II Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве

Пленарные доклады

19–22 сентября 2023

Вологодский государственный университет

М. А. Всемирнов. Гурвицевы группы

Гурвицевы группы — это конечные группы, которые порождаются парой элементов порядков 2 и 3, соответственно, при этом порядок произведения образующих равен 7. В докладе будет рассказано, чем вызван интерес к гурвицевым группам, а также о текущем состоянии проблемы описания гурвицевых групп. При этом будет уделено внимание как положительным (как строить гурвицевы образующие для широкого класса групп), так и отрицательным (как доказывать, что та или иная группа не является гурвицевой) результатам.

Д. Б. Каледин. Гомотопии и симметрии

В современной математике, обьекты часто изучаются “с точностью до изоморфизма”, причем следить за изоморфизмами важно — например, в теории Галуа именно группа автоморфизмов алгебраического расширения нашего поля содержит самую важную информацию. Топологический аналог теории Галуа — теория накрытий, где роль группы Галуа играет группа гомотопических классов петель, т.е. фундаментальная группа. Однако хорошо известно, что, как правило, топология пространства не определяется только лишь фундаментальной группой — бывают и нетривиальные высшие группы гомотопий. При попытке формализовать явление алгебраически, первое, что хочется сделать — это рассматривать не гомотопические классы петель, а сами петли; конечно, группу они уже не образуют, поскольку обратимы не буквально, а только “с точностью до высших гомотопий”, но есть надежда, что, если навести соответствующий формализм, то все эти “высшие гомотопии” можно также явно алгебраически описать, и проблема рассосется сама собой.

К сожалению, надежда пока что тщетна. Во всех имеющихся в литературе построениях такой “гомотопической алгебры”, от модельных категорий Квиллена до популярных в последнее время “бесконечность-категорий”, никакого настоящего решения проблемы не предлагается — по сути, она просто заметается под ковер. Из-за этого формализм становится страшно громоздким, и любое его честное использование требует ссылок на основополагающие труды длиной в тысячи страниц. Я опишу альтернативный подход к гомотопической алгебре, основанный на введенном Гротендиком понятии “дериватора”; этот подход ничем не уступает по силе существующим, но при этом прост, интуитивно понятен, и очень близок к исходному формализму накрытий и фундаментальных групп.

Доклад рассчитан на общематематическую аудиторию. В частности, вообще никакого знакомства с гомотопической алгеброй не предполагается, а все необходимые понятия из теории категорий я объясню по ходу дела.

А. Б. Калмынин. Интервалы между суммами двух полноквадратных чисел

Натуральное число называется полноквадратным, если каждый показатель степени в его разложении на простые больше или равен 2. Мы поговорим о распределении сумм двух полноквадратных чисел в контексте результатов о значениях бинарных квадратичных форм. Будет представлена нетривиальная нижняя оценка для промежутков между такими числами, использующая некоторые вероятностные конструкции и плотностные теоремы для нулей L-функций Дирихле. По совместной работе с С. В. Конягиным.

Н. Ю. Лукоянов. Задачи оптимизации гарантии в динамических системах

В докладе речь пойдет об управлении движением динамических систем, описываемых при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, в условиях помех и/или противодействия. Качество процесса управления оценивается на конечном промежутке времени заданным показателем. В рамках теоретико-игрового подхода ставится вопрос о нахождении оптимального гарантированного результата и построении стратегии управления, обеспечивающей этот результат. Обсуждаются структура и свойства оптимальных стратегий в зависимости от свойств оптимизируемого показателя качества, наличия ресурсных ограничений, запаздывания в управлении. Для линейно-выпуклого случая указываются методы приближенного решения задачи, основанные на попятном построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Н. В. Маслова. О графах Грюнберга–Кегеля конечных групп и характеризации конечной группы ее графом Грюнберга–Кегеля

Симметрия — это один из фундаментальных принципов самоорганизации материальных форм в природе. Множество всех симметрий некоторого объекта образует алгебраическую структуру, которая называется группой. Исследовав группу симметрий объекта, можно получить новую информацию уже о самом объекте. Однако ситуация, когда группа симметрий исследуемого объекта известна a priori, является редкой. Обычно из эмпирических соображений, из "видимых" свойств объекта удается извлечь только информацию о каких-то свойствах этой группы, например, некоторые ее арифметические параметры. Появляется задача определить группу или описать хотя бы какие-то ее структурные свойства и особенности возможных действий на объектах, если известны только некоторые арифметические параметры этой группы. Получение результатов такого рода – это разработка математического аппарата, который в дальнейшем может быть применен далеко за пределами математики.

Примерами арифметических параметров конечной группы являются ее порядок, множество порядков всех ее элементов, множество величин всех ее классов сопряженности, множество всех степеней неприводимых комплексных представлений этой группы и т.д. Одним из хорошо известных арифметических параметров конечной группы является ее граф Грюнберга–Кегеля, который называют еще графом простых чисел. Это неориентированный граф без петель и кратных ребер, вершинами которого являются все простые делители порядка группы G и две вершины p и q смежны в котором тогда и только тогда, когда группа G содержит элемент порядка pq. Граф Грюнберга–Кегеля конечной группы, с одной стороны, бывает "достаточно легко" вычислить, с другой стороны, в некоторых случаях он определяет группу однозначно с точностью до изоморфизма. Например, хорошо известная конечная простая спорадическая группа Монстр содержит порядка $8,08 \times 10^{53}$ элементов, при этом граф

Грюнберга–Кегеля группы Монстр содержит всего 15 вершин, и эта группа однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим графом Грюнберга–Кегеля в классе конечных групп.

В этом докладе мы обсудим свойства графов Грюнберга–Кегеля конечных групп и вопрос характеризации конечной группы по ее арифметическим параметрам, в частности, по графу Грюнберга–Кегеля.

Д. О. Орлов. Гладкие алгебры и скрученное тензорное произведение

Д. В. Трещев. Поток нормализации

Процесс нормализации в теории нормальных форм традиционно происходит пошагово: нежелательные члены (в векторном поле, функции Гамильтона и т.п.) удаляются поочередно степень за степенью. Я укажу дифференциальное уравнение в пространстве всех гамильтонианов с особой точкой в начале координат, вдоль решений которого функции Гамильтона движутся к своим нормальным формам. Сдвиги вдоль потока этого уравнения отвечают каноническим преобразованиям координат. Итак, речь идет о непрерывной процедуре нормализации. Формальный аспект теории не вызывает трудностей. Аналитический аспект и вопросы сходимости рядов, как всегда, нетривиальны. В этом направлении сделаны лишь первые шаги.

А. И. Шафаревич. Коротковолновые асимптотические решения строго гиперболических систем со скачкообразно меняющимися коэффициентами

Хорошо известно, что коротковолновые асимптотические решения линейных строго гиперболических по Петровскому систем, коэффициенты которых не зависят от малого параметра (или зависят от него регулярно), описываются в терминах канонического оператора Маслова на наборе лагранжевых поверхностей. Эти поверхности инвариантны относительно гамильтоновых полей, гамильтонианы которых удовлетворяют характеристическому уравнению для старшего символа гиперболической системы.

Если коэффициенты зависят от малого параметра сингулярно (т.е. их слабые пределы не гладкие), решение имеет более сложный вид вблизи носителя сингулярности этого слабого предела; в общем случае соответствующая теория не разработана. В докладе описывается асимптотика решения задачи Коши в случае, когда коэффициенты меняются скачкообразно, т.е. их слабые пределы терпят разрыв на некоторой гиперповерхности в пространстве независимых переменных. В этой ситуации лагранжевы поверхности перестраиваются в точках, соответствующих указанной поверхности, причем перестройка управляется геометрией проективной гиперповерхности в двойственном пространстве, определяемой старшим символом системы. Доказано, что решение разлагается в асимптотический ряд, слагаемые которого выражаются через канонический оператор Маслова на перестраивающихся лагранжевых поверхностях; функции, к которым применяются эти операторы, удовлетворяют вспомогательной задаче рассеяния для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а коэффициенты оператора монодромии такой задачи определяют коэффициенты отражения и прохождения волн через поверхность скачка коэффициентов.