II Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве

19–22 сентября 2023, Вологда, ВоГУ

Аннотации докладов

Содержание

1 Пленарные доклады

М. А. Всемирнов. Гурвицевы группы

Гурвицевы группы — это конечные группы, которые порождаются парой элементов порядков 2 и 3, соответственно, при этом порядок произведения образующих равен 7. В докладе будет рассказано, чем вызван интерес к гурвицевым группам, а также о текущем состоянии проблемы описания гурвицевых групп. При этом будет уделено внимание как положительным (как строить гурвицевы образующие для широкого класса групп), так и отрицательным (как доказывать, что та или иная группа не является гурвицевой) результатам.

Д. Б. Каледин. Гомотопии и симметрии

В современной математике, обьекты часто изучаются “с точностью до изоморфизма”, причем следить за изоморфизмами важно — например, в теории Галуа именно группа автоморфизмов алгебраического расширения нашего поля содержит самую важную информацию. Топологический аналог теории Галуа — теория накрытий, где роль группы Галуа играет группа гомотопических классов петель, т.е. фундаментальная группа. Однако хорошо известно, что, как правило, топология пространства не определяется только лишь фундаментальной группой — бывают и нетривиальные высшие группы гомотопий. При попытке формализовать явление алгебраически, первое, что хочется сделать — это рассматривать не гомотопические классы петель, а сами петли; конечно, группу они уже не образуют, поскольку обратимы не буквально, а только “с точностью до высших гомотопий”, но есть надежда, что, если навести соответствующий формализм, то все эти “высшие гомотопии” можно также явно алгебраически описать, и проблема рассосется сама собой.

К сожалению, надежда пока что тщетна. Во всех имеющихся в литературе построениях такой “гомотопической алгебры”, от модельных категорий Квиллена до популярных в последнее время “бесконечность-категорий”, никакого настоящего решения проблемы не предлагается — по сути, она просто заметается под ковер. Из-за этого формализм становится страшно громоздким, и любое его честное использование требует ссылок на основополагающие труды длиной в тысячи страниц. Я опишу альтернативный подход к гомотопической алгебре, основанный на введенном Гротендиком понятии “дериватора”; этот подход ничем не уступает по силе существующим, но при этом прост, интуитивно понятен, и очень близок к исходному формализму накрытий и фундаментальных групп.

Доклад рассчитан на общематематическую аудиторию. В частности, вообще никакого знакомства с гомотопической алгеброй не предполагается, а все необходимые понятия из теории категорий я объясню по ходу дела.

А. Б. Калмынин. Интервалы между суммами двух полноквадратных чисел

Натуральное число называется полноквадратным, если каждый показатель степени в его разложении на простые больше или равен 2. Мы поговорим о распределении сумм двух полноквадратных чисел в контексте результатов о значениях бинарных квадратичных форм. Будет представлена нетривиальная нижняя оценка для промежутков между такими числами, использующая некоторые вероятностные конструкции и плотностные теоремы для нулей L-функций Дирихле. По совместной работе с С. В. Конягиным.

Н. Ю. Лукоянов. Задачи оптимизации гарантии в динамических системах

В докладе речь пойдет об управлении движением динамических систем, описываемых при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, в условиях помех и/или противодействия. Качество процесса управления оценивается на конечном промежутке времени заданным показателем. В рамках теоретико-игрового подхода ставится вопрос о нахождении оптимального гарантированного результата и построении стратегии управления, обеспечивающей этот результат. Обсуждаются структура и свойства оптимальных стратегий в зависимости от свойств оптимизируемого показателя качества, наличия ресурсных ограничений, запаздывания в управлении. Для линейно-выпуклого случая указываются методы приближенного решения задачи, основанные на попятном построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Н. В. Маслова. О графах Грюнберга–Кегеля конечных групп и характеризации конечной группы ее графом Грюнберга–Кегеля

Симметрия — это один из фундаментальных принципов самоорганизации материальных форм в природе. Множество всех симметрий некоторого объекта образует алгебраическую структуру, которая называется группой. Исследовав группу симметрий объекта, можно получить новую информацию уже о самом объекте. Однако ситуация, когда группа симметрий исследуемого объекта известна a priori, является редкой. Обычно из эмпирических соображений, из “видимых” свойств объекта удается извлечь только информацию о каких-то свойствах этой группы, например, некоторые ее арифметические параметры. Появляется задача определить группу или описать хотя бы какие-то ее структурные свойства и особенности возможных действий на объектах, если известны только некоторые арифметические параметры этой группы. Получение результатов такого рода – это разработка математического аппарата, который в дальнейшем может быть применен далеко за пределами математики.

Примерами арифметических параметров конечной группы являются ее порядок, множество порядков всех ее элементов, множество величин всех ее классов сопряженности, множество всех степеней неприводимых комплексных представлений этой группы и т.д. Одним из хорошо известных арифметических параметров конечной группы является ее граф Грюнберга–Кегеля, который называют еще графом простых чисел. Это неориентированный граф без петель и кратных ребер, вершинами которого являются все простые делители порядка группы G и две вершины p и q смежны в котором тогда и только тогда, когда группа G содержит элемент порядка pq. Граф Грюнберга–Кегеля конечной группы, с одной стороны, бывает “достаточно легко” вычислить, с другой стороны, в некоторых случаях он определяет группу однозначно с точностью до изоморфизма. Например, хорошо известная конечная простая спорадическая группа Монстр содержит порядка $8,08 \times 10^{53}$ элементов, при этом граф Грюнберга–Кегеля группы Монстр содержит всего 15 вершин, и эта группа однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим графом Грюнберга–Кегеля в классе конечных групп.

В этом докладе мы обсудим свойства графов Грюнберга–Кегеля конечных групп и вопрос характеризации конечной группы по ее арифметическим параметрам, в частности, по графу Грюнберга–Кегеля.

Д. О. Орлов. Гладкие алгебры и скрученное тензорное произведение

Д. В. Трещев. Поток нормализации

Процесс нормализации в теории нормальных форм традиционно происходит пошагово: нежелательные члены (в векторном поле, функции Гамильтона и т.п.) удаляются поочередно степень за степенью. Я укажу дифференциальное уравнение в пространстве всех гамильтонианов с особой точкой в начале координат, вдоль решений которого функции Гамильтона движутся к своим нормальным формам. Сдвиги вдоль потока этого уравнения отвечают каноническим преобразованиям координат. Итак, речь идет о непрерывной процедуре нормализации. Формальный аспект теории не вызывает трудностей. Аналитический аспект и вопросы сходимости рядов, как всегда, нетривиальны. В этом направлении сделаны лишь первые шаги.

А. И. Шафаревич. Коротковолновые асимптотические решения строго гиперболических систем со скачкообразно меняющимися коэффициентами

Хорошо известно, что коротковолновые асимптотические решения линейных строго гиперболических по Петровскому систем, коэффициенты которых не зависят от малого параметра (или зависят от него регулярно), описываются в терминах канонического оператора Маслова на наборе лагранжевых поверхностей. Эти поверхности инвариантны относительно гамильтоновых полей, гамильтонианы которых удовлетворяют характеристическому уравнению для старшего символа гиперболической системы.

Если коэффициенты зависят от малого параметра сингулярно (т.е. их слабые пределы не гладкие), решение имеет более сложный вид вблизи носителя сингулярности этого слабого предела; в общем случае соответствующая теория не разработана. В докладе описывается асимптотика решения задачи Коши в случае, когда коэффициенты меняются скачкообразно, т.е. их слабые пределы терпят разрыв на некоторой гиперповерхности в пространстве независимых переменных. В этой ситуации лагранжевы поверхности перестраиваются в точках, соответствующих указанной поверхности, причем перестройка управляется геометрией проективной гиперповерхности в двойственном пространстве, определяемой старшим символом системы. Доказано, что решение разлагается в асимптотический ряд, слагаемые которого выражаются через канонический оператор Маслова на перестраивающихся лагранжевых поверхностях; функции, к которым применяются эти операторы, удовлетворяют вспомогательной задаче рассеяния для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а коэффициенты оператора монодромии такой задачи определяют коэффициенты отражения и прохождения волн через поверхность скачка коэффициентов.

2 Алгебраическая геометрия и теория чисел

И. В. Аржанцев (ФКН НИУ ВШЭ). Гибкие многообразия, образы аффинного пространства и эллиптичность по Громову

Мы определим гибкие аффинные алгебраические многообразия, опишем их основные свойства и покажем, что многие многообразия обладают свойством гибкости. Группа специальных автоморфизмов действует на множестве гладких точек гибкого аффинного многообразия бесконечно транзитивно, то есть любой конечный набор гладких точек можно перевести специальным автоморфизмов в любой конечный набор гладких точек той же мощности. Используя гибкость, можно доказать, что все невырожденные торические многообразия, все однородные пространства полупростых групп и все многообразия, покрытые аффинными пространствами, допускают сюръективный морфизм из аффинного пространства. Более того, применяя свойство эллиптичности, введенное Михаилом Громовым в 1989 году, мы покажем, что полное алгебраическое многообразие X является образом аффинного пространства тогда и только тогда, когда многообразие X унирационально. Последний результат получен в совместной работе с Михаилом Зайденбергом и Шулимом Калиманом.

Работа поддержана грантом РНФ-DST 22-41-02019.

А. В. Викулова (НИУ ВШЭ, МИАН). Максимальные группы автоморфизмов кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2

В этом докладе мы обсудим максимальные по порядку группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2. Для каждого такого конечного поля мы предъявим явно максимальную группу автоморфизмов. Более того, мы покажем, что гладкая кубическая поверхность с максимальной группой автоморфизмов уникальна, то есть единственна с точностью до изоморфизма.

В. А. Горская (НИУ ВШЭ). О плоских вещественных кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубику

Рассматривается относящаяся по тематике к первой части 16-й проблемы Гильберта задача изотопической классификации плоских вещественных алгебраических кривых степени 7, распадающихся в произведение кривой степени 3 (кубики) и двух кривых степени 2 (коник) при некоторых условиях максимальности и общего положения. Перечислены логически возможные расположения — их оказалось 58 — ветвей кривых рассматриваемого класса. Доказано, что 10 из них реализуются кривыми степени 7, а 36 не могут быть реализованы такими кривыми.

Н. Н. Добровольский (ТГПУ). Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы

В докладе рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа: теория гиперболической дзета-функции Гурвица, дзета-функции моноидов натуральных чисел, классы периодических функций, порожденных моноидами натуральных чисел, и алгебры рядов Дирихле моноидов натуральных чисел.

Ю. И. Зайцева (ФКН НИУ ВШЭ). Аффинные однородные многообразия и надстройки

Алгебраическое многообразие X называется однородным пространством, если группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ действует на X транзитивно, и однородным пространством, если существует транзитивное действие алгебраической группы на X. Мы доказываем критерий гладкости надстройки для построения широкого класса однородных многообразий. В качестве приложения мы строим аффинные надстройки произвольной размерности, которые являются однородными многообразиями, но не однородными пространствами, и даём критерии принадлежности поверхностей Данилевского множеству однородных многообразий и множеству однородных пространств. Доклад основан на совместной работе с И. В. Аржанцевым, работа поддержана Санкт-Петербургским международным математическим институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение N 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

М. А. Королёв (МИАН). Арифметические свойства «обобщённых дробей Фарея»

Классический ряд Фарея Φ_Q порядка $Q \geqslant 1$ — это множество упорядоченных по возрастанию несократимых рациональных дробей a/b с условиями $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant Q$. Геометрическую интерпретацию этого ряда получим, если рассмотрим на координатной плоскости (x, y) половинку квадрата вида $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant Q$. Беря в ней примитивные точки (т.е. точки с целочисленными и взаимно простыми координатами) и проводя к ним отрезки из начала координат, убеждаемся, что угловые коэффициенты полученных отрезков и есть ряд Фарея порядка Q.

Вместо половинки квадрата можно рассмотреть достаточно произвольную область ω, лежащую в секторе $0 \leqslant y \leqslant x$ (не обязательно выпуклую), и «раздувать» её с коэффициентом Q, где $Q \to +\infty$. В раздутой области $Q\omega$ также можно рассмотреть примитивные точки, провести к ним отрезки и упорядочить тангенсы их углов наклона по возрастанию. То, что получится, и есть обобщённый ряд Фарея $\Phi_Q(\omega)$, отвечающий области ω. Если область достаточно «хорошая», полученный таким образом ряд Фарея будет обладать, в частности, «модулярным свойством», присущим классическому ряду Фарея: если $c/d < a/b$ — соседние дроби, то непременно $ab - cd = 1$. В докладе же предполагается рассказать о некоторых других арифметических свойствах, присущих как классическому, так и обобщённому рядам Фарея.

Д. В. Осипов (МИАН). Произведения коциклов и теорема Римана–Роха

Для произвольного коммутативного кольца A рассмотрим группу $\mathcal{G}(A)$, которая есть полупрямое произведение группы обратимых элементов алгебры рядов Лорана $A((t))$ над кольцом A и группы непрерывных автоморфизмов A-алгебры $A((t))$ (на алгебре $A((t))$ есть естественная топология, заданная степенями элемента t, позволяющая говорить о непрерывных автоморфизмах). У группы $\mathcal{G}(A)$ есть естественные центральные расширения при помощи группы обратимых элементов кольца A. Одно центральное расширение строится внутренним образом, как в теории алгебраических групп петель, а другое центральное расширение строится при помощи явно заданных групповых 2-коциклов. Результат состоит в том, что эти два центральных расширения эквивалентны, если A есть коммутативная алгебра над полем рациональных чисел. Этот результат является локальным аналогом относительной теоремы Гротендика–Римана–Роха (для относительной размерности 1 и линейных расслоений).

Н. К. Семёнова (МГУ). Об одной оценке суммы Клоостермана

Неполной суммой Клоостермана называется тригонометрическая сумма вида

$$S(x,m;a,b) = \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu,m)=1}} \exp\Big(2\pi i \frac{a\overline{\nu} + b\nu}{m}\Big), \quad 1 < x < m,$$

где m, a, b — целые числа, а через $\overline{\nu}$ обозначается вычет, обратный к ν по модулю m, то есть $\nu\overline{\nu} \equiv 1 \pmod m$. В начале 1990-х годов А. А. Карацубой был разработан метод, позволяющий получать нетривиальные оценки таких сумм в случае $x < \sqrt{m}$. Основная идея состоит в разбиении переменной суммирования на два множества A и B. Все числа из множества A имеют по крайней мере два простых делителя из специального вида интервалов. Сумма по такому множеству разбивается на двойные суммы, каждую из которых можно оценить с помощью метода А. А. Карацубы и его модификации, принадлежащей Ж. Бургейну и М. З. Гараеву. Все числа из множества B таких делителей не имеют, и соответствующая сумма оценивается тривиально.

В докладе будет рассказано о новой оценке неполной суммы Клоостермана, справедливой для простого модуля $m \leqslant m_0$ и целого a, $(a,m) = 1$, в случае когда длина суммы x удовлетворяет неравенствам

$$\exp(c(\ln m)^{2/3}(\ln\ln m)^{1/3}) \leqslant x \leqslant \sqrt{m},$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная. Новшество состоит в чуть более тонком разбиении на множества A и B. За счет этого получается уточнение оценки, полученной в 2016 году М. А. Королёвым.

А. Л. Смирнов (ПОМИ РАН). Гауссовы кольца

Будет введено понятие гауссового кольца. Планируется рассказ о задачах по классификации гауссовых колец и их возможной связи с гипотезой Римана.

Г. М. Полотовский (НИУ ВШЭ). О топологии вещественных распадающихся кривых степени 8

Обзор результатов о топологической классификации распадающихся алгебраических кривых степени 8, полученных авторами за последние три года. Изучаются взаимные расположения в вещественной проективной плоскости коники и секстики; кубики и квинтики; двух квартик. Каждый раз предполагаются выполненными некоторые условия максимальности и общего положения. Рассматриваемая задача относится к тематике первой части 16-й проблемы Гильберта.

В. М. Поляков (ПОМИ РАН). Векторные расслоения ранга 2 на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$

Хорошо известно, как устроены все векторные расслоения на $\mathbb{P}^1_k$, где k — поле, а именно имеется теорема Гротендика, которая утверждает, что каждое векторное расслоение на проективной прямой над полем изоморфно сумме линейных расслоений (которые имеют вид $\mathcal{O}(n)$), причем слагаемые определены однозначно. Однако для проективной прямой над $\mathbb{Z}$ это уже не так — на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ существуют неразложимые расслоения. В докладе будет рассказано про самые простейшие неразложимые расслоения на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ — с тривиальным общим слоем и подскоками высоты 1. Будет дана их классификация и показана связь с топологией, благодаря которой удастся инвариантным образом определить все параментры из этой классификации. Данную конструкцию можно повторить и в более сложных случаях, что дает нам новый инвариант расслоений.

В. В. Пржиялковский (МИАН, НИУ ВШЭ). Корегулярность

Важной характеристикой многообразий Фано является «сложность» его (плюри)антиканонического дивизора, то есть то, насколько такой дивизор может быть особым на достаточно хорошей модели многообразия. Эта характеристика называется (ко)регулярностью. Она вычислена для подавляющего числа двух- и трехмерных гладких многообразий Фано. Мы расскажем основные конструкции, которые позволили это сделать.

Д. А. Тимашёв (МГУ). Об алгебрах Ли, связанных с вложенными проективными многообразиями

Со всяким невырожденным вложенным проективным многообразием $X \subset \mathbb{P}(V)$ можно естественным образом связать алгебру Ли $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X)$. А именно, для каждой неособой точки $x \in X^{\mathrm{reg}}$ рассмотрим касательную прямую $\ell \subset \mathbb{P}(V)$ к многообразию X в точке x и соответствующее ей двумерное подпространство $S \subset V$. Определим алгебру Ли $\mathfrak{L}$ с пространством образующих V и определяющими соотношениями вида $[\xi, \eta] = 0$, $\forall \xi, \eta \in S$ (по всем x, ℓ). Возникает любопытный новый алгебраический инвариант вложенного проективного многообразия и ряд естественных вопросов о его структуре. Например, всегда ли алгебра $\mathfrak{L}(X)$ конечномерна? Мы обсудим структуру алгебр $\mathfrak{L}(X)$, опишем их в ряде конкретных примеров и, в частности, ответим на вопрос о конечномерности.

А. С. Трепалин (МИАН, НИУ ВШЭ). Факторы поверхностей дель Пеццо степени 8 без точек

Поверхности дель Пеццо степени 8 — довольно естественный объект, например, к ним относятся гладкие поверхности второго порядка в трёхмерном проективном пространстве. В случае, когда основное поле не алгебраически замкнуто, на такой поверхности может не оказаться точек, определённых над этим полем. В докладе будет исследоваться бирациональная классификация факторов поверхностей дель Пеццо степени 8 по конечным группам автоморфизмов, в частности вопрос рациональности фактора (который по сути сводится к нахождению на факторе точки, определённой над основным полем). Будет показано, что в случае нечётного порядка группы фактор-поверхность бирационально эквивалентна исходной поверхности (в частности, на ней нет точек), а для групп чётного порядка фактор-поверхность бирационально эквивалентна некоторой квадрике в трёхмерном проективном пространстве, а также показано, что в большинстве случаев фактор будет рационален.

3 Дифференциальные уравнения, теория функций, математические модели в естественных и социально-экономических науках

Д. И. Борисов. О резольвенте оператора Шредингера на графе с малыми ребрами

Настоящая работа относится к серии исследований поведения резольвент эллиптических операторов на графах с малыми рёбрами. Ранее для общих операторов второго порядка на общих графах с малыми ребрами было показано, что при выполнении определённого нерезонансного условия резольвенты данных операторов голоморфны в определённом смысле по малому параметру, описывающему длины малых рёбер. Вместе с тем, остаётся открытым вопросом о поведение резольвент эллиптических операторов на графах с малыми рёбрами при нарушении данного нерезонансного условия.

В представленной работе рассматривается модельный пример графа и оператора на нём, для которого данное нерезонансное условие нарушено. Таким примером является оператор Шрёдингера на графе с несколькими малыми петлями, присоединёнными к одной вершине, в которой задаётся стандартное условие Кирхгофа. Показано, что хотя нерезонансное условие нарушается, резольвента сохраняет свойство голоморфности. В то же время, в главных членах ряда Тейлора возникают качественно новые слагаемые, описывающие определённую локализацию резольвенты на данных малых петлях.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00009), https://rscf.ru/project/23-11-00009/

А. И. Буфетов. Гауссов мультипликативный хаос для синус–процесса

Реализации синус-процесса естественным образом ставится в соответствие случайная целая функция с нулями в частицах нашей конфигурации, аналогично произведению Эйлера. Доказано, что при скейлинге вещественной прямой нормализованный квадрат абсолютного значения нашей случайной функции почти наверное сходится к гауссову мультипликативному хаосу.

Следствием является то, что почти каждая реализация с удалением одной частицы является полным и минимальным множеством для пространства Пэли–Винера, тогда как если удалить две частицы, то получается множество нулей для пространства Пэли–Винера.

Ключевую роль в рассуждении играет квази-инвариантность синус-процесса под действием группы диффеоморфизмов прямой с компактным носителем.

С. Ю. Доброхотов. Операторные подход и принцип Мопертюи — Якоби в задачах с локализованными правыми частями для линейных многомерных систем дифференциальных уравнений

В недавних работах А. Аникина, С. Ю. Доброхотова, В. Е. Назайкинского и М. Руло был развит метод построения эффективных асимптотических формулы для решений скалярных многомерных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с локализованными правыми частями. Задачи такого сорта близки к задачам об асимптотике функции Грина, например для уравнения Гельмгольца. В докладе обсуждается метод построения асимптотических решений такого типа для систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений. Метод основан на операторной редукции, основанной на операторном исчислении Фейнмана–Маслова исходной систем уравнений к набору скалярных уравнений и последующему применению метода, развитого для скалярных задач. С помощью принципа Мопертюи–Якоби мы показываем, что вместо собственных значений можно использовать детерминант матричнозначного символа, что может сильно упростить реализацию предлагаемого метода в решении конкретных задач.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-11-00341)

А. В. Дымов. Строгие результаты для стохастической модели волновой турбулентности Захарова–Львова

Теория волновой турбулентности интенсивно развивается в физических работах с 1960-х годов. Несмотря на значительный интерес в сообществе, математические работы, посвященные ее строгому обоснованию, начали появляться лишь в последние несколько лет. В этих работах достигнут существенный прогресс в обосновании теории, однако задача все еще остается плохо понятной. С математической точки зрения теория волновой турбулентности представляет собой эвристический метод для изучения малоамплитудных решений нелинейных гамильтоновых УрЧП с периодическими граничными условиями большого периода. Ее принципиальное утверждение состоит в том, что одна из основных характеристик решения, называемая энергетическим спектром, приближенно удовлетворяет нелинейному кинетическому уравнению, называемому волновым кинетическим уравнением.

Я расскажу о совместных работах с С. Б. Куксиным, а также С. Г. Влэдуцем и А. Майокки, в которых мы завершили первый шаг в строгом обосновании этого утверждения для энергетического спектра решения нелинейного уравнения Шредингера со случайным возмущением на торе. Такая стохастическая модель волновой турбулентности была предложена В. Е. Захаровым и В. С. Львовым в 1975 году.

А. И. Зейфман. Различные подходы для получения оценок устойчивости марковских цепей с непрерывным временем

В докладе рассмотрены различные подходы для получения оценок устойчивости предельных режимов марковских цепей с непрерывным временем по отношению к возмущениям их инфинитезимальных характеристик, основанные на исследовании прямой системы Колмогорова.

А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров. К задаче группового преследования с дробными производными

Рассматривается конфликтно управляемый процесс с участием группы преследователей и одного убегающего, описываемый линейными дифференциальными уравнениями с дробными по Капуто производными и простыми матрицами. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования и задачи уклонения.

Э. М. Мухамадиев, А. Н. Наимов. Об ограниченных решениях одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Для одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами исследован вопрос о существовании, единственности и представлении ограниченного решения. Найдены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность ограниченного решения при любой заданной ограниченной правой части уравнения. В этих условиях приведено и обосновано представление единственного ограниченного решения в виде интеграла с ядром, составленным по коэффициентам уравнения.

В. Е. Назайкинский. Асимптотические решения уравнений с локализованными правыми частями

В докладе описывается метод построения квазиклассических асимптотических решений неоднородных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в частных производных с локализованными правыми частями. Эти задачи близки к задачам об асимптотике функции Грина, в частности, для уравнения Гельмгольца. Метод основан на конструктивном описании соответствующих лагранжевых многообразий и на недавно предложенных новых представлениях канонического оператора Маслова в окрестности лагранжевых сингулярностей. Развитый метод служит основой аналитико-численного алгоритма построения эффективных асимптотических решений указанных задач, возникающих в различных областях физики и механики сплошных сред.

Доклад основан на совместных работах с С. Ю. Доброхотовым, А. Ю. Аникиным и М. Руло, поддержанных грантом РФФИ 17-51-150006 НЦНИ_а и средствами госбюджета по госзаданию №АААА-А20-120011690131-7 в Институте проблем механики РАН.

И. Ю. Полехин. Интегрируемость маятника Циглера

В работе исследуется динамика плоского двойного маятника при наличии в системе постоянной по величине следящей силы, направленной вдоль одного из звеньев маятника (маятник Циглера). Предполагается, что на систему не действует сила тяжести, но в узлах маятника могут находиться пружины линейной жесткости.

Исследуется случай, когда жесткость пружины, расположенной в точке подвеса маятника, равна нулю. В этом случае порядок системы может быть понижен. Доказывается, что в редуцированной системе существуют двухпараметрические семейства периодических решений, т.е. локально, в окрестности этих семейств, у системы есть два первых интеграла. В этом случае можно говорить об интегрируемости системы (как минимум, для части начальных условий). Объясняется механизм нарушения периодичности решений при изменении параметров или начальных данных системы, из чего следует неинтегрируемость и хаотизация динамики системы (показывается численно). Отметим, что этот механизм принципиально отличен от случая гамильтоновых систем.

Д. М. Поляков. О собственных значениях дифференциального оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами

Рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка на единичном отрезке. Коэффициенты оператора являются вещественными и интегрируемыми на отрезке. Кроме того, предполагается, что значения коэффициентов совпадают на концах отрезка. С точки зрения механики изучаемый оператор описывает модель балки с жестко закрепленными концами, а его собственные значения указывают на различные резонансные случаи. Более того, уравнения четвертого порядка появляются как модельные уравнения для большого класса уравнений высокого порядка, возникающих в статистической механике, моделях фазового поля, моделях висячих мостов.

Для рассматриваемого оператора доказывается асимптотика собственных значений как в случае негладких коэффициентов, так и при различных предположениях их гладкости. Кроме того, выписывается формула регуляризованного следа.

А. А. Толченников. Лежандрова особенность Арнольда в решении модельного уравнения Гельмгольца с локализованной правой частью

В докладе будет рассматриваться 2-мерное модельное уравнение Гельмгольца с линейным показателем преломления и локализованной правой частью, а также фундаментальное решение этого уравнения. В похожих задачах конструкция асимптотического решения основывается на лагранжевой поверхности, составленной из полутраекторий системы Гамильтона, выпущенных из окружности (пересечении вертикальной плоскости с нулевой поверхностью уровня гамильтониана). Однако непосредственно этот алгоритм применить нельзя, поскольку имеется одна траектория, которая за бесконечное время приходит в особую точку. Это приводит к тому, что асимптотическое решение будет локализовано не только в окрестности проекции 2-мерного лагранжева многообразия в физическое пространство, но и в окрестности проекции особого луча, который “срывается” с негладкой лагранжевой поверхности, нормальная форма (лежандрова версия) которой была давно описана В. И. Арнольдом.

А. В. Цветкова. Асимптотики с комплексными фазами ортогональных полиномов, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями

Рассматриваются совместно ортогональные полиномы Эрмита $H_{(n_1,n_2)}(z)$ с двумя натуральными индексами. Такие полиномы можно определить с помощью рекуррентных соотношений, а также представить в виде решения дифференциального уравнения третьего порядка. Обсуждается подход, позволяющий получить глобальную асимптотику для полиномов с большими индексами в виде специальных функций, опираясь на каждое из упомянутых представлений.

Доклад основан на совместных работах с А. И. Аптекаревым, С. Ю. Доброхотовым и Д. Н. Туляковым.

4 Теория полугрупп и групп, теория колец и модулей, дискретная математика

См. сборник тезисов конференции.