Sponsored by RUDN University via the Program "Priority 2030"

The 6th International Conference "Function Spaces. Differential Operators. Problems of Mathematical Education",

dedicated to the centennial anniversary of the corresponding member of Russian Academy of Sciences, academician of European Academy of Sciences L.D. Kudryavtsev

Moscow, Russia, November 14–19, 2023

ABSTRACTS

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
Lomonosov Moscow State University

2023

Program Committee:
A. L. Skubachevskii (Chairman), A. B. Muravnik (Vice-chairman),
A. I. Aptekarev, V. I. Burenkov, M. L. Goldman, G. E. Ivanov, S. I. Kabanikhin,
V. V. Kozlov, L. E. Rossovskii, A. A. Shkalikov.

Organizing Committee:
Co-chairmen: V. M. Filippov, V. A. Sadovnichy, D. V. Treschev.
Vice-chairman: E. B. Laneev.
D. E. Apushkinskaya, S. A. Budochkina, K. A. Darovskaya,
A. K. Kurbanmagomedov, A. S. Mozokhina, E. A. Pomogaeva, S. A. Rozanova,
V. M. Savchin, N. O. Scherbakova, A. L. Tasevich, A. G. Yagola, N. V. Zaitseva.

List of 45-minute Invited Speakers:
S. I. Bezrodnykh, V. I. Bogachev, G. A. Chechkin, G,V. Demidenko,
Z. Yu. Fazullin, G. E. Ivanov, S. I. Kabanikhin, A. N. Karapetyants, B. S. Kashin,
S. V. Konyagin, M. A. Mkrtchyan, V. E. Nazaikinskii, N. D. Podufalov,
S. A. Rozanova, A. L. Semenov, A. A. Shananin, A. A. Shkalikov, D. V. Treschev,
S. K. Vodopyanov, A. G. Yagola.

A Regular Fundamental Solution to a Parabolic Equation with Dini-Continuous Coefficients

E. A. Baderko*
Lomonosov Moscow State University,
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics

K. V. Semenov
Lomonosov Moscow State University,
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics

It is well known that for a uniformly parabolic equation with Hölder continuous coefficients there exists a regular fundamental solution, constructed using the Lévy method (see, e.g., [1]).

If the coefficients of the equation satisfy the double Dini condition

$$\int\limits_0^z y^{-1} dy \int\limits_0^y \omega(\xi)\xi^{-1} d\xi < +\infty,\ z > 0,$$

then there also exists a regular fundamental solution (see [2], [3]), which is also constructed by the Lévy method. Here ω is the modulus of continuity characterizing the continuity of the coefficients of the equation with respect to the space variable.

We consider the coefficients of the equation that satisfy only the Dini condition

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(z)}{z} dz < +\infty,\ x > 0. \tag{1}$$

It was shown in [4] that if the modulus of continuity corresponding to the principal coefficients of the equation do not satisfy Dini condition (1), then the regular fundamental solution to the parabolic equation may not exist.

The question arises whether Dini condition (1) *is sufficient* for the existence of a regular fundamental solution to a parabolic equation.

In this paper we give a positive answer to this question. We prove the existence of a regular fundamental solution for a uniformly parabolic equation with Dini-continuous coefficients if the modulus of continuity satisfies only condition (1).

In addition, in this paper a certain growth of the lower coefficients of the equation is allowed as $t \to 0+$.

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement № 075-15-2022-284.

References

[1] Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N., *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). XI, (1968).

[2] Baderko E. A., Potential for 2p-parabolic equations, *Differ. Equ.* **19**, №.1, 6–14 (1983).

[3] Zhenyakova I. V., Cherepova M. F., The Cauchy Problem for a Multi-Dimensional Parabolic Equation with Dini-Continuous Coefficients, *J. Math. Sci.* **264**, No. 5, 581–602 (2022).
[4] Il'in A. M., On the fundamental solution for a parabolic equation., *Sov. Math., Dokl.* **3**, 1697–1700 (1962).

About multipliers for global Morrey spaces

E. I. Berezhnoi*
Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

Based on a new approach for a wide class of global Morrey spaces, we give an exact description of the multiplier space between two Morrey spaces from this class. It is shown that in this case the multiplier space for a couple of Morrey spaces is an approximation Morrey space structurally constructed from the original spaces.

Let an ideal space X on R^n, an ideal space l of two-sided sequences with the standard basis $\{e^i\}$, a collection $\{B(0, 2^i)\}$ of bolls and a collection of disjoint annuli $\{D_i = B(0, 2^i) \backslash B(0, 2^{i-1})\}$.

By the global Morrey space $M^{\tau}_{l,X}$ (the approximation global Morrey space $\overline{M^{\tau}_{l,X}}$) we mean the set of all functions $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(R^n)$ for which the following norm is finite:

$$\|f|M^{\tau}_{l,X}\| = \sup_{t\in R^n} \| \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^i \; \|f(t+.)\chi(B(0,2^i)|X\| \mid l \;\|$$

$$(\|f|\overline{M^{\tau}_{l,X}}\| = \sup_{t\in R^n} \| \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^i \; \|f(t+.)\chi(D_i)|X\| \mid l \;\|).$$

Theorem 1. *Let ideal spaces X, l with the Fatou property and numbers $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ be given.*

Let the ideal spaces $X_0 = X^{\theta_0}$, $X_1 = X^{\theta_1}$ and $l_0 = l^{\theta_0}$, $l_1 = l^{\theta_1}$ be constructed from the ideal spaces X and l. Let a couple of the approximation Morrey spaces $\overline{M^{\tau}_{l_0,X_0}}$, $\overline{M^{\tau}_{l_1,X_1}}$ and a couple of the Morrey spaces $M^{\tau}_{l_0,X_0}$, $M^{\tau}_{l_1,X_1}$ be constructed from the ideal spaces X_0, X_1 and l_0, l_1. Let the approximation Morrey space $\overline{M^{\tau}_{l_m,X_m}}$ be constructed from the ideal spaces of multipliers $X_m = M(X_0 \to X_1)$ and $l_m = M(l_0 \to l_1)$.

Then:

$$M(\overline{M^{\tau}_{l_0,X_0}}, \overline{M^{\tau}_{l_1,X_1}}) = \overline{M^{\tau}_{l_m,X_m}}$$

and the norms in these spaces coincide;

if the operator $T(\sum_i e^i x_i) = \sum_k e^k (\sum_{-\infty}^{k}) x_i$ in the sequence space l^{θ_1} is bounded then

$$M(M^{\tau}_{l_0,X_0} \to M^{\tau}_{l_1,X_1}) = \overline{M^{\tau}_{l_m,X_m}}$$

and the norms in these spaces are equivalent.

This research was partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation project 075-02-2023-924 and by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project no. AP19677486).

References

[1] E.I. Berezhnoi, *A discrete varsion of local Morrey spaces.* Izvestiya RAN: Ser. Mat. 81 (2017), no. 1, 3–31 (in Russian). English transl.: Izvestiya: Mathematics. 81 (2017), no. 1, 1-28.

[2] E.I. Berezhnoi, *Multipliers for local Morrey spaces.* Positivity: 5(2022) DOI 10.1007/s11117-022- 00951-9

[3] E.I. Berezhnoi, *Multipliers for global Morrey spaces.* Positivity: 3(2023) - c. 1-18 DOI:10.1007/c11117-023-00994-6

About the scientific heritage of L.D. Kudryavtsev

V. I. Burenkov*
RUDN University

The activities of Lev Dmitrievich Kudryavtsev are multifaceted: mathematics itself, mathematical education, philosophical problems related to mathematics, pedagogical activities, organizational and scientific activities.

Lev Dmitrievich is an outstanding scientist - mathematician, a major specialist in the field of function theory and the theory of differential equations. He is the author of more than two hundred scientific papers on mathematics. In 2008, a three-volume set of his selected works was published.

Lev Dmitrievich conducted research on the metric and topological theory of differentiable mappings, studied both the general properties of these mappings and individual classes. He studied homological groups of locally compact spaces and homomorphism of these groups. L. D. Kudryavtsev contributed fundamental works on the theory of embedding of function spaces and its applications to variational problems for partial differential equations. He created the theory of embedding of weighted spaces, and on the basis of this theory he developed a variational method for solving boundary value problems for elliptic equations that degenerate at the boundary of the domain. In particular, he developed the theory of embedding of weihgtspaces and the variational method for power-type weights for both bounded and unbounded domains; the problem of extending functions from the hyperplane to the entire space into the class of infinitely differentiable functions outside the hyperplane was solved, in the best way with respect of the growth of derivatives of the extended function.

A large series of works by Lev Dmitrievich is devoted to the study of spaces of functions of one variable with a given asymptotic behavior and their applications to the theory of ordinary differential equations, in particular, questions about the asymptotic approximation to trigonometric and algebraic polynomials were considered. He created the foundations of the general theory of problems with initial asymptotic data at singular points for linear-asymptotic ordinary differential equations.

In 1953, for a series of works on the theory of differentiable mappings, Lev Dmitrievich was awarded the Moscow Mathematical Society Prize for young mathematicians.

In 1988, for a series of works on the theory of boundary value problems for differential operators and their applications in mathematical physics, L. D. Kudryavtsev, together with O. A. Oleinik, Yu. V. Egorov and V. A. Kondratiev, was awarded the USSR State Prize.

In 2004, he was awarded the Blaise Pascal Medal by the European Academy of Sciences for his outstanding contributions to function theory, topology and education.

The Boyarsky–Meyers Inequality for Elliptic Equations

G. A. Chechkin*
M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
&
Institute of Mathematics with Computing Center, Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russia
&
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

We prove the increased integrability (the Boyarsky–Meyers estimate) of the gradient of a solution to the Zaremba problem in a bounded strongly Lipschitz domain D for inhomogeneous $p(\cdot)$-Laplacian with variable exponent p of the form

$$\Delta_{p(\cdot)}u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = l \quad \text{in} \quad D, \quad u = 0 \text{ on } F, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } G, \qquad (1)$$

Here F is a closed part of the boundary ∂D and $G = \partial D \setminus F$. It is supposed that the function $p(\cdot)$ satisfies the well-known logarithmic condition (see [1])

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{k}{(|\ln|x-y||)}$$

for $x, y \in D$, $|x-y| < 1/2$. The increased integrability of the gradient of solutions is proved for solitions from the spaces $W^1_{p(\cdot)}(D)$ and $H^1_{p(\cdot)}(D,F)$. The functional l is a linear functional in the space dual to $W^1_{p(\cdot)}(D)$ or $H^1_{p(\cdot)}(D,F)$.

The results are partially published in [2] and [3].

The proof of the first main Theorem is supported by CS MSHE of Kazakhstan Republic (grant No. AP14869553). The proof of the second main Theorem is financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement 075-15-2022-284. The proofs of auxiliary Lemmata are supported in part by RSF grant 20-11-20272.

References

[1] V.V. Zhikov. On Lavrentiev's phenomenon // Russ. J. Math. Phys.-1995.- v. 3.- p. 249–269.
[2] Yu.A. Alkhutov, G.A. Chechkin. The Boyarsky–Meyers Inequality for the Zaremba Problem for $p(\cdot)$-Laplacian // Journal of Mathematical Sciences, New York, Springer.- 2023.- v. 274, No 4.- p. 423–441.
[3] Yu.A. Alkhutov, G.A. Chechkin. On Higher Integrability of the Gradient of a Solution to the Zaremba Problem for $p(\cdot)$-Laplace Equation in a Plane Domain (Jointly with Yu.A. Alkhutov) // Lobachevskii Journal of Mathematics.- 2023.- v. 44, No 8.- p. 3196–3205.

Initial boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with memory under nonlocal boundary condition

A. L. Gladkov*
Belarusian State University, Minsk, Belarus

We consider a nonlinear parabolic equation with memory

$$u_t = \Delta u + au^p \int_0^t u^q(x,\tau)\, d\tau - bu^m \tag{1}$$

for $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$ under nonlinear nonlocal boundary condition

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega\times(0,+\infty)} = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\, dy \tag{2}$$

and initial data

$$u(x,0) = u_0(x), \; x \in \Omega, \tag{3}$$

where a, b, q, m, l, are positive constants, $p \geqslant 0$, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$, ν is unit outward normal on $\partial\Omega$. Nonnegative continuous function $k(x,y,t)$ is defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \geqslant 0$, nonnegative function $u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ and satisfies the condition

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_\Omega k(x,y,0)u_0^l(y)\, dy$$

for $x \in \partial\Omega$. In this paper we study classical solutions. We establish the existence of a local maximal solution of the original problem. We prove also a comparison principle, uniqueness and nonuniqueness.

Let $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T = S_T \cup \overline{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$.

Theorem 1. *Let $\overline{u}$ and $\underline{u}$ be a supersolution and a subsolution of problem (1)–(3) in Q_T, respectively. Suppose that $\underline{u}(x,t) > 0$ or $\overline{u}(x,t) > 0$ in $Q_T \cup \Gamma_T$ if $\min(q,l) < 1$ or $0 < p < 1$. Then $\overline{u}(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t)$ in $Q_T \cup \Gamma_T$.*

Theorem 2. *Let problem (1)–(3) have a positive in $Q_T \cup \Gamma_T$ solution or a solution in Q_T either with nonnegative initial data in Ω for $\min(p,q,l) \geqslant 1$ or with positive initial data in $\overline{\Omega}$ under the conditions $m \geqslant 1$ or $p < m < 1$. Then a solution of (1)–(3) is unique in Q_T.*

Theorem 3. *Let $u_0(x) \equiv 0$ and either $l < \min(1,m)$ and*

$$k(x,y_0,t_0) > 0 \text{ for any } x \in \partial\Omega \text{ and some } y_0 \in \partial\Omega \text{ and } t_0 \in [0,T)$$

or $p + q < \min(1,m)$. Then a solution of (1)–(3) is nonunique in Q_T.

This work is supported by the state program of fundamental research of Belarus (grant 1.2.03.1). The results of the talk have been published [1].

References

[1] Gladkov A. L. Initial boundary value problem with nonlocal boundary condition for a nonlinear parabolic equation with memory, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, No 2, 18–27 (2023).

On a class of Hausdorff-Zhu operator

S. M. Grudsky
CINVESTAV, Mexico, Mexico

A. N. Karapetyants*
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

A. R. Mirotin
Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

In [1] we introduce and study a special class of Hausdorff operators, we call this class "Hausdorff-Zhu operators", on Banach spaces of analytic functions in the unit disc. Conditions of boundedness, compactness, and nuclearity of these operators are given. A special attention is paid to particular but important cases of analytic symbols and radial symbols. In particular it is shown that Hausdorff-Zhu operators with analytic symbols are at most two-dimensional and their spectra are computed. Further, in [2] we study the asymptotic behavior of the singular values of such operators with factorized kernel. We prove power-type estimates under additional conditions on the kernel of the operator. We give application of these results to the boundedness of Hausdorff-Zhu operators in general classes of analytic functions in the unit disc and also in some special classes of analytic functions defined in terms of conditions on Taylor or Fourier coefficients.

References

[1] A. N. Karapetyants, A. R. Mirotin. A class of Hausdorff-Zhu operators, *Analysis and Mathematical Physics*, **12**, (2022).
[2] S. M. Grudsky, A. N. Karapetyants, A. R. Mirotin. Estimates for singular numbers of Hausdorff-Zhu operators and applications *Math. Meth. Appl., Sci.*, **46**, (2023)

Characterization of BMO and Lipschitz functions via the commutators of fractional maximal function in Orlicz spaces on stratified Lie groups

V. S. Guliyev*
Institute of Applied Mathematics, BSU, Baku, Azerbaijan

Stratified groups appear in quantum physics and many parts of mathematics, including several complex variables, Fourier analysis, geometry, and topology. The geometry structure of stratified groups is so good that it inherits a lot of analysis properties from the Euclidean spaces.

Let $\mathbb{G}$ be a stratified Lie group, $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{G})$ and $0 \leqslant \alpha < Q$, where Q is the homogeneous dimension of $\mathbb{G}$. The fractional maximal function $M_\alpha f$ is defined by

$$M_\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{-1+\frac{\alpha}{Q}} \int_B |f(y)| dy,$$

and the sharp maximal function of Fefferman and Stein $M^\sharp f$ is defined by

$$M^\sharp f(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{-1} \int_B |f(y) - f_B| dy,$$

where the supremum is taken over all balls $B \subset \mathbb{G}$ containing x, and $|B|$ is the Haar measure of the $\mathbb{G}$-ball B. When $\alpha = 0$, we simply denote by $M = M_0$.

The fractional maximal commutator generated by $b \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{G})$ and M_α is defined by

$$M_{b,\alpha}(f)(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{-1+\frac{\alpha}{Q}} \int_B |b(x) - b(y)||f(y)| dy.$$

The commutators generated by $b \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{G})$ and M_α, $M^\sharp$ are defined by

$$[b, M_\alpha] f(x) = b(x) M_\alpha f(x) - M_\alpha(bf)(x), \;\; [b, M^\sharp] f(x) = b(x) M^\sharp f(x) - M^\sharp(bf)(x).$$

We shall give some new characterizations of the BMO and Lipschitz spaces via the boundedness of commutators associated with the fractional maximal operator in Orlicz spaces on stratified Lie groups. We give necessary and sufficient conditions for the boundedness of the fractional maximal commutators $M_{b,\alpha}$ and the commutators of the fractional maximal operator $[b, M_\alpha]$ in Orlicz spaces $L^\Phi(\mathbb{G})$ on any stratified Lie group $\mathbb{G}$ when b belongs to BMO and Lipschitz spaces $\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{G})$, see [1], [2].

References

[1] Guliyev V. S. Characterizations of Lipschitz functions via the commutators of maximal function in Orlicz spaces on stratified Lie groups, *Math. Inequal. Appl.*, **26** (2), 447–464 (2023).

[2] Guliyev V. S. Some characterizations of BMO spaces via commutators in Orlicz spaces on stratified Lie groups, *Results Math.*, **77** (1), Paper No. 42, 1–18 (2022).

On the norm of the Riesz projection from L^∞ to L^p

S. V. Konyagin*

Steklov Institute of Mathematics, Moscow, Russia

The talk is based on our joint paper [1].

We show that the Riesz projection from $L^\infty(\mathbf{T}^\infty)$ to $L^p(\mathbf{T}^\infty)$ is an unbounded operator for any $p > 2$.

References

[1] Konyagin S., Queffelec H., Saksman E., Seip K. Riesz projection and bounded mean oscillation for Dirichlet series, *Studia Math.*, **262**. N. 2, 121–149 (2022).

Dependence of the computed wave parameters on the grid resolution

M. M. Lavrentiev*
Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia

An. G. Marchuk
Institute of Comp. Math. and Math. Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

K. K. Oblaukhov
Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia

M. Yu. Shadrin
Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia

Fast numerical solution to nonlinear shallow water system is on demand for the tsunami risk mitigation and reduction. Using a specialized Calculator as co-processor it is possible compute tsunami wave propagation (to solve numerically the nonlinear shallow water system of differential equations) within 1 min at 3000x2500 grid using a regular personal computer. The Calculator is based on the Field Programmable Gates Array (FPGA) microchip. Precision of the obtained numerical solutions was checked by comparing it to the available exact solutions for special cases of the bottom profiles, linear and parabolic depth growth with the distance from the shore [1]. Both numerical experiments and field observations show quite irregular distribution of tsunami maximal heights along the shore line [2]. Having known such distribution in advance, the warning services would be able to announce special safety measures exactly in the locations with really dangerous expected wave heights. At the same time, those services would avoid unnecessary evacuation if the wave height is not too large.

In the paper the authors are studying dependence of the computed tsunami wave parameters (namely, the maximal heights) on the grid step used in finite-difference scheme. Numerical experiments were arranged both with artificial sea bottom configuration and also using the real bathymetry.

This work was supported by the State contracts of the Russian Ministry of Education and Science (contract with IAE SB RAS № 121041800012-8 and contract with ICMMG SB RAS № 0315-2019-0004).

References

[1] Lavrentiev M. M., Lysakov K. F., Marchuk An. G., Oblaukhov K. K., Shadrin M. Yu. Hardware/Software Solution for Low Power Evaluation of Tsunami Danger, *J. Low Power Electronics Appl.*, **12**, 1–16 (2002).

[2] Lavrentiev M. M., Lysakov K. F., Marchuk An. G., Oblaukhov K. K. Fundamentals of Fast Tsunami Wave Parameter Determination Technology for Hazard Mitigation, *Sensors*, **22**, 7630 (2022).

Construction of the dynamics equations of a given structure with program constraints equations

R. G. Mukharlyamov*
Patrice Lumumba Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russia

The processes of dynamics of devices of various physical nature and their various analogues are described by ordinary differential equations of the second order. a certain structure. The corresponding equations can be constructed if the necessary properties of the simulated system are known, represented by the integrals of the desired system. Of the equalities that are parts of partial integrals

$$
\begin{aligned}
&g_\alpha(\mathbf{q},t)=0,\ \ g_{\alpha,i}(\mathbf{q},t)\dot{q}^i+g_{\alpha_i,t}(\mathbf{q},t)=0,\ g_{\alpha,i}=\frac{\partial g_\alpha}{\partial q^i},\ \ \alpha=1,\dots,a,\\
&g_{\beta,i}(\mathbf{q},t)\dot{q}^i+g_{\beta_i,t}(\mathbf{q},t)=0,\ \ \beta=a+1,\dots,b,\ \ b\leqslant n,\\
&\mathbf{q}=(q^1,\cdots,q^n),\ \ \dot{q}^i=\frac{dq^i}{dt}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

the relations between the vectors of variables follow $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$

$$
f_i(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}}),\quad i=1,\dots,n. \tag{2}
$$

Expressions (2) are determined from the equations of perturbations of constraints

$$
y_\alpha=g_\alpha(\mathbf{q},t),\ \ \frac{dy_\gamma}{dt}=z_\gamma,\ \ \frac{dz_\gamma}{dt}=Z_\gamma,\ \ \gamma=1,\dots,b. \tag{3}
$$

and contain arbitrary functions $Z_\gamma(\mathbf{y},\mathbf{z},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$ satisfying the conditions $Z_\gamma(\mathbf{0},\mathbf{0},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$ $=0$, as well as arbitrary functions $\mathbf{c}_{b+1},\dots,\mathbf{c}_{n-1}$ that define kinematic relations between variables q, $\dot{q}$,t, following from the equalities (1). The functions Z_γ are used to maintain the constraint stabilization defined by partial integrals (1). The system of differential equations (2) in accordance with the Helmholtz conditions is transformed to the form of Lagrange equations with a dissipative function [1]. Using modified Helmholtz conditions and a linear system of perturbation equations for $y_i=p_i^k(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)y_k$, leads to the system

$$
\begin{aligned}
&m_{ij}\ddot{q}^j+m_{ij,k}\dot{q}^j\dot{q}^k-v_{i,j}q^j=p_i^k u_k,\ \ u_k=m_{kj}\dot{q}^j-v_k(\mathbf{q},t)\\
&m_{ij}(\mathbf{q})=m_{ji}(\mathbf{q}),\ i,j=1,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

In the case of a nonlinear system of equations of perturbations of constraints (3), equations (2) can be represented as

$$
f^i\equiv\ddot{q}^i+a^i_{jk}(\mathbf{q},t)\dot{q}^j\dot{q}^k-a^i_j(\mathbf{q},t)\dot{q}^j-a^i_0(\mathbf{q},t)=0. \tag{5}
$$

The system of equations (5) can be reduced to the form of Lagrange equations with a dissipative function providing constraint stabilization (1).

This work was supported by the Russian Science Foundation and Moscow city No 23-21-10065, https://rscf.ru/en/project/23-21-10065/.

References

[1] Mukharlyamov R.G. Reduction to a given structure of equations of dynamics of systems with constraints // PMM. 2007. Volume 71. Issue 3, pp. 401-410.

Efficient Asymptotic Solutions of Equations with Localized Right-Hand Sides

V. E. Nazaikinskii
Islhinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

We describe a method for constructing semiclassical asymptotic solutions of inhomogeneous partial differential and pseudodifferential equations with localized right-hand sides. These problems are close to problems on the asymptotics of the Green's function for such operators, in particular, the problems on the asymptotics of the Green's function for the Helmholtz equation studied in numerous papers (see, e.g., [1–3]). The method is based on a constructive description of the corresponding Lagrangian manifolds and on the recently proposed new representations [4] of the Maslov canonical operator [5, 6] in a neighborhood of Lagrangian singularities (caustics). The method gives rise to an analytical-numerical algorithm for constructing efficient asymptotic solutions of these problems arising in various fields of physics and continuum mechanics.

The talk is based on joint work with S. Yu. Dobrokhotov, A. Yu. Anikin and M. Rulo [7, 8] supported by the RFBR grant no. 17-51-150006 and by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract No. AAAA-A20-120011690131-7 at the Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.

References

[1] Babich V. M. On the short-wave asymptotics of Green's function for the Helmholtz equation, *Mat. Sb.*, **65(107)**, no. 4, 576–630 (1964).

[2] Vainberg B. R. On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $t \to \infty$ of solutions of non-stationary problems, *Russian Math. Surveys*, **30**, no. 2, 1–58 (1975).

[3] Kucherenko V. V. Quasiclassical asymptotics of a point-source function for the stationary Schrödinger equation, *Theoret. and Math. Phys.*, **1**, no. 3, 294–310 (1969).

[4] Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Shafarevich A. I. New integral representations of the Maslov canonical operator in singular charts, *Izv. Math.*, **81**, no. 2, 286–328 (2017).

[5] Maslov V. P. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques.* — Moscow: Izd. Moskov. Univ., 1965; Paris: Dunod, 1972.

[6] Maslov V. P., Fedoryuk M. V. *Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics.* — Moscow: Nauka, 1976; Boston: Reidel, 1981.

[7] Anikin A. Yu., Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Rouleux M. The Maslov canonical operator on a pair of Lagrangian manifolds and asymptotic solutions of stationary equations with localized right-hand sides, *Dokl. Math.*, **96**, 406–410 (2017).

[8] Anikin A. Yu., Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Rouleux M. Lagrangian manifolds and the construction of asymptotics for (pseudo)differential equations with localized right-hand sides, *Theoret. and Math. Phys.*, **214**, no. 1, 1–23 (2023).

Integral operators in Morrey spaces

E. D. Nursultanov*
Lomonosovs Moscow State University , Kazakhstan branch, Astana, Kazakhstan

This report is devoted to the study of integral operators in Morrey spaces. An analogue of an interpolation theorem of the Marcinkiewicz type for linear and quasi-linear operators in Morrey spaces is obtained. New theorems on the boundedness of singular integrals in Morrey spaces are proved [1]. An analog of O'Neill's inequality for integral convolution operators in Morrey spaces [2] is obtained. This inequality generalizes the results of Petre [4] and Adams [5, 6] on the boundedness of the Riesz potential in Morrey spaces. Interpolation properties of nonlinear Urysohn operators in generalized Morrey spaces [3]

This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677486).

References

[1] V. I. Burenkov, D. K. Chigambaeva, E. D. Nursultanov, "Marcinkiewicz-type interpolation theorem for Morrey-type spaces and its corollaries", Complex Var. Elliptic Equ., 65:1 (2020), 87–108.
[2] E. D.Nursultanov, D.Suragan On the convolution operator in Morrey spaces, J. Math. Anal. Appl. 515 (2022) 126357
[3] V. I. Burenkov, E. D. Nursultanov, "Interpolation Theorems for Nonlinear Operators in General Morrey-Type Spaces and Their Applications", Proc. Steklov Inst. Math., 312 (2021), 124–149.
[4] Peetre J.: On the theory of Lp spaces, Journal Funct. Analysis 4 (1969) 71-87.
[5] Adams D. R.: A note on Riesz potentials, Duke Math. 42 (1975) 765-778.
[6] Adams D. R.: Morrey Spaces. Birkhäuser, 2015, 124 p.

Spectral Properties of Fourth-order Differential Operators with Eigenvalue Parameter Dependent Boundary Conditions

D. M. Polyakov*
Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center RAS, Vladikavkaz, Russia

We consider a fourth-order differential operator S acting in the Hilbert space $L^2(0, 1)$ and given by

$$Sy = y^{(4)} + qy, \qquad y(0) = y''(0) = y''(1) = y'''(1) + \lambda y(1) = 0,$$

where λ is a spectral parameter and q is a real potential with $q \in L^1(0,1)$.

Physically, the fourth-order equation describes the bending oscillations of plates, hulls, and rods. The boundary conditions correspond to the pinned left end and some inertial mass concentrated at the right end (see [1]).

The spectrum and the trace formula for the operator S with unbounded operator coefficient is considered in [2]. Here we consider a particular case of the operator S of [2] without this coefficient and obtain a sharp asymptotics for the eigenvalues and the regularized trace formula.

Introduce the Fourier coefficients

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \widehat{f}_{cn} = \int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\,dx.$$

We formulate our main result.

Theorem 1. *Let $q \in L^1(0,1)$. Then the eigenvalues μ_n of the operator S satisfy the asymptotics*

$$\mu_n = (\pi n)^4 + 2(\pi n)^2 - \pi n + \frac{5}{6} + q_0 - \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-1}),$$

as $n \to +\infty$. If, in addition, $q' \in L^1(0,1)$, then

$$\mu_n = (\pi n)^4 + 2(\pi n)^2 - \pi n + \frac{5}{6} + q_0 - \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

as $n \to +\infty$.

This theorem improves a similar result from [2, Theorem 3.1].

This work was supported by the grant MK-160.2022.1.1 of the President of Russian Federation for young candidates of sciences.

References

[1] Roseau M. *Vibrations in Mechanical Systems. Analytical Methods and Applications.* — Berlin: Springer, 1987.

[2] Aslanova N. M., Bayramoglu M., Aslanov Kh. M. Some spectral properties of fourth order differential operator equation, *Oper. Matr.*, **12**, 287–299 (2018).

Non-strictly hyperbolic systems: regularization issues

O. S. Rozanova*

Lomonosov Moscow State University and RUDN University, Moscow, Russia

We consider the system

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A(\mathbf{V})\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = Q\mathbf{V}, \tag{1}$$

where $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$, $V_i = V_i(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $A(\mathbf{V}) = V_1\mathbb{E}$, $\mathbb{E}$ is the $n \times n$ unit matrix and $Q = Q_{ij}$ is a $n \times n$ constant matrix. The matrix A has the eigenvalues $\lambda_i(\mathbf{V}) = V_1$, the respective eigenvectors $\mathbf{v}_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i-th\,place}, ..., 0)$, $i = 1, \dots, n$, form the basis of the $\mathbb{R}^n$ space.

Systems of this kind are a mathematical object that is interesting in itself, and in addition, they arise in numerous applications, see [1], [2].

As for all quasilinear hyperbolic systems of the first order, for systems (1) the question arises about the formation of singularities of the solution corresponding to smooth initial data

$$\mathbf{V}(0, x) = \mathbf{V}_0(x) \in C^1(\mathbb{R}).$$

We discuss the question of what type of singularity is formed in solutions of system (1), as well as what factors can delay the formation of this singularity, eliminate or modify it. In particular, we examine the effect of adding second derivatives in the system, i.e. the modification of form

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = Q\mathbf{V} + B \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2},$$

where $B = b_{ij}$ is a $n \times n$ constant matrix.

This work was supported by the Russian Science Foundation (project No.23-11-00056) through RUDN University.

References

[1] Rozanova O. S. On non-strictly hyperbolic systems and models of natural sciences reducible to them, *arXiv:2303.10626*, submitted.

[2] Rozanova O. S. On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive euler-poisson equations, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **443**, 133578 (2023).

Invariant Measures of Flows in a Hilbert Space and Hamiltonian Random Walks

V. Zh. Sakbaev*

Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Science, Moscow, Russia

We analyse unitary representation of Hamiltonian flows in a real separable Hilbert space E endowed with a shift-invariant symplectic form ω. To this aim we study measures on the Hilbert space that are invariant with respect to the group of smooth symplectomorphisms of the space (E, ω) preserwing two-dimensional symplectic subspaces [1].

Random Hamilton function H and corresponding random Hamilton flow Φ_H in the phase space E equipped with an invariant measure μ are considered ([2]). By means of the Koopman unitary representaion of random nollinear flows $\mathbf{\Phi}$ in the spaces $L_2(E, \mu)$ we can apply methods of random linear group averaging [3].

The limit theorem for walks along the random Hamiltonian vector field on the symplectic space are obtained in the term of generalised convergence in distributions. Sobolev spaces and spaces of smooth functions are introduced and used to describing of infinitesimal operators of limit processes.

References

[1] Sakbaev V. Zh. Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure, *Mathematics*, **11**:5, 1161, 49 pp. (2023).
[2] Busovikov V.M., Sakbaev V. Zh. Invariant measures for Hamiltonian flows and diffusion in infinitely dimensional phase spaces, *International Journal of Modern Physics A*, **37**:20/21, 2243018 (2022).
[3] Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh., Shmidt E.V. Compositions of Random Processes in a Hilbert Space and Its Limit Distribution, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:4, 1432-1447 (2023).

η-invariants of elliptic boundary value problems

A. Yu. Savin*
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

K. N. Zhuikov
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Atiyah, Patodi and Singer [1] introduced η-invariant $\eta(A)$ of an elliptic self-adjoint operator A on a closed manifold as a regularized number of positive eigenvalues minus the number of negative eigenvalues. The regularization is defined in terms of analytic continuation of so-called η-function of the operator defined in terms of the eigenvalues. This invariant is a spectral invariant and has numerous applications and generalizations. For instance, it appeared as a contribution of the boundary in index formulas for Dirac operators on manifolds with boundary.

Melrose [2] introduced η-invariant $\eta(D(p))$ for elliptic parameter-dependent families of operators $D(p)$ on closed manifolds as a regularization of the winding number of the family. This invariant is a generalization of the Atiyah–Patodi–Singer η-invariant and also has applications. For instance, it appears as a contribution of the conical point for general elliptic operators on manifolds with isolated singularities.

Our aim is to extend the η-invariant of Melrose to parameter-dependent families of boundary value problems. We consider general parameter-dependent boundary value problems elliptic in the sense of Agranovich and Vishik and define η-invariants for such families. The main analytical result necessary to define the η-invariant is the asymptotic expansion of the trace of parameter-dependent families for large values of the parameter.

The reported study was funded by RFBR, project number 21-51-12006.

References

[1] Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. *Bull. London Math. Soc.* **5**, 229–234 (1973).
[2] Melrose R. B. The eta invariant and families of pseudodifferential operators. *Math. Res. Lett.* **2**:5, 541–561 (1995).

The relevance of L. D. Kudryavtsev's ideas for education in the 21st century

A. L. Semenov*
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

The report examines the views of Corresponding Member of the Academy of Sciences of the USSR, Professor L. D. Kudryavtsev on higher education and education in general, which are of great relevance today. For L. D. Kudryavtsev, mathematical education was the most important element and type of education, but the principles he developed certainly have a value that goes far beyond the scope of teaching mathematics. In particular, the provisions of Kudryavtsev's pedagogy related to the following issues are considered:

- Attitude of the educational organization and each teacher in relation to the student and learning outcomes.
- Formation of student motivation. The role of positive motivation and encouragement.
- Ability and inability for a particular education. Possibility and necessity of mathematical education for everyone.
- Organization of the educational process. Lectures, practical classes, structure of certification and preparation for it. Independent work of the student, the role of the lecturer and teacher.
- General goals of mathematics teaching and all education. Meta-subject and personal goals. Big ideas.
- The problem of large volume of curriculum content, its proportionality to the capabilities of the student.
- Digital transformation of education.

The continuity of Kudryavtsev's views with the traditions of world and Russian education, in particular, with the works of V. P. Ermakov and A. N. Krylova is discussed. Kudryavtsev also addresses the XIX International Conference on Public Education, convened by UNESCO and IBE in Geneva in 1956 (report by W. Servais) and the vast cultural context, from Dostoevsky to N. Bohr, where he finds confirmation of his views.

Like every major scientist, Prof. L. D. Kudryavtsev, on the one hand, was a man of his time and the social environment of the USSR, a world power, with outstanding achievements in science and technology, primarily in defense. On the other hand, Kudryavtsev's thoughts are absolutely in tune with the humanistic principles of pedagogy, which is possible and necessary for us today. One of the tasks that the speaker sets for himself is to attract the attention of young mathematics teachers to the works of L. D. Kudryavtsev according to the methods of higher education, which is the result of many decades of work by an outstanding professor of mathematics.

References

[1] Kudryavtsev L. D. Modern mathematics and its teaching. With a foreword by P. S. Alexandrov: Textbook for universities. — M.: Nauka, 1985. — 176 p.

Operators, Generated by the First Order Differential Systems

A. A. Shkalikov*
Lomonosov Moscow State University

We shall present in the talk new results on asymptotic representations for the fundamental system of solutions of the equation

$$\mathcal{L} := y' + B(x)y = \lambda A(x)y, \quad x \in [0,1],$$

as $\lambda \to \infty$ in some sectors of the complex plane. Here A and B are $n \times n$ matrices with summable entries and λ is the spectral parameter. We present explicit formulae for the first k terms of the asymptotic expansions under minimal assumptions on the smoothness of the matrices A and B, namely, when the entries of these matrices belong to the Sobolev space $W_1^{k-1}[0,1]$.

Then we study the spectral properties of the operator $A^{-1}\mathcal{L}$, generated by the boundary conditions $U_0 y(0) + U_1 y(1) = 0$. We define the class of the regular boundary value problems and prove that the root functions of the operator $A^{-1}\mathcal{L}$, form an unconditional block-basis in the space $\mathcal{H} = (L_2[0,1])^n$, provided that the regularity condition holds. Applications of these results to the high order scalar ordinary differential operators with distribution coefficients will be presented.

The research is supported by the Russian Science Foundation under the grant No 20-11-20261.

On existence of solutions to elliptic differential difference equations with essentially nonlinear operators having a semibounded variation

O. V. Solonukha*
Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Let $Q \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with a boundary $\partial Q \in C^\infty$, or $Q = (0,d) \times G$, where $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ is a bounded domain (with a boundary $\partial G \in C^\infty$ if $n \geqslant 3$). If $n = 1$ we denote $Q = (0,d)$. We consider the problem with essentially nonlinear operator A

$$ARu(x) = -\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \partial_i A_i(x, Ru(x), \nabla Ru(x)) + A_0(x, Ru(x), \nabla Ru(x)) = f(x), \quad (1)$$

where $x \in Q$, with the boundary condition

$$u(x) = 0 \qquad (x \notin Q). \tag{2}$$

Here $f \in W_q^{-1}(Q)$, $1/q + 1/p = 1$, and $1 < p < \infty$, a linear difference operator R is given by the formula

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h), \tag{3}$$

where $a_h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ is a finite set of vectors with integer coordinates (similarly we can consider the case of commensurable shifts).

We suppose that the differential operator A is a Nemytsky type operator, and AR satisfies the strong ellipticity condition and coercivity condition for differential–difference operator. Then we prove that there exists at least one generalized solution of problem (1), (2) $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$.

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (megagrant agreement No. 075-15-2022-1115).

Spectral Order in Operator Algebras Theory

E. Turilova*
Kazan Federal University, Kazan, Russia

The talk summarizes the recent results on the spectral order on AW^*-algebras and von Neumann algebras with the following aims:

to present a "non-orthodox" order on operators that can replace the standard order and has an interesting physical content;

to show that the most natural context for studying the spectral order is given by abstract AW^*-algebras;

to demonstrate that the spectral order organizes operator effect algebra into a complete lattice that naturally contains projection lattice as a sublattice;

to present the deep results on symmetries of the spectral order that can be viewed as "unsharp" generalizations of famous Wigner's and Dye's Theorems on symmetries of the quantum system.

We initiate also study of spectral order on Jordan triplets. The order given on the tripotents is extended to the spectral order on the triplets. We show that Jordan triplets equipped with a spectral order are not a lattice, but preserve the Olson "moment" characteristic.

Cauchy Problem for the Equation of Longitudinal Vibrations of a Thick Rod with Allowance for Deformation Effects in Transverse Direction

Kh. G. Umarov*
Academy of Sciences of the Chechen Republic, Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russia

The nonlinear equation of Sobolev type [1, Ch. 2; 2, Part II] unsolved for the second time derivative

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + a\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

where a and b – are given numerical parameters, arises in mathematical modeling of various physical processes. For example, for $a = b = 0$ we obtain the Boussinesq equation describing the flow of an incompressible stratified fluid [3]; for $a \neq 0$ and $b = 0$ the equation of longitudinal vibrations of a thick rod with allowance for deformation effects in transverse direction [4, Sec. 4.2.2]; for $a = 0$ and $b \neq 0$ the equation of longitudinal waves in a nonlinear elastic rod [5, Sec. 9.4.2], sometimes referred to as the modified Boussinesq equation. For nonzero a and b the right-hand side of equation reflects the joint action of the rotary inertia, the transverse deformation and nonlinear effects, respectively.

We study the solvability of the Cauchy problem in the half-plane $(x,t) \in \,]-\infty, +\infty[\, \times [0, +\infty[$, in the class of functions $u = u(x,t)$ that, for each fixed value of the time variable t, are continuous on the entire real line and have finite limits at infinity.

We assume that the rod is infinite. This idealization is admissible [6] if the boundary support parameters ensure that the perturbations incident on the boundary are not reflected.

Both sufficient conditions for the existence of a global solution ($t \geqslant 0$) of the Cauchy problem and sufficient conditions for its blowup on a finite time interval are found [7].

References

[1] Demidenko, G.V. and Uspenskii, S.V., Equations and Systems Unsolved for the Highest Derivative, Novosibirsk: Nauchn. Kniga, 1998.

[2] Sveshnikov, A.G., Al'shin, A.B., Korpusov, M.O., and Pletner, Yu.D., Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations, Moscow: Fizmatlit, 2007.

[3] Gabov, S.A. and Orazov, B.B., The equation $\partial^2/\partial t^2\,[u_{xx} - u] + u_{xx} = 0$ and several problems associated with it, USSR J. Comput. Math. Math. Phys., 1986, vol. 26, no. 1, pp. 58–64.

[4] Beards, C.F., Structural Vibration: Analysis and Damping, Oxford: Clarendon, 2003.

[5] Ostrovskii, L.A. and Potapov, A.I., Introduction to the Theory of Modulated Waves, Moscow: Fizmatlit, 2003.

[6] Erofeev, I.V., Flexural-torsional, longitudinal-flexural, and longitudinal-torsional waves in rods, Vestn. Nauchn.-Tekh. Razvit., 2012, no. 5 (57), pp. 3–18.

[7] Umarov, Kh. G., Cauchy Problem for the Equation of Longitudinal Vibrations of a Thick Rod with Allowance for Transverse Inertia, Differential Equations, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 65–80.

Model Pseudo-Differential Equations, Canonical Domains and Discrete Approximations

V. B. Vasilyev*
Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

In the theory of elliptic pseudo-differential equations on manifolds with a smooth boundary, the local model canonical domain is a half-space, and in this situation the theory of one-dimensional singular equations plays the main role. For manifolds with a non-smooth boundary there are a lot of different local situations and canonical domains, and we develop new approach [1,2,3].

Despite all the importance of the conducted research, the question of finding solutions to pseudo=differential equations and related elliptic boundary value problems remains open. As a rule, it is not possible to obtain an analytical formula for the solution, and therefore approximate solution methods implemented using computer calculations come to the fore. In the theory of boundary value problems for differential equations, the method of difference schemes and the method of difference potentials are widely used, in the theory of integral equations - the collocation method, various interpolation and projection methods and the method of boundary integral equations. However, there are no corresponding analogues of these methods for pseudo-differential equations, existing ones are not applicable in this situation.

Taking into account these circumstances, an attempt was made to create a discrete theory of elliptic pseudo-differential equations and corresponding discrete boundary value problems, to describe the picture of their solvability and to show that discrete boundary value problems can have good approximation properties with a suitable choice of discrete approximations. The first studies in this direction were carried out with Calderon-Zygmund operators, where results on the solvability of discrete equations were obtained and a comparison of discrete and continuous solutions was given. These studies were developed in the broader context of pseudo-differential equations [4,5], allowing us to describe the solvability conditions of discrete pseudo-differential equations and related boundary value problems in half-space and quadrant for the simplest elliptic symbols and to compare discrete and continuous solutions.

References

[1] Vasil'ev V, B. *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains.* Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[2] Vasilyev V. B. On some distributions associated to boundary value problems, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **64**, 888-–898 (2019).

[3] Vasilyev V., Kutaiba Sh. Elliptic equations in domains with cuts. *Int. J. Appl. Math.*, **34** 339–351 (2021).

[4] Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space. *Math. Model. Anal.*, **23** 492–506 (2018)

[5] Vasilyev V., Vasilyev A., Mashinets A. On a general discrete boundary value problem for an elliptic pseudo-differential equation in a quadrant. *Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.*, **29** 16 p. (2023).

The multilingual teaching of mathematics

M. B. Visitaeva*
Middle school, Urus-Martan, Russia

We study mathematics in our elective classes on a multilingual basis. So far, we have been using native (Chechen), Russian and English languages. We follow the axiomatic method. First of all, we study the basis of the topic: basic definitions, properties, etc. We pay attention to the special features, which lie under a particular topic. For example, while students were study a theme "Arithmetic operations", they found it difficult to declare numerals in Chechen. At the same time, it was hard for them to read multi-digit numbers in English. We had been using British English, but whenever it was possible, we tried to pay attention to American English too. We also studied how to write down decimals and ordinary fractions, as well as, how to read them and perform operations on them in English. We also tried solving linear and non-linear equations, without excluding the simple problems.

In the process of work (theoretical and practical) we take into account the results of international studies (PISA, TIMSS, PIRLS, etc.) [1]. Thus, organized activities of students generally contribute to the development of their functional literacy, especially mathematical and reading literacy.

References

[1] Visitaeva M.B. The multilingual learning of mathematics. Modern Education: Scientific Approaches, Experience, Problems, Prospects : Proceedings of the XIX All-Russian Scientific and Practical Conference "Artemov Readings" dedicated to the 100th anniversary of the birth of Dr. Pedagogical Sciences, Professor A. K. Artemov(Penza, in 19-20 April in 2023) / edited by Dr. Pedagogical Sciences, Prof. M. A. Rodionov. Penza : PSU, 2023.

On a Sufficient Condition for the Existence of Unconditional Bases of Reproducing Kernels in Fock type Spaces with Nonradial Weights

R. S. Yulmukhametov*
Institute of Mathematics UFRC RAS, Ufa, Russia

K. P. Isaev
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

A. V. Lutsenko
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

We consider Hilbert space of entire functions

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) < \infty \right\},$$

where $dm(z)$ being planar Lebesgue measure, $\varphi(z)$ being a subharmonic function. We denote by $k_\lambda(z) = k(z,\lambda)$ a reproducing kernel of this space, i.e.,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} f(z)\overline{k(z,\lambda)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z) = f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

The system $\{k(z,\lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$ will be called an unconditional basis in the space $\mathcal{F}_\varphi$ if it is complete and for some $C > 1$ we have

$$\frac{1}{C}\sum_j |a_j|^2 k(\lambda_j,\lambda_j) \leqslant \left\|\sum_j a_j k(z,\lambda_j)\right\|^2 \leqslant C\sum_j |a_j|^2 k(\lambda_j,\lambda_j),$$

for an arbitrary finite set of complex numbers $\{a_j\}$. An unconditional basis $\{e_j,\ j = 1,2,...\}$ becomes Riesz basis if and only if $0 < \inf\limits_k \|e_k\| \leqslant \sup\limits_k \|e_k\| < \infty$.

A positive function u on $\mathbb{R}_+$ is said to be *regular* if there exists a number $q > 1$ and a function $\gamma(x) \uparrow +\infty$ such that

$$\frac{1}{q} \leqslant \frac{u(x)}{u(y)} \leqslant q, \quad |x-y| \leqslant \gamma(x)\sqrt{\frac{1}{u(x)}}, \quad x,y \in \mathbb{R}_+.$$

Theorem 1. *Let a function $\varphi \in C^2$ satisfy the condition*

$$\sup_{|z-w|\leqslant 1} |\varphi(z)-\varphi(w)| \leqslant B, \quad z \in \mathbb{C}.$$

If, in addition, the function $\mu'(e^x)e^x$ is regular and bounded, then the Fock type space $\mathcal{F}_\varphi$ possesses an unconditional basis of reproducing kernels.

This work was supported by the grant of Russian Science Foundation (project no. 21-11-00168).

Инвариантные подпространства в неквазианалитических пространствах на интервале

Н. Ф. Абузярова*
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, УУНиТ, Уфа, Россия

В 2008 году А. Алеман и Б. Коренблюм в [1] обнаружили наличие нетривиальных инвариантных относительно дифференцирования подпространств, не содержащих экспонент в пространстве $C^\infty(a;b)$. Это обстоятельство привело затем к заметым отличиям как постановки, так и решения задачи спектрального синтеза для оператора дифференцирования в этом пространстве от аналогичной задачи для пространств голоморфных функций.

В классическом случае, в пространствах голоморфных функций, допустимость инвариантным подпространством W спектрального синтеза означает, что

W порождается (линейно и топологически) множеством экспоненциальных одночленов, содержащихся в нем. Неквазианалитичность пространства $C^\infty(a;b)$ вынуждает обратиться к более общей постановке задачи спектрального синтеза для инвариантных подпространств $W \subset C^\infty(a;b)$, а именно: выяснить при каких условиях W есть замыкание суммы $\operatorname{span} Exp\, W + W_{I_W}$? Здесь $Exp\, W$ — совокупность экспоненциальных одночленов, содержащихся в W, а W_{I_W} — "резидуальная часть" W, состоящая из функций $f \in W$, равных нулю на относительно замкнутом в $(a;b)$ промежутке I_W (наименьшем из возможных для W).

Основные результаты для $C^\infty(a;b)$ были получены в работах [2, 3].

Мы показываем, что и постановка задачи спектрального синтеза, и существенная часть результатов по ней практически без изменений переносятся на случай инвариантных относительно дифференцирования подпространств в неквазианалитических пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале. Соответствующая теория Ω-ультрадифференцируемых функций и Ω-ультрараспределений в наиболее общем виде, включающем, как частные случаи, многие известные классы пространств, такие как пространства Берлинга-Бьорка, Румье-Коматсу и др., была построена в работах [4, 5].

Список литературы

[1] Aleman A., Korenblum B. Derivation-invariant subspaces of C^∞, *Comp. Meth. and Function Theory*, **8**, № 2, 493–512 (2008).

[2] Абузярова Н. Ф. Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций, *Доклады РАН*, **457**, № 5, 510–513 (2014).

[3] Aleman A., Baranov A., Belov Yu. Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation, *Journal of Functional Analysis*, **268**, 2421–2439 (2015).

[4] Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. — М.: Наука, 2007.

[5] Абанин А. В. Ω-ультрараспределения, *Известия РАН, сер. Матем.*, **72**, № 2, 207–240 (2008).

Проекционный метод для интегральных операторов с однородными и биоднородными ядрами

О. Г. Авсянкин*

Южный федеральный университет, Ростов–на–Дону, Россия

Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ $(0 < \tau_1 < 1,\ \tau_2 > 1)$ — семейство проекторов, действующих в X. Будем предполагать, что при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to \infty$ проекторы P_{τ_1,τ_2} сильно сходятся к единичному оператору.

Определение 1. *Будем говорить, что к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$, если*

1) существуют такие числа $\delta_1 \in (0,1)$ и $\delta_2 \in (1,\infty)$, что при всех $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $\tau_2 > \delta_2$ для любого $y \in X$ уравнение

$$P_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2} x = P_{\tau_1,\tau_2} y$$

имеет единственное решение $x_{\tau_1,\tau_2} \in P_{\tau_1,\tau_2}X$;

2) при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$ решение x_{τ_1,τ_2} стремится по норме пространства X к решению $x \in X$ уравнения $Ax = y$.

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1° $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y)$, $\forall\, \alpha > 0$;
2° $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y)$, $\forall\, \omega \in SO(n)$;
3° $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,y)||y|^{-n/p}\,dy < \infty$, где $e_1 = (1,0,\ldots,0)$.

Обозначим через P оператор умножения на характеристическую функцию единичного шара и положим $Q = I - P$. Рассмотрим парный оператор

$$A = \lambda I + K_1 P + K_2 Q, \tag{2}$$

где K_1 и K_2 — операторы вида (1). Определим проектор P_{τ_1,τ_2} формулой

$$(P_{\tau_1,\tau_2}\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau_1 < |x| < \tau_2, \\ 0, & |x| < \tau_1 \ \vee\ |x| > \tau_2. \end{cases}$$

Для оператора A вида (2) получен критерий применимости проекционного метода по системе проекторов $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$.

Также рассмотрен вопрос о применимости проекционного метода к оператору

$$B = I_1 \otimes I_2 + K_1 \otimes K_2$$

по системе проекторов $\{\mathcal{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$, где $\mathcal{P}_{\tau_1,\tau_2} = P_{\tau_1,\tau_2} \otimes P_{\tau_1,\tau_2}$ (см. [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Регионального математического центра ЮФУ, Соглашение Минобрнауки России № 075-02-2023-924.

Список литературы

[1] Авсянкин О. Г. Проекционный метод для одного класса интегральных операторов с биоднородными ядрами, *Изв. вузов. Математика*, № 3, 3–11 (2023).

О предельном поведении решений уравнения переноса излучения в системе полупрозрачных тел при стремлении коэффициентов поглощения и рассеяния к бесконечности

А. А. Амосов*
Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт", Москва, Россия

Получены результаты о предельном поведении решений уравнения переноса излучения

$$\omega \cdot \nabla I_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} I_\varepsilon = \frac{\varpi}{\varepsilon}\frac{1}{4\pi}\int_\Omega I_\varepsilon(\omega', x)\, d\omega' + \frac{1-\varpi}{\varepsilon}k^2 F, \quad (\omega, x) \in D. \tag{1}$$

при $\varepsilon \to 0$. Искомая функция $I_\varepsilon(\omega, x)$ имеет физический смысл интенсивности излучения в точке $x \in G$, распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega$. Она определена на множестве $D = \Omega \times G$, где $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid |\omega| = 1\}$, а $G = \bigcup\limits_{j=1}^N G_j$, где G_j ограниченные области в $\mathbb{R}^3$ с гладкими границами такие, что $\overline{G}_i \cap \overline{G}_j = \emptyset$ при $i \neq j$. В уравнении (1) ϖ/ε - коэффициент рассеяния, $(1-\varpi)/\varepsilon$ – коэффициент поглощения, $0 < \varpi < 1$ – альбедо, F – плотность изотропных объемных источников излучения, $1 \leqslant k$ – коэффициент преломления.

Уравнение (1) дополняется краевым условием диффузного отражения и диффузного преломления излучения

$$I_\varepsilon|_{\Gamma^-} = \mathcal{R}^-(I_\varepsilon|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}^-(J_\varepsilon), \quad (\omega, x) \in \Gamma^- \tag{2}$$

и уравнением

$$J_\varepsilon = T[\mathcal{R}^+(J_\varepsilon) + \mathcal{P}^+(I_\varepsilon|_{\Gamma^+})] + J_{*,\varepsilon}, \quad (\omega, x) \in \Gamma^-, \tag{3}$$

описывающим связь между интенсивностью J_ε падающего на ∂G излучения и интенсивностями отраженного излучения $\mathcal{R}^+(J_\varepsilon)$, преломленного излучения $\mathcal{P}^+(I_\varepsilon|_{\Gamma^+})$ и приходящего извне излучения $J_{*,\varepsilon}$.

Здесь $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{R}^-$ и $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ – операторы диффузного отражения и диффузного преломления излучения, T – оператор трансляции,

$$\Gamma^- = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^-, \quad \Gamma_j^- = \{(\omega, x) \in \Omega \times \partial G_j \mid \omega \cdot n_j(x) < 0\},$$
$$\Gamma^+ = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^+, \quad \Gamma_j^+ = \{(\omega, x) \in \Omega \times \partial G_j \mid \omega \cdot n_j(x) > 0\}.$$

Результаты для случая, когда G представляет собой одну ограниченную область в $\mathbb{R}^3$ и уравнение (3) отсутствует, опубликованы в [1].

Список литературы

[1] Amosov A. A. Limit Behavior of Solutions to the Radiative Transfer Equation as Coefficients of Absorption and Scattering Tend to Infinity, *Journal of Mathematical Sciences*, **270**, No. 6, 752–769 (2023).

Математическая подготовка инженеров в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого

В. И. Антонов*
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

История Санкт-Петербургского политехнического института насчитывает 125 лет. С момента открытия он является кузницей инженерных кадров для различных областей российской промышленности.

Подготовка современного инженера включает в себя логику и интуицию, предметную область, знание экономики, дизайна, проблем безопасности, сочетания научного и творческого мышления. Результатом инженерной деятельность является создание объектов, объединяющих новые знания и разработки с возможностями их реализации. В связи с этим возрастает роль фундаментальной подготовки по базовым дисциплинам: математике, физике, химии, инженерной графике, компьютерным технологиям.

В состав университета входят следующие инженерные институты: Институт энергетики, Инженерно-Строительный институт, Институт компьютерных наук и технологий, Физико-Механический институт, Институт биомедицинских систем и биотехнологий, Институт машиностроения, материалов и транспорта, Институт электроники и телекоммуникаций.

Содержание курса высшей математики для инженеров

1. Базовые разделы

   Аксиомы, логика, доказательства. Вещественные числа. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Введение в анализ, функциональная зависимость. Производная и дифференциал. Исследование функций. Интегральное исчисление с приложениями. Числовые ряды. Функциональные ряды. Ряды и интеграл Фурье. Дифференциальные уравнения. Функции многих переменных. Теория вероятностей.

2. Разделы по выбору

   Линейные пространства. Операторы. Специальные функции. Кратные и криволинейные интегралы. Теория поля. Функции комплексной переменной. Математическая статистика. Детерминированные, стохастические и хаотические процессы. Принципы математического моделирования.

Сравнительный анализ математических курсов СПб ПУ и ведущих американских и европейских технических университетов показал, что программы курсов во многом идентичны, хотя методики представления материала могут различаться. С учетом того, что уровень школьной подготовки по математике в России во многом не соответствует современным требованиям, мы проводим факультативные занятия для первокурсников по наиболее востребованным разделам элементарной математики с итоговым зачетом. Студенты участвуют в математических олимпиадах, а также в «Дне науки». Лучшие доклады мы публикуем.

Апостериорные оценки ошибок в начально-краевой задаче для уравнения “реакция-диффузия”

Д. Е. Апушкинская*
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

В докладе обсуждаются полностью вычисляемые оценки сверху для разности между точным решением эволюционной задачи для уравнения “реакция-диффузия” и приближенным решением (аппроксимацией).

Такие оценки часто называют апостериорными оценками функционального типа. Полученные мажоранты ошибки не требуют знания точного решения и не используют специфические особенности аппроксимаций (например, ортогональность Галеркина), что характерно для апостериорных методов, применяемых в сеточно-адаптивных вычислениях, основанных на технологии конечных элементов.

Особое внимание будет уделено случаю, когда полученное приближенное решение не точно зависит от начальных данных.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с С.И. Репиным и С.Б. Тихомировым.

Метод весовых метрик в теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

С. Н. Асхабов*
Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, Чеченский государственный педагогический университет, Грозный, Россия

Метод весовых метрик хорошо известен применительно к интегральным уравнениям вольтерровского типа с разностными ядрами и степенной нелинейностью [1], [2]. В последние годы этот метод применялся к соответствующим интегро-дифференциальным уравнениям разных порядков [3]. В данной работе метод весовых метрик применяется к уравнению произвольного порядка

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x K(x-t)\, u^{(n)}(t)\, dt, \quad \alpha > 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $K \in C^{2n-1}[0,\infty)$, $K^{(2n-1)}(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, $K(0) = K'(0) = K''(0) = \ldots = K^{(2n-2)}(0) = 0$ и $K^{(2n-1)}(0) = p > 0$, при начальных условиях

$$u(0) = u'(+0) = u''(+0) = \ldots = u^{(n-1)}(+0) = 0. \tag{2}$$

Решение ищется в классе $Q_0^n = \{u(x) : u \in C[0,\infty) \cap C^n(0,\infty), u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}$. Непосредственно проверяется, что любое решение $u \in Q_0^n$ задачи (1)-(2) является решением нелинейного интегрального уравнения

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x K^{(n)}(x-t)\, u(t)\, dt, \quad \alpha > 1. \tag{3}$$

Найдены дополнительные условия на ядро $K(x)$ и степень α при которых любое непрерывное положительное при $x > 0$ решение уравнения (3) является решением начальной задачи (1)-(2), что позволило доказать глобальную теорему существования и единственности решения этой задачи в классе Q_0^n. Следующий пример показывает необходимость этих дополнительных условий: функция

$$u(x) = \left[\frac{p}{(n-1)!} \cdot B\left(n, \frac{n-1+\alpha}{\alpha-1}\right)\right]^{1/(\alpha-1)} \cdot x^{n/(\alpha-1)},$$

где B есть бета-функция Эйлера, является решением интегрального уравнения (3) с ядром $K(x) = x^{2n-1}$ при любом $\alpha > 1$, однако решением начальной задачи (1)-(2) в случае этого ядра она будет лишь при $1 < \alpha < (2n-1)/(n-1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FEGS-2020-0001).

Список литературы

[1] Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications, *Extracta Math.*, **4**, № 2, 51–74 (1989).
[2] Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
[3] Асхабов С. Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью, *Дифференц. уравнения*, **56**, № 6, 786–795 (2020).

Гипергеометрические функции многих переменных и конформное отображение многоугольников

С. И. Безродных*
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия

Рассматривается функция Лауричеллы $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$, являющаяся гипергеометрической функцией N комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_N) =: \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ и комплексных параметров $(a_1, \ldots, a_N) =: \mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$, $b, c \in \mathbb{C}$, см. [1], [2]. Эта функция удовлетворяет системе N линейных уравнений с частными производными по переменным $z_1, \ldots, z_N$, а в единичном поликруге $\mathbb{U}^N = \{|z_j| < 1, j = \overline{1, N}\}$ функция Лауричеллы представима в виде N–кратного ряда Тейлора.

В докладе представлены результаты работ [3]– [5], где при произвольном N указан полный набор формул аналитического продолжения функции Лауричеллы за границу поликруга $\mathbb{U}^N$, имеющих следующий вид:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \lambda_j u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}); \tag{1}$$

здесь $\{u_j(\mathbf{z})\}_{j=0}^N$ — базис в пространстве решений системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет $F_D^{(N)}$. Функции $u_j(\mathbf{z})$ для каждой формулы (1) выписаны в терминах гипергеометрических рядов Горна N переменных, экспоненциально сходящихся в соответствующих подобластях $\mathbb{C}^N$. Набор представлений вида (1) дает эффективный алгоритм для вычисления гипергеометрических интегралов типа Эйлера при произвольном числе переменных. На этой основе в [4], [5] предложен метод решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля – Шварца, эффективный в ситуации "кроудинга", часто вызывающей вычислительные трудности, см. [6], [7]. В докладе представлены примеры построения конформного отображения многоугольников сложной формы.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект №22–21–00727).

Список литературы

[1] Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili, *Rendiconti Circ. Math. Palermo*, **7**, 111–158 (1893).

[2] Exton H. Multiple hypergeometric functions and application. — New York: J. Willey & Sons inc, 1976.

[3] Безродных С. И. Гипергеометрическая функция Лауричеллы, $F_D^{(N)}$, задача Римана — Гильберта и некоторые приложения, *Успехи матем. наук*, **73**, № 6, 941–1031 (2018).

[4] Безродных С. И. Функция Лауричеллы, и конформное отображение многоугольников, *Матем. заметки*, **112**, № 4, 500–520 (2022).

[5] Безродных С. И. Формулы для вычисления интегралов типа Эйлера и из приложение к задаче построения конформного отображения многоугольников, *Ж. вычисл. мат. и матем. физ.*, **63**, № 12 (2023).

[6] Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1–3. — New York: John Wiley and Sons, 1991.

[7] Trefethen L. N., Driscoll T. A., Schwarz — Christoffel transformation. — Campridge: Cambridge university press, 2005.

Продолжение соболевских функций на бесконечномерных пространствах

В. И. Богачев*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Высшая школа экономики, Москва, Россия

Хорошо известно (см. [1]), что для широкого класса областей U в $\mathbb{R}^n$ всякая функция из пространства Соболева $W^{p,1}(U)$, состоящего из функций $f \in L^p(U)$ с обобщенными производными первого порядка в $L^p(U)$ и наделенного его естественной нормой, допускает продолжение до функции из пространства $W^{p,1}(\mathbb{R}^n)$, причем имеется непрерывный линейный оператор продолжения. Аналогичные результаты известны и для весовых классов Соболева. Гораздо менее изучены задачи продолжения для классов Соболева на бесконечномерных пространствах с мерами. Один из важнейших для приложений случаев — счетная степень γ стандартной гауссовской меры на прямой, рассматриваемая на счетном произведении прямых $\mathbb{R}^\infty$ или на подходящем вложенном в него весовом гильбертовом пространстве последовательностей меры 1. Для $p \in [1, \infty)$ гауссовский класс Соболева $W^{p,1}(\gamma)$ определяется как пополнение пространства функций от конечного числа переменных вида $f(x_1, \dots, x_n)$, где f — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ с ограниченными производными, по соболевской норме, равной сумме норм в $L^p(\gamma)$

самой функции f и l^2-нормы ее градиента, т.е. $\left(\sum_i |\partial_{x_i} f|^2\right)^{1/2}$. Аналогично для выпуклого борелевского множества $U \subset \mathbb{R}^\infty$ положительной меры по сужению меры γ на U вводится класс Соболева $W^{p,1}(U,\gamma)$.

В докладе дается обзор исследований о продолжениях функций из класса $W^{p,1}(U,\gamma)$. В частности, рассказывается о примерах выпуклых областей U и выпуклых компактов U, для которых не все функции из $W^{p,1}(U,\gamma)$ продолжаются до соболевских функций на всем пространстве.

Список литературы

[1] Adams R.A. Sobolev spaces. Academic Press, New York, 1975.

[2] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.

Содержание математического образования: математика для не-математиков

А. В. Боровских*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Вопрос о том, как учить математике студентов нематематических специальностей вузов обсуждается регулярно. К сожалению, обычно это обсуждение идет в терминах так называемого «тематического содержания» (какие темы изучать, какие не изучать) и вариантов изложения теорем (с доказательством или без доказательства) . Такое обсуждение с завидной регулярностью оказывается непродуктивным. Проблема состоит в том, что оно является и неизбежным, и без введения категориальных понятий, выходящих за рамки профессиональной математики – неразрешимой. Прежде всего, это понятия *средства мышления*и *способа* его использования. В этих терминах можно сформулировать суть проблемы: в разных сферах человеческой деятельности используются одни и те же математические мыслительные средства, но они используются разными способами. Именно на этом различии необходимо сконцентрировать свое внимание в первую очередь, когда мы говорим о содержании математического образования для не-математиков. Еще одно понятие, которое нам потребуется – понятие *организованности этих мыслительных средств и способов их использования.* Эта организованность у математика и не-математика разные. У математика средства и способы организованы в логическую систему, поскольку именно она позволяет исследовать границы тех способов использования математических мыслительных средств, которые известны в человеческой культуре. У не-математиков эти же средства и способы приспособлены для решения своих профессиональных задач и встроены в свою профессиональную систему деятельности. Мы выделили четыре основных типа использования математических мыслительных средств. Это а) метафора; б) средство знакового представления своего собственного содержания; в) оперативная система, соответствующая оперированию с собственным содержанием; г) средство представления своего собственного содержания. Во всех этих случаях использование математических средств требует не логических доказательств, а четкой нормативной системы оперирования с ними с указанием границ их применения тем или иным способом.

Результатом рассмотрения содержания математического образования для не-математиков с точки зрения мыслительных средств, способов их использования и организованностей этих средств и способов оказывается не только проблематизация существующего содержания, но и оформление программы работ по формированию такого содержания, которое окажется профессионально адекватным. Реализация этой программы начата автором доклада в 2022 году на материале математического образования для географов (специальности "Климатология" и "Метеорология").

Список литературы

[1] Боровских А. В. О содержании математического образования. Математика для не-математиков, *CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование*, вып. 4, 51–65 (2022).

Задача Сильвестра и теоремы единственности в классах целых функций

Г. Г. Брайчев*

Российский университет дружбы народов РУДН, Москва, Россия

Московский педагогический государственный унверситет МПГУ, Москва, Россия

В докладе будет показано, как задача о нахождении наименьшего круга, содержащего заданный конечный набор точек плоскости, поставленная Дж. Сильвестром еще в 1857 г., связана с вопросами единственности для целых функций.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек. Последовательность Λ называется множеством единственности для некоторого класса целых функций, если в этом классе не существует отличной от тождественного нуля функции, обращающейся в нуль на Λ с учетом кратности. Обозначим через $n_\Lambda(t) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant t} 1$ считающую функцию последовательности Λ, а через $N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \dfrac{n_\Lambda(t) - n_\Lambda(0)}{t}\,dt$ — ее усредненную считающую функцию. Пусть $\nu(r)$ — положительная, дифференцируемая и неограниченно возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция (вес). Величина $\overline{\Delta}^*_\nu(\Lambda) = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{\nu(r)}$ называется усредненной верхней ν-плотностью последовательности Λ. Формулы

$$\sigma_\nu(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{\nu(r)}, \qquad h_\nu(f;\theta) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{\nu(r)}, \quad \theta\in[0,2\pi],$$

задают ν-тип и ν-индикатор целой функции $f(z)$. Для фиксированного числа I введем обозначения: $E_{[\nu,I]}$ (соответственно, $E_{[\nu,I)}$) — класс всех целых функций f со свойством $I_f \leqslant I$ (соответственно, $I_f < I$). Здесь $I_f = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_\nu(f;\theta)\,d\theta$.

Теорема 1. *Пусть вес* $\nu(r)$ *таков, что* $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{r\,\nu'(r)}{\nu(r)} = \rho > 0$*, и* Λ *– последовательность нулей целой функции* f*, причем* $\overline{\Delta}^*_\nu(\Lambda) \in (0,+\infty)$*. Пусть также*

$$I_f = \overline{\Delta}^*_\nu(\Lambda)\,. \tag{1}$$

Тогда Λ *является множеством единственности для класса* $E_{[\nu,I_f)}$*, но уже не является таковым для чуть более широкого класса* $E_{[\nu,I_f]}$.

В важном случае функций экспоненциального роста, когда $\nu(r) = r$ при $r \geqslant 0$, ν-индикатор совпадает с обычным индикатором $h(f;\theta)$, величина $2\pi I_f$ равна длине границы индикаторной диаграммы $\bigcap\limits_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}\bigl\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\,(\lambda e^{-i\theta})\leqslant h(f;\theta)\bigr\}$ функции f, а условие (1) в силу формулы Иенсена означает, что эта длина должна быть минимально возможной.

Для формулировки следующего результата при заданном $\sigma\in(0,+\infty)$ обозначим через $[1,\sigma)$ класс целых функций экспоненциального типа $\sigma(f)<\sigma$.

Теорема 2. *Пусть* f *– целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста, а* $r(f)$ *— радиус наименьшего круга, содержащего индикаторную диаграмму* $D(f)$*. Тогда последовательность нулей* $\Lambda(f)$ *— множество единственности для класса* $[1,\sigma)$*, если и только если* $\sigma\leqslant r(f)$.

О корректности обозначений в несобственных интегралах и рядах

А. Б. Будак*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В данном сообщении хотелось бы еще раз обратить внимание на важность использования бесконечности со знаком "+" ($+\infty$) в бесконечных верхних пределах интегрирования в несобственных интегралах и верхних пределах суммирования в рядах Лорана, в которых суммирование ведется по всем целочисленным индексам суммирования.

Эти вопросы уже неоднократно поднимались автором в ранее опубликованных статьях и выступлениях на конференциях, посвященных в основном состоянию математического образования (см., например, [1]).

К сожалению, во многих книгах достаточно известных авторов при определении, например, несобственного интеграла 1-го рода функции одной действительной переменной $f(x)$ применяется не вполне логичный переход

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_a^R f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx.$$

Но и достаточно много авторов (см., например, [2–4]), у которых совершенно справедливо используется переход

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_a^R f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

В докладе будут приведены примеры, показывающие некорректность использования первого обозначения, приводящего к неверным результатам. Хотелось бы призвать авторов всех учебников, монографий и статей аккуратнее относиться к подобного рода терминологии, а именно, не использовать обозначение ∞. Это же относится и к рядам Лорана, по этому поводу см., например, учебные пособия [5] и [6].

Список литературы

[1] Будак А. Б. О некоторых традициях (стереотипах) изложения материала в курсах элементарной и высшей математики и необходимости их преодоления, *Математика в образовании*, Вып. 7, 45–58 (2011).

[2] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1, 2, 3. — М.: ДРОФА, 2003; 2004; 2006.

[3] Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[4] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. — М.: МГУ, 1985; 1987.

[5] Леонтьева Т. А. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: МГУ, ВМК, 2003.

[6] Григорьев Е. А. Введение в комплексный анализ. — М.: МАКСПРЕСС, 2018.

О симметриях уравнений и функционалов

С. А. Будочкина*

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия

Симметрии и первые интегралы играют важную роль в математике, механике, физике. Так, например, в классической механике широко применяются преобразования переменных для выявления инвариантных свойств движения механических систем – инвариантности функционалов, стационаризуемых в процессе движения, инвариантности самих уравнений движения, а также отыскания первых интегралов этих уравнений. Следует отметить, что первые интегралы уравнений движения имеют многочисленные применения. В частности, они могут использоваться для доказательства существования и единственности классических решений дифференциальных уравнений в частных производных, для исследования устойчивости движения. В работе [1] законы сохранения применены для доказательства существования волновых решений уравнения Кортевега-де Фриза.

В докладе рассматривается операторное уравнение со второй производной по времени. Получены условия представимости заданного уравнения в форме уравнения Эйлера-Лагранжа, построен соответствующий функционал – вариационный принцип, исследована инвариантность как самого уравнения, так и построенного действия по Гамильтону и получены первые интегралы операторного уравнения со второй производной по времени. Кроме того, установлена связь симметрий (уравнения и функционала) с алгебраическими структурами (алгебрами Ли и Ли-допустимыми алгебрами).

Доклад основан на результатах работ [2–6].

Публикация выполнена в рамках проекта №002092-0-000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение №075-15-2022-1115).

Список литературы

[1] Lax P. D. Almost periodic solutions of the KdV equation, *S.I.A.M. Review*, **18**, № 3, 351–375 (1976).

[2] Будочкина С. А., Савчин В. М. Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов, *Дифференциальные уравнения*, **47**, № 6, 811–818 (2011).

[3] Budochkina S. A. Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation, *Eurasian Mathematical Journal*, **3**, № 1, 18–28 (2012).

[4] Савчин В. М., Будочкина С. А. Ли-допустимые алгебры, связанные с динамическими системами, *Сибирский математический журнал*, **60**, № 3, 508–515 (2019).

[5] Будочкина С. А. О взаимосвязи вариационных симметрий с алгебраическими структурами, *Уфимский математический журнал*, **13**, № 1, 46–55 (2021).

[6] Budochkina S. A., Vu H. P. On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff's equations, *Eurasian Mathematical Journal*, **13**, № 3, 23–32 (2022).

Трансзвуковые асимптотические уравнения в газовой динамике и их приложения

П. А. Вельмисов*

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

Ю. А. Тамарова

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

На основе асимптотического разложения для потенциала скорости выводится трансзвуковое асимптотическое уравнение газовой динамики для безвихревых изэнтропических течений газа. В первом приближении уравнение для потенциала скорости $\varphi(x,r,\theta,t)$ имеет вид

$$\begin{gathered}2\varphi_{xt}+(\gamma+1)\varphi_x\varphi_{xx}+2\psi_r\varphi_{xr}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{x\theta}+\frac{\gamma-1}{2}\big(2\psi_t+\psi_r^2+\\+\frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\Big)\varphi_{xx}-\varphi_{rr}-\frac{1}{r}\varphi_r-\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}=-\psi_{tt}-2\psi_r\psi_{rt}-\frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_{\theta t}-\psi_r^2\psi_{rr}-\\-\frac{1}{r^4}\psi_\theta^2\psi_{\theta\theta}-\frac{2}{r^2}\psi_r\psi_\theta\psi_{r\theta}+\frac{1}{r^3}\psi_\theta^2\psi_r.\end{gathered} \tag{1}$$

В (1) индексы снизу обозначают частные производные по времени t и координатам x, r, θ. Нелинейное уравнение (1) для $\varphi(x,r,\theta,t)$ (нелинейный член $\varphi_x\varphi_{xx}$)

описывает трансзвуковые течения газа (течения, содержащие как дозвуковые, так и сверхзвуковые зоны, а также звуковую поверхность - поверхность перехода скорости газа через скорость звука; в установившемся случае эта поверхность является поверхностью параболичности, разделяющей гиперболическую (сверхзвуковую) и эллиптическую (дозвуковую) области). Функция $\psi(r, \theta, t)$ в (1) задает поперечное аэродинамическое воздействие и удовлетворяет уравнению Лапласа $\psi_{rr} + \dfrac{1}{r}\psi_r + \dfrac{1}{r^2}\psi_{\theta\theta} = 0$. Если в (1) $\psi \equiv 0$, то получим уравнение Линя-Рейсснера-Тзяна, для установившихся течений переходящее в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича. Для уравнения (1) выведены асимптотические условия на фронте ударной волны и условия на обтекаемой поверхности, а также получены асимптотические формулы для определения давления и уравнения звуковой поверхности.

На основе уравнения (1) представлены решения некоторых задач газовой динамики. В частности, получено решение полиномиального вида, описывающее осесимметричные течения газа в соплах Лаваля с постоянным ускорением в направлении оси сопла и поперечной закруткой потока. Для полученного решения с помощью пакета Mathematica построены стенки сопла и звуковая поверхность. Представлено решение, соответствующее нестационарным течениям в каналах между вращающимися плоскостями. Построены решения, соответствующие течениям в соплах с местными сверхзвуковыми зонами. Рассмотрены течения, возникающие при безотрывном и отрывном обтекании тела, мало отличающегося от цилиндрического.

Функциональный подход к задачам геометрической теории функций

С. К. Водопьянов*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

В докладе будет сделан обзор основных этапов развития квазиконформного анализа: от классической теории функций до ее современного состояния. Основная цель — показать, что предлагаемая концепция содержит в качестве частного случая большинство исследуемых в литературе классов отображений.

Будем говорить, что гомеоморфизм $\psi : D \to D'$ областей D, D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, принадлежит классу $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$, где $\omega : D' \to (0, \infty)$ — весовая функция, если для любого кубического кольца $U = Q(x, R) \setminus \overline{Q(x, r)} \subset D'$ с прообразом $\psi^{-1}(U) = \psi^{-1}(Q(x, R)) \setminus \psi^{-1}(\overline{Q(x, r)})$ в D верно неравенство

$$\operatorname{cap}_q^{\frac{1}{q}}(\psi^{-1}(U); L_q^1(D)) \leqslant \begin{cases} K_p \operatorname{cap}_p^{\frac{1}{p}}(U; L_p^1(D'; \omega)), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi_{q,p}^{\frac{1}{\sigma}}(U) \operatorname{cap}_p^{\frac{1}{p}}(U; L_p^1(D'; \omega)), & 1 < q < p < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

где $K_p \in (0, \infty)$ — некоторая константа, а $\Psi_{q,p}$ — некоторая ограниченная квазиаддитивная функция множества на системе $\mathcal{O}_c(D)$ открытых множеств, а σ определяется из $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $1 < q < p < \infty$, и $\sigma = \infty$, если $1 < q < p < \infty$.

Оказывается [1, Теорема 18], что *гомеоморфизм $\psi : D \to D'$ принадлежит классу $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$ тогда и только тогда, когда выполняется любое из двух условий.*

(1) $\psi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$ *имеет конечное искажение*: $D\psi(x) = 0$ *почти всюду на* $Z = \{x \in D \mid \det D\psi(x) = 0\}$, *и операторная функция искажения*

$$D \ni x \to K_{q,p}(x,\psi) = \begin{cases} \frac{|D\psi(x)|}{|\det D\psi(x)|^{\frac{1}{p}} \omega^{\frac{1}{p}}(\psi(x))}, & \text{если } \det D\psi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\psi(x) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$.

(2) *Оператор композиции* $\psi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D') \to L^1_q(D)$ *ограничен,* $1 < q \leqslant p < \infty$. *Здесь* $\psi^*(f) = f \circ \psi$ *для* $f \in L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D')$.

Заметим, что гомеоморфизмы класса $\mathcal{Q}_{n,n;1}$ суть квазиконформные отображения; гомеоморфизмы класса $\mathcal{Q}_{q,p;1}$ совпадают с классами отображений работ Водопьянова С. К. и Ухлова А. Д. 1988–1998 гг., а гомеоморфизмы класса $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$ — с классами отображений монографии [2]. Для гомеоморфизмов класса $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$ установлены новые результаты, не имеющие аналогов в классической теории.

Гомеоморфизмы класса $\mathcal{Q}_{q,p;\omega}$ при $\theta \equiv 1$ и $n-1 \leqslant q < p = n$ можно рассматривать как семейства допустимых деформаций в задачах нелинейной теории упругости [3].

Список литературы

[1] Водопьянов С. К. О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов, *Сиб. мат. журн.*, **61**, № 6, 1257–1299 (2020).

[2] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory — New York: Springer, 2008.

[3] Molchanova A., Vodopyanov S. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity, *Calc. Var.*, **59**, № 17 (2020).

Неравенства в пространствах с p-скалярным произведением

А. С. Гаспарян*

г. Переславль-Залесский, Россия

В 1969г. автор, в попытках обобщить некоторые детерминантные соотношения, пришёл к необходимости расширения понятия скалярного произведения. Были введены понятия полискалярного произведения векторов и связанного с ним многомерного определителя Грама, что послужило началом самостоятельного построения новой теории многомерных матриц и определителей. Впоследствии некоторые из полученных результатов [1] составили основу кандидатской диссертации автора. Далее последовало систематическое применение полискалярных (в частности p-скалярных) произведений в обобщении известных теорем и выявлении соотношений, не имеющих классических аналогов.

На конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения академика Л.Д. Кудрявцева, мной были доложены некоторые тождества и неравенства, касающиеся p-мерных определителей Грама [2], частные случаи которых являются обобщениями классических тождеств и неравенств (тождество Бине-Коши, Тождества Лагранжа, Коркина, Андреева, неравенства Ньютона, Коши-Буняковского-Шварца, Чебышева, Грюсса и Канторовича).

В докладе, посвящённом столетию академика, представлены результаты, связанные с дальнейшим расширением понятия p-скалярного произведения и с соответствующими обобщениями многомерных матриц и определителей Грама. В частности, получены явные выражения для смешанных определителей Грама и, как следствие, множество новых неравенств.

Список литературы

[1] А.С. Гаспарян. О некоторых приложениях многомерных матриц; Сообщения по прикладной математике, ВЦ АН СССР, М., 1983.

[2] А.С. Гаспарян. Интегральные тождества и неравенства для многомерных определителей Грама; Тезисы докладов V Междунар. конф., посв. 95-летию со д.р. чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцева, М., РУДН, 2018.

Метод преобразования Фурье для нелинейных уравнений в частных производных

В. И. Гишларкаев*

Чеченский государственный университет, Грозный, Россия

М. В. Алиева

Чеченский государственный университет, Грозный,Россия

Предлагается метод анализа задачи Коши для широкого класса эволюционных уравнений в частных производных со степенными нелинейностями. Исходное нелинейное уравнение преобразованием (обратным) Фурье сводится к интегро-дифференциальному уравнению, которое рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение в соответствующем банаховом пространстве. Для полученной задачи Коши доказывается существование решения методом последовательных приближений. Отдельно рассмотрены два случая - случай переменных коэффициентов при нелинейностях и случай постоянных по пространственным переменным коэффициентов.

Для проведения соответствующих оценок для операторов, порожденных преобразованным уравнением, накладываются условия финитности по пространственным переменным для обратного Фурье-образа коэффициентов (в случае их непостоянства), начальной функции и правой части. А сами соответствующие пространства определяются из теорем Пэли-Винера о Фурье-образах. В обоих случаях найдены функциональные пространства для начальных данных и решений, в которых доказана локальная по времени разрешимость задачи Коши для рассматриваемых уравнений.

Класс рассмотренных уравнений включает в себя большое количество известных уравнений, встречающихся в прикладных задачах.

Данная работа по рассматриваемой тематике и применяемым методам примыкает к работам [1-4].

Список литературы

[1] Гишларкаев В. И. Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных: формулы представления решений задачи Коши, *Вестник Санкт-Петербургского Университета. Математика. Механика. Астрономия*, **9(67)**, № 3, 480–494 (2022).

[2] Гишларкаев В. И. Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных. Часть2. Существование и единственность решений задачи Коши, *Вестник Санкт-Петербургского Университета. Математика. Механика. Астрономия*, **10**, № 1, 21–35 (2023).

[3] Гишларкаев В. И. Об одном способе представления решений задачи Коши для линейных уравнений в частных производных, *Матем.сб.*, **209**, № 2, 82–101 (2018).

[4] Гишларкаев В. И. Метод преобразования Фурье для некоторых типов нелинейных уравнений в частных производных, *ТМФ*, **207**, № 3, 361–375 (2021).

Популяризация математических знаний средствами интегративных медиаобразовательных технологий: от Ломоносова — к Кудрявцеву

С. Н. Дворяткина

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

А. А. Дякина

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

С. В. Щербатых*

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

Теоретическое обоснование значимости интеграции медиаобразовательных технологий в школьные учебные дисциплины начался в 90-е годы прошлого столетия, причем почти одновременно и в зарубежной, и в российской науке [1, 2]. Показательно, что процесс «внедрения» рассматривался как в отношении предметов гуманитарного, так естественно-научного цикла.

К настоящему времени накоплен значительный опыт эффективного взаимодействия медиаобразования и отдельных дисциплин, медиаобразования и учебно-воспитательного процесса, медиаобразования и разнонаправленного развития обучающихся. Современные исследователи, анализируя ситуацию, сложившуюся в мировом информационном пространстве на основе цифровизации и конвергенции, отмечают актуализацию общего медиаобразования, рассматривают перспективы его фундаментальной интеграции в образовательный процесс российских [3] и зарубежных школьных учреждений [4].

Доказано, что использование медиатехнологий, к примеру, в школьных курсах естественно-научных дисциплин [5] содействует оптимизации учебного процесса в соответствии с особенностями современного «цифрового» поколения, значительно повышает качество знаний учащихся, формирует необходимый уровень их медийной грамотности и культуры. Более того, медиаобразование способно выступать в качестве средства популяризации научных знаний. Это, на наш взгляд, своего рода продолжение и развитие на новейшей технико-технологической базе традиций, заложенных М.В. Ломоносовым. Как известно, именно он первым обратил внимание на необходимость продвижения научных знаний в образованные круги российского общества и привлек к этому государственно важному делу издания Академии наук.

Исследовательские сообщества современной России, руководители научных школ, как и прежде, заинтересованы в просветительской деятельности, ориентированной на широкие массы, в первую очередь, молодежь. В наши дни процесс популяризации науки коррелируется с задачами медиаобразования. Взаимообогащая друг друга, оба этих направления деятельности выполняют стратегические важные функции общественного развития.

Л.Д. Кудрявцев много внимания уделял вопросам культурно-просветительской и научно-популярной деятельности. Его дневники в популярной форме декларируют достижениях современной математической науки, являются уникальной составляющей математической культуры [6]. По своему назначению дневники – научные и исторические источники, доступны как молодым людям, которые только начинают строить свою карьеру в сфере науки и образования, так и привлекают внимание маститых ученых, даже не работающих в области математики. Особый интерес вызывает нравственная и просветительская деятельность, в единстве своем нашедшая отражение в публицистических книгах ученого [7]. Жизненный и научный путь Л.Д. Кудрявцева, взаимоотношения учителя с его учениками дают ответ на глубокую профессионально-нравственную проблему наставничества в современном образовании и воспитании.

Постановка медиаобразовательных задач, которые могут быть решены в рамках выбранного содержания образования, ориентированы, прежде всего, на максимизацию доступных математических знаний для общества.

В качестве медиаобразовательных проектов в ЕГУ им. И.А. Бунина были разработаны следующие авторские продукты: просветительские видеофильмы по истории математического образования («Арифметика Л.Ф. Магницкого», «Московский математик Бугаев Н.В.», «Учебно-литературная деятельность математика А.В. Ланкова»); лонгриды («Михаил Васильевич Ломоносов – гений, опередивший свое время на века», «Блестящий путь математика и педагога Льва Дмитриевича Кудрявцева», «Вклад Л.Д. Кудрявцева в развитие математической науки в регионах») и др. Данные продукты активно применяют в просветительской деятельности члены Липецкого регионального отделения Общероссийской общественно-государственной просветительской организации «Российское общество «Знание».

Очевидно, что медиаобразовательные технологии можно рассматривать как современную разновидность проектной деятельности, направленную на создание законченного просветительского продукта, в котором одинаково значимыми становятся как содержательный контент, так и мультимедийные элементы его репрезентации.

Список литературы

[1] Masterman L., Mariet F. Media Education in 1990’ Europe. Strasburg: Council of Europe, 5—89 (1994).

[2] Зазнобина Л.С. Стандарт медиаобразования, интегрированного с различны-

ми школьными дисциплинами. *Стандарт и мониторинг в образовании*, № 3, 26—34 (1998).

[3] Интеграция медиаобразования в условиях современной школы: сборник научных трудов I Всероссийской научно-практической конференции с международным участием / А.В. Федоров [и др.]. – Москва; Берлин: Директ-Медиа, 2020. — 211 с.

[4] McKenzie T. Empowered learning: teaching the video essay in the secondary school environment, Media Practice and Education, 22(1), 5–6 (2021).

[5] Журин А.А. Медиаобразование на уроках естественнонаучного цикла. *Естествознание в школе*, № 5, 23—27 (2004).

[6] Дневники Льва Дмитриевича Кудрявцева. По зарубежным научным командировка (1962-1986). — М. РУДН, 2018. — 284 с.

[7] Кудрявцев Л. Д. Избранные труды. Том третий. Мысли о современной математике и ее преподавании. — М.: Физматлит, 2008. — 434 с.

Весовые соболевские пространства и псевдогиперболические уравнения

Г. В. Демиденко*
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

В монографии [1] была введена некоторая классификация линейных уравнений с частными производными следующего вида

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

и для них изучен широкий класс краевых задач. Такие уравнения часто называют *уравнениями соболевского типа*, поскольку именно исследования С. Л. Соболева [2] были первыми глубокими исследованиями уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. В настоящее время имеется большое число работ, посвященных изучению различных задач для уравнений вида (1). Однако для класса псевдогиперболических уравнений, введенного в [1], теория краевых задач является пока мало изученной, в частности, по задаче Коши для уравнений с переменными коэффициентами в случае однородного эллиптического оператора $L_0(D_x)$ в литературе нет ни одного результата. Следует при этом отметить, что даже в случае постоянных коэффициентов для задачи Коши имеется ряд особенностей. А именно, как показано в [1,3–5], для ее разрешимости в соболевских пространствах $W_2^m((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ правая часть уравнения $f(t,x)$ должна иметь дополнительную гладкость и в зависимости от порядков операторов $L_j(D_x)$ и размерности n должна быть ортогональна некоторым мономам x^β.

В данной работе мы продолжаем изучение задачи Коши для псевдогиперболических уравнений, но в более широком классе весовых соболевских пространств. На гиперплоскостях $\{t = \text{const}\}$ эти пространства являются аналогами весовых пространств, введенных Л. Д. Кудрявцевым [6]. В этих пространствах удается выделить более широкий класс псевдогиперболических уравнений по сравнению с [1, 3–5], для которых установлены условия однозначной разрешимости.

Список литературы

[1] Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.

[2] Соболев С. Л. Избранные труды. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН. Т. I, 2003.

[3] Demidenko G. The Cauchy problem for pseudohyperbolic equations, *Selcuk J. Appl. Math.* **1**, № 1, 47–62 (2000).

[4] Fedotov I., Volevich L. R. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative, *Russian J. Math. Physics*, **13**, № 3, 278–292 (2006).

[5] Демиденко Г. В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений, *Сиб. мат. журн.*, **56**, № 6, 1289–1303 (2015).

[6] Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения, *Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, **26**, 5–157. — М.: ВИНИТИ, 1988.

Н. Н. Лузин и проблема континуума

С. С. Демидов*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В 1906 году Н. Н. Лузин (1883–1950) закончил курс Математического отделения Физико-математического факультета Императорского Московского университета с дипломом первой степени и по рекомендации научного руководителя профессора Д. Ф. Егорова (1869–1931) был оставлен при факультете для приготовления к профессорскому званию. Ему предстояла сдача магистерских экзаменов и написание магистерской диссертации. Успешно преодолев экзамены, в 1910 году Лузин приступил к поиску ее темы. Первоначально он полагал, что таковой будет задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений — к этой области относилась его дипломное сочинение "Об одном методе интегрирования дифференциальных уравнений". Но затем его намерения изменились — центр его интересов сместился в теорию множеств. Он занялся доказательством континуум-гипотезы, над которым безуспешно бился в течение нескольких месяцев. Во время своей командировки в Геттинген и Париж (1910–1914), он отложил эту задачу в сторону и занялся проблемами метрической теории функций. Итогом стала его диссертация "Интеграл и тригонометрический ряд", которую он успешно защитил в 1916 году. Но проблема континуума продолжала оставаться в центре его интересов. Размышления о структуре континуума, сместившиеся в область конструктивной теории множеств, уже никогда не покидали сферы его интересов. Их проявления мы находим и в его известных "Лекциях об аналитических множествах и их приложениях" (Paris, 1930) и в более поздних его работах. Эта проблематика оставалась источником многих его работ, став таким образом подтекстом творчества его самого, а также его учеников и последователей.

О проблеме выбора критериев оценки эффективности содержания школьного математического образования и методик его преподавания

Б. К. Дураков
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

О. В. Кравцова
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

В. Р. Майер
Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, Красноярск, Россия

Н. Д. Подуфалов*
Российская академии образования, Москва, Россия

Одним из объективных механизмов оценки эффективности содержания школьного математического образования и методик его преподавания может стать систематический анализ уровня «остаточных знаний» математики, как в период обучения в школе, так на первом курсе в вузе. Он позволяет выявлять и корректировать разделы и темы школьного курса математики, содержание которых неудовлетворительно усваивается в связи с несоответствием его уровню психофизиологического развития детей и подростков или с недостатками используемых методик преподавания. Преподавателями ряда математических кафедр СФУ и КГПУ им. В.П. Астафьева с участием РАО были разработаны методологические и методические подходы к решению данной задачи и соответствующие системы тестов, проведено несколько тестирований первокурсников и учащихся школ (см. [1-3]). Результаты тестирования показали, что, наибольшая доля решивших задачи приходится на стереометрию и преобразование алгебраических и тригонометрических выражений, но составляет всего около пятидесяти процентов. Неудовлетворительны знания школьников по разделам Планиметрия и Предел функции. Также, весьма низки показатели тестирования по разделам Монотонность и экстремумы, Определенный интеграл, Векторы, Производная и Геометрический смысл производной. Важно продолжить работу по дальнейшему уточнению понятия «остаточные знания», формированию системы показателей, характеризующих «остаточные знания», методов и методик их тестирования и анализа его результатов с целью выявления недостатков дидактических систем, используемых в преподавании математики.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Список литературы

[1] Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д. О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике. Известия РАО. 2021. № 3 (55), С.105-119.

[2] Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В. О содержании школьного математического образования и тестировании остаточных знаний по математике. Педагогика. 2022, № 5, С. 57-68.

[3] Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В., Шевелева И.В. О тестировании остаточных знаний по математике в 2022 году. Педагогика.2023. №1. С. 51-59.

Вариационные обратные краевые задачи: теория и приложения

А. М. Елизаров*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Как известно, прямыми называют краевые задачи, в которых требуется найти функцию или систему функций, удовлетворяющих в фиксированной области некоторому дифференциальному уравнению в частных производных или системе таких уравнений, а на границе области — заданному краевому условию. Наряду с прямыми задачами успешно развиваются теория и приложения обратных краевых задач (ОКЗ), в которых вместе с решением дифференциального уравнения вся граница области или отдельные ее участки находятся по дополнительному краевому условию. При этом краевые условия задачи определяются, как правило, не только применяемой моделью изучаемого физического процесса, но и предписываемыми инженерными свойствами, и могут изменяться вместе с последними. Значит, исследователь получает возможность, задав соответствующие условия, влиять на процесс в нужном направлении, управлять им. С этих позиций ОКЗ относятся к задачам конструктивного характера и управления и составляют часть обширного класса краевых задач с неизвестными границами. Исследования по ОКЗ и история их развития, охватывающие более 80 лет, отражены, в частности, в [1, 2].

Основное внимание в докладе уделено вариационным обратным краевым задачам. Мы используем этот термин для обозначения такого класса двумерных (плоских) краевых задач с неизвестными границами, в которых искомыми являются как решение дифференциального уравнения в частных производных, так и сама область D его определения, причем последняя обладает некоторым экстремальным свойством, а на границе ∂D задается одно краевое условие (как в прямых задачах). Экстремальное свойство области D выражается в виде требования максимизации (минимизации) заданного функционала (обычно при дополнительных ограничениях). Так как сама граница является искомым элементом решения, эти задачи примыкают к краевым задачам с неизвестными границами. По своей постановке вариационные ОКЗ относятся как к задачам оптимального проектирования, так и к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами (см., например, [3, 4]). При этом наличие или отсутствие дополнительных ограничений может существенно изменять картину разрешимости задач. Вместе с тем, естественным источником вариационных ОКЗ являются теории, связанные с моделированием природных явлений (например, течений жидкости или газа в классической аэрогидродинамике).

Список литературы

[1] Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей.* М.: Физматлит, 1994. 436 с.
[2] Елизаров А. М., Касимов А. Р., Маклаков Д. В. *Задачи оптимизации формы в аэрогидродинамике.* М.: Физматлит, 2008. 572 с.
[3] Haslinger J., Neittaanmaki P. *Finite element approximation for optimal shape design: theory and application.* New York: John Wiley and sons Ltd., 1988. 335 pp.
[4] Pironneau O. *Optimal shape design for elliptic systems.* New York: Springer, Springer Lecture Notes in Computational Physics, 1984. 168 pp.

Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве

Н. В. Зайцева*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В полупространстве $\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ построены в явном виде многопараметрические семейства решений гиперболических уравнений, содержащих суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственным переменным, вида

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j x_j}(x - h_j, t)$$

и

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) + \sum_{k,j=1}^{n} c_{kj} u_{x_j x_j}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k - l_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t),$$

где $a \neq 0$, $b_1, \dots, b_n$, $l_1, \dots, l_n$ и c_{kj} $(k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ — заданные действительные числа; $h_j := (h_{j1}, \dots, h_{jn})$ $(j = \overline{1,n})$ — заданные векторы с действительными координатами, длины которых не равны нулю.

Для каждого случая доказано, что построенное решение является классическим, если вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора в правой части уравнения положительна. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено. С подробными результатами можно ознакомиться в работах [1, 2].

Список литературы

[1] Muravnik A. B., Zaitseva N. V. Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with differently directed translations, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **44**, № 3, 920–925 (2023).
[2] Зайцева Н. В., Муравник А. Б. Классические решения гиперболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигом на произвольный вектор, *Известия вузов. Математика*, № 5, 34–40 (2023).

Лев Дмитриевич Кудрявцев глазами его учеников

В. А. Зернов*
Российский новый университет, Москва, Россия

Выдающийся математик Лев Дмитриевич Кудрявцев обладал редким и удивительным даром – любую проблему, которая вдруг возникала, он мог объяснить четко, доходчиво и на редкость аргументированно.

Когда я учился и работал в МФТИ, Лев Дмитриевич заведовал кафедрой высшей математики. На физтехе он читал основной курс математического анализа, причем его лекции проходили параллельно с лекциями Сергея Михайловича Никольского. Два выдающихся математика параллельно читали основной математический курс, и любой студент физтеха мог выбрать, у кого из лекторов он будет постигать эту интересную науку – математику.

На нашем потоке математический анализ читал С.М. Никольский – вел занятия очень живо и захватывающе, сам вместе со слушателями участвовал в доказательствах теорем показывал нам сам процесс математического труда. Бывали случаи, когда С.М. Никольский увлекался и допускал неточности, а затем вместе со всеми их исправлял. При этом он откровенно злился, что его никто не поправляет.

Л.Д. Кудрявцев был полной противоположностью С.М. Никольского. У него курс лекций был выверен до мелочей. Всю математическую премудрость он объяснял четко, аргументированно и очень доходчиво. Многие мои товарищи ходили к Льву Дмитриевичу слушать его лекции, и я не могу припомнить, чтобы кто-либо говорил, что Л.Д. Кудрявцев что-то невнятно объясняет.

Как раз в это время вышло первое издание его лекций по математическому анализу. Как сильно радовались этому студенты физтеха! Учебник был очень хорошо написан, методически выверен. Несмотря на наличие учебника, многие студенты ходили к Льву Дмитриевичу на лекции. Довольно часто сравнивали, как Лев Дмитриевич читает лекции с тем, что написано в учебнике. Зачастую совпадение было полное, и мы, студенты, поражались тому, как Л.Д. Кудрявцев умудрялся четко воспроизводить свои мысли, что слова лекции совпадали с учебником.

Уважение к Льву Дмитриевичу в коллективе физтеха было огромным как среди студентов, так и среди сотрудников и руководства вуза. Когда в середине 80-х годов прошлого века я оказался вовлечен в рассмотрение непростой ситуации у него на кафедре, то был поражен его мудростью в самых непростых ситуациях. Как сейчас помню его кредо: если человек занят делом, то на сочинения и кляузы времени и желания не будет. Так получилось, что мы с ним подружились в середине 80-х и тесно общались вплоть до его ухода из жизни. Он был очень доброжелательным человеком: когда его ученик, профессор Филиппов В.М. стал министром, он вечером позвонил и сказал, что рад за наше образование, но опасается, что времени на занятие наукой у Владимира Михайловича станет еще меньше.

По прошествии многих десятилетий могу сказать, что Лев Дмитриевич – это явление как в отечественной науке и образовании, так и в мире. Его любили прежде всего за то, что он умел увлечь любого.

Лев Дмитриевич Кудрявцев в МФТИ

Г. Е. Иванов*
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская область, Россия

Лев Дмитриевич Кудрявцев работал на кафедре высшей математики МФТИ с 1947 по 2012 годы, из них 35 лет заведовал кафедрой. В докладе будет рассказано о работе Льва Дмитриевича в МФТИ.

О подготовке инженерных кадров в системе вуз-базовое предприятие

Е. И. Исмагилова*
ФГБОУ ВО МИРЭА-Российский технологический университет, Москва, Россия

Т. А. Кузнецова
ФГБОУ ВО МИРЭА-Российский технологический университет, Москва, Россия

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «МИРЭА - Российский технологический университет» продолжает активно сотрудничать с предприятием-работодателем радиоэлектронной промышленности при подготовке инженерных кадров. Представители этой организации участвуют в реализации учебных программ, организации технологической и преддипломной практик, определении тематики выпускных квалификационных работ (ВКР) бакалавров и их оценивании.

При формировании технического задания только в отдельные ВКР бакалавров филиала включаются задачи, требующие использования математических методов [1]. Частичное применение выпускниками математического аппарата при выполнении ВКР не позволяет объективно оценить сформированность общепрофессиональных и профессиональных компетенций у обучающихся с помощью математических дисциплин и ведёт к снижению уровня подготовки инженерных кадров. Одной из причин сложившейся ситуации является сокращение академических часов на изучение математических дисциплин в учебных планах бакалавров, поэтому у преподавателей отсутствует возможность познакомить обучающихся с необходимыми математическими моделями и методами в полном объёме.

Л.Д. Кудрявцев в своей книге [2] предупреждал, что переход к двухуровневой системе высшего образования неизбежно повлечет сокращение учебных часов для бакалавров по фундаментальным наукам, а без прочных знаний базовых дисциплин невозможно построить качественное профессиональное образование. Он считал, что одна из приоритетных задач – обучить студентов умению составлять математические модели. Однако в математических курсах математические модели могут носить только иллюстративный характер, а наиболее целесообразно обучать математическому моделированию в специальных курсах. Возвращение к специалитету в технических университетах позволит решить эти проблемы и существенно повысить научный уровень выпускных работ.

В докладе будет показана эффективность системы вуз-базовое предприятие на примере направления подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Список литературы

[1] Розанова С.А., Исмагилова Е.И. «Математика +» в интегративной образовательной системе «Технический университет – предприятие-заказчик» Continuum. Математика. Информатика. Образование. ЕГУ им. И.А. Бунина. №2(30) (2023) С. 35-48

[2] Кудрявцев Л.Д. «Мысли о современной математике и ее преподавании» Москва. Физматлит. 2008

Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве

С. А. Исхоков*

Институт математики им. А.Джураева НАНТ, Душанбе, Таджикистан

Пусть r – натуральное и α, β – вещественные числа. Определим пространство $W^r_{2;\,\alpha;\,\beta}(\mathbb{R}^n)$ функций $u(x)$, определенных во всем n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, с конечной нормой

$$\|u;\, W^r_{2;\,\alpha;\,\beta}(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\beta}(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

где $d(x) = (1+|x|^2)^{-1/2}$, $u^{(k)}(x)$ – обобщенная в смысле С.Л.Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$. Это пространство связано с пространством Л.Д.Кудрявцева $W^r_{2;\,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ равенством (см., например, [1]) $\mathring{W}^r_{p;\,\alpha,\,\beta}(\mathbb{R}^n) = \mathring{W}^r_{p;\,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, которое имеет место при $\alpha \leqslant n|2-1$, $\beta \geqslant \alpha + r$. В этих обозначениях нулик сверху означает замыкание класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме соответствующего пространства.

Мы рассматриваем класс вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида

$$L[u](x) = \sum_{|k|\leqslant 2r} d^{2\beta_k}(x) b_k(x) u^{(k)}(x)$$

в пространстве $W^r_{2;\,\alpha;\,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Если коэффициенты $b_k(x)$ этих операторов достаточно гладкие, то они сводятся к операторам дивергентного вид

$$L[u](x) = \sum_{|k|,\,|l|\leqslant r} \left(\rho^{\alpha_{kl}}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)},$$

которые изучаются методом полуторалинейных форм с привлечением различных обобщений теоремы Лакса-Мильграма (см., например, [1–3]). В нашем случае предполагается, что коэффициенты $b_k(x)$ ограничены и непрерывны по Липшицу. Для таких операторов доказываются интегральные неравенства вида

$$c\left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)\right\| \leqslant \|L[v];\, L_2(\mathbb{R}^n)\| + K\,\|v;\, L_{2;\,\delta}(\mathbb{R}^n)\|$$

где c, K – некоторые положительные постоянные.

На основе доказанных вспомогательных интегральных неравенств изучаются свойства области определения, области значений и спектральные свойства соответствующих операторов недивергентного вида.

Список литературы

[1] Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений, *Изв. вузов. Матем.*, № 8, 4–30 (1988).

[2] Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением, *Тр. МИАН СССР*, **194**, 179–195 (1992).

[3] Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве, связанной с некоэрцитивной формой, *Уфимск. матем. журн.*, **12**, № 1, 13–29 (2020).

Теория обратных некорректных задач и машинное обучение

С. И. Кабанихин*

Международный математический центр ИМ СО РАН

В докладе будут обсуждаться взаимосвязи между классической теорией обратных и некорректных задач и исследованиями задач машинного обучения. Теория регуляризации, использование априорной информации об искомом решении, оценки условной устойчивости и скорости сходимости регуляризирующих алгоритмов, различные варианты выбора пораметра регуляризации в зависимости от уровня погрешности в данных, анализ идентифицируемости и чувствительности в обратных задачах - результаты в этих направлениях находят все большее применение при анализе нейронных сетей. С другой стороны, нейронные сети активно применяются при поиске начального приближения для классических методов регуляризации А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и В.К. Иванова. Физически обоснованные нейронные сети (Physcics Informed Neural Network - PINN), а также основанные только на анализе данных (Data Driven Network) помогают в решении как прямых, так и обратных задач математической физики и могут служить дополнительным средством для повышения эффективности анализа математических моделей. В заключении будут изложены методы анализа исходных данных, включая истокопредставимость, необходимые и достаточные условия разрешимости обратных задач.

Многослойно - вырождающиеся гипоэллиптические операторы (многочлены)

Г. Г. Казарян*
Российско - Армянский университет, Математический институт НАН Армении, Ереван, Армения

Пусть $P(D) = P(D_1, ..., D_n) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha D^\alpha$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ отвечающий ему символ (характеристический многочлен), $(P) := \{\alpha, \gamma_\alpha \neq o\}$, $\Re(P)$ многогранник Ньютона многочлена P, т.е. наименьший выпуклиый многогранник, содержащий точки $(P) \cup \{0\}$, $\Re_i^j$ его главные граны а $P^{i,j}(\xi) := \sum_{\alpha \in \Re_i^j} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ $(i = 1, ..., N_k, k = 0, 1, ..., n-1)$ отвечающие им подмногочлены (см. [1] или [2]).

Многочлен $R(\xi)$ называется $\lambda-$ однородным $\lambda-$степени $d = d(R)$, если $R(t^\lambda \xi) = t^d R(\xi)$ $\forall t > 0, \xi \in E^n$. $\lambda-$ однородный многочлен $R(\xi)$ назовём невырожденным (см. [1]), если $R(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in E^n, \xi_1 ... \xi_n \neq 0$. Представим (общий) многочлен $P(\xi)$ в виде суммы $\lambda-$ однородных многочленов

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + ... + P_{l-1}(\xi) + P_l(\xi) + ... + P_{M(P)}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \quad (1)$$

Пусть $\Sigma(P_0) := \{\xi \in E^n, \xi_1 ... \xi_n \neq 0, P_0(\xi) = 0\}$. Многочлен P назовем $l-$ слойным, если каждый из многочленов $P_1, ..., P_{l-1}$ обращается в нуль хотя бы в одной точке $\eta \in \Sigma(P_0)$, а $P_l(\eta) \neq 0$ $\forall \eta \in \Sigma(P_0)$. В [3] найдены условия при которых двухслойный многочлен является гипоэллиптическим по Хёрмандеру (см.[4]).

Говорят, что многочлен P мощнее многочлена Q и пишут $P > Q$ или $Q < P$, если существует число $c > 0$ такое, что $|Q(\xi)| \leqslant c\,[|Q(\xi)| + 1]$ $\forall \xi \in E^n$.

Пусть $Q(\xi) = Q_1(\xi) + ... + Q_{M(Q)}(\xi)$. Доказывается, что $Q < P$ тогда и только тогда, когда $Q_j < P$ $(j = 1, ..., M(Q))$.

Теорема. Пусть все главные граны полного многогранника Ньютона многочлена (1) невырождены, кроме, быть может, $(n-1)-$ мерной граны Γ с внешней нормалью (λ). Тогда, если Γ невырождена, то многочлен P является гипоэллиптическим. Если Γ вырождена, является l - слойным, где $l \geqslant 3$, и двухслойный многочлен $P_0 + P_l + P_{l+1} + ... + P_m$ является гипоэллиптическим, то многочлен P является гипоэллиптическим если каждый многочлен P_j, $j = 1, ..., l-1$ удовлетворяет одному из следующих условий: 1)$P_j < P_0$, 2)$P_j < \mathcal{P} := P_0 + P_l$, 3)$\mathcal{P} < \mathcal{P} + P_j < \mathcal{P}$.

Список литературы

[1] В.П. Михайлов, О поведении на бесконечности одного класса многочленов. Труды МИАН, 1967,т.19, 59 - 81.

[2] A.G. Khovanskii, Newton Polyhedra (algebra and geometry).Amer. Math, Soc. Transl. 1992, v.153, no.2, 1 - 15.

[3] Г.Г. Казарян, Сравнение мощности многочленов и их гиопэллитичность. Труды МИАН, 1979,т.150, 143 - 159.

[4] Л. Хёрмандер, Анализ Линейных Дифференциальных операторов. Т.2, Москва, "Мир", 1986.

Об обратных задачах для вырождающихся параболических уравнений со многими независимыми переменными

В. Л. Камынин*
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

Рассматриваются обратные задачи определения младшего коэффициента $\gamma(t)$ в параболическом уравнении

$$u_t - a(t,x)\Delta u + \langle \vec{b}(t,x), u_x \rangle + c(t,x)u + \gamma(t)u = f(t,x) + f^*(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1}$$

$Q_T \equiv [0,T] \times \overline{\Omega}$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Помимо стандартных начально-краевых условий первого рода предполагается выполненным дополнительное условие интегрального наблюдения

$$\int\limits_{\Omega} u(t,x)\omega(x)\,dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Уравнение предполагается вырождающимся. Именно, предполагается выполненным условие

$$0 \leqslant a(t,x) \leqslant a_1, \quad 1/a(t,x) \in L_q(Q), \quad q > 1. \tag{3}$$

Исследованы три варианта задачи, при которых неизвестный коэффициент $\gamma(t)$ ищется в классе $L_2(0,T)$, в классе неотрицательных функций из $L_2(0,T)$ и в классе неотрицательных функций из $L_\infty(0,T)$. Установлены достаточные условия, при которых каждая из трех обратных задач имеет единственное решение.

Ранее в [1] была рассмотрена обратная определения неизвестной правой части в уравнении вида (1) с интегральным наблюдением (2) и условием вырождения (3).

Список литературы

[1] Kamynin V. L. Unique solvability of direct and inverse problems for degenerate parabolic equations in the multidimensional case, *J. Math. Sci.* **269, № 1, 36–52 (2023).**

"Перевернутая" лекция как одна из форм активизации обучения математике в условиях цифровизации высшего образования

Л. Р. Ким-Тян *
Национальный исследовательский технологический университет МИСИС, Москва, Россия

В современном мире трудно себе представить человека без компьютера или мобильного телефона. Цифровизация проникла практически во все сферы человеческой деятельности, не оставив в стороне и процесс образования. Пандемия

2020 года показала, насколько необходимым в образовании стало использование информационно-коммуникационных технологий в условиях полного карантина. Вынужденный карантин заставил переосмыслить все традиционные взгляды на процесс обучения, пересмотреть методику обучения. Экстренная перестройка процесса обучения мобилизовала все силы преподавателей на скорейшее применение инновационных технологий. Вынужденная перестройка потребовала от преподавателя, во-первых, подготовить учебные материалы в форме, удобной и пригодной для трансляции студентам, находящимся по другую сторону экрана; и , во-вторых, так построить занятия, чтобы студент был заинтересован в получении знаний. В таких условиях стала актуальной идея "перевернутого класса" [1], суть которой заключается в том, что студент заранее самостоятельно знакомится с новым материалом, а далее под руководством преподавателя закрепляет полученные знания.

Опыт работы в НИТУ МИСИС позволил сделать вывод об эффективности "перевернутой" лекции в современных условиях цифровизации высшего образования. В своей практической деятельности аналог "перевернутой" лекции мы применяли еще в 2008 году. Студентам до занятия на электронную почту отправлялся текст лекции, ее нужно было законспектировать и на занятие прийти уже с написанном конспектом. На лекции вновь воспроизводился материал, который студенты уже записали. Разъяснялись вопросы, которые возникали в процессе изучения предложенного теоретического материала, рассматривались примеры решения задач. Однако, возникало большое количество организационных проблем и эффективность такой лекции была недостаточной. С появлением и внедрением в практику обучения электронной обучающей среды LMS Canvas многие проблемы были сняты. В настоящий момент электронная обучающая среда LMS Canvas является основной площадкой передачи информации и взаимодействия с обучающимися. Студенты могут оставлять свои вопросы преподавателю в комментариях и получать на них ответы. Более быстрое общение с преподавателем можно осуществлять через MS TEAMS. В результате применения такой формы обучения, как "перевернутая" лекция, мы зафиксировали положительные результаты: студенты, вовремя выполнившие все рекомендации преподавателя по "перевернутым" лекциям, успешно закончили курс обучения.

Список литературы

[1] Селиверстова Е. Н. Перевернутый класс: модный вызов или потребность времени? ; в сб. *Вестник Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых*,**51(70)**, 31–43, (2022).

Существование ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в неограниченных областях

Л. М. Кожевникова*
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$, для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + \frac{M(\mathrm{x}, u)}{u} + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1)$$

Здесь функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}))$, $b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ имеют рост, определяемый функцией Музилака-Орлича $M(\mathrm{x}, z)$. При этом на функцию M и сопряженную к ней функцию $\overline{M}$ не требуются дополнительное ограничение по переменной z (обычно это Δ_2–условие). Предполагается, что по переменной $\mathrm{x} \in \Omega$ функция M подчиняется условию log-гельдеровской непрерывности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерефлексивного пространства Музилака-Орлича.

В ограниченных областях вопросы существования энтропийных и ренормализованных решений нелинейных эллиптических уравнений рассматривались в работах [1]- [3] и др. В настоящей работе впервые без ограничений на меру строго липшицевой области Ω доказано существование ренормализованного решения задачи (1) в нерефлексивных пространствах Музилака-Орлича-Соболева. Трудность в областях с бесконечной мерой состоит в том, что не работают теоремы вложения и аналог неравенства типа Фридрихса. Автор решает эту проблему наличием в уравнении (1) слагаемого $\frac{M(\mathrm{x},u)}{u}$.

В работе [4] без ограничений на меру строго липшицевой области Ω при тех же требованиях на функцию M автором установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений задачи (1) ($\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})$, $b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = b(\mathrm{x}, s_0)$) и доказана их единственность.

Список литературы

[1] Chlebicka I., Gwiazda P., Świerczewska-Gwiazda A., Wróblewska-Kamińska A. Partial Differential Equations in Anisotropic Musielak-Orlicz Spaces. — Springer Monographs in Mathematics, Springer Nature Switzerland, 2021, 389 pp.

[2] Ahmedatt T., Elemine Vall M.S.B., Benkirane A., Touzani A. Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 data, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, **44**, № 2, 190-213 (2017).

[3] Elemine Vall M. S. B., Ahmed A., Touzani A., Benkirane A. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1-data, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, **36**, № 1, 125-150 (2018).

[4] Kozhevnikova L. M., On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1-data in unbounded domains, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **44**, № 5, 1879-1901 (2023).

Применение метрики Хаусдорфа в задаче Дирихле для уравнения Лапласа

А. Б. Костин*
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

В. Б. Шерстюков
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости $\Pi \equiv \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\, y > 0\}$. Требуется найти функцию $u(x,y)$ из условий

$$\Delta u = 0, \quad (x,y) \in \Pi; \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Для $u_0 \in C(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$ решение $u \in C^2(\Pi) \cap C\left(\overline{\Pi}\right) \cap B\left(\overline{\Pi}\right)$ существует, единственно в этом классе и даётся формулой Пуассона

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi\,, \qquad (x,y) \in \Pi. \tag{2}$$

Условие на границе (см. (1)) выполняется в смысле предела изнутри области Π:

$$\lim_{\Pi \ni (\xi,y) \to (x,0)} u(\xi,y) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Возьмём теперь в качестве $u_0(x)$ простейшую разрывную функцию — функцию Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

В этом случае формула (2) даёт

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2}\, d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\,, \qquad (x,y) \in \Pi. \tag{5}$$

Ясно, что $u \in C^2(\Pi) \cap B(\Pi)$ и удовлетворяет в Π уравнению Лапласа. В каждой точке непрерывности граничной функции $u_0(x) = \theta(x)$, т. е. для $x \neq 0$, выполняется равенство (3). Если же $(x,y) \to (0,0)$ изнутри области Π, то множество предельных точек функции $u(x,y)$ целиком заполняет отрезок $[0,1]$. Семейство (5) «визуально стремится» к *дополненному графику* функции Хевисайда при $y \to 0+$.

Зафиксируем $y > 0$ и обозначим через $H(u(\cdot,y),\, \theta)$ *хаусдорфово расстояние* между функцией (5) и функцией Хевисайда (4).

Теорема. *При $y \to 0+$ справедливо асимптотическое равенство*

$$H(u(\cdot,y),\, \theta) = \sqrt{\frac{y}{\pi}} + O(\,y\sqrt{y}\,).$$

Этот «модельный» результат допускает распространение на более сложные ситуации и показывает, что для задачи Дирихле (1) с разрывной на границе области функцией u_0 граничное условие целесообразно понимать в смысле стремления к нулю хаусдорфова расстояния от решения уравнения до соответствующей граничной функции.

Об элементах теории приближений на основе пространств l_p

Н. Л. Кудрявцев*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В ряде приложений приходиться иметь дело с оценками погрешностей приближений. Отсюда возникает потребность в знании элементов теории приближений. Простой и доступный способ познакомиться с основами этой теории — это ее изложение на основе изучения приближений $E_n(\mathbf{a})_p$ последовательностей $\mathbf{a} \in l_p$ элементами из пространств $L_n = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\mathbf{e}_n$ — векторы, образующие стандартный базис в l_p, а также n–членных приближений $\sigma_n(\mathbf{a})_p$ (по поводу определений см., например, [1]).

Если для последовательностей $\mathbf{a} = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ ввести разности $\Delta_h^r \mathbf{a}$ порядка $r > 0$ с шагом $h > 0$, положив

$$\Delta_h^r \mathbf{a} = (\min(1, (kh)^r) a_k)_{k=1}^{\infty}), \tag{1}$$

то будут иметь место основные неравенства теории приближений: неравенство Джексона и неравенство Бернштейна, а также неравенство Никольского и неравенство Бора–Фавара. Кроме того будет иметь место традиционное описание пространств Бесова $B_\theta^r(l_p)$ через разности.

Эффективность n–членных приближений хорошо иллюстрируется неравенством

$$\sigma_n(\mathbf{a})_q \leqslant n^{-(1/p-1/q)} \|\mathbf{a}\|_p, \ 0 < p < q \leqslant \infty,$$

справедливым для произвольных последовательностей $\mathbf{a} \in l_p$.

В теории приближений (и в приложениях, например, в теории обработки изображений) погрешность аппроксимаций также измеряется с помощью K–функционалов. Использование разностей (1) позволяет записать известный результат из теории интерполяции как $K(\mathbf{a}, t; l_p, W^r(l_p)) \asymp \|\Delta_t^r \mathbf{a}\|_p$.

Список литературы

[1] DeVore R. Nonlinear approximation, *Acta Numerica*, 51-150 (1998)

Об устойчивом решении одной линейной обратной задачи потенциала

Е. Б. Ланеев*
Российский университет дружбы народов им.Патриса Лумумбы, Москва, Россия

В бесконечном цилиндре прямоугольного сечения в $\mathbb{R}^3$

$$D^\infty = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < \infty\} \subset \mathbb{R}^3$$

рассматривается следующая модель ньютоновского потенциала

$$\begin{aligned} &\Delta v(M) = -4\pi\rho(M), \quad M \in D^\infty, \\ &v|_{x=0,l_x} = 0, \ v|_{y=0,l_y} = 0, \quad v \to 0 \ \text{ при } \ z \to \pm\infty. \end{aligned}$$

Функция плотности распределения источников соответствует телу постоянной толщины

$$\rho(x,y,z) = \sigma(x,y)\theta(z-H)\theta(H+h-z),$$

В рамках модели потенциала на расположенной внутри D^∞ поверхности S : $z = F(x,y)$ поле $\mathbf{E} = -\mathrm{grad} v$ потенциала v задано как векторная функция $\mathbf{E}^0$: $\mathbf{E}|_S = \mathbf{E}^0$, а плотность σ не известна. Для определения σ получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно искомой функции σ

$$\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y} K(x,y,x',y')\sigma(x',y')dx'dy' = \Phi(x,y),$$

где ядро интегрального оператора имеет вид разложения в двойной ряд

$$K(x,y,x',y') = \frac{16\pi}{l_x l_y}\sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-k_{nm}(H+\frac{h}{2}-a)}\frac{\operatorname{sh} k_{nm}\frac{h}{2}}{k_{nm}}\sin\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi n x'}{l_x}\sin\frac{\pi m y'}{l_y}, \qquad k_{nm} = \pi\left(\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}\right)^{1/2}.$$

а правая часть вычисляется с использованием E^0 и функции источника φ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре D^∞

$$\Phi^\delta(M) = \int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}\Big[E_x^{0,\delta}(x_P,y_P)\frac{\partial}{\partial x_P}\varphi(M,P)\big|_{P\in S} + E_y^{0,\delta}(x_P,y_P)\frac{\partial}{\partial y_P}\varphi(M,P)\big|_{P\in S} -$$

$$-E_z^{0,\delta}(x_P,y_P)(\mathbf{n_1},\nabla_P\varphi(M,P))\big|_{P\in S}\Big]dx_P dy_P. \quad \mathbf{n_1} = (-F'_x,-F'_y,1), \quad M = M(x,y,a).$$

Приближенное решение интегрального уравнения построено как экстремаль функционала Тихонова

$$M[w] = \| Kw - \Phi^\delta \|^2 + \alpha \| w \|^2, \quad \alpha > 0,$$

Усреднение высокочастотных квазилинейных гиперболических систем

В. Б. Левенштам*
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

Метод усреднения [1], который связывают с именами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, является одним из известнейших асимптотических методов. В настоящее время он глубоко изучен не только для обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, но и для многих классов уравнений в частных производных. Вместе с тем для гиперболических систем дифференциальных уравнений первого порядка теория метода усреднения разработана недостаточно. При этом усреднение действительно квазилинейных гиперболических систем, насколько известно автору, вообще ранее строго (т. е. с обоснованием), не изучалось. Для полулинейных гиперболических систем метод усреднения применен и обоснован в работах [2–4]. В работах [4, 5] предложен и обоснован алгоритм построения полных асимптотик решений таких систем.

В данной работе рассматриваются квазилинейные гиперболические системы дифференциальных уравнений первого порядка с быстро осциллирующими по времени данными, которые явно от пространственных переменных не зависят. Для этих систем применен и обоснован метод усреднения Н. М. Крылова–Н. Н. Боголюбова, а также разработан и обоснован базирующийся на этом методе и методе двумасштабных разложений алгоритм построения полных асимптотик решений. Результаты доклада являются обобщением работы [3].

Результаты получены при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №20-11-2014).

Список литературы

[1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории линейный колебаний. — М.: Наука, 1974.

[2] *Митропольский Ю. А.*, *Хома Г. П.* О принципе усреднения для гиперболических уравнений вдоль характеристик, *Укр. матем. журнал.*, **22**, №5, 600–610 (1970).

[3] Левенштам В. Б. Метод усреднения для квазилинейных гиперболических систем. Асимптотика решений, *Труды ММО*, **84**, №1, 25–35 (2023).

[4] Капикян А. К. (Назаров А. К.), Левенштам В. Б. Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми, *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, **48**, №11, 2024–2041 (2008).

[5] Назаров А. К. Асимптотический анализ эволюционных высокочастотных задач: дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Назаров Артур Карапетович. — Ростов-на-Дону, 2017.

О развитии мотивации и повышения интереса студентов технических вузов к изучению математики с помощью математических олимпиад и конкурсов

Г. Д. Лёвшина*

НИТУ МИСИС, Москва, Россия

Развитие творческих способностей студента, умение находить решения в проблемных ситуациях, применить свои знания на практике – все это имеет большое значение при подготовке будущих инженеров. Однако часто студенты технических вузов не готовы творчески воспринимать научные идеи, так как привыкли действовать строго по алгоритму, математику они воспринимают как набор рецептов. Поэтому во многих вузах, в том числе и в НИТУ МИСИС, встает задача организации дополнительных занятий и мероприятий для интересующихся математикой студентов.

В НИТУ МИСИС в начале 2018 года был создан математический кружок, впоследствии переименованный в Математический клуб. На занятиях клуба рассматриваются задачи как вычислительные, так и теоретические с применением, различных теорем, а также довольно много задач, приемов и методов, не требующих знаний по высшей математике, но тем не менее далеко не всем студентам известных, таких как, например, метод математической индукции, бином Ньютона, комбинаторика, примеры задач будут представлены в докладе. Кроме того, проводились мероприятия для привлечения интересующихся математикой студентов: внутренние олимпиады в конце каждого семестра, состоящие из 8 задач, отдельно для 1 -го курса и старших курсов, математические бои совместно со студентами НИЯУ МИФИ, Математический калейдоскоп. В целях повышения интереса к предмету иногда мы включаем в олимпиадные соревнования элементы игры – задаем вопросы из истории математики или просто вопросы на сообразительность в форме викторины. Студентам предлагается решить не только чисто математические задачи, но иногда и задачи с техническим или экономическим содержанием. Подготовлены документы - Положения о Математическом клубе, об олимпиаде.

Студенты НИТУ МИСИС систематически принимают активное участие в Московской городской, Всероссийской (Рязань) и международной (Йошкар-Ола) олимпиадах, где ежегодно занимают призовые места в личном первенстве. В текущем 2023 году наша команда заняла 1-е место в командном зачете на Московской городской олимпиаде для технических вузов, проводимой НИУ МИЭТ. Победители и призёры олимпиады (внутренней и внешних) награждаются дипломами и дополнительными баллами к экзамену по математике.

Практика применения разрабатываемых нами методов показывает, что использование дифференциации в обучении, элементов соревнования и поощрения студентов способствуют повышению интереса студентов к математике и дают ощутимый эффект в их дальнейшей научной деятельности.

Список литературы

[1] Винников Е.В., Лёвшина Г.Д., Плужникова Е.Л. Математика. Задачи студенческих олимпиад: сборник задач. – М.: Изд. Дом НИТУ «МИСиС», 2018. – 85 с.

[2] Кожухов И.Б., Свентковский В.А., Соколова Т.В. Московские городские студенческие олимпиады по математике за 1996-2009. – М: Техполиграфцентр, 2010.

[3] Лёвшина Г.Д. Опыт проведения студенческих олимпиад в техническом университете. Тезисы докладов 5-й международной конференции. М., РУДН, 2018. – 3 с.

Изучение старшими школьниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования: проблемы и пути их решения

Н. И. Лобанова*
«Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», Зеленокумск, Россия

Н. Н. Яремко
Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия

В наших работах [1–3] были обозначены проблемы преподавания ДУ в ДО (сложность математического содержания, мозаичность, разрозненность, большое разнообразие практико-ориентированных задач) и пути их решения (использование IT - инструментов; отбор и структурирование материала в строгом соответствии с целью обучения - формирование целостной картины мира школьника; к изучению берутся наиболее общие законы, которые выражаются в форме дифференциальных уравнений).

Проведённое исследование показало, что изучение элементов дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования на основе практико-ориентированного подхода с применением метода математического моделирования и использованием IT - инструментов позволяет не только повысить познавательный интерес старшеклассников к учению и качество их математических знаний, их целостность и целостность мировоззрения [4, 5].

Список литературы

[1] Лобанова, Н. И. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в рамках дополнительного образования / Н. И. Лобанова // Мир науки. Педагогика и психология. — 2023. — Т. 11. — № 2.

[2] Яремко Н.Н, Лобанова Н.И. Закон естественного роста как основа математического моделирования при формировании целостной картины мира школьника // «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе», Москва, МПГУ, 24-28 апреля 2023 года. http://news.scienceland.ru/2023/04/23/закон-естественного-роста-как-основа/

[3] Лобанова Н.И., Яремко Н.Н. Методические особенности построения курса дифференциальных уравнений с целью формирования целостной картины мира школьника // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2023. № 2 (90). – С. 250-256.

[4] Лобанова Н.И., Яремко Н.Н. Логистический закон как основа математического моделирования при формировании целостной картины мира школьника // Образование и общество. 2023 № 3(140). С. 28-34

[5] Селютин В.Д., Лебедева Е.В., Яремко Н.Н. Применение линейных регрессионных моделей в педагогических исследованиях // Ученые записки Орловского государственного университета. – Орёл: издательство ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева». –2018. №3 (80). – С.354-359.

О критериях слабой коэрцитивности для систем минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева

М. М. Маламуд*
Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы, Москва, Россия

Д. В. Лиманский
Донецкий государственный университет, Институт прикладной математики и механики, Донецк, Россия

Доклад посвящен характеризации l-квазиэллиптических систем дифференциальных операторов посредством априорных оценок в L^p при $p \in [1;\infty]$.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $l := (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $p \in [1,\infty]$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum\nolimits_{|\alpha:l| \leqslant 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

где $D := (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j := -i(\partial/\partial x^j)$, $1 \leqslant j \leqslant N$; $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \cdots + \alpha_n/l_n$.

Напомним [1], что систему вида (1) называют l-квазиэллиптической, если

$$(P_1^l(x,\xi), \ldots, P_N^l(x,\xi)) \neq 0, \qquad (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Здесь $P_j^l(x,\xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\, \xi^\alpha$ — l-главные символы операторов $P_j(x, D)$, $j \in \{1, \ldots, N\}$. В частности, в изотропном случае, т. е. при $l_1 = \cdots = l_n = l$, систему $\{P_j(x,D)\}_1^N$ называют эллиптической порядка l.

Известно, что l-квазиэллиптическая система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω является слабо коэрцитивной в анизотропном пространстве Соболева $W_{0,p}^l(\Omega)$ при $p \in [1;\infty]$, т. е. удовлетворяет (с не зависящими от f константами $C_1, C_2 > 0$) априорной оценке

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Более того, при $p \in (1;\infty)$ верна более сильная оценка (2) с заменой $|\alpha : l| < 1$ на $|\alpha : l| \leqslant 1$. Однако даже в изотропном случае оценка (2) при $p = 1$ и $p = \infty$ верна и для систем, не являющихся эллиптическими (см. [1, 2]).

В докладе будут описаны слабо коэрцитивные системы в анизотропном пространстве Соболева $W_{0,p}^l(\Omega)$ при $p \in [1;\infty]$, и l-квазиэллиптические системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ с переменными коэффициентами будут охарактеризованы в $L^p(\Omega)$ при всех $p \in [1;\infty]$ при помощи оценок вида (2). При этом мы дополняем результат, полученный в [2] в однородном случае ($l_1 = \cdots = l_n = l$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер проекта FSSF-2023-0016).

Список литературы

[1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. – 480 с.

[2] Лиманский Д. В., Маламуд М. М. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева, *Матем. сборник*, **199**, № 11, 75–112 (2008).

Государственные общеобразовательные стандарты и проблемы их реализации

М. А. Мкртчян*
Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна

В РФ уже который раз разрабатываются, модернизируются разнообразные государственные образовательные стандарты, однако ситуация в образовании, в том числе и качество школьного обучения существенно не меняется. Такая же ситуация и в РА.

Это связано с двумя главными проблемами. Первая – неразличение понятий «общее образование» и «образование». Вторая – неразличение понятий «сущность», «предназначение», «смысл» и «значимость» государственных общеобразовательных стандартов. Вернее игнорирование важности этих различений.

Другая важная проблема следущая.

Нынешний общественно-исторический способ организации обучения проявляется в общеобразовательном звене в виде классно-урочной системы.

Основным обстоятельством, существенно ограничивающим возможности классно-урочной системы в реализации государственных общеобразовательных стандартов, является характер учебного процесса. Этот компонент системы образования (учебный процесс) является как системообразующим, так и определяющим в вопросах результатов обучения. Именно роль и значимость этого компонента игнорируется стандартами. Фактически обозначая цели и содержание общеобразователного характера, а также обязательные требования к результатам обучения через разные понятия - базовый компонент содержания, компетенции, униваерсальные учебные дейсвия, надпредметные общеобразовательные качества, и т. д. – стандартами одновременно закрепляются основные принципы старого способа организации учебного процесса. Именно из-за этого под эгидой обеспечения единого образовательного пространства от года к году приходится редактировать федеральные общеобразовательные стандарты, которые всего лишь насыщаются благими пожеланиями и жесткими ограничениями по всем компонентам организации образования.

Весовая полиномиальная аппроксимация в $\mathbb{R}^n$

И. Х. Мусин*
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Пусть φ – вещественнозначная непрерывная функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\|x\|} = +\infty$ ($\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$). Введем пространство C_φ, состоящее из функций $f \in C(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\frac{f(x)}{\exp(\varphi(x))} \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

Наделим C_φ нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \dfrac{|f(x)|}{\exp(\varphi(x))}$.

Теорема. *Полиномы плотны в* C_φ.

Контрастные структуры в системах тихоновского типа

Н. Н. Нефедов*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассматривается сингулярно возмущенная задача вида:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big) - g(u,v,x,t,\varepsilon) = 0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - f(u,v,x,t,\varepsilon) = 0,\ x \in (0,1),\ t \in R,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = u^0(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = u^1(t),\ t \in R,\\
&v(0,t,\varepsilon) = v^0(t),\ v(1,t,\varepsilon) = v^1(t),\ t \in R,\\
&u(x,t,\varepsilon) = u(x,t+T),\ v(x,t,\varepsilon) = v(x,t+T,\varepsilon),
\end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Такие системы естественным образом возникают при моделировании быстрых бимолекулярных реакций в случае, когда один из источников (реакция, нелинейный источник, взаимодействие) интенсивный (порядка $1/\varepsilon^2$), а второй порядка единицы. Первое уравнение в системе, имеющее малый параметр при старшем дифференциальном операторе, принято называть быстрым, а второе - медленным. Исследование систем такого типа, заложившее основы современной теории возмущений было начато для ОДУ в работах А.Н. Тихонова и А.Б. Васильевой. В работе представлены результаты, развивающие методы асимптотического анализа сингулярно возмущенных задач, представленных в обзоре [1].

Получены условия существования решений с пограничными и внутренними переходными слоями. Построены асимптотические приближения и доказаны теоремы об асимптотической устойчивости по Ляпунову таких решений. Результаты обобщены на многомерный по пространственной переменной случай, а также на исследования существования и устойчивости стационарных решений начально-краевых задач для аналогичных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00069).

Список литературы

[1] Нефедов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвеция: теория и применение, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **61**, № 12, 2074–2094 (2021).

О приложении к некоторым задачам механики в курсе ТФКП

Л. В. Новикова*
Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Элементы теории конформных отображений имеют многочисленные приложение к весьма разнообразным задачам, связанным с механикой сплошной среды.

1. Идеальная жидкость и уравнение определяющие её движения.

Исследуются плоско-параллельные течения жидкости при этом рассматриваются условие несжимаемости жидкости и условие отсутствия жидкости вихрей.

а) установившиеся движение, когда поле скорости не зависит от времени t.

б) удар.

2. Примеры движений.

а) Поступательное движение.

б) Источник.

в) Вихрь.

3. Три задачи на обтекание.

4. Обтекание круга.

5. Обтекание произвольного профиля.

6. Примеры профилей крыльев.

7. Подъемная сила.

8. Вариация скорости.

9. Волны в тяжелой жидкости.

10. Ударные задачи.

11. Движение грунтовых вод.

Список литературы

[1] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.

[2] А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. М.: Наука, т.1, 1967, т.2, 1968.

[3] В. Н. Николенко. Теория аналитических функций. Изд-во РГУ, 1988.

[4] М. А. Лаврентьев. Конформные отображения. ОГИЗ Гостехиздат, 1946.

[5] А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения. Физматгиз, 1960.

Весовое дифференциальное неравенство высокого порядка и спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов

Р. Ойнаров*
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан

А. Калыбай
Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан

В докладе изучаются спектральные свойства дифференциального оператора $2n$-го порядка. Эти свойства устанавливаются вариационным методом на основании выполнения некоторого весового дифференциального неравенства n-го порядка, весами которого являются коэффициенты оператора. В свою очередь, неравенство устанавливается в случае, когда веса удовлетворяют некоторым условиям, гарантирующим для функции этого неравенства существование его граничных значений на бесконечности и в нуле.

По тематике доклада опубликованы следующие работы [1], [2], [3] и [4].

Список литературы

[1] Kalybay A., Oinarov R., Sultanaev Ya. Oscillation and spectral properties of some classes of higher order differential operators and weighted nth order differential inequalities, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, №. 3, 1–20 (2021). https://doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.3

[2] Kalybay A., Oinarov R., Sultanaev Ya. Weighted differential inequality and oscillatory properties of fourth order differential equations, *J. Ineq. Appl.*, **2021**, №. 199 (2021). https://doi.org/10.1186/s13660-021-02731-7

[3] Kalybay A., Oinarov R., Sultanaev Ya. Weighted second-order differential inequality on set of compactly supported functions and its applications, *Mathematics*, **9**, №. 2830, (2021). https://doi.org/10.3390/math9212830

[4] Baiarystanov A., Kalybay A., Oinarov R. Oscillatory and spectral properties of fourth-order differential operator and weighted differential inequality with boundary conditions, *Bound. Value Probl.* **2022**, №. 78, (2022). https://doi.org/10.1186/s13661-022-01659-1

Формула следа для полиномов Соболева

Б. П. Осиленкер*
НИУ Московский инженерно-строительный университет, Москва, Россия

Рассмотрим линейное пространство со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega(x)dx + \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{N_k} M_{k,i} f^{(k)}(a_{k,i})g^{(k)}(a_{k,i}), \tag{1}$$

где

$$M_{k,i} \geqslant 0, -1 \leqslant a_{k,i} \leqslant 1 (i = 1, 2, \dots, N_k; k = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Пусть $\{\widehat{q}_n(x)\}(n \in \mathbb{Z}_+)$ –система полиномов Соболева, ортонормированных относительно данного скалярного произведения(1). Существует полином $w_{N+1}(x)$ такой, что полиномы $\{\widehat{q}_n(x)\}(n \in \mathbb{Z}_+)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$w_{N+1}(x)\widehat{q}_n(x) = \sum_{j=0}^{N+1} d_{n+j,j}\widehat{q}_{n+j}(x) + \sum_{j=1}^{N+1} d_{n,n-j}\widehat{q}_{n-j}(x)$$
$$(n \in \mathbb{Z}_+; \widehat{q}_{-j}(x) = 0, j = 1, 2, \ldots; d_{n,n-j} = 0, j > n).$$

Theorem 1. *Пусть система полиномов* $\{\widehat{q}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям:*
(i) полиномы $\widehat{q}_n(x)$ *равномерно ограничены на каждом компактном подмножестве K из (-1,1);*
(ii) для рекуррентных коэффициентов $d_{n,j}$ *выполняются соотношения*

$$\lim_{m\to\infty} d_{m+j,m} = \lim_{m\to\infty} d_{m,m+j} = d_j^{(0)}(j = -(N+1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N+1)$$
$$\sum_{j=-(N+1)}^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty}(|d_{k,k+j} - d_{k+r,k+j+r}| + |d_{k,k+r} - d_{k+j,k+r+j}|) < \infty(r = 1, \ldots, N+1);$$

(iii)для всех целых значений k, j *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-1}^{1} f(x)\widehat{q}_{m+k}(x)\widehat{q}_{m+j}(x)\omega(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} f(x)[T_{j-k}(x) + T_{k-j}(x)]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $T_n(x) = cos(narccosx)(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ *полиномы Чебышева первого рода. Тогда равномерно на K справедлива " Формула следа":*

$$\sum_{j=-(N+1)}^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty}(d_{k,k+r}d_{k+r+j,j} - d_{k+j,j}d_{k+j,k+j+r}\widehat{q}_k(x)\widehat{q}_{k+j+r}(x) =$$
$$\frac{2d_r^{(0)}}{\pi}U_{r-1}(x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{\omega(x)}\sum_{j=1}^{N+1} jd_j^{(0)}U_{j-1}(x),$$

где $U_n(x) = \frac{sin(n+1)arccosx}{\sqrt{1-x^2}}(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ *полиномы Чебышева второго рода. Получена оценка скорости сходимости.*

Улучшенные операторные оценки в периодическом усреднении

С. Е. Пастухова*
Российский технологический университет - МИРЭА, Москва, Россия

В $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, рассмотрим уравнение произвольного четного порядка $2m \geqslant 4$

$$\begin{array}{c} u^\varepsilon \in H^m(\mathbb{R}^d), \quad (A_\varepsilon + 1)u^\varepsilon = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ A_\varepsilon = (-1)^m \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}^\varepsilon(x)D^\beta), \end{array} \tag{1}$$

с ε-периодическими коэффициентами $a^\varepsilon_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta}(y)|_{y=\varepsilon^{-1}x}$, $\varepsilon{>}0$ есть малый параметр. Здесь $\alpha{=}(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ суть мультииндексы длины $|\alpha|{=}\alpha_1+\ldots+\alpha_d$ с целыми компонентами $\alpha_j{\geqslant}\,0$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\dots D_d^{\alpha_d}$, $D_i = D_{x_i}$, $i=1,\dots,d$; коэффициенты $a_{\alpha\beta}(y)$ измеримы, вещественны, 1-периодичны ($Y=[-1/2,1/2)^d$ – ячейка периодичности) и удовлетворяют условию (**C**):

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha},\quad \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(Y)}\leqslant\lambda_1,\quad \forall\alpha,\,\beta,\,|\alpha|=|\beta|=m,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x)D^\beta\varphi D^\alpha\varphi\,dx\geqslant\lambda_0\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\varphi|^2\,dx\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

для некоторых констант $\lambda_0,\lambda_1>0$. Найдена [1] аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon{+}1)^{-1}$ в энергетической операторной норме (из $L^2(\mathbb{R}^d)$ в $H^m(\mathbb{R}^d)$):

$$(A_\varepsilon{+}1)^{-1}{=}(\hat A{+}1)^{-1}{+}\varepsilon^m K_m(\varepsilon){+}\varepsilon^{m+1}K_{m+1}(\varepsilon){+}O(\varepsilon^2),\tag{2}$$

где $\hat A$ – усредненный оператор с постоянными коэффициентами из [2], $K_m(\varepsilon)$ и $K_{m+1}(\varepsilon)$ – корректоры. Разложение (2) в терминах решения задачи (1) означает:

$$\|u^\varepsilon{-}v^\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}^d)}{\leqslant}C\varepsilon^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\quad C{=}const(\lambda_0,\lambda_1,d),$$

где $v^\varepsilon(x){=}u(x){+}\varepsilon^m\sum_\gamma N_\gamma(x/\varepsilon)\Theta^\varepsilon D^\gamma u(x){+}\varepsilon^{m+1}\sum_\delta N_\delta(x/\varepsilon)\Theta^\varepsilon D^\delta u(x)$ с суммированием во всем γ и δ, $|\gamma|{=}m$ и $|\delta|{=}m{+}1$. Здесь $u{=}(\hat A{+}1)^{-1}f$; $N_\gamma(y)$ и $N_\delta(y)$ – решения задач на ячейке Y; Θ^ε– подходящий оператор сглаживания, необходимый в условиях минимальной гладкости данных в задаче (1).

Асимптотика типа (2), но более сложная, установлена [3] и без предположения симметрии в условии (**C**). В [4] используем (2) для аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon{+}1)^{-1}$ в операторной L^2-норме с точностью $O(\varepsilon^3)$ в случае $m{=}2$.

Список литературы

[1] Pastukhova S. E. Improved approximations of resolvents in homogenization of higher order operators. Selfadjoint case, *J. Math. Sci.*, **262**, № 3, 312–328 (2022).

[2] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Нгоан Х. Т., Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов, *Успехи мат. наук*, **34**, № 5, 65—133 (1979).

[3] Pastukhova S. E. Improved approximations of resolvents in homogenization of higher order operators, *J. Math. Sci.*, **259**, № 2, 230–243 (2021).

[4] Пастухова С. Е. Улучшенные L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении операторов четвёртого порядка, *Алгебра и анализ*, **34**, № 4, 74–106 (2022).

О восстановлении функций в весовых пространствах по неполным данным

М. В. Половинкина*
Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия

И. П. Половинкин
Воронежский государственный университет, Воронеж,
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

В серии работ Г.Г. Магарил–Ильяева, К.Ю. Осипенко, Е.О. Сивковой Н.Д. Выск [1–3] разработаны методы оптимального восстановления функций, решений дифференциадьных уравнений, оператора Лапласа и его степеней по неполным и неточным спектральным данным, т.е. либо в случае, когда неточно задано преобразование Фурье на части пространства (числовой прямой), либо когдя известен неполный набор неточно заданных коэффициентов Фурье искомой функции. С помощью этих методов нами установлены аналоги некоторых результатов указанных работ для сингулярных дифференциальных операторов с оператором Бесселя. В этом случае рабочими инструментами для исследования являются преобразование Фурье–Бесселя (аналогично преобразованию Фурье) и весовые функциональные пространства (пространства Киприянова) [4–7]. Рассмотрены задачи восстановления B-эллиптического оператора Лапласа–Бесселя и его степеней, восстановления решения начальной задачи на полупрямой для сингулярного уравнения теплопроводности, восстановления решений начально–краевых задач для сингулярного уравнения колебаний.

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г. Г. , Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям, *Математический сборник*, **200**, № 5, 37–54 (2009).

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру, *Математический сборник*, **203**, № 4, 119–130 (2012).

[3] Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным. *Математические заметки*, **81**, № 6, 803–815, (2007).

[4] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи.— М.: Наука, 1997.—199 с.

[5] Ляхов Л. Н. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007. — 232 с.

[6] Ситник С. М., Шишкина Э. Л., Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Наука, 2019. — 224 с.

[7] Muravnik A. B. Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations, *Functional Differential Equations* **8** № (3–4), 353—363, (2001).

Оценка снизу минимума модуля целых функций нулевого рода

А. Ю. Попов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В. Б. Шерстюков*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Каноническим произведением нулевого рода называется функция

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_n), \qquad \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-1} < +\infty. \tag{1}$$

Функции (1) являются целыми порядка $\leqslant 1$. Любая целая функция порядка $\rho \in [0, 1)$, отличная от полинома, есть произведение некоторой функции (1) на cz^m, где $c \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}_0$, причём последовательность λ_n удовлетворяет дополнительному условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-\rho-\varepsilon} < +\infty$ при любом $\varepsilon > 0$ (см. [1, гл. 1]). Для целой функции f положим $M(f, r) = \max\limits_{|z| \leqslant r} |f(z)|$, $m(f, r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Знаменитая $\cos(\pi\rho)$-теорема (см., например, [2, гл. 6]) утверждает, что для любой непостоянной целой функции f порядка $\rho \in [0, 1]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность $r_n \uparrow +\infty$, что $m(f, r_n) > \bigl(M(f, r_n)\bigr)^{\cos(\pi\rho)-\varepsilon}$.

Последовательность r_n может иметь большие лакуны. Для любого $\rho \in (0, 1)$ и любой последовательности $R_n \uparrow +\infty$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} (R_n/\ln R_{n+1}) = 0$, мы построили целую функцию φ порядка ρ, все корни которой положительны и

$$\lim_{n\to\infty} \max\Bigl\{m(\varphi, r)\, M(\varphi, r) \;\Bigm|\; R_n^{1-\rho/2} \ln R_n \leqslant r \leqslant R_n\Bigr\} = 0.$$

Тем самым на довольно длинных промежутках минимум модуля функции φ меньше -1-й степени максимума её модуля. Будет ли иметь место степенная оценка снизу $m(f, r)$ через $M(f, r)$ с каким-либо показателем (пусть даже меньшим -1), если мы пожелаем, чтобы она выполнялась в какой-либо точке произвольного отрезка с постоянным отношением концов? В общем случае ответ нам не известен, но когда все корни функции находятся на одном луче (или, более общо, лежат все кроме, быть может, конечного числа в сколь угодно малом угле) нами получен утвердительный ответ. Вопрос о том, как зависит показатель степени $M(f, r)$ в упомянутой оценке от отношения концов отрезка, рассмотрен нами в работах [3], [4].

Список литературы

[1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

[2] Hayman W. K. Subharmonic Functions. Vol. 2. London, N.-Y.: Academic Press, 1989.

[3] Попов А. Ю., Шерстюков В. Б. Оценка снизу минимума модуля целой функции рода нуль с положительными корнями через степень максимума модуля в частой последовательности точек, *Уфимск. мат. журн.*, **14**, № 4, 80–99 (2022).

[4] Попов А. Ю., Шерстюков В. Б. Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля чётных канонических произведений, *Чебышёвск. сб.*, **24**, № 1, 127–138 (2023).

Прогноз – управление и обратные задачи с пространственным наблюдением для нестационарных уравнений первого порядка

А. И. Прилепко*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Для нестационарного уравнения первого порядка рассматриваются линейные обратные задачи с пространственным наблюдением как с одним (однопараметрические), так и с двумя (двухпараметрические) неизвестными параметрами, зависящими от пространственных переменных. Формулируется также одна из нелинейных коэффициентных обратных задач для указанных уравнений. По поводу однопараметрических обратных задач см. [1].

Список литературы

[1] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York: Marcel Dekker, 2000.

Воспоминания о талантливом учёном, научном исследователе математического образования профессоре Л.Д. Кудрявцеве

А. А. Пунтус*
Московский авиационный институт

С член-корр. РАН, профессором Л.Д.Кудрявцевым мне довелось совместно работать в Научно-методическом Совете по математике Министерства образования и науки Российской Федерации [1], состав которого утверждался приказом министра образования. Этим приказом член-корр. РАН, профессор Л.Д. Кудрявцев был назначен первым заместителем Председателя НМС по математике. Это назначение было чрезвычайно своевременным и плодотворным. К этому времени профессор Л.Д. Кудрявцев, замечательный математик и выдающийся российский мыслитель, автор книги "Мысли о современной математике и её преподавании" [2], выразил свой многолетний опыт творческой и практической деятельности в области развития принципов методики преподавания, уделяя особое внимание связи математических моделей с реальными явлениями и вопросами воспитания слушателей.

По всем вопросам и проблемам, обсуждаемым на НМС, профессор Л.Д. Кудрявцев выступал и предлагал достаточно убедительные и обоснованные предложения по рекомендациям к соответствующим решениям.

Интересно высказывание профессора Л.Д.Кудрявцева, что процессы образования и воспитания поколений сродни росту культурных растений, так как эти процессы, с одной стороны, могут происходить без активного вмешательства человека, с другой же стороны такое вмешательство существенно влияет на результат.

Воспитание творческой инициативы занимает существенно важное место в процессе обучения профессиональному подходу к решению задач, связанных, в первую очередь, конечно, с профилем будущей специальности.

Публикации профессора Л.Д.Кудрявцева являются плодом его глубоких авторских размышлений и, конечно же, результатом его особой заботы, которую он проявлял в вопросах нравственных воззрений общества, воспитания молодёжи, сохранения лучших традиций российского образования.

Список литературы

[1] Под редакцией академика РАН С.В.Емельянова, профессора С.А.Розановой, профессора Яголы. Научно-методический Совет по математике Министерства образования и науки Российской Федерации: деятельность и история. –Ульяновск. УлГТУ. 2014.

[2] Л.Д. Кудрявцев. Мысли о современной математике и её преподавании.–М. Физматлит. 2008.

Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах

Н. А. Раутиан*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина-Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости и теории распространения тепла. Упомянутые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в большом числе прикладных задач.

Получены результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, доказана теорема об экспоненциальной устойчивости полученной полугруппы при дополнительных предположениях о ядрах интегральных операторов.

Приведена формулировка соответствующей задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве.

Основным результатом работы является теорема о корректной разрешимости этой задачи, а также начальной задачи для исходного абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения. Устанавливается связь между классическими решениями этих задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (Соглашение No 075-15-2022-284).

Список литературы

[1] Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах, *Дифференциальные уравнения*, **58**, № 10, 1414–1430 (2022).

[2] Раутиан Н. А. Корректная разрешимость и экспоненциальная устойчивость решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, **500**, 62–66 (2021).

[3] Раутиан Н. А. Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*, **191**, 135–148 (2021).

Исследование проблемы качества математического образования студентов технических вузов в условиях пандемии

С. А. Розанова
МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

А. Ю. Потепалова*
МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

И. П. Драгилева
МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

Доклад посвящен исследованию *актуальной* проблемы сохранения качества математического образования в технических университетах в условиях пандемии. Сформулирована *проблема* исследования: выявить влияние дистанционного формата обучения на качество математического образования в техническом университете в условиях пандемии. *Цель* исследования: разработка и реализация концептуально - методического комплекса, направленного на снижение негативных сторон дистанционного обучения математике и раскрытие «проблемных зон» студентов в техническом университете для сохранения качества математического образования в условиях пандемии. *Гипотеза* исследования: использование положительных сторон цифровизации и реализация разработанного концептуально-методического комплекса при трансформации учебного процесса по математике в техническом университете будут способствовать сохранению его качества в условиях пандемии.

В концептуально-методический комплекс входят: пять концептуальных идей; методы использования методологических и организационных возможностей системы MOODLE; лекции, семинары и учебно-методические пособия в электронном виде; методика использования потенциала раскрытия «проблемных зон»; банки «проблемных зон», профессиональных и прикладных задач, темы научно-исследовательских и выпускных квалификационных работ для специалистов и бакалавров соответственно [1]. Реализована важнейшая концептуальная идея: сохранение фундаментальности и прикладной направленности математического образования в технических вузах при трансформации учебного процесса во время цифровизации. Статистический анализ полученных результатов проведенного эксперимента позволил сделать вывод о сохранении уровня академической успеваемости студентов по математике в условиях дистанционного формата обучения во время пандемии.

Список литературы

[1] Розанова С. А., Потепалова А Ю., Драгилева И. П. Необходимость использования потенциала раскрытия «проблемных зон» для улучшения качества математического образования в технических вузах в условиях цифровизации высшей школы. Continuum Математика. Информатика. Образование. 2021 № 4, ФГБОУ ВО ЕГУ им И.А. Бунина, Елец, DOI: 10.24888 /2500-195-2021-4-109-124

Лев Дмитриевич Кудрявцев и Научно-методический совет по математике Минобрнауки России

С. А. Розанова*
МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

А. Г. Ягола
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Доклад посвящен наиболее ярким периодам деятельности Льва Дмитриевича Кудрявцева в Научно-методическом совете по математике Минобрнауки России (НМС), одному из основных руководителей этого совета, отдавшему ему значительную часть своего жизненного пути и творческой, организационной работы. 25 марта 2023 года исполнилось 100 лет со дня рождения Л. Д. Кудрявцева.

Выделены следующие два периода эффективной работы Льва Дмитриевича в НМС: 1) Л. Д. Кудрявцев — председатель секции технических, экономических и сельскохозяйственных вузов НМС по математике Минвуза СССР (70-ые годы по1999 г.); 2) Л. Д. Кудрявцев — первый заместитель председателя НМС по математике Министерства образования и науки РФ (1999 – 2012г.). Результатами этой деятельности стали: **в первый период**: – Две программы курса высшей математики на 450 и 510 часов аудиторных занятий. Их роль очень важна, потому что в них были определены специалистами и утверждены Минвузом СССР **уровни** математической подготовки и количество аудиторных занятий, необходимых для их реализации. – Новым в программах было и то, что они предусматривали выполнение студентами **типовых расчетов**. – Разработаны учебные планы — базовые документы. – Внесены предложения **о централизованном регламентировании базовой подготовки студентов** (300 министерских вариантов такой подготовки по математике свели к 35 различным). – Выездные расширенные заседания секции **включили** в ежегодные планы мероприятий Минвуза. — Принципиально новым для организации преподавания математики было то, что учебными планами предусматривались **курсовые работы по математике**. – Благодаря усилиям НМС и пониманию проблемы министерством, **интегрирование двух ветвей (НМС и УМО)** создало основу качественного образования: НМС по математике, организованный по горизонтальному принципу и отвечающий за фундаментальную подготовку студентов, и УМО, построенные по вертикальному принципу и отвечающие за специализированную подготовку студентов, **стали работать согласованно**. **Во второй период** были расширены направления деятельности Совета и достигнуты следующие результаты: – **внесены изменения в структуру Совета** (созданы 3 отделения, 13 секций, 20 Региональных отделений); – разработаны **требования** к стандартам, к ним — **новые программы по математике**, разосланные министерством по вузам страны; – проводилась **экспертиза** учебников и учебных пособий; – организовывались **Выездные заседания, Международные и Всероссийские конференции**; – активизировалась **издательская** деятельность НМС; – создана **научная школа** по проблемам математики и методики ее преподавания; – ряд других направлений.

В докладе показано, что Л. Д. Кудрявцев не только выдающийся **организатор математической науки и образования**, но глубокий **мыслитель** нашего времени.

Список литературы

[1] Кудрявцев Л. Д. Избранные труды. Три тома. — М.: Физматлит, 2008.

[2] Розанова С. А, Ягола А. Г. Лев Дмитриевич Кудрявцев и Научно – методический совет по математике Минобрнауки России, в сб.: *Continuum Математика. Информатика. Образование.*, N. 1. — М.: ФГБОУ ВО ЕГУ им. И.А. Бунина, 2023.

Бесконечно малые изгибания скольжения поверхностей с метрикой вращения

И. Х. Сабитов*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Внутренние координаты (u, v) поверхности называются *изотермическими*, если в них метрика поверхности имеет

$$ds^2 = \Lambda^2(u, v))(du^2 + dv^2)$$

Метрика называется *метрикой вращения*, если существуют изотермические координаты, в которых коэффициент Λ зависит только от $r = \sqrt{u^2 + v^2}$. Изгибания поверхности (т.е. непрерывные деформации поверхности, не изменяющие ее метрику) называются изгибаниями *скольжения*, если в ходе деформации изгибания точки поверхности остаются на само́й поверхности. Типичным примером такого изгибания являются повороты поверхности вращения вокруг ее оси вращения.

Бесконечно малое изгибание (б.м.и.) поверхности называется б.м.и. скольжения, если поле б.м.и. всюду касательно к поверхности (пример - поле скоростей изгибания скольжения). Известна теорема, что если поверхность допускает изгибания скольжения или б.м.и. скольжения, то ее метрика локально является метрикой вращения. В работе [1] доказано, что компактная поверхность, в целом имеющая метрику вращения, должна быть гомеоморфна сфере или тору. Метод нахождения и исследования б.м.и. существенно использует тот факт, что выбранные координаты являются изотермическими. Мы доказываем две теоремы.

Теорема 1. Любая C^2-гладкая компактная поверхность, в целом имеющая метрику вращения, допускает C^1-гладкие б.м.и. скольжения 1-го порядка, причем эти б.м.и. скольжения являются тривиальными тогда и только тогда, когда поверхность является поверхностью вращения.

Теорема 2. Любая C^2- гладкая поверхность, локально имеющая метрику вращения, локально допускает C^2-гладкие б.м.и. скольжения 1-го и 2-го порядков.

Интересным является также вопрос о приведении метрики поверхности вращения к изотермическому виду. Например, для кругового тора с меридианом в виде окружности радиуса R и с центром на расстоянии $a > R$ от оси вращения метрика в изотермических координатах (τ, φ) имеет вид

$$ds^2 = (a + R\cos\frac{\theta(\tau)}{\tau})^2(d\tau^2 + d\varphi^2),$$

где $\theta(\tau) = 2R\,\mathrm{arctg}(\sqrt{\frac{a+R}{a-R}}\,\mathrm{tg}(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{2R}\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\pi R}{\sqrt{a^2-R^2}}$.

Список литературы

[1] Сабитов И.Х. Квазиконформные отображения поверхности, порожденные ее изометрическими преобразованиями, и изгибания поверхности на себя. *Фундаметальная и прикладная математика*, 1, № 1, 281-288 (1995).

Об интегральных инвариантах некоторых бесконечномерных систем

В. М. Савчин*

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия

При исследовании уравнений движения систем различной физической природы появляются задачи определения качественных показателей и свойств движения по известным структуре и свойствам рассматриваемых уравнений. Такими качественными показателями для конечномерных систем являются, в частности, интегральные инварианты — интегралы от некоторых функций, сохраняющие свое значение в процессе движения системы. Они были введены в аналитическую механику А.Пуанкаре. В дальнейшем в работах А.Картана, В.В.Козлова и др. была установлена связь интегральных инвариантов с рядом фундаментальных понятий классической динамики. Основная цель доклада — распространить некоторые положения теории интегральных инвариантов на широкие классы уравнений движения бесконечномерных систем. Используя заданное действие по Гамильтону, получены уравнения движения потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, обобщающие известные уравнения Биркгофа. Для них построен разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация соответствующего относительного интегрального инварианта первого порядка.

Публикация выполнена в рамках проекта №002092-0-000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы.

Список литературы

[1] Santilli R. M. Foundations of theoretical mechanics II. — New York: Springer, 1983.

[2] Savchin V. M. An operator approach to Birkhoff's equations, *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия : Математика*, **2**, № 2, 111–123 (1995).

[3] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. — Ижевск: Издательский дом Удмуртский университет, 1999.

[4] Галиуллин А. С., Гафаров Г. Г., Малайшка Р. П., Хван А. М. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа и Намбу. — М.: Редакция журнала Успехи физических наук, 1997.

[5] Савчин В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. — М.: Издательство Университета дружбы народов, 1991.

[6] Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.

[7] Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов, *Итоги науки и техники. Серия : Современные проблемы математики. Новейшие достижения*, **40**, 3–176 (1992).

Проблемы обновления высшего профессионального образования России на современном этапе общественного развития

В. С. Сенашенко*

Международная академия наук высшей школы. Москва, Россия

В докладе представлены результаты анализа причин, по которым предпринимаемые на протяжении последних десятилетий попытки обновления российской системы высшего профессионального образования, не привели к желаемым результатам. Главная из них видится в подмене системообразующих понятий образовательной сферы при решении вопросов совершенствования высшего профессионального образования в современных условиях. Делается попытка найти обоснование, почему «болонская образовательная модель», заимствованная многими странами мира, оказалась неэффективной в России. Обращается внимание на то, что такая образовательная модель фактически является моделью классического университетского образования, целью которого является подготовка широко образованного универсанта. Поэтому попытка приспособить её, используя «болонские образовательные стереотипы» для получения высшего профессионального образования с присвоением выпускникам вузов профессиональной квалификации не может быть успешной [1,2]. Вместе с тем, накопленный опыт реформирования высшей школы страны не закрывает возможность построения отечественной многоуровневой системы профессионального высшего образования в современных условиях [3].

В докладе детально рассмотрены проблемы обновления отечественного высшего профессионального образования, их соответствие современному общественному развитию. При реформировании высшей школы страны ключевыми остаются вопросы, - в каком социальном, экономическом и технологическом обществе предстоит жить и работать человеку, получающему профессиональное образование любого уровня? В ходе реформы системы высшего образования происходит подмена системообразующих образовательных понятий. Так, вместо структурных понятий, таких как бакалавриат, магистратура, специалитет вводятся структурно-содержательные понятия; базовое, специальное, профессиональное образование, что затрудняет понимание значимости ожидаемых результатов проводимой реформы высшего образования. Отсутствие научного обоснования принимаемых решений, обоснованных ответов на перечисленные ключевые вопросы ведет к появлению внутренних противоречий в обновленной системе образования, снижает коэффициент полезного действия реформенных преобразований.

Список литературы

[1] Сенашенко В. Многоуровневая структура: проблемы совершенствования Высшее образование в России. 2002. № 2. С. 28-36.
[2] Сенашенко В.С. О проблемах и трудностях становления бакалавриата в структуре высшего профессионального образования России Высшее образование в России. 2011. № 12. С. 77-84.
[3] Сенашенко В.С., Макарова А.А. Образовательные гибриды в высшем образовании России // Высшее образование в России. 2018. Т. 27. No 8-9. С. 24-42.

Современное школьное математическое образование в России

Е. Л. Ситкин*
ГБОУ школа №1501

В докладе будут обозначены основные трудности обучения детей в средней общеобразовательной школе. Главная составляющая низкого показателя знаний современных школьников. Краткий обзор программы и задач ЕГЭ по математике. Перечневые олимпиады школьников как альтернатива ЕГЭ. Личный опыт докладчика по организации математических классов на площадке школы №1501.

Представления интегральных операторов Бушмана–Эрдейи в виде степенных рядов

С. М. Ситник*
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

А. М. Кудоси
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

Операторы Бушмана-Эрдейи возникли как интегральные операторы со специальными функциями Лежандра в ядрах, первоначально рассматривались вопросы их ограниченности в классических пространствах функций и приложения к интегральным и дифференциальным уравнениям [1]. Затем С.М. Ситником была установлена важная роль операторов Бушмана-Эрдейи в теории операторов преобразования для сингулярных дифференциальных операторов Бесселя [2, 3], подробное изучение этих операторов и их многочисленных приложений было продолжено затем в [4–6] и ряде других работ (см. указанные ссылки).

Мы рассматриваем представления операторов Бушмана-Эрдейи на аналитических вблизи нуля функциях в виде степенных рядов

$$Af = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, f_k\, x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, x^k. \tag{1}$$

Коэффициенты рядов a_k представляются в виде отношения гамма-функций, поэтому введённые операторы (1) относятся к известному классу операторов Гельфонда–Леонтьева, см. [1].

Получены результаты о действии указанных операторов в пространствах аналитических функций, теоремы искажения, изучены свойства (1) как операторов преобразования, рассмотрены некоторые приложения к решению дифференциальных уравнений с сингулярными операторами Бесселя.

Список литературы

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

[2] Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости. Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР. Владивосток, 1990, 44 с.

[3] Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи, *Доклады Академии Наук СССР*, **320**, № 6, 1326–1330 (1991).

[4] Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. *Современная математика. Фундаментальные направления.* **64**, № 2, 211–426 (2018).

[5] Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019.

[6] Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press, 2020.

О гладкости собственных функций дифференциально–разностного оператора второго порядка

А. Л. Скубачевский*
Российский университет дружбы народов им. П.Лумумбы, Москва, Россия

Р. Ю. Воротников
Российский университет дружбы народов им. П.Лумумбы, Москва, Россия

Известно, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально–разностных уравнений нейтрального типа на конечном интервале $(0, d)$ может нарушаться внутри интервала и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах [1]. Однако, для собственных функций дифференциально–разностных операторов вопрос о гладкости до недавнего времени оставался открытым. В настоящем докладе будут получены необходимые и достаточные условия того, что обобщенные собственные функции дифференциально–разностного оператора из пространства Соболева $\mathring{W}_2^1(0, d)$ принадлежат пространству $W_2^2(0, d)$. Построен пример дифференциально–разностного оператора, имеющего счетное множество обобщенных собственных функций из $\mathring{W}_2^1(0, d) \cap W_2^2(0, d)$ и счетное множество обобщенных собственных функций из $\mathring{W}_2^1(0, d) \setminus W_2^2(0, d)$.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение N 075-15-2022-1115).

Список литературы

[1] Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

[2] Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // УМН, 2016, **71**:5(431), 3–112.

Интерпретация и адаптация сложных систем и знаний как средство формирования математической грамотности школьников

Е. И. Смирнов*
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Ярославль, Россия

С. А. Тихомиров
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Ярославль, Россия

В. С. Абатурова
Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия

Г. Ю. Худякова
Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны, Ярославль, Россия

Особенности и необходимость современного развития математического образования показывают, что одним из эффективных путей решения образовательных проблем может стать разработка и реализация синергетической парадигмы обучения математике в школе на основе освоения сложных систем и знаний (современных достижений в науке). Это потребует создания инновационного комплекса педагогических, информационных и организационных условий в контексте симбиоза научно-технократической и гуманитарной парадигм (В.Г. Буданов, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий [1], В.С. Секованов, Е.И. Смирнов [2] и др.) в самоорганизации личности в исследовании «проблемных зон». В контексте формирования проектной и исследовательской деятельности школьников такая технология создает условия для повышения эффективности математического образования, симбиоза методов математического и компьютерного моделирования и развития личности (в том числе, математической грамотности школьников). Выявлены содержание, условия и технология создания информационной насыщенности мотивационного поля учения, множественности постановки целей и поиска бифуркационных переходов в математической деятельности, флуктуационного разнообразия параметризации и интеграции математических, информационных, естественнонаучных и гуманитарных знаний в построении математических результатов в форме аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных преобразований (в том числе, использование возможностей использования нейронных сетей и интеллектуальных систем). Более того, усиливается диалог культур и сетевое взаимодействие на единых информационных платформах исследовательской деятельности с учетом стохастичности процессов и обобщенности результатов, постановки эксперимента в математике и проявления синергетических эффектов развития личности в условиях продвижения к пониманию сущности математических объектов и процедур. Появились возможности управления школьным математическим образованием с проявлением синергетических эффектов и наметились перспективы адекватного ответа на современные вызовы и противоречия в математическом образовании, отвечающие потребностям личностного развития и математико-информационной компетентности каждого обучающегося.

Список литературы

[1] Malinetsky G.G., Potapov A.B., Podlasov A.V. Nonlinear dynamics: approaches, results, hopes, *Moscow: URSS Publishers* (2006).

[2] Smirnov E.I., Skornyakova A.Yu., Tikhomirov S.A. Case tests as a tool for identifying of teacher's professional deficits in the interpretation of complex knowledge, *Perspectives of Science and Education*, **58(4)**, 557–577 (2022).

К теории нелокальных краевых задач для эллиптических систем на плоскости

А. П. Солдатов*

ФИЦ "ИУ РАН"

Обсуждается общая постановка краевой задачи со сдвигом для кусочно аналитической функции в открытых множествах с кусочно- ляпуновской границей (вообще говоря, некомпактной). Рассмотрения ведутся в семействе весовых пространств Гелльдера со степенным поведением в особых точках кривой [1]. Дается достаточное условие фредгольмовости задачи в терминах ее принадлежности к так называемому нормальному типу и обратимости концевого символа. Данной постановкой, в частности, охватывается нелокальная задача Римана, предложенная в его знаменитой докторской диссертации [2]. Эти результаты распространяются на эллиптические системы первого порядка, которые затем применены к эллиптическим системам второго порядка. Как следствие, приведен пример нелокальной задачи типа Карлемана, корректной для любых эллиптических систем второго порядка [3] (факт, не имеющих места для локальных эллиптических краевых задач).

Список литературы

[1] Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи, Современная математика. Фундаментальные направления, 2017, Т. 63, С. 1-189.

[2] Риман Б. Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948.

[3] Солдатов А.П. О задаче типа Карлемана для эллиптических систем, Дифференц. уравн. 1992. Т.28, No.1, С.143-151.

Численное решение системы уравнений реакции-диффузии для моделирования динамики планктон-кислород

П. С. Сурнин*
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

М. А. Шишленин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Динамика океана оказывает сильное влияние на глобальное изменение климата и на состав атмосферы. В частности, подсчитано, что около 70% атмосферного кислорода вырабатывается в океанах благодаря фотосинтетической активности фитопланктона. Однако скорость выработки кислорода зависит от температуры воды и, следовательно, может быть подвержена влиянию глобального изменения климата.

В докладе рассмотрена математическая модель взаимосвязанной динамики планктона и кислорода, которая описана с помощью уравнений реакции-диффузии [1].

Основная цель исследования – сравнить различные методы решения системы с частными производными: метод, основанный на физически обоснованных нейронных сетях, и разностные схемы.

Список литературы

[1] Sekerci, Yadigar & Petrovskii, Sergei. (2015). Mathematical Modelling of Plankton-Oxygen Dynamics Under the Climate Change. Bulletin of mathematical biology. 77. 10.1007/s11538-015-0126-0.

Поток нормализации

Д. В. Трещев*
МИАН им. В.А. Стеклова

Процесс нормализации в теории нормальных форм традиционно происходит пошагово: нежелательные члены (в векторном поле, функции Гамильтона и т.п.) удаляются поочередно степень за степенью. Я укажу дифференциальное уравнение в пространстве всех гамильтонианов с особой точкой в начале координат, вдоль решений которого функции Гамильтона движутся к своим нормальным формам. Сдвиги вдоль потока этого уравнения отвечают каноническим преобразованиям координат. Итак, речь идет о непрерывной процедуре нормализации. Формальный аспект теории не вызывает трудностей. Аналитический аспект и вопросы сходимости рядов, как всегда, нетривиальны. В этом направлении сделаны лишь первые шаги.

Математическое и компьютерное моделирование в образовательном процессе экономистов

Е. Н. Трофимец*
Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России

Владение современными методами математического и компьютерного моделирования является ключевой составляющей для будущих экономистов. Перед преподавателями математических дисциплин в условиях цифровой трансформации образования одной из значимых задач в образовательных организациях высшего образования стоят задачи: научить умению пользоваться математическим аппаратом при решении практических и профессионально-ориентированных экономических задач (ПОЭЗ); использовать математические пакеты при исследовании и анализе ПОЭЗ [1, 2].

В Санкт-Петербургском университете ГПС МЧС России на кафедре высшей математики и системного моделирования сложных процессов разработана методика проведения занятий по прикладным математическим дисциплинам (Основы финансовых вычислений, Основы HR-аналитики, Эконометрика, Статистика, Методы принятия управленческих решений) для обучающихся на экономических специальностях и касается двух основных этапов изучения математических методов с использованием цифровых технологий.

На первом этапе изучается математический аппарат, который является основой для моделирования экономических процессов и явлений.

На втором этапе рассматриваются прикладные аспекты применения математических методов для решения ПОЭЗ. В качестве инструментальных сред для компьютерного моделирования используются табличный процессор MS Excel и математический пакет Mathcad.

Математическое и компьютерное моделирование рассматривается на примере ПОЭЗ "Риск проекта". Разбирается математическая модель ПОЭЗ "Риск проекта", показан переход от математической модели к компьютерной, проведено исследование различных практических ситуаций на компьютерной модели большой размерности, даны рекомендации к использованию представленной модели "Риск проекта".

Список литературы

[1] Попова Н.Н., Истомин Л.Ф. Компьютеризация решения экономических оптимизационных многокритериальных задач: Вестник Луганского государственного университета имени Владимира Даля, №4(46), 180-185 – Луганск, 2021.

[2] Рачек С.В., Буторина Е.С. Математическое моделирование экономических процессов как средство формирования профессиональной компетентности: Материалы международной научно-практической конференции "Молодежь Сибири – науке России", Т. II, 73-75 – Красноярск, 2021.

Формула следа Гельфанда-Левитана для возмущения оператора Лапласа на квадрате

З. Ю. Фазуллин*
Уфимский университет науки и технологий

Начало теории регуляризованных следов операторов с дискретным спектром было положено в работе И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана (1953 г.), где доказано тождество для собственных чисел задачи Дирихле одномерного оператора Штурма-Лиувилля, впоследствии получивший название формулы следа Гельфанда-Левитана. Для дифференциальных операторов в частных производных доказательство (получение) аналога формулы следа Гельфанда-Левитана оказалось трудной задачей. Получены формулы следов для возмущений лишь трех модельных двумерных операторов математической физики. Конкретный «спортивный» интерес давно вызывает (задача Гельфанда–Садовничего) формула первого регуляризованного следа для оператора Лапласа на квадрате. Настоящая работа продолжает исследование работы [1].

Пусть L_0 оператор Лапласа в пространстве $L_2(K)$ задачи Дирихле на квадрате $K = \{(x,y): \ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$. Хорошо известно, что $\sigma(L_0) = \{\lambda_{km} = k^2 + m^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}\}$. Пронумеруем собственные числа λ_{km} в порядке роста без учета их кратностей: $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, $n \geqslant 1$, $\nu_n = dimRanP_n$, P_n- ортогональный проектор, соответствующий собственному числу λ_n. Пусть $L = L_0 + V$, где $V-$ оператор умножения на вещественную ограниченную измеримую функцию в $L_2(K)$, $\sigma(L) = \left\{\mu_i^{(n)}, i = \overline{1,\nu_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, причем верхний индекс нумерации собственных чисел $\mu_i^{(n)}$ соответствует нумерации λ_n, и $\mu_i^{(n)} \leqslant \mu_{i+1}^{(n)}$, $\mu_{\nu_n}^{(n)} \leqslant \mu_1^{(n+1)}$.

Теорема. *Пусть $v(x,y) \in W_2^4(K)$ и $\|V\| < \frac{1}{2}$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{\nu_n} \left(\lambda_n - \mu_i^{(n)} \right) + tr\,(P_n V) \right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left[\int_K v^2(x,y)dxdy - \left(\frac{1}{\pi} \int_K v(x,y)dxdy \right)^2 \right].$$

Список литературы

[1] Фазуллин З.Ю. Формула следа для ограниченного возмущения оператора Лапласа на квадрате // Дифф. уравнения 2022. Т. 58. №12. С. 1712-1715.

Студенческий НИР в комплексном анализе

Н. С. Чекалкин*
Российский технологический университет МИРЭА, Москва, Россия

Одной из проблем привлечения студентов технических вузов к научно- исследовательской работе в области математики является не только отсутствие у них фундаментального математического образования, но и большой дефицит тем, для работы в которых достаточно освоить стандартные дисциплины высшей математики технического вуза. Предлагается пример такой темы в комплексном анализе, а именно распределение значений рациональных функций. Истоки этой темы лежат в основной теореме алгебры о том, что многочлен степени n принимает любое значение A п раз с учетом кратности. Логично рассмотреть задачу о том, сколько раз принимается значение без учета кратности. Действительно, многочлены или в общем виде рациональные функции $f(z) = p_n(z)/q_m(z)$ степени $t = max(n, m)$ принимают все значения t раз и без учета кратности, то есть считая только геометрически различные корни уравнения $f(z) = 0$, но за исключением некоторых значений, называемых дефектными ($p_n(z), q_m(z)$ – многочлены степени n и m соответственно). Здесь возникают различные задачи на оценки дефектов, приводящие к теоремам типа теоремы Ферма и гипотезы ABC только не для чисел, а для рациональных функций.

Рассмотрим подробней и введем понятие дефекта. Если рациональная функция $f(z) = p_n(z)/q_m(z), p_n(z) - q_m(z) = (z - a)^k q(z), k > 0$, где $q(a)$ не ноль, то будем говорить, что значение принимается в точке $z = a$ с кратностью k, а точку a точкой кратности k. Если $q_m(z) = (z - a)^k q_1(z), k > 0$, где $q_1(a)$ не ноль, то будем говорить, что значение $A = \infty$ принимается в точке a с кратностью k, соответственно точка a также кратности k.

Определение 1. Величину $def(f, a) = (k - 1)/t$ назовём дефектом рациональной функции $f(z)$ в точке a.

Дефект имеет смысл учитывать, если кратность точки a больше 1. В остальных случаях он равен 0. Доказано ([2]), что сумма дефектов всех точек всегда меньше 2 и улучшить эту оценку нельзя. Сформулируем теорему.

Определение 2. Считающей функцией значения A называется функция $\overline{N_f}(A)$ равная числу различных точек, в которых f принимает значение A.

Эта считающая функция учитывает только геометрически различные корни уравнения $f(z) = A$.

Теорема. Для любого набора значений $A_1, A_2 \dots A_q$ верно неравенство
$\sum_{k=1}^{q} \overline{N_f}(A_k) > (q - 2)t$.

Эта теорема и другие теоремы в данной области влекут много интересных следствий и постановок задач для студентов.

Список литературы

[1] Чекалкин Н.С. Дефекты многочленов. Сборник докладов конференции ИПТИП. Москва: МИРЭА - Российский технологический университет, 2022. – 619 с. – EDN SPPIVC с 264-267

[2] Чекалкин Н.С. Соотношение дефектов рациональной функции. Доклад на конференции ИПТИП. Москва: МИРЭА - Российский технологический университет, 2023г.

О разрешимости второй начально–краевой задачи для параболического уравнения с Дини–непрерывными коэффициентами

М. Ф. Черепова*
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Россия

И. В. Женякова
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Россия

Рассмотрена вторая начально-краевая задача для параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной пространственной нецилиндрической области с негладкой (по временной переменной) боковой границей из класса Дини-Гёльдера. Методом граничных интегральных уравнений установлена разрешимость (в классическом смысле) этой задачи. Получен конструктивный вид решения в виде параболического потенциала простого слоя.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19–11–00033, https://rscf.ru/project/19-11-00033/

Очень короткие арифметические суммы

В. Н. Чубариков*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Настоящее сообщение посвящено асимптотическому распределению арифметических функций по модулю единица. В 1924 - 1928 г.г. И.М.Виноградов использовал анализ Фурье и конечные тригонометрические суммы для асимптотической оценки числа решений уравнения в проблеме Варинга. В 1934 г. он нашел новый мощный метод оценок тригонометрических сумм, который позволил существенно уточнить предыдущие результаты в проблеме Варинга.

Неполные суммы Гаусса. Пусть $\chi(n)$ — неглавный характер Дирихле по простому модулю p, $0 \leqslant x < p$, $1 \leqslant h \leqslant p$, и $N_p\{x : \dots\}$ обозначает количество целых чисел x, удовлетворяющих условиям, указанным в скобках. Рассмотрим сумму Гаусса $G_h(x)$ вида

$$G_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(x) e^{2\pi i \frac{an}{p}}.$$

Если $h = p$, то имеем полную сумму Гаусса, и $|G_p(x)| = \sqrt{p}$. При $0 < h < p$ справедлива оценка $|G_h(x)| < \sqrt{p}\log p$. Э. К. Жимбо (2001) доказал следующее утверждение. *Пусть* $\xi = \xi(h,p) = \left|\frac{G_h(x)}{\sqrt{h}}\right|^2$ *— очень короткая нормированная сумма Гаусса. Тогда имеем*

$$\frac{1}{p} N_p\{x : \xi < y\} \to 1 - e^{-y} \quad \text{при} \quad p \to \infty$$

для любого фиксированного вещественного числа y.

Рациональные тригонометрические суммы по числам Фибоначчи Члены последовательности $\{f_n\}$, где $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ при $n \geqslant 1$, называются числами Фибоначчи. Пусть $m > 1$ — натуральное число, $\lambda > 0$ — постоянная, и пусть $N_m\{n : \dots\}$ обозначает количество целых чисел n, удовлетворяющих условиям, которые указаны в скобках. Пусть, далее,

$$S_m(h;a) = \sum_{n=0}^{h-1} e^{2\pi i \frac{af_n}{m}}$$

очень короткая тригонометрическая сумма, и

$$N_m(\lambda) = N_m\{a : 0 \leqslant a \leqslant m-1,\ |S_m(h;a)| < \sqrt{\lambda h}\}.$$

Автор и Р. Н. Бояринов получили следующий результат. *Пусть $m \to \infty$ и h как функция от m удовлетворяет условиям $h = h(m) \to \infty$ и $h \leqslant 0.5 \log_\tau m$, где $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тогда справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{N_m(\lambda)}{\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

для любого фиксированного вещественного $\lambda > 0$.

Обратные задачи в моделях распределения ресурсов

А. А. Шананин*
141701 Долгопрудный, М.О., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

Основным трендом в мировой экономике, начиная с последней четверти XX века, был процесс глобализации, в результате которого на внутренних рынках развивающихся стран отечественные товары стали конкурировать с импортными аналогами. Используемые в прикладных исследованиях модели межотраслевого баланса В. В. Леонтьева основывались на эмпирических гипотезах о постоянстве структуры потребления конечных товаров и производственных факторов. В условиях глобализации рынков и сопровождавшей её стандартизации товаров существенно выросла их взаимозаменяемость, и гипотезы о постоянстве структуры перестали выполняться. Вследствие этого собираемая и обрабатываемая статистика перестала адекватно отражать экономические процессы, и появились проблемы с идентификацией общепринятых моделей. В докладе обсуждается проблема моделирования замещения производственных факторов и связанные с ней новые задачи интегральные геометрии. Обратные задачи в моделях распределения ресурсов сводятся к анализу условий характеризации обобщённого преобразования Радона, основанных на теоремах Бернштейна о вполне монотонных функциях и сепаратной аналитичности. Анализ проблемы замещения производственных факторов на микроуровне с использованием доступной статистической информации сводится к вопросу о разрешимости проблемы моментов специального вида. В докладе обсуждается связь условий разрешимости проблемы моментов с исследованием преобразований комбинаторных структур.

Список литературы

[1] Hildenbrand W. Short-run production functions based on micro-data; *Econometrica*, **49**, № 5, 1095–1125, 1981.

[2] Шананин А.А. Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем; *ЖВМ и МФ*, **24**, № 12, 1799–1811, 1984.

[3] Шананин А.А. Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем; *ЖВМ и МФ*, **25**, № 1, 53–65, 1985.

[4] Henkin G.M., Shananin A.A. Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions; *Translation of mathematical monographs*, **81**, 189–223, 1990.

[5] Шананин А.А. Исследование обобщённой модели чистой отрасли производства; *Математическое моделирование*, **9**, № 10, 73–82, 1997.

[6] Карзанов А.В., Шананин А.А. О стабильных соответствиях конечных множеств евклидова пространства и их приложениях; *Экономика и математические методы*, **41**, № 2, 111–112, 2005.

[7] Шананин А.А. Обобщённая модель чистой отрасли производства; *Математическое моделирование*, **9**, № 9, 117–127, 1997.

[8] Агальцов А.Д. Теоремы характеризации для обобщённого преобразования Радона; *Функциональный анализ и его приложения*, **49**, № 3, 57–60, 2015.

[9] Agaltsov A.D., Molchanov E.G., Shananin A.A. Inverse problems in models of resource distribution; *Journal of Geometric Analysis*, **28**, № 1, 726–765, 2018.

Задачи небесной механики в выпускных квалификационных работах бакалавров по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

А. В. Шатина*

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

Доклад посвящен рассказу об опыте работы с выпускниками кафедры высшей математики Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА. Одной из базовых работ, на основе которой ставились задачи для ВКР, послужила работа [1], в которой асимптотическим методом разделения движений [2] была получена система уравнений, описывающая поступательно-вращательное движение вязкоупругой планеты и спутника в гравитационном поле неподвижного притягивающего центра. Было проведено исследование приливных деформаций Земли [3] с учетом гравитационных полей Луны и Солнца, изучено влияние лунно-солнечных приливов на движение полюса Земли и изменение угловой скорости ее вращения, получена формула для гравитационного потенциала вязкоупругой планеты [4].

Другой цикл задач основан на исследовании возмущающих факторов, имеющих место в классической задаче двух тел. Для вывода уравнений возмущенного движения использовались канонические переменные Делоне [5]. При изучении орбитального движения спутника в качестве возмущающего фактора рассматривалась нецентральность поля тяготения, вызванная сжатием Земли вдоль оси вращения. Также было проведено исследование по влиянию гравитационного поля Солнца на орбитальное движение Луны относительно Земли.

Список литературы

[1] Вильке В. Г., Шатина А. В. О поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в гравитационном поле притягивающего центра и спутника, *Космические исследования*,**42**, № 1, 95–106 (2004).

[2] Вильке В. Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. — М.: ЛЕНАНД, 2023.

[3] Тихомирова П. П., Шатина А. В., Шерстнев Е. В. Приливные деформации вязкоупругой планеты, *Известия РАН. Механика твердого тела*, № 6, 131–139 (2018).

[4] Борец А. С., Шатина А. В. Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом диссипации; в сб.: *Фундаментальные, поисковые, прикладные исследования и инновационные проекты: сборник трудов Национальной научно-практической конференции*, 132–136. — М.: РТУ МИРЭА, 2022.

[5] A. Shatina, A. Cheshkova. Delaunay variables in model problems of celestial mechanics and cosmodynamics; в сб.: *Нанопроектирование, технология, компьютерное моделирование – NDTCS-2021: тез. докл. XIX Междунар. симпозиума*, 102–104. — Минск: БГУИР, 2021.

Математика как критерий нравственности

А. М. Шелехов*

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия

Следуя гуманистической традиции, Лев Дмитриевич Кудрявцев считал нравственное воспитание неотъемлемой частью образования. В своих книгах см., например, [1] и [2], он неоднократно подчеркивает, что игнорирование нравственной составляющей образования – одна из причин низкого профессионального уровня выпускников вузов. В [2], стр. 176, он пишет: «Ярким примером непрофессионализма выпускников многих наших высших учебных заведений являются непредвиденные последствия проводимых у нас в стране политических и экономических реформ, . . . , чего бы они не касались: промышленности, сельского хозяйства, экономики, финансов, политики. . . ». В моем докладе будет рассказано об одном таком негативном последствии в сфере коммунальных отношений (может не самым тяжелом, но касающимся значительной части населения). Наш пример показывает, что математика (как образовательная дисциплина) не только воспитывает нравственность, но может служить и критерием нравственности.

Список литературы

[1] Кудряцев Л. Д. Образование и нравственность. М., ПАИМС, 1994, 95 с
[2] Кудряцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее преподавании. Избранные труды, т. 3. Москва, Физматлит, 2008

О построении совершенного функционального пополнения одного функционального класса

Э. Л. Шишкина*
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

А. Л. Джабраилов
Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова, Грозный, Россия

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и открытый ортант

$$\mathbb{R}^n_+ {=} \{x{=}(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1{>}0,\ldots,x_n{>}0\}$$

Пусть $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ — класс финитных бесконечно дифференцируемых на положительном ортанте $\mathbb{R}^n_+$ функций, допускающих четное продолжение на отрицательные значения по каждой из переменных. Функциональный класс $\mathcal{F}^\gamma_\alpha$ получен введением в $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ (α,γ)-нормы $|u|_{\alpha,\gamma}$ вида

$$|u|_{\alpha,\gamma}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(1+|\xi|^{4\alpha})|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)|^2\xi^\gamma d\xi\right)^{1/2},$$

где $\xi^\gamma=\prod\limits_{i=1}^n\xi_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i>0$, $i{=}1,...,n$, $\mathbf{F}_\gamma$ — многомерное преобразование Ханкеля:

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx,\qquad \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i),$$

$j_\nu(t)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\,J_\nu(t)$, J_ν — функция Бесселя первого рода.

Определим обобщенный потенциал Бесселя соотношением (см. [1])

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi)(x)=(G^\gamma_\alpha(x)*\varphi(x))_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G^\gamma_\alpha(y)(\,^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy, \qquad (1)$$

где $G^\gamma_\alpha(x)=\dfrac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|)$ — обобщенное ядро Бесселя.

Рассматривается вопрос о совершенном функциональном пополнении нормированного функционального класса $\mathcal{F}^\gamma_\alpha$. Показано, что при $\alpha>0$ исключительным классом совершенного пополнения является класс множеств, на которых обобщенный потенциал Бесселя $\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi$ функции $\varphi \in L_2^\gamma$, может быть неопределён. Функции в насыщенном совершенном пополнении равны такому потенциалу, за исключением исключительного множества.

Список литературы

[1] Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. Об обобщенных потенциалах Бесселя и совершенных пополнениях, *Вестник Санкт-Петербургского университета*, **10**, № 68, 200–211 (2023).

Обратные задачи электроакустической медицинской томографии: численные методы и глубокое обучение

М. А. Шишленин*
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский государственный университет

Н. С. Новиков
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский государственный университет

С. И. Кабанихин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский государственный университет

Разработана математическая модель электроакустической томографии на основе законов сохранения. Исследована совмещенная постановка обратной задачи для системы уравнений акустики и электродинамики по определению акустических и электромагнитных параметров среды по измерениям, сделанных на границе исследуемой области [1]. Разработанная математическая модель позволяет реализовать более реалистичную модель с физической точки зрения и контролировать сохранение основных инвариантов при решении прямых и обратных задач.

Разработан метод решения коэффициентной обратной задачи восстановления параметров среды по дополнительной информации о решении прямой задачи, измеряемой на границе исследуемой среды [2]. Обратная задача сведена к задаче оптимизации, которая решается методом градиентного спуска [3]. Приведены результаты численных расчетов. Проведен сравнительный анализ двух подходов для вычисления градиента функционала [4]. Применена технология глубокого обучения для восстановления параметров среды.

Работа выполнена при поддержке проекта РНФ 19-11-00154.

Список литературы

[1] S.I. Kabanikhin, D.V. Klyuchinskiy, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin, Numerics of acoustical 2D tomography based on the conservation laws, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 28:2, (2020), 287-297.

[2] D.V. Klyuchinskiy, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin, Recovering Density and Speed of Sound Coefficients in the 2D Hyperbolic System of Acoustic Equations of the First Order by a Finite Number of Observations, Mathematics, 9:2, (2021), 199.

[3] D.V. Klyuchinskiy, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin, Modification of gradient descent method for solving coefficient inverse problem for acoustics equations, Computation, 8:3, (2020), 73.

[4] D.V. Klyuchinskiy, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin.(2021) CPU-time and RAM memory optimization for solving dynamic inverse problems using gradient-based approach. Journal of Computational Physics. Vol. 439, 110374.

Contents

E. A. Baderko, K. V. Semenov
A Regular Fundamental Solution To A Parabolic Equation With Dini-Continuous Coefficients . . . 5

E. I. Berezhnoi
About multipliers for global Morrey spaces . . . 6

V. I. Burenkov
About the scientific heritage of L.D. Kudryavtsev . . . 7

G. A. Chechkin
The Boyarsky–Meyers Inequality for Elliptic Equations . . . 8

A. L. Gladkov
Initial boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with memory under nonlocal boundary conditio . . . 9

S. M. Grudsky, A. N. Karapetyants, A. R. Mirotin
On a class of Hausdorff-Zhu operator . . . 10

V. S. Guliyev
Characterization of BMO and Lipschitz functions via the commutators of fractional maximal function in Orlicz spaces on stratified Lie groups . . . 10

S. V. Konyagin
On the norm of the Riesz projection from L^∞ to L^p . . . 11

M. M. Lavrentiev, An. G. Marchuk, K. K. Oblaukhov, M. Yu. Shadrin
Dependence of the computed wave parameters on the grid resolution . . . 12

R. G. Mukharlyamov
Construction of the dynamics equations of a given structure with program constraints equations . . . 13

V. E. Nazaikinskii
Efficient asymptotic solutions of equations with localized right-hand sides . 14

E. D. Nursultanov
Integral operators in Morrey spaces . . . 15

D. M. Polyakov
Spectral properties of fourth-order differential operators with eigenvalue parameter dependent boundary conditions . . . 15

O. S. Rozanova
Non-strictly hyperbolic systems: regularization issues . . . 16

V. Zh. Sakbaev
Invariant measures of flows in a Hilbert space and Hamiltonian random walks 17

A. Yu. Savin, K. N. Zhuikov
η-invariants of elliptic boundary value problems . . . 18

A. L. Semenov
The relevance of L. D. Kudryavtsev's ideas for education in the 21st century 19

A. A. Shkalikov
Operators, Generated by the First Order Differential Systems . . . 20

O. V. Solonukha
On existence of solutions to elliptic differential difference equations with essentially nonlinear operators having a semibounded variation . . . 20

E. Turilova
Spectral Order in Operator Algebras Theory . . . 21

Kh. G. Umarov
Cauchy Problem for the Equation of Longitudinal Vibrations of a Thick Rod with Allowance for Deformation Effects in Transverse Direction 22
V. B. Vasilyev
Model pseudo-differential equations, canonical domains and discrete approximations 23
M. B. Visitaeva
The multilingual teaching of mathematics 24
R. S. Yulmukhametov, K. P. Isaev, A. V. Lutsenko
On a sufficient condition for the existence of unconditional bases of reproducing kernels in Fock type spaces with nonradial weights 24
Н. Ф. Абузярова
Инвариантные подпространства в неквазианалитических пространствах на интервале 25
О. Г. Авсянкин
Проекционный метод для интегральных операторов с однородными и биоднородными ядрами 26
А. А. Амосов
О предельном поведении решений уравнения переноса излучения в системе полупрозрачных тел при стремлении коэффициентов поглощения и рассеяния к бесконечности 28
В. И. Антонов
Математическая подготовка инженеров в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого 29
Д. Е. Апушкинская
Экстремали Больцмана и эргодическая проблема по Пуанкаре и Гиббсу 30
С. Н. Асхабов
Метод весовых метрик в теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений 30
С. И. Безродных
Гипергеометрические функции многих переменных и конформное отображение многоугольников 31
В. И. Богачев
Продолжение соболевских функций на бесконечномерных пространствах 32
А. В. Боровских
Содержание математического образования: математика для не-математиков 33
Г. Г. Брайчев
Задача Сильвестра и теоремы единственности в классах целых функций 34
А. Б. Будак
О корректности обозначений в несобственных интегралах и рядах 35
С. А. Будочкина
О симметриях уравнений и функционалов 36
П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова
Трансзвуковые асимптотические уравнения в газовой динамике и их приложения 37
С. К. Водопьянов
Функциональный подход к задачам геометрической теории функций . . 38

А. С. Гаспарян
Неравенства в пространствах с p-скалярным произведением 39
В. И. Гишларкаев, М. В. Алиева
Метод преобразования Фурье для нелинейных уравнений в частных производных 40
С. Н. Дворяткина, А. А. Дякина, С. В. Щербатых
Популяризация математических знаний средствами интегративных медиаобразовательных технологий: от Ломоносова — к Кудрявцеву . . . 41
Г. В. Демиденко
Весовые соболевские пространства и псевдогиперболические уравнения 43
С. С. Демидов
Н. Н. Лузин и проблема континуума 44
Б. К. Дураков, О. В. Кравцова, В. Р. Майер, Н. Д. Подуфалов
О проблеме выбора критериев оценки эффективности содержания школьного математического образования и методик его преподавания . 45
А. М. Елизаров
Вариационные обратные краевые задачи: теория и приложения 46
Н. В. Зайцева
Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве 47
В. А. Зернов
Лев Дмитриевич Кудрявцев глазами его учеников 48
Г. Е. Иванов
Лев Дмитриевич Кудрявцев в МФТИ 49
Е. И. Исмагилова, Т. А. Кузнецова
О подготовке инженерных кадров в системе вуз-базовое предприятие . . 49
С. А. Исхоков
Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве 50
С. И. Кабанихин
Теория обратных некорректных задач и машинное обучение 51
Г. Г. Казарян
Многослойно - вырождающиеся гипоэллиптические операторы (многочлены) 52
В. Л. Камынин
Об обратных задачах для вырождающихся параболических уравнений со многими независимыми переменными 53
Л. Р. Ким-Тян
"Перевернутая" лекция как одна из форм активизации обучения математике в условиях цифровизации высшего образования 53
Л. М. Кожевникова
Существование ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в неограниченных областях 55
А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков
Метрика Хаусдорфа в задаче Дирихле для уравнения Лапласа 56
Н. Л. Кудрявцев
Об основах теории приближений на базе пространств l_p 57

Е. Б. Ланеев
Об устойчивом решении одной линейной обратной задачи потенциала . 57
В. Б. Левенштам
Усреднение высокочастотных квазилинейных гиперболических систем . 58
Г. Д. Лёвшина
О развитии мотивации и повышения интереса студентов технических вузов к изучению математики с помощью математических олимпиад и конкурсов 59
Н. И. Лобанова, Н. Н. Яремко
Изучение старшими школьниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования: проблемы и пути их решения . . 61
М. М. Маламуд, Д. В. Лиманский
О критериях слабой коэрцитивности для систем минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева 62
М. А. Мкртчян
Государственные общеобразовательные стандарты и проблемы их реализации 63
И. Х. Мусин
Весовая полиномиальная аппроксимация в $\mathbb{R}^n$ 63
Н. Н. Нефедов
Контрастные структуры в системах тихоновского типа 64
Л. В. Новикова
О приложении к некоторым задачам механики в курсе ТФКП 65
Р. Ойнаров, А. Калыбай
Весовое дифференциальное неравенство высокого порядка и спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов 66
Б. П. Осиленкер
Формула следа для полиномов Соболева 66
С. Е. Пастухова
Улучшенные операторные оценки в периодическом усреднении 67
М. В. Половинкина, И. П. Половинкин
О восстановлении функций в весовых пространствах по неполным данным 69
А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков
Оценка снизу минимума модуля целых функций нулевого рода 70
А. И. Прилепко
Прогноз – управление и обратные задачи для нестационарных уравнений первого порядка с пространственным наблюдением 71
А. А. Пунтус
Воспоминания о талантливом учёном, научном исследователе математического образования профессоре Л.Д. Кудрявцеве 71
Н. А. Раутиан
Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах 72
С. А. Розанова, А. Ю. Потепалова, И. П. Драгилева
Исследование проблемы качества математического образования студентов технических вузов в условиях пандемии 73
С. А. Розанова, А. Г. Ягола
Лев Дмитриевич Кудрявцев и Научно-методический совет по математике Минобрнауки России 74

И. Х. Сабитов
Бесконечно малые изгибания скольжения торообразных поверхностей вращения . . . 75
В. М. Савчин
Об интегральных инвариантах некоторых бесконечномерных систем . . 76
В. С. Сенашенко
Проблемы обновления высшего профессионального образования России на современном этапе общественного развития . . . 77
Е. Л. Ситкин
Современное школьное математическое образование в России . . . 78
С. М. Ситник, А. М. Кудоси
Представления интегральных операторов Бушмана–Эрдейи в виде степенных рядов . . . 79
А. Л. Скубачевский, Р. Ю. Воротников
О гладкости собственных функций дифференциально–разностного оператора второго порядка . . . 80
Е. И. Смирнов, С. А. Тихомиров, В. С. Абатурова, Г. Ю. Худякова
Интерпретация и адаптация сложных систем и знаний как средство формирования математической грамотности школьников . . . 81
А. П. Солдатов
К теории нелокальных краевых задач для эллиптических систем на плоскости . . . 82
П. С. Сурнин, М. А. Шишленин
Численное решение системы уравнений реакции-диффузии для моделирования динамики планктон-кислород . . . 83
Д. В. Трещев
Поток нормализации . . . 83
Е. Н. Трофимец
Математическое и компьютерное моделирование в образовательном процессе экономистов . . . 84
З. Ю. Фазуллин
Формула следа Гельфанда-Левитана для возмущения оператора Лапласа на квадрате . . . 85
Н. С. Чекалкин
Студенческий НИР в комплексном анализе . . . 86
М. Ф. Черепова, И. В. Женякова
О разрешимости второй начально–краевой задачи для параболического уравнения с Дини–непрерывными коэффициентами . . . 87
В. Н. Чубариков
Очень короткие арифметические суммы . . . 87
А. А. Шананин
Обратные задачи в моделях распределения ресурсов . . . 88
А. В. Шатина
Задачи небесной механики в выпускных квалификационных работах бакалавров по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» . . . 89
А. М. Шелехов
Математика как критерий нравственности . . . 90

Э. Л. Шишкина, А. Л. Джабраилов
О построении совершенного функционального пополнения одного функционального класса 91
М. А. Шишленин, Н. С. Новиков, С. И. Кабанихин
Обратные задачи электроакустической медицинской томографии: численные методы и глубокое обучение 92