II Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве

Секция «Алгебраическая геометрия и теория чисел»

19–22 сентября 2023

Вологда, Вологодский государственный университет

И. В. Аржанцев (ФКН НИУ ВШЭ). Гибкие многообразия, образы аффинного пространства и эллиптичность по Громову

Мы определим гибкие аффинные алгебраические многообразия, опишем их основные свойства и покажем, что многие многообразия обладают свойством гибкости. Группа специальных автоморфизмов действует на множестве гладких точек гибкого аффинного многообразия бесконечно транзитивно, то есть любой конечный набор гладких точек можно перевести специальным автоморфизмов в любой конечный набор гладких точек той же мощности. Используя гибкость, можно доказать, что все невырожденные торические многообразия, все однородные пространства полупростых групп и все многообразия, покрытые аффинными пространствами, допускают сюръективный морфизм из аффинного пространства. Более того, применяя свойство эллиптичности, введенное Михаилом Громовым в 1989 году, мы покажем, что полное алгебраическое многообразие X является образом аффинного пространства тогда и только тогда, когда многообразие X унирационально. Последний результат получен в совместной работе с Михаилом Зайденбергом и Шулимом Калиманом.

Работа поддержана грантом РНФ-DST 22-41-02019.

А. В. Викулова (НИУ ВШЭ, МИАН). Максимальные группы автоморфизмов кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2

В этом докладе мы обсудим максимальные по порядку группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2. Для каждого такого конечного поля мы предъявим явно максимальную группу автоморфизмов. Более того, мы покажем, что гладкая кубическая поверхность с максимальной группой автоморфизмов уникальна, то есть единственна с точностью до изоморфизма.

В. А. Горская (НИУ ВШЭ). О плоских вещественных кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубику

Рассматривается относящаяся по тематике к первой части 16-й проблемы Гильберта задача изотопической классификации плоских вещественных алгебраических кривых степени 7, распадающихся в произведение кривой степени 3 (кубики) и двух кривых степени 2 (коник) при некоторых условиях максимальности и общего положения. Перечислены логически возможные расположения — их оказалось 58 — ветвей кривых рассматриваемого класса. Доказано, что 10 из них реализуются кривыми степени 7, а 36 не могут быть реализованы такими кривыми.

Н. Н. Добровольский (ТГПУ). Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы

В докладе рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа: теория гиперболической дзета-функции Гурвица, дзета-функции моноидов натуральных чисел, классы периодических функций, порожденных моноидами натуральных чисел, и алгебры рядов Дирихле моноидов натуральных чисел.

Ю. И. Зайцева (ФКН НИУ ВШЭ). Аффинные однородные многообразия и надстройки

Алгебраическое многообразие X называется однородным пространством, если группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ действует на X транзитивно, и однородным пространством, если существует транзитивное действие алгебраической группы на X. Мы доказываем критерий гладкости надстройки для построения широкого класса однородных многообразий. В качестве приложения мы строим аффинные надстройки произвольной размерности, которые являются однородными многообразиями, но не однородными пространствами, и даём критерии принадлежности поверхностей Данилевского множеству однородных многообразий и множеству однородных пространств. Доклад основан на совместной работе с И. В. Аржанцевым, работа поддержана Санкт-Петербургским международным математическим институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение N 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

М. А. Королёв (МИАН). Арифметические свойства «обобщённых дробей Фарея»

Классический ряд Фарея Φ_Q порядка $Q \geqslant 1$ — это множество упорядоченных по возрастанию несократимых рациональных дробей a/b с условиями $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant Q$. Геометрическую интерпретацию этого ряда получим, если рассмотрим на координатной плоскости (x, y) половинку квадрата вида $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant Q$. Беря в ней примитивные точки (т.е. точки с целочисленными и взаимно простыми координатами) и проводя к ним отрезки из начала координат, убеждаемся, что угловые коэффициенты полученных отрезков и есть ряд Фарея порядка Q.

Вместо половинки квадрата можно рассмотреть достаточно произвольную область ω, лежащую в секторе $0 \leqslant y \leqslant x$ (не обязательно выпуклую), и «раздувать» её с коэффициентом Q, где $Q \to +\infty$. В раздутой области $Q\omega$ также можно рассмотреть примитивные точки, провести к ним отрезки и упорядочить тангенсы их углов наклона по возрастанию. То, что получится, и есть обобщённый ряд Фарея $\Phi_Q(\omega)$, отвечающий области ω. Если область достаточно «хорошая», полученный таким образом ряд Фарея будет обладать, в частности, «модулярным свойством», присущим классическому ряду Фарея: если $c/d < a/b$ — соседние дроби, то непременно $ab - cd = 1$. В докладе же предполагается рассказать о некоторых других арифметических свойствах, присущих как классическому, так и обобщённому рядам Фарея.

Д. В. Осипов (МИАН). Произведения коциклов и теорема Римана–Роха

Для произвольного коммутативного кольца A рассмотрим группу $\mathcal{G}(A)$, которая есть полупрямое произведение группы обратимых элементов алгебры рядов Лорана $A((t))$ над кольцом A и группы непрерывных автоморфизмов A-алгебры $A((t))$ (на алгебре $A((t))$ есть естественная топология, заданная степенями элемента t, позволяющая говорить о непрерывных автоморфизмах). У группы $\mathcal{G}(A)$ есть естественные центральные расширения при помощи группы обратимых элементов кольца A. Одно центральное расширение строится внутренним образом, как в теории алгебраических групп петель, а другое центральное расширение строится при помощи явно заданных групповых 2-коциклов. Результат состоит в том, что эти два центральных расширения эквивалентны, если A есть коммутативная алгебра над полем рациональных чисел. Этот результат является локальным аналогом относительной теоремы Гротендика–Римана–Роха (для относительной размерности 1 и линейных расслоений).

Н. К. Семёнова (МГУ). Об одной оценке суммы Клоостермана

Неполной суммой Клоостермана называется тригонометрическая сумма вида

$$S(x, m; a, b) = \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu, m)=1}} \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{\nu} + b\nu}{m}\Big), \quad 1 < x < m,$$

где m, a, b — целые числа, а через $\overline{\nu}$ обозначается вычет, обратный к ν по модулю m, то есть $\nu\overline{\nu} \equiv 1 \pmod m$. В начале 1990-х годов А. А. Карацубой был разработан метод, позволяющий получать нетривиальные оценки таких сумм в случае $x < \sqrt{m}$. Основная идея состоит в разбиении переменной суммирования на два множества A и B. Все числа из множества A имеют по крайней мере два простых делителя из специального вида интервалов. Сумма по такому множеству разбивается на двойные суммы, каждую из которых можно оценить с помощью метода А. А. Карацубы и его модификации, принадлежащей Ж. Бургейну и М. З. Гараеву. Все числа из множества B таких делителей не имеют, и соответствующая сумма оценивается тривиально.

В докладе будет рассказано о новой оценке неполной суммы Клоостермана, справедливой для простого модуля $m \leqslant m_0$ и целого a, $(a, m) = 1$, в случае когда длина суммы x удовлетворяет неравенствам

$$\exp(c(\ln m)^{2/3}(\ln\ln m)^{1/3}) \leqslant x \leqslant \sqrt{m},$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная. Новшество состоит в чуть более тонком разбиении на множества A и B. За счет этого получается уточнение оценки, полученной в 2016 году М. А. Королёвым.

А. Л. Смирнов (ПОМИ РАН). Гауссовы кольца

Будет введено понятие гауссового кольца. Планируется рассказ о задачах по классификации гауссовых колец и их возможной связи с гипотезой Римана.

Г. М. Полотовский (НИУ ВШЭ). О топологии вещественных распадающихся кривых степени 8

Обзор результатов о топологической классификации распадающихся алгебраических кривых степени 8, полученных авторами за последние три года. Изучаются взаимные расположения в вещественной проективной плоскости коники и секстики; кубики и квинтики; двух квартик. Каждый раз предполагаются выполненными некоторые условия максимальности и общего положения. Рассматриваемая задача относится к тематике первой части 16-й проблемы Гильберта.

В. М. Поляков (ПОМИ РАН). Векторные расслоения ранга 2 на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$

Хорошо известно, как устроены все векторные расслоения на $\mathbb{P}^1_k$, где k — поле, а именно имеется теорема Гротендика, которая утверждает, что каждое векторное расслоение на проективной прямой над полем изоморфно сумме линейных расслоений (которые имеют вид $\mathcal{O}(n)$), причем слагаемые определены однозначно. Однако для проективной прямой над $\mathbb{Z}$ это уже не так — на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ существуют неразложимые расслоения. В докладе будет рассказано про самые простейшие неразложимые расслоения на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ — с тривиальным общим слоем и подскоками высоты 1. Будет дана их классификация и показана связь с топологией, благодаря которой удастся инвариантным образом определить все параментры из этой классификации. Данную конструкцию можно повторить и в более сложных случаях, что дает нам новый инвариант расслоений.

В. В. Пржиялковский (МИАН, НИУ ВШЭ). Корегулярность

Важной характеристикой многообразий Фано является «сложность» его (плюри)антиканонического дивизора, то есть то, насколько такой дивизор может быть особым на достаточно хорошей модели многообразия. Эта характеристика называется (ко)регулярностью. Она вычислена для подавляющего числа двух- и трехмерных гладких многообразий Фано. Мы расскажем основные конструкции, которые позволили это сделать.

Д. А. Тимашёв (МГУ). Об алгебрах Ли, связанных с вложенными проективными многообразиями

Со всяким невырожденным вложенным проективным многообразием $X \subset \mathbb{P}(V)$ можно естественным образом связать алгебру Ли $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X)$. А именно, для каждой неособой точки $x \in X^{\mathrm{reg}}$ рассмотрим касательную прямую $\ell \subset \mathbb{P}(V)$ к многообразию X в точке x и соответствующее ей двумерное подпространство $S \subset V$. Определим алгебру Ли $\mathfrak{L}$ с пространством образующих V и определяющими соотношениями вида $[\xi, \eta] = 0$, $\forall \xi, \eta \in S$ (по всем x, ℓ). Возникает любопытный новый алгебраический инвариант вложенного проективного многообразия и ряд естественных вопросов о его структуре. Например, всегда ли алгебра $\mathfrak{L}(X)$ конечномерна? Мы обсудим структуру алгебр $\mathfrak{L}(X)$, опишем их в ряде конкретных примеров и, в частности, ответим на вопрос о конечномерности.

А. С. Трепалин (МИАН, НИУ ВШЭ). Факторы поверхностей дель Пеццо степени 8 без точек

Поверхности дель Пеццо степени 8 — довольно естественный объект, например, к ним относятся гладкие поверхности второго порядка в трёхмерном проективном пространстве. В случае, когда основное поле не алгебраически замкнуто, на такой поверхности может не оказаться точек, определённых над этим полем. В докладе будет исследоваться бирациональная классификация факторов поверхностей дель Пеццо степени 8 по конечным группам автоморфизмов, в частности вопрос рациональности фактора (который по сути сводится к нахождению на факторе точки, определённой над основным полем). Будет показано, что в случае нечётного порядка группы фактор-поверхность бирационально эквивалентна исходной поверхности (в частности, на ней нет точек), а для групп чётного порядка фактор-поверхность бирационально эквивалентна некоторой квадрике в трёхмерном проективном пространстве, а также показано, что в большинстве случаев фактор будет рационален.