Традиционная сессия МИАН-ПОМИ “Дифференциальные уравнения и динамические системы”

Санкт-Петербург, ПОМИ РАН,
12–14 мая 2023 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Санкт-Петербург

Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН), г. Москва

Математический центр мирового уровня «Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера» (МЦМУ им. Л. Эйлера), г. Санкт-Петербург

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России, грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265, и грант на создание и развитие МЦМУ им. Л. Эйлера, соглашение № 075–15–2022–289.

Алгебры в реконструкции многообразий по граничным данным

БЕЛИШЕВ М.И.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Определение (реконструкция) многообразий по граничным спектральным и динамическим данным – это раздел теории обратных задач математической физики. Метод граничного управления (BC-метод) – это один из подходов к задачам реконструкции. Доклад посвящен алгебраической версии BC-метода, основанной на связях обратных задач с теорией банаховых алгебр. Будет описана идейная сторона этой версии, основанной на тезисах математической теории систем и использующей функциональные модели банаховых алгебр – их реализации в виде алгебр функций на спектрах. Будут представлены также недавние результаты, относящиеся к реконструкции римановых поверхностей по оператору Дирихле-в-Нейман (Д.В. Кориков) и определению графа по граничным данным (А.В. Каплун).

Динамика в окрестности гомоклинического множества быстро-медленной гамильтоновой системы

БОЛОТИН С.В.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Получены явные формулы для сепаратрисного отображения многомерной быстро-медленной гамильтоновой системы в случае комплексных собственных значений состояния равновесия замороженной системы. Такие системы возникают в теории возмущений интегрируемых гамильтоновых систем в случае индефинитной функции Гамильтона невозмущенной системы. Дано частичное обобщение результатов Нейштадта о разрушении адиабатических инвариантов на многомерный случай.

Метрические тройки в геометрии и динамике

ВЕРШИК А.М.

*Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН*

Категория метрических троек (пространство с мерой и метрикой, с согласованием структур) – сравнительно новое образование, уже приведшее к ряду конкретных достижений. Одно из них – теория масштабированной энтропии в динамике, которая поглотила имеющиеся энтропийные концепции. В работах докладчика, М. Громова, Ф. Петрова, П. Затицкого, Г. Вепрева (см. обзор в УМН 2023) найдена классификация метрических троек, обширный запас начальных фактов и примеров. В докладе будет объяснено, что такое статсумма метрик, в чём смысл каталитических инвариантов динамических систем и почему в эргодической теории не обойтись без метрик.

Эффективный асимптотический метод линеаризации задач со свободной границей для уравнений мелкой воды в бассейнах с пологими берегами

ДОБРОХОТОВ С.Ю., НАЗАЙКИНСКИЙ В.Е.[1]

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Доклад посвящен эффективному методу линеаризации задач со свободной границей для одно- и двумерной системы нелинейных уравнений мелкой воды в бассейнах с пологими берегами. Эффективность означает следующее: внутри бассейна изучаемые (необрушающиеся) решения фактически определяются с помощью "наивно" линеаризованной исходной системы. Однако в окрестности береговой линии(представляющей собой "нестандарную" каустику) эта линеаризация приводит к потере важной информации, такой как динамика набега на берег, величина заплеска волн, описываемых изучаемыми решениями, и т.д. Предлагаемый метод позволяет сравнительно легко восстановить асимптотику решения исходной нелинейной задачи через соответствующие решения линейной задачи в виде параметрически заданных функций. Он основан на серьезной модификации так называемого преобразования Кэрриера-Гринспана в теории одномерной мелкой воды над плоским наклонным дном. Заметим также, что решение линеаризованных задач оказывается нетривиальным, поскольку они описывается уравнениями с вырождающимися на границе коэффициентами и для них нельзя ставить стандартные краевые условия, такие как условия Дирихле или Неймана. Для решения таких задач предлагается использовать недавно развитый метод униформизации, которому посвящен рассказ В.Е. Назайкинского. В качестве приложений мы обсуждаем задачи о волнах цунами, сейшах и береговых волнах. Также мы приводим сравнение получаемых формул с экспериментом.

Доклад основан на совместных работах с В. Калиниченко, Д. Миненковым, Б. Тироцци.

[1]Работа поддержана Российским научным фондом, проект 21-11-00341.

Строгие результаты для стохастической модели волновой турбулентности

ДЫМОВ А.В.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Теория волновой (или слабой) турбулентности (ВТ), разработанная в 1960-х годах В.Е. Захаровым и его школой, может рассматриваться как кинетическая теория взаимодействующих нелинейных волн, параллельная знаменитой кинетической теории Р. Пайерлса, или как игрушечная модель для теории сильной турбулентности. С математической точки зрения она представляет собой эвристический метод для изучения малоамплитудных решений нелинейных гамильтоновых УрЧП с периодическими граничными условиями большого периода. С момента своего создания ВТ интенсивно развивалась в физических работах и нашла множество приложений в теоретической физике. Однако, несмотря на значительный интерес в сообществе, математические работы, посвященные строгому обоснованию теории, начали появляться лишь в последние несколько лет. Несмотря на достигнутый в этих работах существенный прогресс в решении задачи, она все еще остается плохо понятной. Принципиальное утверждение ВТ состоит в том, что одна из основных характеристик решения, называемая энергетическим спектром, приближенно удовлетворяет нелинейному кинетическому уравнению, называемому волновым кинетическим уравнением и восходящему к Р. Пайерлсу. Я расскажу о совместных работах с С.Б. Куксиным, А. Майокки и С. Влэдуцем, в которых мы завершили первый шаг в строгом обосновании этого утверждения для энергетического спектра нелинейного уравнения Шредингера, подверженного случайному возмущению. Такая стохастическая модель ВТ была предложена Захаровым и Львовым.

Дифракция коротких волн на контурах с негладкой кривизной

ЗЛОБИНА Е.А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Дается обзор исследований, посвященных построению асимптотических формул в рамках последовательного метода пограничного слоя. Рассматриваются двумерные задачи дифракции коротких волн на контурах, гладких всюду, за исключением одной точки. Предполагается, что в этой точке кривизна контура (или ее j-я производная, $j = 1, 2, \ldots$) имеет скачок или гельдеровскую сингулярность.
Доклад основан на совместных работах с А.П. Киселевым.

Формальная устойчивость, устойчивость по большинству начальных данных и диффузия в аналитических системах дифференциальных уравнений

КОЗЛОВ В.В.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Приводится пример аналитической системы дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^6$ с формально устойчивым и устойчивым по большинству начальных данных положением равновесия. С помощью расходящейся формальной замены переменных эта система приводится к гамильтоновой системе с тремя степенями свободы. Почти все фазовое пространство этой системы расслаивается на трехмерные инвариантные торы с квазипериодическими решениями на них. Эти торы не заполняют все фазовое пространство. Несмотря на то, что "зазор" между этими торами имеет нулевую меру, это множество всюду плотно в $\mathbb{R}^6$ и неограниченные фазовые траектории плотны в этом зазоре. В частности, формально устойчивое по Ляпунову положение равновесия неустойчиво. Поведение фазовых траекторий соответствует случаю диффузии в системах, близких к интегрируемым. Доказательства используют теорему Пуанкаре-Дюлака, теорию почти периодических функций и некоторые факты из теории неоднородных диофантовых приближений. Обсуждаются нерешенные проблемы, связанные с рассматриваемым примером.

Случайные возмущения линейных и интегрируемых Гамильтоновых систем

КУКСИН С.Б.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Для конечномерные систем, являющихся малыми случайными возмущениями линейных либо интегрируемых Гамильтоновых систем, будет изучено поведение их решений как на длинных временных интервалах, так и при всех значениях времени. Ответы даются в терминах эффективных уравнений, которые явно строятся по возмущенным системам. Результаты обобщаются на некоторые классы стохастических уравнений в частных производных.

Некоторые решения полулинейного уравнения с дробным лапласианом в $\mathbb{R}^n$

НАЗАРОВ А.И.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН; Санкт-Петербургский государственный университет

Описывается вариационный метод построения ограниченных решений дробного уравнения $(-\Delta)^s u + u - |u|^{q-2}u = 0$ в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ и докритических значениях $q > 2$. Для локального случая ($s = 1$) этот метод был ранее развит в работе [1], однако в нелокальной постановке он требует серьезной модификации: решения уравнения в пространстве конструируются из решений аналогичного уравнения с различными операторами дробного лапласиана в областях специального вида. Предложенным методом строятся решения уравнения с различными структурами (радиальные, прямоугольные, треугольные, гексагональные, бризеры и пр.), как положительные, так и знакопеременные.
Доклад основан на совместной работе с А.П. Щегловой [2].

Литература

[1] L.M. Lerman, P.E. Naryshkin, A.I. Nazarov, Abundance of entire solutions to nonlinear elliptic equations by the variational method, Nonlinear Analysis – TMA, **190** (2020), DOI 10.1016/j.na.2019.111590, 1–21.
[2] A.I. Nazarov, A.P. Shcheglova, Solutions with various structures for semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ driven by fractional Laplacian, Calc. Var. and PDEs, **62** (2023), N4, paper N112, 1–31.

Методы отслеживания
в негиперболических системах

ПИЛЮГИН С.Ю.[2]

Санкт-Петербургский государственный университет

Задача об отслеживании приближенных траекторий (псевдотраекторий) динамических систем хорошо изучена для систем с гиперболической стуктурой [1]. Доклад будет посвящен некоторым результатам по отслеживанию псевдотраекторий в системах с негиперболическим поведением. Будет рассказано о следующих методах получения условий отслеживания.

1. Метод пар функций Ляпунова [2].
2. Метод контроля одношаговых погрешностей при отслеживании в окрестности неизолированной неподвижной точки [3].
3. Метод мультшкального условного отслеживания [4].
4. Метод обобщенных операторов Перрона для систем на простых временных шкалах [5].

Литература

1. S.Yu. Pilyugin, K. Sakai. *Shadowing and Hyperbolicity.* Lect. Notes Math., Vol. 2193, Springer (2017).
2. A.A. Petrov, S.Yu. Pilyugin. Lyapunov functions, shadowing and topological stability. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **43,** 231–240 (2014).
3. A.A. Petrov, S.Yu. Pilyugin. Shadowing near nonhyperbolic fixed points. *Discrete and Continuous Dynamical Systems,* **34,** 3761–3772 (2014).
4. S.Yu. Pilyugin. Multiscale conditional shadowing. *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2021), DOI 10.1007/s10884-021-10096-0.
5. S.Yu. Pilyugin. Perturbations of dynamical systems on simple time scales. *Lobachevskii Journal of Mathematics,* **44,** 1207–1214 (2023).

[2]Работа поддержана Российским научным фондом, проект 23-21-00025.

О неинтегрируемости и динамике дискретных нитей

ПОЛЕХИН И.Ю.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Будет рассказано о динамике плоских n-угольников. Будет показано, что при выполнении некоторых весьма не жестких требований такие системы являются неинтегрируемыми по Лиувиллю. Здесь речь идет как о динамике нитей с закрепленными концами, так и о динамике свободных нитей во внешних силовых полях. Приводятся достаточные условия положительности топологической энтропии таких систем.

Достаточные условия S-образности функции Баклея–Леверетта

РАСТЕГАЕВ Н.В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Уравнение Баклея–Леверетта является одним из самых простых законов сохранения для моделирования двухфазного потока в пористых средах. Это уравнение выглядит следующим образом:

$$s_t + (f(s))_x = 0,$$

где $s = s(x,t)$ — это водонасыщенность, а f — функция потока, также известная как функция Баклея–Леверетта. Эта функция описывает пропорцию относительных фазовых подвижностей и задается следующим выражением:

$$f(s) = \frac{m_a(s)}{m_a(s) + m_b(1-s)},$$

где m_a и m_b — относительные подвижности двух фаз (в контексте нефтяных задач — обычно воды и нефти). Эти подвижности часто являются возрастающими выпуклыми функциями.

При решении многих задач используется предположение об S-образности функции Баклея–Леверетта [1]. Вероятно, это вызвано тем, что S-образная функция используется в качестве единственного примера в исходной работе Баклея и Леверетта, и это предположение повторяется во многих последующих работах. Это предположение уже не имеет решающего значения в случае исходного уравнения Баклея–Леверетта, так как задача Римана для него (задача об эволюции разрыва) может быть решена аналитически для любой функции f методом построения выпуклой оболочки, предложенным О. А. Олейник (см. [2,3]). Тем не менее оно все еще играет роль в более общих системах законов сохранения, включающих больше фаз или компонент, или содержащих дополнительные параметры, например, температуру (см. [4–6]). Однако нет исчерпывающих исследований того, когда f на самом деле S-образна. Преобладающее предположение среди инженеров заключается в том, что выпуклые подвижности дают S-образную функцию потока. Даже некоторые математики думают так же. Единственной известной автору статьей (вдохновившей эту работу), изучающей достаточные условия S-образности функции потока, является работа [7]. В этой статье доказано, что когда относительные подвижности фаз являются выпуклыми степенными функциями, функция Баклея–Леверетта S-образна. В ней также говорится, что автор не смог найти контрпримера с выпуклыми подвижностями.

В рамках доклада мы приводим контрпримеры, в которых выпуклые относительные фазовые подвижности дают функцию потока, имеющую больше одной точки перегиба. Кроме того, мы формулируем достаточные условия для

S-образности функции Баклея–Леверетта и применяем их к некоторым известным моделям относительных подвижностей. Доклад основан на работе [8].

Литература

[1] Buckley, S. E. and Leverett, M., 1942. Mechanism of fluid displacement in sands. Transactions of the AIME, 146(01), pp.107-116.
[2] Олейник, О. А., 1957. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. Успехи математических наук, 12:3 (75), с.3-73.
[3] Гельфанд, И. М., 1959. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи математических наук, 14:2 (86), с.87-158.
[4] Johansen, T. and Winther, R., 1988. The solution of the Riemann problem for a hyperbolic system of conservation laws modeling polymer flooding. SIAM journal on mathematical analysis, 19(3), pp.541-566.
[5] Castañeda, P., Furtado, F. and Marchesin, D., 2013. The convex permeability three-phase flow in reservoirs. IMPA Preprint Série E-2258, pp.1-34.
[6] Bakharev, F., Enin, A., Petrova, Y. and Rastegaev, N., 2021. Impact of dissipation ratio on vanishing viscosity solutions of the Riemann problem for chemical flooding model. arXiv preprint arXiv:2111.15001.
[7] Castañeda, P., 2016. Dogma: S-shaped. Math Intelligencer, 38, pp.10-13.
[8] Rastegaev, N., 2023. On the sufficient conditions for the S-shaped Buckley-Leverett function. arXiv preprint arXiv:2303.16803.

Адиабатическая эволюция, порождённая оператором Шрёдингера: поведение квантовой частицы после исчезновения связанного состояния

СЕРГЕЕВ В.А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Мы рассматриваем уравнение Шрёдингера

$$i\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + v(x,\tau)\Psi, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

дополненное граничным условием $\Psi|_{x=0} = 0$. Потенциал $v(x,\tau)$, равный -1 на отрезке $0 \leq x \leq 1-\tau$ и нулю вне этого отрезка, представляет собой сужающуюся с течением времени прямоугольную потенциальную яму. Спектр оператора $H(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x,\tau)$ с условием Дирихле при $x = 0$ состоит из непрерывного спектра $\sigma_c = [0, +\infty)$ и точечного спектра, содержащего ровно n отрицательных собственных значений при $\tau_{n+1} \leq \tau < \tau_n$, где $\tau_n = 1 - \pi(n - 1/2)$, $n \in \mathbb{N}$. Когда τ приближается к критическому значению τ_n, n-е собственное значение $E_n(\tau)$ приближается к краю σ_c и, достигнув его, исчезает.
Мы изучаем построенное А. Федотовым в [1] решение Ψ_n уравнения (1), имеющее асимптотику вида

$$e^{-\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_n}^{\tau} E_n(s)\,\mathrm{d}s} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi_{n,m}(x,\tau), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2}$$

пока $E_n(\tau)$ существует. Здесь $\psi_{n,0}(\cdot,\tau)$ — n-я собственная функция $H(\tau)$. При $\tau \gtrsim \tau_n$ асимптотическое поведение Ψ_n меняет характер. Асимптотики внутри потенциальной ямы были описаны в [1,2]. Мы описываем асимптотику вне её, как вблизи момента исчезновения $E_n(\tau)$ [3], так и после него.
Рассматриваемая задача родственна задаче распространения звука в мелком водном слое переменной глубины, которая на физическом уровне строгости изучалась, напр., в [4], а на математическом – в [5].
Доклад основан на совместных работах с А.А. Федотовым.

Литература

[1] A. Fedotov, Adiabatic evolution generated by a one-dimensional Schrödinger operator with decreasing number of eigenvalues, *arXiv*: 1609.09473 (2016).

[2] А. Б. Смирнов, А. А. Федотов, Адиабатическая эволюция, порожденная оператором Шрёдингера с дискретным и непрерывным спектрами, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:1 (2016), 90-93.
[3] В. А. Сергеев, А. А. Федотов, О делокализации квантовой частицы при адиабатической эволюции, порожденной одномерным оператором Шрёдингера, *Матем. заметки*, **112**:5 (2022), 752-769.
[4] Allan D. Pierce, Guided mode disappearance during upslope propagation in variable depth shallow water overlying a fluid bottom, *J. Acoust. Soc. Am.*, **72** (1982), 523-531.
[5] А. А. Федотов, Об адиабатических нормальных волнах в прибрежном клине, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **471** (2019), 261-285.

Усреднение нелокального оператора сверточного типа

СЛОУЩ В.А.

Санкт-Петербургский государственный университет

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается самосопряженный ограниченный оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(x) := \varepsilon^{-d-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} a((x-y)/\varepsilon)\mu(x/\varepsilon, y/\varepsilon)(u(x)-u(y))\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Операторы такого типа встречаются при описании поведения случайных систем большого (бесконечного) числа частиц. Предполагается, что $a(x)$ — четная неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, $\|a\|_{L_1} = 1$; $\mu(x,y)$ — ограниченная и положительно определенная функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной, причем $\mu(x,y) = \mu(y,x)$. Кроме того, предполагаются конечными моменты $M_k = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k a(x) dx$, $k = 1, 2, 3$. При сделанных предположениях оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ ограничен, самосопряжен, неотрицателен, $\min \sigma(\mathbb{A}_\varepsilon) = 0$.
Изучается поведение резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε. Мы покажем, что при $\varepsilon \to 0$ оператор $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора. Эффективный оператор представляет собой эллиптический оператор второго порядка $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$; матрица g^0 определяется в терминах решения некоторой вспомогательной задачи на ячейке периодичности $\Omega := [0,1)^d$. Справедлива оценка для нормы разности резольвент

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(a, \mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Метод исследования опирается на теоретико-операторный подход, который был развит М.Ш. Бирманом и Т.А. Суслиной. Мы обсудим ряд особенностей нелокального оператора сверточного типа, которые требуют любопытной модификации теоретико-операторного подхода и делают задачу усреднения для этого оператора очень интересной.
Доклад основан на совместной работе с Е.А. Жижиной, А.Л. Пятницким и Т.А. Суслиной.

Поток нормализации

ТРЕЩЕВ Д.В.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Процесс нормализации в теории нормальных форм традиционно происходит пошагово: нежелательные члены (в векторном поле, функции Гамильтона и т.п.) удаляются поочередно степень за степенью. Я укажу дифференциальное уравнение в пространстве всех формальных гамильтонианов с эллиптической особой точкой в начале координат, вдоль решений которого функции Гамильтона движутся к своим нормальным формам. Сдвиги вдоль потока этого уравнения отвечают каноническим преобразованиям координат. Итак, речь идет о непрерывной процедуре нормализации. Формальный аспект теории не вызывает трудностей. Аналитический аспект и вопросы сходимости рядов, как всегда, весьма нетривиальны. В этом направлении сделаны лишь первые шаги.

Гипотеза Пойа для задачи Дирихле в многомерном шаре

ФИЛОНОВ Н.Д.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН

В 1954 г. Д. Пойа предположил, что

$$N_{\mathcal{D}}(\Omega, \Lambda) \leq C_W \Lambda^{d/2} \quad \text{при всех} \quad \Lambda \geq 0.$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область в евклидовом пространстве, Λ — спектральный параметр, $N_{\mathcal{D}}(\Omega, \Lambda)$ — считающая функция собственных значений оператора Лапласа задачи Дирихле в Ω, и C_W — константа в вейлевской асимптотике. Мы доказываем эту гипотезу для шара в произвольной размерности. Доклад основан на совместной работе с М. Левитиным, И. Полтеровичем и Д. Шером.

Глобальная асимптотика совместно ортогональных полиномов Эрмита $H_{(n_1,n_2)}(x)$ как решений дифференциального уравнения

ЦВЕТКОВА А.В.[3]

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Совместно ортогональные полиномы Эрмита $H_{(n_1,n_2)}(x)$ с мультииндексом $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2_+$ определяются соотношениями ортогональности

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{(n_1,n_2)}(x)x^\nu e^{-x^2-2\alpha x}dx = 0, & \nu = 0, 1, ..., n_1 - 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} H_{(n_1,n_2)}(x)x^\nu e^{-x^2+2\alpha x}dx = 0, & \nu = 0, 1, ..., n_2 - 1 \end{cases} \qquad \alpha \neq 0, \qquad (3)$$

и удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям. Однако можно убедиться, что $H_{n_1,n_2}(x)$ являются решениями дифференциального уравнения третьего порядка [1]

$$\frac{d^3H}{dx^3} - 4x\frac{d^2H}{dx^2} + (4x^2 - 4\alpha^2 + 2(n_1+n_2-1))\frac{dH}{dx} - 4(x(n_1+n_2) - \alpha(n_1-n_2))H = 0. \quad (4)$$

В докладе обсуждается подход, позволяющий получить глобальную асимптотику полиномов при больших индексах, опираясь на приведенное уравнение. Особенность задачи заключается в том, что символ соответствующего дифференциального оператора комплексный и связан с кривой, определяемой многочленом третьей степени. Используя операторные методы и идею канонического оператора Маслова [2], мы расщепляем уравнение на два уравнения более низких порядков, избавляемся от комплексности и получаем глобальную асимптотику для решения в виде линейной комбинации функции Эйри Ai и ее производной сложного аргумента.
Доклад основан на совместной работе с С.Ю. Доброхотовым [3].

Литература

[1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, Multiple orthogonal polynomials for classical weights. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10, 3887–3914 (2003).
[2] В. П. Маслов. *Операторные методы*, М.: Наука, 1973.
[3] S. Yu. Dobrokhotov, A. V. Tsvetkova, Asymptotics of multiple orthogonal Hermite polynomials $H_{n_1,n_2}(z, \alpha)$ determined by a third-order differential equation, *Rus. J. Math. Phys.*, **28**:4, 439–454 (2021).

[3]Работа поддержана Российским научным фондом, проект 21-11-00341.

Неклассические разрывы в решениях гиперболических систем уравнений

ЧУГАЙНОВА А.П.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Рассматриваются структуры разрывов в решениях гиперболической системы уравнений. Система уравнений имеет достаточно общий вид и, в частности, может описывать в простейшей постановке продольно-крутильные нелинейные волны в упругих стержнях, а также одномерные волны в неограниченной упругой среде. Ранее свойства разрывов в решениях этих уравнений изучались в предположении, что на разрывах выполняются только соотношения, следующие из законов сохранения продольного импульса и момента импульса вокруг оси стержня, а также условие непрерывности перемещений. Была изучена ударная адиабата. В данной работе исследуется стационарная структура разрывов в предположении, что главным, определяющим механизмом внутри структуры является вязкость. Показано, что некоторые части ударной адиабаты соответствуют эволюционным разрывам, не имеющим структуры. Кроме того, показано, что существуют особые (неклассические) разрывы, на которых должно выполняться дополнительное соотношение, которое находится как условие существования структуры разрыва. Дополнительное соотношение зависит от процессов, происходящих в структуре. Особый разрыв удовлетворяет условиям эволюционности, которые отличаются от известных условий Лакса. Обсуждаются выводы, которые могут представлять интерес также для других систем гиперболических уравнений.