+r)}(x)]\},$$

при этом ошибка аппроксимации на K имеет вид

$$|\sum_{j=-(N+1)}^{N+1}\sum_{k=0}^{n}[d_{k,k+r}d_{k+r,k+r+j}-d_{k+j,k+j+r}d_{k+j,k}]\hat{q}_k(x)\hat{q}_{k+r+j}(x)-$$

$$-\frac{d_r^{(0)}}{\omega(x)}\sum_{j=1}^{N+1}jd_j^{(0)}\{[L_{j-r}(x)+L_{r-j}(x)]-[L_{j+r}(x)+L_{-(j+r)}(x)]\}|\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=-(N+1)}^{N+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}(|d_{k+r,k+r+j}-d_{k,k+j}|+|d_{k+j,k+j+r}-d_{k,k+r}|),$$

где постоянная $C>0$ зависит лишь от K;

2. *асимптотика сдвинутого определителя Форсайта* (3)

$$\lim_{n\to\infty}G_{n,r}(x)=$$

$$=\frac{d_r^{(0)}}{\omega(x)}\sum_{j=1}^{N+1}jd_j^{(0)}\{[L_{j-r}(x)+L_{r-j}(x)]-[L_{j+r}(x)+L_{-(j+r)}(x)]\},$$

при этом верхняя ошибка аппроксимации на K имеет вид

$$|G_{n,r}(x)-\frac{d_r^{(0)}}{\omega(x)}\sum_{j=1}^{N+1}jd_j^{(0)}\{[L_{j-r}(x)+L_{r-j}(x)]-[L_{j+r}(x)+L_{-(j+r)}(x)]\}|\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=-(N+1)}^{N+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}(|d_{k+r,k+r+j}-d_{k,k+j}|+|d_{k+j,k+j+r}-d_{k,k+r}|),$$

где постоянная $C>0$ зависит лишь от K.

В качестве следствия получаем результаты работ [3]– [6] и решение задачи из обзора [7] о распространении формулы следа на обобщенные матрицы Якоби. Полученные результаты находят важное приложение в задаче восстановления абсолютно-непрерывной составляющей меры, заданной на множестве E, по ее обобщенной матрице Якоби (прямая задача спектрального анализа) [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Evans W. ,D., Littlejohn L. L., Marcellán F., Markett C., Ronveaux A.* On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials // SIAM J. Math. Anal., 1995. T. 26, P. 446–467.

[2] *Forsythe G. E.* Second order determinants of Legendre polynomials // Duke Math. J., 1951. Vol. 18, № 2. P. 361–371.

[3] *Van Assche W.* Asymptotics for orthogonal polynomials and three-term relations // Orthogonal polynomials: Theory and Practice, Kluwer: Dordrecht, 1990. P. 435–462.

[4] *Dombrowski J., Nevai P.* Orthogonal polynomials, measures and recurrence relations. // SIAM J. Math., 1986. № 17. P. 752–759.

[5] *Осиленкер Б. П.* Формула следа для полиномов Соболева // 6-ая Международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования". М : РУДН, 2023. С. 66–67.

[6] *Osilenker B. P.* Generalized trace formula and asymptotics of the averaged Turan determinant for orthogonal polynomials // J. Approx. Theory, 2006. № 141. P. 70–94.

[7] *Садовничий В. А.,Подольский В. Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 5. С. 89–156.

[8] *Nevai P.* Orthogonal polynomials, Recurrences, Jacobi matrices and measures // Progress in Approximation Theory, Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 79–104.

УДК 517.9

Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным функциям одной дифференциальной оператор-функции[1]

М. С. Пастухов (Саратов, Россия)
ritson67@outlook.com

В статье рассматривается обобщенная начально-граничная задача гиперболического типа. Находятся собственные значения и собственные функции соответствующей обыкновенной дифференциальной оператор функции. После проводится линеаризация рассматриваемой задачи и находится её резольвента. Строится функция Грина. В заключении формулируется теорема о разложении.

Ключевые слова: обобщенная начально-граничная задача гиперболического типа, функция Грина, теорема о разложении.

Благодарности: Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

Decomposition of the first component of a vector function by eigenfunctions of a differential operator function[1]

M. S. Pastukhov (Saratov, Russian)
ritson67@outlook.com

The article considers a generalized initial boundary value problem of hyperbolic type. The eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding ordinary differential operator of the function are found. After that, the linearization of the problem under consideration is carried out and its resolvent is found. The Green's function is being constructed. In conclusion, the decomposition theorem is formulated.

Keywords: generalized initial boundary value problem of hyperbolic type, Green's function, decomposition theorem.

Acknowledgements: This work was implemented in Saratov State University and supported by the Russian Science Foundation (project № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Введение

Рассмотрим обобщенную начально-граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t)=0 \qquad u_x(1,t)=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \tag{3}$$

где $(x,t)\in Q$, где $Q=[0,1]\times[0,+\infty)$; $p_1,p_2\in\mathbb{R}$, функции φ,ψ,f комплекснозначные, $\varphi,\psi\in L_1[0,1]$, $f\in L_1(Q_T)$ для любого фиксированного $T>0$, $Q_T=[0,1]\times[0,T]$ при $T>0$.

Далее используем определения и факты из [1], не оговаривая этого особо. Предполагается, что уравнение (1) гиперболического типа, то есть выполняется следующее условие $p_1^2-4p_2>0$, при этом корни ω_1,ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2+p_1\omega+p_2=0 \tag{4}$$

являются вещественными и различными, также предполагается, что

$$\omega_1<0<\omega_2$$

в данном случае оператор-функция (5) будет регулярной [1]. История рассматриваемого вопроса приведена в работах [2]-[3].

Теорема о разложении

С задачей (1)–(3) тесно связана оператор-функция $L(\lambda)$, действующая в $L_2[0,1]$

$$l(y,\lambda):=y''+\lambda p_1y'+\lambda^2p_2y, \qquad y(0)=y'(1)=0. \tag{5}$$

Для оператор-функции (5) найдём собственные функции и собственные значения. Для этого рассмотрим следующую задачу

$$L(\lambda)y=0. \tag{6}$$

Общее решение, уравнения $l(y,\lambda)=0$ задачи (6) имеет вид

$$y(x,\lambda)=C_1e^{x\omega_1\lambda}+C_2e^{x\omega_2\lambda}. \tag{7}$$

Учитывая краевые условия (5), находим собственные значения и собственные функции для оператор-функции $L(\lambda)$

$$\lambda_k=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\ln\frac{|\omega_1|}{\omega_2}+\frac{(2k+1)\pi i}{\omega_2-\omega_1}, \quad k\in Z, \tag{8}$$

$$y_k(x)=\left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2}\right)^{\frac{x\omega_1}{\omega_2-\omega_1}}e^{\frac{(2k+1)\pi ix\omega_1}{\omega_2-\omega_1}}-\left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2}\right)^{\frac{x\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}e^{\frac{(2k+1)\pi ix\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}. \tag{9}$$

Линеаризуем задачу (6), как это сделано в [4]. Пусть $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$, тогда краевая задача (6) перейдет в задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = 0$, где $\mathcal{L}$ — линейный оператор в пространстве вектор-функций $Z = (z_1, z_2)^T$, определяемый выражением

$$AZ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{p_1}{p_2}\frac{d}{dx} \end{pmatrix} Z,$$

и имеющий следующую область определения

$$D_{\mathcal{L}} = \{Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \ : \ z_1'', z_2' \in L_1[0,1], \ \ z_1(0) = z_1'(0) = 0\}.$$

Найдём резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda E)^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$. Для этого решим задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = F$, где $F = (f_1, f_2)^T$, где $f_1, f_2 \in L_2[0,1]$. Первая компонента $Z = \mathcal{R}_\lambda F$ является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = f_\lambda, \qquad z(0) = z'(1) = 0, \tag{10}$$

где $f_\lambda := -p_2 f_2 - p_1 f_1' - \lambda p_2 f_2$.

Для функции Грина задачи (10) справедлива формула

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)\Delta(\lambda)}\Big(\omega_2 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} +$$

$$+\omega_1 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))}\Big) - \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)} e^{\lambda\omega_1(x-\xi)}\chi(x-\xi) -$$

$$-\frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-\xi)}\chi(\xi - x), \tag{11}$$

где $\Delta(\lambda) = \omega_2 e^{\lambda\omega_2} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1}$, а $\chi(x)$ есть функция Хевисайда.

Если обозначить через R_λ резольвенту оператор-функцию $L(\lambda)$, а через $G(x,\xi,\lambda)$ её функцию Грина, то получим

$$z_1(x,\lambda) = (R_\lambda f_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f_\lambda(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\big(-p_2 f_2(\xi) - p_1 f_1'(\xi) - p_2\lambda f_1(\xi)\big)\, d\xi. \tag{12}$$

Обозначим через γ_k (как это было сделано в [5]) окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Обозначим

$$I_n = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-n}^{n}\int_{\gamma_k}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f_\lambda(\xi)\,d\xi\,d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f_\lambda(\xi)\,d\xi\,d\lambda, \qquad (13)$$

где $\Gamma_n,\ n\in\mathbb{N}$, есть кусочно круговые контуры, отстоящие от чисел λ_k на расстояние не меньшее некоторого достаточно малого фиксированного числа $\delta_1 > 0$, между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k и имеют место оценки:

$$C_1 n < \text{длина } \Gamma_n < C_2 n \quad (0 < C_1 < C_2 < +\infty). \qquad (14)$$

Из формул (8) следуют, что такие константы в оценках (14) действительно существуют.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $f_1 \in W_p^1[0,1]$ $(p>1)$, $f_2 \in L_p[0,1]$, $f_1(0)=0$, *то*

$$I_n(x) = f_1(x) + o_n(1), \qquad (15)$$

где $o_n(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *равномерно по* $x\in[0,1]$.

Теорема 1 используется для доказательства теоремы о единственности классического решения для задачи (1)–(3) и получении формулы для этого решения в виде контурного интеграла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы // М. : Наука, 1969. — 528 с.

[2] *Рыхлов В. С.* Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, №2. С. 342–363.

[3] *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2023, том 226, С. 89–107

[4] *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф. — 2013. — Т. 13. — № 1. — С. 21–26.

[5] *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 183–194.

УДК 517.5

Периодические интерполяционно-ортогональные n-раздельные базисы всплесков[1]

Е. А. Плещева (Екатеринбург, Россия)
eplescheva@gmail.com

В работе рассматриваются ортонормированный КМА на основе нескольких масштабирующих функций и соответствующие всплески. На основе такого КМА по ортогональным маскам масштабирующих функций строятся маски новых масштабирующих функций, удовлетворяющие условию интерполяционности. Сформулированы условия на маски масштабирующих функций, необходимые и достатоточные для того, чтобы сдвиги полученной с использованием таких масок масштабирующих функций образовывали интерполяционно-ортогональную систему на $\mathbb{R}$. Построены n-раздельные интерполяционно-ортогональные базисы кратномасштабного анализа и всплесков на периоде.

Ключевые слова: ортогональный всплеск, интерполяционный всплеск, масштабирующая функция, базис, кратномасштабный анализ, маска масштабирующей функции.

Periodic interpolating-orthogonal n-separate wavelet bases[1]

E. A. Pleshcheva (Ekaterinburg, Russia)
eplescheva@gmail.com

The paper considers an orthonormal MRA based on several scaling functions and the corresponding wavelets. We construct the masks of new scaling functions satisfying the interpolation condition. The conditions for masks of scaling functions are formulated, which are necessary and sufficient to ensure that the shifts of scaling functions obtained using such masks form an interpolation-orthogonal system on $\mathbb{R}$. The interpolation-orthogonal bases of n-separate multiresolution analysis and wavelets on the period are constructed.

Keywords: orthogonal wavelet, interpolating wavelet, scaling function, basis, multiresolution analysis, mask of scaling function.

Введение

В работе рассматривается построение периодических интерполяционно-ортогональных базисов всплесков на основе нескольких масштабирующих функций. Построение базисов всплесков, как и в классическом случае, начнем с построения кратномасштабного анализа.

Определение. *Рассмотрим n последовательностей вложенных друг в друга замкнутых подпространств пространства $L^2(\mathbb{R})$*

$$\ldots \subset V_{-1}^n \subset V_0^1 \subset V_1^2 \subset V_2^3 \subset \cdots \subset V_{n-1}^n \subset V_n^1 \subset V_{n+1}^2 \subset \cdots, \qquad (1)$$

$$\cdots \subset V_{-1}^1 \subset V_0^2 \subset V_1^3 \subset V_2^4 \subset \cdots \subset V_{n-1}^1 \subset V_n^2 \subset V_{n+1}^3 \subset \cdots \qquad (2)$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\cdots \subset V_{-1}^{n-1} \subset V_0^n \subset V_1^1 \subset V_2^2 \subset \cdots \subset V_{n-1}^{n-1} \subset V_n^n \subset V_{n+1}^1 \subset \cdots, \qquad (3)$$

Назовем эту конструкцию n-раздельным кратномасштабным анализом (n-КМА) пространства $L^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:
а) $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^1} = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^2} = \cdots = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^n} = L^2(\mathbb{R})$;
б) $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^1 = \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^2 = \cdots = \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^n = \{0\}$;
в) $f(x) \in V_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V_j^s \ \ \forall j, l \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;
г) $f(x) \in V_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j^s \ \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;
д) найдутся такие функции $\varphi^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, что множества их сдвигов $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированные базисы пространств V_0^s, а $\{\varphi_{j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированные базисы пространств $V_j^s, j \in \mathbb{Z}, s = 1, \ldots, n$.

Применение n-раздельных масштабирующих функций к решению систем дифференциальных уравнений рассматривается в статье [1].

Вложения (1)–(3) выполняются при выполнении масштабирующих соотношений:

$$\varphi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x), \qquad (4)$$

где ряд $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s}\varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$ сходится в $L^2(\mathbb{R})$, $\{\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$p_s = \begin{cases} s+1, & s = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1, & s = n; \end{cases}$$

Подпространства всплесков W_j^s, удовлетворяющие условиям:
1) $V_j^s \bigoplus W_j^s = V_{j+1}^{p_s}$; 2) $V_j^s \perp W_j^s$, $j \in \mathbb{Z}$, $s = 1, \ldots, n$, порождаются функциями-всплесками $\{\psi_{j,k}^s(x) = 2^{j/2}\psi^s(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где

$$\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{\nu-1} \overline{h_{1-\nu}^{s,p_s}} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Для того, чтобы система $\{\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ была ортонормированной, а система $\{2^{-j/2}\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega - k)|^2 = 1, \ \ \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\omega - k) = 1.$$

В работе [2] Ю.Н. Субботин и Н.И. Черных получили способ преобразовать масштабирующую функцию Мейера таким образом, чтобы новая масштабирующая функция порождала интерполяционно-ортогональную систему сдвигов. В статье [3] нами получен способ модификации масок масштабирующих функций, образующих n-раздельный КМА, таким образом, чтобы новые построенные по ним масштабирующие функции порождали интерполяционно-ортогональные базисы.

Необходимые и достаточные условия интерполяционности

Приведем необходимые условия интерполяционности и ортогональности систем сдвигов масштабирующих функций. Преобразование Фурье масштабирующих соотношений (4) выглядит следующим образом:

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) = m^{s,p_s}(\frac{\omega}{2})\widehat{\varphi^{p_s}}(\frac{\omega}{2}), s = 1, \ldots, n,$$

где маски $m^{s,p_s}(\omega)$ масштабирующих функций определяются следующей формулой:

$$m^{s,p_s}(\omega) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} e^{2\pi i\nu\omega}_{,} \quad s = 1, \ldots, n.$$

Если системы $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированные и интерполяционные, то для масок выполняются соотношения:

$$|m^{s,p_s}(\omega)|^2 + |m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1, \ m^{s,p_s}(\omega) + m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2}) = 1, s = 1, \ldots, n.$$

Пусть имеется ортонормированный n-раздельный КМА с масками $m^{s,p_s}(\omega), \ s = 1, \ldots, n$. Преобразуем маски следующим образом:

$$m_I^{s,p_s}(\omega) = |m^{s,p_s}(\omega)|^2 + i \cdot sign(\sin 2\pi\omega)|m^{s,p_s}(\omega)m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2})|. \qquad (5)$$

Обозначим через $M_I^s(\omega)$ следующие произведения:

$$M_I^1(\omega) = m_I^{1,2}(2^{n-1}\omega) \cdot m_I^{2,3}(2^{n-2}\omega) \cdot \ldots \cdot m_I^{n-1,n}(2\omega) \cdot m_I^{n,1}(\omega),$$

$$\ldots,$$

$$M_I^n(\omega) = m_I^{n,1}(2^{n-1}\omega) \cdot m_I^{1,2}(2^{n-2}\omega) \cdot \ldots \cdot m_I^{n-2,n-1}(2\omega) \cdot m_I^{n-1,n}(\omega).$$

Приведем достаточные условия интерполяционности:

Теорема. *Пусть для масок* $m^{s,p_s}(\omega), s = 1,\ldots,n$, *выполняются условия*:

$$|m^{s,p_s}(\omega)|^2 + |m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1, s = 1,\ldots,n.$$

Определим маски $m_I^{s,p_s}(\omega), s = 1,\ldots,n$, *формулами* (5). *Пусть при этом функции* $\widehat{\varphi^s}(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty} M^s(\frac{\omega}{2^{nj}}) \in L(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$, $|m^{s,p_s}(\omega)| \geq C_0 > 0$ *при* $|\omega| \leq 1/6$ *и имеют конечное число нулей на* $[-1/4;1/4]\backslash[-1/6;1/6]$. *Тогда при целых* j *и* $s = 1,\ldots,n$ *системы функций* $\{\varphi_{I,j,k}^s : k \in \mathbb{Z}\}$, *где* $\widehat{\varphi_I^s} := \prod_{j=1}^{\infty} M_I^s(\frac{\omega}{2^{nj}})$, *являются ортонормированными в пространстве* $L^2(\mathbb{R})$, *интерполяционными на сетке* $\{x_{j,r} = r/2^j : r \in \mathbb{Z}\}$. *Последовательности* V_j^s *образуют* n*-раздельный КМА пространства* $L^2(\mathbb{R})$.

Периодизация n-раздельных масштабирующих функций и всплесков

Построим по системам $\{\varphi_{I,j,k}^s(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}, \{\psi_{I,j,k}^s(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}, s = 1,\ldots,n$, периодические масштабирующие функции и всплески:

$$\Phi_{j,k}^{I,s}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{I,j,k}^s(x-\nu);\ \Psi_{j,k}^{I,s}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \psi_{I,j,k}^s(x-\nu).$$

Пространства $\mathcal{V}_j^{I,s}$, $\mathcal{W}_j^{I,s}$ определим следующим образом:

$$\mathcal{V}_j^{I,s} := \overline{Span\{\Phi_{j,k}^{I,s}(x), k = 0,1,\ldots,2^j-1\}},$$

$$\mathcal{W}_j^{I,s} := \overline{Span\{\Psi_{j,k}^{I,s}(x), k = 0,1,\ldots,2^j-1\}},\ s = 1,\ldots,n.$$

Пространства $\mathcal{V}_j^{I,s}$ образуют периодический n-раздельный интерполяционно-ортогональный КМА.

Функции $\Phi_{j,k}^{I,s}(x), \Psi_{j,k}^{I,s}(x), j = 0,1,2,\ldots, k = 0,\ldots,2^j-1$ могут быть представлены в виде:

$$\Phi_{j,k}^{I,s}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{-j/2}\widehat{\varphi}_I^s(\frac{\nu}{2^j})e^{2\pi i\nu(x-k/2^j)};\ \Psi_{j,k}^{I,s}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{-j/2}\widehat{\psi}_I^s(\frac{\nu}{2^j})e^{2\pi i\nu(x-k/2^j)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Zakharov V.G.* Reproducing solutions to PDEs by scaling functions// International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2020. Vol. 19, No. 02. 2050017.

[2] *Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных* Интерполяционно-ортогональные системы всплесков// Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14. № 3. С. 153—161.

[3] *Е. А. Плещева* Интерполяционно-ортогональные базисы n-раздельных КМА и всплесков// Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28. № 4. С. 154—163.

УДК 517.588; 517.589

Специальные классы решений для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения[1]

С. В. Подклетнова (Самара, Россия)

podkletnova.sv@ssau.ru

В статье представлены специальные классы решений для различных значений параметров нового уравнения в частных производных гиперболического типа. Рассматриваемое уравнение является объединением известного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, заданного в характеристических координатах, и его образа относительно оси ординат. Настоящая работа является продолжением исследований уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, проведённого профессорами Волкодавовым В.Ф. и Николаевым Н.Я. в работе [1], а также автора представленной статьи в работах [2] и [3]. Решения, выведенные в поставленных классах, значительно упрощают дальнейшее изучение как рассматриваемого уравнения, так и уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, уравнение Эйлера-Дарбу, специальные классы решений, уравнение в частных производных, дифференциальное уравнение.

Special Classes of Solutions for the Euler-Darboux Equation with Two Degeneracy Lines[1]

S. V. Podkletnova (Samara, Russia)

podkletnova.sv@ssau.ru

The article presents the special classes of solutions for different parameter values of the new partial differential equation of hyperbolic type. The equation under consideration is a unification of the well-known Euler-Poisson-Darboux equation, given in characteristic coordinates, and its image with respect to the ordinate axis. This work is a continuation of the studies of the Euler-Poisson-Darboux equation conducted by Professors V.F. Volkodavov and N.Y. Nikolaev in [1], as well as by the author of this article in [2] and [3]. The solutions derived in the classes and given in the article greatly simplify the further study of both the equation under consideration and the Euler-Poisson-Darboux equation.

Keywords: hyperbolic equation, Euler-Darboux equation, special classes of solutions, partial differential equation, differential equation.

Введение

Рассмотрим уравнение

$$L\left(u\right) \equiv \left(\xi \cdot \operatorname{sgn} \xi - \eta\right) \cdot u_{\xi\eta} - b \cdot u_{\xi} + a \cdot \operatorname{sgn} \xi \cdot u_{\eta} = 0. \tag{1}$$

При $\xi > 0$ уравнение (1) является известным уравнением Эйлера-Дарбу:

$$L(u) \equiv (\xi - \eta) \cdot u_{\xi\eta} - b \cdot u_\xi + a \cdot u_\eta = 0, \tag{2}$$

а при отрицательных значениях ξ (1) тождественно уравнению

$$L(u) \equiv (\xi + \eta) \cdot u_{\xi\eta} + b \cdot u_\xi + a \cdot u_\eta = 0,$$

представляющему собой образ уравнения (2) относительно оси ординат η, поэтому назовём уравнение (1) уравнением Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения.

Для уравнения (1) в областях $G_- = \{(\xi, \eta)|\, 0 < -\xi < \eta < h\}$ и $G_+ = \{(\xi, \eta)|\, 0 < \xi < \eta < h\}$ в работах [1], [2], [3] были рассмотрены задачи Коши и видоизменённые задачи Коши, решения которых были использованы для определения и вывода специальных классов решений для уравнения (1) с различными ограничениями на параметры. Полученные классические решения компактны и имеют удобное представление для использования с целью применения для решения различных краевых задач для рассматриваемого уравнения. Ниже приведём теоремы, в которых запишем эти решения для всех возможных значений параметров уравнения (1). Первые две теоремы были опубликованы в работе [1] для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и добавлены в текст настоящей работы для полноты изложения материала, но уже для уравнения (1). Такое изменение текста теорем возможно в силу того, что уравнение (2) при указанных в теоремах 1 и 2 условиях тождественно уравнению (1). Для вывода формул и доказательства теорем были использованы определения и тождества, приведённые, например, в работе [4].

Определения специальных классов решений

В работе [1] были выведены два класса решений для уравнения Эйлера-Дарбу с параметрами одинаковых знаков. Для полноты изложения материала приведём здесь их определения, определения и доказательства теорем существования и единственности в остальных классах принадлежат автору настоящей статьи.

Определение 1. *Функция $u(\xi, \eta)$ принадлежит классу ${}_0R_+^h$ в области G_+, если она определяется формулой*

$$\begin{gathered} u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1-\alpha, 1-\beta)} \int\limits_\xi^\eta \frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^\alpha (\eta - t)^\beta} dt + \\ + \frac{(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)} \int\limits_\xi^\eta \frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}} dt, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\tau_+(\xi) = \int\limits_0^{\xi} T_+(t)(\xi - t)^{-\alpha-\beta} dt,\ T_+(\xi) \in C^1_{(0,h)} \cap L_{[0,h]}.$$

Здесь и далее формула, через которую определяется класс решений (в данном случае формула (3)), является решением соответствующей задачи Коши для уравнения (1).

Определение 2. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса ${}_0R^+$ в области G_+, если она определяется формулой*

$$u(\xi,\eta) = \frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1+\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{-\beta}} dt +$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-1}}{\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\alpha}} dt +$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\tau'_+(t)\left[(\alpha+\beta)(t-\xi)+\alpha(\xi-\eta)\right]}{\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\alpha}} dt,$$

где

$$\tau_+(\xi) = \int\limits_0^{\xi} T_+(t)(\xi - t)^{\alpha+\beta} dt,\ T_+(\xi) \in C_{(0,h)} \cap L_{[0,h]}.$$

Определение 3. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса ${}_0R^h_-$ в области G_-, если она определяется формулой*

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)} \int\limits_{-\xi}^{\eta} \frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{\beta}} dt +$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{1-\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int\limits_{-\xi}^{\eta} \frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}} dt,$$

где

$$\tau_-(\xi) = \int\limits_{\xi}^{0} T_-(t)(t - \xi)^{-\alpha-\beta} dt,\ T_-(\xi) \in C^1_{(-h,0)} \cap L_{[-h,0]}.$$

Определение 4. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса ${}_0R_-$*

в области G_-, если она определяется формулой

$$u(\xi,\eta) = -\frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1+\beta)} \int\limits_{-\xi}^{\eta} \frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{-\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\alpha+\beta-1}}{\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)} \int\limits_{-\xi}^{\eta} \frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)} \int\limits_{-\xi}^{\eta} \frac{\tau'_-(-t)\left[(\alpha+\beta)(t+\xi)-\alpha(\xi+\eta)\right]}{\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{-\alpha}}dt,$$

где

$$\tau_-(\xi) = \int\limits_{\xi}^{0} T_-(t)(t-\xi)^{\alpha+\beta}dt,\ T_-(\xi) \in C_{(-h,0)} \cap L_{[-h,0]}.$$

Определение 5. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса R^h_{1+} в области G_+, если она определяется формулой*

$$u(\xi,\eta) = -\frac{1}{2(\alpha-\beta-1)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1+\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}}{\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{1-\alpha1}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\tau'_+(t)}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}}dt,$$

где

$$\tau_+(\xi) = \int\limits_{0}^{\xi} T_+(t)(\xi-t)^{\beta-\alpha}dt,\ T_+(\xi) \in C^1_{(0,h)} \cap L_{[0,h]}. \tag{4}$$

Определение 6. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{(\alpha-\beta-1)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1+\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}}{\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)} \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\tau'_+(t)}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{2+} в области G_+, если функция $\tau_+(\xi)$ определяется формулой (4), где $T_+(\xi) \in C^1_{(0,h)} \cap L_{[0,h]}$.

Определение 7. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса R^h_{1-} в области G_-, если она определяется формулой*

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2(\alpha-\beta-1)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1+\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}}dt-$$
$$-\frac{(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}}{\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}}dt,$$

где

$$\tau_-(\xi)=\int\limits_{\xi}^{0}T_-(t)\,(t-\xi)^{\beta-\alpha}dt,\ T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}. \qquad (5)$$

Определение 8. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{(\alpha-\beta-1)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1+\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}}dt-$$
$$-\frac{(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}}{\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{2-} в области G_-, если функция $\tau_-(\xi)$ определяется формулой (5), где $T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Определение 9. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{2(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1-\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau'_+(t)}{(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{3+} в области G_+, если

$$\tau_+(\xi)=\int\limits_{0}^{\xi}T_+(t)\,(\xi-t)^{\alpha-\beta}dt,\ T_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}. \qquad (6)$$

Определение 10. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}\,(1+\alpha,1-\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}}{\mathrm{B}\,(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}\,(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau'_+(t)}{(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{4+} в области G_+, если функция $\tau_+(\xi)$ определяется формулой (6), где $T_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Определение 11. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса R^h_{3-} в области G_-, если она определяется формулой*

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}\,(1+\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}}{\mathrm{B}\,(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}\,(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-(-t)}{(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt,$$

где

$$\tau_-(\xi)=\int\limits_{\xi}^{0}T_-(t)\,(t-\xi)^{\alpha-\beta}dt,\ T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}. \qquad (7)$$

называется решением класса R^h_{4+} в области G_+, если функция $\tau_+(\xi)$ определяется формулой (6), где $T_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Определение 12. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}\,(1+\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+$$
$$+d\tfrac{(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}\,(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-(-t)}{(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{4-} в области G_-, если функция $\tau_-(\xi)$ определяется формулой (7), где $T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Классические решения уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения

Теорема 1. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_{-}(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_{-}(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt,$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=-\alpha$, $b==-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1$ *класса* ${}_0R_{-}$ *в области* G_{-}, *если* $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in C_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 2. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{0}^{\xi}T_{+}(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}N_{+}(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt,$$

является классическим решением класса ${}_0R^{+}$ *уравнения (1) при* $a=-\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1$ *в области* G_{+}, *если* $T_{+}(\xi),\ N_{+}(\xi)\in\in C^{2}_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 3. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_{-}(t)(t-\xi)^{-\alpha}(\eta+t)^{-\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_{-}(t)(\xi-t)^{-\alpha}(\eta+t)^{-\beta}dt,$$

является классическим решением класса ${}_0R^{h}_{-}$ *уравнения (1) в области* G_{-}, *если* $a=\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1$ $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in C^{1}_{(-h,0)}\cap\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 4. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_{-}(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_{-}(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt,$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=-\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1$ *класса* ${}_0R_{-}$ *в области* G_{-}, *если* $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in\in C_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 5. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{0}^{\xi}T_{+}(t)(\xi-t)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}N_{+}(t)(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt,\quad(8)$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta<1$ *класса* R^h_{1+} *в области* G_+, *если* $T_+(\xi),\ N_+(\xi)\in \in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 6. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой (8), является классическим решением уравнения (1) при* $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta$, $\beta-\alpha<1$ *класса* R^h_{2+} *в области* G_+, *если* $T_+(\xi),\ N_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 7. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_-(t)(t-\xi)^{-\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_-(t)(\xi-t)^{-\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt,\quad (9)$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta<1$ *класса* R^h_{1-} *в области* G_-, *если* $T_-(\xi),\ N_-(\xi)\in \in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 8. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой (9), является классическим решением уравнения (1) при* $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta$, $\beta-\alpha<1$ *класса* R^h_{2-} *в области* G_-, *если* $T_-(\xi),\ N_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 9. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{0}^{\xi}T_+(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}N_+(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt,\quad (10)$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \beta-\alpha<1$ *класса* R^h_{3+} *в области* G_+, *если* $T_+(\xi),\ N_+(\xi)\in \in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 10. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой (10), является классическим решением уравнения (1) при* $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta$, $\alpha-\beta<1$ *класса* R^h_{4+} *в области* G_+, *если* $T_+(\xi),\ N_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 11. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_-(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta+t)^{-\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_-(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta+t)^{-\beta}dt,\quad (11)$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \beta-\alpha<1$ *класса* R^h_{3-} *в области* G_-, *если* $T_-(\xi),\ N_-(\xi)\in \in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 12. *Функция* $u\left(\xi,\eta\right)$*, определяемая формулой (11), является классическим решением уравнения (1) при* $a=-\alpha$*,* $b=\beta$*,* $0<\alpha$*,* β*,* $\alpha-\beta<1$ *класса* R_{4-}^{h} *в области* G_{-}*, если* $T_{-}\left(\xi\right)$*,* $N_{-}\left(\xi\right)\in C_{(-h,0)}^{1}\cap L_{[-h,0]}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Волкодавов В. Ф. Николаев Н. Я.* Краевые задачи для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу [Текст] : учебное пособие к спецкурсу "Уравнения математической физики". Куйбышев : КГПИ, 1984. 80 с.

[2] *Подклетнова С. В.* Задача Коши для некоторых значений параметров уравнения Эйлера-Дарбу // Доклады 51-й научной конференции СГПУ. Самара : СГПУ, 1997. С. 66–75.

[3] *Подклетнова С. В.* Ряд краевых задач для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения // Материалы международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа". Уфа : 2023. С. 100–103.

[4] *Градштейн И. С. Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Физматгиз, 1962. 1108 с.

УДК 514.01

Функциональные уравнения типа Йенсена-Коши от функций многих переменных[1]

И. В. Поликанова (Барнаул, Россия)

Anirix1@yandex.ru

В статье приводятся решения в классе непрерывных функций функциональных уравнений, напоминающих по виду четыре уравнения Коши. Неизвестные функции в них зависят от многих переменных. Одна часть уравнения представляет собой композицию искомой функции с мультифункцией, зависящей от произвольного гомеоморфизма. Заменой функции уравнения сводятся к уравнению Йенсена. Многочисленные следствия обусловлены возможностью подстановки в уравнения различных гомеоморфизмов.

Ключевые слова: функциональное уравнение от функций многих переменных, функциональное уравнение Йенсена, функциональные уравнения Коши, мультифункция.

Functional equations of Jensen-Cauchy type for functions of several variables[1]

I. V. Polikanova (Barnaul, Russia)

Anirix1@yandex.ru

The article presents solutions in the class of continuous functions of functional equations that resemble the four Cauchy equations in appearance. The unknown functions in them depend on many variables. One part of the equation is the composition of the desired function with a multifunction depending on an arbitrary homeomorphism. By replacing the function, the equations are reduced to the Jensen equation. Numerous consequences are due to the possibility of substituting various homeomorphisms into equations.

Keywords: functional equation of functions of several variables, Jensen functional equation, Cauchy functional equations, multifunction.

Введение

Применение мультифункций позволило существенно расширить класс функциональных уравнений, имеющих решения в явном виде. Так, ранее автор нашёл решения функциональных уравнений Коши четырёх типов, Йенсена и Лобачевского от функций многих переменных в классе непрерывных функций [1]. Известные решения аддитивного и экспоненциального уравнений Коши и Йенсена для функций многих переменных [2] автором получены принципиально новым способом.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-ая декартова степень поля действительных чисел $\mathbb{R}$, её элементы будем называть *мультиаргументами* и обозначать жирным шрифтом в отличие от вещественных координат: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. *Мультифункцией от k мультиаргументов* $\mathbf{x}_{(s)} = (x_{(s)1}, x_{(s)2}, ..., x_{(s)n})$, $s = 1, ..., k$, порождённой функцией $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, зависящей от k действительных аргументов, назовём отображение типа $\mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$, определённое по правилу:

$$f\left(\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}\right) = \left(f(x_{(1)1}, x_{(2)1}, ..., x_{(k)1}),\ \dots\ , f(x_{(1)n}, x_{(2)n}, ..., x_{(k)n})\right).$$

Например: $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$, $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n), \quad \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = (x_1^{b_1}, x_2^{b_2}, ..., x_n^{b_n}),$$

$$log_a\mathbf{x} = (log_a x_1, log_a x_2, ..., log_a x_n), \quad a^{\mathbf{x}} = (a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_n}).$$

Композиции и суперпозиции мультифункций с отображениями и мультифункциями определяются так же и при тех же условиях, как композиции и суперпозиции отображений. Мультифункции наследуют многие свойства порождающих их функций, например, инъективность, сюръективность (если они определены на декартовой степени некоторого множества), непрерывность, а также многие их специфические свойства. Кроме того, если порождающая функция $f(x)$ одного аргумента имеет обратную функцию $f^{-1}(x)$, то её мультифункция $f(\mathbf{x})$ имеет обратную мультифункцию $f^{-1}(\mathbf{x}) = (f^{-1}(x_1), ..., f^{-1}(x_n))$. Так, обратной мультифункцией к $log_a\mathbf{x}$ является $a^{\mathbf{x}}$. Поэтому $a^{log_a\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, $\quad log_a a^{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.

Введём обозначения:

$$\mathbf{b} * \mathbf{x} = b_1 x_1 + ... + b_n x_n, \quad \left(\mathbf{x}^{\mathbf{b}}\right)_{\odot} = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot ... \cdot x_n^{b_n}.$$

В настоящей работе рассматриваются функциональные уравнения, напоминающие одновременно уравнения Коши:

$\mathbf{K}_I$. $\quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (решения: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * \mathbf{x}$),
$\mathbf{K}_{II}$. $\quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y})$ (решения: $f(\mathbf{x}) = a^{\mathbf{b}*\mathbf{x}}$),
$\mathbf{K}_{III}$. $\quad f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (решения: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * log_a\mathbf{x}$),
$\mathbf{K}_{IV}$. $\quad f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y})$ (решения: $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}})_{\odot}$)

и уравнение Йенсена

$\mathbf{J}$. $\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)\mathbf{f}(\mathbf{y})$ (решения: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0$),

и сводящиеся к последнему заменой неизвестной функции. Подчеркнём, что неизвестная функция в уравнениях – не мультифункция, а обычная функция n аргументов, мультифункции используются как подстановочные в неё функции.

Уравнения типа Коши-Йенсена

Всюду ниже $\lambda \in (0,1)$ – фиксированное действительное число, $k : \tilde{Q} \to Q$ – гомеоморфизм некоторого подмножества $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^n$ на подмножество $Q \subset \mathbb{R}^m$, $k^{-1} = (k_1(\mathbf{x}), ..., k_n(\mathbf{x}))$ – обратный гомеоморфизм. Решения функциональных уравнений ищутся в классе непрерывных функций, определённых на множестве Q.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{Q}$ – замкнутое, с непустой внутренностью, выпуклое множество. Единственными решениями обобщённого аддитивного уравнения Йенсена-Коши*

$$\boldsymbol{JK}_I. \qquad f\left(k(\lambda k^{-1}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)k^{-1}(\boldsymbol{y}))\right) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

являются аффинные функции:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0 = b_1 k_1(\boldsymbol{x}) + ... + b_n k_n(\boldsymbol{x}) + b_0 \tag{2}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ и $b_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{Q}$ – замкнутое, с непустой внутренностью, выпуклое множество. Единственными решениями обобщённого экспоненциального уравнения Йенсена-Коши*

$$\boldsymbol{JK}_{II}. \qquad f\left(k(\lambda k^{-1}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)k^{-1}(\boldsymbol{y}))\right) = f(\boldsymbol{x})^{\lambda} f(\boldsymbol{y})^{1-\lambda} \tag{3}$$

являются постоянная $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ и функции вида:

$$f(\boldsymbol{x}) = a^{\boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0} = a^{b_1 k_1(\boldsymbol{x}) + ... + b_n k_n(\boldsymbol{x}) + b_0} \tag{4}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ и любых действительных числах b_0, $a > 0$, $a \neq 1$.

Теорема 3. *Пусть $\tilde{Q} = P^n \subset \mathbb{R}^n$, где P – числовой интервал одного из видов $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $(0, c]$, $[c, d]$, $[c, +\infty)$, $c, d \in \mathbb{R}_+$. Единственными решениями обобщённого логарифмического уравнения Йенсена-Коши*

$$\boldsymbol{JK}_{III}. \qquad (f \circ k)((k^{-1}(\boldsymbol{x}))^{\lambda} (k^{-1}(\boldsymbol{y}))^{1-\lambda}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \tag{5}$$

являются функции вида:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * log_a k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0 = b_1 log_a k_1(\boldsymbol{x}) + ... + b_n log_a k_n(\boldsymbol{x}) + b_0 \tag{6}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ и любых действительных числах b_0, $a > 0$, $a \neq 1$.

Теорема 4. *Пусть $\tilde{Q} = P^n$, где P – числовой интервал одного из видов $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$. Единственными решениями обобщённого степенного уравнения Йенсена-Коши*

$$\boldsymbol{JK}_{IV}. \qquad (f \circ k)((k^{-1}(\boldsymbol{x}))^{\lambda}(k^{-1}(\boldsymbol{y}))^{1-\lambda}) = f(\boldsymbol{x})^{\lambda} f(\boldsymbol{y})^{1-\lambda} \tag{7}$$

являются функции вида

$$f(\boldsymbol{x}) = c\left(k^{-1}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{b}}\right)_{\odot} = c \cdot k_1(\boldsymbol{x})^{b_1} \cdot \ldots \cdot k_n(\boldsymbol{x})^{b_n} \tag{8}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ и $c > 0$.

Заключение

Видоизменённые уравнения (1), (3), (5), (7) в результате замены λ и $(1-\lambda)$ на произвольные действительные числа $p \neq 0$ и $q \neq 0$ имеют решения соответственно (2), (4), (6) при $b_0 = 0$ и (8) при $c = 1$. При $p = q = 1$ и тождественном гомеоморфизме уравнения принимают вид уравнений Коши. Подставляя в формулы различные гомеоморфизмы, получаем многочисленные следствия. Например, следующее

Следствие. *Обобщённые уравнения Йенсена-Коши $\boldsymbol{JK}_I - \boldsymbol{JK}_{IV}$ при тождественном гомеоморфизме и $\lambda = \frac{1}{2}$ принимают вид:*

$$f\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}\right) = \frac{f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})}{2},$$

$$f\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}\right) = \sqrt{f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y})},$$

$$f\left(\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}\right) = \frac{f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})}{2},$$

$$f\left(\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}\right) = \sqrt{f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y})}$$

и имеют соответственно решения:

$$\mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0, \qquad a^{\mathbf{b}*\mathbf{x}+b_0}, \qquad \mathbf{b} * log_a \mathbf{x} + b_0, \qquad c \cdot (\mathbf{x}^{\mathbf{b}})_{\odot}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Polikanova I. V.* Functional equations of Cauchy, Jensen, Lobachevsky in functions of several variables // Международная конференция по геометрическому анализу, посвящённая памяти академика Ю.Г. Решетняка, 23-29 октября 2022 г.: Тез.докл. Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2022. С. 138.

[2] *Ацель Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 432 с.

УДК 517.52

Оценка модуля производной суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов[1]

А. Ю. Попов (Москва, Россия)

station@list.ru

При небольших положительных значениях x получены оценки сверху и снизу производной суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов. Оценка сверху асимптотически неулучшаема, оценка снизу точна по порядку.

Ключевые слова: синус-ряд, выпуклая последовательность коэффициентов, двусторонние оценки.

Estimation of the modulus of the derivative of a sum of a sine series with a convex sequence of coefficients[1]

A. Yu. Popov (Moscow, Russia)

station@list.ru

For small positive values of x, upper and lower bounds are obtained for the derivative of the sum of a sine series with a convex sequence of coefficients. The upper bound is asymptotically best possible, and the lower bound is order-sharp.

Keywords: sine series, convex sequence of coefficients, two-sided estimates.

Рассматриваются синус-ряды

$$g(b;x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \tag{1}$$

последовательности коэффициентов $b=\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ которых монотонно стремятся к нулю:

$$b_1>0, \quad b_{k+1}\le b_k \quad \forall k\in\mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k=0. \tag{2}$$

Класс всех последовательностей b, удовлетворяющих (2), обозначим $\mathfrak{M}$. Нас в основном будет интересовать подкласс $\mathfrak{M}$, состоящий из выпуклых последовательностей (обозначим его $\mathfrak{M}_1$), то есть таких, что

$$b_k-2b_{k+1}+b_{k+2}\ge 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Оценкам сумм рядов (1) с коэффициентами из $\mathfrak{M}$ (или из $\mathfrak{M}_1$) посвящено довольно много работ, начиная с [1]. Упомянем недавние работы [2], [3], где имеется библиография по этой тематике. Положим

$$m(x) = \left[\frac{\pi}{x}\right], \; V(b;x) = \sum_{k=1}^{m(x)} k\, b_k, \; 0 < x \le \pi.$$

В [4] была доказана оценка сверху

$$g(b;x) < x\,V(b;x) \quad \forall x \in (0,\, \pi) \quad \forall b \in \mathfrak{M}, \tag{3}$$

дополненная в [3] оценками снизу ($n \in \mathbb{N},\; n \ge 2$)

$$g\left(b; \frac{2\pi}{n}\right) \ge 0, \;\; g(b;x) \ge -\frac{b_n}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{4}\right), \;\; x \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right) \quad \forall b \in \mathfrak{M}.$$

В [3] доказаны уточнения оценки (3). Заметим, что если $b \in \mathfrak{M}_1$, то $g(b;x) > 0$ $\forall x \in (0,\, \pi)$. В [2], [4], [5] имеются оценки снизу с точными константами сумм синус-рядов с выпуклой последовательностью коэффициентов через различные функции, связанные с последовательностью b (в частности, через V).

Автору не известны работы, в которых выводились бы оценки производной $g'(b;x)$ для последовательности $b \in \mathfrak{M}_1$ общего вида, учитывающие специфику коэффициентов $\{b_k\}$. В [1] (глава 10) $\forall b \in \mathfrak{M}_1$ установлена справедливость соотношений

$$g(b;\,\cdot\,) \in C^1(0,\, 2\pi), \;\; g'(b;x) = o(x^{-2}) \text{ при } x \to 0.$$

Замечание 1. Если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, kb_k > 0$, то формально продифференцированный ряд (1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k \cos(kx)$ расходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и существуют такие последовательности $b \in \mathfrak{M}$, что сумма ряда (1) не имеет производной ни в одной точке ([1], глава X, параграф 8). Если же $b \in \mathfrak{M}_1$, то независимо от скорости стремления к нулю b_k ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k \cos(kx)$ суммируется к $g'(b;x)$ методом средних арифметических в каждой точке $x \in (0,\, 2\pi)$.

Автором получены следующие результаты.

Теорема 1. *При любом* $x \in (0,\, \pi/18]$ *выполняется неравенство*

$$|g'(b;x)| \le V(b;x) \quad \forall b \in \mathfrak{M}_1. \tag{4}$$

Сверху производная суммы синус-ряда оценивается величиной, меньшей $V(b;x)$, сама же оценка верна на большем, чем в теореме 1, полуинтервале.

Теорема 2. *При любом* $x \in (0,\, \pi/2]$ *верна оценка сверху*

$$g'(b;x) \le \sum_{k=1}^{m(x)} \frac{k(k+1)}{2}(b_k - b_{k+1}) \quad \forall b \in \mathfrak{M}_1. \tag{5}$$

Замечание 2. При любом $m \in \mathbb{N}$ для произвольного набора чисел $\{b_k\}$, $1 \le k \le m+1$, выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{k(k+1)}{2}(b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{m} kb_k - \frac{m(m+1)}{2} b_{m+1}.$$

Отсюда видно, что правая часть неравенства (5) меньше правой части (4), если $b_{m(x)+1} \ne 0$.

Константа 1 в оценке сверху $g'(b;x)$ через $V(b;x)$ является точной на классе $\mathfrak{M}_1$. Ее нельзя понизить, если последовательность b быстро стремится к нулю. В этой ситуации выпуклость последовательности коэффициентов ряда (1) не требуется.

Теорема 3. *Если* $b \in \mathfrak{M}$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$, *то* $g \in C^1(0,\, 2\pi)$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k \cos(kx)$ *сходится к* $g'(b;x)$ *в каждой точке интервала* $(0,\, 2\pi)$ *равномерно на отрезках* $[\varepsilon,\, 2\pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$. *При дополнительном условии* $b_k = O(k^{-2})$ *справедливо равенство*

$$\lim_{x \to 0+} \frac{g'(b;x)}{V(b;x)} = 1.$$

Что же касается константы "-1" в оценке снизу $g'(b;x) \ge -V(b;x)$, то при малых x ее можно заменить лучшей.

Теорема 4. *При любом* $x \in \big(0,\, 10^{-3}\pi\big]$ *выполняется неравенство*

$$g'(b;x) \ge -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) V(b;x) \quad \forall b \in \mathfrak{M}_1. \tag{6}$$

Величину $\cos(\pi/8)$ в неравенстве (6) можно уменьшить, но понизить ее до $\cos(\pi/7)$ (даже уменьшив границу для x) автору не удалось. В то же время заменить $\cos(\pi/8)$ числом $2\pi^{-2}$ нельзя: такое неравенство не будет выполняться ни при каких достаточно малых x, если взять $b = \{k^{-a}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $0 < a < 0.1$.

Таким образом, оценка сверху $g'(b;x)$ асимптотически неулучшаема на всем классе $\mathfrak{M}_1$, а оценка снизу — точна по порядку. Отметим, что на всем классе $\mathfrak{M}_1$ может идти речь лишь об оценке модуля производной. Построен пример такой последовательности $b \in \mathfrak{M}_1$, что производная суммы синус-ряда (1) в любой правой полуокрестности нуля бесконечно много раз меняет знак.

В заключение приведем два следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Если* $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_1$, *то вариация суммы синус-ряда (1) на отрезке* $[\pi/(m+1), \pi/m]$ *при любом* $m \geq 18$ *допускает оценку сверху*

$$\operatorname{Var} g(b;x)\Big|_{\pi/(m+1)}^{\pi/m} \leq \frac{\pi}{m(m+1)}\sum_{k=1}^{m} kb_k \leq \frac{\pi}{m+1}\sum_{k=1}^{m} b_k.$$

Следствие 2. *Если* $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_1$ *и последовательность* kb_k *неубывает, то для модуля производной суммы синус-ряда (1) верна оценка*

$$|g'(b;x)| \leq \pi^2 x^{-2} b_{m(x)} \quad \forall x \in (0,\, \pi/18].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 936 с.

[2] *Солодов А. П.* Точные константы в двусторонней оценке С.А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов // Математические заметки. 2020. Т. 107, № 6. С. 906–921.

[3] *Попов А. Ю.* Уточнение оценок сумм синус-рядов с монотонными и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами // Математические заметки. 2021. Т. 109, № 5. С. 768–780.

[4] *Попов А. Ю.* Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Математические заметки. 2003. Т. 74, № 6. С. 877–888.

[5] *Солодов А. П.* Точная оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 12. С. 124–158.

УДК 517.5

О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке интегральными операторами Фурье – Чебышёва[1]

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба (Гродно, Республика Беларусь)
pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Изучаются аппроксимации сингулярных интегралов специального вида на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва. Найдено интегральное представление приближений. В случае, когда плотность сингулярного интеграла имеет степенную особенность, получены оценки поточечных приближений, равномерных приближений с определенной мажорантой, ее асимптотическое выражение и оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых равномерные рациональные приближения оказываются в значительной степени лучше своих полиномиальных аналогов.

Ключевые слова: рациональная аппроксимация, интегральный оператор Фурье – Чебышёва, сингулярные интегралы, равномерные оценки.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269 (Республика Беларусь).

On rational approximations of one singular integral on a segment by Fourier – Chebyshev integral operators[1]

P. G. Potseiko, Y. A. Rovba. (Grodno, Belarus)
pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Approximations of singular integrals of the special form on the segment $[-1,\ 1]$ by rational integral operators of Fourier – Chebyshev are studied. An integral representation of the approximations is found. In the case when the density of the singular integral has power singularity, estimates of pointwise approximations, uniform approximations with a certain majorant, its asymptotic expression and optimal values of the approximating function parameters are found at which uniform rational approximations turn out to be significantly better than their own polynomial analogues.

Keywords: rational approximation, Fourier – Chebyshev integral operator, singular integrals, uniform estimates.

Acknowledgements: The work was carried out with financial support from the state scientific research program «Convergence 2020», No. 20162269 (Republic of Belarus).

Введение

При решении многих задач математики и физики встречаются сингулярные интегралы с ядром типа Коши следующего вида [1, 2]:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2}\, dt, \qquad x \in [-1,\ 1], \tag{1}$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где $f(t) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Известно, что сингулярные интегралы вычисляются в явном виде в очень редких случаях. Поэтому как в теоретических исследованиях, так в особенности для различных приложений особое значение имеет разработка приближенных методов их вычислений.

Нахождение значений сингулярных интегралов вида (1) при помощи методов численного анализа являлось предметом исследований многих авторов [3–5]. В работах В. П. Моторного [6] изучались полиномиальные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1). Рациональные аппроксимации сингулярных интегралов такого вида изучены в работах белорусского математика В. Н. Русака [7] и его учеников [8, 9].

В 1979 году Е. А. Ровба [10] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышёва – Маркова.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [10]:

$$s_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(v,\ u)}{\sin \dfrac{v-u}{2}}\, dv, \quad x = \cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda_n(v,\ u) = \int\limits_{u}^{v} \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(y) \right) dy,$$

$$\lambda_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y - \arg z_k) + |z_k|^2},\ z_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |z_k| < 1. \tag{3}$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n \in \mathbb{P}_n,$$

A – множество параметров $(a_1, \ldots, a_n)$, и $s_n(1,\ x) \equiv 1$. В частности, при $a_k = 0,\ k = 1, \ldots, n$, выражение $s_n(f,\ x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье–Чебышева.

Основной целью настоящей работы является исследование равномерных рациональных аппроксимаций сингулярных интегралов вида (1) на отрезке $[-1,\ 1]$ интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2) при специальном выборе полюсов.

Интегральное представление и равномерная оценка приближений

Введем следующие обозначения

$$\varepsilon_n(\hat{f},\ x\ , A) = \hat{f}(x) - s_n(\hat{f},\ x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$\varepsilon_n(\hat{f},\ A) = ||\varepsilon_n(\hat{f},\ x,\ A)||_{C[-1,\ 1]}, \quad \varepsilon_n(\hat{f}) = \inf_A \varepsilon_n(\hat{f},\ A), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. *Для приближений сингулярного интеграла вида* (1) *на отрезке* $[-1,\ 1]$, *рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва* (2) *справедливо интегральное представление*

$$\varepsilon_n(\hat{f},\ x,\ A) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos\tau)\sin\tau \frac{\cos\lambda_n(\tau,\ u)}{\sin\dfrac{\tau-u}{2}}\,d\tau, \quad x = \cos u, \tag{4}$$

где $\lambda_n(\tau,\ u)$ *из* (3).

В представлении (1) положим $f_s(t) = |t|^s$, где $s \in (0,\ +\infty)\backslash\mathbb{N}$. Тогда

$$\hat{f}_s(x) = 2x\int\limits_0^1 \frac{t^s}{t^2-x^2}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x \in [-1,\ 1].$$

Исследуем приближения (4) таких функций. Положим $n \mapsto 2n-1$ и пусть $2n-1$ параметров $\{z_k\}_{k=1}^{2n-1}$ аппроксимирующей рациональной функции имеют следующий вид:

$$z_k = -z_{n+k-1},\ z_k = i\alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,\ z_{2n-1} = 0,$$

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_p = 0, \quad p = \left[\frac{s}{2}\right], \; n > p. \tag{5}$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть от числа.

Теорема 2. *Для равномерных приближений функции $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2) при выполнении условий (5) имеет место оценка сверху:*

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s,\ A) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_0^1 (1-t^2)^{s-1}(1+t^2)t^{1+2p-s}\left|\prod_{k=1}^{n-p-1}\frac{t^2-\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2 t^2}\right| dt, \; n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Случай фиксированного числа полюсов

Пусть $n > p,\ p = [s/2]\,, n_1 = n-p-1$ и q – натуральное число, $0 < q < n_1$, A_q есть множество параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1})$ таких, что среди них ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m,\ n_1 = mq$. То есть, речь идет об аппроксимации рациональными функциями с полюсом на бесконечности порядка $2p+2$ и $2q$ геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости кратности m каждый.

Теорема 3. *Для равномерных приближений функции $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором (2) с $2q$ геометрически различными полюсами справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n-1,2q}(\hat{f}_s) \leq 2^{1-s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\Gamma(s)\left(\frac{q^{2q-1}s^{2q-1}(q!)^2}{2^{2q-2}}\right)^s\left(\frac{\ln^{2q-1}n}{n^{2q}}\right)^s, n > n_0(s),$$

где $n_0(s)$ – некоторое натуральное число, не зависящее от n, но зависящее от s, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Случай «ньюменовских» параметров

Исследуем асимптотическое поведение правой части (6) в случае, когда принимаемые параметрами аппроксимирующей функции значения, являются некоторой модификацией параметров, введенных Д. Ньюменом [11]. Пусть A_N – набор параметров α_k, $k = 1, 2, \ldots, n_1$, для каждого фиксированного $n_1 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}}, \quad \beta_k = \mathrm{e}^{-\frac{ck}{\sqrt{n_1}}}, \quad k = 1,\, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 = n-1-p, \tag{7}$$

c – некоторая положительная постоянная, не зависящая от n.

Теорема 4. *Для равномерных приближений функции $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,\,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2) существует такой набор параметров A_N^* вида (7), что справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s) \le 3\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \frac{\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(1+p)}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{ns}}, \quad n > n_0(s),$$

где $p = \left[\frac{s}{2}\right]$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. 543 с.

[2] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М. : Наука, 1968. 513 с.

[3] *Шешко М. А.* О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. вузов. Матем. 1976. № 12. С. 108–118.

[4] *Саакян А. В.* Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов // В сб. : «Проблемы механики тонких деформируемых тел», посв. 80-летию акад. С. А. Амбарцумяна. Ереван : 2002. С. 259–265.

[5] *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши // Владикавказский матем. журнал. 2008. Т. 10, № 4. С. 61–75.

[6] *Моторный В. П.* Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Укр. мат. жур. 2001. Т. 53, № 3. С. 331–345.

[7] *Русак В. Н.* Равномерная рациональная аппроксимация сингулярных интегралов // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1993. № 2. С. 22–26.

[8] *Бокша А. Н.* Приближение сингулярных интегралов рациональными функциями в равномерной метрике // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1, Физ. Мат. Инф. 1997. № 3. С. 68–71.

[9] *Русак В. Н., Уазис А. Х.* Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью // Изв. БГПУ. Сер 3. Физ. Матем. Инф. Биол. Геогр. 2009. № 1(59). С. 8–11.

[10] *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

[11] *Newman, D. I.* Rational approximation to $|x|$ // The Michigan Mathematical Journal. 1964. Vol. 11, iss. 1. P. 11–14.

УДК 517.9

Неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве[1]

А. Д. Пьянков (Екатеринбург, Россия)

sascha.pyankow@mail.ru

В работе найдено точное по порядку неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве. С помощью этого неравенства, как следствие, получено альтернативное доказательство неравенства Никольского разных метрик для норм тригонометрического полинома в пространствах Орлича.

Ключевые слова: неравенство разных метрик, норма Люксембурга, тригонометрический полином.

Inequality of different metrics for discrete Luxembourg norms in a finite-dimensional space[1]

A. D. Pyankov (Yekaterinburg, Russia)

sascha.pyankow@mail.ru

The paper found an order-exact inequality of different metrics for discrete Luxembourg norms in a finite-dimensional space. Using this inequality, as a consequence, an alternative proof of the Nikolsky inequality of different metrics for the norms of a trigonometric polynomial in Orlicz spaces is obtained.

Keywords: inequality of different metrics, Luxembourg norm, trigonometric polynomial.

С. М. Никольским в [1, 2] было получено точное по порядку неравенство разных метрик в пространствах Лебега L^p, L^q $(1 \leqslant p < q \leqslant +\infty)$ для целых функций экспоненциального типа $g_{\nu_1,\dots,\nu_n}(z_1,\dots,z_n)$ конечных типов $\nu_1,\dots,\nu_n$ по каждой переменной $z_1,\dots,z_n$ соответственно. Рассуждения, использованные в ходе доказательства такого неравенства переносятся с пространства целых функций на пространство тригонометрических полиномов соответствующих степеней от n переменных. Приведём здесь теорему для пространства тригонометрических полиномов.

Теорема (С. М. Никольский). *Для любого тригонометрического полинома $T_{\nu_1,\dots,\nu_n}$ порядков $\nu_1,\dots,\nu_n$ от переменных $x_1,\dots,x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ справедливо следующее неравенство для его норм в пространствах*

$L^p([0,2\pi]^n), L^q([0,2\pi]^n)$ *при* $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$:

$$\|T_{\nu_1,\ldots,\nu_n}\|_q \leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_{\nu_1,\ldots,\nu_n}\|_p.$$

Неравенство Никольского разных метрик обобщалось с пространств Лебега на нормы более общего вида вплоть до симметричных пространств. Неравенство для симметричных пространств целых функций экспоненциального типа доказано М. З. Берколайко и В. И. Овчинниковым в работе [3], для полиномов от одной переменной – В. А. Родиным в [4], для полиномов от нескольких переменных – Г. А. Акишевым в [5].

Функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ будем называть *N-функцией*, если она выпуклая, положительная при $x \neq 0$, чётная, имеет непрерывную строго возрастающую производную p и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \lim_{x\to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

Пусть φ – N-функция с производной p. Функция

$$\bar{\varphi}(x) = \int_0^{|x|} p^{-1}(t)\, dt,\ x \in \mathbb{R},$$

будет являться N-функцией [6, гл. 1, § 1] и называется *дополнительной* или *сопряженной* функцией к функции φ.

Говорят, что N-функция φ *удовлетворяет* Δ_2*-условию*, если

$$\exists x_0 \geqslant 0, C > 0\ \forall x \geqslant x_0 \quad \varphi(2x) \leqslant C\varphi(x).$$

Пусть φ_1, φ_2 – возрастающие функции. Будем говорить, что функция φ_1 *растёт не быстрее* функции φ_2 (и обозначать $\varphi_1 \preccurlyeq \varphi_2$), если

$$\exists x_0 \geqslant 0, k > 0\ \forall x \geqslant x_0 \quad \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(kx).$$

Пусть φ – N-функция, $L^{\varphi}_{2\pi}$ – построенное по ней пространство Орлича [6, гл. 2, § 9] 2π-периодических функций. Для $f \in L^{\varphi}_{2\pi}$ выражение

$$\|f\|_{(\varphi)} = \inf \left\{ k > 0 : \int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{f(x)}{k}\right) dx \leqslant 1 \right\}$$

называется *нормой Люксембурга* функции f в пространстве $L^{\varphi}_{2\pi}$.

Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ – вектор из $\mathbb{R}^m$, φ – N-функция. Определим для параметра $h > 0$ *дискретную норму Люксембурга* (норму Люксембурга вектора a) следующим образом:

$$\|a\|^h_{(\varphi)} = \inf\left\{k > 0 : h \cdot \sum_{i=1}^{m} \varphi\left(\frac{a_i}{k}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Основной результат настоящей работы представляет собой следующее утверждение.

Теорема 1. *Для пары N-функций φ_1, φ_2 таких, что $\varphi_1' \preccurlyeq \varphi_2'$ и для любого вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ справедливо неравенство разных метрик для норм Люксембурга*:

$$\|a\|^h_{(\varphi_2)} \leqslant C_1 \cdot \frac{\varphi_1^{-1}\left(\frac{C_2}{h}\right)}{\varphi_2^{-1}\left(\frac{C_2}{h}\right)} \cdot \|a\|^h_{(\varphi_1)}.$$

где числа $C_1, C_2 > 0$ не зависят от a и h.

В качестве следствия этой теоремы может быть получено неравенство Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Орлича.

Теорема 2. *Для любого тригонометрического полинома T_n порядка не выше n ($n \in \mathbb{N}$) и пары удовлетворяющих Δ_2-условию N-функций φ_1, φ_2 таких, что $\varphi_1' \preccurlyeq \varphi_2'$ справедливо следующее точное по порядку неравенство норм в пространствах Орлича*:

$$\|T_n\|_{(\varphi_2)} \leqslant C_1 \cdot \frac{\varphi_1^{-1}(C_2 n)}{\varphi_2^{-1}(C_2 n)} \cdot \|T_n\|_{(\varphi_1)},$$

где $C_1, C_2 > 0$ не зависят от n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.

[2] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 456 с.

[3] *Берколайко М. З., Овчинников В. И.* Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Труды математического института АН СССР. 1983. Т. 161. С. 3–17.

[4] *Родин В. А.* Неравенства Джексона и Никольского для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве // Труды 7-й зимней школы. Дрогобыч : 1974. Москва, 1976. С. 133–139.

[5] *Акишев Г. А.* О порядках М-членных приближений классов функций симметричного пространства // Математический журнал. 2014. Т. 14, № 4 (54). С. 46–71.

[6] *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 271 с.

УДК 517.53

О кратной интерполяции в плоском классе Привалова в круге[1]

Е. Г. Родикова (Брянск, Россия)

evheny@yandex.ru

В работе решается задача интерполяции в плоском классе И.И. Привалова в круге при условии, что узлы интерполяции имеют ограниченную кратность и находятся в конечном числе углов Штольца.

Ключевые слова: кратная интерполяция, класс Привалова по площади, единичный круг, углы Штольца.

On multiple interpolation in the area Privalov classes in a disk[1]

E. G. Rodikova (Bryansk, Russia)

evheny@yandex.ru

We solve the problem of multiple interpolation in the Privalov classes by area provided that the interpolation nodes have a limited multiplicity and are located in the finite union of Stolz angles.

Keywords: multiple interpolation, the Privalov classes by area, the Stolz angles, unit disk.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D.

При всех $0 < q < +\infty$ введём в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова или классом И.И. Привалова по площади. Класс $\tilde{\Pi}_q$ является обобщением хорошо известного плоского класса Р. Неванлинны и при $q = 1$ совпадает с ним. Отметим, что пространства $\tilde{\Pi}_q$ возникают естественным образом при исследовании вопросов дифференцирования в классах И.И. Привалова (см. [1]).

В данной работе исследуются вопросы интерполяции в указанных классах при всех $0 < q < 1$. Сформулируем общую задачу кратной интерполяции в классе $\tilde{\Pi}_q$: пусть $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ и $\{w_k\}_1^\infty$ - произвольные последовательности комплексных чисел; для фиксированного номера $j \geq 1$

обозначим через p_j — кратность появления числа z_j во всей последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, $s_j \geq 1$ — кратность появления числа z_j на «отрезке» $\{z_k\}_1^j$. Очевидно, что $1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty$. При каких условиях, налагаемых на узлы $\{z_k\}_1^\infty$ и последовательность точек $\{w_k\}_1^\infty$, можно построить функцию из класса $\tilde{\Pi}_q$, такую что

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = w_k, \ k = 1, 2, \ldots? \tag{1}$$

Последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ в этом случае называют *интерполяционной.* Если $\sup\limits_{j\geq 1}\{p_j\} < +\infty$, то узлы интерполяции имеют ограниченную кратность. Если $s_k = 1$, т.е. все члены последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ различны, то говорят, что интерполяция осуществляется на множестве простых узлов $\{z_k\}$.

При решении задачи свободной интерполяции, когда на интерполируемую функцию налагаются минимальные ограничения, важно найти естественный класс, которому должно принадлежать сужение функции на интерполяционное множество.

Для заданной последовательности $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ и фиксированного $0 < q < 1$ обозначим через $l^q(z_n)$ пространство последовательностей $\{w_k\}_1^\infty$, таких что

$$\ln^+|w_k| = o\left((1-|z_k|)^{-2/q}\right), \ k \to +\infty,$$

т.е.

$$|w_k| = \exp\frac{\mu(k)}{(1-|z_k|)^{2/q}}, \tag{2}$$

$\mu(k) > 0$, $\mu(k) = o(1)$, $k \to +\infty$.

Отметим, что класс $l^q(z_n)$, а вместе с ним и условие (2), являются естественными для решения задачи (1) в классе $\tilde{\Pi}_q$, ввиду справедливости следующей теоремы:

Теорема A. (см. [2]) *Пусть* $q > 0$. *Если* $f \in \tilde{\Pi}_q$, $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, $0 < r < 1$, *то*

$$\ln^+ M(r, f) = o((1-r)^{-2/q}), \quad r \to 1-0,$$

причём эта оценка является точной.

Кроме того, как установлено в [3], плоский класс Привалова инвариантен относительно оператора дифференцирования при всех $q > 0$.

Для формулировки основного результата введем дополнительные обозначения и определения. Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ (см. [4]). Обозначим $\pi_{\beta,n}(z,z_k)$ произведение $\pi_\beta(z,z_k)$ без n-го фактора. Если $\beta = m \in \mathbb{Z}_+$ произведение Джрбашяна имеет вид:

$$\pi_m(z,z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{z}_k(z_k - z)}{1-\overline{z}_k z} \exp \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j+1} \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k z} \right)^{j+1}.$$

Как установлено в [4], произведение $\pi_\beta(z,z_k)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0<\delta<1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$.

К классу $\widetilde{\Delta}$ отнесём последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. узлы интерполяции имеют ограниченную кратность:
$$\sup_{k\ge 1}\{p_k\} = p < +\infty,$$

2. $$\int_0^1 (1-r) n^q(r) dr < +\infty,$$
   где $n(r) = card\{z_k : |z_k| < r\}$ для любого $0 \le r < 1$;

3. найдется положительная бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, такая что
$$|\pi_{\beta,n}(z_k, z_n)| \ge \exp \frac{-\varepsilon_n}{(1-|z_n|)^{\frac{2}{q}}},$$
   при всех $\beta > \frac{2}{q} - 2$.

Основным результатом работы является доказательство следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $0 < q < 1$, *последовательность* $\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$ *для некоторого* $0<\delta<1$.

Если $\{z_k\}_1^\infty \in \widetilde{\Delta}$, *то для любой последовательности* $\{w_k\} \in l^q(z_n)$ *можно построить в явном виде функцию* $f \in \tilde{\Pi}_q$, *являющуюся решением интерполяционной задачи* (1).

Обратно, если задача (1) *разрешима при всех* $1 \leq s_k < +\infty$ *и* $\{w_k\}_1^\infty \in l^q(z_n)$, *то* $\{z_k\}_1^\infty \in \widetilde{\Delta}$.

Отметим, что постановка задачи кратной интерполяции и способ построения специальной системы функций, решающей задачу интерполяции с узлами ограниченной кратности восходит к работе М.М. Джрбашяна [5]. Задача (1) на множестве простых узлов в классе $\tilde{\Pi}_q$ решалась в работах автора [6], [7]. Вопросам интерполяции в классах Привалова [8] посвящены также работы [9]— [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Rodikova E.G., Shamoyan F.A.* On the differentiation in the Privalov classes // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2020. 13:5. С. 622-630.

[2] *Родикова Е.Г.* О коэффициентных мультипликаторах плоских классов Привалова // Уфимск. матем. журн. 2021. 13:4. С. 82–93.

[3] *Шамоян Ф.А., Махина Н.М.* Некоторые замечания о дифференциальных операторах в классах И.И. Привалова // Сиб. электрон. матем. изв. 2022. 19:2. С. 784–791

[4] *Шамоян Ф.А.* Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой. - Брянск: РИО БГУ. 2014. — 250 с.

[5] *Джрбашян М.М.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2 // Изв. АН АрмССР. 1974. 9:5. С. 339—373.

[6] *Родикова Е.Г.* Об интерполяции на множествах Карлесона в плоских классах И.И. Привалова в круге // Ученые записки Брянского государственного университета. 2022. 4:28. С. 13-15.

[7] *Родикова Е.Г.* Интерполяционные последовательности плоских классов Привалова // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа - 2023. Воронеж: Изд. дом ВГУ. – С. 344-345.

[8] *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций — М.: Изд. МГУ, 1941. —206 с.

[9] *Родикова Е.Г., Беднаж В.А.* Об интерполяции в классах И. И. Привалова в круге // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1762–1775.

[10] *R. Mestrovic, J. Susic* Interpolation in the spaces $N^p(1 < p < +\infty)$ // Filomat, 2013. 27:2. С. 291–299.

[11] *Rodikova E.G.* Multiple interpolation in the Privalov classes in a disk // Filomat. 2021. 35:1. С. 271-286.

УДК 517.958, 517.956.32

О решении начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида[1]

В. С. Рыхлов (Саратов, Россия)
RykhlovVS@yandex.ru

Дается решение обобщённой неоднородной начально-граничной задачи для волнового уравнения в полуполосе с нулевым потенциалом. Формулируются достаточные условия, когда это обобщённое решение является классическим. Затем, как приложение этого результата, формулируется теорема об обобщённом решении начально-граничной задачи для аналогичного однородного уравнения с потенциалом общего вида. В заключение формулируются достаточные условия, при которых это обобщённое решение является классическим решением.

Ключевые слова: начально-граничная задача, волновое уравнение, гиперболическое уравнение, дифференциальное уравнение с частными производными, потенциал общего вида, полуполоса, смешанная производная в уравнении, обобщённое решение, классическое решение.

On solving the initial boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative and a potential of the general form[1]

V. S. Rykhlov (Saratov, Russia)
RykhlovVS@yandex.ru

A solution to the generalized inhomogeneous initial-boundary value problem for the wave equation in a half-strip with zero potential is given. Sufficient conditions are formulated when this generalized solution is classical. Then, as an application of this result, a theorem on a generalized solution of the initial boundary value problem for a similar homogeneous equation with a general potential is formulated. Finally, sufficient conditions are formulated under which this generalized solution is a classical solution.

Keywords: initial boundary value problem, wave equation, hyperbolic equation, partial differential equation, general potential, half-strip, mixed derivative in the equation, generalized solution, classical solution.

Введение

Рассмотрим обобщённую задачу для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \tag{3}$$

где $(x,t)\in Q=[0,1]\times[0,+\infty)$; $p_1,p_2\in\mathbb{R}$; $\varphi(x)$, $\psi(x)\in L_1[0,1]$, $f(x,t)\in L_1(Q_T)$ при любом $T>0$, $Q_T=[0,1]\times[0,T]$ (называем такую $f(x,t)$ функцией класса $\mathcal{Q}$) и все эти функции комплекснозначные.

Для уравнения (1) выполняется условие $p_1^2-4p_2>0$, то есть корни ω_1, ω_2 многочлена $\omega^2+p_1\omega+p_2$ вещественны и различны. Предположим

$$\omega_1<0<\omega_2. \tag{4}$$

Определение обобщённого решения для задачи (1)–(3) приведено в [1,2] и сделано на основе теоремы существования и единственности классического решения [3]. Это определение аналогично определению, данному в [4, 5]. Там же даётся и история вопроса. Отметим, что в [4, 5] впервые использован метод построения обобщённого решения, основаннный на резольвентном и аксиоматическом подходах, в случае начально-граничной задачи для уравнения колебания струны ($p_1=0$).

Далее под *классическим решением* (или *решением почти всюду* (п.в.)) начально-граничной задачи (1)–(3) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую начальным и граничным условиям, у которой $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$ абсолютно непрерывны и по x и по t в Q_T при любом $T>0$, п.в. в Q выполняется равенство $u''_{xt}(x,t)=u''_{tx}(x,t)$ и которая удовлетворяет дифференциальному уравнению для п.в. $(x,t)\in Q$. Соответствующую начально-граничную задачу при этом будем называть *классической начально-граничной задачей.*

В случае классической задачи по необходимости должны выполняться следующие условия: $\varphi(x)\in W_1^2[0,1]$, $\psi(x)\in W_1^1[0,1]$ ($W_p^n[0,1]$ есть пространства Соболева), $f(x,t)\in\mathcal{Q}$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $\psi(0)=\psi(1)=0$.

Обобщённое и классическое решения неоднородной задачи без потенциала

Введем следующие обозначения.

$$v(x,t):=\zeta\big(\{\alpha(x,t)\}\big)-\zeta\big(\{\beta(x,t)\}\big),\ \ \zeta(x):=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat{\varphi}(x)-\omega_1\omega_2\widetilde{\Psi}(x)\Big).$$

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\begin{cases}\omega_2\varphi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi\in[0,a),\\ \omega_1\varphi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi\in[a,1),\end{cases} \qquad \widetilde{\Psi}(\xi)=\begin{cases}\Psi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi\in[0,a),\\ \Psi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi\in[a,1),\end{cases}$$

$\eta(s) := \dfrac{\{s\}}{a}\chi\big(a-\{s\}\big) + \dfrac{1-\{s\}}{1-a}\chi\big(\{s\}-a\big)$, $\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x) = 0$ при $x < 0$ и $\chi(x) = 1$ при $x \geq 0$), $\Psi(x) := \int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi$, $\{x\}$ — дробная часть $x \in \mathbb{R}$, $a = \dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}$, $\alpha(x,t) := \dfrac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}$, $\beta(x,t) := \dfrac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}$.

С использованием подхода [4, 5] доказана следующая теорема о формуле для обобщённого решения задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ и выполняется условие* (4). *Тогда функция $u(x,t)$, определённая для п.в. $(x,t) \in Q$ формулой*

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} f(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{5}$$

является обобщённым решением задачи (1)–(3).

Следующие достаточные условия обеспечивают существование классического решения.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t в Q_T при любом $T > 0$ для п.в. $x \in [0,1]$ и $f'_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. Тогда функция $u(x,t)$, определённая для всех $(x,t) \in Q$ формулой* (5), *является единственным классическим решением задачи* (1)–(3).

Обобщённое и классическое решения однородной задачи с потенциалом

Приложением теоремы 1 является случай обобщённой задачи с ненулевым потенциалом общего вида в дифференциальном уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + p_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x,t)u, \tag{6}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{8}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x,t) \in \mathcal{Q}$ и эти функции комплеснозначные.

Применим к решению этой задачи подход, предложенный для потенциала $q(x)$ в [4–6] (в случае $p_1 = 0$) и в [2, 7] (в случае $p_1 \neq 0$), а для потенциала $q(x,t)$ общего вида в [8] (в случае $p_1 = 0$) и в [9] (в случае

$p_1 \neq 0$). Так же, как и в [2, 4–9], в задаче (6)–(8) будем рассматривать правую часть $q(x,t)u(x,t)$ в уравнении (6) как неоднородность в уравнении (1). Тогда на основании формулы (5) от задачи (6)–(8) переходим к следующему интегральному уравнению относительно функции $u(x,t)$

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau)} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\, d\xi =:$$

$$=: v(x,t) + (\mathcal{D}u)(x,t), \quad (9)$$

где $\mathcal{D}$ есть линейный интегральный оператор, действующий из множества $D(\mathcal{D}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Отметим, что такой подход к построению обобщённого решения задачи (6)–(8) (в случае потенциала $q(x)$) при наших предположениях относительно исходных данных задачи, состоящий в сведении задачи (6)–(8) к интегральному уравнению типа (9) и затем решении этого уравнения методом последовательных подстановок, был впервые использован в [6].

Естественно назвать решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (9), для которого функция $q(x,t)u(x,t)$ класса $\mathcal{Q}$, *обобщённым решением* задачи (6)–(8), а саму задачу — *обобщёной начально-граничной задачей.*

Далее будут фигурировать два предположения относительно потенциала $q(x,t)$ для п.в. $(x,t) \in Q_T$ при любом $T > 0$:

$$(i) \ \ |q(x,t)| \leq q_T(x) \in L_1[0,1]; \quad (ii) \ \ |q(x,t)| \leq \check{q}(t) \in L_p[0,T] \ (p > 1).$$

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, функция $q(x,t)$ класса $\mathcal{Q}$ и для нее выполняется условие (i) или (ii). Тогда $\big(\mathcal{D}v\big)(x,t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$.*

Обозначим $w(x,t) := (\mathcal{D}v)(x,t)$ и образуем ряд

$$W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n w)(x,t), \quad (10)$$

где D есть линейнный, ограниченный интегральнй оператор, являющийся сужением оператора $\mathcal{D}$ на пространсво $C(Q_T)$.

Определение 1. Будем говорить, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится не медленнее γ-экспоненциального ряда ($\gamma > 0$), если при некоторой константе $C > 0$ и при всех n будет $|a_n| \leq C^n/(n!)^{\gamma}$. 1-экспоненциальный ряд — это обычный экспоненциальный ряд.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, выполняется условие* (4), *функция $q(x,t)$ класса $\mathcal{Q}$ и удовлетворяет условиям (i) или (ii). Тогда ряд* (10) *сходится абсолютно и равномерно в $C(Q_T)$ к непрерывной* *функции $W(x)$ не медленнее экспоненциального ряда в случае выполнения условия (i) и не медленнее $1/p'$-экспоненциального ряда в случае выполнения условия (ii). При этом функция*

$$u(x,t) = v(x,t) + W(x,t) \tag{11}$$

является единственным обобщённым решением задачи (6)–(8).

Следующие достаточные условия обеспечивают существование классического решения.

Теорема 4. *Пусть $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $q(x,t) = q_1(x)q_2(x,t)$, где $q_1(x) \in L_1[0,1]$, $q_2(x,t)$ и $q'_{2,t}(x,t)$ принадлежат $C(Q_T)$ при любом $T > 0$. Тогда функция $u(x,t)$, определённая формулой* (11), *является единственным классическим решением задачи* (6)–(8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Итоги науки и техники. Сер. Совр. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 226. С. 89–107.

[2] *Рыхлов В. С.* Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной / В.С. Рыхлов // Совр. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 342–363.

[3] *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Информ. 2023. Т. 23, № 2. С. 183–194.

[4] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междун. Саратовской зимней школы. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 319–324.

[5] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, № 2. С. 322–331.

[6] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическои и обобщённом решении смешанной задачи для волнового уравнения // Понтрягинские чтения — XXIX: матер. конф., посвящ. 90-летию акад. В. А. Ильина. М.: ООО «Макс Пресс», 2018. С. 132-133.

[7] *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и ненулевым потенциалом // Соврем. методы теории краевых задач: матер. Междун. конф.: Воронежская весен. матем. школа (3–9 мая 2023 г.). Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2023. С. 343–345.

[8] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Использование резольвентного подхода и расходящихся рядо в при решении смешанных задач // Математика. Механика: сб. науч. труд. Вып. 23. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2021. С. 18–24.

[9] *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида // Матем. Мех.: сб. науч. труд. Вып. 25. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2023. С. 83–88.

УДК 517.9

Об одной специальной задаче для чётных полиномов, наименее уклоняющихся от нуля[1]

Е. Х. Садекова (Москва, Россия)
vetka.08@mail.ru

В работе изучаются тригонометрические полиномы порядка не выше n. Будет показано, что существуют лишь два, различающиеся знаком, решения задачи о нахождении чётного полинома, наименее отклоняющегося от нуля вне интервала $(-\delta, \delta)$ и удовлетворяющего определённым свойствам. Приведены точные по порядку оценки нормы указанного полинома необходимые для намеченных приложений.

Ключевые слова: тригонометрический полином, приближение в равномерной метрике, полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля.

About one special problem for even polynomias that deviate least from zero[1]

E. H. Sadekova (Moscow, Russia)
vetka.08@mail.ru

In this work we study trigonometric polynomials of order not higher than n. It will be shown that there are only two solutions differing in sign problem of finding an even polynomial that deviates least from zero outside the interval $(-\delta, \delta)$ and satisfying certain properties. Order-precise estimates were written for the norms of the specified polynomial are necessary for the intended applications.

Keywords: trigonometric polynomial, approximation in the uniform metric, polynomials least deviating from zero.

Введение

Пусть n — натуральное число, $0 < \delta < \pi$. Рассмотрим три экстремальные задачи. Среди всех тригонометрических полиномов $T(x)$ порядка n, для которых

$$\max\{|T(x)| : \delta \leqslant |x| \leqslant \pi\} \leqslant 1,$$

найти тот, для которого величина $\|T\| := \max\{|T(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ имеет наибольшее значение, и найти это значение, если

(A) на полином $T(x)$ нет дополнительных условий;

(B) $\max\{T(x) : x \in \mathbb{R}\} = -\min\{T(x) : x \in \mathbb{R}\}$;

(C) выполняется условие (B) и полином является чётным.

Решения задач (A) и (B) известны. Задачи являются тригонометрическими аналогами классической задачи об алгебраическом полиноме степени n с равным 1 старшим коэффициентом, наименее уклоняющемся от нуля на отрезках $[-1,-\alpha]$, $[\alpha,1]$ (см. [1] с. 320). Задача (A) соответствует случаю полинома четного порядка. Алгебраический полином для решения задачи (B) найден Н.И.Ахиезером [2]. Соответствующий тригонометрический аналог был указан А.П.Петуховым [3]. Этот полином определен с точностью до знака и является нечетным.

Пусть $\mathcal{I}_{n,\delta}$ — множество таких тригонометрических полиномов $T(x)$ порядка n, что $|T(x)| \leqslant 1$ при $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$, и на интервале $(-\delta,\delta)$ существуют такие три точки $x_1 < x_2 < x_3$, что $T(x_1) > 1$, $T(x_2) < -1$, $T(x_3) > 1$. Для $\mathcal{I}_{n,\delta}$ положим

$$M(T) = \sup\{\min\{T(x_1), -T(x_2), T(x_3)\}\},$$

где супремум берется по всем тройкам точек $x_1 < x_2 < x_3$ указанного типа из интервала $(-\delta,\delta)$. Обозначим

$$\tilde{M} = \sup\{M(T) : T \in \mathcal{I}_{n,\delta}\}.$$

Требуется среди всех полиномов $T \in \mathcal{I}_{n,\delta}$ найти тот полином $T_n(\delta;x)$, у которого величина $M(T_n(\delta;\cdot))$ совпадает с $\tilde{M}$.

В работе доказано утверждение.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 2$, $\dfrac{\pi}{n} < \delta < \pi$. Тогда существует, причем единственный, полином $T_n(\delta;x) \in \mathcal{I}_{n,\delta}$, такой, что выполняется равенство $M(T_n(\delta;\cdot)) = \tilde{M}$. Этот полином обладает следующими свойствами:*

1. *$T_n(\delta;x)$ — четный полином;*

2. $\|T_n(\delta;\cdot)\| = \tilde{M}$;

3. *на отрезке $[0,\delta]$ полином $T_n(\delta;x)$ имеет два участка монотонности, а именно, возрастает от своего минимального значения $T_n(\delta;0) = -\tilde{M}$ до своего максимального значения $\tilde{M}$, а затем убывает от $\tilde{M}$ до значения $T_n(\delta;\delta) = 1$;*

4. *на отрезке $[\delta,\pi]$ полином $T_n(\delta;x)$ имеет $n-1$ участков монотонности, на каждом из которых он изменяется от 1 до -1 или от -1 до 1, именно, начиная с точки $x = \delta$ он убывает от 1 до -1, затем возрастает от -1 до 1 и т.д., заканчивая точкой $x = \pi$, в которой $T_n(\delta;\pi) = (-1)^{n+1}$.*

Тригонометрический полином $T_n(\delta; x)$ из теоремы 1 назовем *«пробным» полиномом порядка n с параметром δ.*

При $0 < \delta \leqslant \dfrac{\pi}{n}$ $T_n(\delta; x) = -\cos nx$.

Следствие. *Решение задачи C существует и с точностью до знака совпадает с «пробным» полиномом $T_n(\delta; x)$* $\left(\dfrac{\pi}{n} < \delta < \pi\right)$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \delta < 1/10$,

$$\lambda(\delta) = \log \frac{1 + \sin \dfrac{\delta}{2}}{1 - \sin \dfrac{\delta}{2}}.$$

Тогда при всех достаточно больших значениях $n\delta$ справедлива оценка:

$$\frac{1}{9e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)} < \|T_n(\delta; \cdot)\| < \frac{1}{3e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)}.$$

При доказательстве теорем использованы методы из работы Долженко Е.П., Севастьянова Е.А. [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации // М. : Наука, 1965. — 410 с.

[2] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций // М. : Наука, 1975. — 304 с.

[3] *Петухов А. П.* Об ужах и приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Analysis Mathem. — 1985. — Т. 11, № 1. —С. 55–73.

[4] *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым апроксимациям // Изв. РАН. Серия матем., 1999. — Т. 63, №3. — С. 77–118.

УДК 517.52

Оценка скорости сходимости в принципе локализации Римана[1]

Т. Ю. Семенова (Москва, Россия)
station@list.ru

Для непрерывных периодических функций получена оценка скорости сходимости в утверждении, известном как принцип локализации Римана для тригонометрических рядов. В случае, когда функция обращается в нуль на некотором отрезке, внутри этого отрезка найдена оценка скорости сходимости ряда Фурье к значению функции, близкая к неулучшаемой.

Ключевые слова: тригонометрический ряд, принцип локализации, скорость сходимости.

Estimation of the rate of convergence in the Riemann localization principle[1]

T. Yu. Semenova (Moscow, Russia)
station@list.ru

For continuous periodic functions, an estimate of the convergence rate is obtained in a statement known as the Riemann localization principle for trigonometric series. In the case when the function vanishes on a certain segment, an estimate of the convergence rate of the Fourier series to the value of the function is found within this segment, close to the unimproved one.

Keywords: rigonometric series, localization principle, convergence rate.

Согласно принципу локализации Римана, сходимость ряда Фурье функции f в точке x_0 зависит лишь от свойств функции в некоторой окрестности этой точки. Другая формулировка принципа локализации: если $f \in L[-\pi, \pi]$ равна нулю на некотором интервале $I \subset (-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом компакте $K \subset I$. Помимо факта равномерной сходимости вызывает интерес также оценка скорости этой сходимости. Этому вопросу посвящены работы Э. Хилле, Г. Клейна [1] и С.А. Теляковского [2], где для произвольной 2π-периодической функции $f \in L[-\pi, \pi]$, для любого $\delta \in (0, \pi)$ доказано неравенство

$$\left|S_n(f, x_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)\frac{\sin(nt)}{t}dt\right| \leq \frac{K}{\delta}\left(\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_L + \frac{|a_0(f)|}{n}\right). \quad (1)$$

Здесь $S_n(f, x)$ — n-я частичная сумма ряда Фурье функции f, $\omega\big(f, h\big)_L$ — интегральный модуль непрерывности, $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, K — абсолютная постоянная.

Автором рассмотрен случай непрерывных 2π-периодических функций и доказано неравенство, аналогичное (1), но без “неопределенной” постоянной K. В случае, когда f обращается в нуль на некотором отрезке, найдена оценка скорости сходимости внутри этого отрезка, близкая к неулучшаемой.

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ действительнозначных 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \bigm| x \in \mathbb{R}\} = \max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)|.$$

Модулем непрерывности функции $f \in C_{2\pi}$ называется величина

$$\omega(f, h) = \max\{|\,f(x_1) - f(x_2)|,\ \ x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \ |\,x_1 - x_2\,| \le h\},\quad 0 \le h \le \pi.$$

Обозначим $N = n + 0.5$, $\omega_n(f) = \omega\big(f, \frac{2\pi}{3N}\big)$.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C_{2\pi}$, $\delta_1, \delta_2 \in (0, \pi)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда для любого натурального $n \ge 3$ такого, что $N \ge \frac{2\pi}{3\min\{\delta_1,\delta_2\}}$, выполнено неравенство*

$$\left|S_n(f, x_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} f(x_0+t)D_n(t)dt\right| \le$$

$$\le \omega_n(f)\left(\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta_1\delta_2} + 1\right) + \frac{|f(x_0)|}{2N}\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\right).$$

Теперь рассмотрим подкласс $C_{2\pi}$, состоящий из функций, равных нулю на некотором отрезке, содержащем точку x_0. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, и $f(x) = 0$ при $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2]$, $\delta_1, \delta_2 \in (0, \pi)$. Тогда для любого натурального $n \ge 3$ такого, что $N \ge \frac{2\pi}{3\min\{\delta_1,\delta_2\}}$, выполнено неравенство*

$$|S_n(f, x_0)| \le \omega_n(f)\left(\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta_1\delta_2} + 1\right).$$

Оценка теоремы 2 близка к оптимальной.

Теорема 3. *Для любого натурального $n \ge 3$, для любых $\delta_1, \delta_2 \in [\frac{2\pi}{3N}, 1)$ существует функция $f \in C_{2\pi}$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in [-\delta_1, \delta_2]$, $\omega_n(f) = 1$ и*

$$|S_n(f, 0)| > \frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta_1\delta_2}.$$

Из теоремы 2 легко получить оценку скорости сходимости ряда Фурье в точке x_0, если функция $f \in C_{2\pi}$ равна нулю на симметричном отрезке, а также оценку скорости равномерной сходимости на отрезке, содержащимся внутри промежутка, где функция равна нулю.

Следствие 1. *Пусть функция* $f \in C_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *и* $f(x) = 0$ *при* $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta \in (0, \pi)$. *Тогда для любого натурального* $n \geq 3$ *такого, что* $N \geq \frac{2\pi}{3\delta}$, *выполнено неравенство*

$$|S_n(f, x_0)| \leq \omega_n(f) \left(\frac{2}{\pi^2} \ln \frac{1}{\delta} + 1 \right).$$

Следствие 2. *Пусть функция* $f \in C_{2\pi}$ *и* $f(x) = 0$ *при* $x \in [a, b] \subset [-\pi, \pi]$. *Тогда для любого* $\delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ *и для любого натурального* $n \geq 3$ *такого, что* $N \geq \frac{2\pi}{3\delta}$, *выполнено неравенство*

$$\sup_{x \in [a+\delta, b-\delta]} |S_n(f, x)| \leq \omega_n(f) \left(\frac{1}{\pi^2} \ln \frac{1}{\delta(b-a-\delta)} + 1 \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hille E., Klein G.* Riemann's localization theorem for Fourier series // Duke Math. J. 1954. Vol. 21. С. 587–591.

[2] *Теляковский С. А.* Принцип локализации, оценка скорости сходимости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 25. С. 178–181.

УДК 517.95;519.63;51–73

О проекционном методе решения уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью[1]

Е. В. Серегина*, М. А. Степович(Калуга, Россия)**
***evfs@yandex.ru, **m.stepovich@mail.ru**

В настоящей работе изложены результаты использования проекционного метода наименьших квадратов для решения уравнений теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью на полупрямой. Дана порядковая оценка погрешности и получено условие вычислительной устойчивости рассмотренной проекционной схемы, соответствующей приближённому решению уравнения теплопроводности с использованием базиса из многочленов Лагерра–Якоби. Приведены результаты расчетов для двумерной модельной задачи.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, проекционный метод наименьших квадратов, многочлены Лагерра-Якоби.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23–21–10069, https://rscf.ru/project/23–21–10069/.

On the projection method for solving the heat conduction equation with locate heat capacity[1]

E. V. Seregina*, M. A. Stepovich(Kaluga, Russia)**
***evfs@yandex.ru, **m.stepovich@mail.ru**

The present paper presents the results of using the projection method of least squares to solve the equations of thermal conductivity with concentrated heat capacity on a half–line. An ordinal estimate of the error is given and the condition of computational stability of the considered projection scheme corresponding to the approximate solution of the thermal conductivity equation using the basis of Laguerre–Jacobi polynomials is obtained. The results of calculations for a two–dimensional model problem are presented.

Keywords: thermal conductivity equation, projection method of least squares, Laguerre-Jacobi polynomials.

Acknowledgements: The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Government of the Kaluga Region No. 23–21–10069, https://rscf.ru/en/project/23–21–10069/.

В работе [1] был представлен алгоритм и проведено обоснование проекционного метода Галёркина для решения стационарного трёхмерного дифференциального уравнения тепломассопереноса в полубесконечной области.

В настоящей работе изложен алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов (МНК) для нахождения решения на полупрямой нестационарного дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью. Искомое решение находится в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра–Якоби. В работах [2] и [3] было проведено обоснование и рассмотрен вопрос вычислительной устойчивости модифицированной проекционной схемы метода наименьших квадратов для моделирования распределения неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных внешним источников в полупроводниковом материале. Настоящая работа продолжает такие исследования и ставит задачу дать оценку погрешности и получить условие вычислительной устойчивости предложенной проекционной схемы МНК, соответствующей приближённому решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью, для расчета температурного поля в мишени.

Будем искать решение дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью вида

$$\left(C + C_0 \delta \left(z - z_0\right)\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = f(z,t).$$

с начальным условием

$$\theta(z,0) = \varphi\left(z\right), \left.\frac{d\theta(z,t)}{dz}\right|_{z=0} = 0,\ 0 \le z < \infty,\ \ 0 \le t < \infty.$$

Здесь $\theta(z,\ t)$ — температура, $f(z,t)$ — удельная мощность внутреннего тепловыделения, C — теплоёмкость единицы объёма, k —коэффициент теплопроводности. В точке z_0 помещена сосредоточенная теплоёмкость величины C_0. Пусть также выполняются условия:

$$f\left(+\infty, t\right) = 0, f\left(z, +\infty\right) = 0, \varphi\left(+\infty\right) = 0.$$

Последние условия возможны, например, для электронного или светового пучков, когда источник описывается классической функцией Гаусса или экспонентой, убывающей на бесконечности до нуля [4], а также произведением некоторого многочлена на убывающую экспоненту, характеризующую плотность потока энергии.

Для решения этой задачи был использован проекционный метод МНК. В настоящей работе получена оценка погрешности и условия вычислительной устойчивости проекционной схемы, соответствующей приближённому решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью. Метод позволяет находить матрицу, определяющую приближённое решение рассматриваемой задачи, не прибегая к операциям дифференцирования и интегрирования, а используя только алгебраические операции, что существенно сокращает время вычислений. Проведено сравнение приближённых результатов расчета с точным решением для двумерной модельной задачи. Приближённое решение содержит небольшое число членов разложения по базису из многочленов Лагерра–Якоби.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Makarenkov A.M.,Seregina E.V., Stepovich M.A.* The Projection Galerkin Method for Solving the Time–Independent Differential Diffusion Eequation in a Semi–infinite Domain // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017. — Vol. 57. Issue 5. — P. 802-814.

[2] *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2013. — № 11. — С. 65–69.

[3] *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* Модифицированная проекционная схема метода наименьших квадратов для моделирования концентрации неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах // Успехи прикладной физики. — 2013. — Т. 1. № 3. — С. 354–358.

[4] *Степович М. А.* Количественная катодолюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники: Дис. ... д–ра физ.–мат. наук. М.: Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 2003. 351 с.

УДК 517.51

О восстановлении функций, заданных на сетке[1]

С. Ю. Советникова (Саратов, Россия)
sovetnikovasy@mail.ru

В работе находятся равномерные приближения к непрерывной функции по заданному приближённому набору её значений на отрезке, используя оператор Стеклова с разрывной областью значений.

Ключевые слова: непрерывная функция, приближённые значения, оператор Стеклова.

On restoring functions defined on a grid[1]

S. Y. Sovetnikova (Saratov, Russia)
sovetnikovasy@mail.ru

The work finds uniform approximations to a continuous function from a given approximate set of its values on an interval, using the Steklov operator with a discontinuous range of values.

Keywords: continuous function, approximate values, Steklov operator.

Пусть $f(x) \in C[0,1]$ задана набором $\widehat{f_\delta} = \{f_{\delta_1}, f_{\delta_2}, \ldots, f_{\delta_n}\}$, где $f_{\delta i} = f_\delta(x_i), x_{i+1} = x_i + \frac{1}{n}$. Кроме того, известно, что

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(f_{\delta_i} - f_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta, \tag{1}$$

где $f_i = f(x_i)$.

Требуется найти равномерные приближения к $f(x)$. Применяем метод, предложенный Г.В. Хромовой - метод сглаживания ломаной $L_n\widehat{f_\delta}$: $(L_n\widehat{f_\delta})(x_i) = f_{\delta_i}$ с помощью семейства осредняющих интегральных операторов, зависящих от параметра. Этот метод был реализован в [1], где в качестве осредняющего оператора был взят модифицированный оператор Стеклова [2]. При использовании этого оператора привлекается дополнительная информация о значениях $f_\delta(x_i)$ в узлах за пределами отрезка, на котором задана $f(x)$. Мы здесь используем так называемый разрывный оператор Стеклова [3], который не требует такой информации и имеет простейшую конструкцию. Он имеет вид:

$$S_\alpha\varphi = \begin{cases} S_{\alpha 2}\varphi, x\in[0,\frac{1}{2}] \\ S_{\alpha 1}\varphi, x\in[\frac{1}{2},1], \end{cases} \tag{2}$$

где

$$S_{\alpha 1}\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x}\varphi(t)dt, S_{\alpha 2}\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{x+\alpha}\varphi(t)dt. \tag{3}$$

(Запись (2) означает, что для нас несущественно какое именно значение имеет функция $S_\alpha\varphi$ в точке $x=\frac{1}{2}$).

Ломаная $L_n\widehat{f_\delta}$ на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ имеет вид: $\left(L_n\widehat{f_\delta}\right)(x) = a_i x + b_i$, где

$$a_i = n(f_{i+1}-f_i),\ b_i = n(f_i x_{i+1} - f_{i+1}x_i). \tag{4}$$

Применяем S_α к $L_n\widehat{f_\delta}$

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\left\|S_\alpha L_n\widehat{f_\delta} - f\right\|_{L_\infty} \le \sqrt{n}\delta + \omega\left(\frac{1}{n}\right) + \omega(\alpha),$$

где $L_\infty \equiv L_\infty[0,1]$ *- пространство с нормой*

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}, \tag{5}$$

$\omega(\cdot)$*- модуль непрерывности функции* $f(x)$.

Доказательство.

Имеем

$$\left\|S_\alpha L_n\widehat{f_\delta} - f\right\|_{L_\infty} \le \left\|S_\alpha L_n\widehat{f_\delta} - S_\alpha L_n\widehat{f}\right\|_{L_\infty} + \left\|S_\alpha L_n\widehat{f} - f\right\|_{L_\infty}, \tag{6}$$

где $\widehat{f} = \{f_i\}_{i=0}^n$.

Считаем $\widehat{f_\delta}$ и $\widehat{f}$ элементами евклидова пространства E_{n+1} с нормой

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из (5) и определения нормы интегрального оператора в пространстве непрерывных функций следует, что

$$\|S_\alpha\|_{C[0,1]\to L_\infty} = 1. \tag{7}$$

Известно, что

$$\|L_n\|_{E_{n+1}\to C[0,1]} = \sqrt{n} \quad ([4]) \tag{8}$$

и

$$\left\|S_\alpha L_n \widehat{f} - f\right\|_{L_\infty} \le \omega\left(\frac{1}{n}\right) + \omega(\alpha) \quad ([5]). \tag{9}$$

Наконец, из (5)-(9) следует утверждение теоремы.

Следствие. *Если* $\alpha = \frac{1}{n}$, *а* $n = n(\delta)$ *так, что* $n(\delta) \to \infty$ *и* $\sqrt{n(\delta)}\delta \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *то* $\left\|S_\alpha L_n \widehat{f_\delta} - f\right\|_{L_\infty} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Функции* $S_\alpha L_n \widehat{f_\delta}$ *при* $\alpha = \frac{1}{n}$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *имеют вид: для* $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\left(S_\alpha L_n \widehat{f_\delta}\right)(x) = D_1(x,n) f_{\delta i} + D_2(x,n) f_{\delta,i+1} + D_3(x,n) f_{\delta,i+2}, \tag{10}$$

где

$$D_1(x,n) = \frac{n^2}{2}(x_{i+1} - x)^2,\ D_2(x,n) = \frac{1}{2} + n^2(x - x_i)(x_{i+1} - x),$$

$$D_3(x,n) = \frac{n^2}{2}(x - x_i)^2;$$

для $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ *справедлива формула (10) с заменой* $f_{\delta i}$ *на* $f_{\delta,i-1}$, $f_{\delta,i+1}$*— на* $f_{\delta i}$, $f_{\delta,i+2}$ *- на* $f_{\delta,i+1}$.

Формулы (10) можно использовать при решении прикладных задач.

Формулы $S_\alpha L_n \widehat{f}$ в другом виде получены в [5].

Теорема 3.

Если $f(x) \in Lip_M 1$, $n = n(\delta) = [M^{\frac{2}{3}}\delta^{-\frac{2}{3}}]$, $\alpha = \alpha(\delta) = \frac{1}{n(\delta)}$, *то справедлива оценка:* $\left\|S_{\alpha(\delta)} L_{n(\delta)} \widehat{f_\delta} - f(x)\right\|_{L_\infty} \le 2M^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Булычева С. В.* Осреднение исходных данных прикладных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. Т. 46, № 10. Р. 1802–1808.

[2] *Хромова Г. В.* О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.

[3] *Хромова Г. В.* Об операторах с разрывной областью значений и их применении // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и её приложения, Тематические обзоры. Москва : ВИНИТИ РАН, 2021. Т. 200, ч. 2, С. 57–64.

[4] *Бушманова М. В., Хромова Г. В.* О точности результатов при восстановлении экспериментально заданной информации // Математика. Приложения матем. в экономич., технич. и педагогич. исследованиях. Магнитогорск: Изд-во МГТУ. 2004. Вып. 2. С. 3–8.

[5] *Хромова Г. В.* Об одном аналоге интерполяционных параболических сплайнов // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. XVI Междунар. Казанская школа-конф. "Теория функций, её приложения и смежные вопросы "Сб. трудов (Казань, 22-27 авг. 2023). Казань : Изд. Казанского федерального ун-та, 2023. Т. 66. С. 279–281.

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

Многочлены Эрмита–Паде для тригонометрических рядов[1]

А. П. Старовойтов, Т. М. Оснач, Е. П. Кечко (Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, osnach@gsu.by, ekechko@gmail.com

Для конечного набора тригонометрических рядов определяются многочлены и аппроксимации Эрмита–Паде. Устанавливается критерий существования и единственности таких многочленов, описывается их явный вид.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде, тригонометрические ряды.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Hermite – Padé polynomials for trigonometric series [1]

A. P. Starovoitov, T. M. Osnath, E. P. Kechko (Gomel, Belarus)
svoitov@gsu.by, osnach@gsu.by, ekechko@gmail.com

We defined Hermite – Padé polynomials and approximations for a finite set of trigonometric series. We established criterion of the existence and uniqueness of these polynomials, and their explicit form was described.

Keywords: Hermite–Padé approximations, trigonometric serial.

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus.

Пусть $\mathbf{f^t} = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx \right), \quad j = 1, 2, \dots, k \tag{1}$$

с действительными коэффициентами. Множество k–мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и рассмотрим тригонометрический аналог задачи Эрмита–Паде (см. [1, гл. 4, §1, задача A]):

Для набора тригонометрических рядов (1) *найти отличный от нуля тригонометрический многочлен* $Q_m^t(x) = Q_{n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t})$, $\deg Q_m^t \leqslant m$

и тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P^t_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(x;\mathbf{f^t})$, $\deg P_j^t \leqslant n_j$, $n_j = n+m-m_j$, *чтобы для* $j=1,2,\dots,k$

$$R_j^t(x;\mathbf{f^t})) := Q_m^t(x)f_j^t(x) - P_j^t(x) =$$

$$= \sum_{l=n+m+1}^{\infty}\left(\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx\right), \;\; j=1,2,\dots,k, \tag{2}$$

где $\tilde{a}_l^j$, $\tilde{b}_l^j$ *и коэффициенты* $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ – *действительные числа.*

Очевидно, что многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ условиями (2) определяются не однозначно, а с точностью до числового множителя. На самом деле неединственность может быть и более существенной.

Определение 1. *Будем говорить, что задача имеет единственное решение, если для любых двух решений* $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t)$ *и* $(\bar{\bar{Q}}_m^t, \bar{\bar{P}}^t)$ *задачи найдется такое число* λ, *что* $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) = (\lambda\bar{\bar{Q}}_m^t, \lambda\bar{\bar{P}}^t)$.

Определение 2. *Если пара* (Q_m^t, P^t), *где* $P^t = (P_1^t, \dots, P_k^t)$, *является решением задачи, то многочлены* $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, …, $P_k^t(x)$ *и рациональные дроби*

$$\pi_j^t(x;\mathbf{f^t}) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \;\; j=1,2,\dots,k,$$

будем называть соответственно тригонометрическими многочленами Эрмита–Паде и тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Паде для мультииндекса $(n,\overrightarrow{m})$ *и системы* $\mathbf{f^t}$.

Если задача имеет единственное решение, то тригонометрические аппроксимации Эрмита–Паде $\left\{\pi_j^t(x;\mathbf{f^t})\right\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. Достаточное условие единственности решения задачи в случае $k=1$ найдено в работе [2]. При выполнении этого условия в [2] получены явные детерминантные формулы для многочленов $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, аналогичные известным формулам Г. Фробениуса (см. [3]) для многочленов Паде степенного ряда. Нашей целью является нахождение необходимых и достаточных условий, при которых поставленная задача имеет единственное решение.

Запишем ряды (1) и полиномы $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме:

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \;\; j=1,2,\dots,k;$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^{m} u_p e^{ipx}\,, \;\; P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx}\,, \;\; j=1,2,\dots,k,$$

где $u_p, v_p^j \in \mathbb{C}$, $c_0^j = \dfrac{a_0^j}{2}$, $c_l^j = \dfrac{a_l^j - ib_l^j}{2}$, $c_{-l}^j = \bar{c}_l^j$, $j = 1, 2, \ldots, k$; $l = 1, 2, \ldots$. Тогда равенства (2) примут вид

$$R_j^t(x; \mathbf{f^t}) = \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} \left(\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx} \right), \;\; j = 1, 2, \ldots, k.$$

Определим матрицы и определители, элементы которых являются коэффициентами тригонометрических рядов $f_j^t(x)$. Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$\mathbb{C}_l^j = \left(c_{l+m}^j \;\; c_{l+m-1}^j \;\ldots\; c_{l+1}^j \;\; c_l^j \;\; c_{l-1}^j \;\ldots\; c_{l-m+1}^j \;\; c_{l-m}^j \right), \;\; j = 1, 2, \ldots, k,$$

а действительному числу x – матрицу-строку

$$E_m^t(x) = \left(e^{-imx} \;\; e^{-i(m-1)x} \;\ldots\; e^{-ix} \;\; 1 \;\; e^{ix} \;\ldots\; e^{i(m-1)x} \;\; e^{imx} \right).$$

Для $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m+1)$

$$F_+^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \cdots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m+m_j-1}^j & c_{n_j+m+m_j-2}^j & \cdots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \cdots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{-n_j-1}^j \\ \mathbb{C}_{-n_j-2}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{-n_j-m_j}^j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \cdots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \cdots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \cdots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель порядка $2m+1$

$$D(n, \overrightarrow{m}; x) := \det \left[F_+^k \;\; \ldots \;\; F_+^2 \;\; F_+^1 \;\; E_m^t(x) \;\; F_-^1 \;\; F_-^2 \;\; \ldots \;\; F_-^k \right]^T.$$

Если $m_j = 0$, то считаем, что определитель $D(n, \overrightarrow{m}; x)$ не содержит блок-матриц $F_\pm^j$. Через $H_{n,\overrightarrow{m}}^t$ обозначим матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \overrightarrow{m}; x)$ после удаления в нём

$(m+1)$-ой строки $E_m^t(x)$. Если в $D(n,\overrightarrow{m};x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку $\mathbb{C}_l^j$, получим новый определитель, который обозначим $d_l^j(n,\overrightarrow{m})$.

Определение 3. *Индекс $(n,\overrightarrow{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\overrightarrow{m} \neq (0,\dots,0)$ будем называть слабо нормальным для системы $\mathbf{f^t}$, если $H^t_{n,\overrightarrow{m}}$ является матрицей полного ранга, т.е. $\mathrm{rank}\, H^t_{n,\overrightarrow{m}} = 2m$.*

Теорема. *Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса $(n,\overrightarrow{m})$, $\overrightarrow{m} \neq (0,\dots,0)$ и системы $\mathbf{f^t}$ задача $\mathbf{A^t}$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс $(n,\overrightarrow{m})$ был слабо нормальным для $\mathbf{f^t}$, т.е. $\mathrm{rank}\, H^t_{n,\overrightarrow{m}} = 2m$.*

Если $\mathrm{rank}\, H^t_{n,\overrightarrow{m}} = 2m$, то при подходящем выборе нормирующего множителя для решений задачи справедливы представления:

$$Q_m^t(x) = D(n,\overrightarrow{m};x)\,,$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n,\overrightarrow{m})e^{ipx}\,,$$

$$R_j^t(x;\mathbf{f^t}) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \left(\, d_p^j(n,\overrightarrow{m})e^{ipx} + d_{-p}^j(n,\overrightarrow{m})e^{-ipx}\,\right),\ \ j=1,2,\dots,k.$$

В теореме предполагается, что мультииндекс $\overrightarrow{m}$ является ненулевым. В случае, если $\overrightarrow{m}=(0,\dots,0)$, то решение задачи очевидно: с точностью до числового множителя $Q_m^t(x)\equiv 1$, а многочлен $P_j^t(x)$ совпадает с n-ой частной суммой тригонометрического ряда $f_j^t(x)$.

Отметим также, что если мультииндекс $(n,\overrightarrow{m})$ является слабо нормальным для $\mathbf{f^t}$, то многочлены $Q_m^t(x), P_1^t(x),\dots,P_k^t(x)$ являются тригонометрическими многочленами с вещественными коэффициентами. Действительно, по предположению коэффициенты рядов (1) являются действительными числами. Поэтому справедливы равенства: $c_{-p}^j = \overline{c}_p^j$, $j = 1,2,\dots,k$; $p=1,2,\dots$. В этом случае

$$\overline{D(n,\overrightarrow{m};x)} = D(n,\overrightarrow{m};x),\ \ \overline{d_p^j(n,\overrightarrow{m})} = d_{-p}^j(n,\overrightarrow{m}).$$

Чтобы убедиться в этом достаточно поменять местами равноотстоящие от краёв строки и столбцы соответствующих определителей.

Из представления для $Q_m^t(x)$ следует, что m_j определяет число коэффициентов ряда $f_j^t(x)$, которые учитываются при построении многочлена $Q_m^t(x)$. В частности, если $m_j=0$, то $D(n,\overrightarrow{m};x)$ не содержит блоки $F_\pm^j$ и при построении многочлена $Q_m^t(x)$ тригонометрический ряд $f_j^t(x)$ не учитывается. Например, если $\overrightarrow{m}=(m_1,0,\dots,0)$, то $m=m_1$ и тогда при нахождении $Q_m^t(x)$ учитываются только коэффициенты ряда $f_1^t(x)$. В этом случае представление для $Q_m^t(x)$ в теореме совпадает с формулой, которая получена в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с.

[2] *Лабыч Ю. А., Старовойтов А. П.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 7. С. 107–130.

[3] *Бейкер мл. Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения М. : Мир, 1986. 502 с.

УДК 517.957

Нелинейная система типа «реакция-диффузия»[1]

В. В. Тихомиров (Москва, Россия)
zedum@cs.msu.ru

В работе исследовано влияние диффузии на устойчивость системы «реакция-диффузия» Колмогорова–Фишера.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, система, устойчивость, диффузия.

Nonlinear reaction-diffusion system[1]

V. V. Tikhomirov (Moscow, Russia)
zedum@cs.msu.ru

This work examines the influence of diffusion on the stability of the Kolmogorov-Fisher reaction-diffusion system.

Keywords: nonlinear differential equation, system, stability, diffusion.

Введение. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$u_t = f(u,v) + d_1 \triangle u, \quad v_t = g(u,v) + d_2 \triangle v, \tag{1}$$

где $u = u(x,y,t)$, $v = v(x,y,t)$, $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$; $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ — коэффициенты диффузии; $\triangle$ — оператор Лапласа.

Функции u и v удовлетворяют условиям Неймана (случай замкнутой системы)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

на границе Γ ограниченной замкнутой области Ω и начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v(0,y) = 0. \tag{3}$$

Ради определенности будем предполагать, что область Ω является квадратом: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

Вектор-функция $F = \{f(u,v), g(u,v)\}$ определяет реакцию компонентов системы (1)–(3), которая описывается динамической системой

$$\frac{dV(t)}{dt} = F(V(t)), \quad V(t) = \{f, g\}.$$

Матрица $\mathrm{diag}(d_1, d_2)$ описывает диффузионные потоки, возникающие в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Решения системы (1)–(3) будем рассматривать в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ (слабые решения).

Основные результаты

Для исследования поведения решений системы (1)–(3) при $t \to +\infty$ воспользуемся энергетическим (вариационным) методом [1–3]. Введем (вариационную) функцию времени

$$S(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2)dx\,dy, \tag{4}$$

которая играет роль энергии системы.

Вычислим производную функции (4) с учетом (1)–(3). В результате получим

$$\frac{dS(t)}{dt} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (u_x u_{xt} + v_x v_{xt} + u_y u_{yt} + v_y v_{yt})dx\,dy. \tag{5}$$

Формулу (5) можно представить в виде

$$S'(t) = S_1'(t) + S_2'(t),$$

где

$$S_1'(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 [u_x(d_1 u_{xx})_x + u_x(f_u u_x + f_v v_x) +$$
$$+ v_x(d_2 v_{xx})_x + v_x(g_u u_x + g_v v_x)]dx\,dy, \tag{6}$$

$$S_2'(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 [u_y(d_1 u_{yy})_y + u_y(f_u u_y + f_v v_y) +$$
$$+ v_y(d_2 v_{yy})_y + v_y(g_u u_y + g_v v_y)]dx\,dy. \tag{7}$$

Введем обозначения

$$d = \min(d_1, d_2), \quad m = \max_{u,v}(|f_u| + |f_v| + |g_u|,\, |g_v| + |f_v| + |g_u|). \tag{8}$$

Подробно исследуем интеграл (6). После интегрирования по частям, с учетом краевых условий, запишем (6) в виде

$$S_1'(t) = -\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (d_1 u_{xx}^2 + d_2 v_{xx}^2) dx\, dy +$$

$$+ \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (f_u u_x^2 + g_v v_x^2 + (f_u + g_u) u_x v_x) dx\, dy. \tag{9}$$

Тогда в силу обозначений (8) имеем

$$S_1'(t) \leq -d \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (u_{xx} + v_{xx}) dx\, dy + m \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (u_x^2 + v_x^2) dx\, dy. \tag{10}$$

Так как $u_x(0) = 0$, $u_x(1) = 0$, то выполняется неравенство Фридрихса

$$\int\limits_0^1 u_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int\limits_0^1 u_x^2 dx, \quad \int\limits_0^1 v_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int\limits_0^1 v_x^2 dx. \tag{11}$$

Используя (9), (10) и (11), получим

$$E_1'(t) \leq (m - d\pi^2) E_1(t).$$

Если $d > m/\pi^2$, то $E'(t) < 0$. Поскольку $E(t) \geq 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) = 0$, и поэтому $u_x(x, y, t) \to 0$ и $v_x(x, y, t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Рассуждая аналогично в отношении интеграла (7), убеждаемся в справедливости неравенства

$$E_2'(t) \leq (m - d\pi^2) E_2(t),$$

и следовательно, $u_y(x, y, t) \to 0$ и $v_y(x, y, t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Если $d > m/\pi^2$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) = 0$, и поэтому все частные производные u_x, v_x, u_y, v_y стремятся к нулю при $t \to +\infty$, а само решение выходит на константу.*

Замечание. Ясно, что полученный результат распространяется на системы с произвольным числом уравнений и неизвестных функций. Полученный результат не всегда удается использовать в конкретных случаях, так как вычисление постоянной m зависит от априорных знаний о решении $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ и его производных.

Таким образом, предложенный метод [4] позволяет сохранить устойчивость системы при достаточно больших коэффициентах диффузии. Эту устойчивость принято называть *пространственно-диффузионной устойчивостью*, даже в случае неустойчивой системы (при $d = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.

[2] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1977. 736 с.

[3] *Братусь А. С., Дрожжин С. В., Якушкина Т. С.* Математические модели эволюции и динамика репликаторных систем. Москва : ЛЕНАНД, 2022. 264 с.

[4] *Иновенков И. Н., Нефедов В. В., Тихомиров В. В.* Компьютерное моделирование динамики населения городского образования // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 2. С. 300–309.

УДК 517.958

О явных аналитических формулах в нелокальной задаче теплопроводности[1]

И. В. Тихонов, Е. Д. Писаренкова (Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, ekaterinapisarenkova@gmail.com

Работа имеет характер краткого обзора. Обсуждается модельная нелокальная задача для одномерного уравнения теплопроводности. Вместо начального условия задан интеграл по времени, взятый от неизвестного решения. Указаны явные аналитические формулы, позволяющие решать поставленную задачу при тех или иных дополнительных предположениях. Использованные подходы допускают перенос на многие другие нелокальные задачи для эволюционных уравнений.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальная задача, разрешающие формулы, полиномы Бернулли, особые решения.

Благодарности: Работа подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

On explicit analytical formulas in one nonlocal heat conduction problem[1]

I. V. Tikhonov, E. D. Pisarenkova (Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, ekaterinapisarenkova@gmail.com

The note is in the nature of a brief review. A model nonlocal problem for the one-dimensional heat equation is discussed. Instead of the initial condition, the integral over time of the unknown solution is given. Explicit analytical formulas are indicated that make it possible to solve the problem under various additional assumptions. Suggested approaches can be transferred to many other nonlocal problems for evolution equations.

Keywords: heat equation, nonlocal problem, resolving formulas, Bernoulli polynomials, special solutions.

Acknowledgements: The paper was carried with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement No. 075-15-2022-284.

Постановка задачи

В полосе $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ рассмотрим нелокальную задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad \int\limits_0^1 u(x,t)\,dt = \varphi(x). \tag{1}$$

Функция $u = u(x,t)$ из класса $C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,1])\cap C(\mathbb{R}\times[0,1])$ и ее начальное состояние
$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2}$$
предполагаются неизвестными. Функция $\varphi\in C(\mathbb{R})$ считается заданной. Требуется найти $u = u(x,t)$, используя соотношения (1).

Возникают обычные вопросы существования и единственности решения задачи, а также явного представления искомого решения. Начнем с результатов работ [1, 2], полученных при помощи традиционной аналитической техники.

Интегральные формулы

В работе [1] дано описание классов единственности решения для подобных нелокальных задач. Конкретно для задачи (1) типичный класс единственности образуют функции $u = u(x,t)$, удовлетворяющие оценке
$$|u(x,t)|\leqslant M\exp(\sigma|x|),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1], \tag{3}$$
с фиксированным показателем $\sigma<\sqrt{\pi}$ и константой $M>0$, зависящей от функции u. Для подтверждения точности такого результата отметим функцию
$$u(x,t) = \exp(\sqrt{\pi}x)\cos(\sqrt{\pi}x+2\pi t), \tag{4}$$
удовлетворяющую задаче (1) при $\varphi(x)\equiv 0$ и оценке (3) при $\sigma=\sqrt{\pi}$. То есть формула (4) дает нетривиальное решение однородной нелокальной задачи (1), и единственность решения в (1) нарушается. Точнее, она нарушается при выборе в классе (3) показателя $\sigma=\sqrt{\pi}$.

Возникает вопрос: как находить решение при соблюдении условия единственности? Из результатов [2] следует разрешающая формула
$$u_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)\varphi(y)\,dy-\varphi''(x),\qquad x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$
действующая для начального состояния (2). Поведение функции Грина
$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{s^2}{\exp(s^2)-1}\exp(isx)\,ds,\qquad x\in\mathbb{R},\qquad i^2=-1, \tag{6}$$
хорошо изучено. В интересующем нас одномерном случае известно, что
$$g(x) = -\sqrt{2\pi}\,\exp(-\sqrt{\pi}\,|x|)\left[\sin\left(\sqrt{\pi}\,|x|+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \tag{7}$$

при $|x| \to \infty$, а также, что

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(k + \frac{1}{2}\right) \zeta\left(k + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k \tag{8}$$

при $x \in \mathbb{R}$ с дзета-функцией Римана (см. формулы (50), (51) в работе [2]).

Соотношения (5)–(8) полезны для разных исследований, связанных с нелокальной задачей (1). На выработанной основе удалось доказать, в частности, разрешимость задачи (1) в классах единственности, подобных (3), для любой функции $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющей оценкам

$$|\varphi(x)| \leqslant M \exp(\sigma|x|), \qquad |\varphi''(x)| \leqslant M \exp(\sigma|x|), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

с константами $M > 0$ и $\sigma < \sqrt{\pi}$. Решение $u = u(x,t)$ находится по формуле Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right) u_0(s)\, ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,1], \tag{10}$$

с начальным условием (2), вычисленным по формуле (5).

Казалось бы, исследование задачи завершено. Но в некоторых простых ситуациях использование интегральных формул (5), (10) довольно тяжело на практике. Например, любой полином $\varphi(x) = P(x)$ или экспонента $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$ с показателем $\alpha \in \mathbb{C}$ при $|\operatorname{Re}\alpha| < \sqrt{\pi}$ попадают в соответствующий класс (9). Однако в подобных примерах получить ответ, исходя из указанных формул, можно лишь с помощью сложных расчетов. Здесь более эффективны другие методы.

Ряды по полиномам Бернулли

В работе [3] предложен способ, позволяющий выражать ответы в нелокальной задаче (1) через ряды по полиномам Бернулли

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\, \varphi^{(2n)}(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]. \tag{11}$$

Полиномы Бернулли $B_n(t)$ определим через производящую функцию

$$\frac{\lambda}{\exp\lambda - 1}\, \exp(\lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\, \lambda^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad |\lambda| < 2\pi. \tag{12}$$

Свойства полиномов Бернулли считаем известными (см. [4, 5]). Напомним только, что $B_0(t) \equiv 1$, а дальше по индукции

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B_n(t)}{n!}\right) = \frac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!}, \qquad \int\limits_0^1 B_n(t)\,dt = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Используя сказанное, нетрудно проверить, что ряд (11) формально удовлетворяет задаче (1). Возникает вопрос о сходимости этого ряда.

В случае, когда $\varphi(x) = P(x)$ — полином степени $d \in \mathbb{N}$, ряд (11) сводится к конечной сумме

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{[d/2]} \frac{B_n(t)}{n!}\,\varphi^{(2n)}(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1], \tag{13}$$

и проблем со сходимостью не возникает. Например, для $\varphi(x) = x^5$ формула (13) сразу дает ответ

$$u(x,t) = x^5 + 10(2t-1)x^3 + 10(6t^2 - 6t + 1)x \tag{14}$$

с учетом того, что

$$B_0(t) \equiv 1, \qquad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \qquad B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Из теоремы единственности следует, что та же функция (14) получится по формулам (5), (10).

Рассмотрим также принципиальный пример $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$ с показателем $\alpha \in \mathbb{C}$. Используя формулу (11) и учитывая соотношение (12), получаем, что

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\,\alpha^{2n}\,\exp(\alpha x) = \frac{\alpha^2}{\exp(\alpha^2) - 1}\,\exp(\alpha x + \alpha^2 t). \tag{15}$$

Ряд сходится при $|\alpha| < \sqrt{2\pi}$, но сумма ряда допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точек вида

$$\alpha_{1,k}^{(\pm)} = \pm(1+i)\sqrt{\pi k}, \qquad \alpha_{2,k}^{(\pm)} = \pm(1-i)\sqrt{\pi k}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

где $i^2 = -1$. Ответ (15) элементарно проверяется подстановкой в исходную задачу (1). Он применим при выборе $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$ с любым показателем $\alpha \in \mathbb{C}$ кроме значений, указанных в формуле (16). Возникает вопрос: как искать решение в этих исключительных случаях? Дадим разъяснение в следующем пункте.

Особые решения

Зафиксируем значение $\mu \in \mathbb{C}$ и рассмотрим пару функций $\varphi_\mu(x)$ и $\psi_\mu(x)$, отличных от тождественного нуля, и таких, что

$$\varphi_\mu''(x) = \mu\varphi_\mu(x), \qquad \psi_\mu''(x) = \mu\psi_\mu(x) + \varphi_\mu(x). \tag{17}$$

Другими словами, рассмотрим собственную и присоединенную функции оператора $A = d^2/dx^2$ с собственным значением μ.

Составим комбинацию $u(x,t) = \gamma_{1,\mu}(t)\varphi_\mu(x) + \gamma_{2,\mu}(t)\psi_\mu(x)$ так, чтобы выполнялось уравнение $u_t = u_{xx}$. С учетом (17) получим

$$u(x,t) = (C(\mu)t + D(\mu))\exp(\mu t)\varphi_\mu(x) + C(\mu)\exp(\mu t)\psi_\mu(x). \tag{18}$$

При выборе коэффициентов $C(\mu) = \mu$ и $D(\mu) = 1$ имеем интеграл

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\,dt = \exp\mu\cdot\varphi_\mu(x) + (\exp\mu - 1)\psi_\mu(x). \tag{19}$$

Применим конструкцию к нужному примеру.

Пусть α — комплексное число из множества (16). Тогда $\exp(\alpha^2) = 1$. Определим функции

$$\varphi(x) = \exp(\alpha x), \qquad \psi(x) = \frac{1}{2\alpha}\,x\exp(\alpha x). \tag{20}$$

Это собственная и присоединенная функции оператора $A = d^2/dx^2$, отвечающие собственному значению $\mu = \alpha^2$. Ориентируясь на формулу (18) со значениями $C(\mu) = \mu = \alpha^2$ и $D(\mu) = 1$, определим решение уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = (\alpha^2 t + 1)\exp(\alpha^2 t + \alpha x) + (\alpha/2)\,x\exp(\alpha^2 t + \alpha x). \tag{21}$$

Согласно (19) со значением $\mu = \alpha^2$ (таким, что $\exp\mu = 1$) имеем

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\,dt = \exp(\alpha x). \tag{22}$$

Тем самым, при любом выборе показателя α из множества (16) функция $u(x,t)$ вида (21) удовлетворяет условию (22), т. е. является решением нелокальной задачи (1) при $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$. Полученное решение не связано с рядом (15) (по полиномам Бернулли), и начальное состояние (2) не выражается интегральной формулой (5).

Пусть, например, конкретно $\alpha = (1+i)\sqrt{\pi}$, т. е. $\alpha = \alpha_{1,1}^{(+)}$ из множества (16). Тогда

$$\varphi(x) = \exp((1+i)\sqrt{\pi}\, x) = \exp(\sqrt{\pi}x)(\cos(\sqrt{\pi}x) + i\sin(\sqrt{\pi}x)), \qquad (23)$$

и формула (21) дает нужное решение нелокальной задачи

$$u(x,t) = \left(2\pi i t + 1 + \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2}\, x\right)\exp(2\pi i t + (1+i)\sqrt{\pi}x). \qquad (24)$$

Представляя функцию (24) в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + iu_2(x,t)$, получим решения $u = u_1(x,t)$ и $u = u_2(x,t)$ для соответствующих условий

$$\varphi_1(x) = \exp(\sqrt{\pi}x)\cos(\sqrt{\pi}x) \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = \exp(\sqrt{\pi}x)\sin(\sqrt{\pi}x),$$

т. е. для вещественной и мнимой частей от функции (23). Проверка всех найденных ответов осуществляется их подстановкой в задачу (1). Свойство единственность в данном классе решений отсутствует: поскольку показатель роста равен $\sqrt{\pi}$, то, не нарушая свойств, к указанным решениям u можно прибавлять функции типа (4).

Изложенные соображения допускают перенос на многие другие ситуации. Отметим, например, задачу

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad \frac{u(x,0) + u(x,1)}{2} = \varphi(x), \qquad (25)$$

которая исследуется по той же схеме с заменой полиномов Бернулли полиномами Эйлера (см. [6]). Общая конструкция нелокальных задач, подобных (1) или (25), на языке абстрактных дифференциальных уравнений имеет вид

$$u'(t) = Au(t), \qquad \int\limits_0^T u(t)\, d\mu(t) = \varphi \qquad (26)$$

с фиксированным значением $T > 0$. Для задачи (26) известен универсальный критерий единственности решения (см. [7]), который дает ориентиры дальнейшим продвижениям.

Авторы признательны А. Ю. Попову, В. Б. Шерстюкову и Ю. С. Эйдельману, в сотрудничестве с которыми возникли многие идеи данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 3. С. 396–405.

[2] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Матем. сборник. 2005. Т. 196, № 9. С. 71–102.

[3] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Эйдельман Ю. С.* Применение полиномов Бернулли в неклассических задачах математической физики // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVIII Международной научной конференции, посвященной 70-летию В. И. Мунермана. Вып. 18. Смоленск : СмолГУ, 2017. С. 223–226.

[4] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Пер. с англ. под ред.: В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. М. : Наука, 1979. 832 с.

[5] *Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark Ch. W.* NIST Handbook of Mathematical Functions. N. Y. : Cambridge University Press, 2010. 952 p.

[6] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Писаренкова Е. Д.* Полиномы Эйлера и их применение в нелокальных задачах математической физики // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 24. Смоленск : СмолГУ, 2023. С. 337–344.

[7] *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Серия матем. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 133–166.

УДК 517.518.82

Примеры экспоненциальной сходимости полиномов Бернштейна к своей порождающей функции[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Обсуждается вопрос о скорости сходимости полиномов Бернштейна при специальных ограничениях на порождающую функцию. Показано, что, если порождающая функция имеет в своем составе линейную часть, то скорость сходимости на таком линейном участке будет экспоненциальной. Полученный результат дополняет известную теорему Вороновской. Он полезен при описании сходимости полиномов Бернштейна от кусочно линейных порождающих функций.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, теорема Вороновской, экспоненциальная скорость сходимости, кусочно линейные функции.

Examples of exponential convergence of Bernstein polynomials to its generating function[1]

I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Under some special restrictions, the question of the rate of convergence of Bernstein polynomials is discussed. It is shown that if the generating function has a linear part, then the rate of convergence on such interval will be exponential. The obtained result complements the well-known Voronovskaya theorem. It is useful in describing the convergence of Bernstein polynomials of piecewise linear generating functions.

Keywords: Bernstein polynomials, Voronovskaya theorem, exponential rate of convergence, piecewise linear functions.

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[0,1]$ вводят формулой

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты. Основные сведения о полиномах Бернштейна представлены в [1]–[3]. Теорема Вороновской (один из главных результатов теории) утверждает, что в каждой точке $x_0 \in (0,1)$, где имеется вторая производная $f''(x_0)$, справедливо представление

$$B_n(f,x_0) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)\, x_0(1-x_0)}{2n} + \frac{\alpha_n(x_0)}{n} \tag{2}$$

с величиной $\alpha_n(x_0) \to 0$ при $n \to \infty$ (см. [1, с. 22]).

Как показывает формула (2), если $f''(x_0) \neq 0$, то в точке $x_0 \in (0,1)$ скорость приближения порождающей функции $f(x)$ полиномами Бернштейна имеет порядок $1/n$, независимо от наличия у функции любых последующих производных. Если же $f''(x_0) = 0$, то

$$B_n(f, x_0) - f(x_0) = o(1/n), \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

и здесь возможны варианты.

Так, для бесконечно дифференцируемой функции $f(x) = (x - x_0)^3$ с фиксированным значением $x_0 \in (0,1)$ выполнено условие $f''(x_0) = 0$. Полиномы Бернштейна в данном примере допускают представление

$$B_n(f, x) = (x - x_0)^3 + \frac{3x(1-x)(x-x_0)}{n} + \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$B_n(f, x_0) - f(x_0) = B_n(f, x_0) - 0 = \frac{x_0(1-x_0)(1-2x_0)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $x_0 \neq 1/2$, то в точке $x = x_0$ имеем приближение порядка $1/n^2$. Если же $x_0 = 1/2$, то приближение становится «идеальным» благодаря совпадениям $B_n(f, 1/2) - f(1/2) = 0$, верным при всех $n \in \mathbb{N}$. Последний эффект также связан с «нечетностью» функции $f(x) = (x - 1/2)^3$ относительно середины отрезка $[0,1]$.

Естественно закрыть вопрос и уточнить формулу (3) для любого полинома $f(x) = (x - x_0)^p$ с натуральным показателем $p \geqslant 3$. Такую задачу можно решить, используя формулы Бернштейна [4] и Теляковского [5] при некоторых специальных к ним дополнениях.

Сосредоточимся на другой ситуации. Оказывается, при выполнении условия $f''(x) = 0$ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$ остаток в формуле (3) для всякой точки $x_0 \in (\alpha, \beta)$ будет иметь не степенной, а экспоненциальный характер. Это принципиальное обстоятельство было обнаружено сначала на примере симметричного модуля $f(x) = |2x - 1|$ (см. [6, с. 32–35]), а затем — для произвольной непрерывной функции, имеющей в составе «линейную часть» (см. [7, с. 161–164]).

Общий результат из [7] состоит в следующем.

Теорема. *Пусть* $B_n(f, x)$ — *полиномы Бернштейна* (1) *для порождающей функции* $f \in C[0,1]$, *такой, что*

$$f(x) = cx + d \quad \textit{при} \quad x \in [\alpha, \beta]$$

с фиксированными значениями $c, d \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \alpha < \beta < 1$. *Тогда для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \in (\alpha, \beta)$ *справедлива оценка*

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \left(C_\alpha \frac{(\Delta_\alpha(x))^n}{x-\alpha} + D_\beta \frac{(\Delta_\beta(x))^n}{\beta - x} \right) \|f\|, \qquad (4)$$

где

$$\Delta_\lambda(x) \equiv \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\lambda \left(\frac{1-x}{1-\lambda}\right)^{1-\lambda} \qquad (5)$$

при $\lambda = \alpha$ *и* $\lambda = \beta$, *коэффициент* $C_\alpha > 0$ *зависит лишь от* α, *коэффициент* $D_\beta > 0$ *зависит лишь от* β, *а* $\|f\| \equiv \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

Теорема сохраняет свою силу при $\alpha = 0$ или $\beta = 1$, если условиться, что $C_0 = D_1 = 0$. Соответствующее слагаемое в формуле (4) пропадает. Точнее, для функции $f \in C[0,1]$, линейной на отрезке $[0, \beta] \subset [0,1)$, при всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{D_\beta}{\sqrt{n}} \frac{(\Delta_\beta(x))^n}{\beta - x} \|f\|, \qquad x \in (0, \beta). \qquad (6)$$

Аналогично для функции $f \in C[0,1]$, линейной на отрезке $[\alpha, 1] \subset (0,1]$, при всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{C_\alpha}{\sqrt{n}} \frac{(\Delta_\alpha(x))^n}{x - \alpha} \|f\|, \qquad x \in (\alpha, 1). \qquad (7)$$

Выражение $\Delta_\lambda(x)$ из формулы (5) при любом $\lambda \in (0,1)$ можно называть *регулятором Канторовича* — роль подобных конструкций впервые отмечена в работе [8].

Нетрудно проверить, что $0 < \Delta_\lambda(x) < 1$ при $x \in (0, \lambda) \cup (\lambda, 1)$. Отсюда следует экспоненциальный характер сходимости полиномов Бернштейна, указанный в формулах (4), (6), (7).

Полученные оценки применимы, например, при выборе кусочно линейной порождающей функции $f \in C[0,1]$. В таком случае скорость сходимости полиномов Бернштейна будет экспоненциальной на участках линейности функции $f(x)$. При приближении x к точке излома функции $f(x)$ эта экспоненциальная скорость будет снижаться, а в самой точке излома сходимость будет медленной, степенной, порядка $1/\sqrt{n}$.

Весьма вероятно, что в подобных примерах оценки скорости сходимости полиномов Бернштейна удастся распространить в комплексные зоны, примыкающие к отрезку $[0,1]$ и ограниченные соответствующими *лемнискатами Канторовича* из [8] (по аналогии с результатами [9] для рационального модуля $f(x) = |qx - p|$).

Отметим также, что менее точная версия приведенной теоремы доказана вероятностными методами в недавней работе [10]. Подобный результат потребовался при полиномиальной аппроксимации локально постоянных функций на системе непересекающихся отрезков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. N. Y. : Chelsea Publ. Co., 1986. x+134 p.

[2] *Bustamante J.* Bernstein Operators and Their Properties. Birkhäuser, 2017. xii+420 p.

[3] *Виденский В. С.* Линейные положительные операторы конечного ранга. Многочлены Бернштейна : учебное пособие для вузов. СПб. : Лань, 2023. 144 с.

[4] *Bernstein S.* Complément à l'article de E. Voronovskaya «Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein» // Доклады Академии Наук СССР, А. 1932. № 4. С. 86–92. [См. также *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Том II. Конструктивная теория функций [1931-1953]. Изд-во АН СССР, 1954. С. 155–160.]

[5] *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций могочленами Бернштейна и многочленами Канторовича // Труды МИАН. 2008. Т. 260. С. 289–296.

[6] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

[7] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

[8] *Канторович Л. В.* О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. VII сер. Отд-ние мат. и естеств. наук. 1931. № 8. С. 1103–1115.

[9] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематич. обзоры. 2019. Т. 170. С. 71–117.

[10] *Malykhin Yu., Ryutin K.* Polynomial approximation on disjoint segments and amplification of approximation // arXiv preprint arXiv: 2306.11613, 2023.

УДК 517.9

О разрешимости разностных уравнений в классе рациональных функций[1]

П. В. Тришин (Красноярск, Россия)
me@trishin.xyz

В работе получены необходимое условие и достаточное условие разрешимости однородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами в классе рациональных функций. Необходимым условием является ограничение на многогранник Ньютона характеристического полинома. В двумерном случае это условие заключается в наличии параллельных сторон у многоугольника. Достаточным условием является равенство нулю определенных сумм коэффициентов уравнения. В случае выполнения достаточного условия решением является класс рациональных функций, знаменатели которых образуют подкольцо в кольце полиномов. Это подкольцо может быть ассоциировано с гранью многогранника Ньютона характеристического полинома уравнения.

Ключевые слова: разностные уравнения, рациональные функции, многогранник Ньютона.

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

On the solvability of difference equations in the class of rational functions[1]

P. V. Trishin (Krasnoyarsk, Russia)
me@trishin.xyz

A necessary and a sufficient condition for solvability of homogeneous difference equations with constant coefficients in the class of rational functions are obtained. The necessary condition is a restriction on the Newton polyhedron of the characteristic polynomial. In the two-dimensional case, this condition is the existence of parallel sides on the polygon. A sufficient condition is the equality to zero of certain sums of the coefficients of the equation. If the sufficient condition is satisfied, the solution is the class of rational functions whose denominators form a subring in the ring of polynomials. This subring can be associated with an edge of the Newton polyhedron of the characteristic polynomial of the equation.

Keywords: difference equations, rational functions, Newton's polyhedron.

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2023-936).

Введение

Пусть $R(z_1,\ldots,z_n) = \frac{N(z_1,\ldots,z_n)}{D(z_1,\ldots,z_n)}$ – рациональная функция, $z \in \mathbb{C}^n$, N, D – взаимно простые полиномы. Функция R является аналитической в дополнении $\mathbb{C}^n \setminus \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S} = \{z \in \mathbb{C}^n : D(z) = 0\}$, $\#\mathfrak{S}$ – количество неприводимых компонент $\mathfrak{S}$.

Разностное уравнение мы записываем в виде

$$P(\delta)R(z) = 0 \;, \tag{1}$$

где $P(\zeta) = \sum\limits_{\alpha \in A} p_\alpha \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n}$, $A \subset \mathbb{Z}^n$, $0 \in A$ – характеристический многочлен (Лорана), $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ – набор атомарных операторов сдвига $\delta_i R(z_1, \dots, z_n) = R(z_1, \dots, z_i + 1, \dots, z_n)$. Будем считать что размерность многогранника $\mathbf{Ch}(A)$ (выпуклой оболочки множества A, которая называется многогранником Ньютона полинома P) равна в точности n.

Если R – произвольная рациональная функция, то $R_P(z) := P(\delta)R(z)$ также рациональна и голоморфна в $\mathbb{C}^n \setminus (\mathfrak{S} - A) := \{z \in \mathbb{C}^n : z + \alpha \notin \mathfrak{S},\ \forall \alpha \in A\}$.

Будем говорить, что R является *рациональным решением разностного уравнения*, если она удовлетворяет (1) для всех z из множества $\mathbb{C}^n \setminus (\mathfrak{S} - A)$. Заметим, что поскольку N и D являются взаимно простыми многочленами, то R не может быть аналитически продолжена в $\mathfrak{S}$.

Отметим, что в случае $n = 1$ для неоднородного уравнения с полиномиальными коэффициентами задача решена Абрамовым С. А. [1]. Но однородное уравнение (1) рациональных решений не имеет (при $n = 1$), а методом шагов [2] всегда можно построить аналитическое продолжение мероморфного решения (с конечным числом полюсов) в $\mathbb{C}$.

Отличие одномерного и многомерного случая состоит в том, что в случае $n > 1$ полярное множество рациональной функции может располагаться в $\mathbb{C}^n$ таким образом, что метод шагов будет не применим для построения аналитического продолжения решения.

Необходимое условие

С каждой k-мерной плоскостью $l = \{z \in \mathbb{C}^n : L_i(z) = c_i, i = 1, \dots, n-k\}$ можно ассоциировать множество полиномов вида

$$D_l(L_1(z), \dots, L_{n-k}(z)) \;,$$

которые образуют подкольцо в кольце полиномов $\mathbb{C}[z]$. Здесь D_l – это полиномы от $n - k$ переменных. Обозначим это подкольцо $\mathbb{C}_l[z]$ и заметим, что оно не зависит от набора однородных линейных функций L_i, определяющих плоскость l.

Если плоскость l пересекает многогранник $\mathbf{Ch}(A)$ по некоторой грани Γ, то с гранью Γ также ассоциируем подкольцо $\mathbb{C}_\Gamma[z]$, выбирая в качестве уравнений $L_i(z) = c_i$ уравнения гиперграней смежных с Γ. В этом случае $\mathbb{C}_l[z] \subset \mathbb{C}_\Gamma[z]$, причем если $\dim l = \dim \Gamma$, то $\mathbb{C}_l[z] = \mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Оказывается, что особое множество $\mathfrak{S}$ рационального решения уравнения (1) может состоять только из неприводимых компонент σ таких, что они являются нулем элемента из подкольца $\mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Теорема 1. *Если рациональная функция $R(z) = N(z)/D(z)$ является решением уравнения (1), тогда существует непустой набор плоскостей $\{l_j\}_{j=1}^{\#\mathfrak{S}}$ и граней $\{\Gamma_j\}_{j=1}^{\#\mathfrak{S}}$ многогранника Ньютона характеристического полинома уравнения таких, что*

1. *Имеет место включение $\Gamma_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, q_{ij}\rangle = c_{ij}, i = 1, \ldots, n - k(j)\} \subset l_j$, где q_{ij} – нормали к граням многогранника $\mathbf{Ch}(A)$, попадающие в нормальный конус к грани Γ_j, $k(j) = \dim \Gamma_j \leqslant \dim l_j$;*

2. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и j пересечение $(l_j + x) \cap \mathbf{Ch}(A)$ не является вершиной $\mathbf{Ch}(A)$;*

3. *Знаменатель $D(z)$ представляется в виде произведения*

$$D(z) = D_1(z) \cdot \ldots \cdot D_{\#\mathfrak{S}}(z)\ ,$$

каждый множитель которого является композицией

$$D_j(z) = D_{\Gamma_j}(\langle z, q_{1j}\rangle, \ldots, \langle z, q_{n-k(j),j}\rangle)\ ,$$

где D_{Γ_j} – полином от $n - k(j)$ переменных. То есть

$$R(z) = \frac{N(z)}{\prod_{j=1}^{\#\mathfrak{S}} D_{\Gamma_j}(\langle z, q_{1j}\rangle, \ldots, \langle z, q_{n-k(j),j}\rangle)}\ .$$

Теорема содержит необходимое условие на разрешимость уравнения (1) в классе рациональных функций. Это условие формулируется в виде ограничения на многогранник Ньютона $\mathbf{Ch}(A)$ характеристического полинома P и является многомерным обобщением свойства параллельности сторон многоугольника.

Необходимое условие: *Для существования рационального решения уравнения (1) необходимо, чтобы существовала хотя бы одна плоскость l, $1 \leqslant \dim l \leqslant n - 1$ такая, что любой сдвиг $l + x$, $x \in \mathbb{R}^n$ не пересекал $\mathbf{Ch}(A)$ только по вершине.*

Достаточное условие

Знаменатель любого рационального решения разностного уравнения состоит из двух множителей – периодического полинома и апериодического [3].

Полином $\Pi \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ называется *периодическим*, если следующее множество бесконечно

$$\mathrm{Spread}(\Pi, \Pi) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \gcd(\Pi(z), \Pi(z+\alpha)) \neq 1\} ,$$

и *апериодическим* в противном случае. Справедлива

Лемма 1. *Знаменатель рационального решения уравнения* (1) *является периодическим полиномом.*

Дальнейшая идея заключается в том, что периодическим множителем в знаменателе может выступать любой элемент подкольца $\mathbb{C}_\Gamma[z]$ и для решения уравнения (1) следует искать универсальный числитель $N_\Gamma(z)$ такой, что отношение

$$R_\Gamma(z) = \frac{N_\Gamma(z)}{D_\Gamma(\langle z, q_1\rangle, \dots, \langle z, q_{n-k}\rangle)} .$$

удовлетворяет (1) при любом знаменателе $D_\Gamma \in \mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Теорема 2. *Множество функций* $\{\frac{N_\Gamma(z)}{D_\Gamma(z)}\}$, *где* $N_\Gamma(z)$ *– некоторый полином, а* $D_\Gamma(z)$ *произвольный элемент из подкольца* $\mathbb{C}_\Gamma[z]$, *удовлетворяет уравнению* (1) *тогда и только тогда, когда для любого* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{\alpha \in (l_\Gamma + x)\cap A} p_\alpha = 0 ,$$

где l_Γ *– это прямая, содержащая грань* Γ *и* $\dim \Gamma = \dim l$.

Достаточное условие формулируется следующим образом.

Достаточное условие: *Если существует плоскость* $l \subset \mathbb{R}^n$ *такая, что для любого* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{\alpha \in (l + x)\cap A} p_\alpha = 0 ,$$

то уравнение (1) разрешимо в классе рациональных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Абрамов С. А.* Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 11. С. 1611–1620.

[2] *Миролюбов Е. М., Солдатов М. А.* Линейные однородные разностные уравнения. Москва : Наука, 1981. 304 с.

[3] *Kauers M., Schneider C.* Partial Denominator Bounds for Partial Linear Difference Equations // Proceedings of ISSAC'10, 2010. P. 211–218.

УДК 517.9

Сохранение массивности при вариациях потенциала[1]

В. В. Филатов (Волгоград, Россия)

filatov@volsu.ru

Заметим, что вопрос о взаимосвязях между существованием различных множеств до сих пор не изучался. Однако, очевиден тот факт, что из существования q - массивного множества (ассоциированное с оператором Шрёдингера) следует существование массивного множества. Однако используя уже известные результаты легко получить следующее утверждение: если на многообразии M существует L - массивное множество, то на нём существует и L_1 - массивное множество. Как оказалось можно получить более сильное утверждение о том, что всякое L - массивное множество является L_1 - массивным.

Ключевые слова: массивные множества, эллиптические уравнения, римановы многообразия, теоремы лиувилля.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90110).

Preservation of massiveness due to variations of potential[1]

V. V. Filatov (Volgograd, Russia)

filatov@volsu.ru

It should be noted that the question of the relationships between the existence of various sets has not yet been studied. However, it is evident that the existence of a q-massive set (associated with the Schrodinger operator) implies the existence of a massive set. However, using already known results, it is easy to obtain the following statement: if an L-massive set exists on a manifold M, then an L_1 - massive set also exists on it. As it turns out, a stronger statement can be made that every L-massive set is an L_1 - massive set.

Keywords: massive sets, elliptic equations, Riemannian manifolds, Liouville theorems.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-31-90110).

Введение

Данная работа посвящена изучению ограниченных решений полулинейного уравнения

$$Lu \equiv \Delta u - g(x,u) = 0 \tag{1}$$

на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Предполагается, что $g(x,\xi) \not\equiv 0-$ липшицева функция в $M \times R$, такая, что $g(x,\xi_1) \geq g(x,\xi_2)$ и $g(x,-\xi) = -g(x,\xi)$ для всех $\xi_1 \geq \xi_2$ и $\xi \in R$.

Одним из истоков данной тематики является классификационная теория двумерных некомпактных римановых поверхностей. Отличительным свойством поверхностей параболического типа является выполнение на них теоремы типа Лиувилля, утверждающей, что всякая ограниченная снизу супергармоническая функция на таких поверхностях является тождественной постоянной.

Данное свойство поверхностей параболического типа послужило основой для распространения понятия параболичности на римановы многообразия размерности выше двух. А именно, говорят, что некомпактное многообразие имеет параболический тип, если всякая положительная супергармоническая функция на нём является константой. В противном случае, говорят, что некомпактное риманово многообразие имеет гиперболический тип.

Очевидно, что классификационная теория римановых многообразий имеет прямое отношение к теоремам типа Лиувилля. Традиционно классической формулировкой теоремы Лиувилля считается утверждение о том, что всякая ограниченная гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ есть тождественная постоянная. В настоящее время к теоремам типа Лиувилля осуществляется следующий подход.

Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Говорят, что на M выполнено (A, L) - лиувиллево свойство, если любое решение уравнения $Lu = 0$, принадлежащее функциональному классу A, тривиально.

Массивные множества

Особую эффективность в вопросах выполнения теорем типа Лиувилля показала ёмкостная техника. В работе А.А. Григорьяна [5] было введено понятие массивного множества. Приведём обобщённое определение данное в работе [2].

Пусть M - произвольное некомпактное риманово многообразие с пустым краем. Пусть $\Omega \subset M$- открытое собственное подмножество. Если на M существует v - нетривиальное субрешение уравнения (1) такое, что $0 \leq v < 1$ и $v = 0$ в $M \setminus \Omega$, то множество Ω называют L - массивным, а такую функцию v - допустимой для Ω.

Если же на M существует v - нетривиальное субрешение уравнения (1), такое что, $0 \leq v < 1, v = 0$ в $M \setminus \Omega$ и, кроме того, выполнено

$$D(\Omega, v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 + 2 \left(\int\limits_{0}^{v} g(x,t) \right) dx < \infty,$$

то множество Ω будем называть LD - массивным.

Приведём известные результаты. В случае, когда $g(x, u) \equiv 0$ рассматривался в работе А. А. Григорьяна [5]. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. (А. А. Григорьян) *Размерность пространства ограниченных гармонических функций (с конечным интегралом энергии) на M не менее $m \geq 2$, тогда и только тогда, когда на многообразии существует m попарно не пересекающихся массивных (D-массивных) подмножеств.*

Случай $g(x, u) = q(x)u$ рассматривался в работе А. А. Григорьяна, А. Г. Лосева [4]. Приведём соответствующий результат.

Теорема. (А.А. Григорьяна, А.Г. Лосев) *Размерность пространств ограниченных решений уравнения*

$$\Delta u - q(x)u$$

на M не менее $m \geq 1$ тогда и только тогда, когда на многообразии существует m попарно не пересекающихся L- массивных подмножеств.

В общем случае, для ограниченных решений уравнения (1) в работе А. Г. Лосева, В. В. Филатова [2] был получен следующий результат.

Теорема. (А.Г. Лосев, В.В. Филатов) *На многообразии M существует нетривиальное ограниченное решение полулинейного уравнения* (1) *(с конечным $D(M, u)$) тогда и только тогда, когда на многообразии существует $L(LD)$ - массивное множество.*

Взаимосвязь между массивными множествами

Заметим, что вопрос о взаимосвязях между существованием различных множеств до сих пор не изучался. Однако, очевиден тот факт, что из существования L - массивного множества (ассоциированное с оператором Шрёдингера) следует существование массивного множества.

Кроме этого используя известные на данный момент теоремы можно получить более нетривиальные результаты. Так например в работе А. А. Григорьяна, Н. С. Надирашвили [3] была доказана следующая теорема.

Теорема. (А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили) *Пусть $0 \leq q_2(x) \leq Aq_1(x)$, где $A = const > 0$, $q_2 \not\equiv 0$. Тогда если всякое ограниченное решение уравнения*

$$\Delta u - q_2(x)u = 0$$

есть тождественный ноль, то и всякое ограниченное решение уравнения

$$\Delta u - q_1(x)u = 0$$

есть тождественный ноль.

Как следствие данной теоремы получаем, что из существования нетривиального ограниченного решения уравнения $\Delta u - q_1(x)u = 0$ следует существование нетривиального ограниченного решения уравнения $\Delta u - q_2(x)u = 0$.

Из этого несложно получить следующее утверждение.

Утверждение. *Если на многообразии M существует q_1 - массивное множество, то на нём существует и q_2 - массивное множество.*

Перейдём к формулировке основного результата.

Пусть $0 \leq g_1(x,\xi) \leq Ag(x,\xi)$, где $A = const > 0, g_1(x,\xi) \not\equiv 0$ при $\xi \geq 0$. Рассмотрим решения уравнений

$$Lu \equiv \Delta u - g(x,\xi) = 0$$

и

$$L_1 u \equiv \Delta u - g_1(x,\xi) = 0.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Всякое $L(LD)$ - массивное множество является $L_1(L_1 D)$ - массивным множеством.*

Заметим, что данная теорема обобщает результат, полученный в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Филатов В. В.* Массивные множества, порождённые полулинейными эллиптическими операторами на некомпактных римановых многообразиях // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. 2023. Т. 15, № 2. С. 26–31.

[2] *Losev, A.G., Филатов, V.V.* Liouville type theorems for solutions of semilinear equations on non-compact Riemannian manifolds // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2021. T. 31, № 4. C. 629–639.

[3] *Григорьян А. А., Надирашвили Н. С.* Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // Изв. вузов. Матем. 1987. № 5. С. 31–42.

[4] *Григорьян А. А., Лосев А. Г.* О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 3. С. 34–42.

[5] *Григорьян А. А.* О размерности пространств гармонических функций // Матем. заметки. 1990. № 5. С. 55–61.

УДК 517.51

Разложение элементов пространств $L_p\{(0,1]^m\}$, $p \geq 1$, по системам из сжатий и сдвигов одной функции с коэффициентами в виде простых чисел[1]

В.И. Филиппов (г. Саратов, Россия)

888vadim@mail.ru

Получено, что можно получать не только целочисленное разложение функций из пространств L_p по системам состоящих из разных сжатий и сдвигов одной функции, но и разложения с коэффициентами в виде простых чисел. Эти исследования интересны также и специалистам по кодированию и шифровке сигналов.

Ключевые слова: целочисленное разложение функций, системы из сжатий и сдвигов одной функции в многомерных пространствах $L_p\{(0,1]^m\}$, цифровая обработка информации, цифровая передача информации..

Decomposition of elements of spaces $L_p\{(0,1]^m\}$, $p \geq 1$, in systems of contractions and shifts of one function with coefficients in the form of prime numbers [1]

V.I. Filippov (Saratov, Russia)

888vadim@mail.ru

It was found that it is possible to obtain not only an integer decomposition of functions from L_p spaces into systems consisting of different contractions and shifts of one function, but also decompositions with coefficients in the form of prime numbers. These studies are also of interest to specialists in signal coding and encryption.

Keywords: Integer decomposition of functions, systems from contractions and shifts of one function in multidimensional spaces $L_p\{(0,1]^m\}$, digital information processing, digital information transmission..

Для получения результатов использованы методы, полученные автором в работах [1, 2]. Интерес к системам из сжатий и сдвигов одной функции усилился в связи с исследованиями по всплескам и фреймам. В предложенных нами исследованиях не строятся ортонормированные системы из систем сжатий и сдвигов одной функции. Мы получаем разложение элементов пространств L_p непосредственно по данной системе, состоящей из сжатий и сдвигов одной функции. Рассмотренные системы переполнены [1, 2], но предложенный в данной работе алгоритм позволяет получить разложения с большим числом нулевых коэффициентов, при этом коэффициенты являются простыми числами. Ранее подобных исследований, с приближением или разложением функций с коэффициентами в виде простых чисел, в функциональных пространствах не проводилось. Но интерес к равномерному приближению непрерывных функций с любой точностью многочленами с целыми коэффициентами на сегменте вещественной оси возник, начиная с 1914 г., в работах I. Pal, С. Какейя, M. Fekete, И. Н. Хлодовского, С. Н. Бернштейна, Л. В. Канторовича, Р. М.Тригуба [3] и других авторов. В статье [4] получены результаты об алгебраических многочленах с целыми коэффициентами, мало уклоняющихся от нуля на отрезке. А в работе [5] приводится результат о существовании последовательности тригонометрических многочленов с целыми положительными коэффициентами, которая сходится к нулю почти всюду.

В статьях [6, 7] рассмотрены, также, системы из сжатий и сдвигов одной функции, но коэффициенты разложения находятся почти как коэффициенты Фурье и несколько по другому, чем в предложенной работе.

Предположим, что

$$\psi(x)=\begin{cases}1, \text{ if } x\in(0,1];\\ 0, \text{ if } x\notin(0,1],\end{cases} \tag{1}$$

$\Psi(t)=\Psi(t_1,t_2,...,t_m)=\psi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdots\psi(t_m)$, $t_i\in(0,1]$, $i=\overline{1,m}$.

Разложение элементов из пространств L_p будем производить по системам функций

$$\begin{gathered}\{\Psi_{n,\mathbf{j}}\}=\{\Psi_{n,j_1,j_2,\ldots,j_m}\}=\{\alpha_{n-1}\psi({b_1}^{n-1}t_1-j_1+1)\cdot\\ \psi({b_2}^{n-1}t_2-j_2+1)\cdots\psi({b_m}^{n-1}t_m-j_m+1)\}=\{\Psi_l\},\\ \alpha_{n-1}\to 0,\ \alpha_{n-1}>0,\ n=1,2,...,\ b_i\in N,\ b_i>1,\ j_i=\overline{1,{b_i}^{n-1}},\\ t_i\in(0,1],\ i=\overline{1,m},\ l=1,2,....\end{gathered} \tag{2}$$

Покажем как l согласуется с номерами n и $j_i=\overline{1,{b_i}^{n-1}}$, $i=\overline{1,m}$. Предлагаем следующую нумерацию. Пусть $n=1,2,....$ Далее для каждого фиксированного n номер j_i изменяется от 1 до ${b_i}^{n-1}$. Совокупность этих элементов (при фиксированном n) назовем пачкой. Легко видеть, что элементов системы (2) в n-ой пачке $r_n=\prod_{i=1}^m {b_i}^{n-1}$. Очевидно, что при $n=1$ элементов в пачке 1. Поэтому $l=1=r_1$, $\Psi_{1,1,...,1}=\Psi_1$. Далее переходим ко второй пачке и так далее. Порядок нумерации элементов системы в пачке не влияет на сходимость ряда.

Пусть произвольная функция $f\in L_p\{(0,1]^m\}$, $1\le p<\infty$. Рассмотрим разложение в ряд функции f

$$\sum_{l=1}^{\infty}d_l^*\Psi_l=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1=1}^{{b_1}^{i-1}}\sum_{j_2=1}^{{b_2}^{i-1}}\cdots\sum_{j_m=1}^{{b_m}^{i-1}}d^*_{i,j_1,j_2,\ldots,j_m}\Psi_{i,j_1,j_2,\ldots,j_m}\right), \tag{3}$$

где коэффициенты $d^*_{i,j_1,j_2,\ldots,j_m}$ находятся специальным образом по рекурентным формулам и являются простыми числами.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$. *Тогда ряд (3) по системе (2) с образующей функцией* ψ *как в (1), а коэффициенты* $d^*_{i,j_1,j_2,\ldots,j_m}$ *находятся специальным образом и являются простыми числами, сходится по норме пространства* $L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$ *к* $f(t)$, *т.е.* $\|f - \sum_{l=0}^{n} d_l^* \Psi_l\|_p \to 0, \quad n \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Filippov V., Oswald P.* Representation in L^p by series of translates and dilates of one function // Journal of Approximation Theory, 1995, 82:1, P. 15-29.

[2] *Филиппов В. И.* Ряды типа Фурье с целыми коэффициентами по системам из сжатий и сдвигов одной функции в пространствах $L_p, p \ge 1$ // Изв. вузов. Матем., 2019, №6, С.58–64.

[3] *Тригуб Р. М.* Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1962, 26:2, С. 261–280.

[4] *Кашин Б. С.* Об алгебраических многочленах с целыми коэффициентами, мало уклоняющихся от нуля на отрезке // Матем. заметки, 1991, 50:3, С. 58–67.

[5] *Borodin P. A., Konyagin S. V.* Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of single function on the line // Analysis Math., 2018, 44 (2), P. 163-183.

[6] *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // Доклады Академии наук, 2012, 445:2, С. 135-138.

[7] *Кудрявцев А. Ю.* О сходимомсти орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Матем. заметки, 2012, 92:5, С. 707-720.

УДК 517.5

Радиус Бора и оператор свёртки Адамара[1]

Р. Ш. Хасянов (Санкт-Петербург, Россия)
st070255@student.spbu.ru

Вводится понятие радиуса Бора пары операторов. В терминах свёрточной функции получена общая формула вычисления радиуса Бора r оператора свёртки Адамара с фиксированным коэффициетом a и ограничением на величину r/a. При существенно меньших ограничениях на r/a получена общая формула для оценок радиуса оператора свёртки Адамара с фиксированным коэффициентом. Этот результат применён к вопросу о неравенстве Бора для оператора дифференцирования: показано, что новый метод получения нижней оценки в этой задаче в ряде случаев эффективнее известного метода.

Ключевые слова: Радиус Бора, оператор свёртки Адамара, подчинённые функции, оценки коэффициентов аналитических функций.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-30002-П).

The Bohr radius and the Hadamard convolution operator[1]

R. Sh. Khasyanov (Saint Petersburg, Russia)
st070255@student.spbu.ru

The concept of the Bohr radius of a pair of operators is introduced. In terms of the convolution function, a general formula for calculating the Bohr radius r of the Hadamard convolution type operator with a fixed initial coefficient a and restrictions on the value r/a is obtained. With much weaker restrictions on r/a, a general formula for estimating of the Bohr radius of the convolution Hadamard operator with initial coefficient is obtained. This result is applied to the question of Bohr's inequality for the differentiation operator: it is shown that the new method for obtaining a lower bound in this problem is in a number of cases more effective than the known method.

Keywords: The Bohr radius, Hadamard convolution operator, subordinate functions, coefficient estimates of analytic functions..

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-30002) https://rscf.ru/project/23-71-33001/.

В 1914 году Х. Бор, занимаясь рядами Дирихле, заметил [1] следующий интересный факт, который сейчас называется явлением Бора:

Теорема A. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *и* $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$ *в круге* $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. *Тогда*

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1/3.$$

Число $1/3$ *неулучшаемое.* Сам Х. Бор доказал эту теорему только для $r \le 1/6$, а константа $1/3$ была получена в том же году независимо М. Рисом, И. Шуром и Ф. Винером (разные доказательства собраны в аппендиксе работы [2]).

Теорема Бора эквивалентна следующему неравенству:

$$\sum_{n\ge 0} |a_n| r^n \le \|f\|_\infty, \quad 0 \le r \le 1/3.$$

Активное изучение различных обобщений и модификаций неравенства Бора началось в середине 1990-х годов, когда П. Диксон, используя неравенство Бора, решил давнюю проблему о характеризации банаховых алгебр [2].

В работе [3] было введено определение радиуса Бора пары операторов и связанные с ним понятия. Напомним сначала определение мажорантного ряда:

Определение *Пусть* $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n,\ z \in \mathbb{D}$. *Функционал*

$$M_r f := \sum_{n\ge 0} |a_n| r^n$$

называется мажорантным рядом или суммой Бора функции f.

Пусть D — открытый круг с центром в нуле или интервал с центром в нуле. Обозначим через $\mathcal{H}(D)$ множество всех функций вида $f(z) = \sum\limits_{n\ge 0} a_n z^n$, которые сходятся в D. Пусть

$$\mathcal{H}_m(D) := \{f \in \mathcal{H}(D):\ f(0) = f'(0) = ... = f^{(m-1)}(0) = 0\}.$$

Определение. *Пусть* $m, t, s_1, s_2 \ge 0$ *и*

$$T_1 : \mathcal{H}_m(t\mathbb{D}) \to \mathcal{H}(\mathbb{D}), \quad T_2 : \mathcal{H}_m(-s_1, s_1) \to \mathcal{H}(-s_2, s_2)$$

– линейные операторы. Максимальный $R \in [0, \infty)$, *для которого*

$$\|T_1 f\|_\infty \le 1 \Longrightarrow |T_2 M_r f| \le 1, \quad 0 \le r \le R, \tag{1}$$

будем называть радиусом Бора пары T_1 *и* T_2 *и обозначать* $R_{T_1\to T_2}$. *Если* $T_1 = T_2$, *просто пишем* R_{T_1}.

Как и в случае с классическим неравенством Бора условие (1) эквивалентно неравенству

$$|T_2 M_r f| \le \|T_1 f\|_\infty.$$

Обозначим через id_m тождественный оператор, заданный на пространстве $\mathcal{H}_m(\mathbb{D})$. Записи $R_{id\to T}$ и $R_{T\to id}$ означают, что id — тождественный оператор того же пространства, на котором определён оператор T.

Из теоремы Бора следует, что $R_{id_0} = 1/3$. В 1962 году Э. Бомбиери доказал [4], что $R_{id_1} = 1/\sqrt{2}$. Задача о вычислении R_{id_m} остаётся открытой. Она обсуждалась в [5].

Определение. *Функцию*

$$m_{T_1\to T_2}(r) := \sup_{f:\|T_1 f\|_\infty \le 1} \frac{|T_2 M_r f|}{\|T_1 f\|_\infty}$$

будем называть функцией Бора-Бомбиери операторов T_1 и T_2. Если операторы T_1 и T_2 совпадают, пишем $m_{T_1}(r)$.

Из теоремы Бора следует, что $m_{id_0}(r) = 1, 0 \le r \le 1/3$. В [4] доказано, что для $r \in [1/3, 1/\sqrt{2}]$,

$$m_{id_0}(r) = \frac{3 - \sqrt{8(1-r^2)}}{r}.$$

Для $r \in [1/\sqrt{2}, 1)$ задача о вычислении функции Бора-Бомбиери для id_0 остаётся открытой и связана напрямую с вычислением R_{id_m}, $m \ge 2$. Глубокие результаты связанные с этой проблемой, были получены Э. Бомбиери и Ж. Бургейном в 2004 году (см. [5]).

Определение. *Рассмотрим функции вида $f(z) = \sum\limits_{n\ge m} a_n z^n$. Зафиксируем модуль начального коэффициента $a := |a_m|$. Максимальное число $r = |z|$, такое что для всех функций вида $f(z) = \sum\limits_{n\ge m} a_n z^n$, $|c_m| = a$, выполняется условие* (1)*, будем называть радиусом Бора пары операторов T_1 и T_2 с начальным коэффициентом a. Аналогично определим функцию Бора-Бомбиери пары операторов с начальным коэффициентом. Обозначаем, соответственно,*

$$R_{T_1\to T_2}(a), \quad m_{T_1\to T_2}(r, a).$$

Например (см. ([4]),

$$R_{id_0}(a) = \frac{1}{1+2a}, \quad 1/2 < a \le 1.$$

Больше примеров вычисленных ранее радиусов Бора и функций Бора-Бомбиери см. в [3].

Пусть $m \ge 0$ и $h(z) = \sum\limits_{n\ge m} c_n z^n$. Пусть $S_{m,l}$ — оператор сдвига, заданный в пространстве $\mathcal{H}_m(D)$, а именно $S_{m,l} f(z) := z^l f(z)$, $f \in \mathcal{H}_m(D)$. Будем рассматривать операторы вида

$$A_h^{m,l} f := S_{m,l}(h * f), \quad A_h^m := A_h^{m,0}, \quad A_h := A_h^0. \tag{2}$$

Сформулируем основной результат работы [3] (точнее, его частный случай):

Теорема 1. *Пусть* $h(z) = \sum\limits_{n\geq m} c_n z^n$, $c_n > 0$. *Если* $\dfrac{r}{a} < \inf\limits_{n\geq m+1} \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ *тогда*

$$m_{id\to A_h^{m,l}}(r,a) = r^{m+l}c_m a + (1/a - a)a^{-m}r^l(h(ar) - c_m(ar)^m).$$

Рассмотрим задачу об оценке мажорантного ряда функции через его производную. Далее $W(x)$ – функция Ламберта, то есть обратная функция к $g(w) = we^w$.

Теорема 2. *Пусть* $a \in (0.892643..., 1]$. *Тогда*

$$R_{\partial\to id_1}(a) = \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{a^2-1}{2a^2-1}W\Big(\frac{1-2a^2}{a^2-1}e^{-1}\Big)\Big).$$

Доказательство. Заметим, что $R_{\partial\to id_0} = R_{id_0\to\int}$, где $\int$ – оператор, определённый равенством

$$\int_0^z f(z)dz = S_{0,1}(h * f)(z), \quad h(z) = -\frac{\log(1-z)}{z}.$$

Следовательно, по теореме 1, для $r < 1$ и $a > r$,

$$m_{id_0\to\int}(r,a) = ar + (1/a - a)r\Big(\frac{-\log(1-ar)}{ar} - 1\Big).$$

Приравнивая последнее выражение к единице, получаем утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bohr H.* A theorem concerning power series // Proc. Lond. Math. Soc., 1914. Vol. 13, P. 1–5.

[2] *Dixon P.* Banach algebras satisfying the non-unital von Neumann inequality. // Bull. Lond. Math. Soc., 2005. № 27.

[3] *Khasyanov R.* The Bohr radius and the Hadamard convolution operator // J. Math. Anal. Appl., 2024. V. 351, № 1.

[4] *Bombieri E.* Sopra un teorema di H. Bohr e G. Ricci sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze // Boll. Un. Mat. Ital., 1962. P. 276–282.

[5] *Bombieri E., Bourgain J.* A remark on Bohr's inequality // Int. Math. Res. Not., 2004. Vol. 80, P. 4307–4330.

УДК 517.96;517.984

Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью[1]

А. П. Хромов (Саратов, Россия)

KhromovAP@sgu.ru

На основе законности перестановки операций суммирования и интегрирования тригонометрического ряда Фурье дается решение обобщенной смешанной задачи для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и условиями закрепления на концах. Решение дается в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью. В случае классического решения этот ряд является таким решением.

Ключевые слова: расходящийся ряд, волновое уравнение, смешанная задача.

Divergent series and generalized mixed problem for homogeneous wave equation with zero initial velocity[1]

A. P. Khromov (Saratov, Russia)

KhromovAP@sgu.ru

Allowing the inversion of the operations of summation and integration for trigonometric Fourier series we present the solution by Fourier method of the generalized mixed problem for the homogeneous wave equation with zero initial velocity and fixed ends boundary conditions. The solution has a form of a series converging at exponential rate. This series converges the classic solution if the latter equists.

Keywords: divergent series, wave equation, mixed problem.

Обобщенная смешанная задача [1, с. 217] является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи.

1. Рассмотрим сначала следующую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(t), \quad u'_t(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Считаем, что все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные, причем $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q, т.е. $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, $Q_T = [0,1]\times[0,T]$.

Задача (1)–(3) при таких исходных данных чисто формальная,т.е. имеет лишь внешний вид. Несмотря на это, можно дать [1, с. 217] формальное решение по методу Фурье в следующем виде:

$$u(x,t) = \Big(\ \Big)\Bigg[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} +$$
$$+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]d\lambda, \tag{4}$$

где $\Big(\ \Big) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)$, $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L: $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,t)$ по переменной x (τ — параметр), $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \ge 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\tilde\gamma_n = \{\rho : |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, $r > 0$ достаточно велико, фиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \ge n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению и все γ_n при $n \ge n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$, а остальные собственные значения — внутри. Считаем, что задача (1)–(3) и ее формальное решение тесно связаны.

Ряд (4) может быть и расходящимся. Таким образом, в нашей обобщенной смешанной задаче сама задача имеет чисто формальный вид, а формальное решение может быть и расходящимся рядом.

2. При действиях с расходящимися рядами будем пользоваться аксиомой:

$$\int\sum = \sum\int, \tag{5}$$

где $\int$ — определенный интеграл.

С помощью(5) формальное решение (4) приводится к виду

$$u(x,t) = Z(x,t;\varphi) + \int\limits_0^t Z(x,\tau;\psi)\,d\tau + \int\limits_0^t d\tau\int_0^{t-\tau} Z(x,\eta;f(\cdot,\tau))\,d\tau, \tag{6}$$

где $Z(x,t;\varphi)$ есть формальное решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{8}$$

$$u(x,0) = \varphi(t), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{9}$$

Значение формулы (6) в том, что хорошо объясняется роль смешанной задачи (7)–(9) и поэтому в дальнейшем ограничимся лишь задачей (7)–(9).

3. При решении обобщенной смешанной задачи (7)–(9) потребуется следующий факт, относящийся к тригонометрическому ряду Фурье [2].

Рассмотрим на $[-1, 1]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) \in L[-1, 1]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x), \tag{10}$$

где $a_k = \int\limits_{-1}^{1} f(t) \cos k\pi t \, dt$, $k = 0, 1, \ldots$; $b_k = \int\limits_{-1}^{1} f(t) \sin k\pi t \, dt$, $k = 1, 2, \ldots$.

Рассматриваем ряд (10) как расходящийся. К нахождению его суммы привлечем аксиому (5), где $\int = \int\limits_{-1}^{x}$.

Теорема 1. *Сумма расходящегося ряда* (10) *почти всюду равна* $f(x)$.

К этому же результату приходим при суммировании ряда (10) по Фейеру.

4. Приступаем к решению задачи (7)–(9).

Представим формальное решение $Z(x, t; \varphi)$ задачи (7)–(9) в виде:

$$u(x, t) = u_{01}(x, t) + u_1(x, t), \tag{11}$$

где $u_{01}(x, t)$ есть ряд $Z(x, t; \varphi)$ при $q(x) = 0$. Этот ряд обозначим $Z_0(x, t; \varphi)$. Поэтому $u_1(x, t)$ есть ряд $u_1(x, t) = Z(x, t; \varphi) - Z_0(x, t; \varphi)$.

Лемма 1 ([3, с. 315]). *Сумма ряда* $u_{01}(x, t)$ *есть*

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x + t) + \tilde{\varphi}(x - t)], \tag{12}$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ *нечетна и* 2*-периодична при* $x \in (-\infty, \infty)$ *и* $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ *при* $x \in [0, 1]$.

Ряду $u_1(x, t)$ соответствует смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x) u_1(x, t) + f_0(x, t), \tag{13}$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \tag{14}$$

$$u_1(x, 0) = u'_{1t}(x, 0) = 0, \tag{15}$$

где $f_0(x, t) = -q(x) a_0(x, t)$.

Но ряд $u_1(x,t)$ не является рядом формального решения по методу Фурье этой задачи и мы его меняем на ряд формального решения задачи (13)–(15). Этот переход является основным методом нашей процедуры.

Повторяем теперь вышеприведенную процедуру с рядом

$$u_1(x,t) = \left(\ \right) \left[\int_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau)) \frac{\sin\rho(t-\tau}{\rho} \, d\tau \right] d\lambda, \tag{16}$$

т. е. представим $u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t))$, где $u_{02}(x,t)$ есть ряд формального решения обобщенной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial x^2} + f_0(x,t), \tag{17}$$

$$u_{02}(0,t) = u_{02}(1,t) = 0, \tag{18}$$

$$u_{02}(x,0) = u'_{02,t}(x,0) = 0. \tag{19}$$

Лемма 2. *Сумма ряда $u_{02}(x,t)$ есть*

$$u_{02}(x,t) = a_1(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau) \, d\eta, \tag{20}$$

где $\tilde{f}_0(\eta,\tau)$ нечетна, 2-периодична по η и $\tilde{f}_0(\eta,\tau) = f_0(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$.

Продолжая далее указанный процесс получим на m-м шаге, что формальное решение $u(x,t)$ задачи (7)–(9) переходит в

$$u(x,t) = A_m(x,t) + \Omega_m(x,t), \tag{21}$$

где $A_m(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k(x,t)$,

$$a_k(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{k-1}(\eta,\tau) \, d\eta, \quad k \geq 1,$$

$$f_k(\eta,\tau) = -q(\eta) a_k(\eta,\tau),$$

$$\Omega_m(x,t) = \left(\ \right) \left[\int_0^t (R_\lambda - R_\lambda^0)(f_{m-1}(\cdot,\tau)) \frac{\sin\rho(t-\tau}{\rho} \, d\tau \right] d\lambda.$$

Лемма 3 ([1, с. 221]). *Ряд $A(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью.*

Лемма 4 ([1, с. 235]). *Сумма ряда $\Omega_m(x,t)$ абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ стремится к нулю при $m \to \infty$.*

Поэтому справедлива

Теорема 2. *Сумма ряда $A(x,t)$ представляет собой решение обобщенной смешанной задачи* (7)–(9).

Основанием для такого заключения является

Теорема 3 ([4, с.729, теорема 6]). *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то ряд $A(x,t)$ является классическим решением задачи* (7)–(9).

Замечание. Условие на $\varphi(x)$ в теореме 3 являются необходимыми и достаточными для классического решения задачи (7)–(9).

Таким образом, аксиома о перестановочности операций интегрирования и суммирования функциональных рядов приводит в случае тригонометрического ряда Фурье к методу суммирования, схожего с методом Фейера. В случае обобщенной смешанной задачи для волнового уравнения эта аксиома с привлечением приема А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов приводит к представлению решения смешанной задачи в виде явного ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью. В случае классического решения данный результат является аналогом регулярности метода суммирования ряда формального решения смешанной задачи по методу Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, вып. 4. С 215–238. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238, EDN: YJLRTL

[2] *Хромов А. П.* О почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье и теореме Фейера–Лебега // Тр. Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 66. XVI Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Сборник трудов. Казань: КФУ, 2023. С 261–262.

[3] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 322–331. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331, EDN: PTNPTE

[4] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. https://doi.org/10.1134/S0374064119050121, EDN: ZFWIBF

УДК 517.51

Разрывный оператор Стеклова и полиномиальные сплайны [1]

Г. В. Хромова (Саратов, Россия)

Khromovagv@sgu.ru

Показано, что сглаживание ломаной, построенной на заданных значениях непрерывной функции с помощью разрывного оператора Стеклова даёт метод построения полиномиальных сплайнов.

Ключевые слова: оператор Стеклова, ломаная, непрерывная функция, одномерная сетка .

Discontinuous Steklov operator and polynomial splines[1]

G. V. Khromova (Saratov, Russia)

Khromovagv@sgu.ru

It is shown that smoothing a polyline constructed on the given values of a continuous function using a discontinuous Steklov operator gives a method for constructing polynomial splines.

Keywords: Steklov operator, polyline, continuous function, one-dimensional grid.

1. Пусть $f(x) \in C[0,1]$ задана набором её значений:

$$\widehat{f} = f(x_i)_0^n, f_i = f(x_i), x_{i+1} = x_i + \frac{1}{n}.$$

Построим параболический сплайн, дающий равномерные приближения к $f(x)$ на $[0,1]$. Применим следующий метод: построим ломаную $L_n\widehat{f}$: $(L_n\widehat{f})(x_i) = f_i,\ i = 0,\dots,n,$ а затем сгладим с помощью разрывного оператора Стеклова [1]:

$$S_\alpha L_n\widehat{f} = \begin{cases} S_{\alpha 2} L_n\widehat{f}, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_{\alpha 1} L_n\widehat{f}, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{1}$$

где

$$S_{\alpha 1}\ \varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} \varphi(t)dt, S_{\alpha 2}\ \varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{x+\alpha} \varphi(t)dt.$$

(Запись (1) означает: как именно определено значение $(S_\alpha L_n\widehat{f})(\frac{1}{2})$ - несущественно).

Считаем, что точка разрыва $x = \frac{1}{2}$ есть $m-$ый узел x_m и полагаем $\alpha = \frac{1}{n}$.

Теорема 1. *Функция* $(S_\alpha L_n \widehat{f})(x)$ *при* $\alpha = \frac{1}{n}$ *представляет собой параболический сплайн, разрывный в точке* $x = \frac{1}{2}$ *и вычисляемый по формуле*

$$(S_\alpha L_n \widehat{f})(x) = A_i x^2 + B_i x + C_i$$

$$A_i = \frac{n^2}{2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \tag{2}$$

$$B_i = n^2[-f_{i+2}x_i + f_{i+1}(x_i + x_{i+1}) - f_i x_{i+1}]$$

$$C_i = \frac{n^2}{2}(f_{i+2}x_i^2 + f_i x_{i+1}^2) + (\frac{1}{2} - n^2 x_i x_{i+1}) f_{i+1},$$

если $x \in [x_i, x_{i+1}] \subset [0, \frac{1}{2}]$ $(i = 0, \ldots, m-1)$.

Если же $x \in [x_{i-1}, x_i] \subset [\frac{1}{2}, 1]$ $(i = m+1, \ldots, n)$, *то* A_i, B_i, C_i *имеют вид (2) с заменой* f_{i+2} *на* f_{i-2}, f_{i+1} *на* f_{i-1}, x_{i+1} *на* x_{i-1}.

При этом

$$(S_\alpha L_n \widehat{f})(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}), x_i \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}(f_i + f_{i-1}), x_i \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Другой вид коэффициентов сплайна приведён в [2].

Теорема 2 (следствие из теоремы 1 в [2]).

Для любой $f(x) \in C[0,1]$ *и* $\alpha = \frac{1}{n}$ *выполняется сходимость*

$$\left\| S_\alpha L_n \widehat{f} - f \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

где

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max \left\{ \|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]} \right\}.$$

Параболический сплайн из теоремы 1 отличается от сплайнов из [3] тем, что он не является интерполирующим, вычисляется по готовым формулам и даёт равномерную сходимость к любой непрерывной функции, не требуя краевых условий и ограничений на сетку.

Если вместо оператора S_α в (1) мы рассмотрим оператор S_α^m, который получается заменой в правой части (1) операторов $S_{\alpha i}, i = 1, 2$, на их $m-$ые степени $S_{\alpha i}^m$, то получим полиномиальный сплайн степени $m + 1$, аналогичный параболическому и для него справедлива теорема 2 с заменой S_α на S_α^m.

2. Пусть вместо $\widehat{f}$ нам известен набор $\widehat{f}_\delta$: $\left\| \widehat{f}_\delta - \widehat{f} \right\|_{E_{n+1}} \leq \delta$, где $E_{n+1}-$ евклидово пространство с нормой

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} = \left(\sum_{0}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

либо с нормой

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} = \max_i |f_i|$$

Теорема 3. *Для сплайна $S_\alpha L_n \widehat{f}_\delta$ при $\alpha = \frac{1}{n}$ справедлива оценка:*

$$\left\|S_\alpha L_n \widehat{f}_\delta - f(x)\right\|_{L_\infty} \leq \delta + 2\omega(\frac{1}{n}),$$

где $\omega(\frac{1}{n})$−модуль непрерывности функции $f(x)$ на $[0, 1]$.

Следствие. Для любой $f(x) \in C[0, 1]$ и $\alpha = \frac{1}{n}$ выполняется сходимость

$$\left\|S_\alpha L_n \widehat{f}_\delta - f(x)\right\|_{L_\infty} \to 0 \ \text{ при } \delta \to 0, n \to \infty. \tag{3}$$

Если в E_{n+1} выбрана метрика иная, чем указанные выше, и такая, что сходимость (3) не выполняется, то мы попадаем в зону действия некорректно поставленных задач. Тогда, применяя технику методов регуляризации ([1]) добиваемся этой сходимости за счет согласования n с δ.

3. Пусть $f(x) \in C^m[0, 1],\ m \geq 1$. Для аппроксимации $f^{(m)}(x)$ используем полиномиальный сплайн: рассмотрим оператор $D^m S_\alpha^m L_n$, где D^m− оператор m−кратного дифференцирования.

Из [4] известно, что для любой $\varphi(x) \in C[0, 1]$

$$D^m S_\alpha^m \varphi = \begin{cases} \Delta_{\alpha 2}^m \varphi, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \Delta_{\alpha 1}^m \varphi, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$\Delta_{\alpha 1}^m \varphi = \frac{1}{\alpha^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \varphi(x - k\alpha),$$

$$\Delta_{\alpha 2}^m \varphi = \frac{1}{\alpha^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \varphi(x + (m - k)\alpha)$$

(левосторонняя и правосторонняя разностные формулы).

Из того, что $(L\widehat{f})(x_i) = f_i$ и сходимости

$$\left\|D^m S_\alpha^m f - f^{(m)}(x)\right\|_{L_\infty} \to 0 \ \text{ при } \ \alpha \to 0$$

следует

Теорема 4. *При* $\alpha = \frac{1}{n}$ *для* $f(x) \in C^m[0,1]$ *выполняется сходимость*

$$|D^m S_\alpha^m L_n \widehat{f} - f^{(m)}(x)|_{x=x_i} \to 0 \quad при \quad n \to \infty, \ i = 0, \ldots, n.$$

Замечание. Может оказаться, что в формулах (2) $A_i = 0$. Это будет случай, когда у ломаной $L_n\widehat{f}$ в точке x_{i+1} не будет излома. Такой сплайн можно назвать параболическим с вырождением.

Вырождение можно устранить: значение f_{i+1} заменить на близкое $f_{i+1} + \delta$. Это не повлияет на аппроксимативные свойства сплайна по теореме 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромова Г. В.* Об операторах с разрывной областью значений и их применении // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и её приложения, Тематические обзоры. Москва : ВИНИТИ РАН, 2021. Т. 200, ч. 2, С. 57–64.

[2] *Хромова Г. В.* Об одном аналоге интерполяционных параболических сплайнов // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. XVI Междунар. Казанская школа-конф. "Теория функций, её приложения и смежные вопросы "Сб. трудов (Казань, 22-27 авг. 2023). Казань : Изд. Казанского федерального ун-та, 2023. Т. 66. С. 279–281.

[3] *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. Москва : Наука, 1976. 248 с.

[4] *Хромова Г. В.* Об аппроксимации производных на отрезке // Математика. Механика. Сб. научных трудов. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. вып. 16. С. 84–86.

517.982.256

Равномерно выпуклые несимметричные конус-пространства[1]

И. Г. Царьков (Москва, Россия)
tsar@mech.math.msu.su

Для равномерно выпуклых несимметричных конус-пространств рассматриваются вопросы выпуклости чебышевских множеств. Общая теорема иллюстрируется примером.

Ключевые слова: Несимметричные пространства, равномерно выпуклые пространства, чебышевские множества.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00204).

Uniformly rotund asymmetrical cone-spaces[1]

I. G. Tsarkov (Moscow, Russia)
tsar@mech.math.msu.su

For uniformly convex asymmetric cone-spaces, the issues of convexity of Chebyshev sets are considered. The general theorem is illustrated by an example.

Keywords: Asymmetric spaces, uniformly rotund spaces, Chebyshev sets.

Acknowledgements: This research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-00204).

Введение

Пусть в линейном пространстве X над полем $\mathbb{R}$ есть выпуклое множество B со следующими свойствами:

1. $0 \in B$;

2. любая прямая $\ell = \{te \mid t \in \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]\}$ $(e \neq 0)$, проходящая через ноль, пересекает множество B по отрезку в расширенном смысле, т.е. $B \cap \ell = \{te \mid t \in [\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{R}}\}$. При этом мы считаем, что расширенный конец $\alpha = -\infty$ $(\beta = +\infty)$, если промежуток пересечения прямой-оси ℓ с множеством B неограничен снизу (сверху).

С множеством B свяжем расширенный функционал Минковского $p_B : X \to [0, +\infty]$, положив для всех $e \in X \setminus \{0\}$ его значение равным

$$\inf\{t \in \overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty] \mid tB \ni x\}.$$

Если ни при каком конечном $t \geqslant 0$ точка x не принадлежит множеству tB, то мы по определению считаем, что $p_B(x) = +\infty$. И, конечно, полагаем, что $p_B(0) = 0$.

Тем самым, формула
$$\| \cdot | := p_B(\cdot)$$
задает на X расширенную несимметричную полунорму. Множество ненулевых векторов $e \in X$, для которых $\|e| < +\infty$ будем называть значимыми и через $\mathbf{Z}$ будем обозначать множество всех таких векторов, а множество $\mathbf{K} = \mathbf{K}(X)$, состоящее из векторов te ($t \geqslant 0$, $e \in \mathbf{Z}$), будем называть конус-пространством для полунормы $\| \cdot |$. Таким образом, $\mathbf{K} = \mathbf{Z} \cup \{0\}$. Если $\|e| > 0$ для всех ненулевых векторов $e \in \mathbf{Z}$, то расширенную полунорму $\| \cdot |$ будем называть расширенной нормой. Вместе с несимметричной нормой часто рассматривается норма симметризации $\| \cdot \|_{sym} := \max\{\| \cdot |, \| - \cdot|\}$. Топология, порожденная нормой симметризации, называется симметризованной.

Для $x_0 \in X$, $r > 0$ определению положим
$$\mathring{B} := \{x \in X \mid \|x| < 1\}, \quad \mathring{B}(x_0, r) = x_0 + r\mathring{B} = \{x \in X \mid \|x - x_0| < r\}.$$
$$B(x_0, r) = x_0 + rB = \{x \in X \mid \|x - x_0| \leqslant r\}, S(x, r) := B(x_0, r) \setminus \mathring{B}(x_0, r).$$
Через S будем обозначать множество $S(0, 1)$. Отметим, что в случае, когда $\| \cdot |$ – норма, шар $B(0, 1)$ состоит из отрезков вида $[0, x]$, где $x \in S$. Если же $\| \cdot |$ – полунорма, то надо добавить все лучи $\{te \mid t \geqslant 0\}$, где $e \in \mathbf{K}$ – произвольный ненулевой вектор, для которого $\|e| = 0$.

На X вводится топология, порожденную шарами $\{\mathring{B}(x_0, r)\}_{x,r}$, как предбазой.

Так же, как и ранее для непустого множества $A \subset X$: $A \cap \mathbf{K}_x \neq \emptyset$, где $\mathbf{K}_x = (\mathbf{K} + x)$, будем через $\varrho(x, A)$ будем обозначать величину
$$\inf\{\|y - x| \mid y \in A\}.$$

В случае, когда $A \cap \mathbf{K}_x = \emptyset$, будем полагать, что $\varrho(x, A) = +\infty$.

В несимметричных пространствах мы выделим подкласс пространств, которые будем называть равномерно выпуклыми (см. [1]). Отметим, что главной целью здесь является нахождение такого определения, при котором большинство свойств равномерно выпуклых пространств (в случае симметричной нормы) переносились бы на существенно несимметричные пространства (норма которых не эквивалентна норме симметризации).

Для произвольного множества M через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x| = \varrho(x, M)\}$.

Основные результаты

Перейдем к определению равномерно выпуклых несимметричных пространств (см. [1]).

Положим

$$\Delta(a) := \|f - ag| + a\|g| - \|f|, \quad a \in [0, 1].$$

Определение 1. *Несимметричное пространство* $\mathbf{K}$ *называется равномерно выпуклым, если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $a \in (0, 1]$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любых* $f, g \in X$*:* $\|f| = \|g| = 1$ *из условия* $\Delta(a) < \delta$ *вытекает, что* $f \in B(\mu g, \varepsilon)$ *для некоторого* $\mu \in [1 - \varepsilon, 1]$.

Определение 2. *Последовательность* $\{x_n\} \subset \mathbf{K}$ *называется фундаментальной (обратно фундаментальной), если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\|x_m - x_n| < \varepsilon$ $(\|x_n - x_m| < \varepsilon)$ *для всех* $m \geqslant n \geqslant N$.

Несимметричное конус-пространство $\mathbf{K}$ *называется лево-полным (обратно лево-полным), если для любой фундаментальной (обратно фундаментальной) последовательности* $\{x_n\} \subset \mathbf{K}$ *существует точка* $x \in \mathbf{K}$ *такая, что* $\|x_n - x| \to 0$.

Теорема 1. *Пусть* M *– чебышёвское множество, ограниченно компактное относительно топологии симметризации, в равномерно выпуклом гладком обратно лево-полном конус-пространстве* $\mathbf{K}$. *Тогда множество* M *выпукло.*

Пример. Рассмотрим линейное множество всех μ-измеримых функций функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых конечна норма этой функции в $L_p(\Omega, \mu)$ и $L_p(\Omega, \mu)$ $(1 < p, q < +\infty)$. Профакторизуем это пространство по множеству функций равных нулю почти всюду относительно меры μ. Для классов эквивалентностей определим несимметричную норму положив для ее представителей $\|f|_{p,q} := \|f_+\|_{L_p(\Omega,\mu)} + \|f_-\|_{L_q(\Omega,\mu)}$, где $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \min\{f, 0\}$. Затем обратно лево пополним это пространство относительно этой несимметричной нормы. Это пространство будет обратно лево-полным. Обозначим это пространство как $L^{ReLe}_{p,q} = L^{ReLe}_{p,q}(\Omega, \mu)$ $(1 < p, q < +\infty)$ – несимметричное пространство, состоящее из классов эквивалентностей μ-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Пространство $L^{ReLe}_{p,q}(\Omega, \mu)$ является гладким, т.е. для любой точки $f \in X = L^{ReLe}_{p,q}$: $\|f|_{p,q} = \varepsilon > 0$ найдется линейный ограниченный функционал $\varphi \in X^*$ единичной нормы, для которого $\varphi(f) = \varepsilon$ (см. теорему Хана-Банаха для несимметричных пространств [2]– [4]. Отметим, что сопряженное пространство к произвольному существенно несимметричному пространству Y не может быть линейным пространством даже в случае, когда Y линейно (см. [5]). Также пространство $L^{ReLe}_{p,q}$ является равномерно выпуклым и хаусдорфовым конус-пространством. В качестве примера приложения теоремы 1 рассмотрим конкретное множество M в пространстве $X := L_{p,q}^{ReLe}[a,b]$ $(a < b,\ 1 < p, q < +\infty)$:

$$M := \Big\{ \frac{\lambda}{t - t_\alpha} \mid \lambda \in \mathbb{R}, t_\alpha \in K \Big\},$$

где K – замкнутое неодноточечное подмножество $\mathbb{R} \setminus [a,b]$. Множество M не является выпуклым, откуда в силу теоремы 1 вытекает, что множество M не является чебышевским в $L_{p,q}^{ReLe}[a,b]$. Понятно, что аналогичные рассуждения можно провести и для специального вида обобщенных дробей.

Для свойства Q через $\mathring{B}$-Q обозначим класс таких множеств, что пересечение их с любыми открытыми шарами обладает свойством Q.

В работе [6] в частности получено следующее утверждение.

Теорема A. *Пусть* $(X, \|\cdot|)$ *– несимметричное лево-полное линейное пространство, непустое множество* $A \subset X$ *является* $\mathring{B}$*-замкнутым (или множество* A *и шар* $B(0,1)$ *замкнуты). Тогда условие, что множество* A *является* $\mathring{B}$*-связным, равносильно его* $\mathring{B}$*-линейно связности.*

Это утверждение дает возможность получать результаты, аналогичные в рассмотренном выше примере, в случае уже негладких несимметричных пространств.

Теорема 2. *Пусть* $(X, \|\cdot|)$ *– банахово пространство, непустое множество* $A \subset X$ *является ограниченно слабо компактным и аппроксимативно компактным. Тогда, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется* ε*-выборка, непрерывная как отображение из сильной топологии в слабую, то найдется* ε*-выборка, непрерывная как отображение из сильной топологии в сильную, для всех* $\varepsilon > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Царьков И. Г.* Равномерная выпуклость в несимметричных пространствах // Матем. заметки. 2021. Т. 110 (5). С. 773–785.

[2] *Cobzas S.* Separation of convex sets and best approximation in spaces with asymmetric norm // Quaestiones Mathematicae. 2004. Vol. 279, № 3(11). P. 275–296.

[3] *Cobzas S.* Functional analysis in asymmetric normed spaces // Название конференции или сборника. Front. Math. Birkhäuser/Springer Basel AG. Basel. 2013.

[4] *Tsar'kov I. G.* Reflexivity for spaces with extended norm // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. Vol. 30. № 3. P. 399–417.

[5] Donjuán V., Jonard-Pérez N. Separation axioms and covering dimension of asymmetric normed spaces // Quaestiones Mathematicae. 2020. Vol. 43, № 4. P. 467–491.

[6] *Tsar'kov I. G.* Connectedness in asymmetric spaces // Journal of mathematical analysis and applications. 2023. Vol. 527, № 1. Part 1. P. 1–14.

УДК 591.65

О последовательном улучшении точности аппроксимации константы Лебега оператора Фурье логарифмическо-дробно-рациональными функциями[1]

И. А. Шакиров (Набережные Челны, РФ)
iskander.sh.57@yandex.ru

Константа Лебега L_n классического оператора Фурье равномерно приближается логарифмическими функциями, не содержащими и содержащими сдвиг их аргумента, а также логарифмическо-дробно-рациональными функциями; при этом точность приближения константы Лебега последовательно улучшается. Изучение проблемы о наилучшем приближении L_n на подмножествах множества натуральных чисел позволяет далее решить задачу об аппроксимации константы Лебега с наперед заданной точностью.

Ключевые слова: константа Лебега оператора Фурье, дробно-рациональная функция, экстремальная задача, погрешность аппроксимации.

On consequential accuracy improvement of approximation of the Lebesgue constant of the Fourier operator by logarithmic-fractional-rational functions[1]

I. A. Shakirov (Naberezhnye Chelny, Russia)
iskander.sh.57@yandex.ru

The Lebesgue constant L_n of the classical Fourier operator is uniformly approximated by logarithmic functions that do not contain and contain a shift of their argument, as well as logarithmic-fractional-rational functions; wherein the accuracy of approximation of the Lebesgue constant is improved consistently. The study of the problem of the best approximation L_n on subsets of the set of natural numbers allows you to solve the problem of approximating the Lebesgue constant with predetermined accuracy further.

Keywords: Lebesgue constant of Fourier operator, fractional-rational function, extreme problem, approximation error.

Основной задачей теории приближения функций является максимально строгая (по точности) замена элемента $x \in X$ из выбранного нормированного пространства более простыми агрегатами $u \in U \subset X$, содержащими малое число подлежащих определению параметров. В рамках данной работы константа Лебега [1]

$$L_n = \|S_n| = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k-1}^{n}\frac{1}{k}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{2n+1} \quad (S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}) \tag{1}$$

классического оператора Фурье

$$S_n(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(s)D_n(t-s)ds \quad \left(D_n(u) = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin(u/2)}, \quad n \in N\right)$$

равномерно (дискретно) приближается логарифмическо-дробно-рациональной функцией, зависящей от трех параметров. Точнее говоря, ниже даются ответы на вопросы:

1) возможно ли допущенную в приближенном равенстве

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b + \frac{d}{(n+a)^2} \stackrel{def}{=} u_n(a,b,d) \quad (n \in N) \tag{2}$$

погрешность последовательно минимизировать, варьируя при этом тремя параметрами $(a,b,d) \in \Omega$ и аргументом $n \in N_k \subset N$, где

$$\Omega = [0,1]\times[0,1.5]\times[0,0.1] \subset R^3, \quad N_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\}, \quad N_1 = N;$$

2) как оценить соответствующие подмножествам N_k наилучшие приближения

$$E_k \stackrel{def}{=} \inf_{(a,b,d)\in\Omega}\sup_{n\in N_k}|\varepsilon_n(a,b,d)| \quad (\varepsilon_n = \varepsilon_n(a,b,d) \stackrel{def}{=} L_n - u_n(a,b,d), \ \ E_1 = E)? \tag{3}$$

Теорема 10 ([2]). *В приближенных равенствах*

$$L_n \approx (4/\pi^2)\ln n + \widetilde{\alpha}_0, \quad L_n \approx (4/\pi^2)\ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0, \quad n \in N \tag{4}$$

для наилучшего приближения $E = E_1$ имеют место следующие оценки:

$$E < \inf_{(0,b,0)\in\Omega}\sup_{n\in N}|\varepsilon_n(0,b,0)| \le \sup_{n\in N}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n - \widetilde{\alpha}_0\right| = \\ = 0.165637883\ldots = \delta_1, \tag{5}$$

$$E < \inf_{(a,b,0)\in\Omega}\sup_{n\in N}|\varepsilon_n(a,b,0)| \le \sup_{n\in N}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) - \widetilde{\alpha}_0\right| = \\ = 0.001309064\ldots = \delta_2, \tag{6}$$

где функции погрешности ε_n определены согласно (3) *и* (2), $\widetilde{\alpha}_0 = c_0 + (4/\pi^2)\ln 2 = 1.270353244\ldots$ ($c_0 = 0.989431273\ldots$ — *const Ватсона*).

Видно, что использование сдвига аргумента логарифма во втором приближенном равенстве из (4) улучшает характеристику δ_1 более чем на два порядка ($\delta_1/\delta_2 = (0.165637883\ldots)/(0.001309064\ldots) \approx 126.5$).

Использование слагаемой вида $d/(n+a)^2$ в правой части (2) на такой же порядок улучшает характеристику δ_2 логарифмического приближения L_n со сдвигом $a = 0.5$, что хорошо прослеживается в теореме 11.

Теорема 11 ([3]). *Приближенное равенство с вполне определенной правой частью вида*

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0 + \frac{d_1^*}{(n+0.5)^2}, \quad n \in N \tag{7}$$

обеспечивает следующую оценку для наилучшего логарифмическо-дробно-рационального приближения E (в (3) $E_1 = E$):

$$E < \sup_{n\in N}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) - \widetilde{\alpha}_0 - \frac{d_1^*}{(n+0.5)^2}\right| < 0.000005282\ldots = \delta_3, \tag{8}$$

где $d_1^* = 2.25\cdot[L_1 - (4/\pi^2)\ln 1.5 - \widetilde{\alpha}_0] = 0.002945386\ldots,\quad L_1 = 1/3 + 2\sqrt{3}/\pi$.

Результат теоремы 11 сильнее, чем ранее приведенная оценка (6), что видно из отношения $\delta_2/\delta_3 \approx 247.8$. Отметим, что в условиях теорем 10 и 11 конкретные значения констант a, b, d определены достаточно строго (см. [2], [3]), и заметное улучшение оценки (8) варьируя только ими становится невозможной. Поэтому используем следующий алгоритм увеличения точности аппроксимации в формуле (7):

- значения констант Лебега $L_1 - L_5$ (для определенности) с необходимой точностью вычислим согласно формуле Фейера (1), например, $L_1 = 1.435991124176917\ldots,\ L_5 = 1.961360593766014\ldots$;
- приближенное уравнение (2) и экстремальную задачу (3) детально изучим при $n \in N_6 \subset N$;
- коэффициенты $a = 0.5,\ b = \widetilde{\alpha}_0$ в (7) оставим без изменения, а отличную от d_1^* постоянную $d = d_6^*$ определим из условия совпадения левой и правой частей (2) на концах их общей области определения $N_6 \subset N$. В итоге получим более сильный результат.

Теорема 12. *В приближенном равенстве с конкретной правой частью вида*

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0 + \frac{d_6^*}{(n+0.5)^2}, \quad n \in N_6$$

для наилучшего приближения E_6 (в (3) $k = 6$) верна оценка

$$E_6 < \sup_{n\in N_6}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) - \widetilde{\alpha}_0 - \frac{d_6^*}{(n+0.5)^2}\right| < 0.000000033688\ldots \overset{def}{=} \delta_4,$$

где $d_6^* = 30.25 \cdot [L_5 - (4/\pi^2)\ln 5.5 - \widetilde{\alpha}_0] = 0.002993865903\ldots$.

Здесь наблюдается более весомый вклад дробно-рациональной слагаемой на точность аппроксимации константы Лебега L_n $(n \in N_6)$, и с ростом значения индекса k в (3) величины E_k $(k \geq 6)$ стремятся к нулю с большой скоростью.

Замечание. При $k = 11$ значение наилучшего приближения E_{11} сверху оценивается величиной $\delta_5 = 0.000000002556\ldots$, и характеристика δ_4 из теоремы 12 уменьшается более чем на один порядок (в этом случае погрешность аппроксимации константы Лебега логарифмическо-дробно-рациональной функцией находится в пределах одной миллиардной).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Fejer L.* Sur les singularites de la serie de Fourier des fonctions continues // Ann. de Ec. Norm. 1911. Vol. 28. P. 63–103.

[2] *Shakirov I.A.* About the optimal replacement of the Lebesque constant Fourier operator by a logarithmic function // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39, № 6. P. 841–846.

[3] *Шакиров И.А.* Приближение константы Лебега оператора Фурье логарифмическо-дробно-рациональной функцией // Изв. вузов. Математика. 2023. № 11. С. 75–85.

УДК 517.9

Факторизационные представления и свойства корневых множеств некоторых весовых классов аналитических функций в круге [1]

Ф. А. Шамоян (Саратов, Россия)
shamoyanfa@yandex.ru

В работе исследуется факторизационное представление классов аналитических функций в круге, логарифм модуля которых принадлежит L_p весовым пространствам.

Ключевые слова: бесконечные произведения, факторизация, аналитические функции, класс Неванлинны.

Factorization representations and properties of root sets of some weight classes of analytic functions in the disk [1]

F. A. Shamoyan (Saratov, Russia)
shamoyanfa@yandex.ru

In the paper studies the factorization of classes of analytic functions in the unit disc for which logarithm of modulus belongs in L_p spaces.

Keywords: infinite product, factorisation ,analytic function, Nevanlinna class.

Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ – множество всех аналитических функций в D, N – класс функций ограниченного вида в D. По теореме Р. Неванлинны (см. [1]) класс N совпадает с классом аналитических функций в D, допускающих представление

$$f(z) = cz^m B(z, z_k) \exp\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta)\right\}, z \in D, m \in Z_+, \qquad (1)$$

где B – произведение Бляшке, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – нули функции f, удовлетворяющие условию Бляшке, μ – функция конечной вариации на $[-\pi;\pi]$.

Естественно возникает вопрос о построении факторизационного представления для классов аналитических в круге функций типа (1), не имеющих ограниченного вида.

В работе строится представление типа (1) для классов аналитических в D функций f, для которых $\ln|f|$ принадлежит L^p-весовым классам при довольно общих условиях на весовую функцию.

Пусть Ω – класс положительных функций из $L^1(0,1)$, для которых выполняется оценка $m_\omega \leq \dfrac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M_\omega$, $\forall x \in (0,1), \lambda \in [q_\omega, 1]$, где $m_\omega, M_\omega, q_\omega$ – положительные числа, причем $q_\omega \in (0;1]$, которые зависят только от ω; $\omega \in \Omega$.

Обозначим для $0 < p < +\infty$

$$N_\omega^p = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_D \left(\ln^+|f(z)|\right)^p \omega(1-|z|)dm_2(z) < +\infty \right\},$$

где dm_2 – плоская мера Лебега на D.

При $\omega(t) = t^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$ и $p = 1$ класс $N_\omega^1 = N_\alpha$ совпадает с классом Неванлинны-Джрбашяна (см. [2], [3]).

Далее, при $k \in Z_+, l = -2^k, ..., 2^k - 1$, положим

$$\Delta_{k,l} := \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^k} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}$$

и

$$n_{k,l} := card\left\{z_m \in \Delta_{k,l}\right\}, k \in Z_+, l = -2^k, ..., 2^k - 1.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in H(D)$, $\ln|f| \in L^p_\omega$, $0 < p < +\infty$, *тогда*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{n_{k,l}^p}{2^{2k}} \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) < +\infty. \tag{2}$$

Обратно, если $Z = \{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – *произвольная последовательность из* D, *для которой ряд (2) сходится, то произведение М. Джрбашяна с этими нулями (см. [4])*

$$\pi_s(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \frac{s+1}{\pi} \int\limits_D \frac{\left(1 - |\zeta|^2\right)^s ln\left|1 - \frac{\zeta}{z_k}\right|}{\left(1 - \overline{\zeta} z\right)^{s+2}} dm_2(\zeta)$$

при достаточно больших ȿравномерно сходится в D и принадлежит классу N^p_ω, $0<p<+\infty, \omega \in \Omega$.

Замечание. При $p = 1$ теорема 1 и полный аналог факторизационного представления (1) построен в работах автора (см. [2], [3]).

Теорема 2. *Пусть $\omega(t) = t^\alpha, 0 < t < 1$, $-1 < \alpha < +\infty$, $N^p_\alpha := N^p_\omega$ и выполняются все условия теоремы 1, тогда при достаточно больших β функцию f можно представить в виде*

$$f(z) = cz^m \pi_\beta(z, z_k) \exp \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta+1}} d\theta,$$

где $\psi(\theta)$ – функция из класса О. Бесова $B^s_p, 0<p<+\infty, s=\beta-\dfrac{\alpha+1}{p}$, причем каждый из сомножителей в представлении (1) принадлежит классу N^p_α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.

[2] *Шамоян Ф. А.* Несколько замечаний к параметрическому представлению классов Неванлинны-Джрбашяна // Математические заметки. 1992. Т. 52, вып. 1. С. 128-140.

[3] *Шамоян Ф. А. Шубабко Е. Н.* Введение в теорию L^p-классов мероморфных функций. Брянск : Изд-во БГУ, 2009. 153 с.

[4] *Джрбашян М. М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщения института математики и механики. 1948. Т. 3, №. 1. С. 3-40.

УДК 517.9

К продолжению решений уравнений с аналитическими коэффициентами вдоль подмногообразий[1]

Н. А. Шананин (Москва, Россия)

nashananin@inbox.ru

В статье указан класс линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами, ростки обобщенных решений которых однозначно продолжаются вдоль интегральных подмногообразий дифференциальных систем, порожденных главными символами уравнений.

Ключевые слова: обобщенная функция, росток функции, однозначное продолжение решения.

To along submanifolds continuation of solutions of equations with analytical coefficients [1]

N. A. Shananin (Moscow, Russia)

nashananin@inbox.ru

A class of linear differential equations with analytical coefficients, the sprouts of generalized solutions of which uniquely continue along integral submanifolds of the differential systems generated by the main symbols of the equations, is specified in the article.

Keywords: distribution, function germ, unique solution continuation.

Введение

Из теоремы Ф. Джона (см. [1], теорема 8.6.8) следует, что две обобщенные функции, определенные на открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами $P(D)u = 0$ и равные в окрестности точки $x^0 \in \Omega$, равны в некоторой окрестности связной компоненты пересечения Ω с перечением всех характеристических гиперполкостей, проходящих через точку x^0.

Ниже указан класс линейных дифференциальных уравнений с комплексными, вещественно аналитическими коэффициентами, решения которых обладают близкими свойствами продолжения вдоль интегральных подмногообразий, порожденных дифференциальной системой, индуцированной главным символом оператора.

Голономный случай

Пусть

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\ i^2 = -1, \tag{1}$$

— линейный дифференциальный оператор с комплексными, вещественно аналитическими коэффициентами $a_\alpha(x)$, $T^*\Omega$ — кокасательное расслоение над Ω. В каждой точке $x \in \Omega$ главный символ оператора

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\ (x,\xi) \in T^*\Omega,$$

определяет симметрическую m-линейную форму

$$\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^m) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m = 1}^{n} \frac{\partial^m p_m}{\partial \xi_{j_1} \ldots \partial \xi_{j_m}}(x,\xi)\eta^1_{j_1} \ldots \eta^m_{j_m},\ \eta^j \in T^*_x\Omega.$$

Предположим, что ядро $K_x(P) \subset T^*_x\Omega$ формы $\mathcal{F}_x$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\bigcup\limits_{x\in\Omega} (x, K_x(P)) = \{(x,\xi) \mid p_m(x,\xi) = 0\}$;

(2) коразмерность ядра $K_x(P)$ не зависит от x и равна k.

В этом случае множество $\bigcup\limits_{x\in\Omega} (x, K_x(P))$ образует подрасслоение $K(P)$ расслоения $T^*\Omega$ коразмерности k, которое в касательном расслоении $T\Omega$ индуцирует гладкое k-мерное подрасслоение:

$$L(P) = \{(x,\tau) \in T\Omega \,|\, x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0\ \forall \xi \in K_x(P)\}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(P)$ дифференциальную систему, порожденную $L(P)$, то есть подмодуль C^∞-сечений подрасслоения $L(P) \subset T\Omega$ модуля C^∞-сечений $\mathcal{T}\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Если коммутатор $[X,Y]$ двух любых векторных полей X и Y, принадлежащих $\mathcal{L}(P)$, также принадлежит $\mathcal{L}(P)$, то дифференциальную систему называют *инволютивной или голономной*. Если система $\mathcal{L}(P)$ является гололномной, то в силу теоремы Фробениуса через каждую точку $x^0 \in \Omega$ проходит максимальное связное, k-мерное, интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{L},x^0}$.

Говорят, что ростки обобщенных функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$, если существует открытая окрестность $V \subset \Omega$ точки x^0, в которой $u^1(x) = u^2(x)$, то есть для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset V$ выполняется равенство $\langle u^1, \varphi\rangle = \langle u^2, \varphi\rangle$. Заметим, что из равенства ростков $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ следует равенство ростков образов $(Pu^1)_{x^0} \cong (Pu^2)_{x^0}$.

Теорема 1. *Пусть P — оператор вида* (1) *с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющий условиям* (1), (2), *система $\mathcal{L}(P)$ которого голономна, функции $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда из равенства ростков $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ в точке $x^0 \in \Omega$ следует, что $u^1_x \cong u^2_x$ во всех точках x связной компоненты множества $M_{\mathcal{L}(P),x^0} \cap \{y \in \Omega \,|\, (Pu^1)_y \cong (Pu^2)_y\}$, содержащей x^0.*

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\Big(D_1^m + iD_2^m + \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x) D^\alpha\Big) u = f(x), x \in \mathbb{R}^3,\, m \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Тогда m-линейная форма $\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^m) = \prod\limits_{j=1}^{m} \eta_1^j + i \prod\limits_{j=1}^{m} \eta_2^j$ и

$$\bigcup_{x\in\Omega} (x, K_x(P)) = \{(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 = \xi_2 = 0\} = \{(x, \xi) \mid p_m(x, \xi) = 0\}.$$

Таким образом условия (1) и (2) выполнены и $k = 2$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ является C^∞-модулем, порожденным векторными полями ∂_1 и ∂_2, где $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ (кратко, $\mathcal{L} = \mathcal{L}in\big(\partial_1, \partial_2\big)$). Поскольку коммутатор $[\partial_1, \partial_2] = 0$, то $\mathcal{L}(P)$ — голономная система и максимальное интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{L}(P),x^0}$, содержащее точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, имеет вид

$$M_{\mathcal{L}(P),x^0} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = x_3^0\}.$$

Из теоремы 1 следует, что равенство двух обобщенных решений уравнения (2) в окрестности точки x^0 влечет их равенство в некоторой окрестности гиперплоскости $x_3 = x_3^0$.

Неголономный случай

Если дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ не является голономной, то она порождает в C^∞-модуле $\mathcal{T}\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞-подмодулей $\mathcal{H}^j$, в которой первый элемент $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули $\mathcal{H}^{j+1}$ порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$. Систему $\mathcal{L}$ называют *неголономной*, если найдется такое число r, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}^1 \subsetneqq \mathcal{H}^2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathcal{H}^r = \mathcal{H}^{r+1} \subsetneqq \mathcal{T}\Omega.$$

Предположим, что

(3) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ неголономна и подпространство $\mathcal{H}_x^r \subset T_x\Omega$ имеет размерность m, не зависящую от точки $x \in \Omega$, причем $k < m < n$.

В этом случае подмодуль $\mathcal{H}^r$ является голономной дифференциальной системой и в силу теоремы Фробениуса через каждую точку x^0 проходит максимальное, связное, интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$.

Теорема 2. *Пусть P – оператор вида* (1) *с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющий условиям* (1), (2) *и* (3), *функции $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда из равенства ростков $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ в точке $x^0 \in \Omega$ следует $u^1_x \cong u^2_x$ во всех точках x связной компоненты $\mathcal{F}_{x^0}$ множества $M_{\mathcal{H}^r,x^0} \cap \{y \in \Omega \,|\, (Pu^1)_y \cong (Pu^2)_y\}$, содержащей x^0.*

В каждой точке $x \in \Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \{x_2 = x_3 = 0\}$ ядро $K_x(P)$ $2m$-линейной формы $\mathcal{F}_x$, ассоциированной с уравнением

$$\Big(D_1^{2m} + (x_3D_2 - x_2D_3 + x_1D_4)^{2m} + \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha(x)D^\alpha\Big)u = f(x),\ m \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

задается системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 & = 0, \\ \quad x_3\xi_2 - x_2\xi_3 + x_1\xi_4 & = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что условия (1) и (2) выполнены, $k = 2$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)(= \mathcal{H}^1) = \mathcal{L}in\big(\partial_1, x_3\partial_2 - x_2\partial_3 + x_1\partial_4\big)$ не является голономной. Подмодуль $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^3 = \mathcal{L}in\big(\partial_1, x_3\partial_2 - x_2\partial_3, x_1\partial_4\big) \neq \mathcal{T}\Omega$ имеет размерность 3. Условие (3) выполнено. Интегральное многообразие дифференциальной системы $\mathcal{H}^2$, проходящее через $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ имеет вид: $M_{\mathcal{H}^2,x^0} = \{(x_1, r\cos(\phi), r\sin(\phi), x_4) \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi)\}$, где $r = \big((x_2^0)^2 + ((x_3^0)^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Из теоремы 2 следует, что два решения уравнения (3), совпадающие в некоторой окрестности точки x^0, равны в некоторой окрестности множества $M_{\mathcal{H}^2,x^0} = \mathbb{R}^2_{x_1,x_4} \times \{(x_2, x_3) \mid x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$.

Доказательства теорем приведены в статье [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов. (т. 1) Москва : Мир, 1986. 464 с.

[2] *Шананин Н. А.* О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами // Матем. заметки. 2022. Т. 111, № 6. С. 921–928.

УДК 517.9

О сходимости рядов Фурье – Якоби в пространствах Лебега с переменным показателем[1]

Т. Н. Шах-Эмиров (Махачкала, Россия)
email@mail.ru

Б. Мукенхаупт показал, что ряды Фурье по полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}$ сходятся в пространстве $L^p_{w_{a,b}}(-1,1)$ при определенных условиях на параметры a,b,α,β. В настоящей работе показано, что если переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет этим условиям в некоторых окрестностях точек ± 1, то имеет место сходимость этих рядов в пространстве $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$.

Ключевые слова: полиномы Якоби, пространство Лебега с переменным показателем, ряды Фурье – Якоби.

On Fourier-Jacobi series convergence in variable exponent Lebesgue spaces [1]

T. N. Shakh-Emirov (Makhachkala, Russia)
email@mail.ru

B. Muckenhaupt showed that Fourier series in Jacobi polynomials $P_n^{\alpha,\beta}$ converge in the space $L^p_{w_{a,b}}(-1,1)$ if certain conditions on the parameters a,b,α,β hold. In this paper we show that if the variable exponent $p(x)$ satisfies these conditions in some neighborhoods of the points ± 1, then these series converge in the space $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$.

Keywords: Jacobi polynomials, variable exponent Lebesgue spaces, Fourier – Jacobi series.

Введение

Пусть $p(x)$ – неотрицательная на $[-1,1]$ измеримая функция, $a,b>-1$, $w_{a,b}(x)=(1-x)^a(1+x)^b$ – весовая функция. Через $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$ обозначим множество функций f таких, что

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^{p(x)}w_{a,b}(x)dx<\infty, \tag{1}$$

– пространство Лебега с переменным показателем. Введем следующие обозначения

$$p_-(A)=ess\inf_{x\in A}p(x),\ p_+(A)=ess\sup_{x\in A}p(x),$$

где A – измеримое множество. При условии $1 \le p_-([-1,1]) \le p(x) \le p_+([-1,1]) < \infty$ пространство $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$ нормируемо [1] и одну из эквивалентных норм можно задать следующим образом

$$\|f\|_{p(\cdot),w_{a,b}}(-1,1) = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} w_{a,b}(x)dx \le 1\right\}. \quad (2)$$

Отметим, что в случае постоянного показателя $p(x) = p$ норма (2) совпадает с классической нормой в обычных пространствах Лебега.

Приведем некоторые сведения о полиномах Якоби. Для произвольных α, β полиномы Якоби можно определить с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{w_{\alpha,\beta}(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{w_{\alpha,\beta}(x)\sigma^n(x)\right\},$$

где $\sigma(x) = 1 - x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $w_{\alpha,\beta}(x)$, то есть

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)w_{\alpha,\beta}(x)dx = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)},$$

а δ_{nm} – символ Кронеккера. При условии $\alpha, \beta > -1$ для функции $f \in L^{p(\cdot)}_{w_{\alpha,\beta}}(-1,1)$ можно определить коэффициенты Фурье – Якоби

$$f_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}}\int_{-1}^{1} f(x)P_k^{\alpha,\beta}(x)\mu(\alpha,\beta,x)dx$$

и сопоставить ей ряд Фурье – Якоби

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha,\beta}P_k^{\alpha,\beta}(x).$$

Определим также частичные суммы Фурье – Якоби

$$S_n^{\alpha,\beta}(f) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta}P_k^{\alpha,\beta}(x).$$

При $\alpha, \beta \ge -\frac{1}{2}$ вопросы сходимости рядов Фурье – Якоби в среднем исследовались в работах Г. Полларда [2–4], Г.М. Винга [5], Дж. Ньюмана и В. Рудина [6]. В работе [7] Б. Мукенхаупт усилил эти результаты, рассмотрев сходимость в $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$ рядов Фурье по полиномам $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ $(\alpha,\beta>-1)$ в случае, когда параметры a,b у веса $w_{a,b}(x)$ вообще говоря не совпадают с α,β. Им были получены условия на параметры a,b, обеспечивающие сходимость рядов Фурье – Якоби в среднем. В настоящей работе предпринята попытка обобщить этот результат на случай переменного показателя.

Основной результат

Обозначим через $\mathcal{P}(-1,1)$ класс переменных показателей $p(x)$, заданных на $[-1,1]$ и удовлетворяющих условиям:

A) условие Дини – Липшица

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{d}{-\ln|x-y|},\quad |x-y|\le\frac{1}{2};$$

B) $\underline{p}([-1,1])=\min_{x\in[-1,1]}p(x)>1$;

C) для $p(x)$ существуют (произвольно малые) числа $\delta_i=\delta_i(p)$ $(i=1,2)$ такие что $p(x)=p(-1)$ для $x\in[-1,-1+\delta_1]$ и $p(x)=p(1)$ для $x\in[1-\delta_2,1]$.

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Положим, что $p(x)\in\mathcal{P}(-1,1)$ и $\alpha,\beta>-1$. Тогда*

$$\|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{p(\cdot),w_{a,b}}(-1,1)\le c(\alpha,\beta,p)\|f\|_{p(\cdot),w_{a,b}}(-1,1),$$

если

$$\left|\frac{a+1}{p(1)}-\frac{\alpha+1}{2}\right|<\min\left\{\frac{1}{4},\frac{\alpha+1}{2}\right\},$$
$$\left|\frac{b+1}{p(-1)}-\frac{\beta+1}{2}\right|<\min\left\{\frac{1}{4},\frac{\beta+1}{2}\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.

[2] *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 62. № 2. P. 387–403.

[3] *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 63. № 2. P. 355–367.

[4] *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series. III // Duke Math. J. 1949. Vol. 16. № 1. P. 189–191.

[5] *Wing G. M.* The mean convergence of orthogonal series // Amer. J. Math. 1950. Vol. 72. P. 792–808.

[6] *Newman J., Rudin W.* Mean convergence of orthogonal series // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 3. № 2. P. 219–222.

[7] *Muckenhoupt B.* Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 23. № 2. P. 306–310.

УДК 517.2

О преобразованиях базисов, связанных с унимодулярными $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$-матрицами[1]

И. А. Шилин (Москва, Россия)
ilyashilin@li.ru

Построены пять базисов в пространстве представления связной компоненты группы унимодулярных $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$-матриц, вычислены матричные элементы переходов между этими базисами. Композиции этих переходов приводят к интегральным соотношениям между специальными функциями математической физики, в том числе к континуальным теоремам сложения для этих функций.

Ключевые слова: $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$-матрица; представление группы; гипергеометрическая функция Гаусса; волновые функции Кулона; функции Бесселя–Клиффорда.

On bases transformations related to unimodular $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$-matrices[1]

I. A. Shilin (Moscow, Russia)
ilyashilin@li.ru

We constructed 5 bases in a representation space of the connected component of the group consisting of unimodular $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$-matrices. We obtained the matrix elements of bases transformations matrices. Compositions of these transforms follow to integral relations for special functions (including continual addition theorems).

Keywords: $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$-matrix; group representation; Gaussian Hypergeometric function; Coulomb wave functions; Bessel–Clifford functions .

Зафиксировав произвольную ненулевую квадратную матрицу a, назовем матрицу b того же размера a-матрицей, если $b^{\mathrm{T}}ab = a$. Из определения вытекает, что $|\det b| = 1$. Множество a матриц является подгруппой G общей линейной группы. Рассмотрим случай $a = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$. Так как

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} & A \\ B & C \end{pmatrix},$$

где $A = C_1C_2$, матрица C_1 ортогональна, а C_2 положительно определена, то b зависит от b_{11} и независимых параметров матриц C_1 и A (или B), то есть трехпараметрична. Так как $\det C = b_{11}^{-1}$, то отображение $\iota : G \longrightarrow \mathbb{U}_2$, определенное формулой

$$\iota(b) = \begin{cases} 1 & \text{при } b_{11} > 0, \\ -1 & \text{при } b_{11}, < 0, \end{cases}$$

является эпиморфизмом групп, причем оба смежных класса по нормальному делителю $G_0 = \operatorname{Ker}\iota$ оказываются связными компонентами топологической группы G. Верхняя пола X_0^+ конуса $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ является однородным пространством группы G_0, а гомоморфизм $g \longmapsto T(g)$, при котором $T(g)f = f(gx)$, — представлением группы G_0 в пространстве L бесконечно дифференцируемых функций на X_0^+, удовлетворяющих условию

$$f(\alpha x) = \alpha^\sigma f(x) \tag{1}$$

при фиксированном комплексном σ.

Пусть $h_1(\varphi)$ — матрица кругового поворота в плоскости Ox_2x_3 на угол φ, $h_2(\varphi)$ и $h_3(\varphi)$ — матрицы гиперболических поворотов в плоскостях Ox_1x_1 и Ox_1x_3. Касательные (в точке id) векторы $e_{2,3} = \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}\varphi}|_{\varphi=0}$, $e_2 = \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}\varphi}|_{\varphi=0}$ and $e_3 = \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}\varphi}|_{\varphi=0}$ образуют базис E касательного пространства группы G_0. Коммутационные соотношения соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид

$$[e_{2,3}, e_2] = e_3, \quad [e_{2,3}, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_{2,3}.$$

Каждому вектору из E поставим в соответствие инфинитезимальный оператор:

$$\begin{gathered}\mathfrak{d}_{2,3} = \mathbf{i}\lim_{t\to 0}\frac{T\big(\exp(te_{i,j})\big)f(x) - f(x)}{t},\\ \mathfrak{d}_i = \mathbf{i}\lim_{t\to 0}\frac{T\big(\exp(te_i)\big)f(x) - f(x)}{t}.\end{gathered}$$

Подсчет показывает, что

$$\mathfrak{d}_{2,3} = \mathbf{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \ \mathfrak{d}_i = \mathbf{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_i} + x_i\frac{\partial}{\partial x_1}\right). \tag{2}$$

Матрицы $h_1(\varphi)$ образуют подгруппу в G_0, транзитивно действующую на окружности $\gamma : x_1 = 1$ верхней полы X_0^+. В полярных координатах на γ

$$\begin{multline}\mathfrak{d}_{2,3} = \\ = \mathbf{i}\left(\cos\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos^2\alpha\,\frac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\cos^2\alpha\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\right) = \\ = \mathbf{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.\end{multline}$$

Находя собственные функции этого оператора и поднимая их с учетом (1) на всю верхнюю полу, получаем базис B_1 пространства L, состоящий из функций

$$f_n^{(1)}(x) = x_1^\sigma\, \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\alpha} = x_1^\sigma\, \left(\frac{x_2}{x_1} + \mathbf{i}\frac{x_3}{x_1}\right)^n = x_1^{\sigma-n}\,(x_2 + \mathbf{i}x_3)^n.$$

Аналогично получаются базисы B_2 и B_3, связанные с подгруппами H_2 и H_3, состоящими соответственно из матриц $h_2(\varphi)$ и $h_3(\varphi)$.

Рассматривая $\mathbb{Z}_2$-градуировку $\mathfrak{so}(1,2) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ алгебры $\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{k} = \mathrm{Span}(e_{2,3})$ — подалгебра и $\mathfrak{p} = \mathrm{Span}(e_2, e_3)$ — линейное подпространство, и учитывая, что вещественный ранг группы G_0 равен единице, максимальную коммутативную подалгебру в $\mathfrak{g}$ можно выбрать по формуле $\mathfrak{a} = \mathrm{Span}(e_2)$. Находя матрицу присоединенного оператора $\mathrm{ad}\, e_2$ в базисе E и вычисляя затем его собственные векторы, получаем разложение $\mathfrak{so}(1,2) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\, e_2 + V_1 + V_{-1}$, где корневое подпространство V_j состоит из нулевого вектора и всех собственных векторов, отвечающих значению j. Тогда для максимальной нильпотентной подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$ верно равенство $\mathfrak{n} = \mathrm{Span}(e_{2,3} + e_3)$. Для подгруппы $H_4 = \exp \mathfrak{n} = \{\exp\big(t(e_{2,3} + e_3)\big)\} = \{h_4(t)\}$ в G_0 находим базис B_4 в L. Рассматривая аналогичный случай $\mathfrak{a} = \mathrm{Span}(e_2)$, получаем базис B_5.

Матричные элементы бесконечных матриц переходов между построенными базисами пространства L (то есть ядра соответствующих этим переходам интегральных операторов) выражаются через специальные функции: переход от B_1 к B_2 или B_3 или между B_2 и B_3 связан с гипергеометрической функцией Гаусса, переход от B_1 к B_4 или B_6 — с вырожденными гипергеометрическими функциями Куммера (или функциями Уиттекера), от B_2 к B_5 или от B_3 к B_4 — с волновыми функциями Кулона, между B_4 и B_3 — с функциями Бесселя Клиффорда. Рассматривая композиции переходов между базисами, получаем интегральные соотношения между указанными специальными функциями, которые в некоторых случаях являются континуальными теоремами сложения [1–4].

Отметим, что другие интегральные соотношения, связанные с указанными выше базисами, можно получить, вычисляя матричные элементы представления T, записанные в разных базисах, и учитывая матричные элементы матриц перехода между этими базисами. Еще один подход связан с действием оператора, сплетающего представление T и представление группы G_0 в другом однородном пространстве этой группы [5–7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шилин И. А., Чой Дж.* Алгебры Ли и специальные функции, связанные с изотропным конусом // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2023. Т. 222. С. 141–152.

[2] *Шилин И. А., Чой Дж.* О переходах между базисами пространства представления группы $SO(2,2)$ // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. С. 1235–1244.

[3] *Shilin I. A., Choi J.* Maximal subalgebras in $\mathfrak{so}(2,1)$, addition theorems and Bessel–Clifford functions // Journal of Analysis. 2023. Vol. 222. С. 719–732.

[4] *Shilin I. A., Choi J., Lee J. W.* Some integrals involving Coulomb functions associated with the three-dimensional proper Lorentz group // AIMS Mathematics. 2020. Vol. 5. С. 5663–5681.

[5] *Шилин И. А.* О преобразованиях Бушмана–Эрдейи и Мелера–Фока, связанных с группой $SO_0(1,3)$ // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. С. 228–237.

[6] *Шилин И. А., Чой Дж.* Метод континуальных теорем сложения и интегральные соотношения между функциями Кулона и функцией Аппеля F_1 // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. С. 1522–1531.

[7] *Shilin I. A., Choi J.* On some relations between hyper Bessel–Clifford, Macdonald and Meijer functions and hyper Hankel–Klifford integral transforms // Integral Transforms and Special Functions. 2023. Vol. 34. С. 788–798.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Сборник статей

Выпуск 22
Материалы 22-й международной Саратовской зимней школы,
посвященной 300-летию РАН
(Саратов, 28 января – 31 января 2024 г.)

Ответственный за выпуск: *Н. Ю. Агафонова*
Оригинал-макет подготовила: *А. А. Тюленева*

Подписано к использованию 30.01.2024. Размещено на сайте 03.02.2024

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 18.83 (21.00). Объем данных 2.46 Мб. Заказ 1-у.

Управление по издательской деятельности Саратовского университета
410012, Саратов, Астраханская, 83
https://www.sgu.ru/research/nauchnye-izdaniya-sgu/prodolzhayushchiesya-izdaniya

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК