

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Осенний семестр 2023/2024 учебного года

Программа курса

«Комплексные кобордизмы»

(лектор - Черных Георгий Сергеевич)

Стандартные гомологии $H_*(X; Z)$ несут в себе информацию о «независимых циклах» внутри рассматриваемого пространства X . Обычно это формализуется рассмотрением линейных комбинаций непрерывных отображений симплексов в пространство, причём циклам соответствуют линейные комбинации, которые фактически задают непрерывное отображение комплекса «без края», склеенного из симплексов, в X . При этом два таких цикла гомологичны, если их объединение служит границей некоторого такого же комплекса, склеенного из симплексов на единицу большей размерности.

Однако исторически идея «циклов» принадлежала А. Пуанкаре, который рассматривал в их качестве гладкие замкнутые многообразия. Тогда гомологичность равносильна тому, что два гладких цикла служат границей гладкого многообразия на единицу большей размерности. Переход же к симплексам в последующем был обусловлен техническими причинами, в первую очередь тем, что «гомологии», определённые через гладкие многообразия, оказались гораздо более сложными, чем привычные нам сейчас. Даже группы таких «гомологий» точки далеко не тривиальны. Однако оказывается, что таким образом всё-таки можно определить настоящую (экстраординарную) теорию (ко)гомологий, которая называется теорией (ко)бордизмов. Появившись в середине 20 века, эта теория бурно развивалась в его второй половине.

Особое место среди всех кобордизмов занимают комплексные кобордизмы, наверное, наиболее изученная и наиболее важная их разновидность. В курсе будет рассказано как о классических результатах, касающихся комплексных кобордизмов, таких как теорема Милнора-Новикова, теорема Квиллена об универсальности формальной группы геометрических кобордизмов, введённой в работе [2], теорема Ландвебера о точном функторе, так и о более современных результатах, в первую очередь касающихся эквивариантных комплексных кобордизмов, в основном с действием тора.

1. Экстраординарные теории (ко)гомологий, теорема Брауна о представимости, спектры.
2. Теории (ко)бордизмов, геометрическое определение, гомотопическое определение через спектры Тома, их эквивалентность, теорема Понтрягина-Тома.
3. Спектральная последовательность Адамса, структурные результаты о кольце коэффициентов комплексных кобордизмов, теорема Милнора-Новикова.
4. Комплексно ориентированные теории когомологий, классы Чженя, комплексные кобордизмы как универсальная комплексно ориентированная теория когомологий.
5. Формальные группы и их связь с комплексными кобордизмами, теорема Квиллена об универсальности формальной группы комплексных кобордизмов.
6. Роды Хирцебруха, теорема Ландвебера о точном функторе.
7. Эквивариантные (ко)бордизмы, несовпадение в этом случае геометрического и гомотопического определений.
8. Эквивариантные кобордизмы с действием тора, универсальный торический род, формулы локализации, эквивариантные и жёсткие роды.

Дополнительные темы, изложение которых состоит,
только если останется время

9. Спектры Брауна-Петерсона.
10. Спектральная последовательность Адамса-Новикова и хроматический подход к стабильной теории гомотопий.
11. Структурные результаты об эквивариантных комплексных кобордизмах, эквивариантная теорема Квиллена.

Список рекомендуемой литературы:

- [1] *Р. Стонг*, Заметки по теории кобордизмов (с добавлением В.М. Бухштабера). М., Мир, 1973.
- [2] *С.П. Новиков*, Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов. Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), с. 855–951.
- [3] *Дж.Ф. Адамс*, Стабильные гомотопии и обобщённые гомологии (с добавлениями А. Хаттори и В.М. Бухштабера). М., МЦНМО, 2014.