

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Осенний семестр 2023/2024 учебного года

Программа курса

**«Математические методы
в физике твердого тела»**

(лектор – Армен Глебович Сергеев)

Целью курса является знакомство с математическими и — в первую очередь — топологическими методами, применяемыми в теории твёрдого тела. Роль топологии в физике твёрдого тела проявилась в полной мере при исследовании квантового эффекта Холла. Вскоре после его открытия фон Клитцингом в 1980 году появились публикации Лафлина и Таулесса с соавторами, в которых предлагалось топологическое объяснение этого эффекта.

Ключевую роль в исследовании топологических свойств твёрдых тел играет изучение их групп симметрий. Описание возможных типов симметрий восходит к Китаеву, который предложил классификацию топологических объектов, основанную на теории представлений клиффордовых алгебр. Вслед за алгебрами Клиффорда последовала K -теория, в терминах которой естественно формулируются топологические свойства твёрдых тел.

В курсе будут представлены приложения указанных математических дисциплин в физике твёрдого тела. Вначале мы напомним основные положения теории Блоха, описывающей свойства твёрдых тел, обладающих кристаллической решёткой. Затем построим алгебру наблюдаемых топологических объектов и возникающих классов симметрий.

Далее дадим описание алгебры наблюдаемых в терминах K -теории градуированных C^* -алгебр и опишем топологические инварианты твёрдого тела. Алгебра граничных наблюдаемых также определяется в терминах K -теории, предложенной Каспаровым.

Завершается курс построением BB -соответствия между топологическими инвариантами тела и его границы.

Это соответствие допускает естественную формулировку в терминах K -теории. В частном случае периодической унитарной модели его можно описать явным образом.

ВВЕДЕНИЕ

I. C^* -АЛГЕБРЫ.

1.1. C^* -алгебры.

1.2. C^* -модули.

1.3. Тензорные произведения.

1.4. Операторы A -конечного ранга и A -компактные операторы.

1.5. Проекторы и унитарные операторы.

II. K -ТЕОРИЯ.

2.1. K_0 -группа.

2.2. Конструкция Гротендика.

2.3. K_1 -группа.

III. НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

3.1. Спектральные тройки.

3.2. Фредгольмовы модули.

3.3. Теория индекса.

3.4. K -теория.

IV. ТЕОРИЯ БЛОХА.

4.1. Одночастичный оператор Шредингера.

4.2. Фермионное фоковское пространство.

4.3. Фермионное фоковское пространство твёрдого тела.

4.4. Приближение сильной связи.

V. АЛГЕБРА НАБЛЮДАЕМЫХ В ОБЛАСТИ.

5.1. Вещественные C^* -алгебры.

5.2. Локальные наблюдаемые.

5.3. Алгебра наблюдаемых в области.

- 5.4. Скрещенные произведения.
- 5.5. Градуированные C^* -алгебры.

VI. СИММЕТРИИ.

- 6.1. Клиффордовы алгебры.
- 6.2. Классы симметрий.
- 6.3. Псевдосимметрии.

VII. АЛГЕБРА НАБЛЮДАЕМЫХ В ОБЛАСТИ В ТЕРМИНАХ K -ТЕОРИИ.

- 7.1. K -теория.
- 7.2. Топологические инварианты в области.

VIII. АЛГЕБРА НАБЛЮДАЕМЫХ НА ГРАНИЦЕ.

- 8.1. Наблюдаемые на границе.
- 8.2. Фредгольмова K -теория.
- 8.3. Построение граничных классов.

IX. VB -СООТВЕТСТВИЕ.

- 9.1. Основная теорема и её следствия.
- 9.2. VB -соответствие в унитарном классе.
- 9.3. VB -соответствие для периодической модели.