Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Материалы
Международной конференции
Воронежская зимняя математическая школа

(27 января – 1 февраля 2023 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2023

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

Конференция поддержана МЦМУ МИАН и Воронежским госуниверситетом

С56 **Современные методы теории функций и смежные проблемы** : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 1 февраля 2023 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. — 401 с.

ISBN 978-5-9273-3751-4

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова и Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика охватывает широкий спектр проблем теории функций и функционального анализа, качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, оптимального граничного управления, математического моделирования и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средней школе и вузах.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-3751-4

Организаторы

Воронежский государственный университет

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН)

Конференция проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265) и Воронежского государственного университета

Содержание

Contents

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов (Махачкала, ДГУ)
gusen_e@mail.ru

Работ посвященным вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных функционально - дифференциальных уравнений дробного порядка сравнительно немного. В основном, соответствующие результаты получены с применением теорем о неподвижной точке для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. В данной работе в какой-то степени восполнен указанный пробел, с помощью специальных топологических средств установлены достаточные условия существования и единственности положительного решения краевой задачи

$$D^{\alpha}_{0+}x(t) + f\left(t, (Tx)\,(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(1) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha \in (1, 2]$ — действительное число, D^{α}_{0+} — дробная производная Римана-Лиувилля, $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна на $[0, 1] \times [0, \infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Близкие к задаче (1)–(1) результаты получены автором, в частности, в [1,2].

Литература

1. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения дробного порядка / Г.Э. Абдурагимов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2021. — №194. — С. 3–7.

2. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения дробного порядка / Г.Э. Абдурагимов // Вестник российских университетов. Математика. — 2022. — Т. 27, вып. 138. — С. 129–135.

О ВЫБОРОЧНЫХ ОЦЕНКАХ УСЛОВНОЙ ДИСПЕРСИИ

Я.Ю. Агранович (Воронеж, ВГУ)
agranovich.yan@gmail.com

Рассматривается современный подход к моделированию волатильности, с использованием внутридневных и высокочастотных биржевых данных. Модели основаны на различных выборочных оценках условной дисперсии.

В работе [1] рассматриваются три случайных процесса. Обозначая через r_t натуральный логарифм приращения цен закрытия, получим: $r_t^2 = \mu_t^r \epsilon_t$.

Зададим дневной диапазон изменения цен в виде натурального логарифма отношения цен $w_t = ln(H_t/L_t)$ где H_t и L_t максимальная и минимальная цены в течение дня соответственно, тогда: $w_t^2 = \mu_t^w \eta_t$.

Тритий случайный процесс описывает реализованную дисперсию: $v_t^2 = \mu_t^v \xi_t$.

Здесь μ_t^r, μ_t^w , μ_t^v являются условными математическими ожиданиями случайных величин r_t^2 , w_t^2 , v_t^2 соответственно.

Для каждого случайного процесса получаем выражение условного математического ожидания относительно неизвестных коэффициентов при лагированных переменных r_{t-1}^2 , w_{t-1}^2 и v_{t-1}^2

$$\begin{gathered}\mu_t^r = (\omega_r + \alpha_r r_{t-1}^2 + \beta_r \mu_{t-1}^r) + \gamma_r r_{t-1}^2 i_{t-1} + \delta_r r_{t-1} + \\ + \psi_r w_{t-1}^2 + \vartheta_r w_{t-1}^2 i_{t-1} + \psi_r v_{t-1}^2 + \lambda_r v_{t-1}^2 i_{t-1},\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\mu_t^w = (\omega_w + \alpha_w w_{t-1}^2 + \beta_w \mu_{t-1}^w) + \gamma_w w_{t-1}^2 i_{t-1} + \delta_w r_{t-1} + \\ + \psi_w r_{t-1}^2 + \vartheta_w r_{t-1}^2 i_{t-1} + \psi_w v_{t-1}^2 + \lambda_w v_{t-1}^2 i_{t-1},\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\mu_t^v = (\omega_v + \alpha_v v_{t-1}^2 + \beta_v \mu_{t-1}^v) + \gamma_v v_{t-1}^2 i_{t-1} + \delta_v r_{t-1} + \\ + \psi_v r_{t-1}^2 + \vartheta_v r_{t-1}^2 i_{t-1} + \psi_v w_{t-1}^2 + \lambda_v w_{t-1}^2 i_{t-1},\end{gathered} \tag{3}$$

Способ моделирования волатильности, предложенный в [2] приводит к следующим уравнениям:

$$\mu_t^r = \omega_r + \alpha_r x_{t-1} + \beta_r \mu_{t-1}^r + \psi_r x_{t-1} i_{t-1} + \delta_r r_{t-1} \tag{4}$$

$$\mu_t^x = \omega_x + \alpha_x x_{t-1} + \beta_x \mu_{t-1}^x + \psi_x x_{t-1} i_{t-1} + \delta_x r_{t-1} \tag{5}$$

где r_t — логарифмическое приращение цен, μ_t — условные математические ожидания, x_t — ядерная оценка условной дисперсии r_t с весовой функцией Парзена.

В работе [3] использован классический GARCH подход. Однако, в модель условной дисперсии в качестве переменной вводят её выборочную оценку за предшествующий момент времени:

$$r_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad \ln h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \ln h_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \ln x_{t-j}, \\ \ln x_t = \xi + \psi \ln h_t + \tau(z_t) + u_t, \tag{6}$$

где h_t — условная дисперсия, x_t — её выборочная оценка, $z_t \backsim i.i.d.(0,1)$ и $u_t \backsim i.i.d.(0,\sigma_u^2)$ независимые случайные величины.

Проводится эмпирическое исследование на базе наиболее ликвидных финансовых инструментов, позволяющее выбрать из рассматриваемых моделей наиболее точную. Рассчитываются шесть различных функций потерь. Лучшей из (1) –(6) будем считать модель, которая покажет наименьшие суммарные потери.

По результатам расчётов самой точной моделью из рассмотренных, является модель Realized GARCH (6). Модели (3) и (5), основанные на реализованной дисперсии и ядерной оценке показали среднюю точность на всём интервале сравнения и наихудшую точность на коротком интервале.

Таким образом, проведённое исследование позволяет утверждать, что при использовании выборочных оценок условной дисперсии, основанных на внутридневных данных, выбор между представленными моделями следует делать в пользу модели Realized GARCH.

Литература

1. Engle R.F. A multiple indicators model for volatility using intradaily data / R.F. Engle, G.M. Gallo. - Journal of Econometrics, 2006, 131, 3–27.

2. Shephard N. Realising the future: forecasting with high frequency based volatility (HEAVY) models / N. Shephard, K. Sheppard. - Journal of Applied Econometrics, 2010, 25, 197–231.

3. Hansen P.R. Realized GARCH: a joint model for returns and realized measures of volatility / P.R. Hansen, Z. Huang, H.H. Shek. - Journal of Applied Econometrics, 2011, 27(6), 877–906.

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА ЕВЛАНОВА-КУТУЗОВА

Р.С. Адамова, А.К. Ютишев (Воронеж, ВГУ)

Доказана сходимость алгоритма Евланова-Кутузова для случая произвольной неотрицательной матрицы M оценок экспертами набора альтернатив.

Алгоритм состоит в том, что по матрице M вычисляются коэффициенты компетентности экспертов, представимые на n-ом шаге в виде строки

$$(K_1^n, K_2^n, \dots, K_m^n) = (1, 1, \dots, 1)(MM^T)^n.$$

Процесс заканчивают, когда две строки, полученные последовательно, отличаются достаточно мало для решения задачи.

Теорема. *Если наибольшее собственное значение λ_0 матрицы имеет кратность, равную k, то*

$$\lim_{n\to\infty}(K_1^n, K_2^n, \dots, K_m^n) = S_1(p_{11}, p_{21}, \dots, p_{m1}) + \\ + S_2(p_{12}, p_{22}, \dots, p_{m2}) + \dots + S_k(p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{mk}),$$

где строки составляют ортонормированный базис в собственном подпространстве матрицы MM^T, соответствующем собственному значению λ_0, а $S_i = p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{mi}$.

Доказательство. Пусть P — ортогональная, а D — диагональная матрицы, такие, что

$$D = P^{-1}MM^TP.$$

Если M— квадратная матрица, все собственные значения матрицы MM^T неотрицательны. Если же она прямоугольная, то дополним матрицу M до квадратной матрицы нулями. Для полученной матрицы $\tilde{M}$ произведение $\tilde{M}\tilde{M}^T$ будет имеет те же собственные значения, что и MM^T, за исключением, быть может, некоторого числа нулевых собственных значений.

Упростим процесс алгоритма тем, что после каждого шага полученную строку будем делить на наибольшее собственное значение λ_0, поскольку нас интересуют сравнительные оценки компетентности экспертов. Это равносильно тому, что в матрице D все собственные значения делим на λ_0. Переходя к пределу, получаем строку

$$(K_1, K_2, \dots, K_m) = (1, 1, \dots, 1)PD^*P^{-1},$$

где матрица D^* получается из матрицы D заменой λ_0 на 1, а остальных диагональных элементов на 0. Поскольку $P^{-1} = P^T$, имеем

$$(K_1, K_2, \ldots, K_m) = S_1(p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{m1}) + \\ + S_2(p_{12}, p_{22}, \ldots, p_{m2}) + \cdots + S_k(p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{mk}).$$

Замечание. *Ортонормированный базис в собственном подпространстве определяется неоднозначно, но это не сказывается на корректности получаемой оценки. Действительно, меняя базис в собственном подпространстве наибольшего собственного значения λ_0, мы умножаем матрицу P на матрицу этого перехода к новому базису, что не изменяет результата.*

Литература

1. Евланов Л.Г. Экспертные оценки в управлении / Л.Г. Евланов, В.А. Кутузов. — М. : Экономика, 1978. — 132 с.

2. Турунтаев Л.П. Формализованные модели и методы решения аналитических задач: учебное пособие / Л.П. Турунтаев // ФГОУПО ТГУСУР, Кафедра автоматизации обработки информации. — Томск : ТМЦДО, 2016. — 85 с.

ОБ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШИХ n–ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Г. Акишев (Астана, Казахстанский филиал МГУ)
akishev_g@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное пространство точек $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$ и $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ и $p_j, \tau_j \in (1, \infty)$, $j = 1, \ldots, m$. $L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ —анизотропное пространство Лоренца , всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$ имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\tau}}$$

$$= \left[\int_0^1 \left[\cdots \left[\int_0^1 \left(f^{*_1,\ldots,*_m}(\overline{t})\right)^{\tau_1} t_1^{\frac{\tau_1}{p_1}-1} dt_1\right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \cdots\right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} t_m^{\frac{\tau_m}{p_m}-1} dt_m\right]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна , где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1, ..., t_m)$ - невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0, 1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

В случае $p_1 = ... = p_m = \tau_1 = ... = \tau_m = p$ пространство $L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p$ (см. [2], гл. I, п. 1.1).

Введем обозначения $a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ и $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$;

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

$$\rho(\overline{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ [2^{s_j-1}] \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\right\},$$

$[a]$—целая часть числа a, $\overline{s} = (s_1, ..., s_m), s_j = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ и $p_j, \tau_j \in (1,\infty)$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Рассматривается следующий аналог класса Никольского–Бесова $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в анизотропном пространстве Лоренца

$$S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\tau},\theta}B = \left\{f \in L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) : \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\tau}})^{\theta}\Big)^{1/\theta} \leqslant 1\right\}.$$

Основная задача: оценка величины

$$e_n(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B)_{\overline{q},\overline{\tau}^{(2)}} = \sup_{f\in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B} e_n(f)_{\overline{q},\overline{\tau}^{(2)}},$$

где $e_n(f)_{\overline{q},\overline{\tau}^{(2)}}$ — наилучшее n–членное тригонометрическое приближение функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B$, $n \in \mathbb{N}$ по норме пространства $L^*_{\overline{q},\overline{\tau}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$, $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $\overline{\tau}^{(2)} = (\tau^{(2)}_1, \ldots, \tau^{(2)}_m)$, $1 < q_j, \tau^{(2)}_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Точные по порядку оценки наилчших n–членных приближений различных классов в пространстве Лебега L_p, хорошо известны (более подробно см. [3]). Оценки величины $e_n(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B)_{\overline{q},\overline{\tau}^{(2)}}$, в случае $1 < p_j < q_j < \infty$, $1 < \tau^{(1)}_1, \tau^{(2)}_1 < \infty$, $j = 1, \ldots, m$ ранее установлены в [4]. В случае $1 < p_j = q_j = p < \infty$, $j = 1, \ldots, m$ доказана

Теорема. *Пусть* $1 < p \leqslant \tau^{(1)}_j < \infty$ $j = 1, \ldots, m$, $\tau^{(2)}_1 = ... = \tau^{(2)}_m = \tau_2 < \min\{2, p\}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *и* $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$.

1. Если $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$ *и* $r_1 > 0$ *или* $1 \leqslant \theta \leqslant \tau_2 < \infty$ *и* $r_1 > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau_2}$, *то*

$$e_n(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B)_{\overline{q},\overline{\tau}^{(2)}} \leqslant Cn^{-r_1}(\log_2(n+1))^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})+\sum\limits_{j=1}^{\nu}(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau^{(1)}_j})}.$$

2. Если $1 \leqslant \theta < \tau_2 < \infty$ *и* $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau_2}$, *то*

$$e_n(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B)_{\overline{q},\overline{\tau}^{(2)}} \leqslant Cn^{-r_1}(\log_2(n+1))^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_j^{(1)}})}.$$

Литература

1. Blozinski A. P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms /A. P. Blozinski //Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 263, № 1 — P. 146–167.

2. Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения /С. М. Никольский. — М. : Наука, 1977. — 456 с.

3. Dinh Dung , Temlyakov V.N., Ullrich T. Hyperbolic cross approximation // arXiv: 1601. 03978v1[math.NA] 15 Jan. 2016. 154 p.

4. Акишев Г. О порядках M–членного приближения классов в пространстве Лоренца /Г. Акишев // Матем. жур. — 2011. — Т. 11, № 1. — С. 5–29.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

О.В. Акопян, Р.Р. Акопян (Екатеринбург, УрФУ)

RRAkopyan@mephi.ru

Пусть $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ — кольцо с граничными окружностями γ_r и γ_R; $z_0 \in C_{r,R}$; m и n — целые неотрицательные числа. На классе H^2_n аналитических в кольце $C_{r,R}$ функций f, для которых $L^2(\gamma_r)$-норма функции конечна и $\|f^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)} \leqslant 1$, рассматриваются следующие связанные экстремальные задачи.

Вычисление величины модуля непрерывности функционала:

$$\omega(\delta) = \sup\{|f^{(m)}(z_0)| : f \in H^2_n, \|f\|_{L^2(\gamma_r)} \leqslant \delta\}. \qquad (1)$$

Из определения (1) для функций пространства Харди $H^2(C_{r,R})$ следует аналог неравенства Адамара-Колмогорова:

$$|f^{(m)}(z_0)| \leqslant \|f^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}\, \omega\left(\|f\|_{L^2(\gamma_r)}/\|f^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}\right). \qquad (2)$$

Модуль непрерывности (1) тесно связан с величиной оптимального восстановления. Для φ из $\mathcal{F}(L^2(\gamma_r))$ — множества всех функционалов на $L^2(\gamma_r)$, величина

$$\mathcal{U}(\delta,\varphi) = \sup\{|f^{(m)}(z_0) - \varphi(f_\delta)| :$$

$$f \in H_2^n,\ f_\delta \in L^2(\gamma_r),\ \|f - f_\delta\|_{L^2(\gamma_r)} \leqslant \delta\}$$

является погрешностью восстановления методом φ (производной порядка m) функции класса H_2^n в точке z_0 по значениям функции, заданным с погрешностью на окружности γ_r. Тогда

$$\mathcal{E}(\delta) = \inf\{\mathcal{U}(\delta, \varphi) \,:\, \varphi \in \mathcal{F}(L^2(\gamma_r))\} \tag{3}$$

есть величина оптимального восстановления. Известно, что величины (1) и (3) связаны равенством $\mathcal{E}(\delta) = \omega(\delta)$, $\delta > 0$.

Историю исследования задач, близких к рассматриваемым (1) и (3), см. в [1],[2] и приведённую там библиографию.

Определим функцию $g_h, h > 0$, аналитическую в кольце $C_{r,R}$, её рядом Лорана

$$g_h(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m} \overline{z_0}^{k-m}}{r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)}} z^k,$$

в котором

$$\alpha_{k,s} = \prod_{j=0}^{s-1} (k - j),\ s \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \alpha_{k,0} = 1.$$

Введём функционал φ_h из $\mathcal{F}(L^2(\gamma_r))$ следующим соотношением

$$\varphi_h(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m} r^k z_0^{k-m}}{r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)}} c_k, \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k,\ |z| = r.$$

Теорема. *Верхняя грань* (1) *достигается на функциях* cg_h, $|c| = \|g^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}^{-1}$. *Нижняя грань* (3) *достигается на функционале* φ_h. *Параметры* δ *и* h *связаны равенством*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m}^2 |z_0|^{2(k-m)} r^{2k}}{(r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)})^2} = \delta^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m}^2 \alpha_{k,n}^2 |z_0|^{2(k-m)} R^{2(k-m)}}{(r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)})^2}.$$

Литература

1. Акопян Р.Р. Аналог теоремы Адамара и связанные экстремальные задачи на классе аналитических функций / Р.Р. Акопян // Тр. ИММ УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 4. — С. 32—47.

2. Акопян Р.Р. Наилучшее приближение операторов дифференцирования на классе Соболева аналитических в полосе функций / Р.Р. Акопян // Сиб. электрон. матем. изв. — 2021. — Т. 18, № 2. — С. 1286–1298.

ОБ ОРБИТАХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ С 4-МЕРНЫМ НИЛЬРАДИКАЛОМ[1]

Р.С. Акопян, А.В. Лобода (Москва, МИРЭА; Воронеж, ВГТУ)
akrim111@yandex.ru, lobvgasu@yandex.ru

Согласно [1], [2], у 7-мерной неразложимой разрешимой вещественной алгебры Ли максимальный нильпотентный идеал (нильрадикал) N может иметь размерность от 4 до 7. При этом 4-мерный нильрадикал имеют всего 8 типов 7-мерных (неразложимых разрешимых) алгебр Ли (см. [2]).

Пример 1. Алгебра g_6 из [2] задается следующей таблицей коммутационных соотношений ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

g_6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1					$-e_2$	e_1	
e_2					e_1	e_2	
e_3						e_3	e_3
e_4					ae_4	be_4	ce_4
e_5							
e_6							

В связи с задачей описания голоморфно однородных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^4$, являющихся орбитами 7-мерных алгебр Ли, авторами изучалась ситуация Леви-невырожденных орбит. Установлено, что реализации в пространстве $\mathbb{C}^4$ более чем 300 типов 7-мерных алгебр, удовлетворяющих условию $\dim N \geqslant 4$, не имеют невырожденных орбит (см., например, [3]).

Теорема 1. *Все 8 типов алгебр из [2] допускают аффинные реализации и Леви-невырожденные трубчатые орбиты.*

Уточним, что 4-мерный нильрадикал в алгебрах из [2] является абелевым идеалом. В таких ситуациях применима предложенная в [3] схема изучения орбит 7-мерных алгебр Ли, использующая три случая упрощения независимой четверки коммутирующих голоморфных векторных полей из таких алгебр. Утверждение теоремы 1 относится к простейшему случае выпрямления четверки коммутирующих полей.

Пример 2. 7-мерные алгебры Ли голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ с базисами

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1), \quad (1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497) и РНФ (проект № 23-21-00109).

$$e_5 = (z_2, -z_1, 0, az_4),\ e_6 = (z_1, z_2, z_3, bz_4),\ e_7 = (0, 0, z_3, cz_4),$$

являются голоморфными реализациями алгебр из примера 1.

Предложение 1. *Орбитами в $\mathbb{C}^4$ алгебр с базисами (1) являются невырожденные трубчатые поверхности с уравнениями*

$$y_1^A y_2^B |e^{(C+i)\ln(y_3+iy_4)}| = 1. \tag{2}$$

Предложение 2. *7-мерные алгебры Ли с базисами*

$$e_1 = (0, i, z_1, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1), \tag{3}$$

$$e_5 = (iz_1, iz_2, z_1 z_2, az_4),\ e_6 = (0, z_2, z_3, bz_4),\ e_7 = (z_1, 0, z_3, cz_4)$$

также являются реализациями алгебры g_6. Орбитами этих реализаций являются Леви-невырожденные гиперповерхности с уравнениями (A, B, C – комбинации параметров a, b, c из примера 1)

$$y_3 = y_1 y_2 + y_4^A |z_1|^B e^{C \arg z_1}.$$

Замечание. Поверхности в $\mathbb{R}^4$, описываемые уравнениями (2), аффинно однородны и имеют дискретные аффинные стабилизаторы, т.к. их нет в списке [4].

Литература

1. Le Vu A. Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals / Vu A. Le, Tuan A. Nguyen, Tu T.C. Nguyen, Tuyen T.M. Nguyen, Thieu N. Vo // Cornell University. — 2021. — URL: https://arxiv.org/abs/2107.03990

2. Hindeleh F., Thompson G. Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical. / F. Hindeleh, G. Thompson // Algebras Groups Geom. — 2008. — V. 25, № 3. — P. 243–265.

3. Loboda A.V. On the Orbits of Nilpotent 7-dimensional Lie Algebras in 4-dimensional Complex Space / A.V. Loboda, R.S. Akopyan, V.V. Krutskikh // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. — 2020. — V. 13, № 3. — P. 360–372.

4. Можей Н.П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии / Н.П. Можей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — № 7. — С. 41–52.

КЛАСС УСЛОВИЙ ТРАНСМИССИИ, СОХРАНЯЮЩИЙ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИХАРИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Н.Д. Арахов, В.Л. Прядиев (Воронеж, ВГУ)
arahovnikita@gmail.com, pryad@mail.ru

Пусть Γ - ориентированный геометрический граф (см. [1]), на котором рассматривается пара дифференциальных уравнений

$$y''(x) + p_i(x)\varphi_i(y(x))y(x)g_i(y'(x)) = 0, \ \ x \in \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j, \tag{1}$$

где γ_j, $j = \overline{1,m}$ - рёбра Γ, $i = 1,2$, с условиями трансмиссии (условиями гладкости):

$$\sum_{j \in I(a)} \alpha_j(a) {y'}_j(a) = 0, \ \ a \in J(\Gamma), \tag{2}$$

где $J(\Gamma)$ множество всех внутренних вершин Γ, $I(a) = \{j = \overline{1,m} \,|\, \gamma_j \ni a\}$, $\alpha_j(a) > 0$ фиксированны, ${y'}_j(a)$ - производная функции y в точке a по нормали, внутренней для ребра γ_j. О коэффициентах уравнений (1) предполагается, что: во-первых, p_i, $i = \overline{1,2}$, равномерно непрерывны положительны и отделены от нуля на каждом γ_j, во-вторых, функция f, определяемая равенством $f(y) = y\varphi(y)$, возрастает на R, в-третьих, g, $\varphi \in F$, где F — множество положительных и непрерывных на R функций, неубывающих на $(-\infty;0]$ и невозрастающих на $[0;+\infty)$, в-четвёртых, $p_1 \geqslant p_2$, $g_1 \geqslant g_2$, $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$.

Теорема (см. [2]) *Пусть* Γ *— граф-дерево. Пусть* u *и* v *— решения уравнения (1), соответственно, при* $i = 1$ *и при* $i = 2$*, причём* $u > 0$ *на* Γ*. Пусть* $\partial\Gamma$ *- множество граничных вершин* Γ*, и пусть в каждой вершине* $a \in \partial\Gamma \setminus \{b\}$*, где* b *- некоторая граничная вершина* Γ*, выполнено условие (производные — в смысле ориентации от* a*):*

$$[(v(a) = u(a)) \wedge (v'(a) \geqslant u'(a))] \vee [((0 < u(a) < v(a)) \wedge \\ \wedge (u'(a)/u(a) \leqslant v'(a)/v(a))].$$

Тогда для любой $a \in \partial\Gamma \setminus \{b\}$

1^0) $v(x)/u(x)$ не убывает при x, пробегающем ломанную $\Gamma(a,b) \subseteq \Gamma$ от её начала a до её конца b,

2^0) $v \geqslant u$ на Г.

Оказывается, утверждение этой теоремы сохраняет силу и при более общих, нежели (2), условиях трансмиссии. А именно, вместо (2) можно рассмотреть условия

$$H_a \left(\left(\frac{y'_j(a)}{y(a)} \right)_{j \in I(a)}, y(a) \right) = 0, \quad a \in J(\Gamma), \tag{3}$$

в которых функции $H_a : R^{|I(a)|} \times (0; +\infty) \longrightarrow R$ обладают следующими свойством: если, сохраняя равенство $H_a((\beta_j)_{j \in I(a)}, u) = 0$, в наборе $(\beta_j)_{j \in I(a)}$ все числа, кроме одного (пусть это будет β_{j_0}), уменьшить, а число $u > 0$ увеличить, то β_{j_0} увеличится. И тогда утверждение теоремы остаётся в силе.

Литература

1. Покорный Ю.В. Линейные дифференциальные операторы / Ю.В. Покорный. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

2. Прядиев В.Л. Свойства Штурма нелинейных уравнений на сетях / В.Л. Прядиев // Автореф. дисс. ...канд. физ.-мат. наук. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1995. — 15 с.

УСЛОВИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Н.Ю. Аскерова, Э.М. Галеев

(Баку, филиал МГУ, Москва, МГУ)

narmina2000@gmail.com, galeevem@mail.ru

Работа посвящена вопросам о необходимых и достаточных условиях экстремума в квадратичных задачах вариационного исчисления. Особое внимание уделено случаю, когда выполняются необходимые условия экстремума, но не выполняются достаточные условия. В частности, выполняется условие Якоби, но не выполняется усиленное условие Якоби. Сформулируем в тезисах две теоремы для простейшей задачи вариационного исчисления и для задачи со старшими производными. Аналогичные теоремы получены для задачи Больца и изопериметрической задачи.

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления с квадратично-линейным функционалом

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} (\underbrace{A\dot{x}^2 + 2C\dot{x}x + Bx^2 + 2Dx}_{L})\, dt \to \min; \quad \begin{array}{l} x(t_0) = x_0, \\ x(t_1) = x_1. \end{array} \tag{P_1}$$

Теорема 1. *Пусть* $A(\cdot), C(\cdot) \in C^1([t_0;\, t_1])$, $B(\cdot), D(\cdot) \in C([t_0;\, t_1])$, *выполнено усиленное условие Лежандра на минимум. Тогда*

a) если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль $\widehat{x}$ *существует, единственна и доставляет абсолютный минимум;*

b) если выполнено условие Якоби и допустимая экстремаль существует, то она доставляет абсолютный минимум в задаче;

c) если выполнено условие Якоби, но не выполнено усиленное условие и допустимая экстремаль не существует, то $S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$*;*

d) если не выполнено условие Якоби, то $S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$. *Если при этом существует допустимая экстремаль* $\widehat{x}$, *то* $\widehat{x} \notin \operatorname{wlocmin} P_1$.

Рассмотрим задачу со старшими производными для квадратичного функционала, имеющего диагональный вид

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt \right) \to \min; \quad \begin{array}{l} x^{(k)}(t_0) = x_{k0}, \\ x^{(k)}(t_1) = x_{k1}, \end{array} \quad k = 0, \ldots, n-1. \quad (P_2)$$

Теорема 2. *Пусть функции* $A_k(\cdot) \in C^k([t_0; t_1])$, $k = 0, \ldots, n$, *и выполнено усиленное условие Лежандра. Тогда*

a) если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственная и доставляет абсолютный минимум;

b) если выполнено условие Якоби, но не выполнено усиленное и допустимая экстремаль существует, то она доставляет абсолютный минимум;

c) если выполнено условие Якоби, но не выполнено усиленное, допустимая экстремаль не существует и

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \big(A_k h^{(k)}\big) x^{(k-j)} \Big|_{t_0}^{t_1} \neq 0,$$

где h *— решение уравнения Якоби с граничными условиями* $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, *то* $S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$.

d) если не выполнено условие Якоби, то $S_{\mathrm{absmin}\, P} = -\infty$. *Если при этом существует допустимая экстремаль, то она не доставляет даже слабый локальный минимум.*

В пункте c) случай, когда выписанная сумма не равняется нулю, требует дальнейших исследований.

Утверждения теорем, аналогичные пунктам a) и d), в простейшей задаче вариационного исчисления, задаче Больца, задаче со старшими производными и изопериметрической задаче содержатся в монографии [1].

Теорема 1 для чисто квадратичного случая (без линейной добавки Dx) содержится в монографии [2].

Литература

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. — М. : Наука, 1984. — 288 с.

2. Галеев Э.М. Методы оптимизации / Э.М. Галеев — Баку, 2016. — 200 с.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ[1]

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ; Долгопрудный, МФТИ)
askhabov@yandex.ru

В данной работе рассматривается нелинейное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x H(x+t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x K(x-t)u'(t)\,dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

где $H(x)$, $K(x)$ и $f(x)$ на полуоси $[0,\infty)$ удовлетворяют условиям:

$$H \in C^1[0,\infty),\ H(x) \text{ не убывает и } H(0) \geqslant 0, \quad (2)$$

$$K \in C^1[0,\infty),\ K'(x) \text{ не убывает},\ K(0) = 0 \text{ и } K'(0) > 0, \quad (3)$$

$$f \in C^1[0,\infty),\ f(x) \text{ не убывает и } f(0) = 0. \quad (4)$$

Решения уравнения (1) разыскиваются в классе:

$$Q_0^1 = \left\{u(x) : u \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty),\ u(0) = 0,\ u(x) > 0 \text{ при } x > 0\right\}.$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00177).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (2), (3) и (4). Если* $u \in Q_0^1$ *и является решением уравнения (1), то для любого* $x \in [0, \infty)$*:*

$$L(x) \equiv \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [H(2t) + K'(0)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)} \leqslant u(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\, dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv R(x).$$

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свертки T:

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)] u(t)\, dt + f(x) \right)^{1/\alpha}, \ \alpha > 1,$$

в классе $P_b = \{u(x) : u \in C[0, b] \ \text{ и } \ L(x) \leqslant u(x) \leqslant R(x)\}$, где $b > 0$.

Введем в классе P_b метрику

$$\rho_b(u_1, u_2) = \sup_{0 < x \leqslant b} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{R(x)} \tag{6}$$

и предположим, что выполняется условие

$$q = \sup_{0 < x \leqslant b} \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\, dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{(\alpha - 1) \int_0^x [H(2t) + K'(0)] dt} < 1. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия (2), (3), (4) и (7), то интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет в* Q_0^1 *(и в* P_b *при любом* $b > 0$*) единственное решение* $u^*(x)$*. Это решение удовлетворяет неравенствам* $L(x) \leqslant u^*(x) \leqslant R(x)$ *и его можно найти в полном метрическом пространстве* P_b *методом последовательных приближений по формуле* $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *со сходимостью по метрике (6). При этом справедлива оценка погрешности:*

$$\rho_b(u_n, u^*) \leqslant \frac{q^n}{1 - q} \cdot \rho_b(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $u_0 \in P_b$ *есть начальное приближение (произвольная функция).*

Теорема 1 обобщает теорему 2 из работы [1], в которой изучено уравнение (1) при $f(x) \equiv 0$. Следуя работе [2], аналогично можно исследовать уравнение вида (1) с переменными коэффициентами. Относительно приложений интегральных уравнений, тесно связанных с интегро-дифференциальным уравнением (1), см. [3].

Литература

1. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальные уравнение с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью / С.Н. Асхабов // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2022. — Т. 507, № 1. — С. 10–14.

2. Askhabov S.N. Nonlinear convolution integro-differential equation with variable coefficient / S.N. Askhabov // Fractional Calculus and Appl. Anal. — 2021. — Vol. 24, № 3. — P. 848–864.

3. Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью / С.Н. Асхабов, М.А. Бетилгириев — Ростов-на-Дону : ДГТУ, 2001. — 154 с.

О ПРОВЕРКЕ «ПРОСТОЙ ОДНОРОДНОСТИ» ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^4$ [1]

А.В. Атанов, А.В. Лобода (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)

atanov.cs@gmail.com, lobvgasu@yandex.ru

Вещественная гиперповерхность $M \in \mathbb{C}^n$ называется (локально) голоморфно однородной в фиксированной точке, если существует вещественная алгебра Ли голоморфных (вблизи данной точки) векторных полей, касательных к M, такая что значения полей из этой алгебры в обсуждаемой точке накрывают всю касательную плоскость к M.

Голоморфно однородная гиперповерхность называется *просто однородной*, если не существует алгебры Ли, удовлетворяющей условию однородности, и имеющей размерность, большую чем $2n - 1$.

В пространстве $\mathbb{C}^4$ получены следующие семейства «претендентов» на простую однородность ($A, B, C \in \mathbb{R}$):

$$y_3 = y_1 y_2 + y_4^A |z_1|^B e^{C \arg z_1}, \tag{1}$$

$$(v - x_2^2)x_1^2 = A(x_3 - y_1 x_2)^2, \tag{2}$$

$$(y_4 - By_1^2 + 3x_1^2 y_2 + y_1^2 y_2 + 3x_1 y_3)^2 = Cy_1^3 - y_1^2(2x_1 y_2 + y_3)^2. \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497) и РНФ (проект № 23-21-00109).

Поверхности из семейств (1)–(3) являются Леви-невырожденными при «общем положении» определяющих параметров, а их формы Леви имеют сигнатуру $(+,+,-)$. Согласно [1], стабилизатор любой Леви невырожденной гиперповерхности в $\mathbb{C}^{n+1}$, сигнатура формы Леви которой имеет ровно один минус, линеаризуется в некоторых нормальных по Мозеру (см. [2]) координатах. Близкие к id преобразования из этого стабилизатора имеют вид

$$z^* = Cz,\ w^* = \lambda^2 w,\ \text{где } C = \lambda e^{i\theta} V,\ \lambda, \theta \in \mathbb{R},\ V \in SU(n-1,1). \quad (4)$$

Преобразованиями из стабилизатора вещественной гиперповерхности бесконечная совокупность многочленов N_{klm} из ее нормального уравнения

$$\operatorname{Im} w = \langle z, z \rangle + \sum_{k,l,m} N_{klm}(z, \bar{z})\,(\operatorname{Re} w)^m \quad (5)$$

должна сохраняться в следующем смысле:

$$N_{klm}(Cz, \overline{Cz})\lambda^{2m} = \lambda^2 N_{klm}(z, \bar{z}). \quad (6)$$

Для семейств (1)–(3) получение выводов о простой однородности представляется возможным после проверки условий (6) лишь для двух младших многочленов N_{220} и N_{320} из уравнения (5).

Пример. Рассмотрим частный случай поверхности, определяемой уравнением (1), при $A = 1/2$, $B = 1$, $C = 0$:

$$(y_3 - y_1 y_2)^2 = y_4(x_1^2 + y_1^2). \quad (7)$$

Предложение 1. Многочлен N_{220}, получаемый простейшей нормализацией уравнения (7), содержит 18 слагаемых и сохраняется лишь следующими преобразованиями вида (4):

$$C = e^{i\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+it & -it \\ 0 & it & 1-it \end{bmatrix},\ t, \theta \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Замечание 1. Пара (N_{220}, N_{320}), получаемая простейшей нормализацией, допускает $T(N_{220}, a)$-возмущения (см. [3, ф-ла (1.12)]) многочлена N_{320} с произвольным вектором $a \in \mathbb{C}^3$.

Предложение 2. При любом векторе $a \in \mathbb{C}^3$ сохранение возмущенной пары (N_{220}, N_{320}^*) преобразованием вида (8) возможно лишь при тривиальных параметрах t, θ.

Замечание 2. В том же семействе (1) имеются сферические поверхности с «богатыми» стабилизаторами, например, поверхность $y_3 - y_1y_2 = y_4^2(x_1^2 + y_1^2)$. В (любом) нормальном уравнении этой поверхности многочлен N_{220} является нулевым.

Литература

1. Ежов В.В. Линеаризация группы стабильности одного класса гиперповерхностей / В.В. Ежов // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 3. —С. 181–182.

2. Chern S.S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S.S. Chern, J.K. Moser // Acta Math. — 1974. — V. 133, № 3. — P. 219–271.

3. Лобода А.В. Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А.В. Лобода // Труды МИАН. — 2001. — Т. 235. — С. 114–142.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.С. Баландин (Пермь, ПНИПУ)

balandin-anton@yandex.ru

В работе изучается экспоненциальная устойчивость линейного автономного дифференциального уравнения нейтрального типа

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum\limits_{j=1}^{J} a_j \dot{x}\,(t-h_j) = \int_0^{\upsilon} x(t-s)\,dr(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \dot{\varphi}(\xi), \quad \xi < 0, \end{cases}$$

где $J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $h_j, \upsilon \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0,\upsilon] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса.

Исследование устойчивости уравнения (1) приводит к изучению расположения нулей характеристической функции

$$g(p) = p\left(1 - \sum_{j=1}^{J} a_j e^{-ph_j}\right) - \int_0^{\upsilon} e^{-p\xi}\,dr(\xi), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Отличительной особенностью характеристических функций дифференциальных уравнений нейтрального типа является наличие вертикальных цепей нулей (бесконечно много нулей лежат в вертикальной полосе конечной ширины). Если эти цепи лежат справа от мнимой оси, то уравнение неустойчиво; если слева от мнимой оси и отделены от нее, то экспоненциально устойчиво. Более того, отделённость корней характеристической функции от мнимой оси есть необходимое условие экспоненциальной устойчивости.

В работах [1–4] были получены эффективные критерии экспоненциальной устойчивости для различных классов уравнений нейтрального типа вида (1) и построены области экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров исходного уравнения.

Однако полученные критерии экспоненциальной устойчивости для уравнения (1) утверждают только существование показателя экспоненты и его знак, но не дают оценки. Поэтому интересна ещё одна задача: точная оценка показателя экспоненты в зависимости от значений параметров (коэффициентов и запаздываний) уравнения (1). Для уравнения

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = bx(t-1), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

в работе [5] получена точная оценка показателя решений.

Литература

1. Баландин А.С. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа / А.С. Баландин, В.В. Малыгина // Математические труды. — 2020. — Т. 23, № 2. — С. 3–49.

2. Баландин А.С. Об устойчивости некоторых автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа / А.С. Баландин // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий : сб. тр. XII междунар. конф. «ПМТУКТ-2019». — Воронеж : ВГУИТ, 2019. — С. 59–63.

3. Баландин А.С. Редукция дифференциальных уравнений нейтрального типа к уравнениям запаздывающего типа / А.С. Баландин // Динамические системы. — 2020. — Т. 10(38), № 1. — С. 7–22.

4. Баландин А.С. Об эффективных признаках экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений нейтрального типа / А.С. Баландин // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2022) : материалы Международной научной конференции. Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022г. : в 2-х ч. — Ч.1. — Новополоцк : Полоцкий государственный университет, 2022. — С. 81–83.

5. Баландин А.С. О точной оценке показателя решений линейного автономного дифференциального уравнения нейтрального ти-

па / А.С. Баландин // Вторая конференция математических центров России (7–11 ноября 2022 г.): сборник тезисов. — Москва: Издательство Московского университета, 2022. — С. 27–29.

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

О.П. Барабаш (Воронеж, ВГУ)
navyS9@yandex.ru

Рассмотрим математическую модель, описывающую распространение эпидемий и динамику народонаселения, которая базируется на логистическом уравнении:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au(S-u), \tag{1}$$

где A-постоянная роста, S-теоретический максимум для числа u. Построение численного решения данного уравнения проведем в прямоугольной области $\overline{D} = (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T)$ с начальным условием $u(x,0) = u_0(x), 0 \leqslant x \leqslant 1$, и ненулевыми граничными условиями $u(0,t) = u_1(t), u(1,t) = u_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T$. Введем сетку

$$\overline{w}_{h\tau} = \overline{w}_h \times w_\tau = \{x_i = ih, i = 0,1,..,N\} \times \{t_j = j\tau, j = 0,1,..,M\}$$

с шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/M$.

Для аппроксимации оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ используем шеститочечный шаблон [1], состоящий из узлов

$$(x_{i\pm1}, t_{j+1}), (x_i, t_{j+1}), (x_{i\pm1}, t_j)$$

с центром в точке (x_i, t_{j+1}). Значение сеточной функции в узле (x_i, t_j) обозначим через y_i^j. Проведем разностную аппроксимацию: заменим $\frac{\partial u}{\partial t}$ первой разностной производной, а $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - второй разностной производной. Используя обозначение $u_{xx} = \Lambda u$ и вводя произвольный вещественный параметр $\sigma \in (0,1)$,получим разностную схему "с весами"[2]:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma) y_i^j) + \varphi_i^j, 0 < i < N, 0 \leqslant j < M, \tag{2}$$

где φ_i^j- сеточная аппроксимация правой части $f(u) = Au(S-u)$ на внутренних узлах сетки,а

$$\Lambda y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Начальные и краевые условия аппроксимируем точно

$$y_0^j = u_1^j, y_N^j = u_2^j, \tag{3}$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i), \tag{4}$$

Тогда невязка схемы определяется следующим уравнением

$$\psi = \Lambda(\sigma\widehat{u} + (1-\sigma)u) - u_t + \varphi,$$

$$\varphi = (A-\beta)(S-u)\widehat{u} + \beta(S-\widehat{u})u.$$

Считая функцию $u(x,t)$ достаточно гладкой, а оператор Λ линейным, применим разложение в ряд Тейлора в окрестности точки (x,t), получим:

$$\psi = -Au(S-u) + (A-\beta)(S-u)u + \beta(S-u)u + O(h^2+\tau) = O(h^2+\tau).$$

С помощью элементарных преобразований схему (2)с краевыми условиями (3) приводим к виду

$$A_i y_{i-1}^{j+1} + B_i y_i^{j+1} + C_i y_{i+1}^{j+1} = D_i, i = 1,..,N-1,$$
$$y_0^{j+1} = u_1^{j+1}, y_N^{j+1} = u_2^{j+1}.$$

Расширенная матрица этой системы является трехдиагональной, т.к. ненулевые элементы расположены по главной диагонали и двум соседним. Для ее решения применяется метод прогонки [3].

Таким образом, рассмотренная схема позволила добиться второго порядка аппроксимации по h и первого по τ ,а также сведения нелинейного уравнения (1) к системе линейных алгебраических уравнений, решение которых осуществляется методом прогонки.

Литература

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1971. — 553 с.

2. Самарский А.А. Численные методы: Учебное пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 432 с.

3. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Молер. — М. : Мир, 1969.

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова
(Воронеж, ВГУ, ВГПУ, ВГТУ)
g.garkavenko@mail.ru

Ограниченный оператор J, действующий в банаховом пространстве X, назовем инволюцией, если $J^2 = I$, где I — тождественный оператор.

Рассмотрим простейший оператор инволюции $J : \ell_p \to \ell_p, p \in [1, \infty]$, действующий по формуле $Jx(n) = x(-n), n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_p$. Примеры исследования оператора с инволюцией имеется, например, в [1, 2].

Символом ℓ^∞ обозначим пространство всех последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (не обязательно ограниченных). Для любой последовательности $\alpha \in \ell^\infty$ определим оператор $A_\alpha = \alpha I$, $A_\alpha x = \alpha x, \alpha \in \ell^\infty, x \in \ell_p$, $D(A_\alpha) = \{x \in \ell_p, \alpha x \in \ell_p, p \in [1, \infty]\}$. Оператор A_α назовем диагональным оператором.

Введем разностный оператор $A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta J = alphaI + \beta J : D(A) \subset \ell_p \to \ell_p, p \in [1, \infty]$. Отметим, что $I = A_{e,0}$, где $e \in \ell_\infty, e(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$, $J = A_{0,e}$, символом 0 обозначена нулевая последовательность.

Каждой последовательности $x \in l_2$ поставим в соответствие последовательность $\overline{x} \in l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ формулой $\overline{x}(n) = \{x(n), x(-n)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Такая замена была предложена в [3]. Пусть $U : \ell_2 \to \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, $Ux = \overline{x}$. Введем оператор $\widetilde{B}_{\alpha,\beta}$, который связан с оператором $A_{\alpha,\beta}$ соотношением $\widetilde{B}_{\alpha,\beta} = UA_{\alpha,\beta}U^{-1}$.

Непосредственным подсчетом доказывается

Лемма 1. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ унитарно эквивалентен оператору $\widetilde{B}_{\alpha,\beta} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2) \to \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ вида*

$$(\widetilde{B}_{\alpha,\beta}x)(n) = \begin{pmatrix} \alpha(n) & \beta(n) \\ \beta(-n) & \alpha(-n) \end{pmatrix} \overline{x}(n) = Q(n)\overline{x}(n), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1)$$

Итак, $\sigma(\widetilde{B}_{\alpha,\beta}) = \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}\sigma(Q(n))$ и далее необходимо вычислить собственные значения матриц второго порядка $Q(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, что не составляет труда.

Из представления (1) вытекает

Лемма 2. *Спектр оператора $A_{\alpha,\beta}$ есть замыкание множества чисел вида*

$$\Big\{\alpha(0), \frac{\alpha(n)+\alpha(-n) \pm \sqrt{(\alpha(n)-\alpha(-n))^2+4\beta(n)\beta(-n)}}{2}\Big\}.$$

Далее будем предполагать, что оператор $A_{\alpha,\beta} : D(A_{\alpha,\beta}) \subset \ell_2 \to \ell_2$ самосопряжен. Возмутим его оператором B, таким, что он принадлежит двустороннему операторному идеалу $\sigma_2(\ell_2)$. Тогда для возмущенного оператора $A_{\alpha,\beta} + B$ можно применить теоремы из [4, 5], касающиеся локализации спектра возмущенного самосопряженного оператора.

Теорема 1. *Пусть $A_{\alpha,\beta} = A^*_{\alpha,\beta}$ и $B \in \sigma_2(\ell_2)$. Тогда существует такая четная вещественная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ суммируемая с квадратом модуля на $\mathbb{R}$, что для $\lambda \in \sigma(A_{\alpha,\beta} + B)$ выполняется неравенство $|Im\lambda| \leqslant f(Re\lambda)$.*

Литература

1. Бурлуцкая М. Ш. Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения / М. Ш. Бурлуцкая. — Воронеж : Научная книга, 2020. — 224 с.

2. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. О спектральных свойствах одного разностного оператора с инволюцией / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2022. — Т. 208. — С. 15–23.

3. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // Докл. РАН. — 2007. — Т. 414, №4. — С. 443–446.

4. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал, Н.Б. Ускова // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 139–147.

5. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. О спектральных свойствах классических операторов Дирака и операторов с инволюцией в однородных пространствах функций / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал, Н.Б. Ускова // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 10. — С. 1299–1304.

ДИАГРАММА КИРБИ ПОЛЯРНЫХ ПОТОКОВ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

И.Х. Баховаддинов (Нижний Новгород, НИУ ВШЭ)
bakhovaddinov@gmail.com

Пусть M^n — гладкое замкнутое многообразие размерности n. Напомним, что поток f^t на M^n называется полярным, если он структурно-устойчивый и имеет неблуждающее множество Ω_{f^t}, содержащее ровно одно источниковое состояние равновесия, одно стоковое и произвольное конечное число седловых состояний равновесия. В докладе рассматривается класс $P(M^4)$ полярных потоков на M^4 такой, что для любого $f^t \in P(M^4)$ множество седловых состояний равновесия состоит только из состояний равновесия, устойчивое и неустойчивое многообразия которых двумерны. Поскольку трансверсальнось пересечения инвариантных многообразий является необходимым условием структурной устойчивости, из определения класса непосредсвенно следует, что $W^s_p \cap W^u_q = \varnothing$ для любых двух седловых состояний равновесия p, q произвольного потока $f^t \in P(M^4)$. В этом случае легко показать, что многообразие M^4 является односвязным.

В силу [1] для потока $f^t \in P(M^4)$ существует энергетическая функция $\varphi : M^4 \to [0, 4]$ — функция Морса, строго убывающая вдоль незамкнутых траекторий потока, множество критических точек которой совпадает с множеством состояний равновесия потока f^t, причем $\varphi(p) = dimW^u_p$ для любого $p \in \Omega_{f^t}$.

Положим $\Sigma_{f^t} = \varphi^{-1}(1)$, $\Sigma' = \varphi^{-}(3)$, $l_\sigma = W^u_\sigma \cap \Sigma_{f^t}$ для любого седлового состояния равновесия σ, $l'_\sigma = W^s_\sigma$. Из трансверсальности пересечения сфер Σ_{f^t}, Σ' с инвариантными многообразиями седел следует, что l_σ, l'_σ являются простыми замкнутыми гладкими кривыми (узлами). Обозначим через L_{f^t} (L') объединение всех узлов l_σ (l'_σ). Множества $\Sigma_{f^t} \setminus L_{f^t}, \Sigma' \setminus L'$ гомеоморфны при помощи гомеоморфизма $\eta : \Sigma_{f^t} \setminus L_{f^t} \to \Sigma' \setminus L'$ такого, что для любой точки $x \in \Sigma_{f^t} \setminus L_{f^t}$ точка η_x является точкой пересечения траектории потока f^t, проходящей через точку x, со сферой Σ'. Поэтому сфера Σ' может быть получена из Σ_{f^t} хирургией вдоль зацепления L_{f^t} и для каждого узла l_σ определено целое число n_σ (оснащение), характеризующее эту хирургию (см., например, [2]). Совокупность таких оснащенных узлов называется диаграммой Кирби многообразия M^4.

Теорема *Потоки $f^t, g^t \in P(M^4)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{f^t} \to$*

Σ_{g^t} *такой, что* $h(L_{f^t}) = L_{g^t}$ *и* $n_\sigma = n_{h(\sigma)}$ *для любого седлового состояния равновесия* $\sigma \in \Omega_{f^t}$.

Литература

1. K. R. Meyer, Energy Functions for Morse Smale Systems / Amer. J. Math. — 90:4 (1968), — 1031-1040

2. Мандельбаум Р. Четырехмерная топология. — М.: Мир, 1981. — 286 с.

О Р-СВЯЗНОСТИ СОЛНЦ[1]

Б.Б. Беднов (Москва, ПМГМУ)
bednov_b_b@staff.sechenov.ru

Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$. Множество всех *ближайших точек* из множества M для $x \in X$ обозначается

$$P_M(x) = \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}.$$

Для непустого подмножества $M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M(x)$ (*точка светимости*) такая, что $y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big)$ для всех $\lambda \geqslant 0$, то есть для каждой точки на луче, выходящем из y к x, точка y является ближайшей в M. Множество $M \subset X$ называется *солнцем* [1], если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности для M.

Известны следующие результаты о связности солнц:

1) в конечномерном линейном нормированном пространстве любое солнце связно [2];

2) в конечномерном линейном нормированном пространстве любое солнце линейно связно [3];

3) существует бесконечномерное пространство, в котором есть несвязное солнце [4].

Множество M называется P-связным, если $P_M(x)$ связно для любого $x \in X$ [5].

О P-связности солнц в конечномерных пространствах известно:

1) в двумерном пространстве солнце P-связно [6];

2) в l^n_∞солнце P-связно [7];

3) в (BM)-пространствах солнце P-связно [8].

В обзоре [9] сформулирована проблема 12: будет ли солнце в пространстве l^n_1 P-связным?

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00415).

Теорема 1. *В l_1^3 солнце P-связно.*

Продолжая исследования солнц в цилиндрических пространствах ([10], [11]) удалось доказать следующий результат.

Теорема 2. *В $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ при $\dim Y = 2$ солнце P-связно.*

Литература

1. Ефимов Н.В. Некоторые свойства чебышёвских множеств / Н.В. Ефимов, С.Б. Стечкин // ДАН СССР. — 1958. — Т. 118, № 1. — С. 17–19.

2. Кощеев В.А. Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах / В.А. Кощеев // Матем. заметки. — 1975. —Т. 17, № 2. — С. 193–204.

3. Brown A.L. On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces / A.L. Brown // Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. — 1988. — Vol. 20. — P. 1–15.

4. Кощеев В.А. Пример несвязного солнца в банаховом пространстве / В.А. Кощеев // Матем. заметки. — 1979. — Т. 26, № 1. — С. 89–92.

5. Власов Л.П. О чебышёвских и аппроксимативно выпуклых множествах / Л.П. Власов // Матем. заметки. — 1967. — Т. 2, № 2. — С. 191–200.

6. Berens H. Suns and contractive retracts in the plane / H. Berens, L. Hetzelt // Теория приближений функций (Тр. Междунар. конф., Киев, 31 мая — 5 июня, 1983) / Под ред. Н. П. Корнейчука и др., — М. : Наука. — 1983. — С. 483–487.

7. Berens H. Die metrische Struktur der Sonnen in $l^\infty(n)$ / H. Berens, L. Hetzelt // Aequat. Math. — 1984. — Vol. 27. — P. 274–287.

8. Brown A.L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional / A.L. Brown // Math. Ann. — 1987. — Vol. 279. — P. 87–101.

9. Алимов А.Р. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств / А.Р. Алимов, И.Г. Царьков // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 4. — С. 21–91.

10. Алимов А.Р. Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в трёхмерных пространствах / А.Р. Алимов, Б.Б. Беднов // Матем. сб. — 2021. — Т. 212, № 5. — С. 37–57.

11. Беднов Б.Б. Конечномерные пространства, в которых класс чебышёвских множеств совпадает с классом замкнутых и монотонно линейно связных множеств / Б.Б. Беднов // Матем. заметки. — 2022. — Т. 111, вып. 4. — С. 483–493.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ И КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ[1]

С.И. Безродных (Москва, ФИЦ ИУ РАН)
sbezrodnykh@mail.ru

Рассматриваемая в докладе гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b,\, c;\, \mathbf{z})$, см. [1], [2], зависит от N комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_N) =: \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ и комплексных параметров $(a_1, \ldots, a_N) =: \mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$, $b, c \in \mathbb{C}$. Эта функция может быть определена в виде следующего интеграла типа Эйлера [1], [2]:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b,\, c;\, \mathbf{z}) \,=\, \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{\prod_{j=1}^N (1-tz_j)^{a_j}} dt, \tag{1}$$

где $\mathbf{z} \in \left\{ |\arg(1-z_j)| < \pi,\, j = \overline{1,N} \right\}$, $\operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re}(c-b) > 0$, $\Gamma(s)$ — гамма–функция. В поликруге $\mathbb{U}^N := \left\{ |z_j| < 1,\, j = \overline{1,N} \right\}$ функция $F_D^{(N)}$ представима в виде N–кратного гипергеометрического ряда

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b,\, c;\, \mathbf{z}) \,:=\, \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \cdots k_N!}\, z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}\,; \tag{2}$$

суммирование в (2) ведется по мультииндексу $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_N)$ с неотрицательными целыми компонентами $k_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,N}$, для которого $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j$. Символ Похгаммера $(a)_m := \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$ при неотрицательных m имеет вид произведения: $(a)_0 = 1$, $(a)_m = a(a+1)\cdots(a+m-1)$.

Функция $F_D^{(N)}$, определяемая из (1) или (2), удовлетворяет следующей системе из N линейных уравнений с частными производными, см. [1], [2]:

$$\begin{gathered} z_j(1-z_j)\frac{\partial^2 u}{\partial {z_j}^2} + (1-z_j) \sum\nolimits_{k=1}^{\prime N} z_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k} + \\ + \Big[c - (1+a_j+b)z_j\Big] \frac{\partial u}{\partial z_j} - a_j \sum\nolimits_{k=1}^{\prime N} z_k \frac{\partial u}{\partial z_k} - a_j b u = 0,\ j = \overline{1,N}; \end{gathered} \tag{3}$$

здесь «штрих» над суммой означает, что суммирование ведется по $k \neq j$. Известно [1], [2], что в окрестности точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ эта системы имеет $N+1$ линейно независимых решений.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-21-00727).

В докладе представлены результаты работ [3], [4] по решению *проблемы аналитического продолжения* функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$. Эта проблема заключается в том, чтобы вне поликруга $\mathbb{U}^N$ указать представления вида

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \lambda_j \, u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \qquad \mathbf{z} \notin \mathbb{U}^N, \tag{4}$$

где набор функций $\{u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})\}_{j=0}^{N}$ является базисом в пространстве решений системы (3), а λ_j — некоторые коэффициенты. В статьях [4], [5] построена система формул аналитического продолжения вида (4), где u_j выписаны явно в терминах гипергеометрических рядов Горна N переменных, а коэффициенты λ_j выражены в виде конечных произведений гамма-функций. Области сходимости построенных формул в совокупности покрывают $\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N$, так что для каждой точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N$ можно указать по крайней мере одно представление (4), в котором все ряды u_j в данной точки сходятся экспоненциально.

В статьях [3], [5] формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы применены для разработки эффективного алгоритма построения конформного отображения многоугольников в ситуации резко неравномерного расположения прообразов вершин. Такая ситуация, называемая эффектом «кроудинга» (от английского «to crowd» — «толпиться»), может приводить к серьезным вычислительным трудностям при использовании стандартных методов, см. об этом [6]–[8]. В докладе продемонстрировано, что применение полученных результатов об аналитическом продолжении функции Лауричеллы позволяет использовать кроудинг в качестве благоприятствующего фактора. Представлены примеры решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля — Шварца и вычисления конформного отображения многоугольников сложного вида.

Литература

1. Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili / G. Lauricella // Rendiconti Circ. math. Palermo. — 1893. — V. 7.— P. 111–158.

2. Exton H. Multiple hypergeometric functions and application / H. Exton. — New York : J. Willey & Sons inc, 1976.

3. Безродных С.И. Гипергеометрическая функция Лауричеллы, задача Римана — Гильберта и некоторые приложения / С.И. Безродных // Успехи матем. наук. 2018. — Т. 73,№ 6.— С. 3–94.

4. Безродных С.И. Формулы для вычисления функции Лауричеллы в ситуации кроудинга переменных / С.И. Безродных //

Журн. вычисл. мат. и матем. физ. — 2022. — Т. 62, № 12. — С. 2054–2076.

5. Безродных С.И. Функция Лауричеллы и конформное отображение многоугольников / С.И. Безродных // Матем. заметки. — 2022. — Т. 112, № 4. — С. 500–520.

6. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis, V. 3 / P. Henrici. — New York : John Wiley and Sons, 1991.

7. Trefethen L.N. Schwarz — Christoffel transformation / L.N. Trefethen, T.A. Driscoll. — Campridge : Cambridge university press, 2005.

8. Papamichael N. Numerical conformal mapping. Domain decomposition and the mapping of quadrilaterals / N. Papamichael, N. Stylianopoulos. Hackensack, NJ : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.— 229 pp.

ДУАЛИЗМ ТЕОРИЙ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян
(Москва, ЦЭМИ РАН, НИУ ВШЭ)
lbeklaryan@outlook.com, abeklaryan@hse.ru

Совокупность конструкций $\big(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g\big)$ называется *солитонным букетом* и однозначно определяется набором $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, где:

(1) конечно порожденная группа Υ с образующими $\{\check{\gamma}_1, \ldots, \check{\gamma}_d\}$ и выделенными элементами $\overline{\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}}$, а также соответствующее пространство $\mathcal{K}^n_\Upsilon = \prod_{\gamma\in\Gamma} R^n_\gamma$, $R^n_\gamma = \mathbb{R}^n$ бесконечных последовательностей $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $x_\gamma \in \mathbb{R}^n$, $x_\gamma = (x^1_\gamma, \ldots, x^n_\gamma)'$ со стандартной топологией полного прямого произведения;

(2) конечно порожденная группа сдвигов $\mathbb{T}_\Upsilon = \{T_\gamma : \gamma \in \Upsilon\}$, действующая в пространстве $\mathcal{K}^n_\Upsilon$ по следующему правилу

$$T_{\bar{\gamma}}\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Upsilon} = \{x_{\gamma\bar{\gamma}}\}_{\gamma\in\Upsilon}, \bar{\gamma} \in \Upsilon, \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Upsilon} \in \mathcal{K}^n_\Upsilon, T_{\bar{\gamma}} \in \mathbb{T}_\Upsilon;$$

(3) эпиморфизм $\eta : \Upsilon \to Q$, где Q группа диффеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, и, соответственно, Q конечно порожденная группа с образующими $\check{q}_j = \eta(\check{\gamma}_j)$, $j = 1, \ldots, d$ и выделенными элементами $q_j = \eta(\gamma_j)$, $j = 1, \ldots, s$;

(4) функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \to \mathbb{R}^n$ измеримая по $t \in \mathbb{R}$ при каждом $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{R}$ и при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ непрерывная по $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{R}^n$ (условия Каратеодори);

(5) оператор

$$G_\Gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{K}^n_\Upsilon \to \mathcal{K}^n_\Upsilon, \quad \Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$$

такой, что координата $\big(G_\Gamma(t, \varkappa)\big)_e$ бесконечномерной вектор-функции $G_\Gamma(t, \varkappa)$, соответствующая единичному элементу e группы Υ, зависит только лишь от конечного числа координат и равна

$$\big(G_\Gamma(t, \varkappa)\big)_e = g\big(t, x_{\gamma_1}, \ldots, x_{\gamma_s}\big);$$

(6) при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ выполняются "почти перестановочные" соотношения

$$T_{\bar\gamma} G_\Gamma(t, \varkappa) = \frac{d}{dt}\eta(\bar\gamma)(t) \cdot G_\Gamma(\eta(\bar\gamma)(t), T_{\bar\gamma}\varkappa), \forall \varkappa \in \mathcal{K}^n_\Upsilon, \forall \bar\gamma \in \Upsilon.$$

Для солитонного букета $\big(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g\big)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ в фазовом пространстве $\mathcal{K}^n_\Upsilon$ с фазовой переменной $\varkappa \in \mathcal{K}^n_\Upsilon$ определим систему

$$\dot\varkappa(t) = G_\Gamma(t, \varkappa), \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\varkappa(\eta(\bar\gamma)(t)) = T_{\bar\gamma}\varkappa(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \bar\gamma \in \Upsilon, \tag{2}$$

где производная в бесконечномерном ОДУ (1) понимается как *производная по Гато*, а нелокальные ограничения (2) означают, что для решений системы *сдвиг по пространству равен сдвигу по времени.* Решения такой системы называются *решениями типа бегущей волны (солитонные решения)*, а группа Q называется *характеристикой бегущей волны.*

В паре с системой (1)-(2) рассматривается функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot x(t) = g(t, x(q_1(t), \ldots, q_s(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Каждый солитонный букет $\big(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g\big)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ определяет дуальную пару $\big(G_\Gamma | Q, g\big)$ *функция-оператор.* Для каждого солитонного букета (дуальной пары) существует *канонический солитонный букет (каноническая дуальная пара)* вида $\big(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma | Q, g\big)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ $\big(\big(G_\Gamma | Q, g\big)\big)$, где $\mathcal{I}$ тождественный автоморфизм группы Q. Для заданных Q, g канонический букет выделяется наиболее простой структурой набора $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ и, соответственно, оператора G_Γ.

В теории пластической деформации изучается бесконечномерная динамическая система

$$m\ddot{y}_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \varphi(y_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

где потенциал $\varphi(\cdot)$, в частности, задается гладкой периодической функцией. Уравнение (4) является системой с потенциалом Френкеля-Конторовой [1]. Такая система является конечно разностным аналогом нелинейного волнового уравнения, моделирует поведение счетного числа шаров массы m, помещенных в целочисленных точках числовой прямой, где каждая пара соседних шаров соединена между собой упругой пружиной, и описывает распространение продольных волн в бесконечном однородном абсолютно упругом стержне. Наиболее важный класс волн описывается решениями типа бегущих волн (солитонные решения).

С такой системой связано изучение канонического солитонного букета $\big(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma | Q, g\big)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$, где: $Q =< \check{q}(t) = t + \tau >, \tau > 0$ и, соответственно, $Q \cong \mathbb{Z}$; $d = s = 1$ и выделенный элемент q группы Q совпадает с образующей $\check{q}$; фазовое пространство $\mathcal{K}^2_{\mathbb{Z}} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} R^2_i$, $R^2_i = \mathbb{R}^2$ (верхний индекс 2 обусловлен тем, что уравнения (1) второго порядка) и соответствующие оператор G_Γ и функция g.

Представленное исследование демонстрирует фрагмент некоторого общего подхода. Для такого подхода разработан формализм [2], центральным элементом которого является существование взаимно однозначного соответствия между солитонными решениями бесконечномерной динамической системы (1) (решениями системы (1)-(2)) и решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3). Для представленного конечно разностного аналога волнового уравнения с нелинейным потенциалом общего вида (4) ключевым является также и наличие ряда дополнительных симметрий. Для такой системы установлено существование семейства ограниченных солитонных решений [4]. Ранее такая система была изучена в случае квадратичного потенциала [3].

Литература

1. Френкель Я.И. О теории пластической деформации и двойственности / Я.И. Френкель, Т.А. Конторова // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8. — С. 89–97.

2. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциональных уравнений. Групповой подход / Л.А. Бекларян. — М. : Факториал Пресс, 2007. — 286 с.

3. Бекларян Л.А. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с сильно нелинейным потенциалом / Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2024–2039.

4. Бекларян Л.А. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с нелинейным потенциалом общего вида / Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2022. — Т. 62, № 6. — С. 933–950.

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Д.В. Белова (Воронеж, ВГУ)
dianabelova123@yandex.ru

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения с инволюцией

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

где β — вещественное число, $x \in [0;1]$, $t \in (-\infty;+\infty)$, все функции, входящие в (1)–(2) комплекснозначные. Решение ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0;1] \times (-\infty;+\infty)$.

В [1] в случае $q \in C^1[0,1]$ и $f(x,t \equiv 0$, при минимальных требованиях на $\varphi(x)$ доказано существование классического решения. При этом использовались уточненные асимптотики для собственных значений и собственных функций, а также специальное преобразование формального решения (ускорение сходимости ряда формального решения).

Здесь мы получим теорему о классическом решении, используя представление формального решения через контурные интегралы от резольвенты спектрального оператора. Предполагаем выполненными минимальные для существования классического решения условия: $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$.

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ — классическое решение задачи*(1)–(2), *то оно единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\Big[R_\lambda\varphi(x)e^{\lambda\beta it} +$$

$$+\beta i\int_0^t R_\lambda f(\cdot,\tau)e^{\lambda\beta i(t-\tau)}d\tau\Big]. \qquad (3)$$

Здесь R_λ — резольвента оператора L: $Ly = y'(1-x) + q(x)y(x)$, $y(0) = 0$; $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda - (2\pi n + a)| = \delta\}$ — контуры в комплексной плоскости, каждый из которых содержит только одно собственное значение оператора L, $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)dt$, $\delta > 0$ и достаточно мало, $2\pi n + a$ — главная часть асимптотики собственных значений (см. [1]); $r > 0$ — фиксировано и взято таким, что все собственные значения, большие по модулю r, лежат в γ_n.

Ряд в (3) при любом фиксированном t сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0;1]$.

Кроме того, дано отличное от [1] явное представление для решения простейшей задачи (при $q = 0$), более удобное в дальнейших исследованиях. А именно, если $q(x) \equiv 0$, $f(x,t \equiv 0$, то решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\widetilde{\varphi}(x+\beta t) + \widetilde{\varphi}(x-\beta t)\Big) + \frac{1}{2}i\Big(\widetilde{\varphi}(1-x+\beta t) - \widetilde{\varphi}(1-x-\beta t)\Big),$$

где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, а на всю ось продолжается с помощью соотношений $\widetilde{\varphi}(-x) = -\widetilde{\varphi}(x)$, $\widetilde{\varphi}(1+x) = \widetilde{\varphi}(1-x)$.

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Докл. РАН. — 2010. — Т. 435, № 2. — С. 151–154.

СУПЕРПОЗИЦИЯ БЫСТРЫХ АЛГОРИТМОВ

М.С. Беспалов (Владимир, ВлГУ)
bespalov@vlsu.ru

Наиболее популярным быстрым алгоритмом цифровой обработки сигналов служит алгоритм Кули-Тьюки реализации дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Анализ и построение алгоритма удобнее проводить для матрицы обратного ДПФ вида

$$F_N = (\omega^{kj})_{k,j=0}^{N-1}, \quad \text{где } \omega = \omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}.$$

Хотя формулировка алгоритма Кули-Тьюки (см. [1]) считается устоявшейся, но и сейчас можно привнести в нее некоторые уточнения. Здесь мы говорим об использовании в матричной формулировке записи алгоритма двух операций тензорного произведения матриц: известное кронекерово произведение $\otimes$ и новое b-произведение $\oslash$, введенное в 2007 году и описанное в [2].

Предложим формулировку для общего случая матричной формы алгоритма Кули-Тьюки на примере основания $N = pqr$:

$$F_N = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot L, \tag{1}$$

где I_s — единичная указанного порядка, $L = I_p \oslash I_q \oslash I_r$, $T_1 = I_r \otimes I_q \otimes F_p$, $T_2 = I_r \otimes ((F_q \otimes I_p) \cdot D_{q,p})$, $T_3 = (F_r \otimes I_q \otimes I_p) \cdot D_{r,pq}$, $D_{s,m}$ — диагональная матрица вращений, диагональ которой разбита на s групп (здесь j от 0 до $s-1$ есть номер группы) по m элементов вида $1, \omega^j, \omega^{2j}, \ldots, \omega^{(m-1)j}$, $\omega = \omega_{sm} = e^{\frac{2\pi i}{sm}}$.

Если в (1) исключим множитель T_3, а в разложении остальных множителей уберем тензорный сомножитель I_r, то получим разложение для F_{pq}. Из сравнения разложения для F_{pq} с (1) выводится общий принцип факторизации матрицы ДПФ для произвольного числа сомножителей в N. Из него вытекает основной случай алгоритма Кули-Тьюки для $N = 2^n$: $F_N = T_n \ldots T_2 \cdot T_1 \cdot L$, где $L = I_2^{\oslash n}$, $T_j = I_{2^{n-j}} \otimes ((F_2 \otimes I_{2^{j-1}}) \cdot D_{2,2^{j-1}})$.

Если из формул для T_j удалить матрицы $D_{2,2^{j-1}}$, то получим быстрый алгоритм дискретного преобразования Уолша (ДПУ) в нумерации Пэли, из которого удалением матрицы реверсной перестановки $L = I_2^{\oslash n}$ получаем алгоритм для ДПУ-Адамара (первый алгоритм Гуда [3]).

Будем решать задачу — построить быстрый алгоритм дискретного преобразования Крестенсона с матрицей $K = F_m^{\otimes n}$ для случая составного m как суперпозицию двух быстрых алгоримтмов: внутренний для ДПФ основания m и внешний для кронекеровой степени. Решение задачи стало возможным как только в [4] была получена следующая явная формула второго алгоритма Гуда [3]

$$(F_m \oslash I_{m^{n-1}})^n. \tag{2}$$

Наиболее удобная для практических целей факторизация дискретного преобразования Крестенсона для составного основания получается при $m = 2^s$ (основание в виде степени двойки). Приведем результат для более общего случая.

Теорема. *Пусть* $m = p^s$. *Тогда*

$$F_m^{\otimes n} = (T_s \cdot T_{s-1} \cdot \ldots T_1)^n,$$

где $T_1 = F_p \oslash I_p^{\oslash s-1} \oslash I_{p^{s(n-1)}}$, *а* $T_j = I_{p^{sn-j}} \otimes ((F_p \otimes I_{p^{j-1}}) \cdot D_{p,p^{j-1}})$ *при* $j > 1$.

В данной теореме содержатся (1) при $n = 1$ и (2) при $s = 1$.

Возможна факторизация матрицы дискретного преобразования Крестенсона составного основания на основе первого (а не второго) алгоритма Гуда в качестве внешней операции. Но в этом случае все mn сомножителей T_j будут различными, что значительно усложняет описание алгоритма. При оценки числа операций оба эти варианта алгоритмов приводят к одинаковому результату $N \log N$, совпадающему с оценкой числа операций для исходных алгоритмов: Кули-Тьюки и каждому из двух алгоритмов Гуда.

Литература

1. Johnson J. A methodology for designing, modifying and implementing Fourier transform algorithms on various architectures. / J. Johnson, R.W. Johnson, D. Rodriguez, R. Tolimieri // Circuits, Systems and Signal Processing. — 1990. — V. 9, № 4. — P. 449-500.

2. Беспалов М.С. О свойствах тензорного произведения матриц. / М.С. Беспалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 4. — С. 547-561.

3. Good I.J. The interaction algorithm and practical Fourier analysis. / I.J.Good // J. Royal Stat. Soc. — 1958, Ser.B. — V. 20. — P. 361-372.

4. Беспалов М.С. Новые разложения кронекеровой степени по Гуду. / М.С. Беспалов // Проблемы передачи информации. — 2018. — Т. 54, № 3. — С. 62 - 66.

ИЕРАРХИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

С.В. Богомолов, Р.Ю. Юрмальник (Москва, МГУ)

bogomo@cs.msu.su

Термин «математическое моделирование» мы понимаем как триаду А.А. Самарского — «модель — алгоритм — программа». В основе лежит «модель», то – есть представление словесного описание явления в виде корректной математической постановки задачи, что является ключом превращения качественных знаний некой науки в количественный результат. Как писал Ф. Энгельс, наука только тогда становится наукой, когда она овладевает аппаратом математики. В наши дни следует добавить: «и компьютерной реализацией».

Основная ценность вероятностного подхода заключается в получении реалистичных моделей эволюции микроскопических объектов и сведении к макроскопическому описанию всей системы на основе иерархии математических моделей, как стохастических, так и неслучайных.

Стохастическая иерархия строится как переходы по изменению некоторого малого (или большого) параметра от микроскопических представлений, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) разрывными мерами, к диффузионным аппроксимациям, описываемым СДУ мерами Винера. Каждый шаг стохастической иерархии порождает неслучайную модель, тем самым формируя детерминированную иерархию. Эти иерархии связаны между собой и являются основой для построения соответствующих вычислительных методов.

Все современные технологии немыслимы без высокопроизводительных вычислений для моделирования сложных систем. Поэтому основная роль принадлежит распараллеливанию алгоритмов на самом глубоком уровне. Наилучшим способом достижения этой цели является использование вероятностной формализации системы, состоящей из малых объектов, так как каждая из реализаций соответствующих случайных процессов, описывающих поведение всей системы, осуществляется совершенно независимо на отдельном процессоре и результирующее усреднение делается только на завершающем этапе.

В качестве **первого** осязаемого примера покажем, как простейшая, но далеко не тривиальная модель газа из твёрдых сфер приводит к микро–мезо–макро иерархии в порядке убывания числа Кнудсена (параметра обезразмеривания) за счёт переходов описания системы с помощью случайных процессов от разрывных к диффузионным в шестимерном фазовом пространстве с редукцией к трёхмерному. Такая цепочка позволяет не только уточнять уравнения Больцмана, Фоккера-Планка-Колмогорова и Навье-Стокса, а главное, позволяет строить «сквозные» алгоритмы в рамках унифицированных методов частиц, стохастических и детерминированных или сочетающих их оба. Этот пример дает нам инструмент, который можно применять к биологическим, демографическим, эпидемиологическим моделям.

Возьмём газ из неустанно перемещающихся твёрдых сфер, взаимодействие между которыми происходит благодаря упругим столкновениям. Чтобы избежать чрезмерной информации о нашей системе, выражаемой положениями и скоростями входящих в неё частиц, самым продуктивным способом её исследования является привлечение вероятностных представлений.

Положения и скорости N молекул будем считать случайными величинами, что совершенно оправдано по физическим соображениям. Людвиг Больцман выводил своё уравнение, опираясь на этот образ и начиная с детерминированной системы, вводя случайность на этапе принятия гипотезы молекулярного хаоса – Stossanzahlanzatz. А.В. Скороход изначально рассматривает системы, состоящие из большого числа случайно взаимодействующих частиц, и исследует поведение таких систем при неограниченном возрастании их числа.

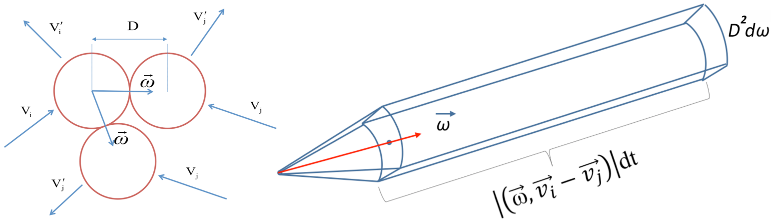

Рис. 1. Геометрия столкновений двух частиц с двумя вариантами вектора ω (слева) и цилиндр для подсчёта $N_{ij}^{reached}$ (справа)

Формализуем столкновения частиц, которые порождают процессы диффузии, вязкости и теплопроводности. Изменение скорости сталкивающихся частиц называется функцией скачка, которая легко получается из решения задачи о столкновении двух твёрдых сфер диаметра D, в качестве которого возьмём диаметр эффективного сечения рассеяния (Рис.1 слева): $v_i^{'} - v_i = f(v_i, v_j, \omega) = \omega(\omega, v_i - v_j)$.

Эволюция набора из N частиц описывается следующей системой уравнений стохастической молекулярной динамики:

$$dx_i(t) = \upsilon_i(t)dt,$$

$$d\upsilon_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} f(\upsilon_i, \upsilon_j, \omega) b_{ij}(d\omega \times dt), \ i = 1, ..., N, \tag{1}$$

$$\lambda_{ij} = \frac{N_{ij}^{collisions}}{N} = \frac{N_{ij}^{reached}}{N} = \frac{1}{N}\frac{1}{Kn} n(x_i, t)\Delta V_i,$$

где $x_i(t)$ – положения, и $\upsilon_i(t)$ – скорости частиц, являются 3D случайными процессами, $f(\cdot)$ – функция скачка, или приращение скорости υ_i из - за столкновения с частицей скорости υ_j;

b_{ij} – считающие (с результатом розыгрыша 0 или 1) независимые бернуллиевские меры (с интенсивностями, или вероятностями выпадения "1", λ_{ij}, которые очень малы – редкие столкновения, разреженный газ); они указывают на факт столкновения или его отсутствие;

для подсчёта числа столкновений $N_{ij}^{collisions}$ воспользуемся (совершенно так же, как и при выводе уравнения Больцмана) идеей о том, что число ударивших по i - частице j - частиц равно их числу $N_{ij}^{reached}$, успевших за время dt до неё долететь, а оно равно числу частиц, содержащихся в цилиндре объёмом ΔV_i, изображённом справа на Рис. 1; Kn (число Кнудсена) — параметр обезразмеривания.

Иерархия строится в соответствии с уменьшением числа Кнудсена и приводит к стохастической мезоскопической, а затем — макроскопической моделям.

Другим примером такого подхода является формализация процесса развития популяции растительного сообщества. Биологическая система из одного вида растений, вид растения характеризуется некоторым набором параметров b, d, d'. Мы будем рассматривать некую ограниченную область в которое растения рождаются и гибнут в результате взаимодействия друг с другом. Рассмотрим систему из N взаимодействующих точек пространства. x_i координата, рассматриваемая единица пространства, в котором может появиться растение $\overline{x} = \{x_1, x_2...x_N\}$, υ_i - одно из двух состояний принимающее значения: 0 - нет растительности или 1 - растительность присутствует $\overline{\upsilon} = \{\upsilon_1, \upsilon_2...\upsilon_N\}$. Для обезразмеривания модели введем параметр $Flora$.

Обезразмеревание модели: $x = x{\cdot}x^*$ - пространство, $t = t{\cdot}t^*$ - время, $b = b{\cdot}b^*$ - интенсивность рождения, $d = d{\cdot}d^*$ - интенсивность естественной гибили (старение, окружающая среда), $d' = d'{\cdot}d'^*$ -

интенсивность гибили в результате конкуренции, $Flora_b = x^* \cdot t^* \cdot b^*$, $Flora_d = x^* \cdot t^* \cdot d^*$, $Flora_{d'} = x^* \cdot t^* \cdot d'^*$.

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_i(t) = 0, \\ \mathrm{d}v_i(t) = \mathrm{b}_i^B(\mathrm{d}t) - \mathrm{b}_i^D(\mathrm{d}t). \end{cases} \tag{2}$$

Мера Бернулли b_a^A с вероятностью λ_a, a индексы b, d, d'. B - рождение ($birth$), и D - гибель ($death$) два независимых события. В точке x_i вероятность рождения равна λ_{ij} и зависит от x_j и v_j взаимодействие i и всех j порождает совокупность независимых событий B_{ij}, B_i вероятность появления хотя бы одного из событий B_{ij} :

$$\mathrm{b}_i^B = \begin{cases} 1, & \lambda_i^B = 1 - \prod_{j=1}^{N} (1 - \lambda_{ij}^b), \\ 0, & \overline{\lambda_i^B} = 1 - \lambda_i^B. \quad \lambda_{ij}^b = \frac{1}{N} b\delta(v_i, 0)\delta(v_j, 1) m_b(x_i, x_j) Flora_b \mathrm{d}t \end{cases}$$

Вероятности λ_{ij}^b зависят от состояний в точках x_i и x_j $\delta(v_i = 0) \times \delta(v_j = 1)$ и расстояния между точками $m_b(x_i, x_j)$ чем x_i ближе к x_j вероятность выше, интенсивности b, приращение времени dt на обезразмеривающий параметр $Flora$. Символ Кронекера $\delta(v, A) = 1$, если $v = A$, и $\delta(v, A) = 0$, если $v \neq A$. Аналогичными размышлениями описывается оператор $\mathrm{b}_i^D(\mathrm{d}t)$ для событий гибили. После формализации микро модели (2), при малом параметре обезразмеревания, так же можно вывести ряд макро статистик, плотности и корреляции популяции.

Литература

1. Богомолов С. В., Захарова Т.В. Уравнение Больцмана без гипотезы молекулярного хаоса / С. В. Богомолов, Т.В. Захарова //Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33, № 1. — С. 3–24.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В ТОНКОМ СЛОЕ

Е.С. Болдырева (Воронеж, ВГУ)
elenaboldyreva11@mail.ru

В данной работе изучается задача о периодических по времени решениях уравнения Навье-Стокса в тонком слое:

$$\frac{d\widetilde{u_\varepsilon}}{dt} - \triangle_\varepsilon \widetilde{u_\varepsilon} + (\widetilde{u_\varepsilon} \cdot \nabla_\varepsilon)\widetilde{u_\varepsilon} = F(t, x_1, x_2, \varepsilon y) \tag{1}$$

где $\nabla_\varepsilon = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, (\frac{1}{\varepsilon})\frac{\partial}{\partial y})$ и $\triangle_\varepsilon = (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (\frac{1}{\varepsilon^2})\frac{\partial^2}{\partial y^2})$ сингулярные по ε дифференциальные операторы, со следующими периодическими по пространственным переменным условиями:

$$\widetilde{u}\left(t,0,x_2,y\right) = \widetilde{u}\left(t,l_1,x_2,y\right), \widetilde{u}_{x_1}\left(t,0,x_2,y\right) = \widetilde{u}_{x_1}\left(t,l_1,x_2,y\right),$$

$$\widetilde{u}\left(t,x_1,0,y\right) = \widetilde{u}\left(t,x_1,l_2,y\right), \widetilde{u}_{x_2}\left(t,x_1,0,y\right) = \widetilde{u}_{x_2}\left(t,x_1,l_2,y\right),$$

$$\widetilde{u}\left(t,x_1,x_2,0\right) = \widetilde{u}\left(t,x_1,x_2,1\right), \widetilde{u}_{y}\left(t,x_1,x_2,0\right) = \widetilde{u}_{y}\left(t,x_1,x_2,1\right).$$

Кроме того предполагается, что $\int_Q F dx_1 dx_2 dy = 0$, а решения ищутся, удовлетворяющие условию $\int_Q \widetilde{u_\varepsilon} dx_1 dx_2 dy = 0$, где $Q = (0,l_1) \times (0,l_2) \times (0,1)$ и $\nabla_\varepsilon \cdot u_\varepsilon = 0$.Такая задача изучалась в [1].

Наряду с трехмерным уравнением, рассматривается приведенное уравнение Навь-Стокса, имеющее следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) v + \left(v \cdot \nabla_2\right) v = \binom{F_{01}}{F_{02}}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u_3 + \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u_3 = F_{03}. \end{cases} \tag{2}$$

где $u = (v, u_3) = (v_1(t,x_1,x_2), v_2(t,x_1,x_2), u_3(t,x_1,x_2))$, $F_0(t,x_1,x_2) = F(t,x_1,x_2,0)$ и $\nabla_2 \cdot v = 0$ со следующими периодическими по пространственным переменным условиями:

$$u\left(t,0,x_2\right) = u\left(t,l_1,x_2\right), u_{x_1}\left(t,0,x_2\right) = u_{x_1}\left(t,l_1,x_2\right),$$

$$u\left(t,x_1,0\right) = u\left(t,x_1,l_2\right), u_{x_2}\left(t,x_1,0\right) = u_{x_2}\left(t,x_1,l_2\right).$$

Предполагается выполнение условия $\int_\Omega F_0 dx_1 dx_2 = 0$, а решения должны удовлетворять условию $\int_\Omega u\left(t,x_1,x_2\right) dx_1 dx_2 = 0$.

В работе показано, что если приведенное трехмерное уравнение (2) имеет решение u_0, и линеаризованное на первых двух его компонентах двумерное уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \hat{w} + \left(\hat{w} \cdot \nabla_2\right) u_i^0 + \left(u_i^0 \cdot \nabla_2\right) \hat{w} + \sigma \hat{w} = 0, \quad i = 1,2; \tag{3}$$

не имеет ненулевых периодических по t решений, тогда при малых ε трехмерное уравнение Навье-Стокса (1) имеет периодические по t решения r_ε и справедливо соотношение

$$\sup_t \left(\int_Q \left| r_\varepsilon\left(t,x_1,x_2,y\right) - u^0\left(t,x_1,x_2\right) \right|^2 dx_1 dx_2 dy \right) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} 0 .$$

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1.*Пусть уравнение (3) не имеет нетривиальных периодических решений при Re* $\sigma \leqslant -\sigma_0 \neq 0$, *то есть* $u_i^0(t), i = 1, 2$ *является асимптотически устойчивым решением уравнения (2). Тогда при достаточно малом* ε *трехмерное линеаризованное уравнение на решении* r_ε

$$\hat{u}_\varepsilon' - \triangle_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon + (r_\varepsilon(t) \cdot \nabla_\varepsilon)\hat{u}_\varepsilon + (\hat{u}_\varepsilon \cdot \nabla_\varepsilon) r_\varepsilon(t) + \sigma \hat{u}_\varepsilon = 0$$

также не будет иметь периодических по t *решений при Re* $\sigma \leqslant -\sigma_0 < 0$, *то есть решение* r_ε *будет асипмтоточески устойчивым решением уравнения (1).*

При доказательстве теоремы используются результаты из [2], [3].

Литература

1. Johnson, R., Nistri, P. and Kamenskii, M. On the Existence of Periodic Solutions of the Navier–Stokes Equations in a Thin Domain Using the Topological Degree / R. Johnson, P. Nistri, M. Kamenskii // J. of Dynamics and Differential Equations. — 2000. – V. 12, № 4. — P. 681–712

2. Юдович В.И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости / В. И. Юдович. — Ростов н/Д. :Изд-во Рост. ун-та, 1984. — 189 с.

3. G. Da Prato, P. Grisvard. Sommes d'operateurs lineaires et equations differentielles operationnelles / G. Da Prato, P. Grisvard // J. ds Maths. — 1975. – V. 54. – P. 305–387.

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ У ШКОЛЬНИКОВ К МАТЕМАТИКЕ

Е.С. Болдырева (Воронеж, ВГУ)

elenaboldyreva11@mail.ru

В современном обществе наивысшую значимость имеют такие качества личности как: стремление к активному познанию, рациональное мышление, способность к критическому анализу растущего потока информации и объективному восприятию действительности, — именно они позволяют человеку быть адаптивным в условиях высокой неопределенности жизнедеятельности.

Формирование познавательной активности обучающихся и освоение школьной программы по математике представляют собой две взаимосвязанные стороны образовательного процесса. Педагогическая практика подтверждает, что успешное усвоение знаний зависит от проявляемого деятельного интереса обучающихся к изучаемому материалу, т.е. познавательной активности, которая рассматривается как интегративное качество личности,проявляющееся в процессе учебно-познавательной деятельности при овладении знаниями, способами и приемами их получения и формирующееся под управляющим воздействием педагога [1].

Формирование познавательной активности у школьников к математике способствует более эффективному освоению образовательной программы, формированию творческого подхода при решении задач, развитию осознанного поведения и внутренней мотивации к обучению, развитию природных талантов ребенка.

Однако, вопрос о дидактических средствах, способствующих эффективному формированию познавательной активности у школьников к математике остается открытым.

Тем не менее, накопленный педагогический опыт позволяет утверждать, что традиционно формирование познавательной активности у школьников к математике осуществляется с помощью беседы, создания проблемной ситуации и применения творческих заданий [2], так же с использованием электронных средств обучения, обладающих широкими дидактическими возможностями (гипертекст, словарь, видео уроки, виджеты, тесты, обучающие игры и т.д.). Представленные электронные средства обучения математике выступают инструментом, повышающим степень влияния педагога на процесс формирования познавательной активности у школьников. Они способствуют получению качественно новых когнитивные навыков и умений, позволяющих самостоятельно добывать новые знания, расширять познавательные интересы, развивать творческое мышление [1].

Литература

1. Караханова, Г. А. Методика формирования познавательной активности старшеклассников средствами информационно-коммуникационных технологий / Г. А Караханова, М. С. Ибрагимова // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. — 2018. – Т. 12. — № 2. — С. 56-61.

2. Колобов А. Н. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся среднего звена / А. Н. Колобов // Мир науки, культуры, образования. — 2022. – № 4(95). — С. 15–18.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОЦИКЛЫ В АЛГЕБРЕ СИМВОЛОВ БУТЕ ДЕ МОНВЕЛЯ[1]

А.В. Болтачев, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)
boltachevandrew@gmail.com, antonsavin@mail.ru

Рассмотрим многообразие $M = \mathbb{R}^n_+$ с координатами (x', x_n) и краем $X = \mathbb{R}^{n-1}$, определяемому уравнением $x_n = 0$. Рассмотрим алгебру символов операторов Буте де Монвеля на M (см. [1]) нулевого порядка и типа. Напомним, что элементами алгебры $\mathcal{A}$ являются пары

$$\widetilde{a} = (a, a_X) \in \mathcal{O}(T^*_0 M) \oplus \mathcal{O}(T^*_0 X, \mathcal{B}(H_+ \oplus \mathbb{C})), \tag{1}$$

где a — однородный символ нулевого порядка на кокасательном расслоении $T^*_0 M$ без нулевого сечения, называемый *внутренним символом* и удовлетворяющий свойству трансмиссии.

Функция a_X в (1) называется *граничным символом* и является гладкой оператор-функцией на $T^*_0 X$ вида

$$a_X(x', \xi') = \begin{pmatrix} \Pi_+ a|_{\partial T^*_0 M} + \Pi' \mathfrak{g} & \mathfrak{c} \\ \Pi'_{\xi_n} \mathfrak{b} & \mathfrak{r} \end{pmatrix} : \begin{matrix} H_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix}. \tag{2}$$

Здесь

- $H_+ = \mathcal{F}_{x_n \to \xi_n}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ — пространство образов Фурье пространства Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ гладких функций на $\overline{\mathbb{R}}_+$, быстро убывающих на бесконечности;

- $a|_{\partial T^*_0 M} \in C^\infty(T^*_0 M|_{\partial M})$; $\mathfrak{r} \in C^\infty(T^*_0 X)$;

- $\mathfrak{b} \in C^\infty(T^*_0 X, H_-)$; $\mathfrak{c} \in C^\infty(T^*_0 X, H_+)$, $\mathfrak{g} \in C^\infty(T^*_0 X, H_+ \otimes H_-)$, где $H_- = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_-))$;

- операторы $\Pi_\pm : H_+ \oplus H_- \to H_\pm$ являются проекторами, причем Π' — функционал следующего вида

$$\begin{aligned} \Pi' : H_+ \oplus H_- &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ u(\xi_n) &\longmapsto \lim_{x_n \to 0+} \mathcal{F}^{-1}_{\xi_n \to x_n}(u(\xi_n)). \end{aligned}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-12006).

Мы определяем явные *периодические циклические коциклы* (см. [2]) на алгебре символов операторов Буте де Монвеля $\mathcal{A}$. Также рассматривается эквивариантный случай — изучается действие дискретной группы Γ на многообразии с краем и ассоциированное действие на алгебре $\mathcal{A}$.

Литература

1. Boutet de Monvel L. Boundary Problems for Pseudodifferential Operators // Acta Math. — 1971. — Vol. 126, — pp. 11–51.

2. Connes A. Noncommutative Geometry // Academic Press, Inc. San Diego, CA, 1994.

О СОДЕРЖАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕ-МАТЕМАТИКОВ

А.В. Боровских (Москва, МГУ)
bor.bor@mail.ru

Вопрос о том, как учить математике студентов нематематических специальностей вузов (естественно-научных, гуманитарных, инженерных) поднимается регулярно. К сожалению, обычно он обсуждается на уровне так называемого «тематического содержания» (какие темы изучать, какие не изучать) и вариантов изложения теорем (с доказательством или без доказательства). Такое обсуждение с завидной регулярностью оказывается непродуктивным. Проблема заключается в том, что определение математической компоненты профессионального образования в другой специальности невозможно без выхода за нормативные рамки профессиональной математики. В докладе будет представлена суть проблемы и анонсирована программа работ, позволяющих осуществить действительно продуктивное проектирование «математики для не-математиков».

Проблема состоит в том, что математик не может построить курс математики для другой специальности иначе, чем «урезав» курс «математики для математиков» (ибо курс математики в его распоряжении один – тот, который читался ему!), выкинув из него те неделимые единицы, которые возможно выкинуть в рамках выделенного объема часов. Такими единицами и являются «темы» и «доказательства». Обсуждение содержания курса в этих терминах с профильным специалистом всегда носит довольно странный характер. С одной стороны, вопрос типа «А читать Вашим студентам такую-то теорему с доказательством или без?» ставит его в тупик – он вообще не понимает, о чем речь. С другой стороны, на вопрос типа «А нужны ли Вам ряды?» ответ обычно бывает «Ряды нужны, но безо всех этих Ваших «теорий» с эпсилон и дельта!», и этот ответ ставит в тупик уже математика, поскольку для него «Ряды» – это и есть теория рядов, в основании которой лежат определения, сформулированные в терминах «эпсилон и дельта».

В результате стороны достигают компромисса в смысле известного афоризма («Компромисс – это решение, которое не устраивает ни одну из сторон...»), и чтение математики для не-математиков вызывает отвращение и у тех, кому она читается (поскольку им очевидно, что для их профессионального образования это не нужно, так что этот курс превращается просто в насилие над личностью студента), и у тех, кто читает (поскольку тот результат своей деятельности, который преподаватель видит на контрольных и экзаменах, не может не вызывать отвращения, да плюс еще и отношение студентов не добавляет энтузиазма) . Не вполне очевидным является то, что такой результат в принципе неизбежен. Для того, чтобы сделать неочевидное очевидным, требуется ввести ряд категориальных понятий, без которых ясности добиться нельзя.

Прежде всего, следует обратиться к понятию средства, и зафиксировать тот факт, что привычные нам математические объекты — не «данные нам вещи», а *средства мышления*, созданные для того, чтобы мыслить различные процессы, феномены, реальные (физические, инженерные и т.п.) объекты. Средствиальный взгляд на математику позволяет нам понять и зафиксировать первый фундаментальный тезис: *все сферы человеческой деятельности используют одни и те же математические мыслительные средства.* Числа, матрицы, функции, дифференциальные и интегральные соотношения, те или иные геометрические фигуры, статистики, логические конструкции используются всюду. В этом, собственно, и проявляется известная универсальность математики – как набора универсальных средств.

Второе понятие, которое нам понадобится – это понятие *способа* использования того или иного средства. Одно и то же средство может использоваться разными способами. Это видно даже на материале элементарной математики: такое простейшее знаковое средство, как буква, может использоваться по-разному. Она может обозначать конкретное известное число, неизвестное число, переменную величину, сложное выражение и т.д. Второй фундаментальный тезис: *в разных сферах человеческой деятельности математические мыслительные средства используются разными способами.* Именно на этом различии необходимо сконцентрировать свое внимание в первую очередь, когда мы говорим о содержании математического образования для не-математиков.

Третье понятие, которое нам потребуется – понятие *организованности мыслительных средств и способов их использования.* Так же, как инструменты у хирурга расположены во вполне определенном порядке, так и мыслительные инструменты профессионала организованы вполне определенным образом, который отвечает решаемому классу профессиональных задач. И эти задачи у математика и у не-математика – разные.

Профессиональная математика, по большому счету, исследует границы тех способов использования математических мыслительных средств, которые известны в человеческой культуре . В пограничных ситуациях интуиция (в том числе и профессиональная) отказывает – это достаточно «грубый» инструмент, он позволяет «схватить» суть дела, позволяет «почувствовать» наличие границы, но не позволяет ее точно обрисовать. Поэтому исследование границ опирается на логический аппарат, который является гораздо более громоздким, чем интуитивный, но зато гораздо более надежным и точным. И логическая структура «математического знания» именно этой проблемой – исследования границ – и определяется. Без нее математик перестает быть математиком. И поэтому профессиональное образование математика и связано с выстраиванием математических средств и способов в логическую систему. Логическая система – организованность математических средств и способов в профессиональной математике.

Третий фундаментальный тезис: *логическая организованность математического знания, которая осваивается математиками в рамках их математического образования, не-математикам не нужна.* А что же им нужно?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы выделили несколько специфичных способов использования математических мыслительных средств в не-математических сферах деятельности. Это а) метафора; б) средство знакового представления своего собственного содержания; в) оперативная система; г) средство мышления своего собственного содержания. Освоение этих средств требует не логических доказательств, а четкой нормативной системы оперирования с математическими средствами с указанием границ их применения тем или иным способом. Существенным при этом оказывается то, что то или иное использование математических средств происходит всегда в *профессиональном проблемном поле*, и не только связано с решением той или иной профессиональной проблемы, но и выводит на некие новые профессиональные проблемы, так что его использование не является безусловным не только с математической, но и с профессиональной точки зрения.

Очерченный круг применений математических средств мышления – это фактически лишь одна из трех функций математики в профессиональном образовании – *утилитарная*. Кроме того, математика имеет *развивающую* функцию – она может служить развитию интеллекта – пространственного, логического, образного, динамического, структурного, алгоритмического и т.п. мышления. При проектировании содержания математического образования эту функцию также необходимо реализовывать, но при этом нужно понимать, что математика здесь совсем не обязана быть необходимой: те же функции могут успешно развиваться и с помощью других, прежде всего, профессиональных дисциплин, так что математика здесь играет не ведущую, а вспомогательную роль.

Наконец, третья функция математики – *перспективная*: не секрет, что ряд математических мыслительных средств в той или иной профессии мог бы продуктивно использоваться для решения профессиональных проблем, но пока не освоен, или освоен только на уровне метафор. Выделение таких средств и потенциальных способов их использования – еще одна линия проектирования содержания математического образования.

Результатом рассмотрения содержания математического образования для не-математиков с точки зрения мыслительных средств, способов их использования и организованностей этих средств и способов оказывается не только проблематизация существующего содержания, но и оформление программы работ по формированию такого содержания, которое окажется профессионально адекватным. Реализация этой программы начата автором доклада в 2022 году на материале математического образования для географов (специальности "Климатология"и "Метеорология").

Литература

1. Боровских А.В. О содержании математического образования. Математика для не-математиков/ А.В. Боровских// CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. — 2022. — вып. 4. — С. 51–65.

ПЛОТНОСТЬ СУММ СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ НА ТОРЕ

П.А. Бородин (Москва, МГУ)
pborodin@inbox.ru

В докладе обсуждается и доказывается

Теорема. *Пусть действительнозначная функция $f(x,y)$, заданная на торе $\mathbb{T}^2=[0,2\pi)\times[0,2\pi)$, имеет ряд Фурье*

$$f(x,y)=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{mn}e^{i(mx+ny)}$$

с условиями

a) $c_{00}=0$, $c_{mn}\neq 0$ *при* $m^2+n^2>0$*;*

b) $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{Z}}(m^2+n^2)|c_{mn}|^2<\infty$.

Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{N} f(x+\alpha_k,y+\beta_k),\qquad \alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}, N\in\mathbb{N},$$

плотны в пространстве

$$L_2^0(\mathbb{T}^2)=\left\{g\in L_2(\mathbb{T}^2):\int_{\mathbb{T}^2} g(x,y)\,dxdy=0\right\}.$$

О НУЛЯХ И ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Г.Г. Брайчев (Москва, МПГУ)
braichev@mail.ru

В докладе для целой функции нулевого порядка приводятся соотношения, напрямую связывающие рост последовательности ее нулей с убыванием тейлоровских коэффициентов. Полученные сведения дополняют результаты о функциях положительного порядка, доказанные ранее автором в [1].

Следующий результат Валирона [2] послужил отправной точкой нашего исследования.

Пусть целая функция $f(z)$ представлена рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^n, \qquad f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

и $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность ее нулей, записанная в порядке неубывания модулей и с учетом кратностей. Если тейлоровские коэффициенты целой функции удовлетворяют условию

$$\frac{f_{n-1}f_{n+1}}{f_n^2} \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{2}$$

то справедливы следующие формулы, связывающие асимптотическое поведение ее нулей и коэффициентов:

$$f_n \sim \frac{(-1)^n f_0}{\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n}, \qquad \lambda_n \sim -\frac{f_{n-1}}{f_n}, \qquad n \to \infty.$$

Отметим, что целые функции, коэффициенты которых подчинены требованию (2), удовлетворяют условию

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln^2 r} = 0,$$

где $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Мы рассматриваем более широкие классы целых функций логарифмического роста.

Пусть функция $h(r)$ неограниченно возрастает, дифференцируема на $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{rh'(r)\ln r}{h(r)} = \rho, \tag{3}$$

например, $h(r) = \ln^\rho r$, где $\rho \geqslant 1$. Тип и нижний тип целой функции f относительно $h(r)$ (коротко, h-тип и нижний h-тип) определяются соответственно формулами

$$T_h = T_h(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}, \qquad t_h = t_h(f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}.$$

Говорят, что целая функция имеет совершенно регулярный рост, если ее h-тип и нижний h-тип совпадают, т. е. если $T_h = t_h$.

Отметим, что модули коэффициентов ряда (1), удовлетворяющие условию (2), образуют логарифмически выпуклую последовательность. В общем случае определим $\hat{f}_n$ — «спрямленные по Адамару» коэффициенты степенного разложения (1) — равенством $\hat{f}_n =$

$e^{-G(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, где $y = G(x)$, $x \geqslant 0$, задает уравнение границы выпуклой оболочки множества точек $(n, -\ln|f_n|)$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема. *Пусть функция h удовлетворяет условию* (3), *целая функция f имеет совершенно регулярный рост и $T_h(f) \in (0, +\infty)$. Тогда при $\rho > 1$ справедливы асимптотические равенства, связывающие нули и коэффициенты f:*

$$\ln|\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n| \sim \ln \hat{f}_n^{-1}, \qquad \ln|\lambda_n| \sim \ln \frac{\hat{f}_{n-1}}{\hat{f}_n}, \qquad n \to \infty.$$

При $h(r) = \ln r \ln^\alpha \ln r$ с $\alpha > 0$ (здесь $\rho = 1$) выполняется

$$\ln\ln|\lambda_n| \sim \ln\ln \frac{\hat{f}_{n-1}}{\hat{f}_n}, \qquad n \to \infty.$$

Литература

1. Брайчев Г.Г. Совместные оценки корней и тейлоровских коэффициентов целой функции / Г.Г. Брайчев // Уфимск. мат. журн. — 2021. — Т. 13, № 1. — С. 31–45.

2. Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière /G. Valiron// Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série. — 1913. — T. 5. — P. 117–257.

ОБОБЩЕННЫЙ $\mathbb{T}$-СДВИГ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

Ю.Н. Булатов (Елец, ЕГУ им. И.А.Бунина)
y.bulatov@bk.ru

Исследованию задач с Δ_B оператором И.А. Киприянова посвящена работа [1]. Сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя имеет следующий вид

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}\right) u(t) + u(t) = B_{-\gamma}u + u = 0, \quad -\gamma \in (-1, 0).$$

Линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя определены как $\mathbb{J}$-функции Бесселя

$$\mathbb{J}_{\pm\mu}(t) = 2^{\pm\mu}\,\Gamma(1 \pm \mu)\, t^\mu\, J_{\pm\mu}(t),$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода, $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$.

Из теоремы сложения для j-функций Бесселя в [2] получена теорема сложения для $\mathbb{J}$-функций Бесселя: $\mathbb{J}_\mu(x\xi)\ \mathbb{J}_\mu(y\xi) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi)$, x, y, $\xi \in \mathbb{R}_1^+$, в которой $\mathbb{T}^y$ — псевдосдвиг , определенный формулой

$$\mathbb{T}^y f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}\int\limits_0^\pi \frac{(x\,y)^{\gamma+1} f\left(x \overset{\alpha}{\to} y\right)}{(x \overset{\alpha}{\to} y\,)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1}\alpha\, d\alpha, \qquad (1)$$

где $(x \overset{\alpha}{\to} y\,)=\sqrt{x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha}$.

Так же изучаются две конструкции обобщенных $\mathbb{T}$-сдвигов, возникающие из определения $\mathbb{T}$-псевдосдвига (1):

$$\overset{*}{\mathbb{T}^y}\, f(x) = x^{-(\gamma+1)}\mathbb{T}^y f(x), \quad \overset{**}{\mathbb{T}_x^y}\, f(x) = y^{-(\gamma+1)}\mathbb{T}_x^y f(x). \qquad (2)$$

Конструкция (1) не принадлежит классу обобщенных сдвигов Б.М. Левитана [3], т.к. не выполнено основное условие, чтобы некоторый оператор был сдвигом аргумента функции, заключающееся в существование «нулевого злемента» x_o, не меняющего функции. Для обобщенного сдвига Пуассона [3] таким элементом является точка $x_o = 0$.

Свойство 1. Линейность $\mathbb{T}$-сдвига: если f и g функции суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то

$$\overset{*}{\mathbb{T}^y}\,[a\,f(x) + b\,g(x)] = a\,\overset{*}{\mathbb{T}^y}\, f(x) + b\,\overset{*}{\mathbb{T}^y}\, g(x).$$

Свойство 2. $\overset{*}{\mathbb{T}^y}\, f(0) = f(y)$.

Свойство 3. Ассоциативность $\mathbb{T}$-сдвига: если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$-функциям Бесселя, то

$$\overset{*}{\mathbb{T}_y^z}\,\overset{*}{\mathbb{T}_x^y}\, f(x) = \overset{*}{\mathbb{T}_x^z}\,\overset{**}{\mathbb{T}_x^y}\, f(x)\,, \quad \overset{**}{\mathbb{T}_y^z}\,\overset{*}{\mathbb{T}_x^y}\, f(x) = \overset{**}{\mathbb{T}_x^z}\,\overset{*}{\mathbb{T}_x^y}\, f(x)\,,$$

$$\overset{**}{\mathbb{T}_y^z}\,\overset{**}{\mathbb{T}_x^y}\, f(x) = \overset{**}{\mathbb{T}_x^z}\,\overset{**}{\mathbb{T}_x^y}\, f(x)\,.$$

Свойство 4. Непрерывность операторов $\mathbb{T}$-сдвига: для любой непрерывной функции $f(x)$ функция $\overset{*}{\mathbb{T}^y}\, f(x)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y).

Необходимость введения $\overset{*}{\mathbb{T}_x^y}$ и $\overset{**}{\mathbb{T}_x^y}$ возникла в исследованиях [2] при определении фундаментального решения оператора И.А. Киприянова.

Автор благодарит профессора Л.Н. Ляхова за постановку рассматриваемой в этой заметке задачи и оказанную помощь в исследованиях этой проблемы.

Литература

1. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.

2. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение оператора Δ_B Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения — 2022. — Т. 58,№ 12. — С. 1654–1665.

3. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига / Б.М. Левитан // М.: Наука. — 1973. —312С.

4. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические задачи / И.А. Киприянов // М.: Наука. — 1997. —199 С.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛЕЙ СТРАХОВАНИЯ

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)
ebulinsk@yandex.ru

Хорошо известно, что для исследования реальных процессов или явлений необходимо построить соответствующую математическую модель. При этом для одного и того же явления (процесса) может существовать большое число моделей, которые описывают его с различной степенью точности. Кроме того, одна и та же модель может возникать для описания явлений, относящихся к различным областям приложения теории вероятностей. Наиболее распространены так называемые модели «входа-выхода» (input-output models), если речь идет о таких приложениях как страхование, финансы, управление запасами, телекоммуникации, теория массового обслуживания, динамика популяций, теория надежности и другие. Для их использования (см. [1,2]) необходимо задать набор $(T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$, где T — горизонт планирования, Z — входящий процесс, $Z = \{Z(t), t \in [0, T]\}$, аналогично, $Y = \{Y(t), t \in [0, T]\}$ — выходящий процесс, $U = \{U(t), t \in [0, Y]\}$ — управление, а Ψ — функционал, который дает возможность найти состояние системы $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$, в виде $X = \Psi(Z, Y, U)$, так как он характеризует структуру рассматриваемой системы и способ ее функционирования. Последний элемент $\mathcal{L}$ — это целевая функция, оценивающая качество функционирования системы.

Одна из основных задач при исследовании моделей прикладной теории вероятностей — нахождение оптимального управления, которое обеспечивает достижение экстремума целевой функции. В страховании, являющемся старейшей областью применения теории вероятностей, имеются два основных подхода (стоимостной и надежностный) при выборе целевой функции, т.е. оцениваются либо понесенные компанией убытки, либо вероятность ее разорения на горизонте планирования. В последнее десятилетие появились и другие подходы, например, многокритериальная оптимизация и поиск условных экстремумов. В качестве управлений рассматривается выбор начального капитала и страховой премии, применение сострахования или перестрахования, использование банковских займов и инвестиций, стратегия выплаты дивидендов. Большой интерес также представляет изучение предельного поведения капитала страховой компании при неограниченном росте горизонта планирования (см. [3]), в том числе доказательство закона больших чисел, центральной предельной теоремы, получение асимптотических разложений и т.д. Отметим, что для того, чтобы использовать на практике полученные оптимальные управления, необходимо убедиться, что предлагаемая математическая модель устойчива, т.е. малые флуктуации параметров или возмущения распределений, фигурирующих в построенной модели, приводят к малым изменениям целевой функции (см. [4]). Существует целый ряд методов исследования устойчивости. Основное внимание будет уделено использованию вероятностных метрик.

В последние годы широкое распространение получило исследование моделей с дискретным временем. С одной стороны, они удобнее для численных расчетов и могут использоваться для приближения моделей с непрерывным временем. С другой стороны, существуют такие ситуации, когда модель с дискретным временем более точно описывает реальное положение дел. Поэтому будут рассмотрены 3 модели с дискретным временем и для них найдена оптимальная политика и установлена устойчивость.

Риск - это ключевое слово во всех исследованиях, связанных со страхованием. Как известно, риск возникает в тех случаях, когда заранее неясно, будет ли исход благоприятным или неблагоприятным. Все риски делятся на чистые и спекулятивные. Первые приводят к потерям (ущербу), а вторые могут повлечь не только потери, но и доход (прибыль). Спекулятивные риски изучает финансовая математика. Чистые риски, которыми занимается актуарная математика, делятся на физические, вызванные природными явлениями или деятельностью человека, и моральные, обусловленные нечестным или недобросовестным поведением застрахованных. Для их исследования требуются различные математические методы, называемые в совокупности «актуарные науки» (см. [1]). Методы разделения и перераспределения риска были известны еще во втором тысячелетии до нашей эры. Однако актуарные науки возникли значительно позднее, в 17-м веке. История их развития насчитывает 4 периода (детерминистический, стохастический, финансовый и современный). Отметим, что стохастический период знаменит созданием теории коллективного риска (классическая модель Крамера-Лундберга и ее многочисленные модификации). Современный период характеризуется рассмотрением сложных систем, переплетением актуарных и финансовых проблем, унификацией стоимостного и надежностного подходов и применением мощного математического аппарата (см. [2]). Пристальное внимание в последнее десятилетие уделяется дискретным моделям, так как они позволяют получать решения в явном виде, а во многих ситуациях более точно отражают суть происходящих процессов. С другой стороны, они могут служить хорошим приближением для процессов с непрерывным временем (см. [3]). Поэтому в докладе будет рассмотрен ряд моделей с непрерывным и дискретным временем.

Основная цель риск-менеджмента (или принятия решений в условиях неопределенности) — это оптимизация функционирования исследуемой системы, позволяющая минимизировать, а в лучшем случае вовсе исключить возникающий риск. Существует целый ряд оптимизационных критериев и различные классы допустимых управлений. Так, возможно управлять выбором выплачиваемых дивидендов, видом договора перестрахования, инвестициями, банковскими займами и др.

Приведем для примера один из простейших результатов для модели с дискретным временем, банковскими займами и пропорциональным перестрахованием. Предположим, требования на возмещение убытков описываются последовательностью независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с конечным средним. Страховщик передает в перестрахование долю θ поступивших требований, а после перестрахования получает премию

M. Кроме того, в начале каждого периода (год, месяц, день) он может брать заем по некоторой процентной ставке. Если имеющихся средств недостаточно, возможен экстренный заем с повышенной ставкой. Задача заключается в выборе оптимальной политики займов, т.е. минимизирующей дополнительные ожидаемые издержки. Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Оптимальная политика займов характеризуется неубывающей последовательностью критических уровней y_n таких, что на первом шаге n-шагового процесса, если начальный капитал x меньше y_n, то его надо увеличить с помощью займа до y_n. В противном случае заем не нужен.*

Для данной модели установлено предельное поведение капитала при бесконечном увеличении горизонта планирования, асимптотически оптимальное управление, а также устойчивость к малым флуктуациям параметров и возмущениям распределений. Аналогичные проблемы исследованы и для других моделей.

Литература

1. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование / Е.В. Булинская. — М. : Мэйлер, 2008. — 190 с.

2. Bulinskaya E. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E. Bulinskaya // Modern problems of stochastic analysis and statistics. Selected contributions in honor of Valentin Konakov, ed. V. Panov. — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2017. — V. 208. — P. 349–408.

3. Bulinskaya E. Asymptotic analysis and optimization of some insurance models / E. Bulinskaya // Applied Stochastic Models in Business and Industry. — 2018. — V. 34, No. 6. — P. 762–773.

4. Bulinskaya E. Optimal Control and Sensitivity Analysis for Two Risk Models / E. Bulinskaya, J. Gusak // Communications in Statistics. Simulation and Computation. — 2016. — V. 45, No. 5. — P. 1451–1466.

3. Dickson D.C.M. Some optimal dividends problems / D.C.M. Dickson, H. Waters // ASTIN Bulletin — 2004. — V. 34. — P. 49–74.

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

М.Ш. Бурлуцкая, М.Б. Давыдова, А.В. Киселева (Воронеж, ВГУ)
bmsh2001@mail.ru, mbd@vsu.ru, kiseleva@math.vsu.ru

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения на геометрическом графе, состоящем из двух ребер-колец, касающихся в одной точке (узле графа):

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - q_j(x)u_j(x,t), \tag{1}$$

$$(j=1,2), \qquad (x,t) \in [0,1]\times[0,+\infty),$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}0,t) - u'_{2x}(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{array}{c} u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \\ u'_{1t}(x,0) = 0, \quad u'_{2t}(x,0) = 0. \end{array} \tag{4}$$

Будем предполагать, что все функции, входящие в (1)–(4) комплекснозначные, $q_j, \varphi_j \in L[0,1]$. В докладе будут представлены результаты, усиливающие [1–2].

Используем методику, предложенную А.П. Хромовым в [3–4], опирающуюся на идеи по ускорению сходимости рядов и привлечение расходящихся рядов.

Следуя [3–4] задачу (1)–(4) будем называть обобщенной, а под решением обобщенной задачи понимаем «сумму» вообще говоря расходящегося ряда формального решения (см. [2]).

Используя технику из [4], получим

Теорема 1. *Обобщенная задачи (1)–(4) имеет единственное решение*

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t),$$

$$\text{где} \quad A_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{F}(x+t) + \widetilde{F}(x-t)],$$

$$A_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{F}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \ \ n \geqslant 1$$

и $Q(x) = \mathrm{diag}(q_1(x), q_2(x))$, $F_n(x,t) = -Q(x)A_n(x,t)$ *при* $x \in [0,1]$, $\widetilde{F}_{n-1}$ *есть продолжения функций* F_{n-1} *с помощью соотношений (11) из [2].*

Отметим, что классическое решение задачи (1)–(4) [2] и обобщенное решение, приводимое здесь, выражаются одной и той же формулой.

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения на графе / М.Ш. Бурлуцкая // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 465, № 5. — С. 519–522.

2. Burlutskaya M. Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the wave equation on a graph / M. Burlutskaya // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1902. — P. 012103

3. Хромов А.П. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 215–238.

4. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида / А.П. Хромов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2022. — Т. 22, № 3. — С. 322–331.

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ С ГЛОБАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ[1]

С.А. Бутерин (Саратов, СГУ)
buterinsa@sgu.ru

Тогда как теория дифференциальных операторов на графах активно развивается в последние несколько десятилетий (см., например, [1] и литературу там), нам удалось найти лишь несколько рассмотрений *функционально*-дифференциальных и других классов

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00509, https://rscf.ru/project/22-21-00509/).

нелокальных операторов на графах. Определение таких операторов осложнено очевидными причинами, связанными с «прохождением» нелокальности через внутренние вершины графа. Поэтому изучались, главным образом, только *локально* нелокальные случаи, когда соответствующее нелокальное уравнение на каждом ребре графа не связано с уравнениями на остальных ребрах.

Например, в работе [2] были рассмотрены такие локально нелокальные операторы с постоянным запаздыванием вида

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) \tag{1}$$

на графе-звезде. Напомним, что операторы с отклоняющимся аргументом на интервале активно изучаются с первой половины прошлого века в связи с многочисленными приложениями.

В докладе предлагается иной подход к определению операторов вида (1) на графах, использующий понятие глобального запаздывания. Для графа-звезды с единичными ребрами и глобальным запаздыванием $a \in (0,2)$ он реализуется в краевой задаче

$$-y_j''(x) + q_j(x)y_j(x-a) = \lambda y_j(x), \quad 0 < x < 1, \quad j = \overline{1,m},$$

$$y_j(x-a) = y_1(x-a+1), \;\; x \in (\max\{0, a-1\}, \min\{a,1\}), \;\; j = \overline{2,m}, \tag{2}$$

$$y_1(1) = y_2(0) = \ldots = y_m(0), \quad y_1'(1) = \sum_{j=2}^{m} y_j'(0),$$

$$y_j^{(\nu_j)}(1-\delta_{j,1}) = 0, \quad \nu_j \in \{0,1\}, \quad j = \overline{1,m},$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, а $q_j(x)$ — суммируемые комплексные функции, причем $q_1(x) = 0$ п.в. на $(0, \min\{a,1\})$, в то время как $q_j(x) = 0$ п.в. на $(0, \max\{0, a-1\})$ при $j = \overline{2,m}$.

В частности, условие (2) означает, что запаздывание «распространяется» через внутреннюю вершину. Данное качество естественным образом обобщается и на графы более сложной структуры.

Для случая $m = 3$ и $a = 1$ получено решение обратной задачи восстановления коэффициентов $q_j(x)$ по спектрам либо подспектрам двух краевых задач. При этом охвачен широкий круг вопросов, обычно возникающих в теории обратных спектральных задач. В частности, доказаны соответствующие теоремы единственности, и получены конструктивные процедуры решения обратной задачи вместе с необходимыми и достаточными условиями разрешимости.

Также получена равномерная устойчивость решения. Отметим, что устойчивость решения обратных спектральных задач на графах до этого не изучалась даже с учетом классической теории. Центральным местом здесь стала равномерная устойчивость восстановления характеристических определителей рассматриваемых краевых задач по их нулям, вытекающая, в свою очередь, из результатов работы [3]. Перечисленные результаты подробно изложены в [4].

Также отметим, что с современным состоянием теории обратных задач для оператора (1) на интервале (т.е. при $m = 2$) можно ознакомиться, например, в кратком обзоре, приведенном в [5].

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : Физматлит, 2005. — 272 с.

2. Wang F., Yang C.-F. *A partial inverse problem for the Sturm–Liouville operator with constant delays on a star graph*, Results Math. 77 (2022) art. no. 192.

3. Бутерин С.А. О равномерной устойчивости восстановления функций типа синуса с асимптотически отделенными нулями / С.А. Бутерин // Матем. заметки. — 2022. — Т. 111, № 3. — С. 339–353.

4. Buterin S. *Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems*, arXiv:2210.17266, 2022.

5. Buterin S.A., Malyugina M.A. and Shieh C.-T. *An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays*, Appl. Math. Comput. 411 (2021) art. no. 126475.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ[1]

Д.В. Валовик, Е.В. Зарембо, М.А. Москалева (Пенза, ПГУ)
dvalovik@mail.ru, m.a.moskaleva1@gmail.com, y-tak@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$u''(x) = -\big(a(x) - \gamma^2\big)u(x) - \alpha u^3(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

где $a(x)$ есть непрерывная, положительная и монотонно возрастающая на отрезке $x \in [0, 1]$ функция, γ — положительный параметр, α

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10015).

— положительная постоянная, вместе с условиями

$$u'(0) - \sqrt{\gamma^2 - a_1} \cdot u(0) = 0, \tag{2}$$

$$u'(1) + \sqrt{\gamma^2 - a_2} \cdot u(1) = 0, \tag{3}$$

где a_1, a_2 — положительные постоянные, причем $a_2 \geqslant a_1$, и дополнительным условием

$$u(0) = A, \tag{4}$$

где A есть положительная постоянная.

Задача $\mathcal{P}$ состоит в нахождении $\gamma = \widehat{\gamma} > 0$, таких что существует решение $u \equiv u(x;\widehat{\gamma})$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (4). Число $\widehat{\gamma}$, удовлетворяющее перечисленным условиям, будем называть *собственным значением* задачи $\mathcal{P}$, а отвечающую ему функцию $u(x;\widehat{\gamma})$ — *собственной функцией* задачи $\mathcal{P}$.

Если в уравнении (1) положить $\alpha = 0$, то задача $\mathcal{P}$ вырождается в линейную задачу $\mathcal{P}_0$. Из теории известно, что задача $\mathcal{P}_0$ имеет конечное число (возможно ни одного) положительных собственных значений $\gamma = \widetilde{\gamma} \in (\sqrt{a_2}, \sqrt{a_{\max}})$, где $a_{\max} = \max_{x\in[0,1]} a(x)$ [1].

Теорема 1. *Задача $\mathcal{P}$ имеет бесконечно много собственных значений $\widehat{\gamma}_i$ с точкой накопления на бесконечности; причем для достаточно больших $\widehat{\gamma}$ справедливо неравенство*

$$(1-\delta)s^{-1}\Big(\frac{1}{2m}\Big) \leqslant \widehat{\gamma}(m) \leqslant (1+\delta)s^{-1}\Big(\frac{1}{4\sqrt{2}(m+1)}\Big), \tag{5}$$

где m есть (достаточно большой) номер собственного значения, s^{-1} есть обратная функция к $s(t) = t^{-1}\ln t$ и $\delta > 0$ есть произвольная постоянная.

Задача $\mathcal{P}$ описывает распространение монохроматической электромагнитной ТЕ-волны в плоском открытом диэлектрическом волноводе, заполненным нелинейной неоднородной средой. Аналогичная задача для закрытого волновода (с другими краевыми условиями) исследована в [2].

Литература

1. Courant R. Methods of Mathematical Physics, Vol. 1 / R. Courant, D. Hilbert // WILEY—VCH Verlag GmbH & Co. KGaA: Weinheim. — 2004.

2. Valovik D. V. Study of a Nonlinear Eigenvalue Problem by the Integral Characteristic Equation Method / D. V. Valovik // Differential Equations. — 2020. — Vol. 56., no. 2. — P. 171–184.

ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ КАК ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА

В.Б. Васильев (Белгород, НИУ "БелГУ")
vbv57@inbox.ru

1. Пусть $\mathbb{Z}^2$ обозначает целочисленную решетку на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Мы будем работать с функциями дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2, \hbar = h^{-1}$ и $\zeta^2 = h^{-2}((e^{-ih\cdot\xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih\cdot\xi_2} - 1)^2)$, $S(h\mathbb{Z}^2)$ – дискретный аналог пространства Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций..

Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ в норме

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

где $\tilde{u}_d(\xi)$ обозначает дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2.$$

Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, носители которых содержатся в $\overline{K}_d$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$.

2. Пусть $A_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция, определенная на $\mathbb{R}^2$ с о основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Под дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d мы понимаем оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} A_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d, \qquad (1)$$

Здесь мы рассматриваем символы, удовлетворяющие условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leqslant |A_d(\xi)| \leqslant c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от h, и число $\alpha \in \mathbb{R}$ мы называем порядком дискретного псевдодифференциального оператора A_d.

Нас интересует разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in K_d, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(K_d)$.

Мы используем дополнительно специальные области [1] двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Область вида $\mathcal{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$ называется трубчатой областью над квадрантом K, мы будем оперировать с аналитическими функциями $f(x + i\tau)$ в области $\mathcal{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$.

Определение. *Периодической волновой факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi)$ называется его представление в виде*

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

где множители $A_{d,\neq}(\xi), A_{d,=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h(K), \mathcal{T}_h(-K)$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\frac{æ}{2}} \leqslant |A_{d,\neq}(\xi + i\tau)| \leqslant c_1'(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\frac{æ}{2}},$$

$$c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha - æ}{2}} \leqslant |A_{d,=}(\xi - i\tau)| \leqslant c_2'(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha - æ}{2}},$$

с положительными постоянными c_1, c_1', c_2, c_2', не зависящими от h;

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left((e^{-ih(\xi_1 + i\tau_1)} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_2 + i\tau_2)} - 1)^2 \right),$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2) \in K.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

Отметим, что величина $æ$ существенно влияет на выбор граничных условий и их количество. Здесь рассматривается относительно простой случай. Всюду ниже предполагается, что имеется периодическая волновая факторизация символа $A_d(\xi)$ с индексом $æ, æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$.

Добавим следующие дискретные граничные условия

$$u_{d|_{\tilde{x}_1 = 0}} = f_d(\tilde{x}_2), \qquad u_{d|_{\tilde{x}_2 = 0}} = g_d(\tilde{x}_1). \tag{2}$$

Таким образом, задача (1),(2) – это дискретная задача Дирихле.

Имеет место следующая теорема о дискретной задаче Дирихле (1),(2).

Теорема 1. *Пусть* $f_d, g_d \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+), s > 1/2, \inf|\tilde{a}_0(\xi_2)| \neq 0, \inf|\tilde{b}_0(\xi_1)| \neq 0$. *Тогда дискретная задача Дирихле* (1), (2) *эквивалентна некоторой системе линейных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций, функции* $\tilde{a}_0, \tilde{b}_0$ *определяются по символу оператора* A_d.

Теперь мы вводим в рассмотрение псевдодифференциальное уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \tag{3}$$

с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha$$

и допускающий волновую факторизацию [1] относительно K

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi)$$

с индексом æ, таким, что $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$, добавив к нему следующие граничные условия

$$u_{|x_1=0} = f(x_2), \qquad\qquad u_{|x_2=0} = g(x_1) \tag{4}$$

и в предположении, что выполнено условие $\inf|\tilde{A}_0(\xi_2)| \neq 0, \inf|\tilde{B}_0(\xi_1)| \neq 0$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi)d\xi_1 \equiv \tilde{A}_0(\xi_2), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi)d\xi_2 \equiv \tilde{B}_0(\xi_1).$$

При выполнении этих условий задача (3),(4) однозначно разрешима [1]. Специальный выбор элементов периодической волновой факторизации и дискретных граничных условий позволяет дать следующее сравнение.

Теорема 2. *Пусть* $æ > 1$. *При однозначной разрешимости задачи* (3), (4) *задача* (1), (2) *также будет однозначно разрешима при достаточно малых* h. *Сравнение решений задач* (1), (2) *и* (3), (4) *при достаточно малых* h *дается оценкой*

$$||u - u_d||_{H^s(\hbar\mathbb{T}^2)} \leqslant \ const\ h^{æ-1}(||f||_{s-1/2} + ||g||_{s-1/2})$$

где $const$ *не зависит от* h.

3. Подобные результаты для многомерных сингулярных интегральных уравнений в пространствах Гельдера с весом рассматривались в работе [2] , ряд результатов, связанных с псевдодифференциальными уравнениями и краевыми задачами в полупространстве, получены в работах [3–7] .

Литература

1. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи /В.Б. Васильев. —М. : КомКнига, 2010. — 135 с.

2. Васильев А. В. О разрешимости некоторых дискретных уравнений и связанных с ними оценках дискпетных операторов / А.В. Васильев, В.Б. Васильев // Докл. Российской АН. — 2015. — Т. 464, № 6. —С. 651–655.

3. Васильев В. Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное / В.Б. Васильев // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. —2019. —Т. 160. —С. 18–27.

4. Васильев В.Б. О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах / В.Б. Васильев, О.А. Тарасова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. —2020. —Т. 174. — С. 12–19.

5. Vasilyev V. B. Discrete boundary value problems as approximate constructions /V.B. Vasilyev, A.V. Vasilyev, O.A. Tarasova // Lobachevskii J. Math. —2022. —V. 43, No. 6. —P. 1446–1457.

6. Vassilyev V. B. Discrete pseudo-differential operators and boundary value problems in a half-space and a cone /V.B. Vasilyev // Lobachevskii J. Math. —2018. —V. 39, No. 2. —P. 289–296.

7. Vasilyev V. B. To the theory of discrete boundary value problems / V.B. Vasilyev, O.A. Tarasova // 4Open. —2019. —V. 2, No. 17. —P. 1–7.

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО СЕМЕЙСТВА КЛАССОВ СОБОЛЕВА[1]

А.А. Васильева (Москва, МГУ)

vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Класс Соболева на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ определим следующим образом:

$$W_p^r(\Omega) = \{f \in L_1^{\rm loc}(\Omega) : \ \|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 1\};$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00204).

здесь $\nabla^r f$ — вектор из всех обобщенных частных производных порядка r функции f, $\|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)}$ обозначает L_p-норму $|\nabla^r f(\cdot)|$, где $|\cdot|$ — евклидова норма.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, X — нормированное пространство, $M \subset X$. Через $d_n(M, X)$ обозначим колмогоровский поперечник множества M в пространстве X.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область с условием Джона, $1 \leqslant q < \infty$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p_j \leqslant \infty$, $1 \leqslant j \leqslant s$, при этом $r_1 < r_2 < \dots < r_s$, $\frac{r_j}{d} - \frac{1}{p_j} < \frac{r_i}{d} - \frac{1}{p_i}$ для $j > i$. Пусть $M = \bigcap_{j=1}^s W^{r_j}_{p_j}(\Omega)$. Предположим, что $\frac{r_1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1} > 0$.*

1. *Если $p_i \geqslant q$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$, то*
$$d_n(M, L_q(\Omega)) \asymp n^{-\frac{r_s}{d}}.$$

2. *Если $q \leqslant 2$, $p_i \leqslant q$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$, то*
$$d_n(M, L_q(\Omega)) \asymp n^{-\frac{r_1}{d} - \frac{1}{q} + \frac{1}{p_1}}.$$

3. *Если $q > 2$, $p_i \leqslant 2$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$ и $\frac{r_1}{d} \neq \frac{1}{p_1}$, то*
$$d_n(M, L_q(\Omega)) \asymp n^{-\min\left\{\frac{r_1}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1},\, \frac{q}{2}\left(\frac{r_1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}\right)\right\}}.$$

4. *Пусть $q \leqslant 2$,*
$$I := \{i \in \overline{1, s}:\ p_i \geqslant q\} \neq \{1, \dots, s\},$$
$$J := \{i \in \overline{1, s}:\ p_i \leqslant q\} \neq \{1, \dots, s\}.$$
Для $i \in I$, $j \in J$ определим числа λ_{ij} равенствами
$$\frac{1}{q} = \frac{1 - \lambda_{ij}}{p_j} + \frac{\lambda_{ij}}{p_i}.$$
Пусть
$$(i_0, j_0) = \underset{i \in I,\, j \in J}{\operatorname{argmax}}((1 - \lambda_{ij}) r_j/d + \lambda_{ij} r_i/d).$$
Тогда
$$d_n(M, L_q(\Omega)) \asymp n^{-((1 - \lambda_{i_0 j_0}) r_{j_0}/d + \lambda_{i_0 j_0} r_{i_0}/d)}.$$

5. Пусть $q > 2$,

$$I := \{i \in \overline{1,\, s} :\ p_i \geqslant q\} \neq \{1,\, \dots,\, s\},$$

$$J := \{i \in \overline{1,\, s} :\ 2 \leqslant p_i \leqslant q\},$$

$$K := \{i \in \overline{1,\, s} :\ p_i \leqslant 2\} \neq \{1,\, \dots,\, s\}.$$

Определим числа λ_{ij} и $\tilde{\lambda}_{ij}$ равенствами

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda_{ij}}{p_j} + \frac{\lambda_{ij}}{p_i}, \quad i \in I,\ j \in J \cup K,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1-\tilde{\lambda}_{ij}}{p_j} + \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{p_i}, \quad i \in I \cup J,\ j \in K,$$

и положим

$$(i_0,\, j_0) = \underset{i\in I,\, j\in J\cup K}{\operatorname{argmax}} ((1-\lambda_{ij})r_j/d + \lambda_{ij}r_i/d),$$

$$(i_1,\, j_1) = \underset{i\in I\cup J,\, j\in K}{\operatorname{argmax}} ((1-\tilde{\lambda}_{ij})r_j/d + \tilde{\lambda}_{ij}r_i/d).$$

Определим функции h_0, h_1, $h_2 : [1,\, q/2] \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ следующим образом:

$$h_0(t) = \begin{cases} t\left((1-\lambda_{i_0j_0})\frac{r_{j_0}}{d} + \lambda_{i_0j_0}\frac{r_{i_0}}{d}\right), & \text{если } I \neq \varnothing, \\ -\infty, & \text{если } I = \varnothing, \end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} t\left((1-\tilde{\lambda}_{i_1j_1})\frac{r_{j_1}}{d} + \tilde{\lambda}_{i_1j_1}\frac{r_{i_1}}{d} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}, & \text{если } K \neq \varnothing, \\ -\infty, & \text{если } K = \varnothing, \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} \max_{j\in J}\varphi_j(t), & \text{если } J \neq \varnothing, \\ -\infty, & \text{если } J = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\varphi_j(t) = t\left(\frac{r_j}{d} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1/p_j - 1/q}{1/2-1/q}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1/p_j-1/q}{1/2-1/q}.$$

Положим

$$h = \max\{h_0,\, h_1,\, h_2\}.$$

Предположим, что у функции h единственная точка минимума $t_* \in [1,\, q/2]$. Тогда

$$d_n(M,\, L_q(\Omega)) \asymp n^{-h(t_*)}.$$

Аналогичный результат получен для пересечения периодических классов Соболева на отрезке (их гладкость может быть дробной). Это обобщает результат Э.М. Галеева [1] на более широкую область параметров.

Литература

1. Галеев Э.М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных / Э.М. Галеев // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 2. — С. 418–430.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

А.В. Васин, Е.С. Дубцов (Санкт-Петербург)
dubtsov@pdmi.ras.ru

Усечённые операторы Кальдерона-Зигмунда. Пусть $\Omega(x)$ — однородная функция степени 0, которая является C^k-дифференцируемой на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ и имеет нулевой интеграл по единичной сфере. Соответствующее ядро Кальдерона-Зигмунда

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^d}, \quad x \neq 0,$$

порождает сингулярный интегральный оператор

$$Tf(y) = PV \int_{\mathbb{R}^d} f(x)K(y-x)\, dx,$$

где интеграл следует понимать в смысле главного значения, dx обозначает меру Лебега на пространстве $\mathbb{R}^d$. Для заданной области $D \subset \mathbb{R}^d$ модификация T_D оператора T задаётся формулой

$$T_D f = (Tf)\chi_D, \quad \mathrm{supp} f \subset \overline{D},$$

и называется *усечённым* оператором Кальдерона-Зигмунда.

Пространства Зигмунда. Непрерывная возрастающая функция $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\omega(0) = 0$, называется модулем непрерывности порядка $n \in \mathbb{N}$, если n является наименьшим натуральным числом, для которого выполнены два приведённых ниже свойства.

1. Для некоторого q, $n \leqslant q < n+1$, функция $\frac{\omega(t)}{t^q}$ *почти убывает*, т.е. существует положительная константа $C = C(q)$ такая, что $\omega(st) < Cs^q\omega(t)$, $s > 1$.

2. Для любого r, $n-1<r<n$, функция $\frac{\omega(t)}{t^r}$ *почти возрастает*, т.е. существует положительная константа $C=C(r)$ такая, что $\omega(st)<Cs^r\omega(t)$, $s<1$.

Будем использовать термин куб и символ Q для куба в пространстве $\mathbb{R}^d$, рёбра которого параллельны координатным осям. Пусть $|Q|$ — объём рассматриваемого куба, $\ell=\ell(Q)$ — длина его ребра. Обозначим символом $\mathcal{P}_n$ пространство многочленов степени не более, чем n. Для модуля непрерывности ω порядка $n\in\mathbb{N}$ пространство Зигмунда $\mathcal{Z}_\omega(D)$ в области $D\subset\mathbb{R}^d$ состоит из функций $f\in L^1(D,dx)$, для которых конечна следующая норма:

$$\|f\|=\|f\|_{L^1(D,dx)}+\sup_{Q\subset D}\inf_{P\in\mathcal{P}_n}\frac{1}{\omega(\ell)}\|f-P\|_{L^1(Q,dx/|Q|)}.$$

Основная теорема. Сформулированное ниже описание ограниченных усечённых операторов T_D на пространствах Зигмунда мотивировано подобными результатами для пространств Липшица и Соболева из работ [1] и [2] соответственно.

Теорема 1. *Пусть ω — модуль непрерывности порядка $n\in\mathbb{N}$, $D\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная липшицева область и T_D — усечённый оператор Кальдерона-Зигмунда с C^{n+1}-гладким ядром. Тогда оператор T_D ограничен на пространстве $\mathcal{Z}_\omega(D)$ в том и только в том случае, когда выполнены следующие два свойства:*
(i) $T_DP\in\mathcal{Z}_\omega(D)$ *для каждого многочлена* $P\in\mathcal{P}_n(D)$;
(ii) *для любого куба $Q\subset D$ с центром x_0 и любого многочлена P_{x_0}, однородного степени n относительно переменной $x-x_0$, существует многочлен $S_Q\in\mathcal{P}_n(D)$ такой, что*

$$\|T_D(\chi_D P_{x_0})-S_Q\|_{L^1(Q,dx/|Q|)}\leqslant C\|P\|\widetilde{\omega}(\ell(Q)),$$

где $\widetilde{\omega}(x)=\omega(x)/\max\left\{1,\int_x^1\omega(t)t^{-n-1}dt\right\}$ *и константа C не зависит от куба Q.*

Доказательство теоремы 1 и дальнейшие комментарии содержатся в статье [3].

Литература

1. Mateu J. Extra cancellation of even Calderón-Zygmund operators and quasiconformal mappings / J. Mateu, J. Orobitg, J. Verdera // J. Math. Pures Appl. (9) — 2009. — V. 91, № 4. — P. 402–431.

2. Prats M. A $T(P)$ theorem for Sobolev spaces on domains / M. Prats, X. Tolsa // J. Funct. Anal. — 2015. — V. 269, № 10. — P. 2946–2989.

3. Васин А.В. $T(P)$-теорема для пространств Зигмунда на областях / А.В. Васин, Е.С. Дубцов // Матем. заметки — 2023. — в печати.

К ИССЛЕДОВАНИЮ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.Ю. Ватолкин (Ижевск, ИжГТУ)
vmyu6886@gmail.com

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $\mathcal{P} = (p_{ik})_0^2$ — нижняя треугольная матрица, $p_{ik} : I \to \mathbb{R}$, такая, что функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции $\dfrac{1}{p_{11}(\cdot)}$, $\dfrac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}, \dfrac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \dfrac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$ локально суммируемы в I.

Определим квазипроизводные ${}_{\mathcal{P}}^{0}x$, ${}_{\mathcal{P}}^{1}x$, ${}_{\mathcal{P}}^{2}x$ функции $x : I \to \mathbb{R}$ равенствами (см. [1]): ${}_{\mathcal{P}}^{0}x \doteq p_{00}x$,

$$ {}_{\mathcal{P}}^{1}x \doteq p_{11}\frac{d({}_{\mathcal{P}}^{0}x)}{dt} + p_{10}({}_{\mathcal{P}}^{0}x),\ {}_{\mathcal{P}}^{2}x \doteq p_{22}\frac{d({}_{\mathcal{P}}^{1}x)}{dt} + p_{21}({}_{\mathcal{P}}^{1}x) + p_{20}({}_{\mathcal{P}}^{0}x). $$

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение (см. [1]) (в работе [1] изучается уравнение произвольного порядка)

$$ ({}_{\mathcal{P}}^{2}x)(t) = 0, \quad t \in I. \tag{1} $$

Его решением называется всякая функция $x : I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные нулевую и первую квазипроизводные и удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в I.

Уравнение (1) называется неосцилляционным на промежутке $J \subset I$ (здесь $J = [a, b],\ -\infty < a < b < +\infty$), если нулевая квазипроизводная любого его нетривиального решения имеет на J не более одного нуля (см. [1]).

Рассмотрим квазидифференциальную краевую задачу Штурма-Лиувилля на собственные значения и собственные функции с краевыми условиями I-го рода слева — I-го рода справа, т.е. задачу

$$ ({}_{\mathcal{P}}^{2}x)(t) = -\lambda({}_{\mathcal{P}}^{0}x)(t) \quad (t \in J = [a, b]), \tag{2} $$

$$ {}_{\mathcal{P}}^{0}x(a) = 0, \quad {}_{\mathcal{P}}^{0}x(b) = 0. \tag{3} $$

Последовательность решений $\{x_k(\cdot)\}_0^\infty$ построим так: $x_0(\cdot)$ есть решение задачи $({}^{2}_{\mathcal{P}}x)(t) = 0$ $(t \in J)$, ${}^{0}_{\mathcal{P}}x(a) = 0$, ${}^{1}_{\mathcal{P}}x(a) = 1$; функции $x_k(\cdot)$ находятся рекуррентно как решения следующих задач $({}^{2}_{\mathcal{P}}x_k)(t) = ({}^{0}_{\mathcal{P}}x_{k-1})(t)$ $(t \in J)$, ${}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(a) = 0$, ${}^{1}_{\mathcal{P}}x_k(a) = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Нулевая квазипроизводная решения $u(t,\lambda)$ уравнения (2) представима в виде ряда

$$ {}^{0}_{\mathcal{P}}u(t,\lambda) = {}^{0}_{\mathcal{P}}x_0(t) - \lambda\, {}^{0}_{\mathcal{P}}x_1(t) + \lambda^2\, {}^{0}_{\mathcal{P}}x_2(t) - \lambda^3\, {}^{0}_{\mathcal{P}}x_3(t) + \dots \tag{4} $$

(это следует из доказательства теоремы 3 работы [2]). ${}^{0}_{\mathcal{P}}u(a,\lambda) = 0$, т.е. первое из краевых условий (3) выполнено. Выполнения второго из условий (3) можно добиться за счёт выбора параметра λ, а, именно, собственные значения задачи (2),(3) представляют собой корни уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\cdot)$ — сумма ряда (4) при $t = b$. Функция $u(t,\lambda^*) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda^*)^k x_k(t)$ $(t \in J)$ есть собственная функция задачи (2),(3), отвечающая собственному значению λ^*.

Пусть уравнение (1) неосцилляционно на отрезке J и $C(t,s)$ есть функция Коши уравнения (1), константы M_1 и M_2 есть

$$ M_1 \doteq \max_{t\in[a,b]} {}^{0}_{\mathcal{P}}C(t,a), \quad M_2 \doteq \max_{(s,t)\in[a,b]\times[a,b]} \left|{}^{1}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)\right| $$

$\big((C^*(t,s))$ — функция Коши формально сопряжённого в смысле Лагранжа уравнения (см. [1]), $\mathcal{R} = (r_{ik})_0^2$ — нижняя треугольная матрица (см. [1]), $r_{ik} : I \to \mathbb{R}$,

$$ r_{ik} = (-1)^{i+k}\, p_{2-k,2-i}\, p_{2-i,2-i}/p_{2-k,2-k}\, \big(k \in 0 : i,\ i \in 0 : 2)\big). $$

Пусть $M \doteq max\{M_1, M_2\}$, функции $p_{00}(\cdot)$, $p_{11}(\cdot)$, $p_{22}(\cdot)$ неотрицательны на J. Пусть, далее, функция $\xi(t) \doteq min\{p_{11}(t), p_{22}(t)\}$ при каждом значении аргумента t из J. Будем предполагать, что функция $1/\xi(t)$ суммируема на J и пусть $\psi(t) \doteq \int_a^t ds/\xi(s)$ $(t \in J)$. Считаем, что функция $p_{21}(t) \geqslant 0$ $(t \in J)$.

Теорема 1. Справедливы оценки $0 \leqslant {}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(t) \leqslant M^{k+1}\psi^{2k}(t)/(2k)!$
$(t \in J,\ k = 0, 1, \dots)$.

Следствие. Если $p_{11}(t) = p_{22}(t) \equiv 1$ на J или $1 \leqslant p_{11}(t)$ при всех t из J и $p_{22}(t) \equiv 1$ на J $(1 \leqslant p_{22}(t)$ при всех t из J и $p_{11}(t) \equiv 1$ на $J)$, то оценки выглядят так $0 \leqslant {}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(t) \leqslant M^{k+1}(t-a)^{2k}/(2k)!$
$(t \in J,\ k = 0, 1, \dots)$.

Введём в рассмотрение функции $\varphi_k(t) : J \to \mathbb{R}$ с помощью следующих равенств: $\varphi_k(t)M^{k+1}\psi^{2k}(t)/(2k)! = {}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(t)$, где $k = 0, 1, \dots$

$(0 \leqslant \varphi_k(t) \leqslant 1)$. Пусть

$$v(t,\lambda) \doteq \varphi_0(b)M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k \varphi_k(b) M^{k+1} \psi^{2k}(t)}{(2k)!} \quad (t \in J).$$

Теорема 2. Функция $v(t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda\big(v(t,\lambda)\big)''_{\sqrt{\lambda}} = \psi^2(t)\left(\xi(t)\left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)'_t\right) \tag{5}$$

и условиям

$$\begin{gathered} v(b,\lambda) = {}^{0}_{\mathcal{P}}u(b,\lambda), \ \left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)\Big|_{t=a} = 0, \\ v(t,\lambda)\big|_{\lambda=0} = \left(\big(\sqrt{\lambda}\, v(t,\lambda)\big)'_{\sqrt{\lambda}}\right)\Big|_{\lambda=0} = {}^{0}_{\mathcal{P}}C(b,a). \end{gathered} \tag{6}$$

То что решение задачи (5),(6), функция $v(t,\lambda)$, удовлетворяет первому из условий (6), означает, что собственные значения задачи (2),(3) могут быть найдены как корни уравнения $v(b,\lambda) = 0$.

Далее исследуется асимптотика корней этого уравнения и в итоге для исходной квазидифференциальной краевой задачи (2),(3), которая в явном виде выглядит следующим образом

$$p_{22}(t)\Big(p_{11}(t)\big(p_{00}(t)x(t)\big)' + p_{10}(t)\big(p_{00}(t)x(t)\big)\Big)' +$$

$$+p_{21}(t)\Big(p_{11}(t)\big(p_{00}(t)x(t)\big)' + p_{10}(t)\big(p_{00}(t)x(t)\big)\Big) + p_{20}(t)\big(p_{00}(t)x(t)\big) =$$

$$= -\lambda\big(p_{00}(t)x(t)\big) \ (t \in J = [a,b]),$$

$$p_{00}(a)x(a) = 0, \quad p_{00}(b)x(b) = 0,$$

получена асимптотика её собственных значений при достаточно общих предположениях относительно коэффициентов квазидифференциального уравнения (2) (см. первый абзац настоящих тезисов). А, именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Асимптотика собственных значений краевой задачи (2),(3) имеет вид $\lambda_k = \dfrac{(\pi k)^2}{\left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{min\{p_{11}(s), p_{22}(s)\}}\, ds\right)^2} + O\left(\dfrac{1}{k}\right)$ при $k \to \infty$ $\big(k \in \mathbb{N}\big)$.

Литература

1. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В.Я. Дерр // Изв. института математики и информатики УдГУ. — 1999. — № 1(16). — С. 3–105.

2. Ватолкин М.Ю. О представлении решений квазидифференциального уравнения / М.Ю. Ватолкин, В.Я. Дерр // Изв. вузов. — 1995. — № 10(401). — С. 27–34.

О МЕТОДАХ РЕШЕТА И ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова (Воронеж, ВГУ)
algebraist@yandex.ru

Настоящая работа посвящена развитию методов решета, активно разрабатываемых в современной теории чисел.

1. Древнейшим из известных методов решета является метод решета Эратосфена (276 — 196 гг. до нашей эры). Но только в 1918 г. В. Брун [1] усовершенствовал этот метод решета. Он заменил полное высеивание другим, неполным: остаются не только простые числа, но и составные числа с большими простыми делителями. А. А. Бухштаб [2] в 1938г. дал более совершенную структуру метода решета Бруна, применив интегро-конечно-разностные уравнения. В. А. Тартаковский [3] в 1939 г. разработал метод приближенного решета, Ю. В. Линник [4] в 1941 г. разработал метод большого решета. П. Кун [5] в 1941 г. впервые заметил, что оценки будут лучше, если к числам добавить коэффициенты (веса). А. Сельберг [6] в 1949 г. разработал свой метод решета, предложив другую идею для получения оценок сверху. Б. В. Левин [7] в 1961 г. разработал метод решета типа решета Бруна, содержащий и метод решета Бухштаба.

2. А. А. Бухштаб [8] в 1967 г. построил комбинаторное весовое решето. Х. — Э. Рихерт [9] в 1969 г. построил свой метод весового решета. М. Лабордэ [10] в 1979 г. упростил веса Бухштаба, получил непрерывную форму и показал, что веса Рихерта являются частным случаем весов Бухштаба, и дают результаты хуже. А. А. Бухштаб [11] в 1985 г. анонсировал новый тип метода весового решета. Приведем веса Бухштаба (1985 г.), обозначив весовую функцию через $T(X)$:

$$T(X) := \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) +$$

$$+\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{\frac{a-g'}{a}}} S_k(A_p;X^{\frac{1}{a}})+$$

$$+\sum_{X^{\frac{a-g'}{a}}\leqslant p<X^{\frac{c}{a}}}(c-a\frac{\ln p}{\ln X})S_k(A_p;X^{\frac{1}{a}})+$$

$$+a\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1+a(g'-1)}{ag'^2}}\Bigg(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{1-g'z}} S_k(A_p;X^z)\Bigg)dz+$$

$$+\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{g'a}}}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S_k\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)+$$

$$+\frac{1}{g'}\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{\frac{a-g'}{a}}}\left(bg'-a+g'-a(g'-1)\frac{\ln p}{\ln X}\right)\times$$

$$\times S_k\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\Bigg\}, \tag{1}$$

где $k\in\mathbf{N},\ a,b,c,g'\in\mathbf{R},\ 1\leqslant b\leqslant c\leqslant a,\ 2c-b-1>0,\ 1\leqslant g'\leqslant a-1$, $S_k(A_d;z):=|\{a_n\in A|a_n\equiv 0(\mathrm{mod}\ d),(a_n,P_k(z))=1\}|,\ P_k(z)=\prod\limits_{p<z}p$, $A=\{a_n\in\mathbf{Z}|a_n\leqslant X\},\ X>1,\ A_d=\{a_n\in A|a_n\equiv 0(mod\ d)\},\ d\in\mathbf{N}$.

В работах [12] — [17] исследованы веса Бухштаба, анонсированные в 1985 г., разработаны два метода весового решета: метод весового решета, содержащий решето Сельберга в сочетании с весами Бухштаба (1985 г.) и метод весового решета, содержащий решето Бруна в сочетании с весами Бухштаба (1985 г.).

Отметим, что веса Бухштаба (1985 г.) позволяют получить преимущества в выборе параметров весового решета в сравнении с весами Бухштаба (1967 г.), их непрерывной формой, полученной Лабордэ, частным случаем которых являются веса Рихерта.

Литература

1. Brun V. Le crible d'Eratosthene et le theorem de Goldbach / V. Brun // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1919. — V. 168. — P. 544–546.

2. Бухштаб А.А. Новые улучшения в методе эратосфенова решета / А.А. Бухштаб // Матем. сб. — 1938. — Т. 4(46). — N. 2. — С. 375–387.

3. Тартаковский В.А. Метод избирательного "приближенного решета"/ В.А. Тартаковский // ДАН СССР. — 1939. — Т. 23. — N. 2. — С. 127—130.

4. Линник Ю.В. "Большое решето"/ Ю.В. Линник // ДАН СССР. — 1941. — Т. 30. — N. 4. — С290—292.

5. Kuhn P. Zur Viggo Brunschen Siebmethode / P. Kuhn // I. Norske Vid. Selsk. Forh. Trondhjem. — 1941. — V. 14. — N. 39. — P. 145—148.

6. Рихерт Х.—Э. Решето Сельберга / Х.—Э. Рихерт, вып. Проблемы аналитической теории чисел. : пер. с англ. Б.В. Левина. М.: Мир, 1975. — С. 7—42.

7. Левин Б.В. О методе "решета"/ Б.В. Левин // Труды Ташкент. ГУ. — 1961. — Вып. 189, кн. 21. — С. 31—36.

8. Бухштаб А.А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета / А.А. Бухштаб // УМН. — 1967. — Т. 22. — N. 3 (135). — С. 199—226.

9. Richert H.—E. Selbergs sieve with weights / H.—E. Richert // Mathematika. — 1969. — V. 16. — N. 31. — P. 1—22.

10. Laborde M. Buchstabs sifting weights / M. Laborde // Mathematika. — 1979. — V. 26. — P. 250—257.

11. Бухштаб А.А. Новый тип весового решета / А.А. Бухштаб // Теория чисел и её прил. : тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 22—24.

12. Вахитова Е.В. О новом типе весового решета Бухштаба / Е.В. Вахитова. — М. Деп. в ВИНИТИ 26.08.93, N. 2342-В93, 1993. — 34 с. (РЖ Матем. — 1994. — 1А97 Деп).

13. Вахитова Е.В. О применении решета Бруна с весами Бухштаба нового типа к полиномиальной последовательности / Е.В. Вахитова. — М. Деп. в ВИНИТИ 22.06.95, N. 1814-В95, 1995. — 52 с. (РЖ Матем. — 1995. — 10А47 Деп).

14. Вахитова Е.В. О приложении функций Бухштаба / Е.В. Вахитова // Математические заметки. — 1995. — Т. 57. — N. 1. — С. 121–125. *Vakhitova E. V.* Application of Bukhstab functions / E.V. Vakhitova // Plenum Publishing Corporation. 1995. Mathematical Notes. — 1995. — V. 57. — N. 1—2. — P. 85—87.

15. Вахитова Е.В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа / Е.В. Вахитова // Математические заметки. — 1999. — Т. 66. — N. 1. — С. 38—49. *Vakhitova E.V.* Selbergs One — Dimensional Sieve With Bukhstab Weights of New Type / E.V. Vakhitova // Kinwer Academic / Plenum Publishees. 2000. Mathem. Notes. — 1999. — V. 66. — N. 1. — P. 30—39.

16. Вахитова Е.В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е.В. Вахитова. — М.: Изд-во МПГУ "Прометей", 2002. — 268 с.

17. Вахитова Е.В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 332 с.

ПРОСТРАНСТВА СЛУЧАЙНЫХ ЗАМКНУТЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Ю.П. Вирченко (Белгород, БГТУ)
virch@bsu.edu.ru

В сообщении предлагается метод конструирования вероятностных пространств замкнутых сепарабельных случайных множеств в конечномерных пространствах погружения $\mathbb{R}^d$, позволяющих определять, в наиболее общем виде, такие измеримые пространства вместе с задаваемой на них аналитическим образом мерой.

Пусть $D = \bigotimes_{j=1}^{d}[a_j, b_j) \subset \mathbb{R}^d$, $0 < a_j < b_j < c$ — полуоткрытый параллелипипед. Класс всех таких множеств обозначим символом $\mathcal{D}$. Дизъюнктивное покрытие $\mathcal{D}(D)$, для которого выполняется $\bigcup_{D' \in \mathcal{D}(D)} D' = D$, будем называть *дроблением* бруса D.

На семействе $\mathfrak{D}(D)$ всех покрытий бруса D введем отношение частичного порядка, которое будем называть отношением *подчинённости*. Дробление $\mathcal{D}_2(D)$ подчинено дроблению $\mathcal{D}_1(D)$, если для каждой пары $\langle D_1, D_2 \rangle$ таких брусов $D_1 \in \mathcal{D}_1(D)$ и $D_2 \in \mathcal{D}_2(D)$ выполняется одно из двух соотношений $D_1 \supset D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

Пусть $\mathrm{cl}(\cdot)$ обозначает операцию топологического замыкания в $\mathbb{R}^d$ и $D_+ = \mathrm{cl}(D)$ — замыкание бруса D.

Определение 1. *Пространство $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P} \rangle$ называется пространством случайных множеств с пространством погружения $\mathbb{R}^d$, если Ω состоит из всех подмножеств $X \subset \mathbb{R}^d$ и $\mathfrak{B}$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей все классы $\mathcal{F} = \{X \subseteq \mathbb{R}^d : D_+ \cap \tilde{X} \neq \varnothing\}$; $D \in \mathcal{D}$ подмножеств, которые составляют систему $\mathfrak{F}_0$.*

Определение 2 [1]. *Пространство $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P} \rangle$ называется пространством замкнутых случайных множеств, если $\mathfrak{B}$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей все элементы системы $\mathfrak{F}_0$ и при этом мера P такова, что для любого измеримого класса $\mathcal{F} = \{\tilde{X}\} \in \mathfrak{B}$ подмножеств, класс $\mathrm{cl}(\mathcal{F}) \equiv \{\mathrm{cl}(\tilde{X})\}$ также измерим в этом пространстве и имеет место равенство $\Pr\{\mathcal{F}\} = \Pr\{\mathrm{cl}(\mathcal{F})\}$.*

Определение 3. *Пространство* $\langle\Omega,\mathfrak{B},\mathsf{P}\rangle$*, называется сепарабельным, если существует счётное, всюду плотное в* $\mathbb{R}^d$ *множество сепарабельности* $T\subset\mathbb{R}^d$ *и класс* $\mathcal{N}_T\in\mathfrak{B}$ *подмножеств, имеющее вероятность* $\mathsf{P}(\mathcal{N}_T)=0$*, такие, что для любого открытого бруса* $D_-=\bigotimes_{j=1}^d(a_j,b_j)$ *выполняются включения* $\{D_-\cap T\subset\tilde{X}\}\setminus\{D_-\subset\tilde{X}\}\subset\mathcal{N}_T$, $\{D_-\cap T\cap\tilde{X}=\varnothing\}\setminus\{D_-\cap\tilde{X}=\varnothing\}\subset\mathcal{N}_T$.

Прикладная ценность замкнутых множеств связана с тем, что сепарабельность замкнутого случайного множества не зависит от выбора счетного всюду плотного в пространстве погружения множества сперабельности T.

Предлагаемая конструкция пространств $\langle\Omega,\mathfrak{B},\mathsf{P}\rangle$ основана на вводимом нами понятии булевской c-системы.

Определение 4. *Булевскую систему* $\mathfrak{F}$ *элементов из* 2^Ω *с единицей* Ω *назовем c-системой, если она содержит элементы* Ω *и* $\varnothing$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

(a) *если элементы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *принадлежат системе* $\mathfrak{F}$*, то существует не конечный дизъюнктивный набор* $\mathfrak{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})\subset\mathfrak{F}$ *непустых элементов из* $\mathfrak{F}$ *такой, что элемент* $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ *представим в виде разложения*

$$\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})}\mathcal{F}.$$

(b) *если* $\mathcal{A}\in\mathfrak{F}$*, то существует конечный дизъюнктивный набор* $\mathfrak{F}(\mathcal{A})\subset\mathfrak{F}$ *непустых элементов из* $\mathfrak{F}$ *такой, что*

$$\complement\mathcal{A}=\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathcal{A})}\mathcal{F}.$$

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– c-система и* $\mathfrak{F}_0$ *– семейство конечных дизъюнктивных наборов элементов из* $\mathfrak{F}$*. Тогда семейство* $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$*, определяемое формулой* $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})=\left\{\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathfrak{G}(\mathcal{A})}\mathcal{F};\mathfrak{G}\in\mathfrak{F}_0\right\}$ *является минимальной алгеброй, содержащей систему* $\mathfrak{F}$.

Это свойство позволяет продолжить однозначно аддитивную меру, заданную на c-системе $\mathfrak{F}$, а затем, при выполнии условия счетной полуаддиттивности меры P на c-системе $\mathfrak{F}$, на миниимальную σ-алгебру $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$, порождаемую этой системой.

Литература

1. Matheron G. Random sets and integral geometry / G. Matheron. — New York : John Wiley & Sons, 1975.

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.А. Власова, Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГУ)
zolotoonline@yandex.ru, stenyuhin@mail.ru

Пусть $u(x, y)$ двумерная минимальная поверхность в конформных координатах, определенная на области D. φ- препятстве в области D, функция, определённая на подобласти $D_1 \subset D$- области налегания. Границу $\partial D_1{=}\Gamma$ области налегания назовём свободной границей на минимальной поверхности. Имеем задачу экстремальную задачу

$$\begin{cases} \int\limits_D (|\bigtriangledown u|^2 + 2uf)dx \longrightarrow min, \\ u|_{\partial D} = g(s), \end{cases} \tag{1}$$

где $u \in W_2^4(D)$, с учётом условия налегания $u \geqslant \varphi$.

В [1] — [2] приводятся следующие факты.

Лемма 1. *Существует константа c такая, что u-решение задачи со свободной границей, допускает оценку*

$$u(x) \leqslant cd^2(x), \tag{2}$$

где $c = c(n, \sup\limits_D u, dist\{x, \partial D_1\}), d(x) = dist\{x, \Gamma\}$.

Лемма 2. *Для любого* $x_0 \in D \setminus \overline{D_1}$, *и любого шара* $B_r(x_0) \subset D \setminus \overline{D_1}$ *выполнена оценка*

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geqslant \frac{r^2 c_0}{2n} + (u - \varphi)(x_0). \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть на области D задана задача минимальных поверхностей со свободной границей. Функция φ является препятствием на области D_1. Тогда

1) на D_1 $u \equiv \varphi$,

2) на $D \backslash int D_1$ задача

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ u|_{\partial D} = g(s), \\ u \geqslant \varphi. \end{cases} \tag{4}$$

однозначно разрешима.

3) на границе $\partial D_1 = \Gamma$ существуют ограниченные вторые производные из пространства $L_{\infty,loc}(D_1)$.

Литература

1. Власова А.А. О задаче минимальных поверхностей с ограничениями и свободной границей / А.А. Власова // Материалы студенческой научной сессии математического факультета ВГУ : сборник статей. — Воронеж : ВГУ, 2022.

2. Власова А.А., Стенюхин Л.В. О задаче минимальных поверхностей со свободной границей / А.А. Власова, Л.В. Стенюхин // Современные методы теории краевых задач : Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа, Воронеж, 3–9 мая 2022 года. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — С. 62–65.

3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 576 с.

4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 760 с.

5. Стенюхин Л. В. О минимальных поверхностях с ограничениями типа неравенств / Л.В. Стенюхин // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 11. — С. 51–59.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ СЛАБОДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.И. Войтицкий (Москва, РГАУ-МСХА; РУДН)

v.voytickiy@rgau-msha.ru, voytitskiy_vi@rudn.ru

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H задачу на собственные значения эллиптического операторного пучка (описывающую нормальные движения слабодиссипативной динамической системы)

$$L(\lambda)u := \lambda^2 Cu + \lambda Bu + (A^2 - K)u = 0, \qquad (1)$$

где оператор C ограничен, положителен и ограниченно обратим, A — положительно определённый оператор с дискретным спектром, оператор K является A-ограниченным, т.е. $KA^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, оператор $B \geqslant 0$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, BA^{-q} ограничен для некоторого $q \in [0;1)$.

Известно (см., например, [1]), что спектр такого пучка является дискретным, т.е. состоит из изолированных конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности и может содержать не более конечного числа вещественных собственных значений. Если дополнительно K является самосопряженным оператором, то спектр расположен симметрично относительно вещественной оси.

С помощью замены $f := A^2 u$, $\mu := i\lambda$ приходим к задаче для операторного пучка М.В. Келдыша

$$M(\mu)f := (C^{-1} - Q_0 A^{q-1} - \mu Q_1 A^{q-2} - \mu^2 A^{-2})f = 0, \qquad (2)$$

где $Q_0 := C^{-1}(KA^{-1})A^{-q}$ и $Q_1 := iC^{-1}BA^{-q}$ — ограниченные операторы.

Согласно результатов из [2] при $C = I$ все собственные значения пучка локализованы в секторах $\Delta_0 = \{\lambda : |\arg\lambda| < \delta\}$ и $\Delta_2 = \{\lambda : |\arg\lambda - \pi| < \delta\}$. Если дополнительно считать, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_r(\mathcal{H})$, то система корневых элементов $M(\mu)$ является двукратно полной в $\mathcal{H}$. Предположим, что $\lambda_j(A^{-1}) \sim cj^{-p}$, $p > 0$.

В работе доказывается, что с помощью замены $g = \mu A^{-1} f$ пучок может быть линеаризован так, что каждый набор функций $(f_0, f_1) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}(A)$ раскладывается по системе собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$, равного сумме самосопряжённого оператора $\mathcal{A}_1$ с дискретным спектром и подчиненного ему оператора $\mathcal{A}_2$. При этом (см. [3]) эта система образует двукратный базис со скобками Бари, Рисса либо Абеля-Лидского порядка $\alpha > p^{-1} - (1 - q_1)$ соответственно в одном из трех случаев:

$$1)\ p(1-q_1) > 1; \qquad 2)\ p(1-q_1) = 1; \qquad 3)\ p(1-q_1) < 1,$$

где $q_1 = 0$ в случае $q = 0$; либо q_1 — произвольное число из интервала $(q;1)$ (в случае $C = I$ полагаем, что $q_1 = q$).

В общем случае спектр пучка (2) находится в некоторой окрестности нуля и двух «параболических областях», примыкающих к положительной и отрицательной полуосям, удовлетворяющих неравенствам

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant b'(\pm\mathrm{Re}\,\lambda)^{q_1},$$

где b' — некоторая положительная константа. В частности, при $q = 0$ спектр расположен в полосе, а в случае $C = I$ имеем $b' > b$,

$b = \|\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1^{-q}\| = (\|Q_0\|^2 + \|Q_1\|^2)^{1/2}$. Также из точной асимптотики собственных значений оператора $\mathcal{A}_1$ можно получить асимптотические формулы для собственных значений оператора $\mathcal{A}$ в правой и левой полуплоскостях.

Полученные абстрактные результаты применимы, в частности, для квадратного пучка Штурма-Лиувилля, а также для спектральных задач, описывающих малые движения систем сочленённых маятников с трением в шарнирах, заполненных системами идеальных жидкостей.

Литература

1. Shkalikov A.A. Operator pencil arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Operator theory: Advances and Applications, Vol. 87, 1996, 358–385.

2. Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А.С. Маркус. — Кишинев: «Штиинца», 1986. — 260 с.

3. Agranovich M.S. Generilized Method of Eigenoscillations in Difraction Theory / M.S. Agranovich, B.Z. Katsenelenbaum, A.N. Sivov, N.N. Voitovich. — Berlin: Wiley–VCH, 1999. — 378 p.

О МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

О.А. Гаврилов, И.В. Тихонов (Саров, МГУ; Москва, МГУ)
oa.gavr@yandex.ru, ivtikh@mail.ru

В банаховом пространстве E на отрезке $[0,T] \subset \mathbb{R}$ рассмотрим абстрактное параболическое уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь A — линейный замкнутый оператор в E с плотной областью определения $D(A) \neq E$, порождающий в E аналитическую полугруппу $U(t)$ класса C_0 (см. [1], [2]). Считаем, что A имеет чисто вещественный спектр, расположенный на луче $(-\infty, -\alpha]$ при некотором фиксированном значении $\alpha > 0$. Начальное состояние $u_0 \in E$ решения $u(t) = U(t)u_0$ сейчас неизвестно.

Введем дополнительное соотношение

$$\int_0^T \eta(t)u(t)\,dt = u_1 \tag{2}$$

с заданной функцией $\eta \in C^1[0,T]$, такой, что $\eta(0) > 0$. Требуется по элементу $u_1 \in E$ восстановить начальное состояние $u_0 \in E$. Из-за сглаживающих свойств интеграла (2) предполагаем, что $u_1 \in D(A)$.

Тогда задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению

$$\beta u_0 - Bu_0 = f, \tag{3}$$

где $\beta \equiv \eta(0)$, $f \equiv -Au_1$, а линейный ограниченный оператор B определен формулой

$$B = \eta(T)U(T) - \int_0^T \eta'(t)U(t)\,dt. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде ряда Неймана

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}}\, B^k f, \tag{5}$$

что соответствует методу итераций с указанным оператором B.

Условия $\eta(t) > 0$ и $\eta'(t) \leqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ гарантируют сходимость ряда (5) (см. [3]). Возникает вопрос о переносе данного подхода на другие классы вещественных функций $\eta(t)$.

По теореме об отображении спектра (см. [4], теор. 16.4.1) для оператора (4) получаем условие

$$0 < H_T(p) \equiv p\int_0^T e^{-pt}\eta(t)\,dt < 2\eta(0), \quad \forall p \geqslant \alpha > 0, \tag{6}$$

гарантирующее сходимость ряда (5). Здесь $H_T(p)$ — преобразование Карсона от функции $\eta(t)$ на отрезке $[0,T]$. Известно, что

$$\lim_{p\to+\infty} H_T(p) = \eta(0). \tag{7}$$

Сравнение (6) и (7) достаточно наглядно. Особо отметим такой результат.

Теорема 1. *Пусть* $|\eta(t) - \eta(0)| \leqslant Lt$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$ *с некоторой константой* $L > 0$. *Тогда если*

$$L < \alpha \eta(0), \tag{8}$$

то выполнено условие (6) *и ряд* (5) *сходится по норме* E.

Проверка соотношения (8) в конкретных задачах не составляет труда. Например, в качестве L можно брать $\max |\eta'(t)|$ на $[0, T]$.

С использованием изложенных соображений подготовлена компьютерная программа на языке Python для численного решения нелокальной задачи (1), (2) в случае уравнения теплопроводности. Вычислительные эксперименты показывают высокую надежность метода итераций, основанного сходимости ряда (5).

Литература

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.

2. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — N. Y.: Springer-Verlag, 1983.

3. Тихонов И. В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34. — № 6. — С. 841-843.

4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.

НИГДЕ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ СТЕПЕННОГО КЛАССА ТАКАГИ И ИХ СВОЙСТВА[1]

О.Е. Галкин, С.Ю. Галкина, А.А. Тронов

(Нижний Новгород, НИУ ВШЭ)

olegegalkin@ya.ru, svetlana.u.galkina@mail.ru, tronovaa@yandex.ru

Доклад посвящен изучению степенных функций Такаги $S_p(x)$. По конструкции они аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги $T(x)$, описанной в 1903 г в [1]:

Определение 1. *Степенной функцией Такаги с параметром (показателем)* $p > 0$ мы называем вещественнозначную функцию

[1] Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1101.

$S_p(x)$, задаваемую на числовой оси $\mathbb{R}$ с помощью равенства

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S_0(2^n x)}{2^n} \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $S_0(x) = \rho(x, \mathbb{R}) = \inf_{q \in \mathbb{R}} |x - q|$ — расстояние между точкой x и ближайшей к ней целой точкой.

Если $p = 1$, то $S_p(x)$ совпадает с функцией Такаги $T(x)$ из [1].

График степенной функции Такаги $y = S_p(x)$ при $p = 0{,}5$, изображенный сплошной линией, можно увидеть далее на рисунке 1, вместе с графиками первых пяти частичных сумм ряда (1), изображенными пунктиром. Вертикальные штрихпунктирные линии на этом рисунке указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке $[0; 1]$: $x = 1/3$ и $x = 2/3$ (см. теорему 3).

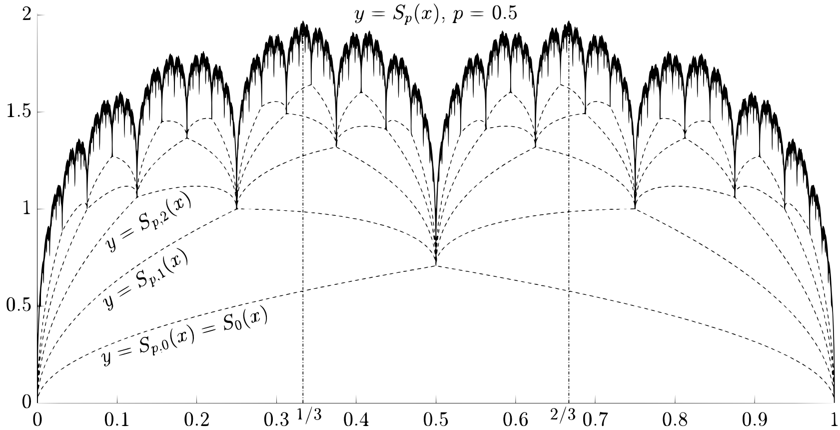

Рис. 1. График функции $y = S_p(x)$ при $p = 0{,}5$.

Нами получены, в частности, следующие результаты:

Теорема 1. *При любом $p > 0$ степенная функция Такаги S_p на множестве $\mathbb{R}$ всюду определена, непрерывна, четна, имеет период 1 и обладает следующим свойством симметрии:*

$$S_p(x) = S_p(q - x) \quad \text{при всех } q \in \mathbb{R} \text{ и всех } x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, для любого $p > 0$ функция S_p ограничена, причем для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $0 \leqslant S_p(x) \leqslant 1/(2^p - 1)$.

Теорема 2. *При любом $p \in (0;1)$ у степенной функции Такаги S_p нет ни конечной левой, ни конечной правой производной ни в одной точке из $\mathbb{R}$.*

Теорема 3. *Пусть $p \in (0;1)$. Тогда:*
1) глобальный максимум функции $S_p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ равен $2^p/(3^p(2^p-1))$ и достигается только в точках вида $x = q + 1/3$ и $x = q + 2/3$, где q — произвольное целое число;
2) глобальный минимум функции $S_p(x)$ по $x \in \mathbb{R}$ равен 0 и достигается только в целых точках x.

Теорема 4. *Пусть $p \in (0;1]$. Тогда верны два утверждения:*
1) Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $0 < |x-y| \leqslant 1$, то верно неравенство

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant |x-y|^p \Big(\Phi_p + \log_2 \frac{1}{|x-y|}\Big), \text{ где } \Phi_p = \frac{2^p}{2^p-1} - \log_2 3.$$

2) Функция S_p удовлетворяет следующему логарифмическому условию Гёльдера *с показателем p и константой $C = 2^p/(2^p-1)$: если $x, y \in \mathbb{R}$ и $0 < |x-y| \leqslant 1/3$, то выполняется неравенство*

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant \frac{2^p}{2^p-1} \cdot |x-y|^p \cdot \log_3 \frac{1}{|x-y|}.$$

Литература

1. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. — 1903. — V. 1. — C. 176–177.

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ

Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева, Ю.В. Афанасенкова
(Калуга, КГУ)
losh-elena@yandex.ru, gladyshev.yua@yandex.ru

В статье приведен метод построения класса решений уравнения параболического типа, в частности уравнения Шредингера, новым методом, названным методом параметрических обобщенных степеней (ПОС) [1,2,3].

Пусть на плоскости введена декартова система координат x_1, x_2. Введем два линейных дифференциальных коммутирующих оператора $D(1), D(2)$, где в скобках указана их зависимость каждого от одной координаты. Для использования ПОС положим, что каждый оператор представлен как произведение двух не обязательно коммутирующих оператора $D(1) = D_2(1) D_1(1)$, $D(1) = D_2(1) D_1(1)$, занумерованных внизу индексом. Положим, что операторы $D_i(j)$ действуют в линейном векторном функциональном пространстве L функции $f(x_1, x_2)$ с требуемыми свойствами. Потребуем, что хотя бы одна из пар операторов $D_2(1), D_1(1)$ и $D_2(2), D_1(2)$ имеют не пустые ядра с элементами C_{ij}, занумерованными соответственно $D_i(j) C_{ij} = 0$. Второе условие состоит в существовании у всех $D_i(j)$ правых обратных $I_i(j)$ операторов $D_i(j) I_i(j) = 1$.

Простейший пример дают операторы

$$D(1) = \tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad D(2) = \alpha \tfrac{\partial}{\partial x_2} \ , \tag{1}$$

где α - константа.

$$D_2(1) = D_1(1) = \tfrac{\partial}{\partial x_1}, \quad D_2(2) = \alpha, \quad D_1(2) = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Обобщенные константы для операторов $D(1)$ и $D(2)$ можно представить $C(1) = C_1(1) + I_1(1) C_2(1)$.

Примем $D(1) C(1) = 0, \quad D(2) C(2) = 0$.

Например, для случая (1) имеем $C(1) = C_1 + xC_2, \quad C(2) = \alpha$.

Для общей константы имеем $C = C(1) C(2)$.

Параметрические обобщенные степени принято записывать в виде выражения

$$X^{(P_1)}(1) X^{(P_2)}(2) C = P_1! P_2! I^{P_1}(1) I^{P_2}(2) C.$$

ПОС образуют линейное векторное пространство. Введем биномы ПОС

$$(X(1) \mp X(2))^n C = \sum_{i=0}^{n} (\pm 1)^i C_n^i X^{(n-i)}(1) X^{(i)}(2) C,$$

которые записаны для удобства в символическом виде. Назовем эти выражения бинарными (симметризованными) ПОС. Если ввести симметризованные операторы

$$D_S = \tfrac{1}{2}(D(1) + D(2)), \quad \bar{D}_S = \tfrac{1}{2}(D(1) - D(2)) \ ,$$

то имеем $D_S (X(1) - X(2))^n C = 0, \quad \bar{D}_S \ (X(1) + X(2))^n C = 0$. Если принять условие (1), то бинарные ПОС приводят к последовательности полиномов Эрмита [4].

Предложенный метод допускает обобщение для решения задачи при любом числе независимых переменных.

Литература

1. Гладышев Ю.А. Об одном варианте метода обобщенных степеней Берса / Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева , Р.А. Стамов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики, механики : сборник трудов межд. научной конференции. — Воронеж : Издательство «Научно-исслед. публикации» 2022. — С. 45–52.

2. Гладышев Ю.А. Об использовании метода параметрических обобщенных степеней для построения решений одного класса дифференциальных уравнений / Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2022 : материалы межд. конференции. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — С. 67–71.

3. Гладышев Ю.А. Об использовании параметрических обобщенных степеней для построения решений уравнений параболического типа / Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева // XXXIII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2022) : материалы межд. конференции. — Симферополь : ИТ «АРИАЛ», 2022. — С. 16.

4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.

Решение задачи термоупругости в материале с трещиной

А.В. Глушко, Е.А. Логинова (Воронеж, ВГУ)
kuchp2math@vsu.ru, loginova@vsu.ru

В области $x = (x_1; x_2) \in \mathrm{R}^2 \backslash l$, где $l = \{x = (x_1; x_2) \,|\, x_2 = 0;$ $x_1 \in (-1; 1)\}$: изучается задача

$$\Delta T + \delta \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \tag{1}$$

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \\ + \beta(\kappa-1)\frac{\partial v}{\partial x_1} = 4\alpha_0 e^{\gamma x_2}\frac{\partial T}{\partial x_1}, \tag{2}$$

$$(\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+(\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}+\beta(3-\kappa)\frac{\partial u}{\partial x_1}+$$
$$+\beta(\kappa+1)\frac{\partial v}{\partial x_2}=4\alpha_0 e^{\gamma x_2}\left((\beta+\gamma)T+\frac{\partial T}{\partial x_2}\right), \quad (3)$$

$$T(x_1,+0)-T(x_1,-0)=T_0(x_1), \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{\delta}{2}T(x_1,+0)-\frac{\partial T(x_1,-0)}{\partial x_2}-\frac{\delta}{2}T(x_1,-0)=T_1(x_1), \quad (5)$$

$$u(x_1;+0)-u(x_1;-0)=0, v(x_1;+0)-v(x_1;-0)=0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u(x_1;+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x_1;-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1), \quad (7)$$

$$\frac{\partial v(x_1;+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1;-0)}{\partial x_2}=q_2(x_1). \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть $T_0(x_1), T_1(x_1) \in C^1([-1;\ 1])$, $T_0(\pm 1)=0$, $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ – решения задачи (1)–(8), $q_i(x_1)\equiv 0$, $i=1,2$. Тогда условия (6) выполнены по непрерывности, а условия (8) – в смысле главного значения. Также справедливы следующие асимптотические по гладкости вблизи границы представления функций $u(x_1,x_2)$, $\nu(x_1,x_2)$ и их производных

$$u(x_1,x_2)=P_1(x_1,x_2), \quad v(x_1,x_2)=P_2(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{x_2\left(x_1-1\right)}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{x_2\left(x_1+1\right)}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)+P_3(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1-1\right)^2+x_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{x_2^2}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)-\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1+1\right)^2+x_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{x_2^2}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)+P_4(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1-1)^2+x_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{x_2^2}{(x_1-1)^2+x_2^2}\right)T_0(x_1)-\frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{x_2^2}{(x_1+1)^2+x_2^2}\right)T_0(x_1)+P_5(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{x_2(x_1+1)}{(x_1+1)^2+x_2^2}-\right.$$
$$\left.-2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right)\right)T_0(x_1)-\frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{x_2(x_1-1)}{(x_1-1)^2+x_2^2}-\right.$$
$$\left.-2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right)\right)T_0(x_1)+P_6(x_1,x_2),$$

где $P_j(x_1,x_2)$, $j=\{1,\ ...,\ 6\}$ – непрерывные и ограниченные на R^2 функции.

Литература

1. El-Borgi S., Erdogan F., Hidri L. A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading // International Journal of Engineering Science. — 2004. — № 42. — С. 371–393.

2. Глушко А.В., Логинова Е.А. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной // Вестник ВГУ Серия: Физика. Математика. — 2010. — № 2. — С. 47–50.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ НА ОСИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА В ЛОГИСТИКЕ ПЕРЕВОЗОК

Н.А. Гнездилова (Елец, ФГБОУ ВО «ЕГУ им. И.А. Бунина»)
nataelez@mail.ru

Для большого числа торговых организаций наибольшую актуальность приобретают вопросы транспортной логистики как одной из основных статей расходов.

Проведя анализ управлением логистических процессов, можно сделать вывод о необходимости постановки и решения задачи, оптимизирующей размещение груза в транспортном средстве с учетом определенных ограничений.

Постановка задачи.

Уложить максимально возможное количество груза в транспорт при условии, что допустимые нагрузки на оси транспортного средства не будут превышены, а также будут соблюдены дополнительные ограничения.

В подобной постановке данная задача называется задачей о ранце (или задачей о рюкзаке) [1].

В качестве транспортного средства, на которое рассчитываются нагрузки, выбран стандартный двухосный тягач с одноосным полуприцепом.

Рассчитаем, каким образом будут распределены нагрузки с учетом находящегося в полуприцепе груза (рис. 1).

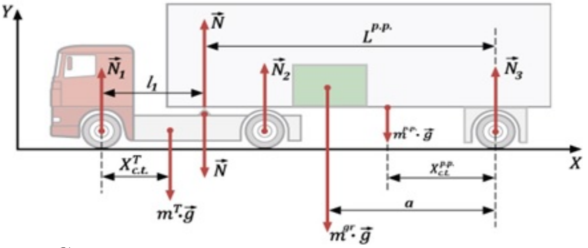

Рис. 1. Силы, действующие на тягач и полуприцеп с грузом

Представляем уравнения, которые обеспечивают выполнение условия равенства сил и моментов сил, действующих на тягач в данной системе:

$$N_1 + N_2 - m^T \times g - N = 0 \tag{1}$$

$$m^T \times g \times X^T_{c.t.} + N \times l_1 - N_2 \times L^T = 0, \tag{2}$$

где: N_1 — нагрузка на переднюю ось тягача, m^T — масса тягача, N_2 — нагрузка на заднюю ось тягача, $X^T_{c.t.}$ — расстояние от передней оси тягача до центра тяжести, N — сила, с которой полуприцеп в месте сцепки давит на тягач.

Уравнения для полуприцепа (условие равенства сил рассматривается относительно задней оси полуприцепа), m^{gr} — масса груза, $m^{p.p.}$ — масса полуприцепа:

$$N + N_3 - (m^{p.p.} + m^{gr}) \times g = 0 \tag{3}$$

$$m^{gr} \times g \times \alpha + m^{p.p.} \times g \times X_{c.t.}^{p.p.} - N \times L^{p.p.} = 0, \tag{4}$$

где: $L^{p.p.}$ — расстояние от задней оси полуприцепа до места сцепки с тягачом, $X_{c.t.}^{p.p.}$ — расстояние от задней оси полуприцепа до центра тяжести, α — расстояние от задней оси полуприцепа до центра тяжести груза.

Используя полученные выражения (1 — 4) можно, вывести формулы для расчета нагрузки на все три оси автотранспортного средства. Из уравнения (4) получаем:

$$N = (m^{gr} \times g \times \alpha + m^{p.p.} \times g \times X_{c.t.}^{p.p.})/L^{p.p.}. \tag{5}$$

Из уравнения (3) получаем:

$$N_3 = (m^{p.p.} + m^{gr}) \times g - N. \tag{6}$$

Из уравнения (2) получаем:

$$N_2 = (m^T \times g \times X_{c.t.}^T + N \times l_1)/L^T. \tag{7}$$

Наконец, из уравнения (1) получаем:

$$N_1 = -m^T \times g + N - N_2. \tag{8}$$

Из данных уравнений становится понятно, что для того, что бы изменить нагрузки на отдельные оси транспортного средства необходимо изменять параметр N, который, в свою очередь, содержит только один единственный параметр, которым можно варьировать — это параметр α.

Формула для определения параметра для случая с несколькими грузами, в общем виде:

$$\alpha = (m_1^{gr} \times X_1 + m_2^{gr} \times X_2 + \ldots + m_k^{gr} \times X_k)/(m_1^{gr} + m_2^{gr} + \ldots + m_k^{gr}), \tag{9}$$

где: m_k^{gr} — масса k-й секции полуприцепа, X_k — расстояние от центра тяжести k-го груза до задней оси полуприцепа.

При этом предполагается, что каждый элемент груза представляется как некий условный объём (мешок или нагруженную паллету), а внутри этого объёма вес будет распределен равномерно. В результате, для определения центра тяжести каждого элемента груза можно принять, что он находится ровно посередине своего геометрического размера относительно продольной оси транспортного средства.

Литература

1. Псиола В.В. О приближенном решении 3-х мерной задачи об упаковке на основе эвристик. [Электронный ресурс] / В.В. Псиола. – Режим доступа: свободный. URL: – http://www.packer3d.ru/sites/default/files/alg_art.pdf (дата обращения: 08.01.2023 г.)

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И.В.Гребенникова (Екатеринбург, УГГУ)

giv001@mail.ru

Рассматриваются управляемые сингулярно возмущенные системы (с малым параметром $\mu > 0$, запаздыванием $h > 0$) :

$$M(\mu)dz/dt = A(t)z(t) + G(t)z(t-h) + B(t)u(t),$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, матрица $M(\mu) = diag(E_n, \mu E_m)$, где E_k — единичная $k \times k$ матрица. Начальное состояние системы $z(t) = \psi(t),\ t_0 - h \leqslant t < t_0,\ z_0 = z(t_0)$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $z_0 \in Z_0$, Z_0 — выпуклый компакт в R^{n+m}; $\psi(t) \in \Psi(t),\ t_0 - h \leqslant t < t_0,\ \Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \{u(\cdot) \mid \int\limits_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t)dt \leqslant \lambda^2\}, \lambda = \text{const} > 0,$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами; штрих — знак транспонирования. Выполнено условие асимптотической устойчивости для линейных систем с запаздыванием.

Рассматривается минимаксная задача управления [1]: среди $u(\cdot) \in P$ найти $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)),$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ — заданная выпуклая функция; $z(t; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ — решение исходной системы, исходящее из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Предлагаемая процедура [2] позволяет построить управляющее воздействие, доставляющее оптимальное значение с заданной степенью точности $o(\mu^k)$. Аппроксимация оптимального решения задачи существенно зависит от вида разложения $B(t)$. Разрешимость исходной задачи управления, а также допустимость используемых аналитических конструкций определяется рядом требований.

Литература

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. — М. : Наука, 1977. — 392 с.

2. Гребенникова И.В. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием при квадратичных ограничениях / И.В. Гребенникова, А.Г. Кремлев // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, вып. 3. — С. 8–15.

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

Е.И. Григорьева (Воронеж, ВГУ)
elenabiryukova2010@yandex.ru

В работе рассматривается простейший геометрический граф из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю.

Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0, 1]$, зададим интегральный оператор на графе Γ, как оператор в пространстве вектор-функций:

$$y(x) = Af(x) = \int_0^1 A(x, t) f(t)\, dt, \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $A(x,t)$ — некоторая матрица.

В [1, Теорема 1] построен класс интегральных операторов с ядрами, имеющими разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$, и областью значений, удовлетворяющей условию непрерывности в узле графа:

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

Далее предполагаем выполненными следующие условия: компоненты ядра $A(x,t)$, а также $\frac{\partial^k}{\partial x^k} A(x,t)$ $(k = 1,2)$, $\frac{\partial}{\partial t} A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(x,t)$ непрерывны, кроме может быть, линий $t = x$, $t = 1 - x$; $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$ (см. [2]). В [2, Теорема 2] получено представление для обратного оператора.

Теорема 1. *Пусть A^{-1} существует. Тогда для любой функции $f(x)$ с компонентами из $L[0,1]$*

$$\lim \left\| S_r(f,x) - (\sigma_r(f_1,x), \sigma_r(f_2,x))^T \right\|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел λ_k, попадающих в круг $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f_j,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f_j по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r$.

Литература

1. Григорьева Е.И. О структуре интегрального оператора на графе с циклом / Е.И. Григорьева // Совр. методы теории краевых задач : матер. Международной конференции. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2022. — С. 94–95.

2. Бурлуцкая М.Ш. О структуре интегрального оператора на графе с циклом и обратного к нему / М. Ш. Бурлуцкая, Е.И. Григорьева, И.В. Колесникова, И.Ф. Леженина // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2022. — № 2. — С. 39-44.

О СВЕДЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ К КЛАССИФИКАЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ПОТОКОВ[1]

Е.Я. Гуревич, И.А. Сараев (НИУ ВШЭ, Нижний Новгород)
egurevich@hse.ru, ilasaraev34@gmail.com

Пусть M^n — замкнутое ориентируемое гладкое многообразие размерности $n \geqslant 3$, и $G(M^n)$ — класс градиентно-подобных потоков на многообразии M^n такой, что для инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются (напомним, что градиентно-подобным потоком f^t на многообразии M^n называется структурно-устойчивый поток с конечным неблуждающим множеством Ω_{f^t}).

Положим $\Omega^i_{f^t} = \{p \in \Omega_{f^t} |\ dim\, W^u_p = i\}$, $i \in \{0, \dots, n\}$, $\mu_{f^t} = |\Omega^0_{f^t} \cup \Omega^n_{f^t}|, \nu_{f^t} = |\Omega^1_{f^t} \cup \Omega^{n-1}_{f^t}|, m_{f^t} = |\bigcup\limits_{i=2}^{n-2} \Omega^i_{f^t}$ и $g_{f^t} = (\nu_{f^t} - \mu_{f^t} + 2)/2$.

Обозначим за $\mathcal{S}^n_g$ многообразие, гомеоморфное связной сумме сферы $\mathbb{S}^n$ и $g > 0$ копий прямых произведений $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, и за $\mathcal{N}^n_m$ — многообразие, гомеоморфное связной сумме $m > 0$ копий некоторых односвязных многообразий, не гомеоморфных $\mathbb{S}^n$.

В силу [2] верно следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть $f^t \in G(M^n)$. Тогда*

1. *если $m_{f^t} = 0$, то M^n гомеоморфно $\mathcal{S}^n_{g_{f^t}}$;*

2. *если $m_{f^t} > 0$, то существует число $0 < m^0_{f^t} \leqslant min\{m_{f^t}, (\mu_{f^t} + \nu_{f^t})/2\}$ такое, что M^n гомеоморфно $\mathcal{S}^n_{g_{f^t}} \sharp \mathcal{N}^n_{m^0_{f^t}}$.*

В работе [1] показано, что если несущее многообразие потока $f^t \in G(M^n)$ гомеоморфно $\mathcal{S}^n_g$, то множества $\Omega^i_{f^t}$ пусты для $i \in \{2, \dots, n-2\}$, а проблема топологической классификации таких потоков сводится к комбинаторной задаче.

Следующие результаты позволяют свести проблему топологической классификации потоков из класса $G(M^n)$ к классификации вспомогательных градиентно-подобных потоков на $\mathcal{S}^n_g$ и на $\mathcal{N}^n_m$.

Лемма. *Пусть $f^t \in G(M^n)$. Тогда существует набор попарно непересекающихся гладко вложенных сфер $S^{n-1}_1, \dots, S^{n-1}_{k_{f^t}} \in M^n$,*

[1] Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 23-00-028) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2023– 2024 гг.

$m^0_{f^t} \leqslant k_{f^t} \leqslant \mu_{f^t}$ и их трубчатых окрестностей $T_1, \ldots, T_{k_{f^t}}$ таких, что:

1. *для любого i сфера S^{n-1}_i и границы окрестности T_i являются для траекторий потока f^t гиперповерхностями без контакта;*

2. *многообразие $M^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k_{f^t}} intT_i$ состоит из $(k_{f^t}+1)$ компонент связности $P_1, \ldots, P_{k_{f^t}+1}$ таких, что $\Omega_{f^t} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k_{f^t}+1} P_i$;*

3. *замкнутые многообразия $\{M^n_i\}$, получаемые из $\{P_i\}$ приклеиванием $2(k_{f^t})$ копий n-шаров $\{B^n_j\}$ по границе, гомеоморфны либо $\mathcal{S}^n_{g_i}$ (тогда $g_i \geqslant 0, m_i = 0$), либо $\mathcal{N}^n_{m_i}$ (тогда $m_i \geqslant 0, g_i = 0$) соответственно, $g_1 + \cdots + g_{k_{f^t}} = g_{f^t}, m_1 + \cdots + m_{k_{f^t}} = m^0_{f^t}$;*

4. *на каждом из многообразий M^n_i задан поток $f^t_i \in G(M^n)$ соответственно такой, что $f^t_i|_{P_i} = f^t|_{P_i}$, а $f^t_i|_{B^n_j}$ имеет единственное состояние равновесия (стоковое или источниковое); при этом множество $\Omega^{n-1}_{f^t} \cup \Omega^1_{f^t}$ лежит в объединении тех многообразий $\{M^n_i\}$, которые гомеоморфны $\mathcal{S}^n_{g_i}$.*

Теорема. *Потоки f^t, $f'^t \in G(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $k_{f^t} = k_{f'^t} = k$ и существуют наборы сфер $\{S^{n-1}_i\}, \{S'^{n-1}_i\}$, удовлетворяющие заключению леммы такие, что для любого $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ потоки f^t_i, f'^t_i топологически эквивалентны.*

Литература

1. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич Топологическая классификация потоков без гетероклинических траекторий на связной сумме многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ // Успехи математических наук. 2022. Т. 77. № 4(466). С. 201-202.

2. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Гуревич Е. Я. О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки с заданным неблуждающим множеством // Матем. тр. 2018. Т. 21. № 2. С. 163-180.

РЕГУЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.Л. Гусев (Курск, КГУ)
cmex1990goose@yandex.ru

Б.Я. Левиным было введено понятие регулярного множества в комплексной плоскости [1]. Было доказано, что регулярные множества являются интерполяционными в пространствах целых функций с индикатором, не превышающим данного. Такие множества играют важную роль в теории целых функций. В частности, они применяются для построения канонических произведений множеств в работах А.Ф. Гришина и А.Ф. Леонтьева. Кратные регулярные множества в комплексной плоскости изучал М.В. Кабанко [2]. Мы распространяем это понятие на множества в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ комплексного переменного z. Обозначим через $[\rho, \infty]^+$, пространство функций конечного порядка в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, не превышающего $\rho > 1$,.

Определение 1. *Последовательность точек* $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}$, *принадлежащая полуплоскости* $\mathbb{C}_+$, *называется слабо регулярной последовательностью в пространстве* $[\rho, \infty]^+$, $\rho > 1$ ($WR^+(\rho)$-*множеством*), *если она удовлетворяет одному из условий* (C_+) *или* ($\mathrm{C}_+{}'$) :

(C_+) 1) *Среди точек этой последовательности нет точек с одинаковым модулем*;

2) $|a_n| > 2$, $n = 1, 2, \ldots$;

3) *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\arg a_n)}{|a|_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty$$

сходится при любом фиксированном $\varepsilon > 0$;

4) *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *из неравенства* $|a_n| \geqslant |a_k| > R = R(\varepsilon)$ *следует соотношение*:

$$|a_n| \geqslant |a_k| + \mathrm{Im}\ a_k / |a_k|^{\rho+\varepsilon}\,.$$

(C'_+) $1'$) *Среди точек множества* A *нет кратных точек*;

$2'$) $|a_n| > 2$, $n = 1, 2, \ldots$;

$3'$) *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\arg a_n)}{|a|_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty$$

сходится при любом фиксированном $\varepsilon > 0$;

4$'$) *для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $r_n > R = R(\varepsilon)$ *кружки радиусов*

$$\rho_n = (\sin\theta_n)^{1/2} r_n^{1-\frac{\rho+\varepsilon}{2}}$$

с центрами в точках a_n *не пересекаются.*

Множества удовлетворяющие условию (C_+) использовались в работах К. Г. Малютина [3] для построения канонических произведений в полуплоскости.

Определение 2. *Последовательность точек* $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}$, *принадлежащая полуплоскости* $\mathbb{C}_+$, *называется интерполяционной последовательностью в пространстве* $[\rho,\infty]^+$, *если для любой последовательности комплексных чисел* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяющих условиям*:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln^+\ln^+|b_n|}{\ln|a_n|+1} < \infty\,, \qquad \overline{\lim_{|a_n|\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+|b_n|}{\ln|a_n|} \leqslant \rho, \quad \rho > 1\,,$$

существует функция $F \in [\rho,\infty]_+$, *решающая проблему интерполяции*

$$F(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Используя геометрический критерий интерполяционности последовательности из [4], доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть последовательность* $A = \{a_n\}$, $A \in \mathbb{C}_+$, *является* $WR^+(\rho)$*-множеством. Тогда* A *— интерполяционная последовательность в пространстве* $[\rho,\infty]_+$.

Литература

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. — М. : ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

2. Кабанко М.В. Кратные регулярные множества в пространствах целых функций конечного порядка / М.В. Кабанко // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2021. — № 3. — С. 74–81.

3. Малютин К.Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II / К.Г. Малютин // Известия РАН. Сер. : Математика. — 1995. — Т. 59, № 5. — С. 103-126.

4. Malyutin K.G. Geometric meaning of the interpolation conditions in the class of functions of finite order in the half-plane / K.G. Malyutin, A.L. Gusev // Probl. Anal. Issues Anal — 2019. — Vol. 8 (26), No 3 — P. 96–104.

НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин
(Алматы, Университет Сулеймана Демиреля;
Воронеж, ВГУ;
Алматы, Институт математики и математического моделирования)
Nurlan.Dairbekov@gmail.com, o.m.penkin@gmail.com

В докладе обсуждается аналог неравенства Харнака в его стандартной форме:

$$\sup_K u \leqslant C \inf_K u,$$

в следующей ситуации: u — неотрицательная гармоническая функция в смысле так называемого «мягкого лапласиана» на стратифицированном множестве $\Omega = \Omega^\circ \cup \partial\Omega^\circ$ с плоскими стратами, K — компактное подмножество Ω°, а $C = C(\Omega^\circ, K)$ — константа. Теорема о среднем для такого лапласиана выполняется только для специальных «допустимых» сфер, что делает доказательство неравенства Харнака довольно сложным в сравнении с его классическим аналогом.

1. Основные понятия. Мы будем придерживаться терминологии, предложенной в работе [1], где можно найти все необходимые подробности. Здесь же ограничимся краткими комментариями применительно к рассматриваемому здесь случаю. Стратифицированное множество Ω — связное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, составленное из многообразий σ_{kj} — страт (k — размерность, а j служит для нумерации). Множество Ω представлено в виде объединения $\Omega = \Omega^\circ \cup \partial\Omega^\circ$, где Ω° — открытое, связное подмножество Ω, составленное из страт и такое, что $\overline{\Omega}^\circ = \Omega$. Все топологические термины относятся к топологии на Ω из объемлющего $\mathbb{R}^n$. Все страты из Ω° предполагаются плоскими и примыкают друг к другу по типу симплициального комплекса.

Множество $\omega \subset \Omega$ назовём *μ-измеримым*, если каждое пересечение $\sigma_{kj} \cap \omega = \omega_{kj}$ измеримо в смысле k-мерной меры Лебега на σ_{kj}. *Стратифицированная мера* μ измеримого множества определяется

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (проект AP14871251).

формулой:
$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \Omega} \mu_k(\omega_{kj}),$$
в которой $\mu_k(\omega_{kj})$ обозначает k-мерную меру Лебега на σ_{kj}. Измеримость функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ определяется стандартно. Интеграл Лебега μ-измеримой функции по μ-измеримому множеству ω сводится к сумме
$$\int\limits_{\omega} f\, d\mu = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \int\limits_{\omega_{kj}} f\, d\mu.$$
Мы применяем $d\mu$ вместо $d\mu_k$ для простоты записи.

Векторное поле $\vec{F}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *касательным* к Ω°, если для любой страты $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ и любой точки $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит $T_X\sigma_{kj}$.

Обозначение $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$ применяется к пространству касательных векторных полей F на Ω°, сужения $\vec{F}|_{\sigma_{ki}}$ которых на каждую внутреннюю страту $\sigma_{ki} \subset \Omega^\circ$ непрерывно дифференцируемы и имеют непрерывное продолжение в каждую точку любой примыкающей внутренней страты на единицу меньшей размерности. Непрерывность поля $\vec{F}$ в целом на Ω° не предполагается. Последнее означает, что касательное векторное поле из $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$ являет собой набор независимых полей класса C^1 в количестве, равном количеству страт в Ω°.

Формально, *дивергенция* касательного векторного поля $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega^\circ)$ в точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ задаётся следующей формулой:
$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i) \cdot \vec{\nu}_i, \tag{1}$$
где суммирование проводится по всем $(k+1)$-мерным стратам σ_{k+1i}, примыкающим к σ_{kj}. Поясним смысл некоторых обозначений, использованных в этой формуле. Значок ∇_k в правой части обозначает оператор обычной, k-мерной, дивергенции, применённый к сужению $\vec{F}|_{kj}$ на страту σ_{kj}, $\vec{\nu}_i$ — единичная внутренняя нормаль к σ_{kj} в σ_{k+1j} в точке X, а $\vec{F}(X+0\cdot\vec{\nu}_i)$ — предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \in \sigma_{k+1i}$, стремящемся к X изнутри страты $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$ по направлению вектора ν_i.

Примером касательного векторного поля является градиент ∇u скалярной функции u, сужение которой на каждую внутреннюю страту непрерывно дифференцируемо. В этом случае ∇u представляет собой просто набор градиентов этих сужений. Если $\nabla u \in$

$\vec{C}^1(\Omega^\circ)$, то будет совершенно естественно определить лапласиан на стратифицированном множестве посредством формулы $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$.

Страта σ_{kj} *свободна*, если она не примыкает ни к какой страте большей размерности (в этом случае она, очевидно, внутренняя, $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$). *Мягкий лапласиан* определяется равенством

$$\tilde{\Delta} u = \nabla \cdot (p \nabla u), \tag{2}$$

где $p = 1$ на свободных стратах, а на остальных стратах p обращается в нуль.

Явное выражение мягкого лапласина в точках свободных страт совпадает с обычным лапласианом (в случае неплоских страт — с оператором Лапласа — Бельтрами).

Если же страта σ_{kj} не является свободной, но существуют свободные страты $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$, (назовем такую страту *полусвободной*) то тогда в точке $X \in \sigma_{kj}$ выражение для мягкого лапласиана имеет следующий вид:

$$\tilde{\Delta} u(X) = \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \nabla u(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i) \cdot \vec{\nu}_i,$$

в котором суммирование распространяется на все свободные страты $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$. Смысл обозначений разъясняется в [1].

Наконец, если страта не является свободной и не примыкает ни к каким свободным стратам на единицу большей размерности, то на такой страте $\tilde{\Delta} u = 0$.

2. Неравенство Харнака. Следующая теорема является основным результатом доклада.

Теорема 1 (неравенство Харнака) *Пусть Ω — стратифицированное множество, а K — произвольный компакт в Ω°. Тогда для каждой неотрицательной гармонической в Ω° функции u выполняется неравенство*

$$\sup_{X \in K} u(X) \leqslant C \inf_{X \in K} u(X)$$

с константой $C = C(K, \Omega^\circ)$, не зависящей от u.

Мы получаем её как следствие соответствующего результата для прочных стратифицированных множеств. Стратифицированное множество Ω называется *прочным* (размерности d), если

- все свободные страты в Ω° имеют одну и ту же размерность d,

- множество $\Omega^\circ \setminus \Omega^\circ_{d-2}$ (Ω°_{d-2} — объединение всех страт $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ с $k \leqslant d-2$) является связным.

В свою очередь справедливость неравенства Харнака для прочных множеств следует из его справедливости для допустимых шаров в таких множествах.

Мы называем шар $B_r(X_0) = \{X \in \Omega : \ d(X, X_0) < r\}$ *допустимым*, или, подробнее, открытым шаром *допустимого радиуса* $r > 0$ с центром в точке $X_0 \in \Omega^\circ$, если r не превосходит расстояние от точки X_0 до всех страт, замыкания которых не содержат X_0. Справедливость сферического неравенства Харнака для допустимых шаров с центрами на d- и $(d-1)$-мерных стратах позволяет доказать неравенство Харнака для компактов, пересекающихся только с d- и $(d-1)$-мерными стратами (ср. [2]). Это была первая попытка доказать неравенство Харнака в рассматриваемой ситуации. Мы расширяем результат на произвольные компакты сначала в прочных стратифицированных множествах, а затем — на компакты в произвольных стратифицированных множествах, представляя последние в виде объединения открытых подмножеств (которые сами по себе имеют структуру прочных стратифицированных множеств), сужения на которые гармонической функции является гармонической функцией.

Литература

[1] Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. — М : Физматлит, 2005. — 272 с.

[2] Беседина С.В. Неравенство Харнака для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве / С.В. Беседина // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2004 — № 1. — С. 77–81.

О $(2, \infty)$-НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Д.Я. Данченко (Владимир, ВлГУ)
vdanch2012@yandex.ru

Пусть задан набор (не обязательно различных) точек $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}^+$. Известно, что функции

$$T_k(\zeta) = \frac{\sqrt{y_k}}{x - \overline{z_k}} B_{k-1}(x), \quad B_{k-1}(x) := \prod_{m=1}^{k-1} \frac{x - z_m}{x - \overline{z_m}},$$

$k \in \mathbb{N}$, $B_0 \equiv 1$, образуют ортонормированную систему (Такенака-Мальмквиста) в L_2 на действительной оси относительно меры dx/π. Кроме того, сумма Фурье $S_n[f](\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k[f]T_k(\zeta)$ для любой функции $f \in H_1(\mathbb{C}^+)$ интерполирует эту функцию во всех узлах z_m с учетом их кратности.

Рассмотрим ядро $J(z) = J(z, z_0) = (z - z_0)^{-1}$ с некоторым $z_0 \in \mathbb{C}^-$. Вычислим его коэффициенты Фурье; каждому узлу z_k соответствует коэффициент (по теореме о вычетах)

$$\overline{\alpha_k[J]} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{J(x)} T_k(x) \frac{d\,x}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{k-1}(x)\ \frac{\sqrt{y_k}}{x - \overline{z_k}} \frac{1}{x - \overline{z_0}} d\,x = 2\,i \frac{\sqrt{y_k}}{\overline{z_0} - \overline{z_k}} B_{k-1}\left(\overline{z_0}\right).$$

Здесь некоторые узлы z_k могут повторяться в соответствии с их кратностью, им соответствуют, вообще говоря, различные коэффициенты Фурье α_k. Отсюда имеем

$$|\alpha_k[J]| \leqslant 2 \frac{\sqrt{y_k}}{|z_0 - z_k|}.$$

Построена сумма Фурье для ядра $J(z)$:

$$S_n(z) = S_n(z, z_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k[J] T_k(z),$$

причем из условия интерполяции имеем

$$J(z) = S_n(z) + B_n(z) F(z),$$

где F — аналитическая в $\mathbb{C}^+$ функция и $F(\infty) = 0$.

Пусть $R^+(z)$ и $R^-(x)$ – рациональные функции, полюсы которых лежат среди z_k и $\overline{z_k}$ соответственно, причем $R^{\pm}(\infty) = 0$,

$$R(z) = R^+(z) + R^-(x).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_n(x) F(x) R(x)\, dx = 0,$$

кроме того, поскольку $J(z)R^-(z)$ аналитична в $\mathbb{C}^+$ и в бесконечно удаленной точке имеет порядок z^{-2}, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(x) R^-(x)\, dx = 0,$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(x)R(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x)R(x)\,dx,$$

$$-2iR^{+}(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x)R(x)\,\frac{dx}{\pi}$$

Отсюда, учитывая оценки коэффициентов Фурье, находим нужное $(2,\infty)$-неравенство

$$2|R^{+}(z_0)| \leqslant \|S_n\|_{L_2(\mathbb{R})}\|R\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k^2[J]|}\|R\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

$$|R^{+}(z_0)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{|z_0-z_k|^2}}\|R\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

Отметим, что (q,p)-неравенства типа Джексона-Никольского для различных классов рациональных функций, комплексных многочленов и их логарифмических производных (наипростейших дробей) получались другими методами в работах [1-2].

Литература

1. Данченко В. И., Додонов А. Е. Оценки L_p-норм наипростейших дробей / В. И. Данченко, А. Е. Додонов // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 6 – 9-19.

2. Данченко В. И., Семин Л. А. Точные квадратурные формулы и неравенства разных метрик для рациональных функций / В. И. Данченко, Л. А. Семин // Сиб. матем. журн. – 2016. – № 57 (2) – 282-296.

О реализации алгебр $\mathbf{sl(2,R)}$ и $\mathbf{su(2)}$ вещественными матрицами четвертого порядка[1]

Б.М. Даринский (Воронеж, ВГУ)

darinskii@mail.ru

Реализация абстрактных алгебр Ли в различных вещественных пространствах представляется актуальным направлением из-за возможных приложений, в частности, для решения задачи описания

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

однородных гиперповерхностей многомерных пространств (см. [1]). В качестве примера успешного применения этого подхода являются работы(2-4). В частности, в (4) получен богатый список таких поверхностей, являющихся орбитами линейных представлений в $\mathbb{R}^4$ трехмерной разложимой алгебры Ли. Аналогичная задача решается в настоящей работе для алгебр $\mathbf{sl(2)}$ и $\mathbf{su(2)}$.

Алгебра sl(2) порождается следующими определяющими соотношениями

$$\{e_1e_2\} = e_1, \{e_2e_3\} = e_3, \{e_1e_3\} = 2e_2, \tag{1}$$

где e_1, e_2, e_3 являются абстрактными базисными элементами алгебры, $\{e_1e_2\} = e_1e_2 - e_2e_1$, по определению. Алгебраический аспект этой алгебры представлен в (5). В настоящей работе поставлена задача найти возможные конкретные виды этих элементов на множестве вещественных матриц четвертого ранга, удовлетворяющих соотношениям (1). Учитывая инвариантность (1) при операциях подобия, воспользуемся выбором одного из базисных векторов в канонической форме, остальные два вектора находим из выполнения(1). Полное семейство матриц получается из найденных таким образом представителей путем применения преобразований подобия.

Из двадцати канонических форм вещественных матриц четвертого ранга, полученных в [2] походящими для выполнения (1) оказались три жордановы формы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

которые были приняты в качестве базисного вектора e_3.

После подстановки каждой из трех матриц в (1), решений полученных уравнений и последующего преобразования подобия специально подобранными матрицами были найдены матрицы e_1, соответственно списку (2),

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

и e_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Для каждого из вариантов базисов были построены векторные поля и найдены орбиты. Для первой тройки матриц орбита получилась в виде цилиндрической, вдоль оси x_4, двумерной алгебраической поверхности $x_2^2 - x_1x_3$, для второй тройки трехмерная поверхность $x_1x_4 - x_2x_3$. Для третьей тройки матриц пострено векторное поле нормали к трем векторам, порождаемым базисными элементами алгебры и показано, что оно является потенциальным. Интегрирование семейство трехмерных алгебраических поверхностей, определяемых полиномом четвертой степени

$$\frac{9}{2}x_1^2x_4^2 - 9x_1x_2x_3x_4 - \frac{3}{2}x_2^2x_3^2 + x_3^3x_1 + 4x_2^3x_4 \tag{5}$$

Алгебра Ли $\mathbf{su(2)}$ имеет следующие определяющие соотношения между базисными элементами

$$\{e_1, e_2\} = e_3, \{e_2, e_3\} = e_1, \{e_3, e_1\} = e_2 \tag{6}$$

Для нахождения возможных реализаций этой алгебры во множестве вещественных матриц четвертого ранга обратим внимание на возможность однозначного разложения матрицы M на ее симметричную S и антисимметричную части A. Далее заметим следующие свойства коммутаторов компонент разных симметрий

$$|AA| = |SS| = A \tag{7}$$

Отсюда следуют частные случаи возможных базисов алгебры $\mathbf{su(2)}$, в которых одну из матриц можно считать антисимметричной, а две другие матрицами общего вида, явный вид которых определится из системы (6). В качестве элемента e_1 можно принять

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & -b_{13} & -b_{14} \\ b_{32} & -b_{31} & 0 & 0 \\ b_{42} & -b_{41} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Две другие матрицы в (8) получаются из решения системы (6), при этом на матричные элементы накладываются дополнительные ограничения, а именно, равенство нулю двух определителей блоков и следующих соотношений

$$b_{23}b_{13} - b_{31}b_{23} = 0, b_{13}b_{31} + b_{14}b_{41} + b_{23}b_{32} + b_{24}b_{42} + 1 = 0 \quad (9)$$

Отметим, что выбор матрицы e_1 с двумя диагональными блоками приводит к тривиальным нулевым матрицам e_2 и e_3, поэтому не порождает алгебры.

Показано, что полученное четырех параметрическое семейство сужается до численных матричных компонент путем преобразования подобия с использованием матрицы S, коммутирующей с e_1, которая имеет следующий вид:

$$s = \begin{bmatrix} s_1 & s_{12} & 0 & 0 \\ -s_{12} & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & s_{34} \\ 0 & 0 & s_{43} & s_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

В результате получаем численные матрицы типа

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Орбита для представленных базисных элементов имеет строение одномерного цилиндра, сечение которого определяется выражением $x_1^2 + x_2^2 + x_4^2$. В более общем случае она является трехмерной сферой в четырехмерном пространстве. Пример такого представления показан ниже

$$e_2 = 2^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = 2^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Автор благодарен А.Лобаде за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

1. Можей Н.П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии / Н.П. Можей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — No 7. — С. 41–52.

2. Лобода А.В. Об орбитах в R4 абелевой 3-мерной алгебры Ли / А.В. Лобода, Б.М. Даринский // Матер. междунар. научн. конф. «УОМШ-2021». — Уфа : 2021. — С. 239-241.

3. Лобода А.В. О реализуемости 3-мерных алгебр Ли векторными полями / А.В. Лобода, В.К. Каверина // Матер. междунар. научн. конф. «ВЗМШ-2022». — Воронеж : 2022. — С. 150-153.

4. Акопян Р.С., Лобода А.В. Об орбитах в R4 разложимой 3-мерной алгебры Ли // Материалы междунар. конф. ВВМШ-2022, Воронеж, 2022. С.29-31

5. Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли. 1969, изд-во: Мир: М., 376 с.

О 4-МЕРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ АЛГЕБРЫ $sl(2,\mathbb{R})$[1]

Б.М. Даринский, А.В. Лобода (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)
darinskii@mail.ru, lobvgasu@yandex.ru

Стандартное представление классической алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ в пространстве $\mathbb{R}^4$ имеет базисом (см. [1]) следующую тройку матриц:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Предложение 1. *С точностью до аффинной эквивалентности 3-мерными орбитами представления с базисом (1) являются линейно однородные алгебраические поверхностями 6-й степени, описываемые следующими уравнениями в координатах x_1, x_2, x_3, x_4 четырехмерного пространства:*

$$(x_1x_4^2 - 3x_2x_3x_4 + 2x_3^3)^2 + 4(x_2x_4 - x_3^2)^3 = Cx_4^2,\ C \in \{-1, 0, 1\}. \quad (2)$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497) и РНФ (проект № 23-21-00109).

Формула для орбит получена непосредственным пошаговым интегрированием системы уравнений в частных производных

$$e_k(\Phi)_{|M} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Здесь e_k – базисные поля линейного представления обсуждаемой матричной алгебры с базисом вида (1), M – искомые орбиты, каждая из которых задается уравнением $M = \{\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\}$ с определяющей функцией Φ.

В развернутой форме система (3) имеет вид

$$3x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 3x_4 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0, \tag{4}$$

$$3x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + 2x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_4 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0, \quad -x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - 2x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 3x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0.$$

Отметим, что авторам не известна из литературы формула (2), вид которой оказался достаточно замысловатым и неожиданным для классической простой неразрешимой алгебры $sl(2, \mathbb{R})$. К нему приводит следующая очередность интегрирования отдельных уравнений системы.

1) Сначала общее решение второго уравнения системы (4) записывается в виде $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(t_1, t_2, t_3)$, где

$$t_1 = x_4, \ t_2 = x_2 x_4 - x_3^2, \ t_3 = x_1 - 3\,\frac{x_2\, x_3}{x_4} + 2\,\frac{x_3^3}{x_4^2}$$

– независимые частные решения этого уравнения (или интегралы характеристической системы уравнений, отвечающей матрице e_2),

$F(t_1, t_2, t_3)$ – произвольная аналитическая функция трех переменных.

2) Первое уравнение системы (3) переписывается в виде

$$-3t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - 2t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} + 3t_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t_3} = 0. \tag{5}$$

3) С использованием двух частных решений $\xi_1 = t_1 t_3, \ \xi_2 = t_2^3 / t_1^2$ уравнения (5) последнее уравнение системы (4) приводится к виду

$$t_2^2 \left(2 \frac{\partial G}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial G}{\partial \xi_2} \right) = 0$$

с неизвестной функцией $G(\xi_1, \xi_2) = F(t_1, t_2, t_3)$.

4) Решениями исходной задачи об орбитах алгебры $sl(2,\mathbb{R})$, получаемыми исходя из этого уравнения, являются конус $t_2 = x_2x_4 - x_3^2 = 0$ и поверхность с (вспомогательным) уравнением

$$t_1^2t_3^2 + 4t_2^3/t_1^2 = C = const \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

5) После домножения на $t_1^2 = x_4^2$ последняя формула приобретает в исходных координатах пространства R^4 вид (2) с $C \in \mathbb{R}$.

Заметим, наконец, что при $C \neq 0$ растяжением координат

$$x_1 = |C|x_1^*,\ x_2 = \sqrt{|C|}x_2^*,\ x_3 = x_3^*,\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{|C|}}x_4^*$$

константа C в уравнении (6) превращается в $C/|C| = \pm 1$.

Литература

1. Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли. 1969, изд-во: Мир: М., 376 с.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ

Н.А. Двойневская (МБОУ "Отрадненская гимназия")
nov.otrgim-nu@mail.ru, dvojnevskaja@yandex.ru

Уровень освоения математических дисциплин в системе общего образования определяет качество подготовленности к выпускным экзаменам в формате ЕГЭ и успешное обучение выпускников в профильных высших учебных заведениях. Для обеспечения максимальной эффективности усвоения материала по предмету учителю необходимо найти наилучшее сочетание средств, методов обучения и технологий. Важное значение здесь имеет материальная база, обеспечивающая соответствующее оборудование кабинетов, рабочих мест учителя и учеников, использование учебно-методических комплектов по математике, технических средств обучения, информационно-коммуникационных технологий для более эффективной организации урока и внеурочной деятельности. В настоящее время разработана компьютерная поддержка курса любого предмета, в том числе и математики. Тестовый контроль с помощью компьютера предполагает возможность быстрее и объективнее, чем при традиционном способе, выявить знание и незнание обучающихся. Этот способ организации учебного процесса является удобным и простым. В большинстве школ Воронежской области, в частности в МБОУ "Отрадненская гимназия важная задача организации процесса образования -

совершенствование образовательного пространства, оснащение кабинетов математики компьютерной базой, отвечающей требованиям ФГОС, выполнена на должном уровне. Федеральные образовательные стандарты нового поколения требуют развития индивидуальных способностей обучающихся, их самостоятельного творческого мышления. Нетрадиционные уроки и мероприятия, подготовка и защита математических проектов, развивают и укрепляют интерес к изучению предмета, активизируют познавательную и творческую активность учащихся. Такой вид работы является неотъемлемым условием повышения общей математической культуры учащихся В настоящее время Единый государственный экзамен является основным способом проверки качества образования. Подготовка к ГИА и ЕГЭ требует соответствующей компьютерной базы, где одной из форм индивидуально- групповых занятий с учащимися является дистанционное обучение с помощью сети Интернет. Разработанная и реализуемая в гимназии программа элективного курса "Математика. Практикум"способствует развитию математических способностей и повышению интереса учащихся к предмету через изучение тем, которым в школьном курсе не уделяется достаточного внимания. Программа даёт широкие возможности повторения, углубления и обобщения курса алгебры и геометрии, позволяет своевременно осуществить диагностику проблемных моментов, оценить возможности и способности учащихся. Для успешности образовательного процесса созданы условия для профессионального роста педагогов - посещение курсов повышения квалификации, участие в конференциях, семинарах, мероприятиях по обмену опытом; разработка и реализация программ кружков, элективных курсов по математике. В рамках курсовой подготовки учителя воронежской области принимают участие в семинарах-практикумах, где обсуждаются вопросы, связанные с особенностями введения ФГОС общего образования. Полученная информация используется при подготовке материала для выступления на заседаниях МО учителей математики, где частыми являются обсуждения злободневных проблем, связанных со стандартами ФГОС, призванными подготовить детей России для прохождения online-тестирования на уровне мирового сообщества. Поэтому важным становится использование новых технологий в образовании. Стандарты второго поколения требуют смены репродуктивного метода обучения на проблемный, поисковый, исследовательский методы. Работа МО в МБОУ "Отрадненская гимназия как и во многих современных школах, посвящена использованию новейшего в образовании, совершенно другому подходу в изложении материала, также в отношении к теме урока, которая определяется самими учениками. Всем известно, что интегрированные уроки развивают познавательный интерес учащихся, побуждают к активному познанию окружающей действительности, формируют у учащихся метапредметные учебно-информационные умения. Это интеграция экологии с информационными технологиями, разработка интегрированного урока по теме "Обыкновенные дроби"о взаимосвязи дробей в математике и долей в музыке; метод координат в математике и физике и многие другие. Одной из задач математического образования общеобразовательного учебного заведения - разработка разнообразных мероприятий в системе дополнительного образования с целью повышения интереса учащихся к математике и процессу обучения в целом. Это программы внеурочных занятий "Математика для увлечённых"(7 класс), "Эрудит"(5-9 классы), элективные курсы для учащихся выпускных классов.

Федеральные образовательные стандарты требуют новых подходов в обучении школьников, и задачей учителей и администрации МБОУ "Отрадненская гимназия"является необходимость организации учебного процесса так, чтобы уровень обученности учащихся по математике был приближен к среднему показателю школ региона, поэтому образовательный процесс в нашем учебном заведении является системным, целенаправленным, сумевшим объединить людей талантливых, творческих, неравнодушных к жизни своих подопечных, своего учебного заведения, осуществляющих педагогическую деятельность в соответствии с запросами современного общества

Литература

1. Ильясов И. И. Структура процесса учения. М.: МГУ, 1986. 199 с.

2. Нацпроект "Образование"(Электронный ресурс). - URL: mon.gov.ru/proekt/ideology.

3. Федеральный закон "Об образовании в РФ" от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ.

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

А.Л. Джабраилов, Э. Л. Шишкина
(Грозный, ЧГУ,
Воронеж, ВГУ, Белгород, НИУ «БелГУ»)
ahmed_0065@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$. Через $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ обозначим мультииндекс, состоящий из положительных фиксированных действительных чисел $\gamma_i \geqslant 0$, $i = 1, ..., n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. Пусть $L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+) = L^\gamma_p$, $1 \leqslant p < \infty$ — пространство измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций, четных по каждой переменной x_i, $i = 1, ..., n$ таких, что t $\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty$, где $x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Нормализованная функция Бесселя первого рода j_ν определяется формулой $j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x)$, где J_ν — функция Бесселя первого рода. Определим обобщенное Бесселево ядро формулой

$$G^\gamma_\alpha(x) = \mathbf{F}^{-1}_\gamma[(1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}](x), \quad \alpha > 0.$$

Здесь $\mathbf{F}_\gamma[f](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi) = \int_{\mathrm{R}^n_+} f(x)\mathbf{j}_\gamma(x, \xi)x^\gamma dx$ — многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L^\gamma_1(\mathrm{R}^n_+)$,
$\mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i \xi_i)$. Для этого ядра справедливо представление

$$G^\gamma_\alpha(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|),$$

где K_μ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Оператор $(\mathbf{G}^\alpha_\gamma \varphi)(x)$ реализует отрицательную дробную степень $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$, где I — единичный оператор, Δ_γ — оператор Лапласа–Бесселя $\Delta_\gamma = (\Delta_\gamma)_x = \sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k}$ и

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t} t^\gamma \frac{\partial}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad \gamma \in \mathbb{R}$$

есть оператор Бесселя. Обобщенный потенциал Бесселя представим в виде $\mathbf{G}^\alpha_\gamma \varphi = \mathbf{F}^{-1}_\gamma (1 + |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \mathbf{F}_\gamma \varphi$, $\alpha > 0$, где $\mathbf{F}_\gamma$ — многомерное преобразование Ханкеля.

Обобщенный потенциал Бесселя определим соотношением [1]

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma \varphi)(x) = \int_{\mathrm{R}^n_+} G^\gamma_\alpha(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x \varphi(x)) y^\gamma dy.$$

Здесь ${}^\gamma\mathbf{T}_x^y$ — многомерный обобщенный сдвиг вида

$$({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x) = {}^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1} \dots {}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n} f)(x),$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ действует для $i = 1, \dots, n$ по формуле
$({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\varphi_i},$
$x_{i+1}, \dots, x_n) \sin^{\gamma_i - 1}\varphi_i \, d\varphi_i.$

Для оператора $\mathbf{G}_\gamma^\alpha$ справедливо представление
$\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi = \left(\frac{\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)}{|x|^{n+|\gamma|-\alpha}} * \varphi\right)_\gamma, \qquad \alpha > 0$, где
$\omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} |x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|)$.

Лемма. *Для* $m < n + |\gamma| + \alpha$ *имеем* $\omega_{-\alpha,\gamma}(r) \in C^m([0, \infty])$ *и* $\omega_{-\alpha,\gamma}^{(m)}(0) = 0, \qquad m = 1, 3, 5, ... < n + |\gamma| + \alpha,$

$$\omega_{-\alpha,\gamma}^{(m)}(0) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{n+\alpha-\frac{m}{2}} (m-1)!!\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2} - \frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)},$$

$m = 2, 4, 6, ... < n + |\gamma| + \alpha.$

Теорема 1. *Пусть принадлежит пространству шварцевых функций* $\varphi(x) \in S(R_+^n)$, *четна по каждой из своих переменных и* $\alpha > 0$. *Тогда справедливо представление*

$$p.f.\left(\frac{\omega_{-\alpha,\gamma}(|x|)}{|x|^{n+|\gamma|+\alpha}} * \varphi\right)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{{}^\gamma\mathbf{T}_x^y\varphi(x) - (P_y^{l-1}\varphi)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|)\, y^\gamma\, dy +$$

$$+ \sum_{|2m|\leqslant l-1} \zeta_m^\gamma (\mathcal{B}_x^m\varphi)(x) \frac{2^{2|m|}\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2} + m_i\right)\Gamma\left(|m| - \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)},$$

где $\alpha < l \in \mathbb{N}$, $(P_y^{l-1}\varphi)(x) = \sum_{|2m|\leqslant l-1} \zeta_m^\gamma (\mathcal{B}_x^m\varphi)(x) y^{2m}$ *отрезок ряда Тейлора–Дельсарта,* $m = (m_1, ..., m_n)$ *— мультииндекс, состоящий из неотрицательных целых чисел,* $y^{2m} = y_1^{2m_1}...y_n^{2m_n}$, $(\mathcal{B}_x^m\varphi)(x) = B_{\gamma_1}^{m_1}...B_{\gamma_n}^{m_n}\varphi(x_1, ..., x_n)$, $\zeta_m^\gamma = \frac{1}{2^{2|m|}m!}\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(m_i + \frac{\gamma_i+1}{2}\right)}$, $m! = m_1! \cdot ... \cdot m_n!$.

Теорема 2. *В пространстве шварцевых функций, четных по каждой из своих переменных оператор*

$$(I - \Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi = \int_{\mathrm{R}_+^n} \frac{{}^\gamma\mathbf{T}_x^y\varphi(x) - (P_y^{l-1}\varphi)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|)\, y^\gamma\, dy +$$

$$+\sum_{|2m|\leqslant l-1}\zeta_m^\gamma(\mathcal{B}_x^m\varphi)(x)\,\frac{2^{2|m|}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}+m_i\right)\Gamma\left(|m|-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}$$

является правым и левым обратным к B-потенциалу Бесселя, т. е. справедливы формулы $(I-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}\mathbf{G}_\gamma^\alpha\varphi=\mathbf{G}_\gamma^\alpha(I-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi=\varphi$.

Литература

1. Джабраилов А.Л. Обобщенный потенциал Бесселя и его свойства / А.Л. Джабраилов, Э.Л. Шишкина // В книге: Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы. Сборник материалов международной конференции. Белгород, 2021. — С. 96–98.

К ТЕОРИИ НЕТЕРА ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА МИХЛИНА–КАЛЬДЕРОНА–ЗИГМУНДА ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Г. Джангибеков., Г. Козиев (Душанбе, ИМ НАНТ)
gulkhoja@list.ru

Классические сингулярные интегральные операторы Михлина – Кальдерона – Зигмунда имеют вид

$$(Af)(x)=\int_D\frac{\Omega(x,\theta)}{r^n}f(y)dy, \tag{1}$$

где D – конечная или бесконечная область эвклидового пространства E_n, $r=|x-y|$, $\theta=\frac{x-y}{r}$.

Общая теория уравнения $(Af)(x)=g(x)$ по всему E_n в $L_2(E_n)$ построена С.Г. Михлиным [1]. Разлагая характеристику $\Omega(x,\theta)$ в ряд Фурье по сферическим функциям С.Г. Михлин, каждому оператору A из (1) ставил в соответствие непрерывную символическую функцию $\mathcal{A}(x,\theta)$ и доказал, что если символ нигде не обращается в нуль, то для уравнения $(Af)(x)=g(x)$ с оператором A из (1) в пространстве $L_2(E_2)$ имеет место теория Фредгольма. Гохберг И.Ц. [2] доказал необходимость этого условия, а Симоненко И.Б. [3] обобщил указанный результат на пространство $L_p(E_2), p>1$. Симоненко И.Б. также исследовал нетеровы свойства матричного сингулярного оператора A на гладком многообразии Γ с краем в пространстве $L_2^m(\Gamma)$ Эти результаты были обобщены Дудучавой Р.В. [4] на случаи пространств $L_p^m(\Gamma)$ $p>1$. Однако, как указывает Симоненко

И.Б. (см.[3], стр. 758), найденные условия нетеровости, сформулированные в терминах частных индексов граничных матриц - символа оператора A, не являются эффективными.

Пусть D – конечная односвязанная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$. В лебеговом пространстве с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ рассматривается оператор

$$(Af)(z) \equiv a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)}+$$
$$+\iint_D \frac{\Omega_1(z,\theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta + \iint_D \frac{\overline{\Omega_2(z,\theta)}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta, \qquad (2)$$

Разлагая характеристики $\Omega_j(z,\zeta)$ $(j = 1, 2)$ в ряд Фурье по полярному углу θ, оператор из (2) можно записать в виде

$$A \equiv a_0(z)I + b_0(z)K + \sum_{n=-m}^{m}{}' \Big(a_n(z)I + b_n(z)K\Big)S_n + T, \qquad (3)$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена $n = 0$; I – тождественный оператор, операторы K и S_n действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_nf)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta, \quad z \in \overline{D};$$

$a_n(z), b_n(z)$ $(n = 0, \pm1, \cdots \pm m)$ – комплекснозначные непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функции, T– вполне непрерывный оператор.

В зависимости от $2m + 1$ гомотопического класса оператора A, установлены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и в терминах коэффициентов $a_j, b_j (j = 0, \pm1 \ldots, \pm2m)$ даны формулы для подсчета индекса оператора A из (2). Некоторые частные случаи оператора A были изучены раннее в ряде работ (см.напр.[5],[6]).

Литература

1. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г. Михлин. — М. : Наука, 1962. — 254 с.

2. Гохберг И.Ц. К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений / И.Ц. Гохберг // ДАН СССР —1960. — № 6, 1960, С. —1279 – 1282.

3. Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений / И.Б. Симоненко// Изв. АН СССР, сер. матем. —1965. I,II. —т. 29, — № 3, 4, С. —567 – 580; 757 – 782.

4. Duduchava R. On multidimensional singular integral operators / R. Duduchava// Jour. of Oper. Theory —1984. —I,II, —vol. 11, P. —41 – 76; —199 – 214.

5. Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе /К.Х. Бойматов.,Г. Джангибеков// Успехи математических наук —1988. — Т. 43, вып. 3, (261), С. —171 – 172.

6. Джангибеков Г. Об одном классе сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем на плоскости / Г. Джангибеков// Докл. РАН —1993. —Т. 330, № 4, С. —415 – 419.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ 2-D СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ[1]

М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов, М.Г.Ергалиев, Б.К.Орынбасар (Алматы, ИМММ)
muvasharkhan@gmail.com

В начале доклада мы рассматриваем обратную задачу для линеаризованной 2-D системы Навье-Стокса с неизвестной правой частью, зависящей только от пространственной переменной, и с финальным условием переопределения. На основе теории спектрального разложения самосопряженных операторов [1, 2] установлены достаточные условия разрешимости поставленной обратной задачи, сформулированная в виде теоремы. Мы проводим сравнение полученного результата с ранее известным [3].

Далее, при переходе к функции тока от линеаризованной 2-D системы уравнений Навье-Стокса возникает необходимость решения обобщенной спектральной задачи для бигармонического оператора, которая соответствует спектральной задаче для линеаризованного 2-D оператора Стокса. Однако, не говоря даже о случаях произвольных областей для независимых переменных, и в канонических областях (например, круг, квадрат, прямоугольник и т.д.) этот вопрос бывает не всегда легко решаемым.

Имеются работы [4, 5], которые посвящены указанным вопросам в случае периодических условий. В работах [4, 5] также указывается о важности проблемы построения системы собственных функций и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP09258892, 2021–2023гг.)

собственных значений для изучения граничных задач для систем Навье-Стокса, отмеченной на семинаре в [4, 5] О.А.Ладыженской.

В нашей предыдущей работе [6] для круговой области этот вопрос был до конца решен, и построенная система ортогональных функций была успешно использована для численного решения одной обратной задачи для линеаризованной 2-D системы уравнений Навье-Стокса. В [6] нами были проведены численные эксперименты по решению модельной обратной задачи (с конкретными числовыми данными) с использованием оптимизационного метода.

В настоящем докладе мы строим систему собственных функций и соответствующую систему собственных значений, когда область независимых переменных представлена квадратом. Отметим, что квадрат взят только для простоты аналитических вычислений, можно было бы рассматривать спектральную задачу в любом конечном прямоугольнике. Результаты представленной работы легко могут быть развиты и на этот случай.

В заключительной части доклада мы коснемся вопроса о решении обратной задачи для нелинейной 2-D системы Навье-Стокса (при этом мы воспользуемся одним результатом работы [7]).

Литература

1. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 742 с.

2. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. — М. : Мир, 1979. — 587 с.

3. Прилепко А.И. Некоторые обратные начально-граничные задачи для нестационарных линеаризованных уравнений Навье-Стокса / А.И. Прилепко, И.А. Васин // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 106–117.

4. Сакс Р.С. Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье / Р.С. Сакс // Уфимский математический журнал. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 53–79.

5. Сакс Р.С. Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиями / Р.С. Сакс // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 318. — С. 246–276.

6. Jenaliyev M., Ramazanov M., Yergaliyev M. On the numerical solution of one inverse problem for a linearized two-dimensional system of Navier-Stokes equations / M. Jenaliyev, M. Ramazanov, M. Yergaliyev // Opuscula Math. — 2022. — V. 42, № 5. — P. 709–725.

7. Ладыженская О.А. О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье-Стокса / О.А. Ладыженская // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1967. — Т. 5. — С. 169–185.

ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ В ЗАДАЧАХ ОБ АСИМПТОТИКАХ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ[1]

С.Ю. Доброхотов, А.В. Цветкова
(Москва, ИПМехРАН)
s.dobrokhotov@gmail.com

Многие ортогональные полиномы определяются рекуррентными соотношениями, которые можно записать в виде псевдодифференциальных уравнений. Используя такое представления мы строим эффективные асимптотики типа Планшереля-Ротаха по большому номеру (большим номерам) этих полиномов. Символы соответствующих псевдодифференциальных операторов – комплекснозначные функции, что, вообще говоря, приводит к появлению геометрических объектов в комплексных фазовых пространствах. Одно из основных наших наблюдений состоит в том, что в задачах такого типа можно представить эти объекты в виде комбинации вещественных лагранжевых многообразий. Это наблюдение позволяет построить квазиклассические асимптотики рассматриваемых ортогональных полиномов сначала в виде канонического оператора Маслова, а затем с помощью недавно развитого подхода глобально представить их в виде функций Эйри сложного аргумента.

Доклад основан на совместных работах с с А.Аптекаревым и Д.Туляковым.

ПЛОТНОСТЬ СУММ СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ[1]

Н.А. Дюжина (Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва)
natasha17954@yandex.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-11-00341).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

Пусть $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначает пространство действительных суммируемых в p-й степени последовательностей, нумеруемых точками d-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, с нормой

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_d \,\in\, \mathbb{Z}} |x_{n_1 n_2 \ldots n_d}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $c_0(\mathbb{Z}^d)$ обозначим пространство действительных последовательностей, нумеруемых точками $\mathbb{Z}^d$ и стремящихся к 0 при стремлении любого из индексов к бесконечности, с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{n_1, n_2, \ldots, n_d \,\in\, \mathbb{Z}} |x_{n_1 n_2 \ldots n_d}|.$$

Во всех этих пространствах определены операторы сдвигов по каждому из d направлений, покоординатно определяемые равенствами

$$(T_k x)_{n_1 \ldots n_k \ldots n_d} = x_{n_1 \ldots n_{k-1} (n_k - 1) n_{k+1} \ldots n_d}, \;\; k = 1, \ldots, d, \;\; n_1, \ldots, n_d \,\in\, \mathbb{Z}.$$

Пусть $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначает пространство действительных функций, суммируемых в p-ой степени на d-мерном торе $\mathbb{T}^d$.

Теорема 1. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ существует такой элемент w в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$, что суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} T_1^{j_{1,k}} T_2^{j_{2,k}} \ldots T_d^{j_{d,k}} w, \;\; j_{1,k}, j_{2,k}, \ldots, j_{d,k} \,\in\, \mathbb{Z}, \;\; n \in \mathbb{N},$$

его сдвигов плотны во всех пространствах $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $c_0(\mathbb{Z}^d)$.

Теорема 2. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ и $2 \leqslant p < \infty$ существует такая функция h в действительном пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$, что суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} h(\bar{x} - \bar{a}_k), \;\; \bar{a}_k \,\in\, \mathbb{R}^d, \;\; n \in \mathbb{N},$$

ее сдвигов плотны в действительном пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 3. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, и функция f из действительного пространства $L_p(\mathbb{T}^d)$ имеет ряд Фурье*

$$f(t_1, \ldots, t_d) = \sum_{n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{Z}} c_{n_1, \ldots, n_d} e^{i n_1 t_1} \ldots e^{i n_d t_d} = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\bar{n}} e^{i(\bar{n}, \bar{t})}$$

с условиями:

a) $c_{\bar{0}} = 0$, $c_{\bar{n}} \neq 0$ *для всех* $\bar{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\bar{0}\}$*;*

b)

$$\sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\bar{0}\}} \left(\max_{j=1,\dots,d} |n_j|\right)^{2d-1} \cdot |c_{\bar{n}}|^{\min\{2,q\}} < \infty.$$

Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{N} f(\bar{t} + \bar{a}_k), \;\; \bar{a}_k \;\in\; \mathbb{T}^d, \;\; N \in \mathbb{N},$$

плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T}^d)$ *функций из* $L_p(\mathbb{T}^d)$ *с нулевым средним.*

В одномерном случае эти результаты получены ранее П.А.Бородиным (см. [1], [2], [3]).

Литература

1. Бородин П.А. Приближение суммами сдвигов одной функции на окружности / П.А. Бородин // Изв. РАН. Сер. матем. — 2017. — Т. 81, № 6. — С. 23–37.

2. Borodin P.A., Konyagin S.V. Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of a single function on the line / P.A. Borodin, S.V. Konyagin // Analysis Mathematica. — 2018. — T. 44, № 2. — C. 163–183.

3. Бородин П.А. Плотность сумм сдвигов одного вектора в пространствах последовательностей / П.А. Бородин // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. — 2018. — Т. 303 — С. 39–44.

ОБ ИНДЕКСЕ ОПЕРАТОРОВ НА ПРЯМОЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ[1]

К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)

zhuykovcon@mail.ru

Работа посвящена проблеме индекса эллиптических псевдодифференциальных операторов (ПДО) на вещественной прямой с коэффициентами, периодическими на бесконечности. Такие операторы имеют вид

$$D = \chi_- D_- \chi_- + \chi_0 D_0 \chi_0 + \chi_+ D_+ \chi_+, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России», а также РФФИ и Немецкого научно-исследовательского сообщества (проект № 21-51-12006).

где $1 = \chi_-^2 + \chi_0^2 + \chi_+^2$ — разбиение единицы, подчинённое покрытию

$$\mathbb{R} = (-\infty, -T+\varepsilon) \cup (-T-\varepsilon-, T+\varepsilon) \cup (T-\varepsilon, +\infty)$$

при $T > 0$, D_- и D_+ представляют собой матричные ПДО размерности $N \times N$ с периодическими коэффициентами, а D_0 является матричным ПДО размерности $N \times N$ на вещественной прямой. Здесь символы операторов D_-, D_0 и D_+ удовлетворяют определённым условиям сопряжённости в точках $-T$ и T. Используя подход Мельроуза [2], мы определяем η-инварианты (см., напр., [1,2]) периодических операторов D_- и D_+ как некоторые регуляризации числа вращения разностных операторов и устанавливаем их основные свойства. В частности, доказано, что η-инвариант обладает логарифмическим свойством, а также получена формула для производной η-инварианта семейства операторов по параметру.

Далее устанавливается формула индекса оператора (1) в терминах символа оператора D_0 и построенных η-инвариантов, которые описывают вклад плюс и минус бесконечности в формулу индекса. Наконец, в качестве следствия, вычисляются η-инварианты дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами в терминах спектра их матриц монодромии.

Литература

1. К.Н. Жуйков. Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами / К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин // Уфимск. матем. журн. — 2022. — Т. 14, № 2. — С.37–57.

2. R. Melrose. The eta invariant and families of pseudodifferential operators / R. Melrose // Math. Research Letters. — 1995. — Vol. 2, No. 5. — PP. 541–561.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ИННОВАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ГИБРИДНОЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ[1]

Л.В. Жук (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
krasnikovalarisa@yandex.ru

Важнейшим условием построения учебно-воспитательного процесса в отечественной школе является формирование и развитие

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-29-14009).

у современных школьников компетенций XXI века: когнитивных, межличностных, внутриличностных. Данные новейших психолого-педагогических исследований свидетельствуют о том, что указанные компетенции эффективнее всего проявляются в процессе самостоятельного поиска и постановки проблем, генерирования нестандартных идей и решений, переноса знаний в новые ситуации. В связи с этим одной из ключевых задач современной школы является формирование у выпускников целостной системы исследовательской деятельности. Кроме того, в последнее десятилетие широко распространяется идея интеграции процесса учебного познания и современных цифровых технологий, разрабатываются методы управления исследовательской деятельностью посредством применения автоматизированных обучающих систем. В этой связи возрастает актуальность разработки дидактических механизмов проектирования и реализации интеллектуальных обучающих систем для эффективного сопровождения исследовательской деятельности школьников.

Начало XXI века ознаменовалось появлением гибридных интеллектуальных обучающих систем (ГИОС), проектирование которых основано на синергетической комбинации интеллектуальных методов, таких как экспертные системы, нейросети, генетические алгоритмы, имитационные статистические модели, позволяющей охватить полный спектр когнитивных и вычислительных возможностей. К важнейшим характеристикам ГИОС относятся способность накапливать знания и использовать их для самообучения, адаптироваться к индивидуальным возможностям и потребностям обучающегося, проектировать индивидуальный образовательный маршрут в зависимости от уровня предметной подготовки.

Настоящее исследование ориентировано на создание и реализацию открытой и гибкой автоматизированной системы для эффективного планирования, организации и сопровождения исследовательской деятельности школьников в области математики на основе гибридности методов искусственного интеллекта. Основная **задача исследования** — разработать дидактические механизмы проектирования ГИОС и обеспечить их интеграцию в процесс обучения математике в школе.

Ведущая идея авторской концепции интеллектного управления образовательным процессом в условиях гибридной интеллектуальной обучающей среды заключается в обеспечении развития интеллектуального и творческого потенциала каждого школьника в ходе освоения сложного знания посредством адаптации современных достижений в науке. Определены архитектура, параметры и функционал гибридной интеллектуальной обучающей системы. Представлено организационно-методическое обеспечение развития проектно-исследовательской деятельности школьников в виде базы данных исследовательских заданий, деятельность по выполнению которых выступает важным фактором повышения уровня учебной мотивации и исследовательской культуры, обеспечения гармоничного развития личности школьника. Выявлены дидактические возможности фасетной классификации, обеспечивающей наполнение базы данных проблемно-ориентированных заданий с учётом градации уровней исследовательской деятельности и профилей мышления школьников, построение индивидуальной образовательной траектории, управление глубиной внутрипредметных, межпонятийных и междисциплинарных связей, а также интегративными мыслительными процессами в целом.

Организация деятельности школьников по решению комплекса исследовательских задач в условиях применения ГИОС способствует аккумулированию предметных знаний в единую целостность, развитию интеллектуальной гибкости, операций мышления, установлению межпредметных связей, развитию способности к теоретическому и эмпирическому обобщению, формированию устойчивой мотивации. Применение фасетной технологии для конструирования базы данных исследовательских задач позволяет автоматизировать наполнение многоуровневого комплекса проблемно-ориентированных заданий, обладающего свойствами динамичности и расширяемости, охватывающего все пространство профилей мышления и уровней развития исследовательской деятельности. Тем самым исследование вносит значимый вклад в решение проблемы организационно-методического сопровождения исследовательской деятельности школьников с применением функционала новейших цифровых технологий.

Литература

1. Дворяткина С.Н., Жук Л.В. Организационно-методическое обеспечение развития исследовательской деятельности школьников в гибридной интеллектуальной образовательной среде / С.Н. Дворяткина, Л.В. Жук // Ярославский педагогический вестник. - 2021. - № 3 (120). - С. 36-45.

2. Обухов А.С. Развитие исследовательской деятельности учащихся / А.С. Обухов. – М.: Нац. книжный центр, 2015. – 283 с.

3. Basalin P.D., Timofeev, A.E., Kumagina, E.A., Neimark, E.A., Fomina, I.A., Chernyshov, N.N. (2018). Implementation of a hybrid intellectual production-type learning environment. Modern information technologies and IT education, 1(14), 256-267.

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ НЕЯВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Т.В.Жуковская, И.Д.Серова (Тамбов, ТГТУ, ТГУ)
t_zhukovskaia@mail.ru, irinka_36@mail.ru

Обозначим через $K[\mathbb{R}^n]$ и $C[\mathbb{R}^n]$ совокупность компактных и, соответственно, непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть задано многозначное отображение $B : [a, b] \to C[\mathbb{R}^n]$.

Будем обозначать $L^n(B)$ — пространство суммируемых функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ со значениями $x(t) \in B(t)$, $t \in [a, b]$; $AC^n(B)$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ что $\dot{x} \in L^n(B)$; $AC_2^n(B)$ — пространство таких дважды дифференцируемых функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ что $\dot{x} \in AC^n(B)$ (следовательно, $\ddot{x} \in L^n(B)$). В случае $B(t) \equiv \mathbb{R}^n$, перечисленные пространства будем обозначать через $L^n,\ AC^n,\ AC_2^n$.

Пусть задана многозначная функция $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to K[\mathbb{R}^n]$ и векторы $\gamma_0 \in \mathbb{R}^n,\ \gamma_1 \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим при $t \in [a, b]$ задачу Коши для включения вида:

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}) \ni 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\dot{x}(a) = \gamma_1,\ \ddot{x}(a) = \gamma_0, \tag{2}$$

при дополнительном ограничении на вторую производную искомой функции

$$\ddot{x}(a) \in B(t). \tag{3}$$

Решением включения (1) будем считать функцию $x \in AC_2^n(B)$, удовлетворяющую этому включению при почти всех $t \in [a, b]$.

Для исследования задачи (1)-(3) нам потребуются следующие понятия теории частично упорядоченных пространств (подробнее см.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00772).

[1],[2]). Пусть заданы частично упорядоченные пространства $(X, \leqslant)$, $(Y, \leqslant)$. Для любых $v \in X$ и $V \subset X$, определим множества

$$\mathcal{O}_X(v) = \{x \in X : x \leqslant v\}, \quad \mathcal{O}_X(V) = \bigcup_{\forall u \in V} \mathcal{O}_X(v).$$

Многозначное отображение $G : X \rightrightarrows Y$ называется *(упорядоченно) накрывающим множество* $Y_0 \subset Y$, если имеет место соотношение (см. [1], [2]) $\forall x_0 \in X_0 \;\; \mathcal{O}_Y\big(G(x_0)\big) \cap Y_0 \subset G\big(\mathcal{O}_X(x_0)\big)$. Многозначное отображение $G : X \rightrightarrows Y$ называется *антитонным* на множестве $V \subset X$, если для любых $x, v \in V$ таких, что $x \leqslant v$, и для $z \in G(v)$ существует $y \in G(x)$ удовлетворяющий неравенству $y \geqslant z$.

Сформулируем теорему о разрешимости и оценке решений задачи Коши (1)-(3). Обозначим $\Omega = \big\{(t, x, z, v, u) : t \in [a, b], \; x, z \in \mathbb{R}^n, \; v, u \in B(t)\big\}$ и определим сужение $F_\Omega : \Omega \to C[\mathbb{R}^m]$ многозначного отображения F на множество Ω.

Будем предполагать, что при почти всех $t \in [a, b]$ и любых $x, z, u, v \in \mathbb{R}^n$ функция $F(\cdot, x, z, v, u) : [a, b] \to K[\mathbb{R}^n]$ измерима; функция $F(t, \cdot, \cdot, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to K[\mathbb{R}^n]$ по каждому аргументу $x_1, ..., x_n, \; z_1, ..., z_n$ и $v_1, ..., v_n$ непрерывна справа; функция $F(t, x, z, v, \cdot) : \mathbb{R}^n \to K[\mathbb{R}^n]$ непрерывна; отображение $B : [a, b] \to C[\mathbb{R}^n]$ измеримо.

Теорема. *Пусть задана функция $v_0 \in AC_2^n(B)$ такая, что $v_0(a) \geqslant \gamma_0$, $\dot{v}_0(a) \geqslant \gamma_1$ и*

$$F\big(t, v_0(t), \dot{v}_0(t), \ddot{v}_0(t), \ddot{v}_0(t)\big) \cap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing \text{ при п.в. } t \in [a, b].$$

Пусть множество измеримых сечений многозначного отображения $t \in [a, b] \mapsto B(t) \cap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}\big(\ddot{v}_0(t)\big) \in C[\mathbb{R}^n]$ интегрально ограничено снизу и при почти всех $t \in [a, b]$, $\forall x, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \in B(t)$ отображение $F_\Omega(t, x, z, v, \cdot) : B(t) \to K[\mathbb{R}^k]$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$; при почти всех $t \in [a, b]$, $\forall u \in B(t)$ отображение $F_\Omega(t, \cdot, \cdot, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \times B(t) \to K[\mathbb{R}^k]$ антитонное.

Тогда существует решение $x \in AC_2^n(B)$ задачи (1)-(3) такое, что $\ddot{x} \leqslant \ddot{v}_0$ и во множестве вторых производных решений задачи (1)-(3) существует минимальный элемент $\underline{\ddot{x}}$ и для него выполнено неравенство $\underline{\ddot{x}} \leqslant \underline{\ddot{v}_0}$.

Литература

1. Арутюнов А.В. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах / А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский // Доклады Академии наук. — 2013. — Вып. 453, №5. — С. 475–478.

2. Arutyunov A.V. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces / A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy // Topology and its Applications. — 2015. — Vol. 179, №1. — С. 13–33.

САМОПОДОБНЫЕ ТАЙЛЫ И B-СПЛАЙНЫ

Т.И. Зайцева (Москва, МГУ)
zaitsevatanja@gmail.com

Одномерным кардинальным B-сплайном называется свёртка нескольких индикаторов отрезка [0, 1]. B-сплайны естественно возникают при решении различных задач теории приближений, теории вероятностей и т.д. Мы рассматриваем обобщения B-сплайнов, являющиеся свёрткой индикаторов нескольких специальных самоподобных компактов (тайлов). Данные функции, в отличие от классических B-сплайнов, не являются кусочно-полиномиальными, однако обладают многими свойствами B-сплайнов. Так, они являются решениями масштабирующих уравнений, что позволяет использовать их в практических приложениях (теории всплесков, компьютерном моделировании поверхностей, численном решении уравнений в частных производных).

Подход к построению систем всплесков на основе тайлов подробно рассмотрен, например, в работах Gröchenig, Madych [1] и Lagarias, Wang [2]. Полученные всплески строятся аналогично классической системе Хаара, однако используется несколько порождающих функций, их количество зависит от матрицы растяжения. Такой подход более эффективен по сравнению с классическим прямым произведением одномерных всплесков Хаара благодаря лучшей локализации функций.

Свойства B-сплайнов, систем всплесков и соответствующих им алгоритмов существенно зависят от свойств тайлов, по которым были построены данные объекты. Под тайлом мы понимаем компактное множество, целые сдвиги которого покрывают всё пространство без перекрытий (с точностью до меры нуль), а также которое является объединением своих аффинных сжатий с одинаковой линейной частью. Интересным и важным частным случаем являются 2-тайлы, которые являются объединением двух подобных частей. В таком случае удаётся получить классификацию тайлов с точностью до аффинного подобия и подробнее исследовать свойства соответствующих B-сплайнов.

Одним из важных свойств B-сплайнов является их гладкость (по Гёльдеру, по Соболеву). Неожиданно, гладкость B-сплайнов, построенных по одному из 2-тайлов, оказывается больше, чем гладкость классических B-сплайнов. Таким образом, свёртка n индикаторов фрактального множества может оказаться дифференцируема большее количество раз, чем свёртка n индикаторов квадрата. В приложении к компьютерному моделированию поверхностей это приводит к тому, что полученная поверхность будет более гладкая, в приложениях к решению урчпов – что можно решать уравнения более высокого порядка. Для поиска гладкости по Гёльдеру использовалось обобщение матричного метода на случай анизотропного (не одинакового по разным осям) растяжения, предложенный в работе [3]. Данный метод опирается на поиск совместного спектрального радиуса, вычисление которого было выполнено при помощи улучшенного алгоритма инвариантного многогранника [4]. Нами также исследуется метод вычисления гладкостей B-сплайнов по Соболеву в общем, анизотропном случае.

Другим преимуществом рассматриваемых тайловых B-сплайнов является небольшое количество ненулевых коэффициентов в масштабирующем уравнении, что уменьшает вычислительную сложность одной итерации в прикладных алгоритмах.

Литература

1. Gröchenig K., Madych W.R. Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of $\mathbb{R}^n$ / K. Gröchenig, W.R. Madych // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1992. — Т. 38, № 2. — С. 556–568.

2. Lagarias J. Integral self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$. II. Lattice tilings / J. Lagarias, Y. Wang // J. Fourier Anal. Appl. — 1997. — Т. 3, № 1. — С. 83–102.

3. Charina M. Regularity of anisotropic refinable functions / M. Charina, V.Yu. Protasov // Applied and Computational Harmonic Analysis. —2019. — Т. 47, № 3. С. 795–821.

4. Mejstrik T. Algorithm 1011: Improved Invariant Polytope Algorithm and Applications / T. Mejstrik // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). — 2020. — Т. 46, № 3. — С. 1–26.

О ЗАДАЧАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ[1]

М.Б. Зверева, М.И. Каменский (Воронеж, ВГУ)
margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru

Проведено исследование ряда задач, моделирующих деформации и колебания упругих систем (струна, балка) с нелинейным краевым условием [1]-[4]. Такого рода условие возникает за счет наличия ограничителя на перемещение из состояния равновесия одного из концов рассматриваемой физической системы.

В качестве примера приведем двумерную модель малых колебаний струны. Эта модель понимается в следующем смысле. Введем декартову систему координат. Предположим, что в состоянии равновесия струна расположена вдоль отрезка $[0, l]$ оси Ox. Один конец струны жестко закреплен. Второй конец струны находится внутри ограниченного замкнутого, выпуклого множества $C \subset R^2$ ($intC \neq \varnothing$), принадлежащего плоскости π, параллельной Oyz, проходящей перпендикулярно оси Ox. При этом множество C может перемещаться с течением времени $t \geqslant 0$ в плоскости π, и его движение задается отображением $t \mapsto C(t)$. Рассмотрим колебательный процесс. Отклонение любой точки струны от положения равновесия в каждый момент времени t может быть описано двумя координатами: $u_1(x, t)$ характеризует перемещение вдоль оси Oy, $u_2(x, t)$ характеризует перемещение вдоль оси Oz. Через $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$, где $x \in [0, l]$, будем обозначать вектор перемещения. Условие жесткого закрепления первого конца струны означает $u(0, t) = 0$. Ограничение на перемещение второго конца может быть записано как $u(l, t) \in C(t)$. В зависимости от положения множества $C(t)$, правый конец струны либо колеблется свободно, либо перемещается вместе с $C(t)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20-51-15003 НЦНИ-а.

В математической постановке исследуемая начально – краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(l,t) \in C(t) \\ -u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)), \end{cases} \tag{1}$$

где $N_{C(t)}(u(l,t))$ — нормальный конус к множеству $C(t)$ в точке $u(l,t)$, определяемый для каждого фиксированного t как

$$N_{C(t)}(u(l,t)) = \{\xi \in R^2 : \langle \xi, c - u(l,t)\rangle \leqslant 0 \quad \forall c \in C(t)\}.$$

Здесь начальная форма струны описывается функцией $\varphi(x)$ ($x \in [0,l]$), начальная скорость предполагается равной нулю.

Теорема. *Пусть отображение $C(t)$ удовлетворяет условию Липшица для всех $t \geqslant 0$ (в смысле расстояния по Хаусдорфу); функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица для всех $x \in [0,l]$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) \in C(0)$, $-\varphi'(l) \in N_{C(0)}(\varphi(l))$. Тогда решение задачи (1) существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x-t) + \Phi(x+t)}{2}. \tag{1}$$

.

Литература

1. Zvereva M. A two-dimensional model of string deformations with a nonlinear boundary condition / M. Zvereva //Journal of nonlinear and convex analysis.— 2022. —V. 23, Is. 12. —P. 2775–2793.

2. Kamenskii M. On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions / M. Kamenskii, Y.-Ch. Liou, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization.— 2020. —V. 69, Is. 2. —P. 283–304.

3. Kamenskii M. On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end / M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization.— 2020. —V. 69, Is. 9. —P. 1935–1959.

4. Zvereva M. A model of deformations of a beam with nonlinear boundary conditions / M. Zvereva, Ch.-F. Wen, M. Kamenskii, P. Raynaud de Fitte // Journal of Nonlinear and Variational Analysis.— 2022. —V.6, Is 3. —P. 279–298.

ИНВАРИАНТНЫЕ БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ[1]

Р.Е. Зволинский (Воронеж, ВГУ)
roman.zvolinskiy@gmail.com

Через ℓ_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

и обычной полуупорядоченностью, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geqslant 0$, т. е. $Bx \geqslant 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $x \geqslant 0$,
2. $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots)$,
3. $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Из свойств 1–3 вытекает, что $\|B\|_{\ell_\infty^*} = 1$, т. е. $\mathfrak{B}$ есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^*, где через $\mathfrak{B}$ мы обозначаем множество банаховых пределов. У. Эберлейн доказал существование банаховых пределов, инвариантных относительно преобразований Хаусдорфа [1]. Подход У. Эберлейна был развит в [2] для более общего класса операторов, действующих в пространстве ℓ_∞.

Обозначим через Γ множество линейных операторов в ℓ_∞, удовлетворяющих следующим условиям

(i) $H \geqslant 0$ и $H\mathbb{1} = \mathbb{1}$.

(ii) $Hc_0 \subset c_0$.

(iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} (A(I-T)x)_j \geqslant 0$ для всех $x \in \ell_\infty$,

где $A \in R$ и $R = \operatorname{conv}\{H^n, n \in \mathbb{N}\}$. В [2] было доказано существование банахова предела B, инвариантного относительно H, т. е.

[1] Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект № 22-7-2-27-3).

$Bx = BHx$ для всех $x \in \ell_\infty$. Множество таких банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}(H)$. Условиям (i)–(iii) удовлетворяет оператор растяжения

$$\sigma_n x = (\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n}, \ldots),\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.$$

В работе [3, Теорема 13] было доказано, что множество $\bigcup_{n=2}^{\infty} \mathfrak{B}(\sigma_n)$ невыпукло.

Теорема 1. *Пусть* $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathfrak{B}(\sigma_n)$, *тогда*

$$\sup_{B_1 \in \operatorname{conv} A} \inf_{B_2 \in A} \|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2.$$

Приведенная выше теорема говорит о том, что множество $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathfrak{B}(\sigma_n)$ не просто невыпукло, а невыпукло в максимально возможной степени, поскольку расстояние между любыми двумя банаховыми пределами не превосходит 2.

Другие результаты о выпуклости различных подмножеств в $\mathfrak{B}$ содержатся в [4].

Литература

1. Eberlein W.F. Banach-Hausdorff limits / W.F. Eberlein // Proc. Amer. Math. Soc. — 1950. — Vol. 1, № 5. — P. 662–665.

2. Semenov E.M. Invariant Banach limits and applications / E.M. Semenov, F.A. Sukochev // J. Funct. Anal. — 2010. — Vol. 259, № 6. — P. 1517-1541.

3. Авдеев Н.Н. Банаховы пределы: экстремальные свойства, инвариантность и теорема Фубини / Н.Н. Авдеев, Е.М. Семенов, А.С. Усачев // Алгебра и анализ. — 2021. — Т. 33, № 4. — С. 32–48.

4. Зволинский Р.Е. Инвариантные банаховы пределы и их выпуклые подмножества / Р.Е. Зволинский, Е.М. Семенов // Матем. заметки. — 2022. — Т. 112, № 6. — С. 820–824.

НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКАЯ МОДЕЛЬ ФОЙГТА[1]

А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ и ВГУИТ)
zvyagin.a@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. В $Q_T = [0, T] \times \Omega$ рассматривается начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\ \big[\nu\big(I_2(v)\big)\mathcal{E}(v)\big] - \varkappa(\theta)\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \mathrm{grad}\ p = f; \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\ v = 0 \text{ в } Q_T; \qquad v|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega; \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi\Delta\,\theta = 2\nu\big(I_2(v)\big)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g; \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega; \qquad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $v = (v_1(t, x), ..., v_n(t, x))$, $n = 2, 3$, $\theta(t, x)$ и $p(t, x)$ – вектор–функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно, f – плотность внешних сил, g – источник внешнего тепла, $\varkappa > 0$ – коэффициент времени ретардации, $\chi > 0$ – коэффициент теплопроводности, $\nu > 0$ – вязкость жидкости; $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ – тензор скоростей деформаций; $I_2(v)$ определяется равенством: $I_2^2(v) = \mathcal{E} : \mathcal{E} = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\mathcal{E}_{ij}(v)\right]^2$. Символ $A : B = a_{ij}b_{ij}$ для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$; Div C – дивергенция тензора $C = (c_{ij}(t, x))$, то есть вектор $\mathrm{Div}\ C = \Big(\partial c_{1j}(t, x)/\partial x_j, \cdots, \partial c_{nj}(t, x)/\partial x_j\Big)$.

Для математической модели нелинейно-вязкой среды возникают естественные ограничения на вязкость рассматриваемой среды (см. [1], [2]) через свойства функции $\nu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$: $\nu(s)$ должна быть определенная при $s \geqslant 0$ непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства

$a)$ $0 < C_1 \leqslant \nu(s) \leqslant C_2 < \infty$;

$b)$ $-s\nu'(s) \leqslant \nu(s)$ при $\nu'(s) < 0$;

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в Воронежском государственном университете (проект № 21-71-00038).

c) $|s\nu'(s)| \leqslant C_3 < \infty$.

Здесь и далее через C_i обозначаются различные константы. В данной работе изучается математическая модель Фойгта с нелинейной вязкостью и временем запаздывания среды, зависящим от температуры (см. [3]–[5]).

Теорема 1. *Пусть функция $\varkappa(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$ является монотонно возрастающей и $0 \leqslant \varkappa(s) \leqslant C_4$, $f \in L_2(0,T;V^*)$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0 \in V$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$ и вязкость рассматриваемой среды ν удовлетворяет условиям a) – c). Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и для $1 < p < 5/4$ при $n = 3$ существует слабое решение начально–краевой задачи (1)–(4).*

Литература

1. Zvyagin A. Solvability of the non-linearly viscous polymer solutions motion model / A. Zvyagin // Polymers. — 2022. — V. 14. № 1264.

2. Звягин А.В. Слабая разрешимость нелинейно-вязкой модели Павловского / А.В. Звягин // Изв. вузов. Матем. — 2022. — № 6. — С. 87–93.

3. Звягин А.В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова / А.В. Звягин, В.П. Орлов // Изв. вузов. Матем. — 2014. — № 9. — С. 69–74.

4. Звягин А.В. Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта / А.В. Звягин, В.П. Орлов // Матем. Заметки. — 2015. — Т. 97, № 5. — С. 681–698.

5. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта / А.В. Звягин // Докл. РАН. — 2016. — Т. 468, № 3. — С. 251–253.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ[1]

В.Г. Звягин, М.В. Турбин (Воронеж, ВГУ)
zvg_vsu@mail.ru, mrmike@mail.ru

Исследование начально-краевых задач для моделей движения несжимаемой неоднородной жидкости (данные модели называют

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00103, https://rscf.ru/project/22-11-00103/

также моделями движения жидкости с переменной плотностью) была начато в работах А.В. Кажихова [1]. Он доказал существование слабого решения для системы уравнений Навье-Стокса с переменной плотностью. В дальнейшем теоремы существования сильных решений (глобальных в двумерном случае и локальных в трёхмерном случае или глобальных в трёхмерном случае, но для малых данных задачи) были доказаны О.А. Ладыженской и В.А. Солониковым [2]. К настоящему времени для несжимаемой неоднородной системы Навье-Стокса получены результаты аналогичные результатам для однородной несжимаемой системы Навье-Стокса.

В последнее время активно исследуются модели несжимаемой неоднородной жидкости для неньютоновских жидкостей [3,4,5]. В этом докладе рассматривается начально-краевая задача для несжимаемой модели Кельвина-Фойгта с переменной плотностью.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n, n=2,3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $[0,T], 0<T<\infty$ — промежуток времени, $Q_T=\Omega\times[0,T]$. Рассматривается начально-краевая задача, соответствующая несжимаемой модели Кельвина-Фойгта с переменной плотностью:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_1\Delta v-\mu_2\frac{\partial\Delta v}{\partial t}$$

$$-\int\limits_0^t\sum_{k=1}^{L}\beta_k e^{\alpha_k(t-s)}\Delta v(s)\,ds+\nabla p=\rho f,\quad (x,t)\in Q_T; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=0;\quad \operatorname{div}v=0,\quad (x,t)\in Q_T; \qquad (2)$$

$$v|_{t=0}(x)=a(x),\quad \rho|_{t=0}(x)=\rho_0(x),\quad x\in\Omega,\quad v|_{\partial\Omega}=0. \qquad (3)$$

Здесь v — вектор скорости жидкости, ρ — плотность жидкости, p — давление, а f — плотность внешних сил. Числа $\alpha_i, i=\overline{1,L}$ вещественны и отрицательны (данные условия продиктованы физическим смыслом задачи), $\beta_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,L}$, константа $\mu_2>0$ характеризует время запаздывания. Предполагается, что $0<m\leqslant\rho_0(x)\leqslant M$, где m,M — некоторые константы.

Введем пространства, в которых исследуется разрешимость начально-краевой задачи (1)—(3). Для скорости v это пространство $W_1=\left\{u: u\in C([0,T],V^1), u'\in L_2(0,T;V^1)\right\}$. Для плотности ρ пространство $E_1=\left\{\varrho:\varrho\in L_\infty(Q_T),\varrho'\in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\}$.

Будем предполагать, что $a \in V^1, \rho_0 \in L_\infty(\Omega)$, а $f \in L_2(0,T,V^0)$.

Определение 1. Пару функций $(\rho, v) \in E_1 \times W_1$ будем называть слабым решением начально-краевой задачи (1)—(3), если для любого $\varphi \in V^1$ и при почти всех $t \in [0,T]$ она удовлетворяет интегральному равенству

$$\int\limits_\Omega \rho v' \varphi dx + \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \varphi_j dx \\ + \mu_1 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx + \mu_2 \int\limits_\Omega \nabla v' : \nabla \varphi dx \\ + \int\limits_0^t \sum_{k=1}^L \beta_k e^{\alpha_k (t-s)} \int\limits_\Omega \nabla v(s) : \nabla \varphi dx ds = \int\limits_\Omega \rho f \varphi dx,$$

для любого $\psi \in H_0^1(\Omega)$ и при почти всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет равенству

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \rho v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dx = 0,$$

а также начальным условиям: $v(0) = a, \rho(0) = \rho_0$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи (1)—(3).*

Для доказательства используется аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики [6]. Рассматривается начально-краевая задача, аппроксимирующая исходную, формулируется определения её решения, вводится эквивалентная операторная трактовка задачи, устанавливаются априорные оценки решений как зависящие, так и не зависящие от параметра аппроксимации. Затем на основе одного варианта теоремы Лере-Шаудера устанавливается разрешимость этого эквивалентного операторного уравнения. После чего на основе априорных оценок решений показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, которая слабо сходится к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Литература

1. Кажихов А.В. Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости /

А.В. Кажихов // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 216, № 5. — С. 1008–1010.

2. Ладыженская О.А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1975. — Т. 52. — С. 52–109.

3. Antontsev S.N. The classical Kelvin–Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence, uniqueness and regularity / S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh // Nonlinearity. — 2021. — V. 34, № 5. — P. 3083–3111.

4. Zvyagin V. Optimal feedback control problem for inhomogeneous Voigt fluid motion model / V. Zvyagin, M. Turbin // Journal of Fixed Point Theory and Applications. — 2021. — V. 23, № 4. — Article 4.

5. Звягин В.Г. Задача оптимального управления с обратной связью для модели Фойгта с переменной плотностью / В.Г. Звягин, М.В. Турбин // Известия вузов. Математика. — 2020. — Т. 4. — С. 93–98.

6. Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики / В.Г. Звягин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т. 46. — С. 92–119.

PULLBACK-АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ БИНГАМА[1]

В.Г. Звягин, А.С. Устюжанинова (Воронеж, ВГУ)
zvg_vsu@mail.ru, nastyzhka@gmail.com

Рассматривается следующая задача для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau; +\infty); \tag{1}$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu \mathcal{E}(v) + \varkappa \dfrac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} & \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \ (x,t) \in \Omega \times (\tau; +\infty); \\ |\sigma| \leqslant \tau^* & \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \ (x,t) \in \Omega \times (\tau; +\infty). \end{cases} \tag{2}$$

$$v|_{t=\tau}(x) = a(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №22-11-00103).

Здесь $\Omega = \prod_{i=1}^{3}(0,l_i) \subset \mathbb{R}^3, \tau \in \mathbb{R}$. Через $v(x,t)$ обозначен вектор скорости частицы жидкости, $p(x,t)$ — давление в жидкости, $f(t,x)$ — плотность внешних сил, $\mu > 0$ — вязкость жидкости, $\varkappa > 0$ — константа, описывающая порог текучести жидкости, а $\mathcal{E}(v) = \dfrac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T)$ — тензор скоростей деформаций. Через $\operatorname{Div}\sigma$ обозначатся вектор, координаты которого являются дивергенцией столбцов девиатора тензора напряжений σ.

В теории пространств траекторий удобно рассматривать траектории, определенные на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty)$. В связи с этим вместе с задачей (1)—(3) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div}\sigma + \nabla p = F, \quad \operatorname{div} v = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0;+\infty); \tag{4}$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \varkappa\dfrac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} & \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0;+\infty), \\ |\sigma| \leqslant \tau^* & \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0;+\infty); \end{cases} \tag{5}$$

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

В (4) значение правой части F заранее не уточняется. Если $F(x,t) = f(x,t+\tau)$, то задача (4)—(6) получается из задачи (1)—(3) линейной заменой независимого переменного t, переводящей τ в 0.

Пусть $a \in V^0, F \in L_2(0,T;V^0)$. Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи на конечном отрезке и на полуоси.

Определение 1. Слабым решением задачи (4)—(6) на отрезке $[0,T]$ назовем пару функций (v,σ), где $v \in W[0,T], \sigma \in L_2(Q_T)^9$, таких, что для всех $\varphi \in V^2$ и для почти всех $t \in (0,T)$ выполнено тождество

$$\langle v', \varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int\limits_{\Omega} F\varphi dx, \tag{7}$$

реологическое соотношение (5) и начальное условие:

$$v(0) = a. \tag{8}$$

Пусть $a \in V^0, F \in L_{2,\,loc}(\mathbb{R}_+;V^0)$.

Определение 2. Слабым решением задачи (4)—(6) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in L_{2,\,loc}(\mathbb{R}_+;V^1) \cap L_{\infty,\,loc}(\mathbb{R}_+;V^0)$ с производной $v' \in L_{2,\,loc}(\mathbb{R}_+; V^{-2})$, если для любого $T > 0$, существует $\sigma \in L_2(Q_T)^9$ такое, что пара $(v|_{[0,T]}, \sigma)$ является слабым решением задачи (4)—(6) на $[0, T]$.

Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$ задачи (1)–(3) рассматривается множество слабых решений v задачи (4)—(6) с правой частью $F = T(\tau)f$, где $T(\tau)$ — оператор сдвига, и некоторым начальным условием (своим для каждого v), удовлетворяющих оценке

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;V^0)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V^1)} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(1 + e^{-2\alpha t}\left(\|v(0)\|^2_{V^0} + \int\limits_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s}\|f(s+\tau)\|^2_{V^0} ds\right)\right).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_{2,loc}(\mathbb{R}, V^0)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{t} e^{2\alpha\xi}\|f(\xi)\|^2_{V^0} d\xi < \infty$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}$ имеет минимальный траекторный pullback-аттрактор и минимальный pullback-аттрактор.

Доказательство теоремы проводится на основе теории траекторных pullback-аттракторов [1,2,3,4,5]. Для рассматриваемой модели на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованиям задач гидродинамики устанавливается существование слабых решений на конечном отрезке и на полуоси $\mathbb{R}_+$. После чего для семейства пространств траекторий $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}$ доказывается существование минимального траекторного pullback-аттрактора и минимального pullback-аттрактора.

Литература

1. Звягин В.Г. Pullback-аттракторы модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров / В.Г. Звягин, С.К. Кондратьев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79. № 4. — С. 3–26.

2. Zvyagin V. Pullback attractors of the Jeffreys–Oldroyd equations / V. Zvyagin, S. Kondratyev // Journal of Differential Equations. — 2016. — Vol. 260. № 6. — P. 5026–5042.

3. Звягин В.Г. Pullback–аттракторы математических моделей гидродинамики: учебное пособие / В.Г. Звягин, М.В. Турбин, А.С. Устюжанинова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — 124 с. — ISBN 978-5-9273-3469-8.

4. Turbin M. Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin–Voigt model / M. Turbin, A. Ustiuzhaninova // Evolution Equations and Control Theory. — 2022. — V. 11. №. 6. — P. 2055–2072.

5. Устюжанинова А.С. Pullback–аттракторы модифицированной модели Кельвина–Фойгта / А.С. Устюжанинова // Изв. вузов. Матем. — 2021. — №. 5. — С. 98–104.

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ ШЕННОНА В МОДЕЛИ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ

В.С. Зизов (Москва, ВМК МГУ)
vzs815@gmail.com

Введение

Модель *клеточных схем* (**КС**) была предложена в 1967 году С.С. Кравцовым в статье [1]. Это математическая модель *интегральных схем* (**ИС**), которая учитывает некоторые особенности физического синтеза. В её основе лежит хорошо изученная модель логического синтеза - *схемы из функциональных элементов* (**СФЭ**). Ключевое отличие от СФЭ состоит в ряде геометрических ограничений на СФЭ, клеточная схема представляет собой своего рода вложение СФЭ в прямоугольную решётку. В силу своих особенностей клеточные схемы также называются *плоскими прямоугольными схемами.*

Одной из основных задач синтеза микросхем является синтез схемы, реализующей некоторую функцию алгебры логики (**ФАЛ**). В модели **КС** естественным образом возникает функционал *площади* $A(S)$. Для этого функционала был показан порядок *функции Шеннона* в работе А.Альбрехта [2], равный $\sigma 2^n, n \to \infty$. В вышеупомянутых работах [1], [2], исходя из мощностных соображений, показаны границы константы $\sigma : \sigma \in [\frac{1}{4}; \frac{9}{2}]$.

Подобная математическая модель была описана К.Д. Томпсоном в монографии [3] в 1980 году. Такая модель - основная для исследований, связанных с ИС. Однако одним из недостатков считается то, что она не учитывает задержек при распространении сигнала в проводниках. В статье Б. Чазелле и М. Лоуис 1985 года [4] была предложена модель, описывающая возникающие в схеме задержки. Согласно исследованию обеих моделей Г. Биларди, М. Працчи, Ф.П.

Препарат [5], модель Томпсона не столь хорошо учитывает задержку, однако этого зачастую достаточно для расчётов в рамках небольших (в пределах одного кристалла) ИС, либо для планирования частей более крупных ИС.

В работе [6] были получены уточненные асимптотические верхние и нижние оценки для площади схем, реализующих дешифратор порядка n, которые совпадают в первом члене разложения, имеют вид $n2^{n-1}\left(1 \pm O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ могут считаться асимптотическими оценками высокой степени точности (АОВСТ).

Основные определения и описание модели Предметом изучения настоящей работы являются клеточные схемы из функциональных и коммутационных элементов (**КСФКЭ**), каждая из которых представляет собой прямоугольную решетку на плоскости, состоящую из клеток - единичных квадратов. Каждая клетка, в свою очередь, представляет собой элемент базиса, входами и выходами которого являются контакты, расположенные на серединах его сторон. При этом каждый контакт является либо входом элемента, либо выходом элемента, либо его изолированным полюсом. Каждый элемент базиса реализует на своих выходах систему ФАЛ от БП, сопоставленных его входам, за исключением т.н. *изолятора* - элемента, все контакты которого являются изолированными полюсами.

Каждый элемент будем относить к одному из двух типов: коммутационный элемент (КЭ) и функциональный элемент (ФЭ). При этом *функциональным* называется элемент, который реализует хотя бы одну нетождественную, то есть отличную от БП, функцию, а любой другой элемент, включая изолятор, считается *коммутационным* элементом. Таким образом, коммутационные элементы реализуют только тождественные функции, и их назначением является передача сигналов. Будем считать, что каждый ФЭ базиса Б реализует на своих выходах только одну отличную от его входных БП ФАЛ и будем называть те выходы, на которых она реализуется, *основными.*

Кроме того, передача сигналов может осуществляться через вход ФЭ и тот его выход, на котором реализуется ФАЛ, тождественно равная этому входу, или, иначе, через данную вход-выходную пару ФЭ, которую тоже будем называть *коммутационной.* Выход коммутационной пары ФЭ, а также любой выход КЭ будем считать *коммутационным.*

В данной работе рассматривается базис $Б_0'$ - один из возможных базисов **КСФКЭ**, связанных с элементами стандартного базиса алгебры логики $Б_0 = \{x_1x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x_1}\}$, который состоит из 3 функк-

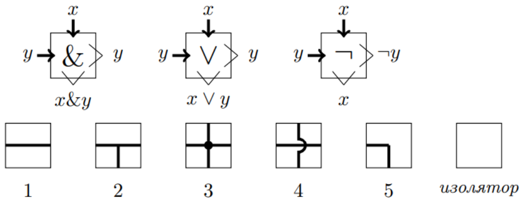

Рис. 1. Базис $Б'_0$, *функциональные элементы* (&) конъюнкции, ($\vee$) дизъюнкции и ($\neg$) отрицания. *Коммутационные элементы*: 1) проводник, 2) Т-образный разветвитель, 3) разветвитель, 4) пересечение без соединения, 5) поворот.

циональных и 6 коммутационных элементов, включая изолятор (см. Рис. 1).

Будем, как обычно, считать, что при вложении элементов базиса Б в клетки прямоугольной решетки допускаются их повороты на угол, кратный 90°, а также «перевороты» вокруг любой из осей симметрии единичного квадрата. Напомним также, что при указанном вложении происходит «естественное» совмещение контактов соседних по какому-либо ребру решетки элементов, в результате которого вход (выход) одного из них совмещается либо с выходом (соответственно входом) другого элемента, либо с его изолированным полюсом.

Введём *функционал площади* **КСФКЭ**, который далее будет служить критерием их сложности. Площадью $A(\Sigma)$ клеточной схемы Σ называется площадь её прямоугольной решетки,

$$A(\Sigma) = l(\Sigma)h(\Sigma),$$

где $l(\Sigma)$ и $h(\Sigma)$ – горизонтальный и вертикальный линейные размеры решётки, называемые *длиной* и *высотой* схемы соответственно. Всюду далее не ограничивая общности будем считать, что $h(\Sigma) \leqslant l(\Sigma)$.

При этом для системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ из $P_2^m(n)$ определим, как обычно, величину $A(F)$, равную минимальной площади **КСФКЭ**, реализующих F, которую будем называть *площадью* (сложностью) системы F.

Определим сложность $A(f)$ ФАЛ f как минимальную из площадей **КСФКЭ** Σ, реализующих f, и введём функцию Шеннона для функционала $A(f)$:

$$A(n) = \max_{f \in P_2(n)} A(f).$$

Основные результаты

В настоящей работе показывается, в частности, что традиционный мощностной подход в модели СФЭ при переходе к модели клеточных схем возможно модифицировать. В частности, предлагается получать нижние мощностные оценки через оценивание числа возможных комбинаций клеточных кластеров, и выявления асимптотики числа их комбинаций в зависимости от размера. Соответствующие результаты значительно повыашают нижнюю оценку функции Шеннона для нескольких известных базисов в модели клеточных схем, однако не приводят к асимптотическим оценкам высокой степени точности.

Литература

1. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967. Вып. 19. С. 285-–292.

2. Альбрехт А. О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 33. С. 209—214.

3. Thompson Clark D. A complexity theory for VLSI (1980)

4. Chazelle B., Louis M. A model of computation for VLSI with related complexity results. // Journal ACM. 32 №3 (July 1985), P. 573—588.

5. Bilardi, Gianfranco and Pracchi, Michele and Preparata, Franco. A critique of network speed in VLSI models of computation. // Solid-State Circuits, IEEE Journal, 17 (1982), P. 696—702.

6. Ложкин С. А., Зизов В. С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020 Т. 162 №3. С. 322–334. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

К.А. Зубанкова, Е.А. Мазепа (Волгоград ВолГУ)
bliznjukka@volsu.ru

Работа посвящена оценке скорости приближения решений задачи Дирихле для неоднородного уравнения Шредингера на модельном римановом многообразии к их граничным данным на «бесконечности». Количественные характеристики, которые оценивают скорость аппроксимации, выражаются в терминах метрики многообразия и гладкости неоднородности в уравнении Шредингера.

В данной работе будем исследовать асимптотическое поведение ограниченных решений $u \in C^2(M_g)$ неоднородного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = f(x) \tag{1}$$

на модельном римановом многообразии M_g, где функции $c(x)$, $f(x) \in C^\alpha(G), c(x) \geqslant 0$, для любого предкомпактного подмножества $G \subset M_g, 0 < \alpha < 1$. Всюду далее $M_g = B \cup D$, где некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, а D изометрично прямому произведению $[r_0; +\infty) \times S$ ($r_0 > 0$ и S - компактное риманово многообразие без края) с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2$.

Здесь $g(r)$ — положительная, гладкая на $[r_0; +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ — метрика на S. Примерами таких многообразий могут служить Евклидово пространство R^n, гиперболическое пространство H^n, поверхности вращения и другие.

Будем считать также, что на D выполнено $f(x) \equiv f(r)$ и $c(x) \equiv c(r)$.

Введем обозначение

$$h(r) = \int_r^\infty g^{1-n}(t)(\int_{r_0}^t g^{n-1}(\xi)(\frac{1}{g^2(\xi)} + c(\xi) + max\{f(\xi)\})d\xi)dt.$$

Теорема. *Пусть риманово многообразие M_g и правая часть уравнения Шредингера f таковы, что $h(r_0) < \infty$. Тогда для любых функций $\Psi(\theta) \in C^\infty(S), \Phi(\theta) \in C^\infty(S)$ на D существует единственное решение $u(r, \theta)$ уравнения Шредингера (1) такое, что*

$$u(r_0, \theta) = \Psi(\theta),$$

$$|u(r,\theta)-\Phi(\theta)| \leqslant C\cdot h(r),$$

для любых (r,θ) *при* $r>r_0$, *где константа* $C>0$ *не зависит от* (r,θ).

Аналогичный результат был получен в работе Лосева А.Г. Мазепы Е.А. для уравнения Пуассона[1].

Литература

1. Losev A.G., Mazepa E.A. Asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation on model Riemannian manifolds /A.G. Losev, E.A. Mazepa // Sib. electron. math. news — 19:1 (2022) — 66-80 c.

О ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗНОГО ПОРЯДКА

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ, ВГЛТУ)
spzubova@mail.ru; raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система в частных производных

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} = B\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} + D\frac{\partial u(t,s)}{\partial s} \tag{1}$$

с условиями

$$x(0,s)=a(s), \qquad x(T,s)=b(s), \tag{2}$$

где $t\in[0,T]$, $s\in[0,S]$; $x(t,s)\in R^n$; $u(t,s)\in R^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Система (1) называется полностью управляемой (ПУ), если существует такое управление $u(t,s)$, под воздействием которого система переводится из произвольного состояния $x(0,s)$ в произвольное состо- яние $x(T,s)$.

Основным методом исследования полной управляемости системы (1) является метод каскадной декомпозиции (МКД), опирающийся на свойства фредгольмовости конечномерного отбражения ([1] – [5]). МКД имеет четкий пошаговый алгоритм перехода к совокупности иерархически структурированных систем в подпространствах, так что на i-ом шаге реализуется переход к системе первого уровня

$$\frac{\partial u_i(t,s)}{\partial s} = D^- F_i(t,s) + f_i(t,s), \tag{3}$$

и к системе второго уровня

$$\frac{\partial^2 x_i(t,s)}{\partial t^2} = B_i\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial s} + D_i\frac{\partial u_i(t,s)}{\partial s}, \tag{4}$$

с условиями

$$\frac{\partial^{2j}x_i(t,s)}{\partial t^{2j}}|_{t=0}=a_{ij}(s),\quad \frac{\partial^{2j}x_i(t,s)}{\partial t^{2j}}|_{t=T}=b_{ij}(s),\quad j=\overline{0,i}. \qquad (5)$$

Такой переход базируется на свойствах прямоугольной матрицы $D_i:\mathrm{Im}\,D_{i-1}\to\mathrm{Coker}\,D_{i-1}$, которой соответствуют расщепления подпространств $\mathrm{Im}\,D_{i-1}$ и $\mathrm{Coker}\,D_{i-1}$ в прямые суммы:

$$\mathrm{Im}\,D_{i-1}=\mathrm{Coim}\,D_i\dot{+}\mathrm{Ker}\,D_i,\quad \mathrm{Coker}\,D_{i-1}=\mathrm{Im}\,D_i\dot{+}\mathrm{Coker}\,D_i, \qquad (6)$$

где Ker D_i — ядро D_i, Im D_i — образ D_i, Coker D_i — дефектное подпространство, Coim D_i — прямое дополнение к Ker D_i в Im D_{i-1}; существует D_i^-—обратный к сужению D_i на Coim D_i; через P_i и Q_i обозначаются проекторы на подпространства Ker D_i и Coker D_i, соответственно. В системе (5) и условиях (6) введены обозначения

$$x_i(t,s)=Q_{i-1}x_{i-1}(t,s),\qquad u_i(t,s)=(I-Q_{i-1})x_{i-1}(t,s),$$

$$B_i=Q_{i-1}B_{i-1}Q_{i-1},\qquad D_i=Q_{i-1}B_{i-1}(I-Q_{i-1});$$

$$a_{ij}(s)=Q_{i-1}B_{i-1}\frac{\partial^j a_{i-1j}(s)}{\partial s^j},\quad j=\overline{0,i},$$

$$b_{ij}(s)=Q_{i-1}B_{i-1}\frac{\partial^j b_{i-1j}(s)}{\partial s^j},\quad j=\overline{0,i}.$$

Доказывается

Теорема 1. *При выполнении условий p-кратной дифференцируемости функций $a(s)$, $b(s)$, система* (1) *является ПУ $\Leftrightarrow$ D_p - сюръекция.*

Литература

1. Zubova S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Mathematical Methods in the Applied Sciences. — New York :AIMS Press, 2021. —Vol. 44, № 15, P. 11998 – 12009.

2. Zubova S.P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Automation and Remote Control. —2018. —Vol. 79, № 5, P. 774 – 791.

3. Раецкая Е.В. Исследование сингулярно возмущенной системы управления /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Вестник Тамбовского университета. Сер. :Естественные и технические науки. Тамбов — 2018. —Т. 23, № 122. —С. 303 – 307.

4. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. —2017. —Vol. 78, № 7, P. 1189 – 1202.

5. Зубова С.П. Построение управления для получения заданного выхода в системе наблюдения / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая //Вестник Тамбовского университета. Сер. :Естественные и технические науки. Тамбов, — 2015. —Т. 20, № 5. —С. 1400 – 1404.

РАЗРАБОТКА КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГЛОБАЛЬНОЙ СЕЙСМИЧНОСТИ

О.Е. Иванков (Воронеж, ВГУ; Обнинск, ФИЦ «ЕГС РАН»)
ivankov@math.vsu.ru

Ежегодно на Земле происходят десятки тысяч землетрясений, в основном в межблоковых шовных зонах. В наши дни до сих пор не разработана методика прогноза землетрясений с указанием более или менее определенных мест, времен и магнитуд. Так как геологическая среда нелинейна, то некоторые исследователи считают вообще невозможность такого прогноза. Но, как и у всех процессов, происходящих на Земле, у сейсмического процесса также есть пространственные и временные закономерности. Проблема формализации и изучения его параметров, факторов, оценка вероятности проявления сейсмического процесса в тех или других геологических, тектонических, геодинамических условиях, актуализация всех признаков в рамках модели глобальной сейсмичности, которая служила бы базой для разработки методики прогноза является проблемой актуальной и чрезвычайно важной. К 21 веку накопился большой объем эмпирических данных, которые необходимо и возможно формализовать, описать математически. Для того чтобы приблизиться к вопросу построения общей математической модели глобальной сейсмичности придется для начала исследовать очевидные параметры и их закономерности такие как: магнитуда, выделившаяся сейсмическая энергия и глубина гипоцентра. Для этого необходимо было выбрать наиболее полный и точный каталог сейсмических событий, таким оказался NEIC [1]. Данные из него находятся в открытом доступе и доступны для скачивания для всех желающих в формате csv. Затем, для работы с ними удобнее всего было загрузить все данные в легкую базу на SQLite. Выбор на нее пал по очевидным причинам: это легкость, элементарный графический интерфейс BDBrowser-а для SQLite, и хорошая документация по Python + SQLite. Итого были собраны и обработаны данные 855258 телесейсмических землетрясений за 42 года. Как уже упоминалось выше, землетрясения характеризуются координатами эпицентра, глубиной очага, магнитудой и временем.

Для дальнейшего анализа потребовалось создать вспомогательную таблицу с данными о выделившейся сейсмической энергией. Путем простого SQL-запроса на выборку, были собраны магнитуды землетрясений и по формулам 1 подсчитана выделившаяся сейсмическая энергия для начала вся, затем отдельно глубокофокустных и коровых, и с разделением на различные промежутки магнитуд (1-2, 2-3, 3-4, 5-6, 6-7, 7-8, 4.5-5, 5-5.5, 5.5-6 и 6-6.5), и путем SQL-запроса на обновление результаты записаны в базу. Выполнена проверка вычислений путем сложения энергий по глубине и по магнитуде, с последующим сравнением с общей. Таким образом ошибка вычислений не превышает $14 \cdot 10^{-13}$ %.

$$lgE = 11.8 + 1.5M, \tag{1}$$

$$lgE = 9.15 + 2.15M, \tag{2}$$

$$lgE = 7.2 + 2M, \tag{3}$$

$$lgE = 5.24 + 1.44M, \tag{4}$$

$$lgE = 4 + 1.8M, M < 3, lgE = 5 + 1.5M, M \geqslant 3, \tag{5}$$

$$lgE = 8 + 2M \tag{6}$$

Каждое из указанных выше действий для удобства выполняет отдельный скрипт на языке Python с использованием библиотек sqlite3 и numpy.

Это все была, так сказать, подготовительная часть, следующий момент — построение графиков распределений различных параметров землетрясений таких как магнитуда, энергия и глубина очага. Для этого воспользуемся библиотекой matplotlib.pyplot, она предоставляет удобный пакет функций для построения графиков, их сохранения и редактирования. После построения графиков распределения % землетрясений по магнитуде было обнаружено, что распределение % мантийных (с глубиной гипоцентра >100 км), напоминает нормальное. Поэтому следует проверить этот факт по различным критериям. В пакете статистики scipy.stats представлены некоторые из известных критериев: Колмогорова-Смирнова (kstest), Шапиро-Уилка (shapiro) и Андерсона-Дарлинга (shapiro). Таким образом был разработан набор скриптов для проверки распределений землетрясений по разным критериям. Следующая часть комплекса программ посвящена аппроксимации распределений телесейсмических землетрясений по глубине, временных вариаций количества коровых и мантийных землетрясений и временной динамики выделившейся сейсмической энергии при телесейсмических землетрясениях за последние 42 года.

Для всего этого целесообразно было использовать Wolfram Alpha, так как Wolfram Alpha LLC предоставляют удобный API для различных запросов посредством Python. В итоге было получено множество качественных моделей с высокими коэффициентами детерминации.

В заключение хотел бы отметить, что разработанный программный комплекс может стать отличной базой для дальнейших исследований в направлении разработки концепции долгосрочного и среднесрочного прогноза.

Литература

1. NEIC *https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/search/*

2. NYMPY, ObsPy, MatPlotLib Documentation *https://docs.python.org/3/*

УСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СЛАУ С ВОЗМУЩЕННОЙ МАТРИЦЕЙ[1]

Д.В. Иванов (Самара, Самарский университет)
dvi85@list.ru

Пусть задана переопределенная система уравнений

$$Ax = f, \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, f \in \mathbb{R}^m, m > n$.

Будем предполагать, что матрица A содержит возмущения

$$A = \tilde{A} + \Xi. \tag{2}$$

Для нахождения приближенного вектора решения с возмущенной матрицей может быть применена разновидность наименьших квадратов называемая DLS (data least squares) [1]. DLS сводится к нахождению вектора, удовлетворяющего условию минимума целевой

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке МТУСИ (грант по информационной безопасности).

функции

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{\|Ax-f\|^2}{\|x\|^2}, \tag{3}$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ — евклидова векторная норма.

В [1] предложено решение задачи (3) на основе SVD (singular value decomposition)

$$x_{DLS} = \frac{f^T f}{f^T A\nu}\nu, \tag{4}$$

где ν правый сингулярный вектор, соответствующий наименьшему сингулярному числу $\sigma_{DLS} = \sigma\left(P^{\perp}A\right)$ матрицы $P^{\perp}A$, $P^{\perp} = I - \frac{ff^T}{f^T f}$.

Спектральное число обусловленности для уравнения (4)

$$\kappa_2\left(P^{\perp}A\right) = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{DLS}}{\sigma_{\min} - \sigma_{DLS}}, \tag{5}$$

где $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A.

Формула (5) имеет высокую вычислительную сложность, так как требует нахождения правого сингулярного вектора. Так же решение имеет большие погрешности если $f^T A\nu \approx 0$.

Минимум задачи (3) может быть найден из решения смещенной нормальной системы:

$$\left(A^T A - \sigma_{DLS}^2 I\right)x = A^T f. \tag{6}$$

Спектральное число обусловленности системы уравнений (6)

$$\kappa_2\left(A^T A - \sigma_{DLS}^2 I\right) = \frac{\sigma_{\max}^2 - \sigma_{DLS}^2}{\sigma_{\min}^2 - \sigma_{DLS}^2}. \tag{7}$$

В [2] предложена расширенная система эквивалентная нормальной для решения уравнений с ошибками в правой и левой части. Применим подход из [2] для системы уравнений с возмущением только в левой части. Преобразуем смещенную нормальную систему (6)

$$A^T Ax - \sigma_{DLS}^2 x = A^T f \Rightarrow A^T(f - Ax) + \sigma_{DLS}^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^T(f - Ax) + \sigma_{DLS}^2 x = 0 \Rightarrow A^T\varepsilon + \sigma_{DLS}^2 X = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{DLS}^{-1} A^T\varepsilon + \sigma_{DLS} x = 0. \tag{8}$$

Объединяя уравнение (8) с уравнением ошибки получим $\varepsilon = f - Ax$:

$$\begin{cases} \varepsilon + Ax = f, \\ \sigma_{DLS}^{-1} A^T \varepsilon + \sigma_{DLS} x = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Представим уравнение (9) в матричной форме

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{f}, \tag{10}$$

где $\bar{A} = \begin{pmatrix} \sigma_{DLS} I & A \\ A^T & \sigma_{DLS} I \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} \sigma_{DLS}^{-1}\varepsilon \\ x \end{pmatrix}$, $\bar{f} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Спектральное число обусловленности расширенной симметричной системы определяется как*

$$\kappa_2\left(\bar{A}\right) = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{DLS}}{\sigma_{\min} - \sigma_{DLS}}. \tag{11}$$

Расширенная система уравнений (10) имеет число обусловленности сопоставимое с (4), но при этом лишена недостатков присущих решению (4).

Литература

1. DeGroat R. D. The Data Least Squares Problem and Channel Equalization / R.D. DeGroat, E.M. Dowling // IEEE Transactions on Signal Processing. —1993. — Т. 41, № 1, pp. 407–411

2. Ivanov D. Symmetrical Augmented System of Equations for the Parameter Identification of Discrete Fractional Systems by Generalized Total Least Squares/D. Ivanov, A. Zhdanov //Mathematics. — 2021. — Т. 9, 3250.

О ВЕКТОРАХ И ПОДПРОСТРАНСТВАХ, ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ ВЕКТОР-СИГНАЛ[1]

И.М. Избяков (Самара, Самарский университет)
iliya-izbyakov@mail.ru

Во многих прикладных исследованиях возникает задача восстановления неизвестного вектор-сигнала $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^D$ ($\mathbb{H}^D$ обозначает D-мерное евклидово или унитарное пространство) с помощью набора

[1] Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

измерительных векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$, когда доступны лишь результаты измерений этого сигнала в виде модулей скалярных произведений $|\langle \mathbf{x}, \varphi_k\rangle|$. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ восстанавливает исходный вектор-сигнал по модулям измерений (**ВМИ**), если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^D$, таких что $|\langle \mathbf{x}, \varphi_k\rangle| = |\langle \mathbf{y}, \varphi_k\rangle|$ для всех $k = 1, \dots, N$, имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где $|c| = 1$. Это определение также может быть сформулировано в виде свойства инъективности (с точностью до унимодулярного множителя) нелинейного оператора $(\mathcal{A}(\mathbf{x}))(k) := |\langle \mathbf{x}, \varphi_k\rangle|^2$, $k = 1, \dots, N$.

Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ обладает свойством альтернативной полноты (**АП**) если для каждого подмножества $T \subseteq \{1, \dots, N\}$, по крайней мере, одно из множеств $\{\varphi_k\}_{k\in T}$ или $\{\varphi_k\}_{k\in T^C}$ полно в $\mathbb{H}^D$. Хорошо известно ([1]) что в $\mathbb{R}^D$ свойства ВМИ и АП оказываются эквивалентными. В $\mathbb{C}^D$ свойство АП является необходимым, но недостаточным для выполнения свойства ВМИ ([1]).

При введении оператора суперанализа $\mathbf{A}$, определенного на пространстве самосопряженных матриц $\mathbb{H}^{D\times D}$ равенством $(\mathbf{A}H)(k) := \langle H, \varphi_k\varphi_k^*\rangle_{HS}$, где HS — скалярное произведение Гильберта-Шмидта, оказывается, что $(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^*)(k) = \mathcal{A}(\mathbf{x})(k)$, $k = 1, \dots, N$. При этом оператор $\mathcal{A}$ не является инъективным тогда и только тогда, когда ядро оператора $\mathbf{A}$ содержит матрицы, ранг которых равен 1 или 2 ([2]). Этот критерий является, видимо, единственным в пространстве $\mathbb{C}^D$, и труден для проверки. Переход от нелинейного оператора к линейному оператору называют «подъемом фазы» (Phase Lift).

Проведенный анализ показал эквивалентность трех свойств системы векторов в пространстве $\mathbb{R}^D$:

$$\textbf{ВМИ} \Leftrightarrow \textbf{АП} \Leftrightarrow \ker(\mathbf{A}) \text{ не содержит матриц ранга 1 или 2.}$$

Некоторые прикладные задачи приводят к задаче восстановления сигнала по нормам его проекций на подпространства, например, проблема близнецов в кристаллографии. Семейство подпространств $\{W_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ с соответствующими ортопроекторами $\{\mathbf{P}_k\}_{k=1}^N$ восстанавливает по нормам векторов (**ВНП**), если для произвольных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^D$ таких что $\|\mathbf{P}_k\mathbf{x}\| = \|\mathbf{P}_k\mathbf{y}\|$ для всех $k = 1, 2, \dots, N$ имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где $|c| = 1$.

При рассмотрении подпространств можно ввести операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbf{A}$ аналогично тому, как это делалось для векторов, заменяя матрицы $\varphi_k\varphi_k^*$ на матрицы ортопроекторов. При этом оператор $\mathcal{A}$ так же, как и в случае **ВМИ**, не является инъективным тогда и только тогда, когда ядро оператора $\mathbf{A}$ содержит матрицы, ранг которых равен

1 или 2. Этот результат сформулирован в [3] для $\mathbb{R}^D$ без доказательства.

В пространстве $\mathbb{C}^D$ соответствующий результат неизвестен.

Литература

1. P. Casazza. Phase retrieval and norm retrieval by vectors and projections [Электронный ресурс] / P. Casazza, J.C. Tremain — URL: https://framerc.missouri.edu/sites/default/files/pub-pdf/234.phase_.pdf (дата обращения: 28.11.2022)

2. A.S. Bandeira. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval [Электронный ресурс] / A.S. Bandeira, J. Cahill, D.G. Mixon, A.A. Nelson. — URL: https://arxiv.org/pdf/1302.4618 (дата обращения: 03.12.2022)

3. J. Cahill. Phase retrieval by projections [Электронный ресурс] / J. Cahill, P. Casazza, K. Peterson, L. Woodland. — URL: https://arxiv.org/pdf/1305.6226 (дата обращения: 03.12.2022)

ФОРМУЛА ЛЕФШЕЦА ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Н.Р. Изварина, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)
izvarinanat@gmail.com, a.yu.savin@gmail.com

Классическая формула Лефшеца [1] выражает число Лефшеца диффеоморфизма гладкого замкнутого многообразия в терминах вкладов его неподвижных точек. Позже Атья и Ботт [2] обобщили классический результат на случай эндоморфизмов комплексов псевдодифференциальных операторов.

Цель нашей работы — доказательство теоремы Лефшеца в относительной эллиптической теории. Эта теория была потроена Б.Ю. Стерниным [3] как теория задач с условиями на подмногообразии различной размерности.

В работе мы рассматриваем пары (M, X), где M — гладкое замкнутое многообразие, а X — его подмногообразие коразмерности ν с соответствующим вложением $i : X \hookrightarrow M$.

Рассмотрим последовательность ограниченных операторов, действующих в пространствах Соболева

$$0 \to \begin{matrix} H^{s_0}(M, E_0) \\ \oplus \\ H^{t_0}(X, F_0) \end{matrix} \xrightarrow{d_0} \begin{matrix} H^{s_1}(M, E_1) \\ \oplus \\ H^{t_1}(X, F_1) \end{matrix} \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{m-1}} \begin{matrix} H^{s_m}(M, E_m) \\ \oplus \\ H^{t_m}(X, F_m) \end{matrix} \to 0, \quad (1)$$

где E_j, F_j — комплексные векторные расслоения над M и над X соответственно. Операторы

$$d_j = \begin{pmatrix} A_j & C_j \\ B_j & D_j \end{pmatrix}$$

содержат классические псевдодифференциальные операторы (ниже ПДО) A_j на M и D_j на X. Граничный и кограничный операторы B_j и C_j равны $B_j = D''_{X,j} i^* D''_{M,j}$, $C_j = D'_{M,j} i_* D'_{X,j}$, где $D'_{M,j}, D''_{M,j}$ и $D'_{X,j}, D''_{X,j}$ — ПДО на M и на X соответственно.

Элементарный граничный и двойственный кограничный операторы определяются как

$$i^* : H^s(M,E) \longrightarrow H^{s-\nu/2}(X, E|_X), \quad i^* : u \longmapsto u|_X, \quad s > \nu/2,$$

$$i_* : H^{-s+\nu/2}(X, E|_X) \longrightarrow H^{-s}(M,E), \quad s > \nu/2.$$

Пусть последовательность (1) является комплексом, т.е. $d_{j+1} d_j = 0$ для всех j.

Пусть дан диффеоморфизм $g : M \to M$, такой что $g(X) = X$, и даны изоморфизмы векторных расслоений

$$\Phi^j_M : g^* E_j \longrightarrow E_j, \quad \Phi^j_X : g^* F_j \longrightarrow F_j,$$

геометрический эндоморфизм комплекса (1) определяется как

$$T^j = \begin{pmatrix} \Phi^j_M \circ g^* & 0 \\ 0 & \Phi^j_X \circ g^* \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(M, E_j) \\ \oplus \\ C^\infty(X, F_j) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, E_j) \\ \oplus \\ C^\infty(X, F_j) \end{matrix}.$$

Определение 1. Комплекс (1) называется *g-инвариантным*, если $d_j T^j = T^{j+1} d_j$ для всех j.

Мы полагаем, что все неподвижные точки диффеоморфизма g невырожденные в смысле следующего определения.

Определение 2. Неподвижная точка x диффеоморфизма g ($g(x) = x$) называется *невырожденной для g*, если если у дифференциала $dg(x) : T_x M \to T_x M$ нет собственных значений, равных 1.

Теорема 1. *Предположим, что все неподвижные точки диффеоморфизма g невырожденные. Тогда имеет место следующая формула Лефшеца*

$$L_d(g) = \sum_{x \in \Omega_M} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \mathrm{tr} \Phi^k_M(x)}{|1 - dg(x)|} + \sum_{x \in \Omega_X} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \mathrm{tr} \Phi^k_X(x)}{|1 - dg|_X(x)|},$$

где $L_d(g)$ — число Лефшеца эндоморфизма g комплекса (1), $\Omega_M = \{x \in M \mid g(x) = x\}$ и $\Omega_X = \{x \in X \mid g(x) = x\}$.

Литература

1. S. Lefschetz. Intersections and transformations of complexes and manifolds / S. Lefschetz // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – Vol. 28. No. 1. P. 1-49.

2. M.F. Atiyah. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I / M.F. Atiyah, R. Bott // Ann. of Math. – 1967. – Vol. 86. P. 347-407.

3. B.Yu. Sternin. Elliptic and parabolic problems on manifolds with boundary consisting of components of different dimension / B.Yu. Sternin // Trans. Moscow Math. Soc. – 1966. – Vol. 15. P. 387-429.

ДРОБНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОЦЕССОМ ЛЕВИ

М. Илолов, С.М. Лашкарбеков, Дж.Ш. Рахматов

(Душанбе, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ)

ilolov.mamadsho@gmail.com

1. Процессы Леви. Процесс Леви обозначаемый через $\eta(t)$ имеет стационарные и независимые приращения подобно броуновскому движению $B(t)$, однако в отличие от $B(t)$ процесс $\eta(t)$ допускает разрывные траектории. Такой процесс позволяет исследовать более реалистические модели. Например, в работе [1] установлено, что классы моделей основанные на разрывных процессах Леви более точно описывают данные о ценах на акции по сравнению с классической моделью Самуельсона-Блека-Шоулса полученной из броуновского движения. В работе [2] введено фрактальное движение Леви в виде дробного интеграла Римана - Лиувилля

$$L_{\alpha,H}(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_0^t (t-\tau)^{H-1/2} dL_\alpha(\tau),$$

где $L_\alpha(t)$ - обычное симметричное α-устойчивое движение Леви, $0 < \alpha \leqslant 2, 0 < H \leqslant 1$. Такие движения встречаются при анализе сложных геофизических объектов, например, при анализе геотермальных или нефтеносных резервуаров [3].

Настоящая работа посвящена изучению одного класса дробных дифференциальных уравнений типа диффузии с процессом Леви. Сделана попытка построения анализа теории белого шума для процессво Леви.

2. Пространства Леви-Хида-Кондратьева. В этом пункте определены аналоги Леви пространства основных функций Хида-Кондратьева и двойственные к нему пространства распределений Хида-Кондратьева.

Пространство основных стохастических функций Леви-Хида-Кондратьева обозначенное через $(S)_\rho = (S)_\rho^L$ состоит из функций

$$\varphi = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha K_\alpha(\omega) \in L^2(\mu^{(L)}), c_\alpha \in \mathbb{R}, J \in \mathbb{R}_+$$

таких, что

$$\|\varphi\|_{\rho,k}^2 = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha^2 (\alpha!)^{1+\rho} (2\mathbb{N})^{k\alpha} < \infty.$$

Пространство стохастических распределений Леви-Хида-Кондратьева обозначенное через $(S)_\rho = (S)_\rho^L$ состоит из формальных разложений

$$F = \sum_{\alpha \in J} b_\alpha K_\alpha(\omega)$$

таких, что

$$\|F\|_{-\rho,-q} = \sum_{\alpha \in J} b_\alpha^2 (\alpha!)^{1+\rho} (2\mathbb{N})^{q\alpha} < \infty . q \in \mathbb{N}.$$

Пространство $(S)_0 = (S)_0^{(L)}$ называаается пространством основных стохастических функций Леви-Хида, а $(S)^* = (S)_{-0}^{(L)}$ пространством стохастических распределений Леви-Хида.

Всюду здесь $K_\alpha(\omega) = I_{|\alpha|}(\delta^{\hat{\otimes}\alpha})(\omega)$, $\mu(L)$ - случайная мера Леви. Процесс белого шума Леви $\dot{\eta}(t)$ определяется в виде разложения

$$\dot{\eta}(t) = M^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) K_{\varepsilon^{(k(i,1))}}(\omega).$$

3. Произведение Вика, преобразование Леви-Эрмита и интеграл Скорохода. Пусть $F = \sum\limits_{\alpha \in J} a_\alpha K_\alpha \in (S)_{-1}^{(L)}$, $G = \sum\limits_{\beta \in J} b_\beta K_\beta \in (S)_{-1}^{(L)}$.

Тогда произведение Вика $F \diamond G$ задается разложением

$$F \diamond G = \sum_{\alpha,\beta \in J} a_\alpha b_\beta K_{\alpha+\beta} = \sum_{\gamma \in j} (\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta) K_\gamma.$$

В [4] доказано, что пространства $(S)_\rho$ и $(S)_{-\rho}$ $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ являются замкнутыми отношениями относительно умножения Вика.

Пусть $F = \sum\limits_{\alpha \in J} a_\alpha K_\alpha \in (S)^{(L)}_{-1}$. Преобразованием Леви-Эрмита $\mathcal{H}F$ является функция из пространства $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})_c$ всех конечных последовательностей комплексных чисел в $\mathbb{C}$ определяемой равенством

$$\mathcal{H}F(\xi_1, \xi_2, ...) = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \xi^\alpha \in \mathbb{C},$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...) \in \mathbb{C}$ и $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2}, ..., \xi_m^{\alpha_m}$, если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \in \boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}_+$.

Пусть $Y(x), x \in \mathbb{R}^n$ является стохастическим процессом, причем

$$E(Y^2(x)) < \infty \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ процесс $Y(x)$ допускает разложение

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, x)),$$

где $f_n(\cdot, x) \in L^2((\lambda \times \lambda)^n)$ с параметром x.

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \|\tilde{f}_n\|^2_{L^2((\lambda \times n)^{n+1})} < \infty,$$

где $\tilde{f}(x^{(1)}, z_1, ..., x^{(n)}, z_n, x, z)$ является симметризацией $z f_n(x^{(1)}, z_1, ..., x^{(n)}, z_n, x)$ относительно $n+1$ переменных

$$y_1 = (x^{(1)}, z_1), ..., y_n = (x^{(n)}, z_n), y_{n+1} = (x, z) = (x^{(n+1)}, z_{n+1}).$$

Тогда интеграл Скорохода от Y относительно η определяется так

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Y(x) \delta\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}).$$

4. Дифференциальное уравнение с белым шумом Леви. Рассмотрим дробное стохастическое уравнение

$$\begin{cases} {}^cD_t^\gamma U(t,x) = \frac{1}{2}\triangle U(t,x) + U(t,x) \diamond \dot{\eta}(t,x), (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ U(0,x) = f(x), x \in \mathbb{R}^n, 0 < \gamma < 1, \end{cases} \quad (1)$$

где f-детерминированная функция.

Берем преобразование Эрмита и получим детерминированное дробное уравнение по $u(x,t,\zeta)$ с параметром $\zeta \in (C^{\mathbb{N}})_c$

$$\begin{cases} {}^cD_t^\gamma u(t,x,\zeta) = \frac{1}{2}\triangle U(t,x,\zeta) + u(t,x,\zeta)\mathcal{H}\dot{\eta}(t,x,\zeta), \\ U(0,x,\zeta) = f(x), 0 < \gamma < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Задача (2) может быть разрешена с помощью формулы Фейнмана-Каца. В самом деле, пусть $\hat{B}(t)$ вспомогательное броуновское движение на вероятностное пространство $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}_t\}_t \geqslant 0, \hat{P})$ не зависимое от $B(t)$.

Тогда решение задачи (2) может быть записано в виде

$$u(t,x,\zeta) = \hat{E}^x[f(\hat{B}(t)) \exp[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{H}_{\hat{\eta}}(s, \hat{B}(s), \zeta) ds]] \quad (3)$$

где через $\hat{E}^x$ обозначено математическое ожидание относительно $\hat{P}$, когда $\hat{B}(0) = x$. Беря обратное преобразование Эрмита приходим к утверждению.

Теорема. *Единственным $(S)_{-1}$ решением задачи (1) является*

$$U(t,x) = \hat{E}^x[f(\hat{B}(t)) \exp \diamond[\frac{1}{\Gamma(1+x)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} \times \dot{\eta}(s, \hat{B}, (s)) ds]]$$

где через $\exp \diamond[\cdot]$ *обозначена экспонента Вика, определяемая обычно через*

$$\exp \diamond[F] = \sum \frac{1}{n}! F^{\diamond n}, F \in (S)_{-s}$$

и

$$F^{\diamond n} = F \diamond F \diamond \ldots \diamond F$$

$F \diamond F \diamond \ldots \diamond F$ *n раз.*

Отметим, что дробные стохастические уравнения в частных производных изучены другими методами в работах [5,6].

Литература

1.Di Nunno G. White noise analysis for Levy processes / Di Nunno G., Oksendal B., Froske F. — J.Functional Anal. — 2004 — 206 — pp. 109—148.

2. Осин А.В. Фрактальное движение Леви и его приложение к моделированию сетевого трафика /Осин А.В. — Электротехнические и информационные комплексы и системы. — №1, т.3. — 2007. — с. 38-43.

3. Дышин О.А. Стохастическое интерполирование водоносных свойств неоднородных геологических сред на основе фрактальных процессов / Дышин О.А., Магеррамов Ф.Ф. — Известия УГГУ. — 2018. — вып. 2(50). — с. 72-78.

4. Holden H. Stochastic Partial Differential Equations. A Modelling White Noise Functional Approach. Second Edition / Holden H. at all. — Springer. — 2010. — 311 p.

5. Ilolov M. Fractional stochastic evolution equations with Balakrishnan's white noise / Ilolov M., Lashkarbekov S., Rahmatov J.Sh. — Global and Stochastic Analysis. — Vol. 9. — No. 3. — 2022. — pp. 53-70

6. Ilolov M. Lyapunov function and stability of solutions of stochastic differential equations with fractional-like derivatives / Ilolov M., Kuchakshoev K., Rahmatov J.SH. — Global and Stochastic Analysis. — Vol. 8. — No. 2. — pp. 87-99.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ В СЛАБО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ [1]

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, С.А. Малов

(Нижний Новгород, ННГУ)

tyukhtina@iee.unn.ru

Рассматриваются постановки краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в различных квазистационарных приближениях [1-5] в слабо-неоднородных средах. Проводится сравнение решений поставленных задач с решениями соответствующих задач для системы уравнений Максвелла в однородных средах в зависимости от параметров, характеризующих степень неоднородности среды [6,7]. В рамках иерархии квазистационарных моделей

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00440, https://rscf.ru/project/23-21-00440/

предлагаются и обосновываются итерационные алгоритмы решения задач.

Литература

1. Толмачев В.В. Термодинамика и электродинамика сплошной среды / В.В. Толмачев, А.М. Головин, В.С. Потапов. — М. : Изд-во МГУ, 1988. — 230 с.

2. Alonso Rodriguez A. Eddy current approximation of Maxwell equations / A. Alonso Rodriguez, A. Valli. — Springer-Verlag Italia, 2010.

3. Raviart P.-A. A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations / P.-A. Raviart, E.A. Sonnendrücker // Numer. Math. — 1996. — V. 73. — P. 329-372.

4. Kalinin A.V. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit / A.V. Kalinin, N.N. Slyunyaev // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2017. — V. 450, № 1. — P. 112-136.

5. Калинин А.В. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах / А.В. Калинин, А.А. Тюхтина // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 8. — С. 121–134.

6. Kalinin A.V. Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields / A.V. Kalinin, A.A. Tyukhtina // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23 - 27, 2020, Revised Selected Papers. — Springer, 2021. — P. 77–92.

7. Калинин А.В., Тюхтина А.А. Некоторые математические задачи атмосферного электричества / А.В. Калинин, А.А. Тюхтина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — Т. 207. — С. 48-60.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ С ПОСТОЯННЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В.А. Калитвин

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)

kalitvin@mail.ru

К интегральным уравнениям с частными интегралами приводятся различные прикладные задачи [1–4].

Будем рассматривать линейное уравнение с частными интегралами

$$x(t,s)=\int\limits_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_a^t\int\limits_c^d k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s) \qquad (1)$$

где $t\in[a,b], s\in[c,d]$, заданные функции $c(\tau,s), k(\tau,s,\sigma)$, $f(t,s)$ и $f'_t(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Найти решение интегрального уравнения (1) в явном случае достаточно сложно. Поэтому актуальной задачей является разработка приближенных и численных методов решения этого уравнения.

Решение уравнения (1) сводится к решению двумерного интегрального уравнения:

$$x(t,s)=\int\limits_a^t\int\limits_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+g(t,s)\equiv(Rx)(t,s)+g(t,s), \quad (2)$$

В уравнении (2) $r(t,s,\tau,\sigma)$ — непреывное ядро и $g(t,s)$ — непрерывная функция. Оно имеет единственное решение в $C(D)$, так как спектральный радиус компактного в $C(D)$ оператора R равен нулю [1,2,4], и это решение может быть науйдено методом последовательных приближений. Для численного решения уравнения (2) могут быть использованы различные методы решения линейных интегральных уравнений. На практике очень часто применяют метод механических квадратур (ММК).

При использовании ММК для решения уравнения (2) отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разбиваются на части точками $t_p=a+ph(p=0,1,\ldots,P,a+Ph\leqslant b<(P+1)h)$, $s_q=c+qg(q=0,1,\ldots,Q,c+Qg\leqslant d<(Q+1)g)$, в уравнении (2) t и s заменяются на t_p и s_q соответственно, а интеграл заменяется конечной суммой. Таким образом (2) заменяется системой уравнений относительно неизвестных $x(t_i,s_j)$ $(i=0,1,\ldots,P; j=0,1,\ldots,Q)$. Отбрасывая в этой системе уравнений остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p,s_q): $x_{pq}=hg\sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}r_{pqij}x_{ij}+f_{pq}+\delta_{pq}$, (3) $(p=0,1,\ldots,P; q=0,1,\ldots,Q)$, где $f_{pq}=f(t_p,s_q)$, а δ_{pq} — погрешности вычислений для уравнений системы (3) с x_{pq}. Справедлива

Теорема. *Пусть в кубатурной формуле остатки стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to0$, $|\gamma_{pqij}|\leqslant A<\infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to0$. Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение $x_{pq}(p=0,1,\ldots,P;q=0,1,\ldots,Q)$ мо-*

жет быть найдено из системы (3), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon$ $(p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)$.

Данный подход может быть использован для решения нелинейных интегральных уравнения с частными интегралами вида

$$x(t,s) = \int_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t \int_c^d k(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma + f(t,s), \qquad (4)$$

где $t \in [a,b], s \in [c,d]$, $u \in (-\infty,+\infty)$, заданные функции $c(\tau,s)$, $k(\tau,s,\sigma,u)$, $f(t,s)$ и функция $f'_t(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных, функция $k(\tau,s,\sigma,u)$ удовлетворяет условию Липшица $|k(\tau,s,\sigma,u) - k(\tau,s,\sigma,v)| \leqslant N|u-v|$, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Приведенные алгоритмы удобно реализовывать с использованием языка программирования python.

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами /А.С. Калитвин. — Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

2. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations /J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York-Basel : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

3. Appell J. On some partial integral equations arising in the mechanics of solids /J. Appell, A.S. Kalitvin, M.Z. Nashed // Zeitschr. Ang. Math. Mech. — 1999. — B. 79. № 10. — P. 703–713.

4. Калитвин А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами /А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2006. — 177 с.

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1]

М.И. Каменский, В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян

(Воронеж, ВГУ, ВГПУ)

garikpetrosyan@yandex.ru

Доклад посвящен обзору результатов полученных авторами в теории дифференциальных уравнений и включений дробного порядка в течение последних десяти лет.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

Основное внимание уделяется полулинейному дифференциальному включению в банаховом пространстве E:

$$ {}^{C}D_{0}^{q}x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), \tag{1} $$

где ${}^{C}D_{0}^{q}$ — дробная производная Капуто порядка $q \in (0,2]$, $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый линейный оператор, $F : [0,T] \times E \multimap E$ — многозначное отображение.

Для включения (1) приводятся: решение задачи типа Коши с локальными и нелокальными начальными условиями; описание топологических свойств множеств решений; решение периодической и антипериодической краевых задач, в том числе для случая зависимости многозначного оператора от отклоняющегося аргумента; проблемы аппроксимации решений; постановка и решение задач управляемости и другие результаты.

Литература

1. Kamenskii M. On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory. — 2017. — V. 18, № 1. — P. 269–292.

2. Kamenskii M. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space / M. Kamenskii, V. Obu khovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Applicable Analysis. . — 2017. — V. 96, Iss. 4. — P. 571–591.

3. Kamenskii M. On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2017. — V. 4. — P. 1–28.

4. Kamenskii M. Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential inclusions / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2019. — V. 2. — P. 1–17.

5. Kamenskii M. On a Periodic Boundary value problem for a fractional-order semilinear functional differential inclusions in a Banach space / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Mathematics. — 2019. — V. 7, Is. 12. — P. 5–19.

6. Kamenskii M. On the existence of a unique solution for a class of fractional differential inclusions in a Hilbert space / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Mathematics. — 2021. — V. 9, Iss. 2. — P. 136–154.

7. Kamenskii M. An existence result for a periodic boundary value problem of fractional semilinear differential equations in a Banach

space / M. Kamenskii, G. Petrosyan, C.-F. Wen // J. Nonlinear Var. Anal. — 2021. — V. 5, № 1. — P. 155–177.

8. Kamenskii M. On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces / M. Kamenskii, G. Petrosyan, P. Raynaud de Fitte J.-C. Yao // Mathematics. — 2022. — V. 10, Is. 2. — P. 219–231.

9. Obukhovskii, V., Petrosyan, G., Soroka (Afanasova), M. A controllability problem for causal functional inclusions with an infinite delay and impulse conditions / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, M. Soroka (Afanasova) // Advances in Systems Science and Applications. — 2021. — V. 21, № 3. — P. 40—62.

10. Soroka (Afanasova) M. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space / M. Soroka (Afanasova), Y.-C. Liou, V. Obukhovskii, G. Petrosyan // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2019. — V. 20, № 9. — P. 1919-–1935.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ БИФУРКАЦИЙ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев,И.Дж. Нуров
(ТНУ, Воронеж, ВГУ)
azharsoft@mail.ru

В работе [1] для автономной системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = F(x, \mu), \tag{1}$$

приведена классическая теорема Хопфа. Здесь $x \in R^n$, $\mu \in R$, а $F(x, \mu)$ — непрерывно — дифференцируемая вектор — функция по совокупности переменных x, μ. Предполагается, что система дифференциальных уравнений (1) допускает аналитическое семейство $x = x(\mu)$ состояний равновесия, т.е. $F(x(\mu), \mu) = 0$. Производя замену без ограничения общности можно предполагать, что $x(\mu) \equiv 0$, то есть $F(0, \mu) \equiv 0$. Предположим, что при некотором $\mu = \mu_0$, (например, при $\mu_0 = 0$), матрица Якоби $F_x(0, \mu_0)$ имеет два чисто мнимых простых собственных значения $\pm i\beta$ и не существуют других собственных значений матрицы $F_x(0, \mu_0)$, целочисленных кратных $i\beta$. Пусть $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ является продолжением по параметру μ собственного значения $i\beta$. Предполагается, что

$$\alpha^{'}(0) = 0. \tag{2}$$

Теорема Хопфа [1]. *При сформулированных условиях существуют непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, зависящие от параметра ε, $\mu(0) = 0, T(0) = 2\pi\beta^{-1}$ и такие, что у уравнения (1) существуют ненулевые периодические решения $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, которые удовлетворяют условию*

$$a(\varepsilon) = \max_t |x(t, \varepsilon)| \to 0,$$

при $\varepsilon \to 0$.

Ниже исследуется бифуркация Хопфа, когда $n = 3$ при менее ограничительных условиях на функцию $F(x, \mu)$. В отличие от условий Хопфа предполагается что функция $F(x, \mu)$ — дифференцируема по переменной x и $F_x(x, \mu)$—непрерывно по совокупности переменных x, μ. При этих условиях дифференцируемость собственного значения $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ по параметру μ не гарантирована. По этому в место условие $\alpha^{'}(\mu_0) \neq 0$ в теореме Хопфа предполагается, что существует последовательность $\delta_k^{+} > 0, \delta_k^{-} > 0$ стремящийся к нулю, такие что $\alpha(\mu_0 - \delta_k^{-})\alpha(\mu_0 + \alpha_k^{+}) < 0, k = 1, 2, \ldots$. Ниже это условие получаем непосредственно через элементы матрицы Якоби $F_x(0, \mu)$.

В работе для выяснения бифуркационных значений параметров применяются топологические методы [2] (вполне непрерывные векторные поля, принцип смена индекса, гомотопия вполне непрерывных векторных полей).

Систему (1) рассмотрим в случай $n = 3$, т.е

$$F(x, \mu) = (F_1(x_1, x_2, x_3, \mu), F_2(x_1, x_2, x_3, \mu), F_3(x_1, x_2, x_3, \mu))^T. \quad (3)$$

Тогда матрицы Якоби $F_x(0, \mu)$ примет вид

$$F_x(x, \mu) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) & a_{13}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) & a_{23}(\mu) \\ a_{31}(\mu) & a_{32}(\mu) & a_{33}(\mu) \end{pmatrix},$$

где $a_{ij}(\mu) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0, 0, 0, \mu), i, j = 1, 2, 3.$

Пусть $x(t, \mu) - T(\mu)$ — ненулевые периодические решение уравнения (1), удовлетворяющие условиям: существуют $\mu_k \to \mu_0, T(\mu_k) \to T_0 > 0$,

$$a(\mu_k) = \max_t |x(t, \mu_k)| \to 0, k \to \infty.$$

Используя формулу Тейлора [3] имеем

$$F(x(t, \mu), \mu) = F_x(x(0, \mu)x(t, \mu) + \omega(x(t, \mu), \mu).$$

$$\frac{|\omega(y,\mu)|}{|y|} \to 0, |y| \to 0.$$

И введя обозначение $y_k(t) = x(t,\mu_k)/a(\mu_k)$ в силу

$$\dot{x}(t,\mu) \equiv F(x(t,\mu),\mu)$$

имеем

$$\dot{y}_k(t) = A(\mu_k)y_k(t) + \omega_k(t),$$

где $\omega_k(t) \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $y_k(t) - T(\mu_k)$- периодические решение, $\max_t |y_k(t)| = 1$, $T(\mu_k) \to T_0$ то система уравнений $\dot{y}(t) = A(\mu_0)y(t)$, имеет ненулевое T_0 — периодическое решение. От сюда следует, что спектр $\sigma(A(\mu_0))$ матрицы $A(\mu_0)$ содержит пара чисто мнимых собственных значений и вещественный параметр: $\sigma(A(\mu_0)) = \{\pm i\beta_0, \gamma\}$, то есть коэффициенты характеристического уравнения матрицы $A(\mu)$

$$\lambda^3 + a_1(\mu)\lambda^2 + a_2(\mu)\lambda + a_3(\mu) = 0, \tag{4}$$

при $\mu = \mu_0$ удовлетворяют условиям $a_1(\mu_0) = -\gamma, a_2(\mu_0) = \beta_0^2, a_3(\mu_0) = -\beta_0^2\gamma$. Здесь $a_1(\mu) = -(a_{11}(\mu) + a_{23}(\mu) + a_{33}(\mu))$, $a_2(\mu) = a_{11}(\mu)a_{22}(\mu) - a_{12}(\mu)a_{21}(\mu) + a_{11}(\mu)a_{33}(\mu) - a_{13}(\mu)a_{31}(\mu) + a_{22}(\mu)a_{33}(\mu) - a_{23}(\mu)a_{32}(\mu)$, $a_3(\mu) = -\det A(\mu)$.

Следовательно, если $\gamma \neq 0$, то имеют место

$$a_3(\mu) = a_1(\mu)a_2(\mu), a_2(\mu) > 0, a_1(\mu) \neq 0, \text{ при } \mu = \mu_0.$$

Обозначим

$$\alpha(\mu) = a_3(\mu) - a_1(\mu)a_2(\mu).$$

Теорема 1. *Пусть $a_1(\mu) \neq 0, a_2(\mu) > 0$, при $\mu = \mu_0$ и существуют такие $\delta_k^+ > 0, \delta_k^- > 0$ стремящийся к нулю, что $\alpha(\mu_0 - \delta_k^-)\alpha(\mu_0 + \delta_k^+) < 0, k = 1, 2, \ldots$, тогда точка $\mu = \mu_0$ является точка бифуркации Хопфа для системы (1).*

Литература

1. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М. : Наука, 1980. — 366 с.

2. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

КОЭРЦИТИВНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И РАЗДЕЛИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О.Х. Каримов

(Душанбе, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана)

karimov_olim@mail.ru

В данном работе речь идет о коэрцитивных неравенствах и разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка. В работах (см.[1]-[4] и имеющиеся там ссылки) исследуются коэрцитивные свойства и разделимость дифференциальных операторов.

В пространстве $L_2(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n), \qquad (1)$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, а $V(x,z)$ -положительная функция.

В дальнейшем предположим, что $V(x,z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta) = V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta) = V(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz.$$

Пусть для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\left\| a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2 \leqslant \sigma_1, \qquad (2)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2 \leqslant \sigma_2, \qquad (3)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}\right\|^2 \leqslant \sigma_3, \qquad (4)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu + \nu\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\omega; \mathbb{C}\right\| \leqslant \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}}\Omega; \mathbb{C}\right\|. \qquad (5)$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2} \right\|^2 \leqslant \sigma_4, \tag{6}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} (\frac{\partial Q}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial Q}{\partial \eta}) \omega; \mathbb{C} \right\| \leqslant \delta_2 \left\| F\Omega; \mathbb{C} \right\|. \tag{7}$$

Тогда справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2) –(7) и пусть числа* σ_j, $(j = \overline{1,4})$, δ_1, δ_2 *такие, что*

$$\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{4}{3n^2}, \ \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} < 1 - \delta_1, \ \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4)} < 1 - \delta_2$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_2(R^n)$*, и для всех функций* $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x) \in L_2(R^n)$*, выпольняется следующее коэрцитивное неравенство:*

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; L_2(R^n) \right\| + \|V(x,u)u; L_2(R^n)\| +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n) \right\| \leqslant M \|f(x); L_2(R^n)\|, \tag{1}$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

Литература

1. Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators / W.N. Everitt, M. Gierz // Proc. London Math.Soc. — 1971. — Vol. 23, P. 301–324.

2. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения / К.Х. Бойматов // Труды МИАН СССР. — 1984. — Т. 170, С. 37–76.

3. Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the general second elliptic differential operator potential in the weighted weighted Hilbert spaces / A.S. Mohamed, H.A.Atia // Applied Mathematics and Computation. — 2005. — № 162, P. 155–163.

4. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа?Бельтрами в гильбертовом пространстве / О.Х. Каримов // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22. — № 1(77), С. 163–176.

ОЦЕНКИ КАСАТЕЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО ПОВЕДЕНИЯ ДЛЯ КЛАССОВ ТИПА ХАРДИ

И.Н. Катковская, В.Г. Кротов (Минск, БГУ)
krotov@bsu.by

Пусть X — хаусдорфово пространство, топология которого порождена квазиметрикой d, т.е. задана функция $d : X \times X \to [0, \infty)$ удовлетворяющая всем аксиомам метрики, только неравенство треугольника заменяется более слабым условием: существует такое число $K_d \geqslant 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x, y) \leqslant K_d[d(x, z) + d(z, y)].$$

Пусть на X задана также σ-конечная борелевская мера μ, причем мера каждого шара $B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}$ конечна и положительна.

Произведение $\mathbf{X} := X \times I$, где $I = (0, t_0)$, $0 < t_0 \leqslant +\infty$ снабдим стандартной мерой-произведением $\mu \otimes m_1$ (m_1 — одномерная мера Лебега на I).

Для функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ и $x \in X$ определим области

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : d(x, y) < t\},\ x \in X,$$

подхода к точкам $x \in X$ «границы» $\mathbf{X}$ и соответствующую максимальную функцию

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}.$$

Введем обозначение $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ для класса всех измеримых функций (эквивалентные функции не отождествляются) $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$, для которых максимальная функция $\mathcal{N}u$ конечна μ-почти всюду.

Далее для $p > 0$ введем классы $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$, состоящие из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p(\mathbf{X})} := \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}.$$

Далее использованы следующие обозначения:

$$\mathcal{M}^q_\alpha u(x) := \sup\left\{\frac{1}{\nu_\alpha(\mathcal{D}(x,t,h))}\int\limits_{\mathcal{D}(x,t,h)} |u|^q d\nu_\alpha : 0 < t, h < t_0\right\}^{1/q},$$

$$\nu_\alpha(A) := \alpha \int\limits_0^{t_0} t^{\alpha-1} \int\limits_X \chi_A(y,t)\, d\mu(y)\, dt, \quad A \subset \mathbf{X},\ \alpha > 0,$$

$$\mathcal{D}(x,t,h) := \{(y,s) \in \mathbf{X} : d(x,y) < h,\ 0 < s < t\}.$$

Запись $A \lesssim B$ означает, что $A \leqslant CB$, где C — некоторая постоянная.

Теорема 1. *Пусть при некотором* $n > 0$ *выполнено условие*

$$r^n \lesssim \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ r \in I, \tag{1}$$

($\lesssim$ не зависит от x и r), $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. *Тогда для любой функции* $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ *для всех* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство ($\lesssim$ не зависит от u и λ).*

$$\mu(\{\mathcal{M}_\alpha^q u > \lambda\}) \lesssim \left(\frac{\|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}}{\lambda}\right)^q.$$

Пусть $\mathcal{H}_0^p(\mathbf{X})$ — замыкание по квазинорме $\|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}$ класса непрерывных в $X \times [0, t_0)$ функций с компактным носителем. Для каждой функции $u \in \mathcal{H}_0^p(\mathbf{X})$ для μ-почти всех $x \in X$ существует $D(x)$-предел, который мы обозначим $u^*(x)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любой функции* $u \in \mathcal{H}_0^p(\mathbf{X})$ *для μ-почти всех* $x \in X$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{t,h\to 0} \frac{1}{\nu_\alpha(\mathcal{D}(x,t,h))} \int\limits_{\mathcal{D}(x,t,h)} |u - u^*(x)|^q d\nu_\alpha = 0.$$

При конкретном выборе тройки (X, d, μ) и I классы $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ и $\mathcal{H}_0^p(\mathbf{X})$ являются расширениями соответствующих пространств Харди. Примерами могут служить классы Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$, голоморфных функций в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$ [1] или классы Харди $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$, гармонических функций или температур в полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1}$ [2].

Литература

1. Рудин У. Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$ / У. Рудин. — М : Мир, 1984. — 455 p.

2. Fefferman C. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem / C. Fefferman, E. M. Stein // Acta Math. — 1972. — V. 129, № 3–4. — P. 137–193.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С БЫСТРО РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А.В. Качкина (Москва, МГУ)
alisa-kachkina@mail.ru

Оператором Штурма-Лиувилля $\mathbb{L}_q$ называется оператор, порожденный дифференциальным выражением $\mathbb{L}_q y = -y'' + q(x)y$, где потенциал q – непрерывная действительнозначная функция, $D(\mathbb{L}_q) = \{y \in L_2[0,+\infty) : y, y'$ абсолютно непрерывны на любом $[a,b] \subset [0,+\infty)$ и $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\}$ – область определения оператора $\mathbb{L}_q$. Такой оператор хорошо изучен и является самосопряженным для действительнозначной q.

В данной работе будут рассматриваться только потенциалы, быстро растущие на бесконечности, то есть с условием $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$. При таком предположении спектр оператора $\mathbb{L}_q$ дискретен (см. [3]). Занумеруем собственные числа оператора в порядке неубывания: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$.

Введем классы функций $\mathfrak{Q} = \{q \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty) : q''(x) \geqslant 0,\ x \geqslant x_0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty\}$, $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu} = \{q \in \mathfrak{Q} : \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln q(x)}{\ln^\beta x} = \mu\}$. Тогда при $\beta = 1$ рост потенциалов будет полиномиальным и для $q(x) = x^k,\ k > 0$, в работе [1] Э. Ч. Титчмарш получил асимптотику

$$\lambda_n \sim \left\{ \frac{\pi k \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{k})} n \right\}^{\frac{2k}{k+2}}.$$

Обозначим через p обратную функцию к q, то есть $p(q(x)) = x$. В работе [2] были найдены асимптотики для $\beta \geqslant 2$. В работе [4] были найдены асимптотики для $\beta \in (3/2, 2]$ и для $\beta \in (4/3, 3/2]$. В работе [5] была найдена асимптотика для $\beta \in (5/4, 4/3]$. Также ранее в работе [6] была получена асимптотика для $\beta \in (6/5, 5/4]$.

Теорема. Пусть $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu},\ c_n = (\pi n)^2,\ \beta \in (7/6, 6/5]$.
Тогда для спектра оператора $\mathbb{L}_q$ справедливо

$$\lambda_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\mu \Bigg\{ \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\mu}{\beta} \ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\mu)^2 \frac{3-\beta}{2\beta^2} \ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n -$$

$$-(2\mu)^3 \frac{8 - 6\beta + \beta^2}{3\beta^3} \ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + (2\mu)^4 \frac{125 - 150\beta + 55\beta^2 - 6\beta^3}{24\beta^4} \ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n -$$

$$-(2\mu)^5 \frac{108-180\beta+105\beta^2-25\beta^3+2\beta^4}{10\beta^5} \ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n \Bigg\} + o(1)\Bigg), \; n \to +\infty.$$

Следствие. Полученная теорема обобщает известные ранее результаты из работ [2], [4], [5], [6] для β из других промежутков.

В заключение выражаю благодарность А.И.Козко за полезные советы и замечания.

Литература

1. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Э.Ч. Титчмарш. — т.1, М. , ИЛ, 1960. — 158–169 с.

2. Козко А.И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом /А.И. Козко // Дифференц. уравнения. — 41:5. —2005. — 611–622; Differ. Equ. — 41:5. — 2005. — 636–648.

3. Молчанов А.М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка /А.М. Молчанов // Труды Моск. матем. об-ва. — т.2. — 1953. —С. 169–200.

4. Киселева А.Ю. Асимптотика спектра задачи Штурма-Лиувилля с быстро растущим потенциалом / А.Ю. Киселева // Дипломная работа. — 2006.

5. Насртдинов И.Г. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y(0)cos(\alpha) + y'(0)sin(\alpha) = 0$ / И.Г. Насртдинов // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. — 31 мая 2018 г.

6. Качкина А.В. Асимптотика спектра оператора Штурма-Лиувилля с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом / А.В. Качкина // Библиотека Чебышевского сборника: материалы XXI Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы, «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирорвание: современные проблемы, приложения и проблемы истории». —17-21 мая 2022. — г. Тула. — тезисы. — С. 271–273.

ПОВЫШЕНИЕ ПРИКЛАДНОГО ЗНАЧЕНИЯ КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

И.С. Козловская (Минск, БГУ)
kozlovskaja@bsu.by

Исторически математические модели, в основе которых лежат дифференциальные уравнения в частных производных, были разработаны для решения задач, описывающих физические процессы прежде всего в гидродинамике, аэромеханике и электродинамике. Поэтому в разнообразных приложениях, где находят широкое применение методы уравнений в частных производных, они получили название методы математической физики. Сейчас такие уравнения моделируют процессы различной природы: физические, химические, биологические, экологические, экономические и др. Эти методы применяются и для решения различных классов инженерных задач. Данный раздел математики отличается чрезвычайной информационной емкостью, что обусловлено тем, что в его основе лежат фундаментальные законы сохранения, связанные с симметрией пространства и времени. Именно благодаря этому, такие на первый взгляд принципиально различные процессы, как распространение тепла в сплошной среде, диффузия химических компонент, проникновение магнитного поля в хорошо проводящий материал и распространение волн эпидемий, описываются одинаковыми по форме уравнениями. В то же время при решении уравнений математической физики используются методы, разработанные в самых различных математических дисциплинах, таких, как математический анализ, теория функций комплексного переменного, вариационное исчисление, численные методы и т.д. Дифференциальные уравнения в частных производных образуют раздел математики, который теснейшим образом связывает общую математическую теорию с приложениями — например, к математической физике, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, механике, астрономии. Сегодня дифференциальные уравнения находят свое применение и в таких областях человеческой деятельности, которые, на первый взгляд, весьма далеки от математики — например, в медицине, криминалистике, социологии, генетике.

Поэтому при чтении лекций по курсу «Дифференциальные уравнения в частных производных» в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области. Основная задача состоит в том, чтобы научить студента умению применять на практике методы решения задач, возникающих в прикладных вопросах, связанных с математическими модулями, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Задача, решаемая с помощью дифференциального уравнения, может быть кратко сформулирована как задача нахождения поведения объекта исследования в прошлом или предсказания его поведения в будущем, зная его положение в настоящий момент.

С другой стороны, большое внимание уделяется и решению такой проблемы, как помощь современных средств компьютерной математики в более глубоком понимании студентами изучаемых ими классических математических тем. Например, курс «Дифференциальные уравнения в частных производных», имеющий дело с постановкой, исследованием и решением краевых задач для уравнений в частных производных эффективно дополнен лабораторными занятиями с использованием Wolfram Mathematica, что позволяет студентам ознакомиться с графическими возможностями пакета Mathematica, позволяющими визуализировать векторные и скалярные поля, эффективно проиллюстрировать решение одномерных уравнений и систем уравнений в частных производных. Имеющийся в пакете Wolfram Mathematica специализированный инструментарий позволяет решать двумерные задачи математической физики в режиме графического интерфейса, включает в себя готовые средства решения задач диффузии, теплопроводности, электростатики, строительной механики и других областей математической физики.

Пакет Wolfram Mathematica, в частности, используется для решения уравнений в частных производных методом характеристик и анимации полученного решения с помощью функций Plot и Manipulate при различных значениях параметров; для решения задач Коши и Гурса для уравнений с частными производными второго порядка и визуализации решения с помощью функции Plot3D; для визуализации процесса распространения тепла в стержне в зависимости от различных внешних условий; для построения эквипотенциальных поверхностей электромагнитных полей.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев, А.В. Гаврилова
(Йошкар-Ола, МарГУ)
vfri@mail.ru

Рассмотрим обратную задачу волнового зондирования. Акустическая неоднородность, локализованная в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, зондируется волновыми полями, порожденными точечными источниками, расположенными в точках множества $Y \subset \mathbb{R}^3$, где $Y \cap D = \varnothing$. Акустическое поле $u(x,\,t) = u^{(y)}(x,\,t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником, находящимся в точке $y \in Y$, определяется решением задачи Коши

$$\frac{1}{c^2(x)}\, u^{(y)}_{tt}(x,\,t) = \Delta u^{(y)}(x,\,t) - \delta(x-y)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant 0;$$

$$u^{(y)}(x,\,0) = 0, \quad u^{(y)}_t(x,\,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Величина $c(x) > 0$ есть скорость распространения сигнала в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Эта функция неизвестна при $x \in D$ и $c(x) \equiv c_0$ при $x \in \mathbb{R}^3 \backslash D$, постоянная c_0 задана.

Для получения информации о $c(x)$, $x \in D$, рассеянное поле $u = u^{(y)}(x,\,t)$, $y \in Y$ измеряется при $t > 0$ в точках $x = z \in Z$, где $Z \subset \mathbb{R}^3$ – множество детекторов, причем $Z \cap D = \varnothing$. Множества источников Y и детекторов Z могут пересекаться или совпадать. Заметим, кроме того, что нахождение $c(x)$ равносильно нахождению коэффициента рефракции $\xi(x) = c^{-2}(x) - c_0^{-2}, \quad x \in D$.

Рассматриваемая обратная задача с помощью преобразования Лапласа сводится [1] к линейному интегральному уравнению вида

$$\int\limits_D \frac{\xi(x)\,dx}{|x-y|\,|x-z|} = f(y,\,z), \quad (y,\,z) \in Y \times Z. \tag{1}$$

в рамках общего подхода, предложенного М.М. Лаврентьевым [2]. В [3] доказана теорема единственности решения уравнения (1), основанная на свойстве плотности в $L_2(D)$ системы функций вида

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-71-10070).

$\dfrac{u(x)}{|x-y|}$, где $y \in Y$, а $u(x)$ гармонична в D. Также в [3] приведены результаты численных экспериментов по решению уравнения (1) с распределенными вычислениями на кластере.

В докладе рассматривается вопрос единственности решения обобщенного уравнения Лаврентьева

$$\int\limits_D \frac{\xi(x)\,dx}{|x-y|^{n-2}\,|x-z|^{n-2}} = f(y,\,z), \quad (y,\,z) \in Y \times Z, \tag{2}$$

где $D \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ и $Z \subset \mathbb{R}^n$, выполняются условия $Y \cap D = \varnothing$ и $Z \cap D = \varnothing$. Пусть L есть произвольная прямая в $\mathbb{R}^n$, Y – открытый интервал, принадлежащий неограниченной компоненте $L \backslash \overline{D}$. Обозначим через $\mathcal{H}(D) = \{u \in C^2(D) : \Delta u(x) = 0, x \in D\}$ множество всех регулярных гармонических функций в D.

Теорема. *Линейные комбинации функций семейства*

$$\left\{ \frac{u(x)}{|x-y|^{n-2}} : y \in Y, u \in \mathcal{H}(D) \right\}$$

плотны в пространстве $L_2(D)$.

Эта теорема обобщает утверждение из [3] и является основой для доказательства единственности решения уравнения (2). Для другого множества Y утверждение этого вида ранее доказано в [4].

Литература

1. Бакушинский А.Б. Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения / А.Б. Бакушинский, А.И. Козлов, М.Ю. Кокурин // Ж. вычисл. матем. матем. физ. — 2003. — Т. 47, № 3. — С. 1201–1209.

2. Лаврентьев М.М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений / М.М. Лаврентьев// Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 160, № 1. — С. 32–35.

3. Кокурин М.Ю. Условия единственности и численная аппроксимация решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева / М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 435–451.

4. Кокурин М.Ю. О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования / М.Ю. Кокурин // Матем. заметки. — 2018. —Т. 104, выпуск 5. — С. 708–716.

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СВИФТА-ХОЕНБЕРГА С ДВОЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)
kolinna@inbox.ru

Рассмотрено стационарное СХ-уравнение (уравнение Свифта-Хоенберга) при двойном краевом условии Дирихле. Изложена методика приближенного вычисления бифурцирующих решений при малых и конечных значениях закритического приращения параметра. Вычисления проведены на основе модифицированной процедуры Ляпунова-Шмидта, использующей ритцевскую аппроксимацию функционала энергии по заранее заданному набору собственных функций (мод) главной линейной части уравнения с последующей редукцией Пуанкаре к функции двух ключевых переменных. В случае локального анализа вычислена главная часть ключевой функции и вычислены прближенные аналитическаие представления ветвей бифурцирующих решений.

Один из базовых принципов исследования бифуркаций решений начально краевых задач для нелинейных параболических и более общих уравнений основан на том, что уравнение вида

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v) \ \ (0 < t \leqslant t_0), \quad v(0) = v_0\,,$$

где $f(t, x)$ при каждом $t \in [0, t_0]$ — нелинейный оператор, при условии, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, сводится к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s) f(s, v(s)) ds$$

(метод Дюамеля).

В настоящей работе рассмотрен прямой и более простой подход, основанный на том, что рассмотренные в работе бесконечномерные динамические системы являются вариационными. Это обстоятельство дает возможность использования прямого подхода к построению дискретных аналогов траекторий спуска динамической системы в точки минимума функционала энергии. Такой подход требует предварительного изучения бифуркации стационарных точек многопараметрического функционала энергии в условиях многомодового вырождения (в порождающей точке минимума). В качестве основного модельного уравнения, используемого в статье, рассмотрено уравнение Свифта-Хоенберга

$$\dot{w} + \Delta^2(w) + \lambda_2\,\Delta(w) + \lambda_1\,w + w^3 = 0\,,$$

$$w = w(x,t)\,,\quad x = (x_1, x_2) \in \Omega := [0,1] \times [0,1]\,.$$

О МЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

М.А. Комаров (Владимир, ВлГУ)
kami9@yandex.ru

Наипростейшими дробями порядка n принято называть рациональные функции вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad \rho_0(z) \equiv 0,$$

т.е. логарифмические производные алгебраических многочленов.

Наипростейшие дроби широко известны и как самостоятельный аппарат приближения, и как вспомогательный инструмент, естественным образом возникающий при решении различных задач для многочленов и рациональных функций общего вида.

В докладе при тех или иных ограничениях на полюсы z_k дробей ρ_n обсуждаются оценки меры множеств вида

$$\{x \in E:\ |\rho_n(x)| \geqslant \delta\} \quad (\delta > 0),$$

где $E = [-1, 1]$ либо $E = \mathbb{R}$, и связанные с этими оценками задачи аппроксимации и задачи об оценках норм производных алгебраических многочленов.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Н. Конечная (Архангельск, САФУ)
n.konechnaya@narfu.ru

В первой части доклада речь пойдет о построении матриц типа Шина-Зеттла (см.[1, раздел I, с.8]), таких, что квазидифференциальное выражение, порожденное ими, совпадает с дифференциальным выражением $2n$-го порядка ($n \geqslant 1$) вида

$$l(y) := (-1)^n (p(x) y^{(n)})^{(n)} + \sigma^{(k)}(x) y,$$

где $k = 0, 1, ...n$. Здесь комплекснозначная функция p такая, что $p, \frac{1}{p} \in L^1_{loc}[1, \infty)$, а комплекснозначная функция σ такая, что $\sigma \in L^1_{loc}[1, \infty)$, если $k < n$, и $\frac{\sigma^2}{p} \in L^1_{loc}[1, \infty)$, если $k = n$, причем производная k–го порядка от σ понимается в смысле теории распределений.

Во второй части доклада будут обсуждаться несколько теорем о главном члене асимптотики решений дифференциального уравнения вида

$$l(y) = \lambda y$$

при $x \to \infty$, где λ — фиксированный комплексный параметр. Сформулируем одну из них.

Теорема 1. *Пусть функция $p = (1 + r)^{-1}$, где $r \in L^1[1, \infty)$. Пусть далее $\sigma \in L^1[1, \infty)$,* если $k < n$, и $\sigma(1+|\sigma|)\,(1+|r|) \in L^1[1, \infty)$, если $k = n$. *Тогда уравнение $l(y) = \lambda y$ при $\lambda \neq 0$ имеет фундаментальную систему решений y_j, $j = 1, 2, ..., 2n$, вида*

$$y_j(x) = e^{z_j x}(1 + o(1)),$$

где z_j — различные корни степени $2n$ из $(-1)^n \lambda$, а символом $o(1)$ обозначена бесконечно малая функция при $x \to \infty$.

Доклад основан на совместных работах [2] – [4].

Литература

1. Everitt W.N., Marcus L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators / W.N. Everitt, L. Marcus. — AMS : Mathematical Surveys and Monographs, vol. 61, 1999. — 528 c.

2. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами / Н.Н. Конечная, К.А. Мирзоев, А.А. Шкаликов // Математические заметки. — 2018. — Т. 104, № 2. — С. 240–251.

3. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами / Н.Н. Конечная, К.А. Мирзоев, А.А. Шкаликов // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, № 2. — С. 217–235.

4. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А. Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка / Н.Н. Конечная, К.А. Мирзоев // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. — 2020. — № 1. — С. 22–28.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Ю.В. Кораблина (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
anaconda210150@mail.ru

Рассматривается задача об описании топологических свойств композиционных операторов, действующих в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций. Отправные результаты для настоящего исследования содержатся в работе Н. Зорбоска [1], где для случая банаховых пространств были установлены критерии ограниченности и компактности оператора весовой композиции, а также разработаны приложения полученных результатов к конкретным пространствам.

Основной целью работы, которой посвящен доклад, является формулировка критериев ограниченности и компактности композиционных операторов в терминах дельта-функций и их конкретных реализаций в весовых пространствах целых функций.

Пусть G — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G, с топологией равномерной сходимости на компактах из G, v — вес на G, т.е., непрерывная положительная на G функция. Каждый вес v на G задает соответствующее ему банахово пространство

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_{H_v} = \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (проект МК-160.2022.1.1).

и его замкнутое подпространство

$$H_{v,0}(G) := \Big\{ f \in H(G) : \lim_{|z| \to \delta G} \frac{|f(z)|}{v(z)} = 0 \Big\}.$$

Всюду далее X — квазибанахово пространство с квазинормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$. X^* — сопряженное с X пространство линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\cdot\|^*$, а δ_z — дельта-функция Дирака для фиксированной точки $z \in G$, то есть, $\delta_z : f \mapsto f(z)$, $f \in H(G)$.

В работе сформулирован результат, который является обобщением абстрактного критерия [1, теорема 2.1] на случай произвольной области G и любого, не обязательно радиального, веса v на G и квазибанаховых пространств вместо банаховых.

Теорема 1. *Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T : X \mapsto H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$\text{а) } \delta_z(T) \in X^* \quad \text{при всех} \quad z \in G; \qquad \text{б) } \sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z(T)\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Кроме того, установлен критерий компактности произвольного линейного оператора, который также является обобщением абстрактного критерия [1, теорема 3.2].

Теорема 2. *Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T : X \mapsto H_{v,0}(G)$ ограничен. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $T : X \mapsto H_{v,0}(G)$ компактен.

(ii) $T : X \mapsto H_v(G)$ компактен и $T(X) \subseteq H_{v,0}(G)$.

(iii) $\delta_z \circ T \in X^*$ при любом $z \in G$ и $\displaystyle\lim_{|z| \to \delta G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} = 0.$

Приведенные выше результаты позволили установить критерии ограниченности и компактности операторов весовой композиции, умножения, а также произведения операторов умножения и дифференцирования на весовых квазибанаховых пространствах общего и конкретного вида в терминах норм дельта-функций.

Литература

1. Zorboska N. Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces. // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2017. — V. 87, № 4.— P. 581–600.

2. Абанин А.В., Кораблина Ю.В. Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций. // Владикавказский математический журнал. — 2020. — Т. 22. — № 3.— С. 5–17.

3. Абанин А.В., Кораблина Ю.В. Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2022. — № 4-1. — С. 83–89.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА И ИХ ОСОБЕННОСТИ

А.В. Коптев
(Санкт-Петербург, ГУМРФ)
Alex.Koptev@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены точные решения 3D уравнений Навье — Стокса и исследованы их особенности, связанные с поведением при больших значениях числа Рейнольдса и при больших значениях времени.

1. Уравнения Навье — Стокса. Представляют систему нелинейных уравнений в частных производных. Описывают движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости. Имеют большое практическое значение и интересны с чисто математической точки зрения. Для 3D движения несжимаемой вязкой жидкости в безразмерных переменных уравнения Навье — Стокса вместе с уравнением неразрывности имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x} + \frac{1}{Re}\cdot\Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y} + \frac{1}{Re}\cdot\Delta v,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial z} + \frac{1}{Re}\cdot\Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где основными неизвестными являются компоненты вектора скорости u, v, w и давление p; Φ – заданная функция потенциала внешних сил; Re – число Рейнольдса; Δ – оператор Лапласа по пространственным координатам.

Изучение уравнений Навье – Стокса представляет одно из направлений современной математики [1-2]. На сегодняшний день многие аспекты проработаны недостаточно и требуют дополнительного исследования. Нет решения проблемы существования гладкого решения при достаточно гладких граничных и начальных условиях. Не ясна асимптотика при больших временах и при больших значениях числа Re. Не ясен механизм ламинарно-турбулентного перехода. Важным звеном также является построение точных решений при сохранении всех нелинейных членов и исследование их особенностей.

2. Точные решения.

Предлагаются к рассмотрению различные точные решения 3D уравнений Навье — Стокса, полученные с помощью метода, описание которого дано в работах [3-6]. Все рассмотренные решения соответствуют движению жидкости в большом резервуаре, когда влиянием боковых ограничивающих поверхностей можно принебречь. При этом рассматриваются различные варианты граничных условий. Один из вариантов соответствует условию прилипания на донной поверхности. Другой случаю асимптотического задания скорости на глубине. Для рассмотренных решений представлены явные выражения для основных неизвестных, как функции координат и времени и числом Re в качестве параметра. При этом имеют место следующие качественные особенности. Для одного из решений возникает неограниченное возрастание скоростей и давления с течением времени. Для другого решения скорости с течением времени приближаются к нулю. И для третьего решения возможны различные варианты в зависимости от выбора двух функций $A_1(t)$ и $B_1(t)$, присутствующих в выражениях для основных неизвестных.

Литература

1. Lodizhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid / O.A. Lodizhenskaya —New York: Gordon and Breach, 1969.

2. Charls L. Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes Equation / C.L. Fefferman –Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. – Priceton, 2000. — P. 1–5.

3. Koptev A.V. Exact solutions of 3D Navier — Stokes equations /A.V. Koptev // Jour. of Siberian Federal Univ., Math. and Phys. —2020. 13(3). P. 306–313.

4. Koptev A.V. Deep Water Movement /A.V. Koptev // Navier — Stokes Equations and Their Applications. —New York :Nova Science Publishers,2021. —P. 83–103.

5. Koptev A.V. Constructive Method to Solving 3D Navier — Stokes equations /A.V. Koptev // 8-th European Congress of Mathematics. Book of Abstracts. — Portorozh : Univ. of Primorska Press, 2021, — P. 638–639.

6. Koptev A.V. Method for Solving the Navier – Stokes and Euler Equations of Motion for Incompressible Media /A.V. Koptev // Jour. of Mathematical Sciences. — New York : Springer, 2020. 250(1). —P. 254–382.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЧИСЛА ЭЙЛЕРА

А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков (Москва, НИЯУ МИФИ; МГУ)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

В работе [1] авторы начали систематическое исследование задачи описания характера аппроксимации числа e элементами «канонической» последовательности $(1+1/m)^m$, $m \in \mathbb{N}$. Для коэффициентов асимптотического разложения

$$1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\frac{1}{2m}-\frac{11}{24m^2}+\frac{7}{16m^3}-\ \ldots\ =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,a_n}{m^n} \quad (1)$$

было найдено несколько способов вычисления, из которых выделим сейчас интегральное представление

$$a_n=\frac{1}{e}\left(1+\int\limits_0^1\varphi(\tau)\,\tau^n\,d\tau\right),\quad n\in\mathbb{N}, \quad (2)$$

с положительной и непрерывной на $[0,1]$ функцией

$$\varphi(\tau)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^{\tau}},\quad \tau\in(0,1),\qquad \varphi(0)=\varphi(1)=1. \quad (3)$$

Как видно из (2), последовательность a_n стремится монотонно сверху к своему пределу $1/e$. Дополнительный анализ показывает, что

$$a_n=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{\ln n}{n^2}-\frac{\gamma}{n^2}\right)+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right),\quad n\to\infty,$$

где $\gamma=0.577\ \ldots$ — константа Эйлера–Маскерони.

Отметим, что ряд (1) расходится при $m = 1$ и сходится при остальных значениях параметра $m \geqslant 2$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ этот ряд является обвертывающим, т. е.

$$\sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n-1}\, a_n}{m^n} \;<\; 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \;<\; \sum_{n=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{n-1}\, a_n}{m^n}, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Например, взяв $p = 1$, получим двустороннюю оценку

$$\frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} < 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} + \frac{7}{16m^3}, \quad m \in \mathbb{N},$$

дающую для числа e улучшенную рациональную аппроксимацию

$$\frac{24m^2\,(1+1/m)^m}{24m^2 - 12m + 11} \;<\; e \;<\; \frac{48m^3\,(1+1/m)^m}{48m^3 - 24m^2 + 22m - 21}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Действительно, подставив сюда тестовое значение $m = 100$, найдем для e миноранту $2.7182806\ldots$ (пять верных цифр после запятой) и мажоранту $2.718281839\ldots$ (семь верных цифр после запятой), при том, что $1.01^{100} = 2.7048\ldots$ (только одна верная цифра).

Полезным оказывается и другой формат оценок для величины уклонения $1 - e^{-1}(1 + 1/m)^m$. Так, учитывая убывание функции

$$\Phi(x) \equiv \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x} = \frac{1}{1+x} + \int\limits_0^1 \frac{\tau\,\varphi(\tau)}{1+\tau x}\,d\tau, \qquad x > 0,$$

с прежним «ядром» (3) в интеграле, выводим простейшую оценку

$$\frac{e-2}{e\,m} \;\leqslant\; 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \;<\; \frac{1}{2m},$$

в которой константы $(e-2)/e$ и $1/2$ неулучшаемы на множестве всех $m \in \mathbb{N}$. Можно пойти дальше и выяснить, что убывание на луче $x > 0$ функции

$$\Psi(x) \equiv \frac{1}{e - (1+x)^{1/x}} - \frac{2}{e\,x}$$

даст усиленный вариант

$$\frac{1}{2m + \frac{11}{6}} < 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leqslant \frac{1}{2m + \frac{4-e}{e-2}}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

где выбор обеих констант $11/6 = 1.8(3)$ и $(4-e)/(e-2) = 1.784\ldots$ снова является оптимальным. Такой результат улучшает хорошо известное двойное неравенство

$$\frac{1}{2m+2} < 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m+1}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

из классического задачника [2, отдел первый, гл. 4, § 2].

Помимо обозначенных вопросов в докладе предполагается обсудить поведение конечных разностей последовательности (2), а также возможность распространения части результатов в комплексную область.

Литература

1. Костин А.Б. О тейлоровских коэффициентах аналитической функции, связанной с эйлеровым числом / А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков // Уфимск. мат. журн. — 2022. — Т. 14, № 3. — С. 74–89.

2. Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций / Г. Полиа, Г. Сеге. — М. : Наука, 1978. — 391 с.

ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ МАКСВЕЛЛА–ФЕЙЕРА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АНТЕНН

Д.В. Костин, А.В. Костин (Воронеж, Акционерное общество «Концерн «Созвездие», Воронежский государственный университет)

al.v.kostin@sozvezdie.su

Решается задача синтеза антенны с использованием вариационного подхода. Исследуются диаграммы направленности, описываемые тригонометрическими полиномами, которые являются решением вариационной задачи, возникшей при построении оптимальных конструкций устройств, связанных с эффективным использованием направленного импульса.

В математической теории антенн, разрабатываемой в (см. [1], [2], [5]), исходным объектом исследования является интегральное уравнение

$$\rho(\theta) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-ik\xi\cos\theta} \cdot e^{i\psi(\xi)}\varphi(\xi)d\xi, \quad 0 < \theta < \pi. \tag{1}$$

Уравнение (1) означает, что антенна расположена на сегменте $[-\sigma, \sigma]$, называемой апертурой антенны, $\varphi(\xi)$— апертурное распределение тока, $\psi(\xi)$— фазовое распределение.

Функция $\rho(\theta)$ называется диаграммой направленности (ДН) антенны. Эта функция определяет распределение энергии радиоизлучения в зависимости от угла θ.

Задачу о расчёте антенны с заданной ДН называют синтезом антенн. В этом случае уравнение (1) является интегральным уравнением 1–го рода и относится к классу некорректных задач, в том смысле, что не для всякой функции $\rho(\theta)$ это уравнение имеет решение.

Из существующих методов такой аппроксимации наиболее применяемыми являются представления ДН алгебраическими или тригонометрическими рядами. Идейно близкими к этим методам являются методы разложения по базисным и другим функциям, например функциям Бесселя или атомарным функциям [1].

Существует подход к задачам синтеза [4], принципиально отличный от указанных выше, который основан на методах оптимизации. Предлагается оптимизировать по некоторым критериям те или иные характеристики антенны: уровень боковых лепестков, ширина диаграммы, коэффициент направленного действия и т.д.

Именно решению задачи синтеза антенны с использованием вариационного подхода посвящена настоящая работа. Здесь исследуются диаграммы направленности, описываемые тригонометрическими полиномами, которые являются решением вариационной задачи, возникшей при построении оптимальных конструкций вариационных устройств, связанных с эффективным использование направленного импульса.

Рассматриваемые в работе диаграммы направленности Максвелла–Фейера, являются следствием уникального результата, полученного в результате решения вариационной задачи при исследовании процессов, возникающих в случае построения оптимальных конструкций [4]. Многочлен Максвелла-Фейера обладает не только всеми необходимыми свойствами, но и важными интересными качествами, например, четность и конечность тригонометрических сумм, позволяющих корректно решить задачу синтеза с нулевой фазой распределения тока. Очевидно, что применение таких диаграмм направленности позволяет исследовать соответствующие структуры антенн.

Литература

1. Зелкин Е.Г. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности/ Е.Г. Зелкин. — М.–Л. : Госэнергоиздат, 1963. — 272 с.

2. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторые их приложения / В.Ф. Кравченко.— М. : Радиотехника, 2003. — 510 с.

3. Костин В.А. Многочлены Максвелла–Фейера и оптимизация полигармонических импульсов//В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов ДАН, 2012. Т.445. №3. — С. 271–273.

4. Костин В. А. Диаграмма направленности Фейера для линейной антенны и решение задачи амплитудно-фазового синтеза / В. А. Костин, Д. В. Костин, А. В. Костин // Челябинский физико–математический журнал. — 2020. Т. 5. № 2. — С. 211–217.

5. Суетин П.К. Начала математической теории антенн / П.К. Суетин, М. : Изд. Инсвязь, 2008, — 228 с.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ ДЛЯ РЯДОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ[1]

О.А. Кривошеева (Уфа, УУНиТ)

kriolesya2006@yandex.ru

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей $n_k \in \mathbb{N}$. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}, \quad \sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln j}{|\xi_j|},$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз.

В работе изучается сходимость рядов экспоненциальных мономов, т.е. рядов вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}. \qquad (1)$$

При одном естественном ограничении на степени мономов приводится полный аналог теоремы Абеля для таких рядов.

Символом $S(z,r)$ обозначим окружность с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиуса $r > 0$. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ и $\overline{M}$ — замыкание множества M.

[1] Работа выполнена при поддержке конкурса «Молодая математика России».

Положим $H(\varphi, M) = \sup\limits_{z\in M} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi})$, $\varphi \in \mathbb{R}$, — опорная функция M и $J(M) = \{e^{i\varphi} \in S(0,1) : h(\varphi, M) = +\infty\}$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $D \subset\in \mathbb{C}$ — выпуклая область. Через $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ обозначим последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее, т.е.

$$K_p \subset \mathrm{int}K_{p+1}, \quad p \geqslant 1, \quad D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p.$$

Здесь символ int означает внутренность множества.

Положим

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_{k,n}\} : ||d||_p = \sup_{k,n} |d_{k,n}|p^n \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) < \infty\},$$

где $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$, и

$$Q(D, \Lambda) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Q_p(\Lambda).$$

Пусть $\overline{\lambda}$ — число комплексно сопряженное с λ. Символом $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество пределов всех сходящихся последовательностей вида $\left\{\overline{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\right\}_{j=1}^{\infty}$. Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество $S(0,1)$. Положим $m(\Lambda, \mu) = \sup \varlimsup\limits_{j\to\infty} \frac{n_{k_j}}{\lambda_{k_j}}$, где супремум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k_j}\}$ таким, что $\overline{\lambda_{k_j}}/|\lambda_{k_j}| \to \mu$. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество $S(0,1)$. Θ — выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi, E), e^{i\varphi} \in \Theta\}.$$

Следующий результат является аналогом теоремы Абеля для ряда (1).

Теорема. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $E \subset \mathbb{C}$. Предположим, что*

1) общий член ряда (1) ограничен на множестве E, т.е.

$$|d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}| \leqslant A(z) < +\infty, \quad k \geqslant 1, n = \overline{0, n_k - 1}, \quad z \in E;$$

2) $\sigma(\Lambda) = 0$, $m(\Lambda) < \infty$ и $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(E)}$;

3) если $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda) \cap \left(\overline{J(E)} \setminus J(E)\right)$ и $m(\Lambda, \mu) > 0$, то существует $b(\varphi_0) \in \mathbb{R}$ такое, что множество $B(\varphi_0) = \{z \in E : Re(ze^{i\varphi_0}) \geqslant b(\varphi_0)\}$ неограниченно;

4) если 0 — изолированная точка множества E, то последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ ограничена.
Тогда для каждого $p \geqslant 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такие, что

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z\in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| \leqslant C_p ||d||_{m(p)}, \quad d = \{d_{k,n}\} \in Q(D,\Lambda).$$

где $D = E(\Theta(\Lambda))$, $\{K_p\} = \mathcal{K}(D)$. В частности, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D.

Доказательство этой теоремы опубликовано в работе [1].

Литература

1. Кривошеев А.С. Сходимость рядов экспоненциальных мономов / А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева // Уфимск. матем. журн. — 2022. — Т. 14, № 4. — С. 60–72.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КЛАССОВ ТИПА ХАРДИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В.Г. Кротов (Минск, БГУ)
krotov@bsu.by

Пусть X — хаусдорфово пространство, топология которого порождена квазиметрикой d, т.е. задана функция $d : X \times X \to [0,\infty)$ удовлетворяющая всем аксиомам метрики, только неравенство треугольника заменяется более слабым условием: существует такое число $K_d \geqslant 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x,y) \leqslant K_d[d(x,z) + d(z,y)].$$

Пусть μ — σ-конечная борелевская мера на X, причем мера каждого шара $B(x,t) := \{y \in X : d(x,y) < t\}$ конечна и положительна.

Произведение $\mathbf{X} := X \times I$, где $I = (0,t_0)$, $0 < t_0 \leqslant +\infty$ снабдим мерой-произведением $\mu \otimes m_1$ (m_1 — одномерная мера Лебега на I).

В случае, когда $t_0 = +\infty$, множество $A \subset \mathbf{X}$ будем называть ограниченным сверху, если

$$t_A := \sup\{t : \exists\, x \in X\ (x,t) \in A\} < \infty.$$

Для функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ и $x \in X$ определим области

$$D(x) := \{(y,t) \in \mathbf{X} : d(x,y) < t\},\ x \in X,$$

подхода к точкам $x \in X$ «границы» $\mathbf{X}$ и соответствующую максимальную функцию

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y,t)| : (y,t) \in D(x)\}.$$

Введем обозначение $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ для класса всех измеримых функций (эквивалентные функции не отождествляются) $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$, для которых максимальная функция $\mathcal{N}u$ конечна μ-почти всюду.

Далее для $p > 0$ введем классы $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$, состоящие из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p(\mathbf{X})} := \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}.$$

При конкретном выборе (X, d, μ) и I классы $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ являются расширениями тех или иных классов Харди. Например, если $\mathbf{X} = B^n \subset \mathbb{C}^n$ — единичный шар или $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ (с естественными мерами и (квази-) метриками), то $H^p(B^n) \subset \mathcal{H}^p(B^n)$ и $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+) \subset \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ и эти вложения непрерывны.

Пусть (Y, ν) — множество с σ-конечной мерой ν и $L^0(Y)$ — множество всех классов эквивалентности ν-измеримых функций с топологией сходимости по мере. Оператор T, определенный на некотором множестве в $\mathcal{H}^0(X)$, со значениями в $L^0(Y)$ называется квазилинейным, если существует такое число $K = K(T) > 0$, что

$$|T(u+v)| \leqslant K(|Tu| + |Tv|), \quad |T(\lambda u)| = |\lambda||Tu|,$$

($T(u+v)$ считается определенным, как только определены Tu и Tv, $T(\lambda u)$ считается определенным, если определено Tu).

Следующее обозначение

$$\widehat{A} := \{x \in X : D(x) \cap A \neq \varnothing\}, \quad A \subset \mathbf{X},$$

участвует в условиях наших результатов. Запись $A \lesssim B$ означает, что $A \leqslant CB$ для некоторой постоянной $C > 0$.

Теорема 1. *Пусть $0 < p_0 \neq p_1 \leqslant \infty$, $0 < q_0 \neq q_1 \leqslant \infty$, T — квазилинейный непрерывный оператор из $\mathcal{H}^{p_0}(\mathbf{X}) + \mathcal{H}^{p_1}(\mathbf{X})$ в $L^0(Y)$, удовлетворяющий условиям: существуют такие положительные постоянные M_0 и M_1, что для любого измеримого ограниченного сверху множества $A \subset \mathbf{X}$ конечной меры выполнены неравенства*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda(\nu\{|T(\chi_A)| > \lambda\})^{1/q_k} \leqslant M_k[\mu(\widehat{A})]^{1/p_k}, \quad k = 0, 1.$$

Пусть $\theta \in (0,1)$ *и*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \text{причем } p \leqslant q.$$

Тогда для всех функций $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ *выполнено неравенство*

$$\|Tu\|_{L^q(Y)} \lesssim M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|u\|_{\mathcal{H}^p(\mathbf{X})}$$

($\lesssim$ *зависит от* $K, p_0, p_1, q_0, q_1, \theta$).

Если $\mathbf{X}$, $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ и $\widehat{A}$ в теореме 1 заменить на X, $L^p(X)$ и $A \subset X$ соответственно, то она превратится в интерполяционную теорему Марцинкевича в подправленной версии из [1, теорема 1.4.19].

Проилюстрируем теорему 1 двумя конкретными примерами.

Борелевская мера μ на X удовлетворяет условию удвоения, если

$$\mu(B(x,2t)) \lesssim \mu(B(x,t)), \quad x \in X, \quad t > 0$$

($\lesssim$ не зависит от $x \in X$ и $t > 0$).

Борелевская мера ν на $\mathbf{X}$ называется мерой Карлесона степени $\alpha > 0$ ($\nu \in CM_\alpha(\mathbf{X})$), если

$$\|\nu\|_{CM_\alpha(\mathbf{X})} := \sup_{B \subset X} \nu(\mathcal{T}(B))[\mu(B)]^{-\alpha} < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B \subset X$ и

$$\mathcal{T}(E) := \left(\bigcup_{x \notin E} D(x) \right)^c, \quad \text{где} \quad E \subset X$$

(E^c — дополнение множества).

Теорема 2. *Пусть* $0 < p \leqslant q < \infty$, *борелевская мера* μ *на* X *удовлетворяет условию удвоения,* ν — *борелевская мера* ν *на* $\mathbf{X}$. *Тогда следующие условия эквивалентны*

1) ν — *мера Карлесона степени* q/p *на* $\mathbf{X}$;

2) $\nu(A) \lesssim [\mu(\widehat{A})]^{q/p}$ *для любого множества* $A \subset \mathbf{X}$, *ограниченного сверху* ($\lesssim$ *не зависит от* A);

3) для любых $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ *и* $\lambda > 0$ *выполнено неравенство*

$$\nu\{(x,t) \in \mathbf{X} : |u(x,t)| > \lambda\} \lesssim \left(\frac{\|u\|_{\mathcal{H}^p(\mathbf{X})}}{\lambda} \right)^q$$

($\lesssim$ *не зависит от* λ *и* u);

4) для любой функции $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ выполнено неравенство

$$\left(\int\limits_{\mathbf{X}} |u|^q d\nu\right)^{1/q} \lesssim \|u\|_{\mathcal{H}^p(\mathbf{X})}$$

($\lesssim$ не зависят от u).

Теорема 2 (без утверждения 2)) является абстрактной версией известной теоремы Карлесона–Хермандера–Дюрена [2–4] .

Далее рассмотрим обобщение ряда неравенств для функций из классов Харди. Для этого введем обозначение

$$M_p(t,u) := \left(\int\limits_X |u(y,t)|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p}$$

Теорема 3. *Пусть при некотором $n > 0$*

$$r^n \lesssim \mu(B(x,r)), \quad x \in X, \ r \in I,$$

($\lesssim$ не зависит от x и r). Пусть еще $0 < p < q \leqslant \infty$ и $p \leqslant l$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x,t)| \lesssim t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad x \in X, \ t \in I,$$

$$M_q(t,u) \lesssim t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad t \in I,$$

$$\left(\int\limits_0^{t_0} t^{nl(1/p-1/q)-1} M_q^l(t,u)\, dt\right)^{1/l} \lesssim \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}.$$

Эти неравенства для классов Харди аналитических функций в единичном круге из $\mathbb{C}$ были доказаны Харди и Литтлвудом [5], а затем распространялись на многомерный случай в работах Флетта [6] и Митчелл–Хана [7].

Литература

1. Grafakos L. Classical Fourier Analysis, Second Edition, Graduate Texts in Math., No. 249 / L. Grafakos. — New York : Springer, 2008. — 480 p.

2. Carleson L. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem / L. Carleson // Annals of Math. — 1962. — V. 76, № 3. — P. 547–559.

3. Hörmander L. L^p estimates for (pluri-) subharmonic functions / L. Hörmander // Math. Scand. — 1967. — V. 20, № 3. — P. 65–78.

4. Duren P. Extension of a theorem of Carleson / P. Duren // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 75, № 1. — P. 143–146.

5. Hardy G. H. Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions / G. H. Hardy, J. E. Littlewood // Quart. J. Math. — 1941. — V. 12, № 1. — P. 221–256.

6. Flett T. M. On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions / T. M. Flett // Proc. London Math. Soc. — 1970. — V. 20, № 4. — P. 749–768.

7. Mitchell J. Representation of linear functionals in H^p spaces over bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$ / J. Mitchell, K. T. Hahn //J. Math. Anal. Appl. — 1976. — V. 56, № 2. — P. 379–396.

ПОСТРОЕНИЕ ЖЕСТКИХ ФРЕЙМОВ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА УНИТАРНОГО РАСШИРЕНИЯ[1]

Ю.С. Крусс (Саратов, СГУ)
krussus@gmail.com

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально-компактная нульмерная аддитивная топологическая группа, топология в которой задана счетной системой вложенных подгрупп $\ldots \supset G_{-n} \supset \ldots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n = \{0\}$, $(G_n \backslash G_{n+1})^{\#} = p$, где p — простое число. $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ — базисная последовательность. При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выбираем элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и фиксируем его. Тогда любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n$, $a_n = \overline{0, p-1}$. Оператор растяжения $\mathcal{A}\colon G \to G$ задается равенством $\mathcal{A}x := \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$.

Пусть X — совокупность характеров группы G, которая является группой относительно умножения. Обозначим через $G_n^{\perp}$ – аннулятор группы G_n, т.е. $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, (\chi, x) = 1\}$. Для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ выберем характер $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \backslash G_n^{\perp}$ и зафиксируем его. Любой характер χ может быть записан в виде произведения $\chi = \prod_{j=-m}^{+\infty} r_j^{\alpha_j}$, $\alpha_j = \overline{0, p-1}$.

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/).

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ множество ступенчатых функций $f \in L_2(G)$ таких, что $supp\ f \subset G_{-N}$ и f постоянна на множествах вида $G_M \dot{+} g$. Для таких функций масштабирующее уравнение имеет вид $\varphi(x) = p \sum\limits_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, где $H_0^{(N)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N}g_{-N},\ a_j = \overline{0, p-1}\}, N \in \mathbb{N}$.

В частотной форме масштабирующее уравнение можно записать в виде: $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$.

Если сдвиги $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ не ортогональны, то будем строить функции $\psi_\ell(x)$ так, чтобы для любой $f \in L_2(G)$

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{h \in H_0} (f, \psi_\ell(\mathcal{A}^n \cdot \dot{-} h))\psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h).$$

В этом случае аффинная система $\psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h)$ называется фреймом Парсеваля или жестким вейвлет фреймом.

Пусть $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$. Маска m_0 определяется своими значениями на смежных классах $G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \ldots r_0^{\alpha_0}$. Обозначим $\lambda_j = m_0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \ldots r_0^{\alpha_0})$. Здесь $j = \alpha_{-N} + \alpha_{-N+1}p + \ldots + \alpha_0 p^N$. Для нахождения λ_j строим дерево T.

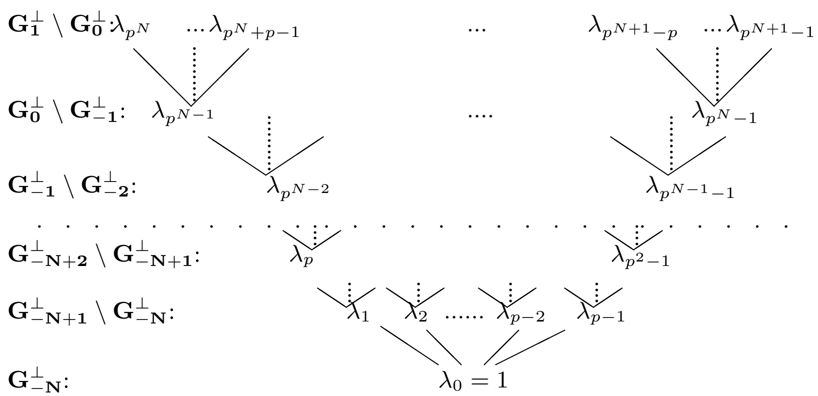

Рисунок 1. Дерево T.

Теорема 1. *Пусть маска m_0 и масштабирующая функция φ построены по порождающему дереву T. Пусть $(m_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ семейство масок, удовлетворяющих условиям*
1)$\sum_{\ell=0}^{q-1} |m_\ell(\chi)|^2 = 1$ в тех точках χ где $\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \neq 0$,
2)$\sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) = 0$ в тех точках $\chi \in G_0^{\perp} r_0^k,\ \xi \in G_0^{\perp} r_0^j, k \neq j$ где

$\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1}) \neq 0.$
Используя эти маски, определим функции $\psi_\ell(x), \ell = 1, ..., q-1$ равенствами

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(\ell)} \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) m_\ell(\chi);$$

Тогда аффинная система $\psi_{\ell,n,h}(x) = p^{\frac{n}{2}}\psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h)$, $\ell = 1, ..., q-1$, $n \in \mathbb{Z}$, $h \in H_0$, образует жесткий фрейм в $L_2(G)$.

Литература

1. Лукомский С.Ф. Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы / С.Ф. Лукомский // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 5. — С. 41–64.

ОБ ОРБИТАХ В $\mathbb{C}^4$ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ[1]

В.В. Крутских, А.В. Лобода (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)
krutskihvlad@mail.ru, lobvgasu@yandex.ru

В задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^4$ отдельный интерес представляют орбиты 7-мерных алгебр Ли голоморфных векторных полей и, в частности, Леви-невырожденность и трубчатость таких орбит. Отметим при этом, что значительную часть полного списка 7-мерных алгебр Ли (содержащего 1325 типов таких алгебр) формируют 594 типа неразложимых разрешимых алгебр Ли, имеющих 6-мерный нильпотентный максимальный идеал (см. [1]).

Теорема 1. *Из 594 типов алгебр Ли списка [1] для 323 типов алгебр Леви-невырожденные орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$ могут быть только трубчатыми.*

Доказательство базируется на использовании не менее, чем 4-мерных абелевых подалгебр, имеющихся в изучаемых алгебрах, и техники совместного упрощения нескольких коммутирующих векторных полей (см. [2], [3]). При этом изучение 7-мерных алгебр Ли в значительной мере определяется рассмотрением всего лишь 34 типов 6-мерных нильпотентных алгебр Ли, нильрадикалов изучаемых 7-мерных алгебр.

Пример 1. Каждая алгебра Ли из семейства $[7,[6,15],1,k]$ $(k = 1, ..., 6)$ списка [1], имеет 6-мерный нильрадикал $< e_1, ..., e_6 >$, определяемый четверкой нетривиальных коммутационных соотношений

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497) и РНФ (проект № 23-21-00109).

$[e_j, e_6] = e_{j-1}$ $(j = 2,3,4,5)$. Вывод об отсутствии невырожденных 7-мерных орбит у алгебр семейства при $k = 2,3,4,5$ следует из еще одного соотношения $[e_6, e_7] = 0$, выполняющегося для всех четырех типов этих алгебр

В ряде случаев утверждение о вырожденности всех орбит исследуемых алгебр удается получить лишь после их интегрирования.

Пример 2. Абстрактная алгебра Ли [7,[6,17],1,2] из списка [1] задана 9 нетривиальными коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_7] = [e_2, e_6] = [e_4, e_3] = e_1,\ [e_2, e_7] = [e_3, e_6] = [e_4, e_5] = e_2,$$

$$[e_3, e_7] = [e_5, e_6] = e_2,\ [e_5, e_7] = e_5.$$

В одном из (трех возможных) случаев реализации в $\mathbb{C}^4$ (см. [3]) базис $e_1, e_2,\ e_3, e_5$ единственной 4-мерной абелевой подалгебры этой алгебры «выпрямляется» и превращается в дифференцирования $\partial/\partial z_k$ $(k = 1,2,3,4)$. Все орбиты при этом оказываются трубчатыми, а их основания аффинно эквивалентны известной (см. [4]) аффинно однородной поверхности в $\mathbb{R}^4_y$ с уравнением

$$y_1^2 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2^3 = 0,$$

вырожденность которой устанавливается отдельным вычислением.

Обрабатывать большие массивы алгебр по однотипным схемам помогает разработанный авторами компьютерный алгоритм. На его основе изучено еще одно большое семейство 7-мерных алгебр Ли из [5], также имеющих 4-мерные абелевы подалгебры.

Предложение 1. Из 127 типов рассмотренных алгебр Ли из [5] в рамках одного из трех случаев невозможны реализации в $\mathbb{C}^4$ с невырожденными орбитами для 95 типов алгебр.

Авторы считают естественной гипотезу об отсутствии невырожденных орбит у 7-мерных алгебр Ли, имеющих, например, 5-мерный абелев идеал. Для окончательной проверки этой гипотезы остается исследовать орбиты «всего» 59 типов алгебр из [1].

Литература

1. Parry A.R. A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals [master's thesis] / Logan, Utah. — Utah State Univer-sity. — 2007. — 225 p.

2. Beloshapka V.K. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — 20(3). — P. 538–564.

3. Loboda A.V. On the Orbits of Nilpotent 7-dimensional Lie Algebras in 4-dimensional Complex Space / A.V. Loboda, R.S. Akopyan, V.V. Krutskikh // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. — 2020. — 13(3). — P. 360–372.

4. Можей Н.П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии / Н.П. Можей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — № 7. — С. 41–52.

5. Le Vu A. Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals / Vu A. Le, Tuan A. Nguyen, Tu T.C. Nguyen, Tuyen T.M. Nguyen, Thieu N. Vo // Cornell University. — 2021. — URL: https://arxiv.org/abs/2107.03990.

ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОГО ПОКРЫТИЯ НА КЛАССАХ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА В СЕБЯ[1]

О.С. Кудрявцева, А.П. Солодов (Волгоград, ВолгГТУ; Москва, МГУ)

kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Пусть $\mathcal{B}_\alpha[0,1]$ — класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\big\}$ в себя, которые оставляют неподвижными внутреннюю точку $z = 0$ и граничную точку $z = 1$ (неподвижность понимается в смысле углового предела) и имеют ограничение на значение угловой производной в граничной неподвижной точке: $f'(1) \leqslant \alpha$, $\alpha > 1$. На классе $\mathcal{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$, решается задача о точной области однолистного покрытия.

Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$. Существует функция, обратная к f и конформно отображающая область*

$$\mathcal{W}(\alpha) = \left\{w \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-w|}{1-|w|} < \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha-1}}\right\}$$

на некоторую область $\mathcal{X} \subset \mathbb{D}$. Какова бы ни была область $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}(\alpha) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}(\alpha)$, найдется функция $f \in \mathcal{B}_\alpha[0,1]$, не имеющая обратной в области $\mathcal{V}$.

Полученный результат является развитием исследований, начатых Ландау [1] и продолженных В.В. Горяйновым [2] и А.П. Солодовым [3].

[1] Работа Солодова А.П. выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (грант № 22-7-1-23-1).

Литература

1. Landau E. Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante / E. Landau // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. — 1926. — V. 32. — P. 467–474.

2. Горяйнов В.В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками / В.В. Горяйнов // Матем. сб. —2017. — Т. 208, № 3. — С. 54–71.

3. Солодов А.П. Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками / А.П. Солодов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2021. — Т. 85, № 5. — С. 190–218.

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ[1]

М.А. Кузнецова (Саратов, СГУ)

kuznetsovama@info.sgu.ru

Рассмотрим обратную задачу восстановления комплекснозначного потенциала $q \in L_2(0,\pi)$ по спектру $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ краевой задачи

$$-y''(x) + q(x)y(a) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $a \in [0,\pi]$ фиксировано. Соответствующий оператор называется оператором Штурма-Лиувилля с замороженным аргументом. Уравнение (1) принадлежит к классу нагруженных уравнений (см. [1]), имеющих применение в математике, физике и математической биологии.

Обратные спектральные задачи для уравнения (1) изучались в ряде статей (см. [2–3] и ссылки в них). При различных видах краевых условий часть собственных значений может вырождаться, т.е. не зависит от потенциала q. Это приводит к тому, что спектр содержит недостаточно информации для однозначного восстановления q, и обратная задача неразрешима.

Теорема 1 ([2]). *Произвольная последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является спектром краевой задачи (1)–(2) тогда*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00509, https://rscf.ru/project/22-21-00509/).

и только тогда, когда

$$\lambda_n = n^2 + \nu_n \sin(na),\ n \in \mathbb{N}, \quad \{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2. \tag{3}$$

Обозначим $\Omega = \{m \in \mathbb{N} \colon \sin(ma) = 0\}$. Из (3) следует, что вырождается часть спектра $\{\lambda_n\}_{n\in\Omega}$. При этом для однозначного восстановления потенциала q необходимо и достаточно в дополнение к спектру задать коэффициенты $\xi_n := \int_0^\pi q(t)\sin(tn)\,dt$, $n \in \Omega$ (см. [2]).

Мы докажем равномерную устойчивость восстановления потенциала q по входным данным $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n\in\Omega}$, а именно липшицеву зависимость потенциала от входных данных на каждом ограниченном множестве. Подобный результат был получен в [4] для задачи восстановления самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам.

Обозначим через $\|\cdot\|$ классическую ℓ_2-норму последовательностей. Также введем следующую норму:

$$\big\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\mathbf{a}} := \begin{cases} +\infty, & \exists n \in \Omega \colon x_n \neq 0, \\ \sqrt{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\Omega} \dfrac{n^2|x_n|^2}{\sin^2(an)}}, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Зафиксируем произвольное $r > 0$. Рассмотрим последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\Omega}, \{\tilde{\xi}_n\}_{n\in\Omega} \in \ell_2$ и $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\rho}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, у которых $\big\|\{\rho_n - n\}\big\|_{\mathbf{a}} \leqslant r$, $\big\|\{\tilde{\rho}_n - n\}\big\|_{\mathbf{a}} \leqslant r$. Тогда по входным данным $\{\rho_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n\in\Omega}$ восстанавливается краевая задача (1)–(2) с потенциалом $q \in L_2(0,\pi)$, а по входным данным $\{\tilde{\rho}_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\xi}_n\}_{n\in\Omega}$ — краевая задача (1)–(2) с потенциалом $\tilde{q} \in L_2(0,\pi)$. Для них имеет место оценка*

$$\|q - \tilde{q}\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant C_r \big\|\{\rho_n - \tilde{\rho}_n\}\big\|_{\mathbf{a}} + \frac{2}{\pi}\big\|\{\xi_n - \tilde{\xi}_n\}_{n\in\Omega}\big\|,$$

где постоянная C_r зависит только от r.

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М. Нахушев. — М. : Наука, 2012. — 232 с.

2. Kuznetsova M. Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm–Liouville operators with frozen argument / M. Kuznetsova // Appl. Math. Lett. — 2022. — Vol. 131. — P. 108035.

3. Кузнецова М.А. Обратная задача для несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля с нелокальным возмущением / М.А. Кузнецова // Математика. Механика : сборник научных трудов. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2022. – Вып. 24. — С. 31–34.
4. Савчук А.М. Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44, № 4. — С. 34–53.

ВЛИЯНИЕ КОНКУРЕНЦИИ НА ДИНАМИКУ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЗАДАЧА О СИНХРОНИЗАЦИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
kulikov_d_a@mail.ru

Одной из наиболее известных макроэкономических моделей следует считать модель Кейнса [1,2]. Она позволила дать объяснение цикличности в макроэкономике как явление связанное с бифуркацией автоколебаний. Рассмотрим один из вариантов математической модели Кейнса, которая после нормировок основных макроэкономических переменных имеет следующий вид

$$\dot{x} = \frac{y}{x} - \gamma,\ \dot{y} = \frac{y^2}{x} - xy, \tag{1}$$

где $x = x(t), y = y(t), \gamma$ – положительная постоянная. При этом $x(t)$ – нормированная ставка кредита, $y(t)$ – нормированный доход, постоянная γ зависит от основных экономических показателей, характеризующих данную экономическую систему.

Система дифференциальных уравнений (1) имеет состояние равновесия $E : x = \gamma, y = \gamma^2$, которое асимптотически устойчиво, если $\gamma \in (0, 1]$, и неустойчиво, если $\gamma \in (1, \infty)$. При $\gamma = 1 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ у системы (1) существует устойчивый предельный цикл ("экономический цикл") (см., например, [3]). Если сосуществуют две конкурирующие экономики, то при учете достаточно слабого варианта их конкуренции взаимодействие может быть описано следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \tfrac{y_1}{x_1} - \gamma_1 + \varepsilon d_1(x_2 - x_1),\ \dot{y}_1 = \tfrac{y_1^2}{x_1} - x_1y_1 + \varepsilon d_2(y_2 - y_1), \\ &\dot{x}_2 = \tfrac{y_2}{x_2} - \gamma_2 + \varepsilon d_1(x_1 - x_2),\ \dot{y}_2 = \tfrac{y_2^2}{x_2} - x_2y_2 + \varepsilon d_2(y_1 - y_2), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in R, d_1, d_2 > 0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Если обе экономики идентичны, то естественно предполагать, что: 1) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$; 2) $d_1 = d_2 = d$. Тогда при $\gamma = 1 + \nu\varepsilon, \nu \in R$ для системы дифференциальных уравнений (2) возникает задача о синхронизации автоколебаний двух идентичных систем.

Анализ системы (2) сводится к вопросу о существовании и устойчивости "укороченной" нормальной форме для "медленных" переменных

$$\begin{aligned} \dot\rho_1 &= \tfrac{\nu}{2}\rho_1 - \tfrac{1}{2}\rho_1^3 + d(\rho_2\cos\psi - \rho_1), \\ \dot\rho_2 &= \tfrac{\nu}{2}\rho_2 - \tfrac{1}{2}\rho_2^3 + d(\rho_1\cos\psi - \rho_2), \\ \psi' &= \tfrac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2) - d\sin\psi(\tfrac{\rho_1}{\rho_2} + \tfrac{\rho_2}{\rho_1}), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\rho_j = \rho_j(s), \psi = \psi(s), j = 1, 2, s = \varepsilon t$ – медленное время.

Система дифференциальных уравнений (3) имеет состояния равновесия трех видов:

1) $E_1 : \rho_1 = \rho_2 = \sqrt{\nu}, \psi = 0$. Это состояние равновесия существует, если $\nu > 0$. Оно асимптотически устойчиво, если $d > 0$ и неустойчиво, если $d < 0$.

2) $E_2 : \rho_1 = \rho_2 = \sqrt{\nu - 4d}, \psi = \pi$. Это состояние равновесия существует, если $\nu - 4d > 0$. Оно асимптотически устойчиво, если $d < 0$ и неустойчиво, если $d > 0$.

3) E_3 – это такие состояния равновесия $\rho_1 = \eta_1, \rho_2 = \eta_2, \Theta = \Theta_0$, для которых характерно, что $\eta_1 \neq \eta_2$, а $\Theta_0 \neq 0, \pi$. При этом вопрос о существовании таких состояний равновесия сведен к анализу алгебраического уравнения 4 степени, у которого были найдены решения в некоторых случаях. Все такие решения оказались неустойчивы.

Состояниям равновесия E_1, E_2, E_3 соответствуют циклы системы (2) с наследованием свойств устойчивости соответствующих состояний равновесия.

Литература

1. Keynes J.M. The General Theory of Employment, Interest and Money / J.M. Keynes. — New York. : Harcourt, 1936. — 416 p.

2. Zhang W. B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics / W.B. Zhang. — Berlin. : Springer-Verlag, 1991. — 261 p.

3. Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A. Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes business cycle model // Nonlin. Dynam. Psychol. Life Sci. — 2021. — V. 5, № 1. — P. 93–111.

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФАБЕРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ СО СПЕКТРОМ В ЭЛЛИПСЕ

В.Г. Курбатов, Т.А. Стряпчих (Воронеж, ВГУ)
kv51@inbox.ru

Хорошо известно, что обратную к матрице $I - A$ можно вычислить с помощью ряда Неймана $I + A + A^2 + \dots$ в том и только в том случае, когда спектральный радиус A строго меньше единицы. Аналогично обстоит дело с рядами Тейлора для $\ln(I-A)$ и $(I-A)^\alpha$. Тем не менее, в качестве сходящегося ряда иногда можно взять ряд Фабера $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(A)$.

Пусть $R > 1$ и $\varkappa \in \mathbb{C}$, $\varkappa \neq 0$, — заданные константы. Рассмотрим эллипс

$$\frac{\varkappa}{2}\big(Re^{it} + e^{-it}/R\big), \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

Обозначим через K замкнутую часть комплексной плоскости, ограниченную эллипсом (1). Функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{\varkappa R}\big(z + \sqrt{z^2 - \varkappa^2}\big)$$

конформно отображает внешность эллипса (1) на внешность окружности $|w| = 1$. *Многочленом Фабера* порядка n называют [1] полиномиальную часть ряда Лорана в окрестности бесконечности функции $z \mapsto \Phi^n(z)$. Для эллипса (1)

$$\Phi_0(z) = 1, \quad \Phi_n(z) = \frac{2}{R^n}T_n\Big(\frac{z}{\varkappa}\Big), \qquad n \in \mathbb{N},$$

где T_n — многочлены Чебышева первого рода.

Всякая функция f, аналитическая в окрестности K, раскладывается [1, с. 76] в *ряд Фабера*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(z). \tag{2}$$

Пусть спектр квадратной комплексной матрицы A содержится в K. В этом случае [2]

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(A),$$

причем ряд сходится по норме. Для вычисления $f(A)$ по этой формулы надо знать коэффициенты Фабера c_n.

Для некоторых функций f известны [3] явные формулы для c_n. Например. Пусть $\mu \in \mathbb{C}$ находится во внешности эллипса (1). Пусть w_1 — наименьший, а w_2 — наибольший по модулю корни уравнения

$$-R^2 w^2 \varkappa + 2\mu R w - \varkappa = 0.$$

Тогда коэффициенты c_n ряда Фабера (2) имеют следующий вид.

- Если $f(z) = e^{tz}$, то $c_n = R^n I_n(t\varkappa)$, где I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода.

- Если $f(z) = \cos(tz)$, то $c_n = (-1)^{n/2} R^n J_n(t\varkappa)$ при четных n и $c_n = 0$ при нечетных n, где J_n — функция Бесселя первого рода.

- Если $f(z) = \ln(1 - z/\mu)$, то $c_0 = \ln\left(\frac{\varkappa R w_2}{2\mu}\right)$, а $c_n = -\dfrac{1}{n w_2^n}$.

- Если $f(z) = (1 - z/\mu)^\alpha$, то

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{\varkappa R w_2}{2\mu}\right)^\alpha \frac{{}_2F_1\left(n-\alpha, -\alpha; n+1; \dfrac{w_1}{w_2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{n!\,\Gamma(-n+\alpha+1)} \frac{1}{w_2^n},$$

  где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция.

Пример численного эксперимента. Строилась случайная матрица размера 256×256, спектр которой лежит внутри эллипса (1) с параметрами $R = 6/5$ и $\varkappa = 1 + i$. Матрица $B = (I - A)^{1/3}$ вычислялась путем подстановки A в 31-ю частичную сумму ряда Фабера. Оказалось, что норма матрицы $B^3 - I + A$ имеет порядок 10^{-5}.

Литература

1. Суетин, П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1984. — 336 с.

2. Hasson, M. Expansion of analytic functions of an operator in series of Faber polynomials / M. Hasson // Bull. Austral. Math. Soc. — 1997. — Vol. 56, no. 2. — P. 303–318.

3. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. — М. : Наука, 1983. — 384 с.

РЕШЕНИЕ ТРЁХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

В.А. Кыров (Горно-Алтайск, ГАГУ)
kyrovVA@yandex.ru

Рассматриваются три системы функциональных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} + \bar{\rho} = \chi^1(x\xi + \mu, x\eta + y\xi + \nu, \rho, \tau), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau} = \chi^2(x\xi + \mu, x\eta + y\xi + \nu, \rho, \tau); \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} + \bar{\rho} = \chi^1(x\xi + \mu, y\eta + \nu, \rho, \tau), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau} = \chi^2(x\xi + \mu, y\eta + \nu, \rho, \tau); \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} + \bar{\rho} = \chi^1(x\xi - y\eta + \mu, x\eta + y\xi + \nu, \rho, \tau), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau} = \chi^2(x\xi - y\eta + \mu, x\eta + y\xi + \nu, \rho, \tau), \end{array} \right. \tag{3}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, χ^1, χ^2 — дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию невырожденности:

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \ \ \Box = \frac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau})}{\partial(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)} \neq 0.$$

Теорема. *Общее невырожденное решение систем функциональных уравнений (1) — (3) может быть представлено в следующем виде:*

$$\bar{X} = \Lambda X + A_1, \, \bar{\Xi} = \Omega \Upsilon_\varepsilon \Lambda^{-1},$$

$$\bar{R} = \Omega \left[R - \Upsilon_\varepsilon \Lambda^{-1} A_1 \right] + B_1, \, \chi = \Omega \left[\Upsilon_\varepsilon X + R \right] + B_1,$$

причем для системы (1) $\varepsilon = 0$, *для (2) —* $\varepsilon = 1$, *а для (3) —* $\varepsilon = -1$.

Для удобства использованы следующие матричные обозначения: $\bar{\Xi} = \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\mu} \\ \bar{\eta} & \bar{\nu} \end{pmatrix}$, $\tilde{\Xi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \tilde{\mu} \\ \tilde{\eta} & \tilde{\nu} \end{pmatrix}$, $\bar{R} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\tau} \end{pmatrix}$, $\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\tau} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \rho \\ \tau \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \mathrm{const}$, $\Upsilon_0 = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \eta & \xi \end{pmatrix}$, $\Upsilon_1 = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$,

$\Upsilon_{-1} = \begin{pmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix}$, причем матрицы $\bar{\Xi}, \tilde{\Xi}, \Lambda, \Omega$ невырожденные, $a_{ij} = a_{ij}(\rho, \tau)$, $b_i = b_i(\rho, \tau)$ — дифференцируемые функции, $i, j = 1, 2$.

Заметим, что множество матриц Υ_{-1} образует поле, изоморфное полю комплексных чисел (см. [1], с. 196), множество матриц Υ_0 изоморфно алгебре дуальных чисел, а множество матриц Υ_1 изоморфно множеству матриц $\begin{pmatrix} m & n \\ n & m \end{pmatrix}$, которое в свою очередь изоморфно алгебре двойных чисел.

Метод, применяемый для решения этой задачи был апробирован в работе [2].

Литература

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру / А.И. Кострикин. — М. : Наука, 1977. — 496 с.

2. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений / В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко // Известия вузов. Математика. — 2021. — № 8. — С. 46–55. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-6-46-55

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ДВУМЕРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА С ДВУМЯ КОНТАКТИРУЮЩИМИ ТОНКИМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ[1]

Н.П. Лазарев (Якутск, СВФУ)

nyurgun@ngs.ru

Предлагается новая нелинейная математическая модель, описывающая равновесие двумерного упругого тела с двумя тонкими жесткими включениями. Тонкие жесткие включения задаются прямолинейными отрезками. В исходном состоянии тела оба включения соприкасаются в одной точке — точке слома. При этом одно из включений предполагается неподвижным, а второе жесткое включение может перемещаться с учетом условий в виде неравенств, описывающих возможный контакт включений. Именно учет возможного контактного взаимодействия включений представляет новизну настоящего исследования в рамках математической теории трещин с односторонними ограничениями, см., например, [1]. Кроме того, оба включения отслаиваются вблизи точки слома от упругой матрицы,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение от 02.02.2022 г., проект 075-02-2022-881).

другими словами, с обеих сторон тонких включений имеются трещины заданной длины. На кривых, задающих трещины ставятся условия непроникания типа Синьорини. На части внешней границы, задаются условия закрепления. Задача формулируется в виде минимизации функционала энергии над невыпуклым множеством возможных перемещений, определенным в подходящем пространстве Соболева. Доказано существование решения задачи.

Литература

1. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях / А.М. Хлуднев. — М. : Физматлит, 2010. — 252 с.

ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГООБРАЗИЯ ДЛЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Ю.А. Лебедева, Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГУ)
yulechkalebedeva24@gmail.com, stenyuhin@mail.ru

В работе получена априорная оценка кривизны от параметров твёрдого тела для его прохождения через многообразие. Ранее связь кривизны, параметров тела и многообразия установлены авторами в [1] и [2].

Пусть задано прямоугольное тело Ω (назовём его кораблём), у которого известны параметры: β — ширина и σ — длина. Пусть в $\mathbf{R}^2$ задана кривая $\gamma(t)$ — гладкая локально спрямляемая кривая — и параллельная ей кривая $\overline{\gamma}(t)$ ($t \in [t_1; t_2]$ известны):

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \qquad \overline{\gamma}(t) = \begin{cases} \overline{x} = x + \dfrac{\alpha y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ \overline{y} = y - \dfrac{\alpha x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{cases}$$

Получаем полосу Γ, ограниченную двумя кривыми с инвариантным значением ширины, равным α ($\alpha > 0$), внутри которой перемещаем тело. Расстояние от корабля до кривой $\gamma(t)$ обозначим $\omega(t)$.

Необходимо оценить «оптимальную кривизну» $k(\gamma)$, при которой тело Ω сможет перемещаться внутри полосы Γ.

$$\begin{cases} \beta + \max\limits_{t \in [t_1; t_2]} |\omega(t)| \leqslant \alpha, \\ \forall (t_1, t_2 \in \{t\}) \exists (M_1, M_2 \in \gamma(t)) \big[||M_1 - M_2|| = \sigma \big]. \end{cases} \tag{1}$$

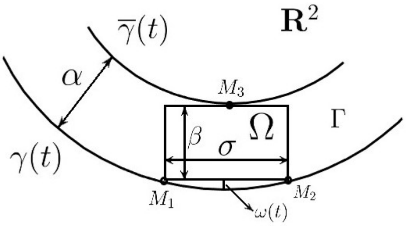

Рис. 1

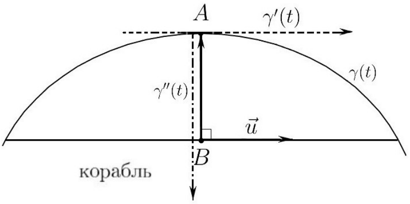

Рис. 2

Оценим расстояние $\omega(t)$ от стороны прямоугольника до точки на кривой, где этот максимум достигается (Рис. 2). $\tau(t)$ — коэффициент пропорциональности $\overrightarrow{BA}$ и $\gamma''(t)$.

$$\omega(t) = \frac{||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}||}{||\vec{u}||} = \frac{||\dfrac{\gamma''(t)}{\tau(t)} \times \gamma'(t)||}{||\gamma'(t)||} = \frac{||\gamma''(t) \times \gamma'(t)||}{\tau(t)||\gamma'(t)||}.$$

Из формул для кривизны кривой, заданной параметрически:

$$k(t) = \frac{||\gamma'(t) \times \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3} = \frac{\omega(t)\tau(t)}{||\gamma'(t)||^2}; \qquad \omega(t) = \frac{k(t)||\gamma'(t)||^2}{\tau(t)}.$$

$||\overrightarrow{BA}|| = \gamma''(t)\tau(t) \leqslant \alpha$, тогда $\beta + \max\limits_{t\in[t_1;t_2]} \left|\dfrac{k(t)||\gamma'(t)||^2||\gamma''(t)||}{\alpha}\right| \leqslant \alpha.$
Перейдём к естественной параметризации: $k(t) = k(s)$, $||\gamma'(s)||^2 = 1$, $||\gamma''(t)|| = \dfrac{\gamma''_s}{(t_2 - t_1)^2}$. Далее $\max\limits_{s\in[0;1]} \left|k(s)||\gamma''(s)||\right| \leqslant (\alpha - \beta)\alpha C$, где $C = (t_2 - t_1)^2$.

Итоговая **оценка для кривизны**: $\max\limits_{s\in[0;1]} \left|k(s)\right| \leqslant \dfrac{(\alpha - \beta)\alpha C}{\min\limits_{s\in[0;1]} ||\gamma''(s)||}$.

Литература

1. Лебедева Ю.А. Задачи о движении твёрдых тел в двумерном пространстве / Ю.А. Лебедева // Материалы студенческой научной сессии математического факультета ВГУ : сборник статей. — Воронеж : ВГУ, 2022.

2. Лебедева Ю.А., Стенюхин Л.В. Оценка кривизны границы области прохождения твёрдого тела / Ю.А. Лебедева, Л.В. Стенюхин // Современные методы теории краевых задач : Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая шко-

ла, Воронеж, 3–9 мая 2022 года. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — С. 165–168.

3. Gerver J.L. On moving a sofa around a corner. / J.L. Gerver // Geometriae Dedicata. — 1992. — V. 42, № 3. — P. 267–283.

4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 760 с.

5. Гликлих Ю.Е. Топология и дифференциальная геометрия / Ю.Е. Гликлих. — Воронеж : ВГУ, 2010. — 99 с.

ПЛОТНЫЕ СЛАБО ЛАКУНАРНЫЕ ПОДСИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ[1]

И.В. Лимонова (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
limonova_irina@rambler.ru

В докладе рассматривается задача о нахождении подсистем со свойством типа лакунарности в конечных ортогональных системах. Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система функций (О.Н.С.), заданных на вероятностном пространстве (X, μ). Система Φ называется p–лакунарной ($p > 2$), если для некоторой постоянной K и любого полинома $P = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \varphi_k$ по системе Φ справедливо неравенство

$$\|P\|_{L_p} \leqslant K \|P\|_{L_2}.$$

В фундаментальной работе Ж. Бургейна [1] установлено, что в любой О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$, состоящей из N равномерно ограниченных единицей функций, существует p–лакунарная подсистема мощности не меньше $N^{2/p}$. В работах [2,3] установлены аналоги этой теоремы для пространства Орлича L_{ψ_α}, где

$$\psi_\alpha(t) = t^2 \frac{\ln^\alpha(e + |t|)}{\ln^\alpha(e + 1/|t|)}, \ \alpha > 0,$$

а норма функции $f \in L_{\psi_\alpha}(X)$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\psi_\alpha} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_X \psi_\alpha\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) d\mu \leqslant 1 \right\}.$$

[1] Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант № 22-7-1-23-1).

Для $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, N\}$ обозначим $\Phi_\Lambda = \{\varphi_k\}_{k \in \Lambda}$, S_Λ — оператор, действующий по правилу $S_\Lambda(\{a_k\}_{k\in\Lambda}) = \sum\limits_{k\in\Lambda} a_k\varphi_k(x)$. В [2] для случайного $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, N\}$ мощности порядка $N(\log(N+3))^{-\rho}$, $\rho > 0$, получены нетривиальные оценки нормы оператора S_Λ, действующего из $l_\infty(\Lambda)$ в $L_{\psi_\alpha}(X)$.

Напомним, что оператор мажоранты частных сумм S^*_Φ задаётся следующим образом: для $\{a_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$

$$S^*_\Phi(\{a_k\}_{k=1}^N)(x) = \sup_{1\leqslant M\leqslant N} \left|\sum_{k=1}^M a_k\varphi_k(x)\right|.$$

Хорошо известно, что свойство лакунарности позволяет улучшать оценки для нормы S^*_Φ. В [2] доказано, что при $\rho > 4$ в любой ортогональной системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$, состоящей из равномерно ограниченных единицей функций, найдётся подсистема Φ_Λ из $N(\log(N+3))^{-\rho}$ функций, такая, что $\|S^*_{\Phi_\Lambda} : l_\infty(\Lambda) \to L_2(X)\| \leqslant C(\rho)\sqrt{|\Lambda|}$. В докладе, в частности, будет представлен следующий результат.

Теорема 1. *При $\rho > 2$ для любой ортогональной системы $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ со свойством $\|\varphi_k\|_{L_p} \leqslant 1, k = 1, 2, \dots, N$, при $p > 4$ найдётся $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, N\}$ с $|\Lambda| \geqslant N(\log(N+3))^{-\rho}$, такое, что*

а) $\|S_\Lambda : l_2(\Lambda) \to L_{\psi_\alpha}(X)\| \leqslant K'(\alpha, \rho, p)(\log(N+3))^{\max\left\{\frac{\alpha}{2} - \frac{\rho}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}}$ *при* $\alpha > 3/2$;

б) $$\left\|S^*_{\Phi_\Lambda} : l_2(\Lambda) \to L_2(X)\right\| \leqslant \begin{cases} C(\rho, \varepsilon, p)(\log(N+3))^{\frac{3}{2} - \frac{\rho}{4} + \varepsilon}, & \rho \leqslant 3, \\ C(\rho, p)(\log(N+3))^{3/4}, & \rho > 3, \end{cases}$$
где $\varepsilon > 0$.

Отметим, что норма оператора мажоранты частных сумм по подсистеме Φ_Λ в пункте б) при малых ε оценивается лучше, чем гарантирует классическая теорема Меньшова–Радемахера для ортогональных систем общего вида.

Литература

1. Bourgain J. Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$–set problem / J. Bourgain // Acta Math — 1989. —V. 162. —P.227–245.

2. Кашин Б.С., Лимонова И.В. Слабо лакунарные ортогональные системы и свойства оператора мажоранты частных сумм для подсистем / Б.С. Кашин, И.В. Лимонова // Труды МИАН — 2020. — Т. 311. — С. 164–182.

3. Лимонова И.В. О существовании плотных подсистем со свойством лакунарности в ортогональных системах / И.В. Лимонова // Успехи матем. наук — 2022. Т. 77, вып. 5. — С. 191–192.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)
lomovcev@bsu.by

Методом компенсации граничного режима правой частью уравнения найдена глобальная теорема корректности смешанной задачи

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t)+$$

$$+q(x,t)u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in \dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x > 0, \quad (2);\ \ u_x|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0. \ (3)$$

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Характеристические уравнения $dx - (-1)^i a(x,t)dt = 0$ дают характеристики $g_i(x,t) = C_i$, $i = 1, 2$, на G_∞. Если $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, то они убывают по t при $i = 1$ и возрастают при $i = 2$ с увеличением x. Следовательно, функции $y_i = g_i(x,t)$ имеют обратные функции $x = h_i\{y_i,t\}$, $t = h^{(i)}[x,y_i]$. Если $a \in C^2(G_\infty)$, то g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ по переменным x, t, y_i, $i = 1, 2$ на G_∞ [1]. Характеристика $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ делит первую четверть плоскости $G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ на два множества $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) > g_2(0,0)\}$ и $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) \leqslant g_2(0,0)\}$.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) коэффициенты* $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, b, c, $q \in C^1(G_\infty)$. *Вторая смешанная задача (1)–(3) на множестве* $\dot{G}_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* φ, ψ, f, μ *классическое решение* $u \in C^2(G_\infty)$ *если и только, если верны требования гладкости и условия согласования:*

$$\varphi \in C^2[0,+\infty[,\ \psi \in C^1[0,+\infty[,\ \mu \in C^1[0,+\infty[,\ f \in C(G_\infty),$$

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1,\ 2, \qquad (4)$$

$$\varphi'(0)=\mu(0),\ \psi'(0)=\mu'(0).$$

Классическим решением второй смешанной задачи (1)–(3) на G_- является функция $u(x,t)$ из теоремы в [2] и на G_+ функция

$$u(x,t)=\frac{(a\,u\,v)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)+(a\,uv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\},0)}{2a(x,t)}+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_0^{h_1\{g_1(x,t),0\}}[\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)+b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}}[\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)+$$

$$+b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau)ds-$$

$$-\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)\mu(\rho)d\rho+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)\Bigg[\frac{(a\,u\,v)(h_1\{g_1(x,\rho),0\},0)}{a(x,\rho)}+$$

$$+\frac{(a\,uv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,\rho)]),0\},0)}{a(x,\rho)}\Bigg]'_x|_{x=0}\,d\rho+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)d\rho\Bigg[\int\limits_0^{h_1\{g_1(x,\rho),0\}}\frac{\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)}{a(x,\rho)}+$$

$$+\frac{b(s,0)\varphi(s)v(s,0)}{a(x,\rho)}ds\Bigg]'_x|_{x=0}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)d\rho\Bigg[\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,\rho)]),0\}}\frac{\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)}{a(x,\rho)}+$$

$$+\frac{b(s,0)\varphi(s)v(s,0)}{a(x,\rho)}ds\Bigg]'_x|_{x=0}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)d\rho\int\limits_0^{\rho}d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}}\breve{f}(|s|,\tau)\left[\frac{v(|s|,\tau;|x|,t)}{a(|x|,t)}\right]'_x\Big|_{x=0}ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}\frac{d\rho}{a(0,\rho)}\int\limits_0^{\rho}\Bigg[\breve{f}(|h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}|,\tau)v(|h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}|,\tau)\times$$
$$\times\frac{\partial h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}}{\partial\rho}+\breve{f}(|h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}|,\tau)v(|h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}|,\tau)\times$$
$$\times\frac{\partial h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}}{\partial\rho}\Bigg]d\tau,\ (x,t)\in G_+.$$

Здесь компенсирующие функции $\breve{f}(x,t)=f(x,t)+f^{(0)}(x,t)-f_\mu(x,t)$, $f^{(0)}(x,t)$ *– из решения системы соответствуюших первой смешанной задачи для телеграфного уравнения (1) и линейного алгебраического уравнения,* $f_\mu(x,t)=\mathcal{L}\Big(-\int_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)\mu(\rho)d\rho\Big)$.

В G_- функция Римана $v=v(s,\tau;x,t)$ – решение задачи Гурса:

$$v_{\tau\tau}-(a^2(s,\tau)v)_{ss}-(b(s,\tau)v)_\tau-(c(s,\tau)v)_s+$$
$$+q(s,\tau)v=0,\ (s,\tau)\in\Delta MPQ,$$
$$v(s,\tau)=\exp\Big\{\int\limits_t^{\tau}k_1(h_1\{g_1(x,t),\rho\},\rho)d\rho\Big\},\ g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$

$$v(s,\tau)=\exp\Big\{\int\limits_t^{\tau}k_2(h_2\{g_2(x,t),\rho\},\rho)d\rho\Big\},\ g_2(s,\tau)=g_2(x,t),\tau\in[0,t],$$

где функции $k_1(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)-4a_\tau(s,\tau)+c(s,\tau)\}/4a(s,\tau)$ на QM и $k_2(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)-4a_\tau(s,\tau)-c(s,\tau)\}/4a(s,\tau)$ на MP. В G_+ функция Римана $\hat{v}=v(|s|,\tau;|x|,t)$ – решение задачи Гурса:

$$\hat{v}_{\tau\tau}-(\hat{a}^2(s,\tau)\hat{v})_{ss}-(\hat{b}(s,\tau)\hat{v})_\tau-(\tilde{c}(s,\tau\hat{v})_s+$$
$$+\hat{q}(s,\tau)\hat{v}=0,(s,\tau)\in\Delta MPQ,$$
$$\hat{v}(s,\tau)=\exp\Big\{\int\limits_t^{\tau}\tilde{k}_1(h_1\{g_1(x,t),\ \rho\},\rho)\,d\rho\Big\},\ g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$
$$\hat{v}(s,\tau)=\exp\Big\{\int\limits_t^{\tau}\tilde{k}_2(h_2\{g_2(x,t),\ \rho\},\rho)\,d\rho\Big\},\ g_2(s,\tau)=g_2(x,t),\ \tau\in[0,t],$$

с функциями $\tilde{k}_1(s,\tau)$ на QM и $\tilde{k}_2(s,\tau)$ на MP, соответственно равными функциям $k_1(s,\tau)$ и $k_2(s,\tau)$ с четными по x продолжениями $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{q}$ и нечетным по x продолжением $\tilde{c}$ коэффициентов a, b, c, q.

В теореме 1 устойчивость решения $u\in C^2(G_\infty)$ по данным φ, ψ, f, μ этой смешанной задачи вытекает из его формул, а также из его существования и единственности по теореме Банаха о замкнутом графике или теореме Банаха об открытом отображении.

Следствие 1. *Если правая часть f уравнения (1) зависит только от x или t и непрерывна $f\in C(R_+)$ по x или t, то теорема 1 верна без интегральных требований гладкости (4) на f.*

Для непрерывной правой части $f \in C(R_+)$, зависящей только от x или t, интегральные требования гладкости (4) автоматически выполняются [1].

Замечание 1. Если f зависит от x и t, то в требованиях (4) принадлежность интегралов множеству $C^1(C_\infty)$ от функции $f \in C(C_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(1,0)}(C_\infty)$ или $C^{(0,1)}(C_\infty)$. Здесь множества $C^{(1,0)}(C_\infty)$ – непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по t, а $C^{(0,1)}(C_\infty)$ – непрерывных по x и непрерывно дифференцируемых по t функций на C_∞.

Работа поддержана БРФФИ: проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Вторая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости / Ф.Е. Ломовцев// Веснік Гродзенскага дзяржаунага універсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2022. — Т. 12, — № 3. — С. 50–70.

2. Lomovtsev F.E. Riemann Formula of Solution to the Second Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coef- ficients on End. / F.E. Lomovtsev // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения-XXXIII". — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2022. — С. 300–304.

ЖЕСТКИЕ ФРЕЙМЫ В ПОЛЕ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ[1]

С.Ф. Лукомский, А.М. Водолазов (Саратов, СГУ)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Обозначения: $\mathbb{Q}_p = \mathfrak{G}$— поле p-адических чисел. $\mathbb{Z}_p = \mathfrak{G}_0$— кольцо целых p-адических чисел, $p^k\mathbb{Z}_p = \mathfrak{G}_k$, $\mathfrak{G}_k^\perp$—аннуляторы, $p^{-k}\mathbb{Z}_p \cong \mathfrak{G}_k^\perp$, $\mathcal{A}$ – оператор растяжения. $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$ масштабирующее уравнение. $\mathcal{D}_{\mathfrak{G}_M}(\mathfrak{G}_{-N})$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по $\mathfrak{G}_M$ с носителем внутри $\mathfrak{G}_{-N}$, $g_n = (..., 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1,...})$, $H_0\{h = a_{-1}g{-}1 + ... + a_{-s}g{-}s : s \in \mathbb{N}\}$, $\{\psi^{(j)}\}(j = 1, ..., r)$ — вейвлет система, $\{\psi^{(j)}_{n,h} = p^{\frac{n}{2}}\psi^{(j)}(\cdot\mathcal{A}^n - h)\}$ аффинная система. В работе 2 был предложен способ построения

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-2101-00037).

фреймов в поле p-адических чисел. Остается нерешенной задача построения жестких фреймов (их часто называют фреймами Парсеваля), отличных от ОНБ. Мы предлагаем способ построения жестких фреймов.

Задача построения жесткого вейвлет фрейма может быть решена следующим образом.

I)Находим маску m_0 используя дерево T, в узлах которого стоят значения λ_ν маски m_0.

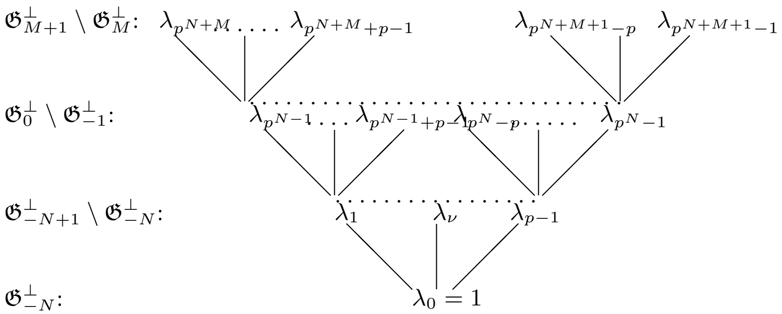

Рис. 1. Граф дерева T.

В корне дерева $\lambda_0 = 1$. Остальные λ_j надо подобрать так, чтобы их произведения на каждой ветви равнялось 0. Определяем масштабирующую функцию φ равенством

$$\hat{\varphi} = m_0(\chi)m_0(\chi\mathcal{A}^{-1})...m_0(\chi\mathcal{A}^{-M-N}).$$

В этом случае $\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{M+1}^{\perp} \setminus \mathfrak{G}_M^{\perp}) = 0$. Значения λ_ν выбираем так, чтобы на каждой ветви был ровно один ноль и помещаем эти значения в множество $\Lambda_0(T)$.

Теорема 1. *1) Если $\sharp\Lambda_0(T)) = p^{N+1} - 1$, то значения $\lambda_\nu \in \Lambda_0(T)$ определяют маску,*

2)Если $\sharp\Lambda_0(T) < p^{N+1} - 1$ то значения $\lambda_\nu \in \Lambda_0(T)$ также определяют маску.

3) Если $\sharp\Lambda_0(T) \geqslant p^{N+1}$, то значения $\lambda_\nu \in \Lambda_0(T)$ не определяют маску.

II)Пусть маска m_0 построена по дереву, преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ вычислено из масштабирующего уравнения. Определяем маски m_j : $j = 1, 2, ..., r$ так, что

i)$\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_j(\chi) = \mathbf{1}_{E_j}(\chi)$, где $E_j = G_{-s(j)}^{\perp} r_{-s(j)}^{\alpha_{-s(j)}} r_{-s(j)+1}^{\alpha_{-s(j)+1}} ... r_0^{\alpha_0} ... r_M^{\alpha_M}$

дизъюнктные смежные классы и $E_j\mathcal{A}$ также дизъюнктны,
ii) существуют натуральные $t(j)$, такие, что

$$\bigsqcup_j E_j\mathcal{A}^{t(j)} = G^{\perp}_{M+1} \setminus G^{\perp}_{M}.$$

III) Полагаем $\psi^{(j)}(\chi) = m_j(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$.
Теорема 2. *Функции $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, ..., \psi^{(r)}$ порождают жесткий фрейм.*

Литература

1. Агаев Г.Н. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах / Н.Г. Агаев. Н.Я. Виленкин, Г.М. Джафарли, А.И. Рубинштейн — Баку : Элм, 1981 — 180 с.

2. Albeverio S. p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames / S. Albeverio, A. Evdokimov, M. Skopina // J. Fourier Anal Appl. — 2010. — Vol. 16, № 5.— C. 693–714.

3. Farkov Y. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties / Y. Farkov, E. Lebedeva, M. Skopina // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. — 2015. — Vol. 13, № 5.— 1550036.— 19 p.

СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ n-ЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина, С.А. Рощупкин
(Воронеж, ВГУ, Елец, ЕГУ)
levnlya@mail.ru, sanina08@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru

Сингулярный дифференциальный оператор

$\Delta_{B-\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}$, $\quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\ \frac{\partial}{\partial x_i} = x^{-\gamma_i}\ \frac{\partial}{\partial x_i} x^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad \gamma_i > 0$,
называется оператором Киприянова [1]. Пусть $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}^+_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n);\ x_i > 0\}$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей $\Gamma^+ \in \mathbb{R}^+_n$ и $\Gamma^o = \{x_i = 0\} \subset \overline{\mathbb{R}^+_n}$.

Функцию $f = f(x)$, определенную в n-полупространстве $\mathbb{R}^+_n$, допускающую четное продолжение по каждой переменной своего аргумента, будем называть n-четной (по Киприянову).

Функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ называется K-гармонической функцией в области Ω^+, если $\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0$ в каждой точке Ω^+.

Важную роль в наших рассуждениях играет введенный в [2] обобщенный $\mathbb{T}$-псевдосдвиг

$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} \frac{(x_i\, y_i)^{\gamma_i+1} f\left(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i\right)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i\,)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha_i \, d\alpha_i,$

где $x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha_i}$.

Равенство $B_{-\gamma_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x)$, есть основное свойство $\mathbb{T}$-псевдосдвига. Для $T^y f(x)= \prod_{k=1}^n T_{x_k}^{y_k} f(x),\ x, y \in \mathbb{R}_n^+$ имеем

$\Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^y \Delta_{B_{-\gamma}} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+$.

$\mathbb{T}$-Псевдосдвиг и оператор Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$ самосопряжены (см. [2]) в весовой билинейной форме

$(u\,,\, v)_{-\gamma}= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} u(x)\ v(x)\ x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}.$

Более востребованным в этих исследованиях оказался оператор $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y = x^{\gamma+1} \mathbb{T}^y$, который, в отличие от $\mathbb{T}$-псевдосдвига, принадлежит классу обобщенных сдвигов Б.М. Левитана.

Пусть u и v — n-четные функции, принадлежащие классу функций $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ и $x^{-\gamma} = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{-\gamma_i},\ -i < -\gamma_i < 0$.

Первая K-формула Грина:

$$\int\limits_{\Omega^+} v\ \Delta_{B_{-\gamma}} u\ x^{-\gamma} dx = -\int\limits_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\ x^{-\gamma} dx + \int\limits_{\Gamma^+} v\ \frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+, \qquad (2)$$

где $\overline{\nu}$ — направление внешней нормали к границе Γ^+ области Ω^+.

Приведем несколько простых следствий из равенства (2).

Если в (2) $u = v$, то

$\int\limits_{\Omega^+} u\ \Delta_{B_{-\gamma}} u\ \ x^{-\gamma} dx = -\int\limits_{\Omega^+} \sum\limits_1^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\ \ x^{-\gamma} dx + \int\limits_{\Gamma^+} u\ \frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}}\ \ x^{-\gamma} dx.$

Если же в (2) $v = 1$, тогда

$\int\limits_{\Omega^+} \Delta_{B_{-\gamma}} u\ \ x^{-\gamma} dx = \int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}}\ \ x^{-\gamma} d\Gamma^+.$

И, наконец, если u — К-гармоническая функция, то

$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}}\ \ x^{-\gamma} dx = 0.$

Это равенство есть *условие К-гармоничности* в Ω^+ n-четной функции. Вторая K-формула Грина

$\int\limits_{\Omega^+} (v\ \Delta_{B_{-\gamma}} u - u \Delta_B v) x^{-\gamma} dx = \int\limits_{\Gamma^+} \left(v \frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \overline{\nu}}\right) x^{\gamma} d\Gamma.$

Представление Грина n-четных функций.

Теорема 1. *Пусть n-четная функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$, $v = |x|^{2-n+|\gamma|},\ n > 2$ и $\mathbb{T}$-псевдосдвиг (1). Имеет место следующая формула Грина*

$u(x) = \frac{1}{(n+|\gamma|-2)|S_1^+(n)|_{-\gamma}} \int\limits_{\Gamma^+} \left(v(y) \frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^x u(y)}{\partial \nu_y} - \overset{*}{\mathbb{T}}{}^x\ u(y)\ \frac{\partial v(y)}{\partial \nu} \right) \times$

$$\times\, y^{-\gamma} d\Gamma^+ - \int\limits_{\Omega^+} v(y)\ \Delta_{B_{-\gamma}} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^x\ u(y)\ y^{-\gamma} dy.$$

Литература

1. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для b-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56. № 12. — С. 1610–1620. – DOI 10.1134/S0374064120120055.

2. Ляхов Л.Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58. № 12. — С. 1654–1665. – DOI 10.31857/S037406412212007X.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е.А. Мазепа, Д.К. Рябошлыкова (Волгоград, ВолГУ)
elena.mazepa@volsu.ru, daria_ryaboshlikova@volsu.ru

В настоящей работе изучаются решения $u \in C^2(M)$ неоднородного уравнения Шредингера:

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = f(x), \tag{1}$$

где $c(x) \geqslant 0$, $c(x), f(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ для любого $G \subset\subset M$, $0 < \alpha < 1$, $f(x) \not\equiv 0$, на некомпактных римановых многообразиях следующего вида.

Пусть M — полное риманово многообразие без края, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт, а D изометрично произведению $[r_0; +\infty) \times S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ (где $r_0 > 0$ и S_i — компактные римановы многообразия без края) и имеет метрику

$$ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2 + \ldots + g_k^2(r)d\theta_k^2.$$

Здесь $g_i(r)$ — положительные, гладкие на $[r_0; +\infty)$ функции, а $d\theta_i^2$ — метрика на S_i. Пусть $\dim S_i = n_i$ и $g(t) = g_1^{n_1}(t)g_2^{n_2}(t)\ldots g_k^{n_k}(t)$. Многообразия M обычно называют квазимодельными многообразиями.

Всюду далее будем считать, что на D выполнено $c(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) \equiv c(r)$ и $f(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) \equiv f(r)$. Введем следующие обозначения (где $r_0 > 0$, $i = 1,\ldots,k$)

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{g(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} c(z)g(z)dz \right) dt, \quad I_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{g(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} \frac{g(z)}{g_i^2(z)}dz \right) dt,$$

$$I_f = I + \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{g(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} |f(z)|g(z)dz \right) dt.$$

Теорема. *Пусть риманово многообразие M и правая часть уравнения* (1) *таковы, что $I_f < \infty$, $I_1 = \ldots = I_s = \infty, I_i < \infty$ для всех $i = s+1,\ldots,k, 0 \leqslant s \leqslant k$. Тогда для любых непрерывных на $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ функций $\Phi_1(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)$ и $\Phi_2(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)$ на D существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения* (1) *такое, что на D выполнено*

$$u(r_0,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k) = \Phi_1(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k),$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k) = \Phi_2(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k).$$

Замечание. При изучении вопросов разрешимости краевых задач для решений неоднородных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях, кроме непрерывности по Гельдеру, на правую часть накладывают дополнительные условия. Так, например, в [2] наложено условие гладкости правой части $f \in G^{[\frac{3n}{2}]}(M)$, которое является достаточным для разрешимости задачи Дирихле на модельном многообразии для уравнения Пуассона.

В данной работе результаты являются новыми и обобщают аналогичные результаты, полученные ранее А.Г. Лосевым и Е.А. Мазепой в работах [1]-[3], для неоднородного уравнения Шредингера на квазимодельных римановых многообразиях. При этом было ослаблено условие на гладкость правой части неоднородного уравнения за счет требования ее зависимости только от радиальной координаты.

Литература

1. Лосев А.Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа // Алгебра и анализ, — 2001, — С. 84 -110.

2. Лосев А.Г. О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях / А.Г. Лосев // Дифференциальные уравнения, — 2017, — т. 53, № 12, С. 1643 - 1652.

3. Losev A.G. Asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation on model Riemannian manifolds / A.G. Losev, E.A. Mazepa // Siberian Electronic Mathematical Reports, — 2022, — v. 19, № 1, P. 66-80

О ТИПЕ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА[1]

К.Г. Малютин, М.В. Кабанко (Курск, КГУ)
malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru

Мы исследуем связь между типом дельта-субгармонической функции $v(z)$ в комплексной плоскости относительно уточненного порядка в смысле Бутру и распределением ее меры Рисса, а также между типом истинно дельта-субгармонической функции $v(z) \in JM$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ (см. [1]) и распределением ее полной меры $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. Результаты из работ [2,3] распространяются на дельта-субгармонические функции. Сформулируем основные результаты для полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Будем использовать терминологию из работы [2].

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру такой, что

$$1 \leqslant [\alpha] < \alpha = \varliminf_{r\to\infty} \rho(r) \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < [\alpha] + 1\,. \tag{1}$$

Положим $\lambda_n = \lambda^+ + \lambda^-$, $\lambda_n(r) = \lambda_n(|z| < r)$, $V(r) = r^{\rho(r)}$,

$$\Delta_v = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\lambda_n(r)}{V(r)}\,.$$

Теорема 1. *Пусть $v(z) \in JM$ — истинно дельта-субгармоническая функция нецелого порядка $\rho > 1$ и $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру, удовлетворяющий условию* (1).

Если относительно этого уточненного порядка $\Delta_v = 0$, тогда $v(z)$ — минимального типа относительно $\rho(r)$, если $0 < \Delta_v < \infty$, тогда $v(z)$ — нормального типа, а если $\Delta_v = \infty$, тогда $v(z)$ — максимального типа.

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №22-21-00012, https://rscf.ru/project/22-21-00012/.

Случай целого порядка сложнее. Представим функцию $v(z) \in JS$ целого порядка $\rho \geqslant 2$ в виде (см. [1])

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}[\iint K(z,\zeta)\,d\lambda_1(\zeta) + \\ + \iint K_\rho(z,\zeta)\,d\lambda_2(\zeta) + + \sum_{j=1}^{\rho} d_j \operatorname{Im}(z^j)].$$

Положим $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, $S_+(r;j,\lambda) = \dfrac{1}{\pi j} \displaystyle\iint\limits_{1<|\zeta|<r} \frac{\sin j\varphi}{\tau^j \operatorname{Im}\zeta}\,d\lambda(\zeta)$, $\tilde{\alpha} = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geqslant \alpha\}$, $\delta_{v,j}(r) = d_j + S_+(r;j,\lambda)$, $j = \tilde{\alpha},\ldots,\rho$, $\delta_{v,j} = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{r^j|\delta_{v,j}(r)|}{V(r)}$, $\delta_v = \displaystyle\sum_{j=\tilde{\alpha}}^{\rho} \delta_{v,j}$, $\gamma_v = \max\{\Delta_v, \delta_v\}$.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть $v(z) \in JS$ — дельта-субгармоническая функция порядка $\rho \geqslant 2$, $\rho(r)$ уточненный порядок Бутру, удовлетворяющий условию (1). Если $\gamma_v = 0$, тогда $v(z)$ $v(z)$ — минимального типа относительно $\rho(r)$, если $0 < \gamma_v < \infty$, then $v(z)$ — нормального типа, а если $\gamma_v = \infty$, тогда $v(z)$ — максимального типа.*

Литература

1. Малютин К.Г. Ряды Фурье и дельта-субгармонические функции конечного гамма-типа в полуплоскости / К.Г. Малютин // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 6. — С. 51-70.

2. Malyutin K.G., Kabanko M.V., Kostenko I.V. Generalization of the Lindelöf Theorem to the Case of Boutroux Proximate Order / К.Г. Малютин, M.V. Kabanko M.V., I.V. Kostenko // J. Math. Sci. —2022 — Vol. 262, No 3. — P. 301–311.

3. Malyutin K.G., Kabanko M.V., Kostenko I.V. Generalization of the Lindelöf Theorem to the Case of Boutroux Proximate Order. II / К.Г. Малютин, M.V. Kabanko M.V., I.V. Kostenko // J. Math. Sci. — 2022 — Vol. 264, No 5. — P. 609–616.

АППРОКСИМАЦИЯ ЧЕТНОГО И НЕЧЕТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ[1]

Т.С. Мардвилко (Минск, БГУ)

mardvilko@mail.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ НАНБ “Конвергенция” 2021 – 2025 г. (проект № ГР 20211888).

Для функции $f \in C[a,b]$ будем рассматривать наилучшие равномерные приближения функций полиномами

$$E_n(f;[a,b]) = \inf \|f - p_n\|_{[a,b]},$$

где инфимум берется по всем алгебраическим многочленам p_n степени не выше n с действительными коэффициентами.

Для $f \in C[0,1]$ будем рассматривать

$$f^+(x) = f(|x|); \quad f^-(x) = f(|x|)\mathrm{sign} x$$

соответственно четное и нечетное продолжение f на отрезок $[-1,1]$. Для нечетного продолжения дополнительно предполагаем, что $f(0) = 0$.

Для наилучших полиномиальных приближений четного и нечетного продолжений функции справедливы следующие оценки снизу:

$$E_n(f^+;[-1,1]) \geqslant E_n(f;[0,1]); \tag{1}$$

$$E_n(f^-;[-1,1]) \geqslant E_n(f;[0,1]). \tag{2}$$

В теоремах 1 и 2 получены обращения неравенств (1) и (2).

Теорема 1. *Пусть $f \in C[0,1]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$E_n(f^+;[-1,1]) \leqslant \frac{32\pi}{n}\left\{E_0(f;[0,1]) + \sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} kE_k(f;[0,1])\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C[0,1]$, причем $f(0) = 0$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$E_n(f^-;[-1,1]) \leqslant \frac{1024\pi}{n^2}\left\{\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} k^3E_k(f;[0,1])\right\}.$$

Рассматривая четные и нечетные продолжения функций, наилучшие полиномиальные приближения которых хорошо изучены [1], можно убедиться, что неравенства, полученные в теоремах 1 и 2, являются точными по порядку.

Задача об обращении неравенств (1) и (2) естественным образом возникла при рассмотрении аналогичной задачи о приближении четного и нечетного продолжения непрерывной функции рациональными функциями [2].

Литература

1. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. — М. : Наука, 1960. — 624 с.

2. Мардвилко Т.С. Применение действительного пространства Харди-Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций / Т.С. Мардвилко, А.А. Пекарский // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2022. — № 3. — С. 16–36.

ОБ ОДНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ СВЯЗАННОЙ ТЕ-ТЕ-ВОЛНЫ[1]

В.Ю. Мартынова, С.В. Тихов (Пенза, ПГУ)

lynxbax@mail.ru, tik.stanislav2015@yandex.ru

Пусть $\mathrm{I} = (0, h)$, $\bar{\mathrm{I}} = [0, h]$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathrm{A} = (0, A)$, где $h, A > 0$ — заданные постоянные, λ, A_1, A_2 — вещественные параметры, $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$ — вещественные постоянные. Для краткости используем обозначение $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ и $\boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$.

Задача $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha})$ состоит в том, чтобы для заданного значения $A > 0$ определить такие пары $(\lambda, A_1) = (\widehat{\lambda}, \widehat{A}_1)$, для которых существуют (нетривиальные) вещественнозначные функции $u_j \equiv u_j(x; \widehat{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}, A_1)$ $(j = 1, 2)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} u_1'' = -\big(a_1 - \lambda + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_3 u_2^2\big)u_1, \\ u_2'' = -\big(a_2 - \lambda + \alpha_4 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2\big)u_2, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u_1|_{x=0} = 0, && u_2|_{x=0} = 0, \\ &u_1'|_{x=0} = A_1, && u_2'|_{x=0} = A_2, \\ &u_1|_{x=h} = 0, && u_2|_{x=h} = 0, \end{aligned}$$

при дополнительном условии

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2;$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-71-00020).

где $x \in \bar{\mathrm{I}}$, $A_j \in \mathrm{A}$ и $\lambda, \alpha_j, \alpha_{j+2} \in \mathbb{R}_+$, при этом u_1, u_2 предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по $x \in \bar{\mathrm{I}}$.

Очевидно, что задача $\mathcal{P}$ является двухпараметрической, где λ — спектральный параметр, а A_1 — дополнительный параметр [1], при этом A_2 определяется по формуле

$$A_2(A_1) = \sqrt{A^2 - A_1^2} > 0.$$

При $\alpha_{j+2} = 0$ $(j = 1, 2)$ получаем вспомогательную нелинейную задачу $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha}_0)$ [2].

Теорема 1. *Пусть задача $\bar{\mathcal{P}}$ имеет решение $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, $A_1 = \bar{A}_1 \in \mathrm{A}$. Тогда существуют постоянные $\alpha^*_{j+2} > 0$ такие, что для любого $0 < \alpha_{j+2} < \alpha^*_{j+2}$ задача $\mathcal{P}$ имеет хотя бы одно решение $\lambda = \hat{\lambda}$, $A_1 = \hat{A}_1$, причем пара $(\hat{\lambda}, \hat{A}_1)$ содержится в окрестности точки $(\bar{\lambda}, \bar{A}_1)$ и $(\hat{\lambda}, \hat{A}_1) \to (\bar{\lambda}, \bar{A}_1)$ при $\alpha_{j+2} \to +0$ $(j = 1, 2)$.*

Задача $\mathcal{P}$ описывает распространение монохроматической связанной волны TE-TE в плоском экранированном немагнитном анизотропном диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой [3].

Литература

1. Smirnov Y. On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular dielectric waveguide filled with nonlinear isotropic homogeneous medium / Y. Smirnov, E. Smolkin // Wave Motion. — 2018. — Vol. 77. — P. 77–90.

2. Валовик Д.В. Метод возмущений в теории распространения двухчастотных электромагнитных волн в нелинейном волноводе I: TE-TE волны / Д.В. Валовик // Журнал вычислительной математики и математической физики.. — 2021. — Т. 61, № 1. — P. 108–123.

3. Мартынова В.Ю. Распространение гибридных TE-TE-волн в плоском закрытом волноводе, заполненном нелинейной средой / В.Ю. Мартынова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2021. — № 4 (60). — С. 27–45.

ЛАКУНАРНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНУЛЛИ И ЭЙЛЕРА[1]

К.А. Мирзоев (Москва, МГУ)
mirzoev.karahan@mail.ru

Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$ обозначим многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые соответственно из равенств

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},\qquad \frac{2e^{tx}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t|<2\pi$, а второе - при $|t|<\pi$, а символами B_n и E_n - числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами $B_n=B_n(0)$ и $E_n=2^nE_n(1/2)$ $(n=0,1,\ldots)$.

Лакунарные рекуррентные соотношения для чисел B_n и E_n активно изучаются с конца XIX века по настоящее время (см. [1] — [3]). В частности, такие соотношения для B_n с пропусками длины 4, 6, 8 и 10 были найдены С. Рамануджаном в начала XX века (см. [1]), а лакунарные рекуррентные соотношения для многочленов Бернулли, которые совпали бы с равенствами, полученными С. Рамануджаном в [1], при $x=0$ мне не известны.

Нами предложен метод, основанный на спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, позволяющий получить лакунарных рекуррентных соотношений с пропусками длины 2, 4 и 6 для многочленов Бернулли и Эйлера.

Вкратце изложу суть метода. Пусть $\alpha\in[0,2)$, S_α — оператор, порождённый в пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ выражением $l_1[y]:=iy'$ и граничным условием $y(0)-e^{\pi i\alpha}y(\pi)=0$, а $P_n(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное выражение $P_n(i\frac{d}{dx})y(=:\,l_n[y])$ и оператор $P_n(S_\alpha)$, порождённый им. Хорошо известно, что $P_n(S_\alpha)$ является самосопряжённым оператором, порождённым дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами $l_n[y]$ и граничными условиями $y^{(j-1)}(0)-e^{\pi i\alpha}y^{(j-1)}(\pi)=0$ $(j=1,\ldots,n)$. Кроме того, спектр σ этого оператора является дискретным и имеет вид

$$\sigma=\{\lambda|\ \lambda=\lambda_{nk}:=P_n(2k+\alpha),\ k=0;\pm1;\pm2;\ldots\},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-2026).

а собственному значению λ_{nk} соответствует собственная функция $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(2k+\alpha)x}$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

Если число $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора $P_n(S_\alpha)$ (т.е. $0 \notin \sigma$), то он имеет резольвенту R_α. Оператор R_α является интегральным оператором с ядром $G_\alpha(x,t)$ — функцией Грина задачи $l_n[y] = f$, $y^{(j)}(0) = e^{\pi i \alpha} y^{(j)}(\pi)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, для которой хорошо известна процедура её построения. С другой стороны, для него и, следовательно, для функции $G_\alpha(x,t)$ справедлива спектральная теорема о разложении в ряд по собственным функциям. Применяя её, заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in [0,2)$, $n \geqslant 2$ и пусть $P_n(x)$ - некоторый многочлен степени n с вещественными коэффициентами такой, что $P_n(2k+\alpha) \neq 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда для функции Грина $G_\alpha(x,t)$ при $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$ справедливо тождество*

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(2k+\alpha)(x-t)}}{P_n(2k+\alpha)}.$$

В докладе будет рассказано, как это тождество используется для вывода лакунарных рекуррентных соотношений с пропусками длины 2, 4 и 6 для многочленов Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$, взяв в качестве $P_n(x)$ многочлены $P_n(x) = x^n - a^n$, где $0 < a < 1$, $n = 2, 4, 6$, и положив $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$.

Доклад основан на совместных работах с Сафоновой Т.А.

Литература

1. Ramanujan S. Some properties of Bernoulli's numbers / S. Ramanujan// J. Indian Math. Soc. — 1911. — № 3. — P. 219–234.

2. Lehmer D.H. Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler / D.H. Lehmer// Ann. of Math. — 1935. — Vol. 36, № 3. — P. 637–649.

3. Merca M. On lacunary recurrences with gaps of length four and eight for the Bernoulli numbers / M. Merca// Bull. Korean Math. Soc. — 2019. — Vol. 56, № 2. — P. 491–499.

О ПОСТРОЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова
(Самара, СамГТУ, Елабуга, Елабужский институт КФУ)
miro73@mail.ru

Для построения точных решений некоторых нелинейных уравнений могут с успехом применяться нелокальные преобразования типа подстановки Коула — Хопфа [1]. Пример такого преобразования, переводящего уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = \lambda e^{u}. \tag{1}$$

в простейшее гиперболическое уравнение приведен в [1, с. 239–240].

Рассмотрим уравнение

$$u_{xyz} = \lambda e^{u}, \tag{2}$$

которое может рассматриваться как трехмерный аналог уравнения (1). Отметим, что уравнение (1) находит, в частности, применение в задаче групповой классификации гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными [2, с. 116–125]. Аналогично, точные решения уравнения (2) позволяют построить инварианты Лапласа для некоторых классов уравнений Бианки третьего порядка [3]. В связи с этим представляет интерес задача построения точных решений трехмерного и многомерных аналогов уравнения Лиувилля.

Построим нелокальное преобразование, переводящее уравнение (2) в простейшее уравнение Бианки

$$v_{xyz} = 0, \tag{3}$$

которое имеет зависящее от трех произвольных функций общее решение

$$v = \alpha(x, y) + \beta(x, z) + \gamma(y, z). \tag{4}$$

При этом используется алгоритм, основанный на применении групповых методов [1, с. 237–241].

Уравнение (2) допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z - (\xi'(x) + \eta'(y) + \zeta'(z))\partial_u,$$

где $\xi(x)$, $\eta(y)$, $\zeta(z)$ — произвольные функции. Уравнение (3) допускает операторы вида

$$X_0 = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z,$$

где $\xi(x)$, $\eta(y)$, $\zeta(z)$ произвольны, а также оператор растяжения

$$Y = v\partial_v.$$

В связи с этим предположим, что существует нелокальное преобразование

$$u = \varphi(v, v_x, v_y, v_z) \qquad (5)$$

такое, что система уравнений (2), (3), (5) допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z - (\xi'(x) + \eta'(y) + \zeta'(z))\partial_u, \quad Y = v\partial_v.$$

В результате приходим к нелокальной подстановке

$$u = \varphi(v, v_x, v_y, v_z) = \ln \frac{cv_x v_y v_z}{v^3}. \qquad (6)$$

Подстановка (6) в уравнение (2) приводит к формуле, определяющей класс решений уравнения (2), зависящих от трех произвольных функций

$$u = \ln\left(-\frac{6}{\lambda}\frac{f_1'(x)f_2'(y)f_3'(z)}{(f_1(x) + f_2(y) + f_3(z))^3}\right).$$

Здесь $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Аналогичный подход может быть применен к некоторым другим нелинейным уравнениям.

Литература

1. Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occuaring in aerodinaics / J.D. Cole // Quart. Appl. Math. — 1951. — V. 9. — P. 225–236.

2. Фущич В.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. — Киев: Наукова думка, 1989. — 336 с.

3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

4. Миронов А.Н. Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка / А.Н. Миронов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 3. — С. 389–400.

О КОНСТРУИРОВАНИИ ЦИФРОВОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО РЕСУРСА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

А.Н. Миронов, Е.Ф. Зарипова (Елабуга, ЕИ КФУ)
miro73@mail.ru

В настоящее время в Казанском (Приволжском) федеральном университете (далее КФУ) декларируется внедрение в систему университетского образования цифровых технологий, создан Институт передовых образовательных технологий КФУ, призванный направлять и координировать работу в данном направлении. Институт передовых образовательных технологий ставит перед собой следующие первоочередные цели работы: цифровизация управления, цифровая организация учебного процесса и развитие цифровых компетенций студентов и преподавателей, определение цифровизации экономики и общества в качестве основных тематик исследований. Цифровая организация учебного процесса сводится в основном к обеспечению дисциплин, предусмотренных учебными планами, цифровыми образовательными ресурсами (ЦОР). Эти ресурсы разрабатываются в соответствии с некоторыми общими требованиями, обязательными для всех ЦОР, применяемых в КФУ. Здесь мы не будем касаться вопросов, касающихся целесообразности применения ЦОР при обучении математическим дисциплинам, их возможному месту в системе обучения в вузе.

Вопросы внедрения элементов дистанционного обучения на основе цифровых технологий в систему высшего образования обсуждаются многими авторами [1]–[7]. Авторы данных статей отмечают как положительные, так и отрицательные стороны дистанционного обучения, определенные проблемы, связанные с использованием ЦОР в образовании, технические аспекты конструирования ЦОР.

Конструирование ЦОР по дисциплине «Математический анализ» — актуальная задача, связанная в том числе с внедрением цифровых образовательных ресурсов (ЦОР) в образовательный процесс в Казанском федеральном университете. При разработке ЦОР следует ставить перед собой цель сделать его максимально удобным для обучающихся. Зачастую студенты, начинающие изучать дисциплину «Математический анализ», сталкиваются с такой проблемой, как невозможность самостоятельно найти полезный и понятный электронный ресурс для дополнительных самостоятельных занятий. В связи с этим был разработан цифровой образовательный ресурс, который с одной стороны отвечает всем требованиям, предъявляемым к ЦОР в Казанском федеральном университете, а с другой стороны учитывает пожелания и предпочтения студентов, с тем, чтобы он был достаточно удобным для использования обучающимися в конкретных условиях подготовки будущих учителей математики в Елабужском институте КФУ.

Литература

1. Arnold R. Will distance disappear in distance studies? Preliminary considerations on the didactic relevance of proximity and distance / R/ Arnold // Journal of Distance Education. — 1999. — V. 2, Iss. 14. — P. 1–9.

2. Guri-Rosenblit S. “Distance education” and “e-learning”: Not the same thing / S. Guri-Rosenblit // Higher Education. —2005. —V. 49. — P. 467–493.

3. Guri-Rosenblit S. Eight paradoxes in the implementation process of E-learning in higher education / S. Guri-Rosenblit // Higher Education Policy. —2005. —V. 18, Iss. 1. —P. 5–29.

4. Guri-Rosenblit S. E-teaching in higher education: An essential prerequisite for e-learning / S. Guri-Rosenblit // Journal of New Approaches in Educational Research. —2018. —V. 7, Iss. 2. —P. 93–97.

5. Миронов А.Н. Электронный образовательный ресурс «Дифференциальные уравнения» для бакалавров направления «Математика и компьютерные науки» / А.Н. Миронов, А.А. Торопова // Современная наука. Актуальные проблемы теории и практики. Серия "Гуманитарные науки". —2015. — № 11–12. —С. 107–109.

6. Гильманова Г.Р. О месте курса по выбору «Элементы теории специальных функций» в системе обучения бакалавров направления «Математика и компьютерные науки» / Г.Р. Гильманова, А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова // Современные проблемы науки и образования. — 2017. — № 6.; URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=27259

7. Sozontova E.A. Efficiency of remote technologies on the approaching the content of a e-learning mathematics course using moodle system: Case study / E.A. Sozontova, N.A. Prodanova, L.V. Rakhmatullina, E.V. Konovalova // Periodico Tche Quimica. — 2020. — V. 17, Iss. 35. —P. 1159–1174.

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Л.Б. Миронова (Елабуга, Елабужский институт КФУ)
miro73@mail.ru

В теории гиперболических уравнений и систем уравнений важную роль играют задачи с условиями на характеристиках. Подобные задачи рассматривались в двумерном и трехмерном пространстве для систем с двукратными частными производными в работах [1]–[3].

Рассмотрим гиперболическую систему с кратными характеристиками

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^0(x_1, \dots, x_n) u_i + f_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области $G = \{x_i^0 < x_i < x_i^1\}$ n-мерного пространства выполняются включения $a_{ki}^1 \in C^2$, $a_{ki}^0 \in C^1$, $f_k \in C^1$. Назовем регулярным в области G решение класса $u_k \in C^1$, $u_{kx_kx_k} \in C$, $k = \overline{1, n}$. Обозначим через X_j грани G при $x_j = x_j^0$.

Основная характеристическая задача. *Найти регулярное в области G решение решение системы* (1)*, удовлетворяющее условиям*

$$u_k|_{\overline{X}_k} = \varphi_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

$$\Big(u_{kx_k} - \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^1 u_i\Big)\Big|_{\overline{X}_k} = \psi_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \tag{2}$$

$$k = \overline{1, n}, \quad \varphi_k, \quad \psi_k \in C^1(\overline{X}_k).$$

Путем сведения к системе интегральных уравнений доказано, что решение задачи (1)–(2) существует и единственно.

Разработан вариант метода Римана для системы (1). В терминах матрицы Римана построено решение основной характеристической задачи.

Литература

1. Миронова Л.Б. О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными / Л.Б. Миронова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2006. — Вып. 43. — С. 31–37.

2. Миронова Л.Б. К характеристическим задачам для одной системы в трехмерном пространстве / Л.Б. Миронова // Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Матем. моделирование и краевые задачи: труды Третьей Всероссийской научной конференции. Ч. 3. — Самара: СамГТУ. — 2006. —С. 164–167

3. Жегалов В.И. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными /В.И. Жегалов , Л.Б. Миронова Л.Б. // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 3. — С. 12–21.

ВОЛНОВЫЕ ФОРМЫ ПРОМЫШЛЕННОГО ВЗРЫВА НА РАЗНОМ УДАЛЕНИИ ОТ ИСТОЧНИКА

В.В. Мохова

(Воронеж, ВГУ, Обнинск, ФИЦ «ЕГС РАН»)

viktorijaperevoznikova1997@gmail.com

Предметом исследования являются волновые процессы, возбуждаемые в промышленных карьерах Центрально-Черноземного экономического района. В настоящее время в районе функционирует более 20 карьеров, в которых производятся короткозамедленные взрывы, мощностью от нескольких тонн до 2500 тонн.

При этом возбуждаются сейсмические события, энергия которых колеблется от 10^5 до 10^{12} Дж. На примере взрыва в Павловском карьере рассмотрим характер производства промышленного взрыва и возникающие при этом сейсмические эффекты [1].

Для построения полной модели сейсмического события рассмотрим детерминированную модель короткозамедленного взрыва.

Пусть имеется единичный сейсмический импульс $f(t)$ с ограниченной энергией, такой что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt < \infty \tag{1}$$

Спектр единичного импульса определим через интеграл Фурье [30] в форме

$$s(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \qquad (2)$$

Рассматривая систему короткозамедленного взрывания как последовательность из N сейсмических импульсов одинаковой формы и разной амплитуды, появляющихся в некоторые определенные моменты времени, суммарный сейсмический сигнал запишем в форме

$$F(t)=\sum_{n=0}^{N} a_n f(t-\tau_n) \qquad (3)$$

где a_n – множитель амплитуды и τ_n– задержка появления импульса «n» Вычислим спектр функции $F(t)$, воспользовавшись теоремой о спектре суммы и теоремой смещений

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\sum_{n=0}^{N} a_n f(t-\tau_n)dt=\sum_{n=0}^{N} a_n\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau_n)e^{-i\omega t}dt=$$
$$=\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-i\omega\tau_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt=$$
$$=s(\omega)\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-i\omega\tau_n}=s(\omega)h(\omega,N,a_n,\tau_n) \qquad (4)$$

В выражении (4) функция $h(\omega,N,a_n,\tau_n)$ представляет спектральную переходную характеристику линейной системы для последовательности из N импульсов одинаковой формы смещенных относительно начала на некоторые величины задержек. Приведенное соотношение (4) позволяет оценить специфику преобразования спектра одиночного импульса в случае, когда систему можно рассматривать как аддитивную последовательность отдельных импульсов. В частности при $a=a_n$ и $\tau_n=\tau_n$, учитывая известное значение конечного ряда комплексных экспонент, получим

$$h(\omega,N,a_n,\tau_n)=ah(\omega,N,\tau)=a\sum_{n=0}^{N} e^{-i\omega n\tau}=a\frac{e^{-i\omega(N+1)\tau}-1}{e^{-i\omega\tau}} \qquad (5)$$

Модуль переходной характеристики h, равный по определению сумме квадратов его вещественной и мнимой компоненты

$$|h(\omega, N, \tau)| = a\{Re^2[h(\omega, N, \tau)] + Im^2[h(\omega, N, \tau)]\}^{1/2}, \tag{6}$$

можно вычислить непосредственно из (3.5). После ряда простых преобразований, переходя к нормированным значениям модуля переходной характеристики, запишем его в форме

$$|\tilde{h}(\omega, N, \tau)| = \frac{a}{N+1}|\frac{sin[(N+1)\pi v\tau]}{sin(\pi v\tau)}| \tag{7}$$

где в качестве аргумента используется частота колебаний $v(\omega = 2\pi v)$. Приведенное выражение для переходной характеристики линейной системы короткозамедленного взрывания в форме (7) часто используется для анализа сейсмического сигнала карьерного взрыва.

При одинаковой амплитуде импульсов наблюдаемая характеристика совпадает с классической интерференционной зависимостью: при увеличении числа ступеней взрывания увеличиваются по амплитуде и сужаются по частоте главные интерференционные максимумы. В идеале, такая характеристика должна эффективно пропускать низкочастотную часть спектра одиночного сигнала и, кроме того, служить полосовым фильтром для частот кратных характерному времени замедления.

В дальнейшем, с целью выяснения характера распространения в нелинейной геологической среде энергии взрыва, планируется выполнить моделирование сейсмических эффектов, возникающих при проведении промышленных взрывов.

Литература

1. Надежка Л.И., Сафронич И.Н., Пивоваров С.П., Орлов Р.А., Ефременко М.А. Сейсмический эффект массовых химических взрывов в карьере г. Павловска // Системы жизнеобеспечения и управления в чрезвычайных ситуациях. Межвуз. сб. науч. тр. Воронеж, Гос. тех. ун-т. – 2004. – С. 99-105.

2. Маловичко А.А., Маловичко Д.А. Применение методов численного моделирования сейсмических волновых полей для изучения разномасштабных проявлений техногенной сейсмичности // Современные математические и геологические модели природной среды: Сборник научных трудов. – М.: ОИФЗ РАН, 2002. – С. 120–138

КОНТАКТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ СУСПЕНЗИИ

С.С. Мухина (Москва, ИПУ РАН)
sveta.mukhina.1998@mail.ru

Рассмотрим задачу фильтрации жидкости со взвешенными твердыми мельчайшими частицами в недеформируемом пористом скелете. С течением времени частицы постепенно осаждаются на стенках пор и уже не возвращаются в общий поток. Данное явление наблюдается при разработке нефтяных месторождений, а также в химической и горнодобывающей промышленностях. Аналогичное явление возникает при образовании тромбов в кровеносных сосудах.

Математическая модель, описывающая нестационарное фильтрационное течение флюида со взвешенными твердыми частицами имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} - h(v)u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = h(v)u, \end{cases} \tag{1}$$

где x — пространственная координата (направление её возрастания соответствует направлению фильтрации), t — время, u, v — объемные концентрации взвешенных и осажденных частиц в порах соответственно, а $h(v)$ — коэффициент фильтрации, выражающий вероятность захвата частицы по длине фильтра.

Система (1) представляет собой частный случай системы Якоби гиперболического типа [2] и поэтому может быть связана с парой дифференциальных 2-форм на четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$.

Путем замены переменных система (1) может быть приведена к симплектическому гиперболическому уравнению Монжа–Ампера

$$u_{q_1q_2} = h(u_{q_2})u_{q_1}. \tag{3}$$

Оба инварианта Лапласа (см. [3]) для этого уравнения обращаются в нуль тогда и только тогда, когда функция захвата частиц линейна: $h(u_{q_2}) = \alpha u_{q_2} + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Таким образом, уравнение (3) контактно эквивалентно волновому уравнению $u_{q_1q_2} = 0$ только для линейных функций h. Далее мы рассматриваем нетривиальный случай $\alpha \neq 0$. В работе [4] нами было найдено точное решение уравнения (3), которое, в свою очередь, дало точное общее решение системы (1):

$$u = \frac{A'(x-t)}{\alpha(A(x-t)-B(x))}, \quad v = \frac{\beta(B(x)-A(x-t))-B'(x)}{\alpha\left(A(x-t)-B(x)\right)},$$

где A, B – произвольные дважды дифференцируемые функции.

В случае произвольной функии h построить точное решение системы (1) невозможно. Однако, используя так называемый метод «ручного интегрирования» (см. [2]), можно построить решение задачи Коши для этой системы. Суть этого метода состоит в использовании свойств характеристических распределений этой системы. Первая производная одного из них является трёхмерным вполне интегрируемым распределением, а другое не обладает этим свойством. Кривую Коши, отвечающую начальным условиям, нужно выбрать так, чтобы она лежала в плоскости Картана, а касательная к кривой не лежала в характеристических распределениях.

Литература

1. Herzig J.P. Flow of Suspensions through Porous Media / J.P. Herzig, D.M. Leclerc, P. Le Goff // Application to Deep Filtration. – Ind. Eng. Chem. — 1970. — Vol. 62. — N. 5 — P. 8–35.

2. Kushner A.G. Contact geometry and nonlinear differential equations / A.G. Kushner, V.V. Lychagin, V.N. Rubtsov // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2007. — Vol. 101. — P. 496.

3. Kushner A.G. A contact linearization problem for Monge–Ampere equations and Laplace invariants / A.G. Kushner // Acta Appl. Math. — 2008. — Vol. 101. — N. 1–3. — P. 177–189.

4. Kushner A.G. Integration of the deep bed filtration equations / A.G. Kushner, S.S. Mukhina // Lobachevskii Journal of Mathematics. — Kazan State University. — 2022. — Vol. 43. — N. 10. — P. 2785–2792.

МАЛЫЕ РИМАНОВЫ СУММЫ И ВЕКТОРНОЗНАЧНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

К.М. Нараленков (Москва, МГИМО)
naralenkov@gmail.com

Интеграл Хенстока и интеграл Мак-Шейна, для действительнозначных функций эквивалентные узкому интегралу Данжуа и интегралу Лебега соответственно, базируются на обобщении определения интеграла Римана. С другой стороны, для векторнозначных функций взаимоотношение между интегралом Хенстока и интегралом Мак-Шейна значительно усложняется. Например, даже в случае сепарабельного пространства значений интегрируемая по Хенстоку на отрезке функция может не быть интегрируемой по Мак-Шейну ни на каком его подотрезке [4]. Взаимоотношения векторнозначных интегралов Хенстока и Мак-Шейна изучались в классе всех интегрируемых функций [3], а также в классе интегрируемых измеримых по Риману функций [5], [6]. В [1] и [2] введены несколько типов равномерных условий малости для римановых сумм, в терминах которых авторы попытались охарактеризовать интегрируемые по Хенстоку на отрезке действительнозначные функции с помощью интегрируемости по Лебегу на его измеримых подмножествах. В настоящей заметке, мы рассмотрим обобщение результата из [2] утверждающего, что функция интегрируема по Хенстоку тогда и только тогда, когда она почти интегрируема по Лебегу, для класса измеримых по Риману векторнозначных функций.

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a,b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. Другие обозначения и определения можно найти в [6].

Теорема 1. *Если $f : [a,b] \to X$ измерима по Риману и интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) на $[a,b]$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset [a,b]$ и измеримый масштаб δ на $[a,b]$ такие, что $\mu([a,b] \setminus F) < \varepsilon$, функция f ограничена на F и неравенство*

$$\left\| \sum_{k:t_k \notin F} f(t_k)\mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполнено для всякого разбиения $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ Хенстока (Мак-Шейна) отрезка $[a,b]$ согласованного с масштабом δ.

Теорема 2. *Пусть* $f : [a,b] \to X$. *Если для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется измеримое множество* $E \subset [a,b]$ *и измеримый масштаб* δ *на* $[a,b]$ *такие, что* f *измерима по Риману и интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) на* E *и неравенство*

$$\left\| \sum_{k:t_k \notin E} f(t_k)\mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполнено для всякого разбиения $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ *Хенстока (Мак-Шейна) отрезка* $[a,b]$ *согласованного с масштабом* δ, *то* f *измерима по Риману и интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) на* $[a,b]$.

Литература

1. Lu Shi-Pan Globally Small Riemann Sums and the Henstock Integral / Lu Shi-Pan, Lee Peng-Yee // Real Anal. Exch. — 1990–91. — Vol. 16, No. 2. — Pp. 537–545.

2. Gordon R.A. Riemann tails and the Lebesgue and Henstock integrals / R.A. Gordon // Real Anal. Exch. — 1991–92. —Vol. 17, No. 2. — Pp. 789–795.

3. Naralenkov K. Several comments on the Henstock-Kurzweil and McShane integrals of vector-valued functions / K. Naralenkov // Czech. Math. J. — 2011. —Vol. 61. — Pp. 1091–1106.

4. Naralenkov K.M. A Henstock-Kurzweil integrable vector-valued function which is not McShane integrable on any portion / K.M. Naralenkov // Quaestiones Math. — 2012. —Vol. 35, No. 1. — Pp. 11–21.

5. Caponetti D. On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions / D. Caponetti, V. Marraffa, K. Naralenkov // Monatshefte Math. — 2017. — Vol. 182, No. 3. — Pp. 513–536.

6. Нараленков К.М. О дескриптивных характеристиках некоторых векторнозначных обобщений интеграла Римана / К.М. Нараленков // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. Воронеж. зим. мат. школа. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. —С. 221–224.

ВНУТРЕННИЕ МЕТРИКИ И КВАЗИМЕТРИКИ В ПОДОБЛАСТЯХ КОНЕЧНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

С.Р. Насыров (Казань, КФУ)
semen.nasyrov@yandex.ru

В последние годы возрос интерес к изучению различных метрик d, имеющих интересные приложения в геометрической теории функций (см., напр., [1]). Одними из наиболее важных являются так называемые внутренние (intrinsic) метрики, которые учитывают не только близость точек друг к другу в евклидовой метрике, но и расположение их по отношению к границе области. С помощью этих метрик можно часто достаточно просто оценивать гиперболическое расстояние между точками области, в то же время, эти метрики гораздо легче подсчитывать, чем гиперболическую метрику. Представляют интерес также квазиметрики, т. е. функции, которые удовлетворяют всем свойствам метрик за исключением неравенства треугольника, оно заменяется неравенством $d(x,z) \leqslant C(d(x,y)+d(y,z))$ с некоторой константой $C \geqslant 1$.

Пусть G — собственная подобласть пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $|x-z|$ евклидово расстояние между точками x и y в $\mathbb{R}^n$ и через $d_G(x)$ — расстояние от точки $x \in G$ до границы ∂G, т. е. $d_G(x) := \inf\{|x-z| \mid z \in \partial G\}$.

1) Одной из наиболее интересных внутренних (квази-)метрик является так называемая двуточечная функций (point pair function) $p_G : G \times G \to [0,1)$, которая определяется равенством

$$p_G(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{|x-y|^2 + 4d_G(x)d_G(y)}}\,, \quad x, y \in G. \tag{1}$$

Эта функция введена в [2], в этой же статье замечено что p_G не является метрикой, если область G совпадает с единичным кругом в $\mathbb{R}^2$.

Мы устанавливаем, что для любой области G функция $p_G(x,y)$ является квазиметрикой с константой $C = \sqrt{5}/2$, причем по классу всех собственных подобластей G в $\mathbb{R}^n$ эта константа неулучшаема.

[1] Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

В то же время, для некоторых областей $p_G(x,y)$ является метрикой, например, для $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ при $n \geqslant 2$.

Также рассматриваются квазиметрики $p_G^\alpha(x,y)$, обобщающие (1) в том смысле, что вместо константы 4 в знаменателе берется некоторая константа $\alpha > 0$. Доказано, что при каждом $\alpha \in (0,12]$ функция $p_G^\alpha(x,y)$ определяет метрику в случае, когда G совпадает с $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ или верхним полупространством $\mathbb{H}_+^n$ при $n \geqslant 2$. В то же время, $p_G^\alpha(x,y)$ не является метрикой в шаре единичном шаре $\mathbb{B}^n$ ни при каком $\alpha > 0$.

2) Мы также рассматриваем s-метрику (triangular ratio metric) в области G, определяемую формулой

$$s_G(x,y) = \frac{|x-y|}{\inf_{z\in\partial G}(|x-z|+|z-y|)}\,, \qquad x,y \in G.$$

и изучаем ее связь с гиперболической метрикой $\rho_G(u,v)$ в различных подобластях G на плоскости, в частности, в многоугольных областях. Для ряда областей мы даем оценку снизу для наилучшей константы c в неравенстве

$$\operatorname{th}\frac{\rho_G(x,y)}{2} \leqslant c\, s_G(x,y), \qquad x,y \in G.$$

Доклад основан на результатах, полученных совместно с М. Вуориненом, Д. Даутовой, Р. Каргаром и О. Райнио [3, 4].

Литература

1. Hariri P. Conformally invariant metrics and quasiconformal mappings / P. Hariri, R. Klén, M. Vuorinen. — Berlin, Springer, Springer Monographs in Mathematics, 2020. — xix+502 p.

2. Chen J. Lipschitz conditions, triangular ratio metric, and quasiconformal maps / J. Chen, P. Hariri, R. Klén, M. Vuorinen // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2015. — V. 40. — P. 683–709.

3. Dautova D. Metrics and quasimetrics induced by point pair function / D. Dautova, S. Nasyrov, O. Rainio, M. Vuorinen // Bulletin of the Brazilian Math. Soc., New Series. — 2022. — V. 53. — P. 1377–1401.

4. Dautova D. Intrinsic metrics in polygonal domains / D. Dautova, R. Kargar, S. Nasyrov, M. Vuorinen // arXiv.org. — 2022. — URL: https://arxiv.org/abs/2206.03744. — 20 p.

МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ГАММА-РОСТА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПОЛУКОЛЬЦЕ[1]

А.А. Наумова (Курск, КГУ)
aliona.filatowa2013@yandex.ru

Л. Рубел и Б. Тейлор [1] установили связь между ростом мероморфной в комплексной плоскости функции и ростом ее коэффициентов Фурье. Аналогичный результат для полуплоскости был получен в работе [2]. Мы получаем критерий принадлежности мероморфной функции конечного гамма-роста в неограниченном полукольце $\mathbb{D}_+ = \{z : |z| \geqslant 1, \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Функция f называется *истинно аналитической* в $\mathbb{D}_+$, если f — аналитическая функция в $\mathbb{D}_+$ и $\varlimsup\limits_{z\to t} \ln|f(z)| \leqslant 0$ для всех $t \in \partial\mathbb{D}_+$. Через JA^* обозначим класс истинно аналитических функций в $\mathbb{D}_+$. Функция f называется *истинно мероморфной функцией* в $\mathbb{D}_+$, если она может быть представлена как отношение двух истинно аналитических функций из класса JA^*. Класс истинно мероморфных функций в $\mathbb{D}_+$ обозначим через JM^*. Пусть $f \in JM$ и пусть λ — ее полная мера, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложении меры λ. Обозначим

$$m(r,f) := \frac{1}{r}\int_0^\pi \ln^+|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\, d\varphi\,, N(r,f,r_0) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\,dt\,,$$
$$T(r,f,r_0) := m(r,f) + N(r,f,r_0) + m(r_0, 1/f)\,,$$

где $r_0 > R_0$ — произвольное фиксированное число.

Коэффициенты Фурье функции $f \in JM^*$ определяются равенством [2]

$$c_k(r,f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta})|\sin(k\theta)\,d\theta,\ k\in\mathbb{N},\ r > R_0\,.$$

Через $\gamma(r)$ обозначим *функцию роста*, т.е. неубывающую неограниченную функцию на полуинтервале $(0, +\infty)$.

Теорема. *Пусть* $f \in JM^*$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Функция* f *имеет конечный* γ*-рост, т.е. существуют положительные постоянные* A *и* B *такие, что* $T(r,f) \leqslant A\gamma(Br)$ *для всех* $r \in [r_0, \infty)$.

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 22-21-00012, https://rscf.ru/project/22-21-00012/).

2) (2a) *Коэффициенты Фурье функции* f *удовлетворяют неравенству* $|c_k(r,f)| \leqslant A\gamma(Br)$, $k \in \mathbb{N}$, *при некоторых положительных* A, B (*возможно других*) *и всех* $r \in [r_0, \infty)$;

(2b) *мера* λ_+ (*или мера* λ_-) *имеет конечную* γ*-плотность.*

Мера λ_+ имеет конечную γ-плотность, если $N(r,f,r_0) \leqslant A\gamma(Br)$ при некоторых положительных A, B и всех $r \in [r_0, \infty)$.

Литература

1. Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions / L.A. Rubel // Bull. Soc. Math. France. — 1968. — Vol. 96. — Pp. 53–96.

2. Малютин К.Г. Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости / К.Г. Малютин // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 6. — С. 51–70.

КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ФРЕЙМОВ ПАРСЕВАЛЯ[1]

С.Я. Новиков, В.В. Севостьянова

(Самара, Самарский университет)

nvks@ssau.ru

Фреймы конечномерных пространств становятся предметом активных исследований алгебраистов и аналитиков, а также специалистов по цифровой обработке сигналов [1, 2, 3]. Приведем два эквивалентных определения фрейма. Пусть n и d натуральные числа, причем $n \geqslant d$. *Конечный фрейм* в d-мерном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}^d$ — это произвольный полный набор векторов: $\mathrm{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$.

Второе определение фрейма выглядит так. Набор векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *фреймом* для вещественного или комплексного $\mathbb{H}^d$, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^d$,

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Эти два определения эквивалентны [4].

Если фреймовые границы равны между собой ($a = b$), то представление произвольного вектора $\mathbf{x}$ в виде линейной комбинации век-

[1] Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-878).

торов фрейма становится особенно простым:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{d}\langle \mathbf{x}, \varphi_i\rangle\varphi_i,\ \mathbf{x}\in\mathbb{H}^d.$$

Такие фреймы называются *жесткими* или *a-жесткими.* 1-жесткие фреймы называют *фреймами Парсеваля* или *нормализованными* жесткими фреймами.

Проведена классификация фреймов по классам их эквивалентностей. Показано, что в пространствах $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^7$ равноугольные фреймы Парсеваля с 10 и 14 векторами соответственно оказываются единственными с точностью до введенной проективно-перестановочной унитарной эквивалентности. Аналогичная единственность получена для общего равномерного фрейма Парсеваля с $d+1$ векторами в пространстве $\mathbb{R}^d$. Такие вопросы неоднократно поднимались в литературе [5, 2, 3].

Большое внимание в прикладных исследованиях привлекают фреймы с полным спарком, это фреймы $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ в $\mathbb{H}^d$ такие, что каждый набор из d векторов этого фрейма является линейно независимым [6]. Вычисление спарка, то есть минимального количества линейно зависимых векторов системы, является вычислительно гораздо более сложной задачей, чем вычисление ранга матрицы. В данной заметке изложена методика, которая, возможно, облегчит вычисление спарка. Весьма полезным в эквивалентной классификации фреймов оказалось использование матриц Зейделя и техники дополнений по Наймарку.

Полное изложение результатов опубликовано в [7].

Литература

1. Waldron S.F.D. An Introduction to Finite Tight Frames / S.F. Waldron. — Boston : Birkhauser, 2018. — 587 pp.

2. Fickus M. Equiangular tight frames that contain regular simplices / M. Fickus, J. Jasper, E.J. King, D.G. Mixon // Linear Algebra and its applications. —2018. — V. 555 —pp.98-138.

3. Novikov S.Ya. Equiangular Tight Frames with Simplices and with Full Spark in R^d / S.Ya. Novikov // Lobachevskii Journal of Mathematics. —2021. —V. 42, I. 1, —pp.155-166.

4. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases / O. Christensen. — Boston : Birkhauser, 2002. — 440 pp.

5. Истомина М.Н. О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц / М.Н. Истомина, А.Б. Певный // Математическое просвещение. —2007. — Т. 11 —с.105-112.

6. Elad M. Sparse and Redundant Representations / M. Elad. — New York : Springer, 2010. —376 pp.

7. Новиков С.Я. Классы эквивалентности фреймов Парсеваля. / С.Я. Новиков, В.В. Севостьянова// Математические заметки. — 2022. — Т. 112, вып. 6 — с.850-866.

ОСОБЕННОСТИ И ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

И.С. Новичихин, И.В. Винокурова (Воронеж, ВГТУ)
formeys777@gmail.com

В последние несколько лет искусственный интеллект развивается стремительными темпами, многие сферы деятельности человека уже не могут обойтись без данной технологии. Искусственный интеллект значительно экономит временные и финансовые ресурсы на работу, которую до недавнего времени был способен выполнить лишь человек.

В процессе обучения нейросети задействован человек, который ищет ошибки. Такое обучение называется «supervised learning» [1].

Генетические алгоритмы – процедуры поиска, основанные на механизмах наследования и естественного отбора. В них используется эволюционный принцип выживания наиболее приспособленных особей. В процессе работы алгоритма набор данных подвергается размножению путем скрещивания определенных участков. Возможно добавление механизма мутаций. Полученный список потомков проверяется и сортируется по оптимальности найденного решения, самые неудачные потомки отсеиваются, оставшиеся потомки продолжают цикл размножения и мутаций. В конечном итоге остаются самые удачные данные.

Генетический алгоритм может использоваться для обучения нейросетей. В условиях неопределенности эволюционные методы, в том числе и генетические алгоритмы, имеют наиболее высокие шансы для достижения требуемых результатов [2]. Генетический алгоритм может использоваться и вне рамок технологии искусственного интеллекта.

Задача коммивояжера – одна из самых известных задач комбинаторной оптимизации, которая заключается в поиске самого выгодного маршрута, проходящего через несколько городов хотя бы по одному разу с последующим возвратом в исходный город. Критерием выгодности маршрута может быть расстояние, затрачиваемые ресурсы, совокупность нескольких критериев и тому подобное.

Размер пространства поиска факториально зависит от количества городов. При наличии в условии 13-ти городов таких выполнений будет уже 6 миллиардов, и компьютер может их считать неделю или даже больше [3].

Одним из возможных вариантов решения данной проблемы является генетический алгоритм, который способен найти приемлемое решение, не перебирая все возможные маршруты.

Предполагается использовать данную технологию для разработки программы поиска кратчайшего маршрута между определенным набором точек с различным расстоянием между ними. Это позволит эффективно планировать маршрут различных экскурсий.

Генетический алгоритм незаменим в современной жизни. Он используется в различных отраслях информационных технологий, таких как обучение нейронных сетей, а также востребован вне рамок отрасли искусственного интеллекта, помогая решить задачи, которые крайне сложно или невозможно решить методом перебора всех вариантов. Стоит отметить, что генетические алгоритмы эффективны лишь в случаях, когда для конкретной задачи не существует подходящего специального алгоритма решения.

Литература

1. Введение в машинное обучение [Электронный ресурс] — Режим доступа: https://habr.com/ru/post/427867 (дата обращения: 15.01.2023).

2. Использование генетических алгоритмов в обучении нейронных сетей [Электронный ресурс] — Режим доступа: https://science-education.ru/ru/article/view?id=5138 (дата обращения: 16.01.2023).

3. Решаем задачу коммивояжёра простым перебором [Электронный ресурс] — Режим доступа: https://thecode.media/path-js/ (дата обращения: 16.01.2023).

О ЛАКУНАХ В КОЭФФИЦИЕНТАХ ПОЛИНОМОВ КАНТОРОВИЧА ОТ СИММЕТРИЧНОГО МОДУЛЯ

И.В. Окорочков (Москва, МПГУ)
ivan.okorochkov@yandex.ru

Для симметричного модуля

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

рассмотрим полиномы Канторовича

$$K_n(f,z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(s)\,ds \cdot C_n^k z^k (1-z)^{n-k}. \qquad (2)$$

Здесь $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$, а C_n^k — биномиальные коэффициенты. Недавно в работе [1] установлено, что в примере (1) полиномы Канторовича (2) напрямую выражаются через стандартные полиномы Бернштейна. В частности, используя прежние результаты [2] (см. также [3]), нетрудно получить разложение полиномов (2) по степеням независимой переменной z.

Оказывается, полиномы с четными номерами $n = 2m$ допускают алгебраическое представление

$$\begin{aligned} K_{2m}(f,z) &= \frac{2m}{2m+1}(1-2z) + \frac{1}{2(2m+1)}\, C_{2m}^m\, z^m + \\ &+ \frac{1}{2(2m+1)}\, C_{2m}^m \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\, \gamma_{m,k}\, C_m^k\, \frac{z^{m+k}}{(m+k-1)(m+k)}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\gamma_{m,k} = 8mk - (m+k-1)(m+k)$. Формула (3) действует при всех $m \in \mathbb{N}$.

Множители $\gamma_{m,k}$ в зависимости от сочетания значений m и k могут быть положительными, отрицательными и даже равными нулю. В последнем случае из разложения (3) при номере $n = 2m$ будет выпадать слагаемое степени $\nu = m + k$. Этот *эффект лакунарности* требует исследования диофантова уравнения

$$(m+k-1)(m+k) = 8mk \qquad (4)$$

на множестве $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, m\}$.

Уравнение (4) тесно связано со следующим уравнением для почти равнобедренных пифагоровых троек

$$a^2 + (a+1)^2 = c^2. \qquad (5)$$

Натуральные решения диофантова уравнения (5) образуют последовательность $(a_j,\, c_j)_{j\in\mathbb{N}}$, подчиненную рекуррентному правилу

$$a_{j+1} = 3a_j + 2c_j + 1, \quad c_{j+1} = 4a_j + 3c_j + 2, \quad j \in \mathbb{N},$$

с начальным условием $a_1 = 3$, $c_1 = 5$ (см. [4], [5]).

Теорема. *Все нужные решения исходного уравнения* (4) *представимы в виде*

$$k_j = \frac{c_j - 1}{4}, \quad m_j = \frac{4a_j + 3c_j + 1}{4}, \quad j \in \mathbb{N},$$

т. е. выражаются через натуральные решения уравнения (5)*. Справедливы рекуррентные соотношения*

$$k_{j+1} = m_j, \quad m_{j+1} = 6m_j - k_j + 1, \quad j \in \mathbb{N},$$

с начальным условием $k_1 = 1,\ m_1 = 7$. *Имеются явные формулы*

$$k_j = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{j} C_{2j+1}^{2i+1}\, 2^i - 1\right), \quad m_j = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{j+1} C_{2j+3}^{2i+1}\, 2^i - 1\right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Укажем несколько первых решений k_j, m_j.

j	1	2	3	4	5	6	7	8
k_j	1	7	42	246	1435	8365	48756	284172
m_j	7	42	246	1435	8365	48756	284172	1656277

Следствием теоремы будут соответствующие результаты для номера полинома $n_j = 2m_j$ и степени слагаемого $\nu_j = m_j + k_j$, при которых возникает эффект лакунарности. Имеется много комбинаторных и алгебраических соотношений, связанных с указанными величинами. Отметим, что для полиномов Бернштейна подобные эффекты не возникают (ср. с формулами в [2], [3]).

Выражаю благодарность И. В. Тихонову и В. Б. Шерстюкову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Окорочков И. В., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. О связи полиномов Бернштейна и Канторовича для симметричного модуля // Владикавк. матем. журнал. — 2022. — Т. 24, вып. 1. — С. 87–99.

2. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 15, № 26. — С. 6–40.

3. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 126–175.

4. Sierpinski W. Elementary Theory of Numbers: Second English Edition. — Amsterdam: North-Holland, 1988. — xii+514 p.

5. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. — М.: Учпедгиз, 1959. — 112 с.

ОБ ОДНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЯЗКОУПРУГОСТИ[1]

В.П. Орлов (Воронеж, ВГУ)
orlov_vp@mail.ru

В $Q_T = [0,T] \times \Omega$, где $\Omega \in R^N$, $N = 2,3$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается задача о движении вязкоупругой жидкости типа Олдройда A:

$$\partial u/\partial t + \sum_{i=1}^{N} u_i \partial u/\partial x_i - \mu_0 \Delta u + \operatorname{grad} p -$$

$$\mu_1 \mathrm{Div} \int_{\tau_u(t,x)}^{t} \exp((s-t)\lambda)\, \mathcal{E}(u)(s, z(s;t,x))\, ds = f,$$

$$\operatorname{div} u(t,x)=0,\ (t,x)\in Q_T;\ \int_\Omega p(t,x)\, dx = 0;\ t \in [0,T];$$

$$u(0,x) = u^0(x),\ x \in \Omega, u(t,x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x),\ t \in [0,T].$$

Здесь $u(t,x)=(u_1(t,x),\dots,u_N(t,x))$ и $p(t,x)$ искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t,x)$ плотность внешних сил, матрица $\mathcal{E}(u)=\{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^N$, $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ — тензор скоростей деформаций. Дивергенция $\mathrm{Div}\, \mathcal{E}(u)$ матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ константы, характеризующие вязкоупругие свойства жидкости, u^0 и φ заданные начальное и граничное значения функции u. Вектор-функция $z(\tau;t,x)$ определяется как регулярный лагранжев поток (РЛП), порожденный задачей Коши (или, что то же, функцией u)

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s;t,x))\, ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega. \qquad (1)$$

Функция $z(\tau;t,x)$ определяет траекторию движения частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00051).

Функция $\tau_u(t,x)$ определяется как $\tau_u(t,x) = \inf\{\tau : z(s;t,x) \in \Omega, s \in (\tau,t]\}$ и означает момент вхождения в Ω частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$.

Предполагается,что граничная функция $\varphi(x)$ является следом на $\partial\Omega$ непрерывно дифференцируемой на Ω соленоидальной функции $a(x)$. Представим функцию u в виде $u = v + a$. Обозначим через $\mathtt{Z}$ оператор, ставящий в соответствие функции v РЛП, порожденный функцией $v + a$, так что $\mathtt{Z}(v)(\tau;t,x) = z(\tau;t,x)$.

Пусть $W_1 = \{v : \ v \in L_2(0,T;V), \ v' \in L_1(0,T;V^{-1})$ (определение пространств H и V см. в [1]). Здесь v' означает производную по t функции $v(t,\cdot)$ как функции со значениями в V^{-1}. Пусть $b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_i \partial v_j/\partial x_i w_j\, dx$, где $u,v,w \in V$.

Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$. Слабым решением задачи A называется функция $v \in W_1$, удовлетворяющая условию $v(0) = u^0 - a$ и тождеству

$$d(v,\varphi)/dt - \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) +$$

$$\mu_1(\int_{\tau_{v+a}(t,x)}^t \exp((s-t)\lambda)\mathcal{E}(v+a)(\tau,\mathtt{Z}(v)(\tau;t,x))\, d\tau\, ,\mathcal{E}(\varphi)) =$$

$$\langle f,\varphi\rangle - b(v,a,\varphi) - b(a,v,\varphi) - b(a,a,\varphi) - \mu_0(\mathcal{E}(a),\mathcal{E}(\varphi))$$

при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0,T]$.

При некоторых ограничениях на граничную функцию φ устанавливается существование слабого решения задачи A.

Доказательство предполагает аппроксимацию задачи A приближениями галеркинского типа с последующим предельным переходом на основе априорных оценок. Для исследования поведения траекторий негладкого поля скоростей u используется теория регулярных лагранжевых потоков.

Результаты получены совместно с В.Г. Звягиным.

Литература

1. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1987. — 408 с.

2. Звягин В.Г. Об априорных оценках слабых решений одной неоднородной задачи динамики вязкоупругой сплошной среды с памятью / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Известия вузов. Математика. — 2021. — № 5. — С. 43–54.

3. Орлов В.П. Об одной неоднородной регуляризованной задаче динамики вязкоупругой сред / В.П. Орлов // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 8. — С. 58–64.

4. Булинская Е.В. Эмпирические асимптотически оптимальные политики / Е.В. Булинская // Современные проблемы математики и механики : сборник, посвященный 190-летию П.Л. Чебышева. — М. : Изд-во Моск. ун-та. — 2011. — Т. 7, вып. 1. — С. 8–15.

5. Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

О СТРУКТУРЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С.С. Орлов, Г.К. Соколова (Иркутск, ИГУ; Новосибирск, НГУ, НГТУ)

orlov_sergey@inbox.ru, g.sokolova@g.nsu.ru

Пусть $\mathbb{K}$ обозначает поле вещественных или комплексных чисел. Рассмотрим периодическую функцию $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ одного аргумента с основным периодом $T_0 \in \mathbb{K}$. Как известно, для того чтобы задать $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, достаточно определить её на *основном промежутке*, т.е. на полуинтервале длины, равной T_0. Заметка посвящена свойству периодичности функций $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, определённых всюду на $\mathbb{K}^n$. Вводится понятие *фундаментального множества* таких функций.

Сначала опишем структуру множества периодов периодической функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Положим, что система линейно независимых единичных векторов $\bar{\mathcal{T}}_k \in \mathbb{K}^n$, где $k = 1, 2, \dots, n$, образует базис $\mathbb{K}^n$. Множество периодов функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{K}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathcal{T}}_k,\, n_k \in \mathbb{Z},\, \alpha_k \in \mathbb{K}\Big\},$$

где векторы $\bar{T}_k$ порождают n-мерную решётку $\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{m_1})$ ранга m_1 (см. статью [1, стр 13]) и являются основными периодами функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ в заданных направлениях $\bar{\mathcal{T}}_k$, $k = 1, 2, \dots, m_1$, а $\bar{\mathcal{T}}_k$, $k = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$, — направления постоянства функции, числа n_k и α_k одновременно не обращаются в нуль, и $m_1 + m_2 \leqslant n$. Связь между базисными векторами решётки Λ периодов функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ и её основными периодами исследована ранее авторами в заметке [2]. Так как множество периодов P_f функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ является объединением аддитивных абелевых множеств, то имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \mathrm{span}\{\bar{\mathcal{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

Таким образом, множество периодов произвольной периодической функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ есть прямая сумма дискретного (n-мерной решётки ранга m_1) и непрерывного (m_2-мерного подпространства пространства $\mathbb{K}^n$) множеств.

Введём понятие *фундаментального множества* периодической функции нескольких переменных. Пусть $\mathbb{K}^n = \mathrm{span}\{\bar{\mathcal{T}}_1, \bar{\mathcal{T}}_2, \ldots, \bar{\mathcal{T}}_n\}$, и функция $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ периодическая с множеством периодов P_f. Тогда *фундаментальное множество* $\mathcal{F}_f$ периодической функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ имеет вид

$$\mathcal{F}_f = \Big\{\bar{r} \in \mathbb{K}^n : \bar{r} = \sum_{k=1}^{m_1} \omega_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+m_2+1}^{n} t_k \bar{\mathcal{T}}_k,\ \omega_k \in [0,1),\ t_k \in \mathbb{K}\Big\},$$

Данное понятие является аналогом понятия основного промежутка периодической функции одного аргумента. Для фундаментального множества $\mathcal{F}_f$ справедливо следующее представление

$$\mathcal{F}_f = P_{\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1})} \oplus \mathrm{span}\{\bar{\mathcal{T}}_{m_1+m_2+1}, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+m_2+2}, \ldots, \bar{\mathcal{T}}_n\},$$

т.е. множество $\mathcal{F}_f$ периодической функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ есть прямая сумма фундаментального параллелепипеда $P_{\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1})}$ решётки Λ периодов функции и $(n - m_1 - m_2)$-мерного подпространства $\mathbb{K}^n$. Отметим, что фундаментальное множество $\mathcal{F}_f$ функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ содержит большой произвол и определяется не только с точностью до сдвига на постоянную величину, как в случае функции одного аргумента, но и с точностью до выбора базиса подпространства.

В завершении отметим, что указанные результаты планируется применить к изучению меры произвола общего решения $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ разностного функционального уравнения

$$u(\bar{r} + \bar{T}_i) - \lambda u(\bar{r}) = 0,\ \bar{r} \in \mathbb{K}^n,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ m \leqslant n,$$

где спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ и векторы $\bar{T}_i \in \mathbb{K}^n$ заданы.

Литература

1. Скриганов М.М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов / М.М. Скриганов // Труды МИАН СССР. — 1985. — Т. 171. — С. 3–122.

2. Соколова Г.К. Об основных периодах периодической функции нескольких переменных / Г.К. Соколова, С.С. Орлов // Материалы 19-й Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. — С. 294–297.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЖАДНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ИХ МОДИФИКАЦИИ ПО ПАРЕ СЛОВАРЕЙ

А.С. Орлова (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
anastasia-orlova1@ya.ru

Жадные алгоритмы являются обобщением рядов Фурье. При рассмотрении ортогонального словаря чисто жадные алгоритмы [1] совпадают с рядом Фурье, который переупорядочен по убыванию норм слагаемых, при этом для слабых жадных алгоритмов [2] такое переупорядочение будет ослаблено.

В работе [3] П.А. Бородин и Е. Копецка для чисто жадного алгоритма (ЧЖА) вводят обобщение — чисто жадный алгоритм по паре словарей (D_1, D_2). В этом случае на нечётных шагах разложение проводится по словарю D_1, а на чётных — по словарю D_2. Для такого алгоритма была доказана следующая теорема [3].

Теорема 1. *В гильбертовом пространстве H для произвольных словарей D_1 и D_2 и любого вектора $x \in H$ ЧЖА по паре словарей (D_1, D_2) сходится к приближаемому вектору x.*

В статье [4] было проведено сравнение стандартного ЧЖА и его модификации по паре словарей. В частности, было показано, что на индивидуальном векторе стандартный ЧЖА может быть быстрее и может быть медленнее своей модификации по паре словарей.

Для (слабого) ортогонального жадного алгоритма также можно определить аналогичную модификацию по паре словарей.

В статье В.Н. Темлякова [2] было доказано достаточное условие сходимости слабого ортогонального жадного алгоритма (СОЖА).

Теорема 2. *Если для ослабляющей последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ряд $\sum\limits_n t_n^2$ расходится, то в гильбертовом пространстве H для про-*

извольного словаря D и любого вектора $x \in H$ СОЖА сходится к приближаемому вектору x.

В этой же работе [2] была получена оценка скорости сходимости.

Теорема 3. *Для произвольных словаря D, ослабляющей последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ и вектора $x \in \mathcal{A}_1(D)$ верно*

$$\|r_n^{WOGA(D)}(x)\|_2 \leqslant \|x\|_{\mathcal{A}_1(D)} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} t_k^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Для СОЖА по паре словарей верны аналогичные теоремы.

Теорема 4. *Если для ослабляющей последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ряд $\sum\limits_n t_n^2$ расходится, то в гильбертовом пространстве H для произвольных словарей D_1 и D_2 и любого вектора $x \in H$ СОЖА по паре словарей (D_1, D_2) сходится к приближаемому вектору x.*

Теорема 5. *Для произвольных словарей D_1 и D_2, ослабляющей последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ и вектора $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ верно*

$$\|r_n^{WOGA(D_1,D_2)}(x)\|_2 \leqslant \|x\|_{\mathcal{A}_1(D_1,D_2)} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} t_k^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

где $\|x\|_{\mathcal{A}_1(D_1,D_2)} = \max\{\|x\|_{\mathcal{A}_1(D_1)}, \|x\|_{\mathcal{A}_1(D_2)}\}$.

Поскольку СОЖА по словарю D и по паре словарей (D, D) совпадают, то без дополнительных ограничений на словари классовые оценки скорости сходимости для двух алгоритмов будут эквивалентны.

Если $t_n \equiv 1$, то СОЖА совпадает с ортогональным жадным алгоритмом (ОЖА). Так же как и ЧЖА, в случае произвольных словарей стандартный ОЖА на индивидуальном векторе может быть быстрее и может быть медленнее своей модификации по паре словарей. Так, верны следующие теоремы.

Теорема 6. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что ОЖА по словарю D_1 и ОЖА по словарю D_2 не сходятся за конечное число шагов, ОЖА по паре словарей (D_1, D_2) сходится за конечное число шагов.*

Теорема 7. *Существуют два нормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что ОЖА по словарю D_1 и ОЖА по словарю D_2 сходятся за конечное число шагов, ОЖА по паре словарей (D_1, D_2) не сходится за конечное число шагов.*

Литература

1. DeVore R.A. Some remarks on greedy algorithms / R.A. DeVore, V.N. Temlyakov // Adv. Comput. Math. — 1996. — Т. 5, № 1. — С. 173–187.

2. Temlyakov V.N. Weak greedy algorithms / V.N. Temlyakov // Adv. Comput. Math. — 2000. — Т. 12, № 2–3. — С. 213–227.

3. https://arxiv.org/abs/2112.05094

4. Орлова А.С. Сравнение чисто жадного алгоритма и чисто жадного алгоритма по паре словарей / А.С. Орлова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. *(в печати)*

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ СФЕРАМ НА ГРАФЕ[1]

С.Н. Ощепкова (Воронеж, ВГУИТ)

osonia@mail.ru

Рассмотрим на графе $G = G_0 \cup \partial G_0$ простейшую краевую задачу:

$$\Delta u = 0,$$

$$u\big|_{\partial G_0} = \vec{A},$$

что эквивалентно набору уравнений

$$u_i'' = 0, \quad \sum u_i' = 0$$

на рёбрах e_i и, соответственно, во внутренних вершинах (в вершинах, лежащих в G_0). Во втором соотношении суммирование производится по всем рёбрам e_i, примыкающим к данной вершине, а производные вычисляются в направлении от неё. Краевые условия в вершинах $v_i \in \partial G_0$ имеют вид

$$u(v_i) = A_i.$$

Предполагается непрерывность u на G. Функции, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, естественно назвать гармоническими и с формальной точки зрения, и в силу наличия у таких функций некоторых свойств, аналогичных свойствам обычных гармонических функций в области эвклидова пространства. Если $x_0 \in G_0$, то для метрических сфер достаточно малого радиуса (радиус должен быть

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (проект AP14871251).

меньше расстояния до ближайшей вершины, исключая саму X, если она является вершиной) выполняется теорема о среднем (значение функции u в центре сферы равно среднему арифметическому значений u в точках сферы). Оказывается, ограничения на радиус можно снять, если вместо метрической сферы рассмотреть сферу «стохастическую». Множество точек $X_1, X_2, \ldots, X_k$, «окружающих» X_0 назовём стохастической сферой, если вероятность $P\{X_0 \to X_i\}$ первого достижения X_i, а не других X_j $(j \neq i)$ одинакова. Эта теорема доказана для произвольного графа, но метрическое описание стохастической сферы получено пока только для графа-дерева.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ [1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H} - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|q-q'|} + U(|q-q'|) \right) \mid \psi(q') \mid^2 dq')\psi = \lambda\psi, \qquad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \qquad (2)$$

где

$$H = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \Big) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $U = U(z)$ — непрерывно дифференцируемая при $z \geqslant 0$ функция, для которой справедливо разложение

$$U(z) = U_0 + \frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad z \to \infty.$$

Здесь U_0, U_1, U_2 — константы. Будем предполагать, что $U_1 \neq -1$.

Теория квазиклассического приближения для операторов типа Хартри начала развиваться с середины 70 - х годов прошлого века.

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012)

(см., например, работы В.П. Маслова, М.В. Карасева, И.В. Сименога, где рассматривались спектральные задачи). В статье [1] было изучено двумерное уравнение Хартри (1) с кулоновским потенциалом самодействия, в котором функция $U(z)$ равнялась нулю. В работе [2] результаты [1] были обобщены на уравнения более общего вида, в которых потенциал самодействия содержит дополнительное слагаемое $U(|q-q'|)$. Отметим, что при добавлении такого слагаемого сохраняется кулоновский характер особенности в потенциале самодействия.

Собственные значения задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$ равны $\lambda_n = n+1$, $n = 0, 1, \ldots$. При $\varepsilon \to 0$ и при величине n порядка ε^{-1} серия собственных значений задачи (1), (2) для $k = 0, 1, 2, \ldots$ задается асимптотической формулой [2]

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon) = n + 1 - \varepsilon U_0 -$$

$$-\frac{(U_1+1)\varepsilon \ln n}{2\pi\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon(\sigma_k + \nu_k - 8\ln 2 - \gamma)}{2\pi\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \quad n \to \infty, \quad (3)$$

где $\gamma-$ постоянная Эйлера, а число $\sigma_k = 0$, если $k = 0$, и

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j},$$

если $k \in \mathbb{N}$. Числа ν_k в разложении (3) определяются с помощью интеграла

$$\nu_k = -\frac{1}{\pi(k!)^2 2^{2k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}\left(\frac{|s-\tau|}{\sqrt{2}}\right) e^{-\tau^2 - s^2} H_k^2(\tau) H_k^2(s) d\tau ds,$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь

$$\hat{U}(z) = -\int_z^{\infty} \left(U'(\tau) + \frac{U_1 \theta(\tau - \sqrt{1+z^2})}{\tau^2}\right) \sqrt{\tau^2 - z^2}\, d\tau +$$

$$+U_1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{8}\right)\right), \quad \theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leqslant 0, \end{cases}$$

а $H_k(s)$ — полином Эрмита.

При $U_1 > -1$ разложение (3) описывает спектр оператора типа Хартри с кулоновской особенностью у потенциала самодействия вблизи нижних границ спектральных кластеров, а при $U_1 < -1$ —

вблизи верхних границ кластеров. Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности.

Литература

1. Вахрамеева Д.А. Асимптотика спектра двумерного оператора типа Хартри с кулоновским потенциалом самодействия вблизи нижних границ спектральных кластеров / Д.А. Вахрамеева, А.В. Перескоков // Теор. мат. физ. — 2019. — Т. 199, № 3. — С. 445–459.

2. Pereskokov A.V. Semiclassical asymptotics of the spectrum of a two-dimensional Hartree type operator near boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2022. — V. 264, № 5. — P. 617–632.

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ PYTHON

Н.С. Петраков (Елец, ФГБОУ ВО «ЕГУ им. И.А. Бунина»)
petrakov_1997@mail.ru

Python — интерпретируемый, интерактивный, объектно-ориентированный язык программирования. Он включает в себя модули, исключения, динамическую типизацию, очень высокий уровень динамических типов данных и классов. Язык имеет библиотеки для решения классических численных методов, построения графиков и обработки данных, такие как NumPy, SciPy и Matplotlib.

Преимущества:

- легко учиться;
- простая коммуникация;
- эффективный код;
- универсальность.

NumPy - библиотека языка программирования Python, добавляющая поддержку больших многомерных массивов и матриц, а также большой набор высокоуровневых математических функций для работы с этими массивами.

Библиотека SciPy зависит от NumPy, который обеспечивает удобную и быструю манипуляцию с N-мерным массивом. Библиотека SciPy создана для работы с массивами NumPy и предоставляет множество эффективных численных методов, таких как процедуры численной интеграции и оптимизации [1].

Matplotlib - библиотека предоставляющая различные инструменты для визуализации данных на Python. Она имеет различные инструменты для создания 2D-таблиц из данных в списках или массивах на Python.

В своей работе я использовал Python для реализации примера «Хищник – жертва». Задавая параметры получим два дифференциальных уравнения первого порядка $p_1(t)$ и $p_2(t)$, отвечающие за количество кроликов и лисиц соответственно.

А также имеем следующие созависимости:

Предположим следующее:

- кролики рождаются со скоростью a = 0,7;

- количество кроликов уменьшается при столкновении с лисами, где c = 0,007;

- рождаемость лис зависит только от приема пищи в виде кроликов;

- лисы умирают естественной смертью со скоростью b = 1.

В решении поставленой задачи нам помогает функция solve_ivp, которая численно интегрирует систему обыкновенного дифференциала уравнения [2].

Литература

1. Васильев А.Н. Библиотека SciPy в Python. [Электронный ресурс] / А.Н. Васильев. – Режим доступа: свободный. URL: – https://pythonim.ru/libraries/biblioteka-scipy-v-python (дата обращения: 08.01.2023 г.)

2. Бизли Д. Python. Подробный справочник / Д. Бизли. — СПб : Символ-плюс, 2010. – 864 с.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ГИПЕРПАРАМЕТРОВ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ТОЧНОСТЬ РАСПОЗНАВАНИЯ РУКОПИСНЫХ ЦИФР

М.И. Попов (Воронеж, ВГУ)

mihail_semilov@mail.ru

В современном мире нейронные сети находят все больше областей применения. Классической задачей, решаемой нейронной сетью считается распознавание изображений. Несмотря на повсеместное внедрение нейронных сетей, выбор архитектуры сети и оптимизация ее гиперпараметров представляют собой довольно трудоемкую задачу.

В связи с этим, проблема поиска общих закономерностей при выборе архитектуры и оптимизации гиперпараметров представляется актуальной.

В данной работе исследуется влияние гиперпараметров нейронной сети на эффективность ее работы на примере полносвязной сети в задаче распознавания рукописных цифр. В качестве критерия эффективности используется точность распознавания тестового набора изображений. Для обучения сети будем использовать базу MNIST.

Рассмотрим полносвязную нейронную сеть прямого распространения содержащую 1 скрытый слой [1]. В качестве начального будем использовать нормальное распределение весовых коэффициентов с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением обратно пропорциональным корню квадратному из количества связей входящих в нейрон. Будем оптимизировать среднеквадратичную ошибку с помощью стохастического градиентного спуска. Выберем сигмоиды в для функции активации в скрытом и выходном слое. Коэффицент обучения примем равным 0.3. Оценим влияние размера скрытого слоя на точность распознавания на одной эпохе обучения. В табл. 1 приведены данные расчетов для тестового и тренировочного наборов.

Даже один нейрон скрытого слоя показывает точность 10%. Дальше правильность распознавания резко увеличивается. После 10 нейронов рост эффективности начинает замедляться. Прибавив 9 нейронов, процент верно распознанных изображений увеличивается на 79, т.е. почти в 9 раз, дальнейшая прибавка 90 нейронов увеличивает точность лишь на 6%. Заметим, что точность распознавания тренировочных и тестовых данных одинакова.

Таблица 1. Влияние числа нейронов на точность распознавания.

Нейроны	1	3	5	10	20	40	60	80	100
Тест	10	30	71	89	92	93.8	94.7	95	94.8
Трен	10	30	71	89	92	94	94.9	95.2	95

Влияние числа эпох и скорости обучения оценим в совокупности. Для эксперимента будем использовать 80 нейронов скрытого слоя, поскольку на 100 нейронах точность падает, а использование более 100 нейронов в разы увеличивает время расчета, не меняя общей картины.

Таблица 2. Влияние скорости и длительности обучения на точность.

Эпоха	Скорость обучения							
	0.3		0.2		0.1		0.05	
	тест	трен	тест	трен	тест	трен	тест	трен
1	95.03	95.2	94.45	94.61	93.86	93.71	92.72	92.42
5	96.91	97.81	96.87	97.88	96.77	97.49	96.21	96.56
10	97.13	98.56	97.33	98.08	97.26	98.49	97	97.87
20	97.38	99.12	97.41	99.21	97.63	99.08	97.43	98.73
35	97.48	99.42	97.52	99.43	97.62	99.35	97.55	99.2
60	97.49	99.5	**97.73**	99.6	97.69	99.53	**97.65**	99.45
80	**97.51**	99.53	97.65	99.65	**97.76**	99.58	97.59	99.54

Вычислительные эксперименты показывают, что правильно выбранная скорость, а также многократное повторение обучения увеличивают точность до 5%. Чем меньше скорость обучения, тем дольше необходимо обучать сеть. После 80 повторений погрешность на тренировочных данных снижается до 0.4%. Уменьшение скорости обучения до некоторого предела повышает эффективность распознавания.

Изменим функцию активации в скрытом слое на гиперболический тангенс, а выходного на софтмакс. Замена функций позволяет увеличить скрытый слой до 200 нейронов без потери эффективности. Для увеличения точности необходимо уменьшить скорость обучения до 0.005. Данные расчетов приведены в табл. 3.

Вычислительные эксперименты показывают более высокую скорость сходимости как на тренировочных, так и на тестовых данных. Точность на тренировочных данных на 200 нейронах после 45 эпох составляет 99.985, а на тестовых 98.13%. Однако, дальнейшее обучение не повышает точность распознавания.

Таблица 3. Гиперболический тангенс и софтмакс.

Нейроны	Эпоха							
	10		20		30		45	
	тест	трен	тест	трен	тест	трен	тест	трен
100	97.41	98.93	97.72	99.61	97.73	99.84	97.89	99.95
150	97.59	98.94	97.94	99.72	97.99	99.83	97.79	99.98
200	97.78	99.09	97.89	99.74	97.99	99.94	98.13	99.985

Увеличение точности при увеличении размера скрытого слоя больше 200 нейронов составляет десятые доли процента, замедляя при этом обучение в десятки раз, поэтому мы ограничимся 200 нейронами. Изменение способа градиентного спуска на пакетный или батчевый не увеличивает точность. Случайный порядок обучающих примеров также не приводит к успеху. Добавление еще одного скрытого слоя увеличивает лишь затраты ресурсов компьютера и время обучения. Таким образом, точность распознавания зависит главным образом от размера скрытого слоя (80%), затем от скорости и длительности обучения (15%). Влияние функции ошибки и функций активации в совокупности не превышает 5%.

Литература

1. Рашид Т. Создаем нейронную сеть. : Пер. с англ. — СПб.: ООО “Альфа-книга”, 2017. — 272 с.

О РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ФУНКЦИИ МАРКОВА НА ОТРЕЗКЕ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ—ЧЕБЫШЁВА[1]

П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба (Беларусь, Гродно, ГГУ)
pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Задачи, связанные с полиномиальными приближениями функций суммами Валле Пуссена, имеют богатую историю. В 1977 году В. Н. Русак [1] ввел рациональные операторы типа Валле Пуссена на вещественной оси. Е. А. Ровбой [2] введены рациональные интегральные операторы типа Валле Пуссена на отрезке и изучены их аппроксимационные свойства. Установлено, что для некоторых классов функций равномерные приближения этим методом имеют порядок наилучшего.

Пусть μ положительная борелевская мера с компактным носителем $F = \operatorname{supp} \mu \subset \mathbb{R}$. Преобразование Коши меры μ

$$\hat{\mu}(z) = \int_F \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}} \backslash F,$$

называется функцией Маркова. Её рациональные аппроксимации являются хорошо известной классической задачей [3,4].

В 1979 году в [5] был введен интегральный рациональный оператор на отрезке $[-1,\ 1]$, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье—Чебышёва. Его образом является рациональная функция вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n \in \mathbb{P}_n.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», №20162269 (Беларусь).

Ранее [6] были изучены аппроксимации функции Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ введенным рациональным интегральным оператором при условии ограничений на количество геометрически различных полюсов. В частности, когда мера когда мера μ удовлетворяет некоторым специальным условиям, получены асимптотические оценки наилучших равномерных приближений, имеющих большую скорость убывания в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

В докладе планируется осветить круг вопросов, относящихся к рациональной аппроксимации функции Маркова на отрезке $[-1, 1]$ суммами Валле Пуссена операторов Фурье—Чебышёва при условии ограничений на количество геометрически различных полюсов. Найдены интегральное представление приближений и оценка сверху равномерных приближений. В случае меры специального вида, получены поточечные и равномерные оценки приближений, асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений. Установлены значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечиваются наилучшие равномерные рациональные приближения, имеющие более высокую скорость убывания в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. Рассмотрены аппроксимации суммами Валле Пуссена некоторых элементарных функций, представимых функцией Маркова.

Литература

1. Русак В.Н. Об одном методе приближения рациональными функциями на вещественной оси / В.Н. Русак // Математические заметки. — 1977. — Т. 22, № 3. — С. 375–380.

2. Ровба Е.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана—Лиувилля, рациональными операторами / Е.А. Ровба // Доклады НАН Беларуси. — 1996. — Т. 40, № 6. — С. 18–22.

3. Vyacheslavov N.S. Rational approximations of functions of Markov—Stieltjes type in Hardy spaces / N.S. Vyacheslavov, E.P. Mochalina // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2008. — Vol. 63, iss. 4. — P. 125–134.

4. Старовойтов А.П. Рациональная аппроксимация функций Маркова, порожденных борелевскими мерами степенного типа / А.П. Старовойтов, Ю.А. Лабыч // Проблемы физики, математики и техники. — 2009. — Т. 1, № 1. — С. 69–73.

5. Ровба Е.А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е.А. Ровба // Доклады Академии наук БССР. — 1979. — Т. 23, № 11. — С. 968–971.

6. Patseika P.G. On one rational integral operator of Fourier —Chebyshev type and approximation of Markov functions / P.G. Patseika, Y.A. Rouba, K.A. Smatrytski // Journ. of the Belarusian State Univ. Mathematics and Informatics. — 2020. — Vol. 2. — P. 6–27.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА — ЧЕПМЕНА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Д.Б. Прокопьева, О.В. Бондрова, Д.С. Шунскайте, Н.И. Головко (Владивосток, ТОВВМУ, ДВФУ)

Prokopievad@yandex.ru, bondrova.ov@dvfu.ru, shunskite.ds@dvfu.ru, golovko.ni@dvfu.ru

В данной работе рассматривается СМО с бесконечным накопителем, скачкообразной интенсивностью входного потока $\lambda(t)$, с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ на одном приборе. Интенсивность $\lambda(t)$ меняется на промежутке $[a,b]$, интервалы постоянства Т имеют экспоненциальное распределение с параметром α. Такие СМО используются в качественных медодах математического моделирования узлов локальных вычислительных сетей.

Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа плотность распределения $\varphi(x) = \mathsf{P}\{x \leqslant \lambda(t_0+0) < x+dx\}/dx$. Заметим, что плотность $\varphi(x)$ по определению удовлетворяет условию нормировки $\int_a^b \varphi(x)dx = 1$.

Обозначим через $\lambda(t)$ интенсивность входного потока в нестационарном режиме, в стационарном — через $\hat{\lambda}$. Пусть $Q_k(t,x)dx = \mathsf{P}\{\nu(t) = k, x \leqslant \lambda(t) < x+dx\}$, где $\nu(t)$ — число заявок в СМО в момент t, $q_k(x)dx = \mathsf{P}\{\hat{\nu} = k, x \leqslant \hat{\lambda} < x+dx\}$, где $\hat{\nu}$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $Q_k(t,x)$, $q_k(x)$ — нестационарные и стационарные характеристики числа заявок, $k \geqslant 0$; $f(t,x) = \mathsf{P}\left\{x \leqslant \lambda(t) < x+dx\right\}/dx$, $f(x) = \mathsf{P}\left\{x \leqslant \hat{\lambda} < x+dx\right\}/dx$, $f(t,x)$, $f(x)$ — плотности интенсивности входного потока, $x \in [a,b]$.

В [1] представлен вывод уравнений типа Колмогорова — Чепмена с интегральным оператором относительно вероятностных характеристик числа заявок $Q_k(t,x)$, $q_k(x)$.

В данной работе представлен численный метод расчета характеристик числа заявок, названный методом Эйлера — Лорана, для наблюдения за установлением стационарного режима в зависимости от значений входных параметров.

Значения производящей функции $R(t,x,z) = \sum\limits_{k\geqslant 0} Q_k(t,x)\, z^k$, $|z| \leqslant 1$, для сеточных значений $t \in [0;T]$, $x \in [a;b]$, $z \in \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| = r\}$ вычисляются в моменты времени $\triangle t, 2\triangle t, 3\triangle t, \ldots$

В начальный момент времени $t = 0$ производящая функция вычисляется с учетом начальных условий: $R(0,x,z) = \sum\limits_{k\geqslant 0} Q_k(0,x) z^k$. Значения функции $R(t+\triangle t, x, z)$ на каждом фиксированном шаге по t вычисляются во внутренних точках по x по формуле Эйлера

$$R(t+\triangle t,x,z) = R(t,x,z) + \Big[R(t,x,z)[xz^2 - (x+\mu+\alpha)z + \mu] +$$

$$+\alpha z\varphi(x)\int_a^b R(t,y,z)\,dy - (1-z)\mu Q_0(t,x)\Big]\triangle t/z.$$

В крайних точках по x значения функции $R(t,x,z)$ находятся с учетом краевых условий

$$R(t,a,z) = R(t,a+\Delta x,z),\ \ R(t,b,z) = R(t,b-\Delta x,z).$$

Плотности $Q_k(t,x)$ вычисляются по формуле обратного преобразования Лорана (i — мнимая единица),

$$Q_k(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r} \frac{R(t,x,\xi)}{\xi^{k+1}}\,d\xi,\ k \geqslant 0, r = 1.$$

Распределения числа заявок $P_k(t)$, $q_k(x), p_k$, $k \geqslant 0$, вычисляются по формулам

$$P_k(t) = \int_a^b Q_k(t,x)dx,\ q_k(x) = \lim_{t\to\infty} Q_k(t,x), p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t).$$

Численный анализ нестационарного распределения числа заявок с применением метода Эйлера — Лорана проводился при различных начальных распределениях.

Результаты численных расчетов подтверждают свойства всех наблюдаемых вероятностных характеристик исследуемой СМО.

Литература

1. Бондрова О.В. Вывод уравнений типа Колмогорова — Чепмена с интегральным оператором / О.В. Бондрова, Н.И. Головко, Т.А. Жук // Дальневосточный математический журнал. — 2017. — Том 17(2). — С. 135–146.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНТРОЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ

К.А. Раецкий (Воронеж, ВГУ)
kraetsky@mail.ru

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

с условиями

$$x(t_i) = x_i, i = 0, 1, ..., k, \tag{2}$$

где $A \in L(R^n, R^n)$, $B \in L(R^m, R^n)$, $t \in [t_0, t_k]$, $t_0 < t_1 < ... < t_k$.

Задача состоит в моделировании и предъявлении «Заказчику» множества состояний $x(t)$ системы (1), удовлетворяющих (2), для которых существуют соответствующие $u(t)$. «Заказчик» выбирает подходящее состояние $x^*(t)$, для которого рассчитывается $u^*(t)$. Состоянием реальной динамической системы, при реализации воздействия $u^*(t)$ на систему с состоянием x_0 в момент t_0, будет именно выбранное $x^*(t)$.

Метод неопределенных коэффициентов моделирования состояний динамической системы (1) состоит в формировании $x(t)$ и $u(t)$ в виде линейных комбинаций линейно независимых функций $\varphi_i(t)$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot \varphi_j(t), \tag{3}$$

$$u(t) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \cdot \varphi_j(t) \tag{4}$$

и подстановке их в (1) и (2). В данном случае рассматривается возможность использования функций $\varphi_j(t) = \frac{1}{(t+c)^j}$. Такие функции предпочтительнее, чем $\varphi_j(t) = t^{j-1}$, которые растут с ростом t и ведут к разрушению динамической системы, если в момент t_k не сработал выключатель.

Приравнивание коэффициентов при одинаковых функциях $\varphi_j(t)$ приводит к системе уравнений.

Эквивалентные преобразования полученной системы формируют линейную алгебраическую систему для нахождения векторных коэф- фициентов $\alpha_j(t)$.

Доказывается, что система разрешима и решение ее неединственно.

Теорема 1. *Существует множество состояний $x(t)$ вида (3), удовлетворяющих (1), (2), в том и только том случае, когда*

$$rank(B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B) = n.$$

Литература

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением /Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.

2. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition /S.P. Zubova, K.A. Raetskiy // Mathematical Biosciences and Engineering. — 2021. — Vol. 18, № 6, — P. 7861–7876.

3. Раецкий К.А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями /К.А. Раецкий //Тavри- ческий вестник информатики и математики. — 2021. — Т. 1, № 50, — С. 65–80.

4. Раецкий К.А. К методу неопределенных коэффициентов решения задач управления /К.А. Раецкий //Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. — Т. 3, № 5—2(16—2), — С. 40–41.

5. Раецкий К.А. Моделирование траектории движения динамической системы с контрольными точками и условиями на управление /К.А. Раецкий //Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ - 2021). Сборник трудов Всероссийской науч- ной конференции. — Воронеж. — 2021. — С. 132–134.

6. Раецкий К.А. Моделирование движения динамической системы в частных производных /К.А. Раецкий // Современные проблемы в науке и технике. Теория и практика : материалы международной открытой конференции. — Воронеж. 2022. — С. 281–283.

7. Раецкий К.А. Об одном методе моделирования движения линейной стационарной динамической системы /К.А. Раецкий //Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж. — 2019. — С. 236-237.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВ $L_p(\mu)$

О.И. Рейнов (Санкт-Петербург, СПбГУ)
orein51@mail.ru

В 1950-х В. Б. Лидский и А. Гротендик независимо получили знаменитые формулы следа для некоторых классов ядерных операторов (В. Б. Лидский — в гильбертовых пространствах H, А. Гротендик — в общих банаховых пространствах X): *ядерный след соответствующего оператора равен его спектральному следу.* . Напомним, что к классу ядерных операторов в X принадлежат операторы $T : X \to X$, которые допускают представления вида

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) x_k \quad \text{для} \quad x \in X,$$

гле числа λ_k, функционалы $x'_k \in X^*$ и элементы $x \in X$ удовлетворяют некоторым условиям суммируемости (при этом $\sum |\lambda_k| < \infty$). Например, если $0 < s \leqslant 1$, $\sum |\lambda_k|^s < \infty$ и $\{x'_k\}, \{x_k\}$ ограничены, то $T \in N_s(X)$ (s-ядерный оператор с естественной квазинормой). Если $0 < r \leqslant 1, 1 \leqslant p \leqslant 2$, $\sum |\lambda_k|^r < \infty$, $\{x'_k\}$ ограничена и для всякого $x' \in X^*$ ряд $\sum |x'(x_k)|^{p'}$ сходится, то $T \in N_{rp}(X)$ ((r,p)-ядерный с естественной квазинормой). Ядерный след оператора T определяется как сумма ряда $\sum \lambda_k x'_k(x_k)$, спектральный след оператора T — как сумма $\sum \mu_n$, где $\{\mu_n\}$ — последовательность всех собственных чисел T. Ядерный след определен не для каждого ядерного оператора. В условиях теоремы Лидского он определен всегда, а в условиях теоремы Гротендика — для случая, когда $\sum |\lambda_k|^{2/3} < \infty$.

Всякое банахово пространство есть подпространство некоторого $L_\infty(\mu,)$ а всякое гильбертово пространство — пространства $L_2(\mu)$. Мы, в частности, изучаем операторы в подпространствах $L_p(\mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Здесь наша цель — интерполировать (в весьма широком смысле) между классическими результатами об операторах в гильбертовых и банаховых пространствах.

Для получения основных результатов используется, в частности, теория Фредгольма, доказываются некоторые новые теоремы о тензорной стабильности операторных идеалов и о свойствах аппроксимации банаховых пространств.

Приведем две показательные теоремы и следствия из них.

Теорема 1., *Пусть* $s \in (0,1]$, $p \in [1,\infty]$ *и* $1/s = 1/q + |1/2 - 1/p|$. *Существует такая постоянная* $C_p > 0$, *что если* Y *— подпространство факторпространства (или факторпространство подпространства) пространства* $L_p(\mu)$, *построенного на некотором измеримом пространстве с положительной мерой, то для любого оператора* $T \in N_s(Y)$

$$||\{\mu_k(T)\}||_{l_q} \leqslant C_p ||T||_{N_s}$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T*).*

В качестве важного частного случая теоремы отметим как следствие следующую формулу следа. *Пусть* $p \in [1,\infty]$ *и* $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$. *В условиях теоремы 1, для любого оператора* $T \in N_s(Y)$ *ядерный след* $traceT$ *вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.* $trace\,T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T)$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2,\ 0 < s \leqslant 1$ *и* r *таковы, что* $1/r = 1/s + 1/p - 1/2$. *Тогда операторный идеал* $N_{r,p}$ *имеет спектральный тип* ℓ_s *и, более того,* $\|(\mu_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_s} \leqslant \|T\|_{N_{r,p}}$.

Как следствие, получаем. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s \leqslant 1$ *и* $r \in (0,1]$ *таковы, что* $1/r = 1/s + 1/p - 1/2$. *Тогда для каждого банахова пространства* X *и для любого* $T \in N_{r,p}(X)$, $trace(T)$ *вполне определен и если* $(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$ *— система собственных чисел оператора* T, *то* $trace\,(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$.

В завершении предполагается коснуться существенного обобщения одного результата Б. Митягина о симметрии спектров (который, в свою очередь, обобщает теорему М. И. Зеликина).

В докладе дается краткий обзор результатов, полученный, в основном, автором за последнее десятилетие. Отметим, что все получаемые результаты точны (т.е., наилучшие из возможных в рассматриваемых ситуациях).

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)
RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим начально-граничную задачу

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L_1[0,1]$ и является комплекснозначной функцией.

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1): $p_1^2 - 4p_2 > 0$. В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического многочлена вещественны. Пусть выполняются неравенства

$$\omega_1 < 0 < \omega_2. \tag{4}$$

При рассмотрении этой задачи используется метод из статьи [1]. Все необходимые для дальнейшего изложения понятия и определения заимствованы из книги [2].

Под *классическим решением* (или решением почти всюду (п.в.)) понимается функция $u(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$, которая:
а) непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны и по x, и по t, и п.в. в Q выполняется равенство $u_{xt} = u_{tx}$ (в случае, когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [3]),
б) удовлетворяет условиям (2)–(3) и уравнению (1) п.в. в Q.

Обозначим через $L(\lambda)$ оператор-функцию (о.ф.), порождённую дифференциальным выражением и краевыми условиями

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

соответственно. И пусть R_λ есть резольвента этой о.ф., $G(x,\xi,\lambda)$ — функция Грина, а $R_{1\lambda}$ — интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

Собственные значения (с.з.) $L(\lambda)$ простые и выражаются формулами

$$\lambda_k = 2k\pi i/(\omega_2 - \omega_1), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному с.з.

Теорема 1. *Пусть $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с дополнительным условием (4). Если $u_{tt} \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$ (здесь $Q_T = [0,1] \times [0,T]$), то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \Big(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \Big) \varphi \, d\lambda, \tag{5}$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Из теоремы 1 видно, что формальный ряд (5) и задача (1)–(3) тесно связаны. Аналогично [1] расширим понятие этой связи.

Ряд справа в формуле (5) имеет смысл для любой функции $\varphi(x) \in L_1[0,1]$, хотя он может быть и расходящимся. В этом случае естественно говорить, что (5) также является формальным решением задачи (1)–(3), понимаемой чисто формально. Так же, как и в [1], будем называть эту задачу *обобщенной начально-граничной задачей*, а ее решение — *обобщенным решением.*

Как и в статье [1], можно пытаться найти обобщенное решение задачи (1)–(3), если трактовать ряд справа в формуле [5] изначально как расходящийся. То есть пытаться найти «сумму» этого ряда («сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда), не накладывая каких-либо ограничений на $\varphi(x)$, кроме того, что $\varphi(x) \in L_1[0,1]$. Таким образом, при таком подходе найти решение обобщенной начально-граничной задачи — значит найти «сумму» ряда справа в [5] при соответствующем определении этой «суммы».

Для получения основного результата данной статьи важнейшую роль играют введенные в [4, с. 19] естественные аксиомы (А)–(В) для преобразования расходящихся рядов.

Ряд справа в (5) с использованием указанных аксиом сводится к сумме конечного числа рядов вида

$$\sum_k a_k e^{2k\pi i x}, \tag{6}$$

где $a_k = \int_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi$, а функция $f(x) \in L_1[0,1]$ выражается по простым формулам через функцию $\varphi(x)$ и суммируема в том и только в том случае, когда суммируема функция $\varphi(x)$.

На основании [5, с. 277, теорема 3] в качестве «суммы» ряда (6) естественно взять функцмю $f(x)$ и дополнить аксиомы (А)–(В) следующей аксиомой для тригонометрических рядов, вытекающей из [5, с. 277, теорема 3]: (Д) $\int\sum = \sum\int$, где $\int$ — определенный интеграл.

С использованием только аксиом (А)–(Д) без использования обычного определения суммы ряда по Коши, как предела его частичных сумм, доказывается следующая теорема

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in L_1[0,1]$ и выполняется условие (4). Тогда функция $u(x,t)$, определенная для п.в. $(x,t) \in Q$ формулой*

$$u(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\left(\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}\right\}\right) - \widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}\right\}\right)\right),$$

является обобщенным решением задачи (1)–(3), где

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2\varphi\Big(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\xi\Big), & \text{если } \xi \in \Big[0, \dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big); \\ \omega_1\varphi\Big(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}(\xi-1)\Big), & \text{если } \xi \in \Big[\dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}, 1\Big], \end{cases}$$

а $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междун. Саратовской зимней школы. — Саратов : Саратовский университет, 2022. — С. 319–324.

2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

3. Толстов Г.П. О второй смешанной производной / Г.П. Толстов // Матем. сб. — 1949. — Т. 24(66), № 1. — С. 27–51.

4. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди — М. : Изд-во иностранной литературы, 1951. — 505 с.

5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — М. : Наука, 1974. — 480 с.

О НЕСКОЛЬКИХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.Л. Сабатулина (Пермь, ПНИПУ)
tlsabatulina@list.ru

Первые математические модели динамики популяций были относительно простыми и отражали только наиболее грубые биологические законы. По мере того как исследователи стремились изучать модели, отражающие свойства системы всё более точно, модели усложнялись. В частности, гипотеза о том, что скорость роста популяции зависит от численности популяции в тот же момент времени, стала заменяться более гибкой: скорость изменения объекта зависит не только от его состояния в данный момент времени, но и от состояний в некоторые предыдущие моменты времени. Такое предположение привело к новым классам моделей: наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями стали использоваться уравнения с отклоняющимся аргументом, интегро–дифференциальные уравнения и другие виды функционально-дифференциальных уравнений. Учёт запаздывания позволил описывать динамику популяций более глубоко и полно: вслед за известной моделью Хатчинсона (1948 г.) появились модели Ласоты — Важевски (1976 г.), Мэкки — Гласса (1977 г.), Николсона (1980–1983 гг.). Модель Хатчинсона описывает динамику популяции в условиях ограниченности ресурсов, модель Николсона — популяцию лабораторных мух, модели Ласоты — Важевски и Мэкки — Гласса — процессы кроветворения.

Развитие этой идеи привело к возникновению моделей, в которых последействие учитывается более тонко. Например, запаздывание не всегда разумно считать сосредоточенным: даже когда сосредоточенное запаздывание достаточно хорошо описывает моделируемый процесс, на самом деле имеет место некоторое «размытие» запаздывания вблизи среднего значения. На сегодня количество работ, в которых исследуется устойчивость биологических моделей, использующих уравнения с сосредоточенным запаздыванием, стало настолько большим, что требуются обзорные статьи, в которых результаты систематизируются и упорядочиваются. Модели с распределённым запаздыванием признаются столь же содержательными, но они исследованы намного меньше.

Отметим, что изучение многих биологических процессов в принципе невозможно иными методами, кроме построения адекватной математической модели: в живой природе опасны эксперименты с необратимыми или непредсказуемыми последствиями, а наблюдение за развитием живых организмов на небольшом промежутке времени не всегда даёт основания для надёжной экстраполяции.

Мы изучали модели Хатчинсона, Ласоты — Важевски, Мэкки — Гласса и Николсона с распределённым запаздыванием [1], модель, описывающую динамику изолированной популяции, подверженную постоянному воздействию вредных веществ [2], модель системы хищник–жертва с эффектом насыщения [3]. Для всех этих моделей построено аналитическое описание области локальной асимптотической устойчивости положений равновесия [4–6].

Литература

1. Agarwal R.P. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications / R.P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky. — New York: Springer–Verlag, 2012. — 520 p.

2. Карелина Р.О. Построение двусторонних оценок для решений некоторых систем дифференциальных уравнений с последействием / Р.О. Карелина, Н.В. Перцев // Сиб. журнал инд. матем. —2005. — Т. 8, № 4(24). — С. 60–72.

3. Недорезов Л.В. Эффект насыщения в модели системы хищник–жертва / Л.В. Недорезов, Ю.В. Утюпин, С.П. Утюпина // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2001. — Т. 4, вып. 1(7). — С. 150–164.

4. Сабатулина Т.Л. О локальной устойчивости некоторых биологических моделей с распределённым запаздыванием / Т.Л. Сабатулина // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2011. — Т. 16, № 4. — С. 1175–1177.

5. Баландин А.С. Локальная устойчивость одной модели динамики популяции в условиях воздействия вредных веществ / А.С. Баландин, Т.Л. Сабатулина // Сибирские электронные математические известия. — 2015. — Т. 12. — С. 610–624.

6. Сабатулина Т.Л. Об одной модификации модели системы хищник–жертва с эффектом насыщения / Т.Л. Сабатулина // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2013. — Т. 18, № 5-2. — С. 2663–2664.

ПРЯМАЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА

К.Б. Сабитов

(Уфа, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН;

Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий)

sabitov_fmf@mail.ru

Поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины h, при этом толщина ее полагается малой по сравнению с другими размерами, со сторонами p и q описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$, EJ — жесткость пластинки, ρ — плотность пластинки, E — модуль упругости материала, J — момент инерции, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $F(x, y, t)$ — непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки, $u(x, y, t)$ — смещение точки (x, y) пластинки в момент времени t.

Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок и оболочек имеют важное прикладное значение в строительной механике, машиностроении, авиастроении, судостроении, ядерных энергетических установках и т.д. Во многих случаях использования пластин связано с условиями закрепления на отдельных участках их контура. Такие задачи изучены в известных работах (например, см. [1, с. 444-449]).

Рассмотрим уравнение (1) в области

$$Q = D \times (0, T), \text{ где } D = \{(x, y) \,|\, 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

здесь p и q отмечены выше, размеры пластинки, T — заданная положительная постоянная, и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти определенную в области Q функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y, t) \in C^{4,2}_{xy,t}(\overline{Q}); \tag{2}$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q; \tag{3}$$

$$u(0,y,t) = u_{xx}(0,y,t) = u(p,y,t) = u_{xx}(p,y,t) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$u(x,0,t) = u_{yy}(x,0,t) = u(x,q,t) = u_{yy}(x,q,t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{4}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{5}$$

где $F(x,y,t)$, $\varphi(x,y)$ *и* $\psi(x,y)$ *— заданные достаточно гладкие функции.*

Здесь граничные условия (4) означают, что все стороны пластинки подперты, т.е. свободно могут двигаться вокруг точек закрепления.

Задача 2. *Пусть* $F(x,y,t) = f(x,y)g(t)$. *Найти функции* $u(x,y,t)$ *и* $g(t)$, *удовлетворяющие условиям* (2) – (5), *и, кроме того,*

$$g(t) \in C[0,T]; \tag{6}$$

$$u(x_0,y_0,t) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

где $f(x,y)$ *и* $h(t)$ *— заданные достаточно гладкие функции,* (x_0,y_0) *заданная точка из области* D.

Задача 3. *Пусть* $F(x,y,t) = f(x,y)g(t)$. *Найти пару функций* $u(x,y,t)$ *и* $f(x,y)$, *удовлетворяющих условиям* (2) – (5) *и кроме того,*

$$f(x,y) \in C(\overline{D}); \tag{8}$$

$$u(x,y,t_0) = \varphi_0(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{9}$$

где $g(t)$ *и* $\varphi_0(x,y)$ *— заданные достаточно гладкие функции,* t_0 *— заданная точка из полуинтервала* $(0,T]$.

Из постановок этих задач видно, что задача 1 представляет собой прямую начально-граничную задачу для неоднородного уравнения колебаний прямоугольной пластинки. Задачи 2 и 3 являются обратными, поэтому здесь условия (7) и (9) являются дополнительными для определения сомножителей $g(t)$ и $f(x,y)$ правой части $F(x,y,t)$ уравнения (1).

Данная работа является продолжением исследований автора [2 – 6], посвященных обоснованию корректности постановки начально-граничных и обратных задач для одномерного уравнения балки. Постановка обратных задач 2 и 3 исходит из работ [7 – 9], где аналогичные задачи изучены для уравнений теплопроводности, струны и операторных уравнений. Здесь, следуя [10] решения поставленных задач построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений. Отметим, что при обосновании сходимости рядов, представляющих решение задачи 3, возникает проблема малых знаменателей, которая создает дополнительные трудности. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой. На основе этой оценки обоснованы сходимость рядов в классе регулярных решений уравнения (1).

Литература

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. — М.: Физматлит, 1967. — 444 с.

2. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн.ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2015. — Т. 19, № 2. — С. 311–324.

3. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 89–100.

4. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 665–671.

5. Сабитов К.Б., Акимов А.А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 5. — С. 632–645.

6. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 773–785.

7. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. — М.: МГУ, 1994. — 208 с.

9. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. — 709 p.

9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. — 457 с. (изд. 2).

10. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Известия вузов. Математика. — 2021. — № 10. — С. 60 – 70

ОБ ОЦЕНКАХ НОРМЫ ПОЛИНОМОВ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ НА ЧАСТИ ОТРЕЗКА

Е.Х. Садекова (Москва, НИЯУ «МИФИ»)
vetka.08@mail.ru

Пусть n — натуральное число, $0 < \delta < \pi$. Рассмотрим две экстремальные задачи. Среди всех тригонометрических полиномов $T(x)$ порядка n, для которых

$$\max\{|T(x)| : \delta \leqslant |x| \leqslant \pi\} \leqslant 1,$$

найти тот, для которого величина $\|T\| := \max\{|T(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ имеет наибольшее значение, и найти это значение, если

A) на полином $T(x)$ нет других дополнительных условий;

B) $\max\{T(x) : x \in \mathbb{R}\} = -\min\{T(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Решения задач A и B известны. Задачи являются тригонометрическими аналогами классической задачи об алгебраическом полиноме степени n с равным 1 старшим коэффициентом, наименее уклоняющемся от нуля на отрезках $[-1, -\alpha]$, $[\alpha, 1]$ (см. [1] с. 320). Построение экстремального тригонометрического полинома в задаче A — обозначим его через $A_n(\delta; x)$ — сводится к замене переменной в соответствующем алгебраическом полиноме четной степени и приводит к выражению:

$$A_n(\delta; x) = T_n\left(\frac{2\cos x + 1 - \cos\delta}{1 + \cos\delta}\right),$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — полином Чебышева степени n.
Полином $A_n(\delta; x)$ является четным, причем,

$$\|A_n(\delta; x)\| = \max_x\{A_n(\delta; x)\} = A_n(\delta; 0) > \operatorname{ch}(n\delta).$$

Алгебраический полином для решения задачи B выражается через эллиптические функции, найден Н.И. Ахиезером [2]. Соответствующий тригонометрический аналог был указан А.П. Петуховым [3]. Данный полином определен с точностью до знака и является нечетным. Обозначим его через $B_n(\delta; x)$. Отметим свойства полинома $B_n(\delta; x)$, в предположении, что $\delta \in \left[\dfrac{\pi}{2n}, \pi\right)$ (см. [3]):

1)$|B_n(\delta; x)| \leqslant 1, \delta \leqslant |x| \leqslant \pi$;

2) существует n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\delta = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \pi$, что $B_n(\delta; x_k) = (-1)^{k+1}$;

3) существует точка $x_0 \in (0, \delta] : B_n(\delta; x_0) = \|B_n(\delta; \cdot)\| =: M_n(\delta) \geqslant 1$,

причем функция $M_n(\delta)$ непрерывно и монотонно отображает промежуток $\left[\frac{\pi}{2n},\pi\right)$ на луч $[1,\infty)$;
4) полином $B_n(\delta;x)$ возрастает на отрезке $[0,x_0]$ и убывает на отрезке $[x_0,x_2]$;
5)
$$M_n(\delta)=\max_u\left\{\mathrm{ch}\left(n\log\frac{\Theta\left(u+K/2n\right)}{\Theta\left(u-K/2n\right)}\right)\right\},$$

где $\Theta(u)$ — тета-функция в обозначениях Якоби с параметром $æ=\frac{K'}{K}=\frac{K(k')}{K(k)}$ $\left(k'=\sqrt{1-k^2}\right)$, а n, k и δ связаны равенством

$$2n\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\ (=K).$$

Отметим еще, что $B_n(\delta;x)=\sin nx$ при $0<\delta\leqslant\frac{\pi}{2n}$.
В нашей работе доказана лемма.

Лемма 1. *Обозначим* $\lambda(\delta)=\log\frac{1+\sin\frac{\delta}{2}}{1-\sin\frac{\delta}{2}}$, *и пусть* $0<\delta_0<\pi$ *фиксировано.*

Тогда имеем при $n\delta\to\infty$:

$$M_n(\delta)=\frac{1}{4\sqrt{e}}\cdot\frac{e^{n\lambda(\delta)}}{\sqrt{n\lambda(\delta)}}(1+o(1)).$$

В частности, получим:

$$M_n\left(\delta\right)\sim\frac{1}{4\sqrt{e}}\cdot\frac{e^{n\delta}}{\sqrt{n\delta}},\delta=o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)\ \left(n\to\infty\right);$$

$$M_n\left(\delta\right)\sim\frac{1}{4\sqrt{e}}\cdot\frac{e^{n\delta+\frac{1}{24}n\delta^3}}{\sqrt{n\delta}},\delta=o\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\ \left(n\to\infty\right).$$

Литература

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. / Н.И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 410 с.

2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. / Н.И. Ахиезер. — М. : Наука, 1975. — 304 с.

3. Петухов А.П. Об ужах и приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа / А.П. Петухов // Analysis Mathem. — 1985. — Т. 11, № 1. —С. 55–73.

МЕРЫ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В.Ж. Сакбаев (Москва, ИПМ РАН)
fumi2003@mail.ru

Изучение мер на не являющихся локально компактными топологических пространствах, инвариантных относительно различных групп преобразований, приводит, согласно теореме А. Вейля, к анализу мер, не обладающих некоторыми из свойств меры Лебега.

Теорема А. Вейля. *Если топологическая группа G не является локально компактной, то не существует нетривиальной σ-аддитивной σ-конечной локально конечной борелевской левоинвариантной меры на группе G.*

Для построения меры на гильбертовом пространстве, инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор, требуется принести в жертву одно или несколько из перечисленных в теореме Вейля свойств (см. [1-4]). Мера Лебега на конечномерном евклидовом пространстве как на абелевой топологической группе помимо перечисленных в теореме Вейля свойств является также инвариантность относительно преобразований сдвигов вдоль траекторий гладких бездивергентных векторных полей, в частности, относительно ортогональных преобразований.

Наша цель – изучение мер на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E, инвариантных относительно сдвигов, ортогональных преобразований, гамильтоновых потоков.

Определение 1. Множество $\Pi \subset E$ называется брусом, если существует ОНБ $\{e_j\} \equiv \mathcal{E}$ и если $\exists\ a, b \in l_\infty$ такие, что

$$\Pi = \{x \in E:\ (x, e_j) \in [a_j, b_j)\ \forall\ j \in \mathbf{N}\}. \qquad (1)$$

Брус (1) называется измеримым, если либо он пуст, либо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{0, \ln(b_j - a_j)\} < +\infty. \qquad (2)$$

Положим $\lambda(\Pi) = 0$ если $\Pi = \oslash$, и положим

$$\lambda(\Pi) = \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)) = \prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \qquad (3)$$

для непустого измеримого бруса П.

Для каждого ОНБ $\mathcal{E}$ обозначим через $K(\mathcal{E})$ множество измеримых брусов с ребрами, коллинеарными векторам ОНБ $\mathcal{E}$. Пусть $r_{\mathcal{E}}$ – кольцо подмножеств пространства E, порожденное $K(\mathcal{E})$.

Функция $m: \mathcal{R} \to R$ назвается мерой на пространстве E если $\mathcal{R}$ – кольцо подмножеств E и функция m аддитивна.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}$ – ОНБ в E. Тогда функция множества (3)*

$$\lambda_{\mathcal{E}}: \ K(\mathcal{E}) \to [0, +\infty)$$

аддитивна и имеет единственное аддитивное продолжение на кольцо $r_{\mathcal{E}}$ являющееся конечно-аддитивной мерой на E.

Пусть $\mathcal{E}$ – ОНБ в E. Определим внутреннюю и внешнюю меры произвольного множества $A \subset E$ равенством

$\bar{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \inf\limits_{B \in r_{\mathcal{E}}:\ B \supset A} \lambda_{\mathcal{E}}(B),\ \underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \sup\limits_{B \in r_{\mathcal{E}}:\ B \subset A} \lambda_{\mathcal{E}}(B).$

Лемма 2. *Пусть B_R – шар радиуса R в пространстве E.*

Если $R < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = \bar{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = \lambda_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$;

Если $R > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\bar{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = +\infty$ и $\underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$.

Теорема 1. *Семейство множеств*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \{A \in E: \ \bar{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) = \underline{\lambda}_{\mathcal{E}}(A) \in [0, +\infty)\}$$

является кольцом. Мера $\lambda_{\mathcal{E}}: \ \mathcal{R}_{\mathcal{E}} \to [0, +\infty)$

1) инвариантна относительно сдвига на любой вектор из E;

2) локально конечна, σ-конечна и полна;

3) не является σ-аддитивной;

4) ее продолжение по схеме Лебега-Каратеодори обращается в нуль на классе $K(\mathcal{E})$.

Получено представление гильбертова пространства E группой операторов сдвига аргумента в пространстве функций $L_2(E, \mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}}, \mathbb{C})$, квадратично интегрируемых по трансляционно инвариантной мере. Найдена максимальная подгруппа, представление которой является сильно непрерывным в сильной операторной топологии пространства ограниченных операторов $B(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$.

Получено разложение меры $\lambda_{\mathcal{E}}$ в сумму взаимно сингулярных мер, инвариантных относительно группы сдвигов на произвольный вектор пространства E и относительно ее подгруппы, обладающей свойством сильной непрерывности.

Действие ортогональной группы на элементы кольца $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ позволяет расширить трансляционно-инвариантную меру $\lambda_{\mathcal{E}}$ до меры λ, инвариантной относительно группы изометрий, порожденной группой сдвигов и группой ортогональных преобразований.

Теорема 2. *Пусть K – семейство измеримых брусов ($K = \bigcup\limits_{\mathcal{E}} K(\mathcal{E})$) и пусть $\mathcal{R}$ – кольцо, порожденное семейством множеств K (семейством $\bigcup\limits_{\mathcal{E}} \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$). Тогда функция (3) имеет единственное аддитивное продолжение до конечно аддитивной меры, определенной на кольце $\mathcal{R}$*

$$\lambda: \ \mathcal{R} \to [0, +\infty).$$

При этом пополнение меры λ – инвариантная относительно сдвигов и ортогональных преобразований, локально конечная и σ-конечная полная мера, сужение которой $\lambda|_{\mathcal{R}_{\mathcal{E}}}$ совпадает с мерой $\lambda_{\mathcal{E}}$ для любого ОНБ $\mathcal{E}$.

Получено разложение меры λ в сумму взаимно сингулярных мер, инвариантных относительно группы сдвигов на произвольный вектор пространства E и относительно подгруппы ортогональных преобразований, обладающей свойством сильной непрерывности в пространстве $L_2(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$.

Построение инвариантных относительно некоторой группы симплектоморфизмов мер на вещественном сеперабельном гильбертовом пространстве E, снабженном трансляционно-инвариантной симплектической структурой, реализуется как расширение трансляционно инвариантной меры на кольцо, порожденное действиями группы симплектоморфизмов на элементы кольца $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, служащего областью определения трансляционно-инвариантной меры.

Определение 2. Множество $\Pi \subset E$ называется абсолютно измеримым симплектическим брусом в гильбертовом пространстве E, если существует представление пространства E в виде $E = Q \oplus P$ и существуют базисы $\{f_j\}$, $\{g_k\}$ пространств Q, P, такие, что

$$\Pi = \{z \in E: \ ((z, f_i), (z, g_i)) \in B_i, \ i \in \mathbb{N}\}, \tag{4}$$

где B_i – измеримые по Лебегу множества в плоскости $\mathbb{R}^2$ такие, что выполняется условие $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \max\{\ln(\lambda_2(B_j)), 0\} < +\infty$ (здесь λ_2 – мера Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$).

Множество всех абсолютно измеримых симплектических брусов, имеющих вид (4) в заданной паре ОНБ $\{f_j\}$, $\{g_k\}$ в пространствах Q, P, обозначим через $\mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E)$.

Определим функцию множества $\lambda_{\mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}} : \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E) \to [0,+\infty)$, задаваемую равенством

$$\lambda_{\mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}}(\Pi) = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_2(B_j) = \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(\lambda_2(B_j))),\ \Pi \in \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E), \qquad (5)$$

при условии, что $\Pi \neq \oslash$; в случае $\Pi = \oslash$ положим $\lambda(\Pi) = 0$.

Пусть $r_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ – кольцо, порожденное классом множеств $\mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$.

Теорема 3. *Аддитивная функция множества $\lambda : \mathcal{K}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(E) \to [0,+\infty)$ имеет единственное аддитивное продолжение на кольцо $r_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$. Пополнением меры $\lambda : r_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to [0,+\infty)$ является полная мера $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \mathcal{R}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to [0,+\infty)$, которая инвариантна относительно сдвигов на любой вектор и относительно преобразований, сохраняющих инвариантными подпространства $E_k = \mathrm{span}(f_k, g_k)$ и двумерную меру Лебега в каждом подпространстве E_k.*

Установлено, что продолжить меру, инвариантную относительно группы симплектоморфизмов, до меры, инвариантной также и относительно ортогональной группы, невозможно.

Инвариантные относительно симплектоморфизмов меры позволяют получить купмановское унитарное представление нелинейных фазовых потоков бесконечномерных гамильтоновых систем.

Литература

1. Vershik A.M. Does there exist a lebesgue measure in the infinite-dimensional space? / A.M. Vershik // Proceedings of the Steklov Institute of Math matics. — 2007. — V. 259 — P. 248–272.

2. Baker R. «Lebesgue measure» on R^{∞} / R. Baker // Proc. Amer. Math. Soc. — 1991. — V. 113 — P. 1023–1029.

3. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Schrödinger Quantization of Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems with a Nonquadratic Hamiltonian Function / O.G. Smolyanov, N.N. Shamarov // Doklady Mathematics. — 2020. — V. 101 — P. 227–230.

4. V.Zh. Sakbaev, Averaging of random walks and shift-invariant measures on a Hilbert space / V.Zh. Sakbaev // Theoret. and Math. Phys. — 2017. — V. 191 — P. 886–909.

2. Покорный Ю.В. Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети / Ю.В. Покорный, В.Л. Прядиев // Успехи мат. наук. — 2004. — Т. 59, № 3. — С. 115–150.

3. Зубова С.П. Решение начальной задачи для уравнения с нетеровым оператором под знаком производной / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Современные методы теории краевых задач : материалы

Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2014. — С. 70–71.

4. Булинская Е.В. Эмпирические асимптотически оптимальные политики / Е.В. Булинская // Современные проблемы математики и механики : сборник, посвященный 190-летию П.Л. Чебышева. — М. : Изд-во Моск. ун-та. — 2011. — Т. 7, вып. 1. — С. 8–15.

5. Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

О ЗНАЧЕНИЯХ ДИГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА И РОДСТВЕННЫХ С НЕЙ ФУНКЦИЙ В РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ

Т.А. Сафонова (Архангельск, САФУ)
t.Safonova@narfu.ru

Символом $\psi(a)$ обозначим дигамма-функцию Эйлера (логарифмическую производную от Г-функции Эйлера) и сформулируем известную теорему Гаусса о значениях этой функции в рациональных точках.

Теорема Гаусса. *Пусть p, $q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда справедливо равенство*

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \ln(2q) - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{p\pi}{q}\right) + 2\sum_{k=1}^{[q/2]} \cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q},$$

где γ - постоянная Эйлера.

Нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральные представления для сумм рядов вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k}}{k(k^2-a^2)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)}.$$

Из этих представлений, в частности, следует справедливость следующих формул для функции $\psi(a)$ $(0 < a < 1)$

$$\psi(a) = -\gamma - 2\ln 2 - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi) + \frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(a\pi) - \cos(2a-1)x}{\cos x}dx =$$

$$= -\gamma - \ln 2 - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi) - \frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin(2ax) - \sin(a\pi))\operatorname{tg} x dx.$$

Если a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a = p/q$, где p, $q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$, то интегралы, стоящие в правых частях полученных нами равенств, сводятся к определённым интегралам от тригонометрических функций, и явно вычисляются в терминах элементарных функций. Приведём примеры равенств, которые при этом получаются.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{q}{p}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \sin\frac{(2k-1)p\pi}{2q}\ln\sin\frac{(2k-1)\pi}{4q},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2\left\{\ln 4q - \frac{q}{2p} - 2\sum_{k=1}^{q}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{2q}\right\}.$$

Таким образом, получаются аналоги сформулированной выше теоремы Гаусса и, в частности, ещё одно её доказательство .

Кроме того, предложенный нами метод позволяет получить новые аппроксимации для постоянных Каталана (G) и Апери ($\zeta(3)$)

$$G = 2\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}\ln\operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{8n},$$

$$\zeta(3) = 4\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln(2n) - 2n - \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}\ln\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

и установить справедливость равенств

$$e^{\frac{2G}{\pi}+\frac{1}{2}} = 3\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{2}{4k+1}\right)\left(1 - \frac{4}{(4k+1)^2}\right)^{2k},$$

$$e^{-\frac{7\zeta(3)}{2\pi^2}} = \sqrt{e}/2\prod_{k=1}^{\infty}\left(e\left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right)^{(2k)^2}\right),$$

$$e^{\frac{4G}{\pi}-\frac{35\zeta(3)}{4\pi^2}}=\sqrt{e/2}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e\left(1-\frac{1}{(4k)^2}\right)^{(4k)^2}\right).$$

Доклад основан на результатах, полученных совместно с проф. К.А. Мирзоевым.

ОБ ОБЛАСТИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА ГАРМОНИЧЕСКОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

Т.Ю. Семенова (Москва, МГУ)
station@list.ru

Рассмотрим гармоническую в единичном круге функцию $u(x,y)$, непрерывную в замыкании круга и нечётную по переменной y. Если $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, то

$$u(x,y)=u(\varphi,\rho)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\rho^k\sin(k\varphi). \tag{1}$$

Пусть также известно, что коэффициенты b_k, определяемые по значениям функции u на границе круга, удовлетворяют условиям

$$b_1>0;\quad b_{k+1}\leqslant b_k,\ \forall k\in\mathbb{N};\quad \lim_{k\to\infty}b_k=0. \tag{2}$$

Тогда при фиксированном $\rho\in(0,\,1)$ функция $u(\varphi,\rho)$ положительна в правой полуокрестности точки $\varphi=0$ и, значит, имеет минимальный положительный корень $\xi(\rho,\{b_k\})\in(0,\,\pi]$. Автором найдена величина $\xi(\rho,\{b_k\})$ для всех последовательностей $\{b_k\}$ с условием (2), и тем самым определена область на плоскости, где значения функции $u(x,y)$ будут положительны. В качестве следствия можно привести следующий результат:

Теорема 1. *Какова бы ни была последовательность $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию (2), сумма ряда (1) заведомо положительна на следующих множествах:*

$$\left\{(\varphi,\rho)\;\middle|\;\rho\in\left(0,\,\tfrac12\right],\,\varphi\in(0,\,\pi)\right\},$$
$$\left\{(\varphi,\rho)\;\middle|\;\rho\in\left(0,\,\tfrac{45}{52}\right],\,\varphi\in\left(0,\,\arccos\left(-\tfrac{1}{2\rho}\right)\right]\right\},$$
$$\left\{(\varphi,\rho)\;\middle|\;\rho\in\left(0,\,\left(\cos\tfrac{\pi}{n}\right)^{\frac1n}\right],\,\varphi\in\left(0,\,\tfrac{2\pi}{n}\right]\right\},\ \ \forall n\geqslant4.$$

Задачи, близкие к данной, рассмотрены в работах Л. Вьеториса [1], А.С. Белова [2] и А.Ю. Попова [3] для рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\varphi)$ с монотонно стремящимися к нулю коэффициентами b_k.

Литература

1. Vietoris L. Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen/ L. Vietoris // Österr. Acad. Wiss. Math.-Natur. Kl., S.-Ber., Abt. II. —1958. — Т. 167. — С. 125–135.

2. Белов А.С. О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами / А.С. Белов // Математический сборник. — 1995. — Т. 186, № 4. — С. 21–46.

3. Попов А.Ю. Оценки наименьшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами / А.Ю. Попов // Математические заметки. — 2014. — Т. 96, № 5. — С. 747–761.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

С.Н. Сидоров (Уфа, УГНТУ)
stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа $Lu = F(x,y,t)$, здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - t^n(u_{xx} + u_{yy}) + bt^n u, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, \end{cases} \qquad F(x,y,t) = \begin{cases} F_1(x,y,t), & t > 0, \\ F_2(x,y,t), & t < 0, \end{cases}$$

заданное в трехмерной области $Q = \{(x,y,t)|\,(x,y) \in D,\, t \in (-\alpha,\beta)\}$, где $D = \{(x,y)|\, 0 < x < p,\, 0 < y < q\}$, n, α, β, p, q — заданные положительные действительные числа, b — заданное любое действительное число, $F_i(x,y,t)$ $(i = 1,2)$ — заданные функции, и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию $u(x,y,t)$, определенной в области Q и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y,t) \in C(\overline{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(\overline{Q}) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-); \qquad (1)$$

$$Lu(x,y,t) \equiv F(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_+ \cup Q_-; \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=p} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{3}$$

$$u(x,y,t)\big|_{t=-\alpha} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{4}$$

где $F(x,y,t)$ и $\psi(x,y)$ – заданные достаточно гладкие функции, $Q_- = Q \cap \{t < 0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,y,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям (1) – (4) и*

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \quad u(x_0,y_0,t) = h_1(t), \quad (x_0,y_0) \in D, \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta, \tag{5}$$

где $f_i(x,y)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$ и $h_1(t)$ – заданные функции.

Задача 3. *Найти функции $u(x,y,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (1) – (4) и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0]; \; u(x_0,y_0,t) = h_2(t), \; (x_0,y_0) \in D, \; -\alpha \leqslant t \leqslant 0, \tag{6}$$

где $f_i(x,y)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$ и $h_2(t)$ – заданные функции.

Задача 4. *Найти функции $u(x,y,t)$, $g_1(t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (1) – (6).*

Используя идеи работ [1 – 4], для неоднородного трехмерного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в области Q изучена прямая начально-граничная задача 1 и обратные задачи 2 – 4 по отысканию сомножителей сомножителей правых частей, зависящих от времени, т.е. $g_i(t)$, $i = 1,2$. Решение прямой задачи построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений данного уравнения. На основе решения прямой задачи поставлены и изучены три обратные задачи по отысканию сомножителя правой части, зависящей от времени, только из параболической или гиперболической части уравнения, и когда неизвестными одновременно являются сомножители из обеих частей уравнения. Используя формулу решения прямой начально-граничной задачи, решение обратных задач эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. На основании теории интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач.

Литература

1. Сидоров С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2012. — Т. 14, № 3. — С. 30–40.

2. Сидоров С.Н. Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 144–157.

3. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для трёхмерного уравнения параболо-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1071-1080.

4. Sidorov S.N. Three-dimensional initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part // Azerbaijan Journal of Mathematics. — 2022. — V. 12, № 1. — С. 49–67.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТА С ЗАДАННЫМИ УКЛОНЕНИЯМИ ОТ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

Ю.А. Скворцов (Москва, МГУ)
iura.skvortsov2@gmail.com

До сих пор неизвестен ответ на следующий вопрос. Пусть задана счетная система $Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots$ строго вложенных замкнутых подпространств бесконечномерного банахова пространства X, а также последовательность неотрицательных чисел $d_1 > d_2 > \cdots, d_n \to 0$. Верно ли, что всегда существует элемент $x \in X$, уклонения $\rho(x, Y_n) = \inf\{\|x-y\| : y \in Y_n\}$ которого от подпространств Y_n равны этим числам:

$$\rho(x, Y_n) = d_n, \quad n = 1, 2, \ldots?$$

История данной задачи восходит к С.Н. Бернштейну [1], который положительно решил ее в случае, когда X есть пространство непрерывных на отрезке функций $C[a, b]$, а Y_n при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ является пространством алгебраических многочленов степени не выше n. А.Ф. Тиман [2; гл. 2, п. 2.5] перенес доказательство Бернштейна на случай конечномерных подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots$.

И.С. Тюремских [3] показал, что в гильбертовом пространстве X задача имеет положительное решение. Ни для каких других бесконечномерных банаховых пространств задача не решена.

П.А. Бородин [4] доказал существование элемента при дополнительном ограничении на последовательность $\{d_n\}$: для всех номеров n должно выполняться $d_n > \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k$.

В исходных предположениях задачи С.В. Конягин [5] установил существование элемента x, для которого

$$d_n \leqslant \rho(x, Y_n) \leqslant 8d_n.$$

Основной результат состоит из двух теорем, усиливающих результаты Бородина и Конягина.

Теорема 1. *Пусть X — произвольное бесконечномерное банахово пространство, $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \cdots$ — произвольная счетная система строго вложенных замкнутых подпространств в X, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность строго убывающих к нулю чисел, для которой множество*

$$\{n \geqslant 3 : \, d_n \leqslant d_{n-2} - d_{n-1}, \, d_n \leqslant (d_k - d_{k+1})/2 \text{ при } k = 1, \ldots, n-3\}$$

бесконечно. Тогда существует элемент $x \in X$, для которого

$$\rho(x, Y_n) = d_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть X — произвольное бесконечномерное банахово пространство, $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \cdots$ — произвольная счетная система строго вложенных замкнутых подпространств в X, и последовательность положительных чисел $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к нулю и не возрастает. Тогда найдется элемент $x \in X$, для которого*

$$d_n \leqslant \rho(x, Y_n) \leqslant 2,875\ldots d_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Литература

1. Бернштейн С.Н. Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций / С.Н. Бернштейн // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. — 1954. — Т. 2. — С. 292–294.

2. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман // Государственное издательство физико-математической литературы. — 1960.

3. Тюремских И.С. (B)-свойство гильбертовых пространств / И.С. Тюремских // Уч. зап. Калин. гос. пед. ин-та. — 1964. — Т. 39. — С. 53–64.

4. Бородин П.А. К задаче существования элемента с заданными уклонениями от расширяющейся системы подпространств / П.А. Бородин // Математические заметки. — 2006. — Т. 80. — №. 5. — С. 657–667.

5. Конягин С.В. Об уклонении элементов банахова пространства от системы подпространств / С.В. Конягин // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. — 2014. — Т. 284. — №. 0. — С. 212–215.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)
su1951@mail.ru

Рассмотрим особый интеграл

$$A_{s+1}f = A_{s+1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{s+1}}dt, s = 0, 1, 2, ..., \qquad (1)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши ($s = 0$) или в смысле конечного значения по Адамару ($s > 0$), где $f(x)$ — плотность интеграла, ограниченная на вещественной оси R функция.

Пусть $L_p(R)$ — пространство всех измеримых на R функций f с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{L_p} < \infty$, где

$$\|f\|_p = \left\{ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty; \sup_{t\in R} |f(t)|, p = \infty \right\},$$

$\omega_k(f,t)_p = \omega_k(f,t)_{L_p}$ — модуль гладкости k—го порядка f в $L_p(R), L_p^r(R)$ — подпространство функций $f \in L_p(R)$, для которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на R и $\left\|f^{(r)}\right\|_p = \left\|f^{(r)}\right\|_{L_p} < \infty, B_{p,\sigma}$ — множество целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, принадлежащих $L_p(R)$.

Для $f \in B_{p,\sigma}$ введем интерполяционный оператор ([1]-[3])

$$L_\sigma f = L_\sigma(f;x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) sinc\, \sigma\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right),$$

$$sinc\, x = \frac{\sin x}{x}, \sigma > 0,$$

и рассмотрим оператор [4]

$$\frac{d^s L_\sigma f}{dx^s} = L_\sigma^{(s)} f = L_\sigma^{(s)}(f;x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) sinc^{(s)}\sigma\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right). \quad (2)$$

Всюду ниже будем предполагать, что $f^{(s)}(x) = O\left((|x|+1)^{-d_s}\right), d_s p > 1, x \in R$. Тогда

$$A_{s+1}f = \frac{1}{\pi s!}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^{(s)}(t)}{t-x}dt, s = 0, 1, 2, ...$$

Заменяя $f^{(s)}(x)$ выражением (2), получим квадратурную формулу для интеграла (1)

$$A_{s+1}f = A_{s+1}(L_\sigma^{(s)}; x) + R_{\sigma s}f = \sigma^s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^{s+j}}{j!}$$

$$\left(\frac{cos\left(\sigma x - k\pi + \frac{j\pi}{2}\right)}{(\sigma x - k\pi)^{s-j+1}} + \sum_{v=1}^{s-j+1} \frac{\sin\frac{(s-v)\pi}{2}}{(s-j+1-v)!(\sigma x - k\pi)^v}\right) + R_{\sigma s}f, \quad (3)$$

где $R_{\sigma s}f = R_{\sigma s}(f; x)$ - остаточный член.

Теорема. *Пусть $f \in L_p^r(R), r = 0, 1, ..., 1 < p < \infty, \sigma > 1$. Тогда*

$$\|R_{\sigma s}f\|_p \leqslant C_{r,p,s}\sigma^{-r+s}\omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

где $C_{r,p,s}$ - постоянная, зависящая только от r, p и s.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы $\omega_k(f,\delta)_p = 0(\delta^\alpha), 0 < \alpha < 1$. Тогда*

$$\|R_{\sigma s}f\|_p = O\left(\sigma^{-r-\alpha+s}\right), r + \alpha - s > 0.$$

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы $\omega_k(f,\delta)_p = 0(\delta^\alpha), 0 < \alpha < 1$. Тогда справедлива равномерная оценка*

$$\|R_{\sigma s}f\|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+s+\frac{1}{p}}\right), p(r + \alpha - s) > 1.$$

Заметим, что из (3) при $s = 0$ получим квадратурную формулу работы [5].

Литература

1. Rahman Q.I. On the L^p convergence of Lagrange interpolating entire functions of exponential type / Q.I.Rahman, P.Vertesi // J.Approx. Theory. – 1992. –Vol. 69. – P. 302-317.

2. Gensun F. Whittaker-Kotelnikov-Shannon sampling theorem and aliasing error / F. Gensun // J.Approx. Theory. –1996. –Vol. 85. – P. 115-131.

3. Stenger F. Approximation via Whittakers cardinal function / F. Stenger // J. Approx. Theory.–1976. –Vol. 17. – P. 222-240.

4. Paul L.B. Shannon's Sampling Theorem for Bandlimited Signals and Their Hilbert Transform, Boas-Type Formulae for Higher Order Derivatives—The Aliasing Error Involved by Their Extensions from Bandlimited to Non-Bandlimited Signals / L.B. Paul, G. Schmeisser, R.L. Stens // Entropy 2012, 14, 2192-2226; doi:10.3390/e14112192.

5. Солиев Ю.С. Об аппроксимации преобразования Гильберта / Ю.С.Солиев // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2022». – Воронеж : Издательский дом ВГУ. –2022. – С.199-204.

О РАВНОМЕРНОЙ ИСЧЕРПЫВАЕМОСТИ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА СО ЗНАЧЕНИЯМИ В РАВНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Т.А. Срибная (Самара, Самарский университет)
sribnayata@mail.ru

Теорема Никодима о равномерной счетной аддитивности семейства счетно-аддитивных скалярных функций множества и ее аддитивная версия — теорема Брукса-Джеветта о равномерной исчерпываемости семейства баноховозначных функций множества обобщались в различных направлениях (см., например, [1], [2]). В данной работе эти теоремы распространены на случай, когда функции множества заданы на не-сигма-полном классе множеств и принимают значения в равномерном пространстве.

Пусть Σ — некоторый непустой класс множеств, $\varnothing \in \Sigma$. Пусть $(\mathcal{S}, \omega)$ — равномерное пространство, $e \in \mathcal{S}$; пусть $\tau = \tau(\omega)$ — топология, соответствующая равномерности ω, причем топологическое пространство $(\mathcal{S}, \tau(\omega))$ хаусдорфово.

Говорят, что класс множеств Σ обладает f_1 - свойством, если для любых последовательностей попарно непересекающихся множеств $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ из Σ, таких что $E_n \cap F_k = \varnothing$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$, существуют такое бесконечное подмножество $P \subset \mathbb{N}$ и такое множество $F \in \Sigma$, что $F_k \subset F$ при всех $k \in P$, $F \cap E_n = F \cap F_k = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \setminus P$ [1].

Определение 1. *Функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to (\mathcal{S}, \omega)$, будем называть равномерно внешними, если $\varphi(\varnothing) = e$ и для любого окружения $w \in \omega$ существует такое окружение $v \in \omega$, что для любой функции множества $\varphi \in \Phi$ и для любых* *непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, для которых $A \cup B \in \Sigma$, справедливо: если $\varphi(A) \in v[e]$, то $(\varphi(A \cup B), \varphi(B)) \in w$.*

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to (\mathcal{S}, \omega)$, $\varphi(\varnothing) = e$, равномерно исчерпывающие на Σ, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ соотношение

$$\tau - \lim_{n \to \infty} \varphi(E_n) = e \tag{1}$$

выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$; равностепенно слабо непрерывные на Σ, если для любой убывающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ с пустым пересечением соотношение (1) выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$. Если семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ состоит из одной функции множества, то говорят, соответственно, что функция множества φ исчерпывающая на Σ и непрерывная сверху в нуле на Σ.

Теорема 1. (Обобщение теоремы Брукса-Джеветта) *Пусть Σ — кольцо множеств с f_1 - свойством, пусть $(\mathcal{S}, \omega)$ — равномерное пространство. Пусть $\varphi_n : \Sigma \to (\mathcal{S}, \omega)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность равномерно внешних исчерпывающих на Σ функций множества. Если для любого множества $E \in \Sigma$ существует*

$$\tau - \lim_{n \to \infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E),$$

то для того, чтобы функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ были равномерно исчерпывающими на Σ достаточно, а если хаусдорфово топологическое пространство $(\mathcal{S}, \tau(\omega))$ регулярное, то и необходимо, чтобы функция множества φ_0 являлась исчерпывающей на Σ.

Теорема 2. (Обобщение теоремы Никодима) *Пусть Σ — кольцо множеств с f_1 - свойством, пусть $(\mathcal{S}, \omega)$ — равномерное пространство. Пусть $\varphi_n : \Sigma \to (\mathcal{S}, \omega)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность равномерно внешних исчерпывающих на Σ и непрерывных сверху в нуле на Σ функций множества. Если для любого множества $E \in \Sigma$ существует*

$$\tau - \lim_{n \to \infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E),$$

и функция множества φ_0 — исчерпывающая на Σ, то функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ равностепенно слабо непрерывные на Σ.

Литература

1. Freniche F.J. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the Subsequential Interpolation Property / F.J. Freniche // Proc. Amer. Math. Soc. — 1984. — V. 92, № 3. — P. 362–366.

2. Lucia P. Some Consequences of the Brooks-Jewett theorem for Additive Uniform Semigroup-valued Functions / P. Lucia, P. Marales // Conf. Semin. Mat. Univ. Bari. —1988. — V. 227. — P. 1–23.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Х. Сташ (Майкоп, АГУ)

aidamir.stash@gmail.com

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty) \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами.

Определение[1,2]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости нулей решения y уравнения (1) зададим формулами*

$$\hat{\nu}_\bullet(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^2} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t) \quad \left(\check{\nu}_\bullet(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^2} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right),$$

$$\hat{\nu}_\circ(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t) \quad \left(\check{\nu}_\circ(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t)\right),$$

где $m = (m_1, m_2)$, а $\nu(y,m,t)$ — число нулей функции $m_1 y + m_2 \dot{y}$ на промежутке $(0, t]$.

В работах [1,2] установлено, что на множестве решений уравнений второго порядка все верхние (как и нижние) показатели колеблемости совпадают между собой и их спектры состоят из одного значения. Причем существует решение некоторого уравнения второго порядка, верхние показатели колеблемости которого не совпадают с нижними. В связи с этим возникает вопрос о нахождении эффективных формул для вычисления показателей колеблемости уравнения второго порядка.

Теорема 1. *Рассмотрим уравнение*

$$\ddot{y} + 2p(t)\dot{y} + q(t)y = 0, \quad p(t),\, q(t) \in C(\mathbb{R}_+). \tag{2}$$

Предположим, что существуют постоянные p и q, удовлетворяющие условию: $q-p^2=c^2>0$, такие, что

$$\int\limits_0^t |p(t)-p|dt=o(t), \quad \int\limits_0^t |q(t)-q|dt=o(t).$$

Тогда для любого нетривиального решения y уравнения (2) выполнено равенство $\hat{\nu}_\bullet(y)=\check{\nu}_\bullet(y)=\hat{\nu}_\circ(y)=\check{\nu}_\circ(y)=c$.

Теорема 2. *Пусть задано уравнение*

$$\ddot{y}+\omega^2(t)y=0, \quad \omega(t)\in C^1(\mathbb{R}_+), \tag{3}$$

где положительная функция $\omega(t)$ на $\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega^2(t)}=\gamma, \quad 0\leqslant|\gamma|<1.$$

Тогда для любого ненулевого решения y уравнения (3) при любом выполнено равенство

$$\hat{\nu}_\bullet(y)=\check{\nu}_\bullet(y)=\hat{\nu}_\circ(y)=\check{\nu}_\circ(y)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{t}\int_0^t\omega(\tau)d\tau.$$

Теорема 3. *Пусть задано уравнение*

$$\ddot{y}+q(t)y=0, \quad q(t)\in C(\mathbb{R}_+), \tag{4}$$

где функция $q(t)$ удовлетворяет при $s\to+\infty$ условию

$$\sup_{s\leqslant t<+\infty}\frac{|\ln q(t)/q(s)|}{1+\int_s^t\sqrt{q(\tau)}d\tau}\to 0.$$

Тогда для любого ненулевого решения y уравнения (4) при любом выполнено равенство

$$\hat{\nu}_\bullet(y)=\check{\nu}_\bullet(y)=\hat{\nu}_\circ(y)=\check{\nu}_\circ(y)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\sqrt{q(\tau)}d\tau.$$

Литература

1. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка /И.Н. Сергеев // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2011. — № 6. — С. 21–26.

2. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы /И.Н. Сергеев // Известия РАН. Серия математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.

О СИЛЬНОЙ И СЛАБОЙ АССОЦИИРОВАННОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

В.Д. Степанов (Хабаровск, ВЦ ДВО РАН; Москва, МИАН)
stepanov@mi-ras.ru

Обозначим $\mathfrak{M}(I)$ класс всех функций на $I := (0, \infty)$, измеримых по Лебегу. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ нормированное пространство измеримых функций на I, X^* — двойственное (сопряженное) к X пространство всех линейных непрерывных функционалов. Классической задачей функционального анализа является задача о представлении элементов X^* в конкретной форме, этому посвящены теоремы Ф. Рисса.

X называется идеальным, если из условия $|f| \leqslant |g|$ п.в. на I и $g \in X$ следует $f \in X$ и $\|f\| \leqslant \|g\|$. Пусть

$$\mathfrak{D}_X := \left\{ g \in \mathfrak{M}(I) : \int_I |fg| < \infty \text{ для всех } f \in X \right\}.$$

для всех $g \in \mathfrak{D}_X$ определим функционалы

$$\mathbf{J}_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{\int_I |fg|}{\|f\|_X} \text{ и } J_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{|\int_I fg|}{\|f\|_X}$$

и ассоциированные пространства

$$X'_s := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_s} := \mathbf{J}_X(g) < \infty\},$$

$$X'_w := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_w} := J_X(g) < \infty\},$$

которые мы называем «сильными» и «слабыми» ассоциированными пространствами, соответственно.

Для идеальных пространств с свойством Фату известно, что $(X'_s)'_s = X$, $J_X(g) = \mathbf{J}_X(g)$ и, следовательно, $X'_s = X'_w$. Для неидеальных пространств это, вообще говоря, не так, функционалы $J_X(g)$ и $\mathbf{J}_X(g)$ могут быть различными.

В результате возникает задача описания «дважды ассоциированных» пространств. Поскольку X'_s идеально, то $[X'_s]'_s = [X'_s]'_w$, но к этому добавляются еще $[X'_w]'_s$ и $[X'_w]'_w$.

В докладе эта задача рассматривается для весовых пространств Соболева первого порядка и неидеальных пространств Чезаро и Копсона.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-01-00087; https:// rscf.ru/project/19-01-00087/).

Доклад основан на публикациях [1–5].

Литература

1. Прохоров Д.В. Характеризация функциональных пространств, ассоциированных с весовыми пространствами Соболева первого порядка на действительной оси / Д.В. Прохоров, В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, № 6. — С. 3–68.

2. Степанов В.Д. Об ассоциированных пространствах к весовым пространствам Чезаро и Копсона / В.Д. Степанов // Матем. заметки. — 2022. — Т. 111, № 3. — С. 443–450.

3. Stepanov V.D. On Cesàro and Copson type function spaces. Reflexivity / V.D. Stepanov // J. Math. Anal. Appl. — 2022. — V. 507, No. 1. — Paper No. 125764 — 18 pp.

4. Stepanov V.D. On the boundedness of the Hilbert transform from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space / V.D. Stepanov // J. Fourier Anal. Appl. — 2022. — V. 28. — Paper No. 46 — 17 pp.

5. Степанов В.Д. О сильной и слабой ассоциированности весовых пространств Соболева первого порядка / В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова // Успехи мат. наук. — 2023. — (В печати).

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ И КАЧЕСТВЕННЫХ ОЦЕНКАХ В ЗАДАЧАХ ДИФФУЗИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА, ГЕНЕРИРОВАННЫХ КИЛОВОЛЬТНЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МИШЕНЯХ[1]

М.А. Степович, Е.В. Серегина, В.В. Калманович, М.Н. Филиппов (Калуга, КГУ, МГТУ Калужский филиал,Москва, ИОНХ)

m.stepovich@mail.ru, evfs@yandex.ru, v572264@yandex.ru, mn@filippov.org.ru

Ранее рассмотрены одномерные математические модели диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким пучком электронов в однородном полупроводниковом материале, при наличии одного канала рекомбинации [1–5]. При наличии внешних воздействий на полупроводник для таких моделей в правой части дифференциального уравнения диффузии

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

$Dd^2\Delta p(z)/dz^2 - \Delta p(z)/\tau = -\rho(z)$ будем иметь различные функции $\rho_1(z)$ и $\rho_2(z)$ и, соответственно, два различных его решения $\Delta p_1(z)$ и $\Delta p_2(z)$. Получено, что если $|\rho_2(z) - \rho_1(z)| \leqslant \varepsilon$, где ε – неотрицательная константа, то справедлива оценка $|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leqslant C\varepsilon$, где C – постоянная, зависящая от D и от $\sigma = 1/D\tau$. Для мишени конечной толщины l постоянная $C = [\mathrm{ch}\,(l\sqrt{\sigma}) - 1]/D\sigma$. Однако имеющиеся экспериментальные результаты [6–8] дают основания предположить наличие нескольких каналов рекомбинации ННЗ. Для двух каналов рекомбинации выражение для эффективного времени жизни ННЗ $\tau_{\mathrm{ef}}(t)$ может быть записано в виде $n_0 \exp\left[-t/\tau_{\mathrm{ef}}(t)\right] = n_0 \left[\alpha \exp\left(-t/\tau_1\right) + (1-\alpha)\exp\left(-t/\tau_2\right)\right]$. Здесь n_0 – число генерированных ННЗ, α – безразмерный параметр, определяющий вклад каждого канала рекомбинации, а τ_1 и τ_2 — времена жизни ННЗ для этих каналов. В настоящей работе рассмотрено влияние двух каналов рекомбинации на распределение носителей заряда в результате их диффузии в однородном полупроводниковом материале.

Литература

1. Серегина Е.В. Статистический анализ модели коллективного движения неосновных носителей заряда с использованием проекционного метода / Е.В. Серегина, А.М. Макаренков, М.А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2012. — № 4. — С. 47–55.

2. Макаренков А.М. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области / А.М. Макаренков, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 5. — С. 801–813.

3. Polyakov A.N. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material / A.N. Polyakov, A.N. Smirnova, M.A. Stepovich, D.V. Turtin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, no. 2. — Pp. 259–262.

4. Туртин Д.В. О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции / Д.В. Туртин, М.А. Степович, В.В. Калманович, А.А. Картанов // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 1 (50). — С. 81–100.

5. Степович М.А. О моделировании и качественном анализе процессов диффузии, обусловленной широкими электронными пучками в однородных полупроводниковых мишенях / М.А. Степович,

Д.В. Туртин, В.В. Калманович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2022. — № 10. — С. 88–92.

6. Noltemeyer M., Bertram F., Hempel T., Bastek B., Polyakov A., Christen J., Brandt M., Lorenz M., Grundmann M. Excitonic transport in ZnO // Journal of Materials Research. — 2012. — Vol. 27, issue 17. — Pp. 2225–2231.

7. Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. Оценка значений электрофизических параметров полупроводниковых материалов по результатам измерений катодолюминесценции экситонов // Прикладная физика. — 2012. — № 6. — С. 41–46.

8. Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. О практической реализации одной схемы времяпролётных измерений в катодолюминесцентной микроскопии // Прикладная физика. — 2015. — № 4. — С. 16–20.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СЕМИДЕФИНИТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Л.И. Сухочева (Воронеж, ВГУ)
l.suhocheva@yandex.ru

Пусть $\Phi : H \longrightarrow H$ плотно определенный в гильбертовом пространстве H оператор. Будем говорить, что подпространство $\mathfrak{L}$ инвариантно относительно H, если $\overline{\mathfrak{D}_\Phi \cap \mathfrak{L}} = \mathfrak{L}$ и $\Phi : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$. В частности, подпространство $\mathfrak{L} = \{0\}$ инвариантно относительно любого оператора Φ.

Одной из центральных проблем теории операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой, является проблема существования максимальных семидефинитных инвариантных подпространств у операторов, действующих в этих пространствах.

В основополагающей работе Понтрягина [1] показано, что каждый π-самосопряженный оператор Φ обладает k-мерным неотрицательным инвариантным подпространством $\mathfrak{L}^+$, которое может быть выбрано так, что $Im\sigma(\Phi|\mathfrak{L}^+) \geqslant 0$ ($Im\sigma(\Phi|\mathfrak{L}^+) \leqslant 0$).

Задача 1. Существует ли у каждого замкнутого $\mathfrak{J}$-самосопряженного оператора Φ такое инвариантное подпространство $\mathfrak{L}^+ \in \mathfrak{M}^+$ ($\mathfrak{M}^+$ - множество, состоящее из всех максимальных неотрицательных подпространств пространства Крейна)? Если да, то есть ли такое $\mathfrak{L}^+$, что $Im\sigma(\Phi|\mathfrak{L}^+) \geqslant 0$? В столь общей постановке задача имеет отрицательное решение даже для $\mathfrak{J}$-самосопряженных $\mathfrak{J}$-положительных операторов.

Задача 2. Описать класс $\mathfrak{J}$-самосопряженных операторов в пространстве Крейна, имеющих хотя бы одну пару инвариантных семидефинитных подпространств $\mathfrak{L}^+$ (максимального неотрицательного) и $\mathfrak{L}^-$ (максимального неположительного), таких, что $\mathfrak{L}^+[\perp]\mathfrak{L}^-$ и $\mathfrak{L}^+$, $\mathfrak{L}^-$ допускают разложение:

$$\mathfrak{L}^+ = \mathfrak{L}^0[+]\mathfrak{L}^{++},\ \mathfrak{L}^- = \mathfrak{L}^0[+]\mathfrak{L}^{--},$$

где $dim\mathfrak{L}^0 < \infty$, $\mathfrak{L}^0$ — изотропное подпространство, $\mathfrak{L}^{++}$ — равномерно положительное, $\mathfrak{L}^{--}$ — равномерно отрицательное подпространства.

Пусть H — пространство Крейна с индефинитной метрикой $[x, y] = (\mathfrak{J}x, y)$,
где $\mathfrak{J}$ — каноническая симметрия пространства H.

Обозначим:

$E(\Phi)$ - замкнутую линейную оболочку корневых векторов оператора Φ;

$E_0(\Phi)$ - замкнутую линейную оболочку собственных векторов оператора Φ.

Теорема. *Пусть Φ — $\mathfrak{J}$-самосопряженный оператор в пространстве Крейна H, в котором существует базис Рисса $\{f_i\}$, составленный из корневых векторов оператора Φ. Кроме того,*

$$dim(E(\Phi)/E_0(\Phi)) < \infty$$

и невещественный спектр оператора Φ состоит не более чем из конечного числа собственных значений с учетом кратности. Тогда оператор Φ будет обладать парой инвариантных семидефинитных подпространств, удовлетворяющих вышеописанным условиям.

В работе используется традиционная «индефинитная» терминология и обозначения [2].

Литература

1. Понтрягин Л.С. Операторы в пространствах с индефинитной метрикой / Л.С. Понтрягин. — Изв. АН СССР. : Сер. матем., 1944. — 8, 243-280 с.

2. Азизов Т.Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов. — М. : Наука, 1986. — 352 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

А.В. Тарасенко (Самара, СамГТУ)
tarasenko.a.v@mail.ru

Рассмотрим уравнение двух независимых переменных x, y, которое является уравнением гиперболического типа всюду вне прямой $y=0$, а прямая $y=0$ является линией параболического вырождения

$$y^2\, u_{xx} - u_{yy} + a\, u_x = 0, \tag{1}$$

где $a = const$, $|a| < 1$ в конечной области Ω, ограниченной характеристиками $AC : x - \frac{y^2}{2} = 0$, $BC : x + \frac{y^2}{2} = 1$ уравнения (1) и отрезком $I \equiv [0,\, 1]$ — прямой $y = 0$, $A(0,\, 0)$, $B(1,\, 0)$.

Задача. Найти в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau(x) \quad \forall x \in \overline{I}, \tag{2}$$

$$A(x) D_{0x}^{\alpha^*} u[\Theta_0(x)] + B(x) D_{x1}^{\beta^*} u[\Theta_1(x)] = E(x) \quad \forall x \in I, \tag{3}$$

где $\tau(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $E(x)$ — заданные функции, причем

$$A(x) \cdot B(x) \geqslant 0, \quad A^2(x) + B^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in \overline{I},$$

$\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих их точки $(x,0) \in I$, с характеристиками AC и BC соответственно; D_{0x}^l и D_{x1}^l — операторы дробного интегрирования и дробного дифференцирования [1], α^*, β^* — действительные числа, на которые далее будут наложены необходимые условия.

Для уравнения (1) в работах [2-4] исследовались нелокальные краевые задачи, отличительная особенность которых заключается в том, что краевые условия содержат различные линейные комбинации обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса [5].

Новизна постановки задачи заключается в том, что в краевом условии содержится линейная комбинация операторов D_{0x}^l и D_{x1}^l, которые при $l > 0$ являются операторами дробного дифференцирования порядка l, а при $l < 0$ совпадают с оператором дробного в смысле Римана-Лиувилля интегрирования порядка l [1].

Теорема. *Пусть* $\alpha^* = \frac{3+a}{4}$, $\beta^* = \frac{3-a}{4}$, $\tau \in C(\overline{I}) \cap C^2(I)$, $A(x) \in C(\overline{I})$, $B(x) \in C(\overline{I})$, $E(x) \in C(\overline{I})$,

$$A(x) \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3+a}{4})} \cdot x^{\frac{a-1}{4}} + B(x) \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3-a}{4})} \cdot (1-x)^{\frac{-a-1}{4}} \neq 0.$$

Тогда решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

2. Репин О.А. Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе—Лыкова / О.А. Репин // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 10. — С. 1412–1417.

3. Ефимова С.В. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса / С.В. Ефимова, О.А. Репин // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 10. — С. 1419–1422.

4. Тарасенко А.В. О разрешимости нелокальной задачи с обобщенными операторами М. Сайго для уравнения Бицадзе–Лыкова / А.В. Тарасенко, И.П. Егорова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — Т. 4, № 37. — С. 33–41.

5. Saigo M.A. A certain boundary value problem for the Euler – Poisson – Darboux equation / M.A. Saigo // Math. Japon. — 1979. — Т. 24, № 4. — С. 377–385.

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ФОРМУЛЕ ГРИНА

Д.С. Теляковский (Москва, НИЯУ МИФИ)

dtelyakov@mail.ru

Согласно теореме Грина если область $G \subset \mathbb{R}^2$ и определённые в замыкании $\overline{G}$ функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют некоторым условиям, то выполнено равенство

$$\int\limits_{\partial G^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

В работах П. Коэна [1] и Р. Феска [2] найдены ослабленные условия на функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ при выполнении которых верна формула Грина. При этом Р. Феск показал, что функции $P(x,y)$

и $Q(x,y)$ достаточно предполагать линейно непрерывными, причём как выполнение условия линейной непрерывности, так и существование частных производных $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ можно не предполагать в точках некоторого исключительного множества. В настоящей работе показано, что если в точках исключительного множества наложить условие на модуль непрерывности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, то это множество можно предполагать более массивным, чем в теореме Р. Феска. Полученное условие аналогично достаточному условию устранимости исключительных множеств аналитических функций комплексного переменного, доказанному Е.П. Долженко [3].

Как и в [1], [2], в качестве областей в настоящей работе рассматриваются только прямоугольники R со сторонами, параллельными осям координат.

Хаусдорфову длину множества E будем обозначать $H_1(E)$, а хаусдорфову φ-меру — $H_\varphi(E)$. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ линейно непрерывна в точке $(x_0,y_0)\in R$, если функции $f(x,y_0)$ и $f(x_0,y)$ непрерывны как функции от x и y соответственно в точках x_0 и y_0, $(x,y_0)\in R$, $(x_0,y)\in R$. Пусть $\omega(t)$ — функция типа модуля непрерывности. Будем говорить, что функция $f(z)=f(x,y)$ является ω-регулярной в точке $\zeta\in R$, если найдётся крестик K_ζ, состоящий из двух пересекающихся в ζ интервалов, параллельных осям координат, для которого при некотором $L_\zeta>0$ выполнено условие

$$|f(z)-f(\zeta)|\leqslant L_\zeta\,\omega(|z-\zeta|),\quad z\in K_\zeta,\ z\in R.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ ограничены в прямоугольнике R и линейно непрерывны в каждой точке $R\setminus E_0$, где множество E_0 замкнуто и $H_1(E_0)=0$. Пусть частные производные первого порядка функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ существуют и конечны в каждой точке $R\setminus\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$, где каждое множество E_n замкнуто и удовлетворяет одному из следующих условий*:

1° *если длина $H_1(E_n)$ конечна, то никаких дополнительных условий на функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ не требуется*;

2° *если длина $H_1(E_n)$ бесконечна, то найдётся такая функция $\omega_n(t)$ типа модуля непрерывности, что обе функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются ω_n-регулярными в каждой точке множества E_n и $H_{t\omega_n(t)}(E_n)=0$.*

Тогда для функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в прямоугольнике R выполнена формула Грина.

В работе П. Феска [2] рассматривались только множества, удовлетворяющие условию 1° теоремы.

Литература

1. Cohen P.J. On Green's theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — V. 10. — P. 109–112.

2. Fesk P.M. Green's formula, linear continuity, and Hausdorff measure // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — V. 118. — P. 105–112.

3. Долженко Е.П. О «стирании» особенностей аналитических функций // УМН. — 1963. — Т. 18, вып. 4(112). — С. 135–142.

РЕШЕНИЕ ВЕСОВОГО ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ В $\mathbb{R}_n$

Н.И. Трусова

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)

trusova.nat@gmail.com

Пусть $\mathbb{R}^+_m$ область в евклидовом пространтсве $\mathbb{R}_m$, определенная неравенствами $t_1 > 0, \ldots, t_m > 0$ и Ω^+_m область в $\mathbb{R}_m$, прилегающая к гиперплоскостям $t_1 = 0, \ldots, t_m = 0$. Условие прилегания связано с интегрированием по мере Лебега—Киприянова, возможно со слабой особенностью вида $t^{\gamma_\alpha}_\alpha dt_\alpha = \prod_{i=1}^m t^{\gamma_{\alpha_i}}_{\alpha_i}\, dt_\alpha\,, \gamma_{\alpha_i} > -1$ (см. [1]).

Весовым частно-интегральным оператором (Ч-И оператором) на основе интегральной меры Лебега—Киприянова называется выражение

$$(K^\alpha_{\gamma_\alpha} u)(x) = \int_{\Omega^+_m} k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t^{\gamma_\alpha}_\alpha\, dt_\alpha,$$

где $x = (x_\alpha, x_{\overline{\alpha}}) \in \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n-m}$.

Пусть Ω^+_m есть шар B^+_R с центром в начале координат радиуса R и B^+_ρ — шар с тем же центром, но переменного радиуса $\rho \in [0; R]$.

Если весовой Ч-И оператор Вольтерра применен к функции от сферической симметрии, то есть

$$(K^\alpha_{\gamma_\alpha} u)(|x_\alpha|, |x_{\overline{\alpha}}|) = \int_{B^+_\rho} k(|x_\alpha|, |x_{\overline{\alpha}}|; |t_\alpha|)\, u(|t_\alpha|, |x_{\overline{\alpha}}|)\, t^{\gamma_\alpha}_\alpha\, dt_\alpha,$$

то в сферических координатах $x_\alpha = r\,\Theta_\alpha$, $\Theta_\alpha = (\Theta_{\alpha_1}, \ldots, \Theta_{\alpha_m})$, $|\Theta| = 1$ этот оператор примет вид

$(K^{\alpha}_{\gamma_\alpha} u)(\rho, |x_{\overline{\alpha}}|) \;=\; |S_1(m)|_{\gamma_\alpha} \;\int_0^\rho k(\rho, |x_{\overline{\alpha}}|;\, r)\, u(r,\, |x_{\overline{\alpha}}|)\, r^{m+|\gamma_\alpha|-1} dr\,,$ где $|S_1(m)|_{\gamma_\alpha}$ — площадь нагруженной сферы, $|\gamma_\alpha| = \sum\limits_i \gamma_{\alpha_i}$.

Весовым частно-интегральным уравнением Вольтерра второго рода будем называть уравнение

$$\varphi(\rho,\, |x_{\overline{\alpha}}|) - \lambda K^{\alpha}_{\gamma_\alpha}\, \varphi(\rho,\, |x_{\overline{\alpha}}|) = f(\rho,\, |x_{\overline{\alpha}}|). \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_i > -1$. Оператор $(K^{\alpha}_{\gamma_\alpha} u)(\rho, |x_{\overline{\alpha}}|)$ рассматривается в весовом анизотропном пространстве Лебега—Киприянова $L^{\gamma}_{\mathbf{p}}(D)$, $D = (D_1 \times D_2 \times D_3)$, $D_i = (0, b_i)$, норма которого определена равенством

$\|u\|_{L^{\gamma}_{\mathbf{p}}(D)} =$

$$= \left(\int\limits_{D_3} \left(\int\limits_{D_2} \left[\int\limits_{D_1} |\, u(x)|^{p_1}\, x_1^{\gamma_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right)^{p_3/p_2} x_3^{\gamma_3} dx_3 \right)^{1/p_3}.$$

Теорема. *Пусть* $p \geqslant 1$ *и*

$$k(|x_\alpha|, |x_{\overline{\alpha}}| :\, |t_\alpha|) \in L^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha,\, \gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p',\, p,\, \infty)} (B^+_{\rho, t_\alpha} \times B^+_{\rho, x_\alpha} \times B^+_{\delta, x_{\overline{\alpha}}})\,,$$

$$B^+_{\rho,x_\alpha} = \{x_\alpha : |x_\alpha| < \rho\},\; B^+_{\delta, x_{\overline{\alpha}}} = \{x_{\overline{\alpha}} : |x_{\overline{\alpha}}| < \delta\},\; B^+_{\rho, t_\alpha} = \{t_\alpha : |t_\alpha| < \rho\}.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение в $L^{\gamma}_{p}(D)$ *вида*

$$\varphi(\rho, \delta) = f(\rho, \delta) + \lambda |S_1(m)|_{\gamma_\alpha} \int_0^\rho R(\rho, \delta;\, r;\, \lambda) f(r,\, \delta)\, r^{m+|\gamma_\alpha|-1}\, dr,$$

где резольвентное ядро $R(\rho, \delta;\, r;\, \lambda)$ *определяется с помощью ряда, составленного из повторных ядер* $R(\rho, \delta; r;\, \lambda) = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell k^{(\ell+1)}(\rho, \delta; r)$, *сходящимся при всех значениях* λ.

Доказательство проведено по схеме, предложенной в [2].

Отметим также, что частно-интегральное уравнение Вольтерра в $\mathbb{R}_2$ было изучено в [3]. А весовое частно-интегральное уравнение Вольтерра, опять же в $\mathbb{R}_2$, впервые рассмотрено в [4].

Литература

1. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифф. уравнения. — 2020. — Т. 56, No. 12. — с. 1610-1520.

2. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. — М. : Из-во иностранной литературы, 1960. — 301 с.

3. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p.

4. Ляхов Л.Н. Единственность решения частно-интегрального уравнения Вольтерра в весовом анизотропном пространстве функций / Л.Н. Ляхов, Н.И. Трусова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, Математика, №2. Воронеж: Издательской дом ВГУ. — 2022. — С. 69–80.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ)
vum1@yandex.ru

Рассматривается задача Коши:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = B(t)\frac{du}{dt} + C(t)u(t) + f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u^0 \in E_1, \quad u'(0) = u^1 \in E_1, \tag{2}$$

где $A, B(t), C(t)$ — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{\operatorname{dom} A} = \overline{\operatorname{dom} B(t)} = \overline{\operatorname{dom} C(t)} = E_1$, $f(t)$ — заданная функция со значениями в E_2; $t \in \mathfrak{T} = [0; T]$.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $u(t) \in E_1$: $u'(t) \in E_1$, дважды дифференцируемая и удовлетворяющая (1), (2) при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Уравнениями второго порядка описывается вращение жесткого тела (уравнение Ламе) [1], считывание информации с диска [2], бесчокерный трелёвочный захват с энергосберегающим гидроприводом [3]; они встречаются в теории вязко-упругих процессов [4] и т.д.

Оператор A вырожден: он фредгольмов с нулевым индексом, вследствие чего решение задачи существует не при каждом значении начальных условий (2). Ядро этого оператора полагается n-мерным; исследуется случай: $\det(\langle QBe_i, \varphi_j\rangle) \neq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Операторы $B(t)$, $C(t)$ изменяются по времени, что отличается от работ [5], [6].

Применяется метод каскадной декомпозиции, заключающийся в пошаговом расщеплении (1), (2) на соответствующие уравнения и условия в подпространствах уменьшающихся размерностей. Получены условия, при которых решение задачи (1), (2) существует, единственно; найдено это решение в аналитическом виде. Приводится иллюстрирующий пример.

Литература

1. Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М. : Наука, 1989.

2. Dorf R.C. Modern Control Systems / R.C. Dorf, R.H. Bishop. — England : Pearson Education International, 2008.

3. Юдин Р.В. Математическая модель рабочих процессов бесчокерного трелёвочного захвата с энергосберегающим гидроприводом / Р.В. Юдин, П.И. Попиков, В.И. Усков, А.А. Платонов, В.П. Попиков, Д.А. Канищев // Resources and Technology. — 2022. — Т. 19, № 1. — С. 72–86.

4. Cavalcanti M.M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2001. — Vol. 24. — P. 1043–1053.

5. Ботороева М.Н. О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка / М.Н. Ботороева, О.С. Будникова, Л.С. Соловарова // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2019. — Т. 3. — С. 32–41.

6. Орлов С.С. Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах / С.С. Орлов // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2009. — Т. 1. — С. 328–332.

МАТЕМАТИКА НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПЕРВОКУРСНИКОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ

О.Ф. Ускова, Г.В. Абрамов, Н.А. Каплиева (Воронеж, ВГУ)

sunny.uskova@list.ru

Большую роль математики в развитии информатики оценил Никлаус Вирт. Ему принадлежит высказывание [1]: «ключ к тайнам компьютеров в гармонии математики, инженерии и программирования». Никлаус Вирт — ученый, профессор, директор института информатики Швейцарской высшей политехнической школы в Цюрихе, является создателем языка программирования Паскаль.

Факультет прикладной математики, информатики и механики (ПММ) создан в Воронежском государственном университете (ВГУ) одним из первых факультетов подобного профиля в нашей стране. Базовый курс «Информатика и программирование» изучается на факультете ПММ ВГУ, начиная с первого курса. Он включает лекции, практические занятия и лабораторные работы по структурному программированию на языке C++.

Для методической поддержки проведения практических занятий издан «Задачник-практикум по структурному программированию на языке C++», состоящий из 15 глав [2]. Каждая глава включает задания, связанные с составлением программ, реализующих математические алгоритмы. Приведем несколько примеров из задачника-практикума [2], которые рассматриваются в первом семестре первого курса.

Глава 1. Линейные алгоритмы.

Треугольник на плоскости задан координатами своих вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти сумму длин его медиан.

Глава 2. Алгоритмы ветвления.

Составить программу для нахождения корней биквадратного уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Глава 3. Циклические алгоритмы.

При некоторых заданных x, N, E, определяемых вводом, вычислить:

а) сумму N слагаемых заданного вида;

б) сумму тех слагаемых, которые по абсолютной величине больше E.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Сравнить полученные вычисления с результатами стандартной функции.

Глава 4. Статические одномерные массивы.

Найти скалярное произведение двух массивов из заданных трех, в которых нет ни одного нулевого элемента.

Глава 6. Динамические одномерные массивы.

Составить программу для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины.

Глава 7. Двумерные массивы.

1) Пусть даны две квадратных вещественных матрицы A и B. Вычислить их произведение.

2) Даны две таблицы A и B одинаковой размерности. Каждая строка таблицы A содержит количество различных изделий, выпу-

щенных определенным цехом завода. Каждый цех выпускает n различных изделий. Структура таблицы B идентична таблице A, но содержит количество изделий, которые надо выпустить по плану. Номер строки соответствует номеру цеха завода.

Составить одномерный массив из номеров цехов, которые перевыполнили план по общему количеству выпущенных изделий.

В заключение отметим, что в нашей стране первым разработчиком прикладной компьютерной программы был математик с мировым именем Селим Григорьевич Крейн (1951 год). С.Г. Крейн в 60–70 годы успешно работал в нашем университете заведующим кафедрой уравнений в частных производных [1].

Литература

1. Ускова О.Ф. Юбилей Российской информатики / О.Ф. Ускова, В.К. Селивёрстов // Информационные процессы вуза и школы : материалы XIII Всероссийской научно-практической конференции. — Воронеж. — 2019. — С. 179–182.

2. Ускова О.Ф. Информатика и программирование. Задачник-практикум по структурному программированию на языке С++ / О.Ф. Ускова, Н.А. Каплиева, О.Д. Горбенко. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. — 279 с.

ОПЕРАТОРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА БЕСОВА[1]

Е.П. Ушакова (Москва, ИПУ РАН, МИАН)
elenau@inbox.ru

Пусть $p \geqslant 1$, $0 < q \leqslant \infty$, $s_0 \in \mathbb{R}$ и w_0 весовая функция (вес) Мукенхоупта (см. [1, Ch. V]). Пусть $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $\ell > 0$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}$. В работе рассматриваются системы всплесков типа сплайнов в приложении к исследованию неравенств для норм в пространствах Бесова $B^{s_0}_{pq}(\mathbb{R}, w_0)$ [2, Def. 11.1] с операторами Римана–Лиувилля вида

$$I^{\ell}_{a+}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\ell)} \int_a^x (x-y)^{\ell-1} f(y)\, dy \tag{1}$$

и

$$I^{\ell}_{a-}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\ell)} \int_x^a (y-x)^{\ell-1} f(y)\, dy.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-01-00087; https:// rscf.ru/project/19-01-00087/).

Здесь $a \in \overline{\mathbb{R}}$ может принимать значения $-\infty$ и $+\infty$, соответственно. Задача состоит в нахождении условий для выполнения неравенств

$$C_1\big(\ell, p, q, s_1(\ell, s_0); w_1, w_0\big)\|f\|_{B^{s_1}_{pq}(\mathbb{R},w_1)} \lesssim \|I^\ell_{a\pm} f\|_{B^{s_0}_{pq}(\mathbb{R},w_0)}$$

$$\lesssim C_2\big(\ell, p, q, s_2(\ell, s_0); w, w_2\big)\|f\|_{B^{s_2}_{pq}(\mathbb{R},w_2)}$$

с некоторыми $C_i > 0$, $i = 1, 2$, зависящими от фиксированных числовых параметров ℓ, p, q, s_j и заданных весов w_j, где $j = 0, 1, 2$.

Для простоты, предположим, что следующее условие выполнено для $w = w_j$, $j = 0, 1, 2$: $\forall\ \tau \in [r, r + 1]$, $d \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}$

$$w(Q_{dr}) \approx 2^{-d} w(2^{-d}\tau), \quad Q_{dr} := [2^{-d}r, 2^{-d}(r + 1)].$$

Задача решается разложением элементов весовых пространств Бесова по базисам всплесков типа сплайнов натуральных и дробных порядков. Для $a \in \mathbb{R}$ получены следующие результаты.

Теорема. *Пусть $p > 1$, $0 < q \leqslant \infty$, $s_0 \in \mathbb{R}$, веса w_j, $j = 0, 1, 2$, принадлежат классу Мукенхоупта и $f \in L^{loc}_1(\mathbb{R})$. Для $\ell > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ пусть I^ℓ_{a+} задан формулой (1), при этом $f \equiv 0$ на $(-\infty, a)$.*
(i) *Тогда $I^\ell_{a+} f \in B^{s_0}_{pq}(\mathbb{R}, w_0)$, если $f \in B^{s_0+\ell}_{pq}(\mathbb{R}, w_2)$ и $N^\ell_{a+} < \infty$, где*

$$N^\ell_{a+} = \begin{cases} N^\ell_{a+}(1) + N^\ell_{a+}(0), & \ell \geqslant 1/2, \\ N^\ell_{a+}(\varepsilon) \text{ с некоторым } 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1, & \ell \in (0, 1/2) \end{cases}$$

и

$$N^\ell_{a+}(\varepsilon) = \sup_{\tau \geqslant a}\bigg(\int_\tau^\infty (x - \tau + 1)^{p(2\ell-1)\varepsilon} w_0(x)\bigg)^{1/p}$$
$$\bigg(\int_a^\tau (\tau - y + 1)^{p'(2\ell-1)(1-\varepsilon)} w_2(y)^{1-p'}\bigg)^{1/p'}.$$

Кроме того,

$$\|I^\ell_{a+} f\|_{B^{s_0}_{pq}(\mathbb{R},w_0)} \lesssim N^\ell_{a+} \|f\|_{B^{s_0+\ell}_{pq}(\mathbb{R},w_2)}.$$

(ii) *Если $I^\ell_{a+} f \in B^{s_0}_{pq}(\mathbb{R}, w_0 \equiv 1)$, тогда $f \in B^{s_0-\ell}_{pq}(\mathbb{R}, w_1 \equiv 1)$, причем*

$$\|f\|_{B^{s_0-\ell}_{pq}(\mathbb{R},w_1\equiv1)} \lesssim \|I^\ell_{a+} f\|_{B^{s_0}_{pq}(\mathbb{R},w_0\equiv1)}. \qquad (2)$$

Весовой аналог неравенства (2) также имеет место.

Аналогичная теорема установлена для оператора $I^{\ell}_{a^-}$, $a \in \mathbb{R}$. Для случаев $a = \pm\infty$ получено отдельное утверждение. В качестве приложения найдены условия ограниченности преобразования Гильберта из $B^{s+2\ell}_{pq}(\mathbb{R}, w_2)$ в $B^{s}_{pq}(\mathbb{R}, w_1)$ с $s \in \mathbb{R}$ и $\ell \in (0, 1/2]$.

Доклад частично основан на публикациях [3–5].

Литература

1. Stein E.M. Harmonic analysis / E.M. Stein. — Princeton : Princeton University Press, 1993.

2. Roudenko S. Matrix–weighted Besov spaces / S. Roudenko // Transactions of the AMS. — 2003. — V. 355, No. 1. — P. 273–314.

3. Ushakova E.P. Localisation property of Battle–Lemarié wavelets' sums / E.P. Ushakova, K.E. Ushakova // J. Math. Anal. Appl. — 2018. — V. 461, No. 1. — P. 176–197.

4. Ushakova E.P. Spline wavelet bases in function spaces with Muckenhoupt weights / E.P. Ushakova // Rev. Mat. Complut. — 2020. — V. 33. — P. 125–160.

5. Ушакова Е.П. Образы операторов интегрирования в весовых функциональных пространствах / Е.П. Ушакова // СМЖ. — 2022. — Т. 63, № 6. — С. 1382–1410.

СТУПЕНЧАТЫЕ ФУНКЦИИ В АНАЛИЗЕ УОЛША

Ю.А. Фарков (Москва, РАНХиГС)

farkov-ya@ranepa.ru

Первый пример ступенчатой масштабирующей функции в анализе Уолша, отличной от масштабирующей функции Хаара и порождающей кратномасштабный анализ, был найден в [1] (сравните с [2, пример 3] и [3, пример 2.32]). Характеристические свойства ступенчатых масштабирующих функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$ изучались в [4]. На группах Кантора и Виленкина ступенчатые функции представимы конечными линейными комбинациями обобщенных функций Уолша, имеют бесконечную гладкость и обладают некоторыми другими полезными аппроксимативными свойствами (см., например, [5]-[8]). Соответствующие дискретные вейвлет-преобразования применяются [9] для кодирования сигналов, обработки изображений и анализа финансовых временных рядов.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Для каждого целого $p \geqslant 2$ функции Крестенсона соответствуют обобщенным функциям Уолша в стандартной интерпретации группы Виленкина G_p на $\mathbb{R}_+$ (см., например,

[10]). В докладе будет приведен обзор методов построения ступенчатых масштабирующих функций с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$, ассоциированных с функциями Крестенсона; в частности, будут сформулированы аналоги доказанных в [11] характеристических свойств ступенчатых функций. Кроме того, предполагается обсудить некоторые недавние результаты о построении ортогональных вейвлетов и жёстких фреймов из ступенчатых функций с компактными носителями на группах Виленкина.

Литература

1. Farkov Yu.A. Orthogonal p-wavelets on $\mathbb{R}_+$ / Yu.A. Farkov // Skopina M. (ed.), International conference on wavelets and splines, St. Petersburg, Russia, July 3-8, 2003. Proceedings. St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 2005. — P. 4–26.

2. Протасов В.Ю. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой /В.Ю. Протасов, Ю.А. Фарков // Матем. сборник. — 2006. — Т. 197, № 10. — С. 129–160.

3. Behera B. Wavelet analysis on local fields of positive characteristic / B. Behera, Q. Jahan. — Singapore : Springer, 2021. — 333 p.

4. Hirn M.J. The refinability of step functions / M.J. Hirn // Proc. Am. Math. Soc. — 2010. – V. 136, № 3. — P. 899–908.

5. Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах / Ю.А. Фарков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 193–220.

6. Протасов В.Ю. Аппроксимация диадическими всплесками / В.Ю. Протасов // Матем. сборник. – 2007. Т. 198, № 11. — С. 135–152.

7. Farkov Yu.A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties / Yu.A. Farkov, E.A. Lebedeva, M.A. Skopina // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. — 2015. — V. 13, № 5. — 1550036 (19 pages).

8. Platonov S.S. Some problems in the theory of approximation of functions on locally compact Vilenkin groups /S.S. Platonov // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. — 2019. — V. 11, № 2. — P. 163–175.

9. Farkov Yu.A. Discrete wavelet transforms in Walsh analysis / Yu.A. Farkov // J. Math. Sci., New York. — 2021. — V.257. № 1. — P. 127–137.

10. Farkov Yu.A. Wavelet frames related to Walsh functions / Yu.A. Farkov // Eur. J. Math. — 2019. — V. 5, № 1. — P. 250-267.

11. Farkov Yu. A. Step wavelets on Vilenkin groups / Yu.A. Farkov, M.A. Skopina // J. Math. Sci., New York. — doi.org/10.1007/s10958-022-06038-w.

ОБ ОТКРЫТОСТИ МНОЖЕСТВА БИЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; $\mathcal{L}(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, определённых на E со значениями в E. Рассмотрим множество $G\mathcal{L}(E)$ непрерывно обратимых операторов из алгебры $\mathcal{L}(E)$. В силу равносильности свойств непрерывности и ограниченности линейного оператора в нормированном пространстве ([1, с.89]) множество $G\mathcal{L}(E)$ можно записать в виде $G\mathcal{L}(E) = \left\{A \in \mathcal{L}(E) : \exists A^{-1} \in \mathcal{L}(E)\right\}$. Напомним, что оператор $A \in \mathcal{L}(E)$ называется инъективным, если $Ax_1 \neq Ax_2$ для любых $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$; сюръективным, если $R(A) = E$; биективным, если этот оператор инъективен и сюръективен. Пусть $B\mathcal{L}(E)$ — множество биективных операторов из алгебры $\mathcal{L}(E)$. Покажем, что множество $B\mathcal{L}(E)$ открыто. Справедливо равенство (1) $B\mathcal{L}(E) = G\mathcal{L}(E)$, т.е. (2) $B\mathcal{L}(E) \subset G\mathcal{L}(E)$, (3) $G\mathcal{L}(E) \subset B\mathcal{L}(E)$. Действительно, пусть $A \in B\mathcal{L}(E)$. Тогда существует обратный оператор A^{-1}, отображающий $D\left(A^{-1}\right) = R(A) = E$ на $R(A^{-1}) = D(A) = E$. Оператор A^{-1} линеен как оператор, обратный линейному оператору ([2, с.225]). В силу теоремы Банаха об обратном операторе ([2, с.225]) оператор A^{-1} ограничен. Показано, что $A \in G\mathcal{L}(E)$. Далее, пусть $A \in G\mathcal{L}(E)$. Тогда A инъективен, $D\left(A^{-1}\right) = E$. Следовательно, в силу равенства $D\left(A^{-1}\right) = R(A)$ имеем $R(A) = E$, т.е. A сюръективен. Показано, что $A \in B\mathcal{L}(E)$. Справедливость включений (2), (3) установлена. Равенство (1) доказано. Известно, [2, с.229], что множество $G\mathcal{L}(E)$ открыто. Следовательно, в силу равенства (1) множество $B\mathcal{L}(E)$ открыто: если $A_0 \in B\mathcal{L}(E)$, то $O_{\|A_0^{-1}\|^{-1}}(A_0) \subset B\mathcal{L}(E)$, где $O_{\|A_0^{-1}\|^{-1}}(A_0) = \left\{A \in \mathcal{L}(E) : \|A - A_0\| < \left\|A_0^{-1}\right\|^{-1}\right\}$.

Литература

1. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. — 384 с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

О ПРОИЗВОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ ПО ОПЕРАТОРНОМУ ОТРЕЗКУ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $\mathcal{L}(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, определённых на E со значениями в E; $G\mathcal{L}(E) = \left\{F \in \mathcal{L}(E) | \exists F^{-1} \in \mathcal{L}(E)\right\}$.

Пусть $A, B \in \mathcal{L}(E)$, $A \neq B$; A, B фиксированы. Рассмотрим операторный отрезок $[A, B] = \{X = (1-t)A + tB : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Элементы отрезка $[A, B]$ условимся называть операторными точками. Оператор из $[A, B]$, получаемый при $t = t_*$, будем обозначать через X_*. Введём на $[A, B]$ отношение порядка: $X_* \preceq X_{**}$, если $t_* \leqslant t_{**}$ (выполнимость свойств рефлексивности, транзитивности и антисимметричности очевидна). В случае $X_* \prec X_{**}$, т.е. $t_* < t_{**}$, условимся говорить, что операторная точка X_* расположена на $[A, B]$ левее операторной точки X_{**} (или операторная точка X_{**} расположена на $[A, B]$ правее операторной точки X_*). Отметим, что $A \preceq X \preceq B$ для любого $X \in [A, B]$, т.е. A и B являются соответственно левым и правым концами операторного отрезка $[A, B]$.

Замечание 1. Если $X_1, X_2 \in [A, B]$, $X_1 \prec X_2$, то $[X_1, X_2] \subseteq [A, B]$.

Замечание 2. Если (1) $AB = BA$, то $X_1 X_2 = X_2 X_1$, для любых $X_1, X_2 \in [A, B]$.

Пусть задана функция $Y = f(X)$ из семейства операторных функций $S(\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(E)) = \left\{f | \mathcal{L}(E) \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq \mathcal{L}(E)\right\}$ и существуют такие $A, B \in D(f)$, что $[A, B] \subseteq D(f)$.

Пусть $X_0 \in (A, B)$, X_0 фиксирован. Рассмотрим $X \in [A, B]$, $X \neq X_0$. Положим $\Delta X = X - X_0$, $\Delta Y = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)$. Имеем: $X = (1-t)A + tB$, $X_0 = (1-t_0)A + t_0 B$, следовательно, (2) $\Delta X = (B - A)\Delta t$, где $\Delta t = t - t_0$.

Замечание 3. Если выполнено условие (1), то $X_0(\Delta X) = (\Delta X) X_0$.

В силу (2) имеем (3) $\Delta X \to O \Leftrightarrow \Delta t \to 0$.

Замечание 4. При любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\substack{\Delta X \to O \\ X \in [A,B]}} (\Delta X)^m = O.$$

Пусть (4) $B - A \in G\mathcal{L}(E)$. Тогда из равенства (2) следует, что существует (5) $(\Delta X)^{-1} = (\Delta t)^{-1} (B - A)^{-1}$, т.е. $\Delta X \in G\mathcal{L}(E)$.

Производная операторной функции $f(X)$ в операторной точке $X_0 \in (A, B)$ по операторному отрезку $[A, B]$, для концов которого выполняется условие (4), определяется равенством

$$f'_{[A,B]}(X_0) = \lim_{\substack{\Delta X \to O \\ X \in [A,B]}} \left[(\Delta Y)(\Delta X)^{-1} \right] \tag{6}$$

при условии, что такой предел существует и равен некоторому оператору из алгебры $\mathcal{L}(E)$.

В силу (2), (3), (5) определение (6) можно записать в виде

$$f'_{[A,B]}(X_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta Y}{\Delta t} (B - A)^{-1} \right],$$

где $\Delta Y = f(X_0 + (B - A)\Delta t) - f(X_0)$.

На левом и правом концах операторного отрезка $[A, B]$ рассматриваются соответственно правосторонняя и левосторонняя производные функции $f(X)$ по операторному отрезку $[A, B]$:

$$f'_{[A,B]}(A + O) = \lim_{\Delta t \to +0} \left[\frac{\Delta Y}{\Delta t} (B - A)^{-1} \right], \tag{7}$$

$$f'_{[A,B]}(B - O) = \lim_{\Delta t \to -0} \left[\frac{\Delta Y}{\Delta t} (B - A)^{-1} \right]. \tag{8}$$

Заметим, что в равенстве (7) $\Delta t = t$, в равенстве (8) $\Delta t = t - 1$.

Рассмотрим операторные отрезки вида (9) $[A, \alpha I]$, $[\beta I, B]$, где $A, B \in \mathcal{L}(E)$; $A \neq \alpha I$,$B \neq \beta I$; α, β – регулярные точки соответственно операторов A, B на вещественной оси. Заметим, что концы каждого из них коммутируют между собой. Пусть $[A, \alpha I]$,$[\beta I, B] \subset D(f)$. Тогда

$$f'_{[A,\alpha I]}(A + O) = -\lim_{\Delta t \to +0} \left[\frac{\Delta Y}{\Delta t} R_A(\alpha) \right],$$

$$f'_{[\beta I,B]}(B - O) = \lim_{\Delta t \to -0} \left[\frac{\Delta Y}{\Delta t} R_B(\beta) \right].$$

Приведём конкретный пример нахождения производной операторной функции по операторному отрезку.

Рассмотрим целую степенную функцию $f(X) = X^n$, $n \in \mathbb{N}$. Для этой функции $D(f) = \mathcal{L}(E)$, следовательно, любой операторный отрезок включен в $D(f)$.

Пусть Ω — множество операторных отрезков $[A, B]$, удовлетворяющих условиям (1), (4). Заметим, что $\Omega \neq \varnothing$. Например, операторные отрезки вида (9) принадлежат множеству Ω.

В дальнейшем понадобится операторный бином Ньютона: для любых $P, Q \in \mathcal{L}(E)$, удовлетворяющих условию $PQ = QP$,

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{n-k} Q^k. \tag{10}$$

Пусть $[A, B] \in \Omega$. Тогда производная функции $f(X) = X^n$ в операторной точке $X_0 \in (A, B)$ по операторному отрезку $[A, B]$ имеет вид:

$$f'_{[A,B]}(X_0) = nX_0^{n-1}. \tag{11}$$

Действительно, при $n = 1$ получаем $\Delta Y = \Delta X$. Тогда

$$f'_{[A,B]}(X_0) = \lim_{\substack{\Delta X \to O \\ X \in [A,B]}} \left[(\Delta Y)(\Delta X)^{-1} \right] = \lim_{\substack{\Delta X \to O \\ X \in [A,B]}} I = I = 1 \cdot X_0^0.$$

Пусть $n \geqslant 2$. Используя замечание 3 и формулу (10), получаем

$$\Delta Y = \left[nX_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k X_0^{n-k} (\Delta X)^{k-1} \right] \Delta X.$$

Тогда, используя замечание 4, имеем

$$f'_{[A,B]}(X_0) = \lim_{\substack{\Delta X \to O \\ X \in [A,B]}} \left[(\Delta Y)(\Delta X)^{-1} \right] =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta X \to O \\ X \in [A,B]}} \left[nX_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k X_0^{n-k} (\Delta X)^{k-1} \right] =$$

$$= nX_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \left[C_n^k X_0^{n-k} \lim_{\substack{\Delta X \to O \\ X \in [A,B]}} (\Delta X)^{k-1} \right] = nX_0^{n-1}.$$

Формула (11) доказана.

Пусть $X_0 \in \mathcal{L}(E)$, X_0 фиксирован; $\Omega_{X_0} = \{[A, B] \in \Omega | X_0 \in (A, B)\}$. Из формулы (11) видно, что для функции $f(X) = X^n$ её производная $f'_{[A,B]}(X_0)$ не зависит от выбора операторного отрезка $[A, B] \in \Omega_{X_0}$.

О ПЕРИОДИЧНОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $\mathcal{L}(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, определённых на E со значениями в E; $E^2_{\mathbb{R}} = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ — банахово пространство комплексных векторов над полем вещественных чисел с линейными операциями $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ и нормой $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$; $\mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} \left(E^2_{\mathbb{R}}\right) = \{Z = A + \mathrm{J}B : A, B \in \mathcal{L}(E)\}$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по закону: $Zw = (A + \mathrm{J}B)(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx)$, с линейными операциями $(A_1 + \mathrm{J}B_1) + (A_2 + \mathrm{J}B_2) = A_1 + A_2 + \mathrm{J}(B_1 + B_2)$, $\alpha (A + \mathrm{J}B) = \alpha A + \mathrm{J}(\alpha B)$, операцией умножения $(A_1 + \mathrm{J}B_1)(A_2 + \mathrm{J}B_2) = A_1A_2 - B_1B_2 + \mathrm{J}(A_1B_2 + B_1A_2)$ и нормой $\|Z\| = \|A + \mathrm{J}B\| = \|A\| + \|B\|$ (здесь $\mathrm{J} = (O, I)$ – мнимая операторная единица).

Алгебра $\mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} \left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$ некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$, нулевым элементом оператор $\hat{O} = (O, O)$.

Комплексная операторная экспоненциальная функция определяется стандартным образом: для любого $Z \in \mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} \left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$

$$e^Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}.$$

Теорема 1. *Для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} \left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$, удовлетворяющих условию $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$, справедливо основное свойство экспоненциальной функции: $e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1}e^{Z_2}$.*

Теорема 2. *Любой комплексный оператор $T_m = 2\pi m\mathrm{J}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, является периодом функции e^Z: $e^{Z+2\pi m\mathrm{J}} = e^Z$.*

В качестве основного периода функции e^Z берётся оператор $T_1 = 2\pi\mathrm{J}$.

К ТЕОРЕМЕ ЮССИ ВЯЙСЯЛЯ

О.Д. Фролкина (Москва, МГУ)
olga-frolkina@yandex.ru

Для сепарабельного метрического пространства имеем $\dim X \leqslant \dim_H X$, где $\dim X$ — топологическая размерность, $\dim_H X$ — размерность Хаусдорфа. Шпильрайн усилил это утверждение, доказав, что если $(n+1)$-мерная мера Хаусдорфа $m_{n+1}(X) = 0$, то $\dim X \leqslant n$. Кроме того, если $\dim X \leqslant n$, то типичный элемент f пространства непрерывных отображений $C(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ является вложением со свойством: $m_\alpha(f(X)) = 0$ при всяком $\alpha > n$, и, следовательно, $\dim_H(f(X)) \leqslant n$ [1, Thm. 5], [2, Thm. VII 5]. Последний факт усиливает классическую теорему вложения Лефшеца–Менгера–Небелинга–Понтрягина–Толстовой [2, Thm. V 3].

Для произвольного компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}^N$ Штанько определил размерность вложения $\operatorname{dem} X$, см. [3]. Это определение было введено с целью распространить понятия ручных и диких вложений (имевшихся лишь для вложений полиэдров и нульмерных компактов) на произвольные конечномерные компакты. Вкратце, при $\operatorname{dem} X = k$ компакт X ведет себя «подобно» k-мерному полиэдру. Размерность вложения не является топологическим инвариантом пространства X, однако является инвариантом класса эквивалентности вложения: $\operatorname{dem} X = \operatorname{dem} f(X)$ при всяком гомеоморфизме $f : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$. Всегда $\dim X \leqslant \operatorname{dem} X \leqslant \dim_H X$.

Вяйсяля получил аналог теоремы Шпильрайна для размерности вложения dem: для компакта $X \subset \mathbb{R}^N$ неравенство $\operatorname{dem} X \leqslant k$ равносильно существованию такого гомеоморфизма $f : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$, что $m_{k+1}(f(X)) = 0$. Далее, для всякого гомеоморфизма $f : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ имеем $\operatorname{dem} X \leqslant \dim_H(f(X))$, причем это неравенство обращается в равенство на некотором гомеоморфизме f [4], [5, Thm. 3.6.1, 3.6.2]. Более того, возможно контролировать величину и носитель гомеоморфизма [4, p. 168, Remark].

Мы получаем категорное усиление теоремы Вяйсяля. В отличие от работы Вяйсяля, наше доказательство вполне элементарно.

Итак, пусть (Y, ρ) — метрический компакт. Пространство непрерывных отображений $C(Y, Y)$ с метрикой $d(f, g) = \sup\limits_{x \in Y}\{\rho(f(x), g(x))\}$

является полным. Для $\varepsilon > 0$ введем $\mathrm{Homeo}_\varepsilon(Y, A)$ — множество всех таких гомеоморфизмов $f : Y \cong Y$, что $f|_A = \mathrm{id}$ и $d(f, \mathrm{id}) < \varepsilon$. Если A замкнуто в Y, то $\mathrm{Homeo}_\varepsilon(Y, A)$ является G_δ-подмножеством $C(Y, Y)$ и потому метризуемо полной метрикой. А значит, в пространстве $\mathrm{Homeo}_\varepsilon(Y, A)$ имеет смысл понятие типичности по Бэру.

Теорема 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ — компакт, U — его ограниченная открытая окрестность, $\varepsilon > 0$. Тогда для типичного элемента $f \in \mathrm{Homeo}_\varepsilon(\overline{U}, \partial U)$ имеем $\operatorname{dem} X = \dim_H(f(X))$.*

Борсук описал такой узел в $\mathbb{R}^3$, ортогональная проекция которого на любую плоскость содержит круг [6]. Анализ работы Борсука показывает, что такой узел существует в каждом классе эквивалентности узлов (как ручных, так и диких). С помощью Теоремы 1 мы можем выяснить, насколько «распространено» свойство типа Борсука. Напомним, что типичный узел в $\mathbb{R}^3$ является диким (Дж. Милнор, 1964) и даже диким в каждой точке (Х.-Г. Боте, 1966).

Следствие 2. *Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ — произвольный узел, U — его ограниченная открытая окрестность, $\varepsilon > 0$. Тогда для типичного гомеоморфизма $f \in \mathrm{Homeo}_\varepsilon(\overline{U}, \partial U)$ проекция узла $f(\Sigma)$ на любую 2-плоскость и на любую прямую является одномерной.*

Также в докладе будут представлены изотопическая версия Теоремы 1 и аналоги Следствия 2 для канторовых множеств в $\mathbb{R}^N$.

Литература

1. Szpilrajn E. La dimension et la mesure / E. Szpilrajn. // Fund. Math. —1937. —V. 28. — P. 81–89.

2. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности / В. Гуревич, Г. Волмэн. — М. : Государственное издательство иностранной литературы, 1948. — 232 с.

3. Штанько М.А. Вложение компактов в эвклидово пространство / М.А. Штанько. // Матем. Сб. —1970. — Т. 83(125), № 2(10). — С. 234–255.

4. Väisälä J. Demension and measure / J. Väisälä. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — V. 76. — P. 167–168.

5. Daverman R.J., Venema D.A. Embeddings in Manifolds. / R.J. Daverman, D.A. Venema. — Graduate Studies in Mathematics 106. Providence, RI: American Mathematical Society, 2009. — 468 p.

6. Borsuk K. An example of a simple arc in space whose projection in every plane has interior points // K. Borsuk. // Fund. Math. — 1947. — V. 34. — P. 272–277.

АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ[1]

Б.Н. Хабибуллин, Р.Р. Мурясов (Уфа, Институт математики УФИЦ РАН)

khabib-bulat@mail.ru

Пусть S — непустое ограниченное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с замыканием $\operatorname{clos} S$ и внутренностью $\operatorname{int} S$, а также с опорной 2π-периодической на вещественной оси $\mathbb{R}$ функцией

$$\operatorname{sp}_S\colon \theta \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \sup_{s\in S} se^{-i\theta}. \tag{1}$$

. Через $C(\operatorname{clos} S)\bigcap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ обозначаем векторное пространство над $\mathbb{C}$ комплекснозначных функций, непрерывных на замыкании $\operatorname{clos} S$ и одновременно голоморфных во внутренности $\operatorname{int} S$, если эта внутренность не пуста, снабжённое стандартной sup-нормой

$$\|f\|_\infty := \sup_{z\in\operatorname{clos} S} |f(z)|, \quad f\in C(\operatorname{clos} S)\bigcap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S). \tag{2}$$

Распределению различных точек $Z := (z_j)_{j=1,2,\dots}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ сопоставляем экспоненциальную систему

$$\operatorname{Exp}^Z := \Bigl\{ z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} e^{z_j z} \Bigm| j = 1.2.\dots \Bigr\}. \tag{3}$$

Система Exp^Z полна в пространстве $C(\operatorname{clos} S)\bigcap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ если замыкание по норме (2) её линейной оболочки совпадает с этим пространством. В докладе будет обсуждаться один широкий класс достаточных условий, при которых система Exp^Z полна в нормированном пространстве $C(\operatorname{clos} S)\bigcap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$. Полнота систем (3) в самых различных пространствах по состоянию до 2012 г. детально обсуждается в [1].

Функцию $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ называем 1-степенно выпуклой, если для любого отрезка $[x_1,x_2]\subset(0,+\infty)$ длины не больше некоторого фиксированного $d>0$ из существования пары чисел $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, для которых выполнены неравенства

$$\begin{cases} f(x_1)\leqslant c_1x_1+c_2/x_1,\\ f(x_2)\leqslant c_1x_2+c_2/x_2 \end{cases}$$

[1] Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00026, https://rscf.ru/project/22-21-00026/

следует такое же неравенство $f(x) \leqslant c_1 x + c_2/x$ при всех $x \in [x_1, x_2]$. Напомним, что 2π-периодическая функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тригонометрически выпуклая, если для любого отрезка $[\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{R}$ длины меньше π из существования пары чисел $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, для которых

$$\begin{cases} g(\theta_1) \leqslant c_1 \sin\theta_1 + c_2 \cos\theta_2, \\ g(\theta_2) \leqslant c_1 \sin\theta_2 + c_2 \cos\theta_2, \end{cases}$$

следует неравенство $g(\theta) \leqslant c_1 \sin\theta + c_2 \cos\theta$ при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Для такой функции всегда существует левая производная g'_{left} конечной ограниченной вариации. Следующая теорема — основной результат доклада, обобщающий [2; теорема 3.1, п. 2)] в случае $S \subset \mathbb{C}$.

Основная теорема. *Пусть для ограниченного подмножества S в $\mathbb{C}$ с опорной функцией* (1) *и со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus \operatorname{clos} S$, для ненулевой 1-степенной функции $f \geqslant 0$ на $(0, +\infty)$ с пределом $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ и интегралом $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$, а также для 2π-периодической тригонометрически выпуклой функции $g \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$ имеет место соотношение*

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\,\limsup_{r\to+\infty} \frac{\pi}{\int\limits_r^{ar} f(x)\,\mathrm{d}x} \sum_{r<|z_j|\leqslant ar} f\bigl(|z_j|\bigr) g(\arg \bar{z}_j)$$

$$> \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sp}_S(\theta) g(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sp}_S(\theta)\,\mathrm{d}\,g'_{\text{left}}(\theta),$$

где сумма интегралов в правой части с множителями $\frac{1}{2}$ — это смешанная площадь выпуклой оболочки множества S с выпуклым компактом с опорной функцией g (см. [3; гл. 1, § 3]). *Тогда экспоненциальная система Exp^Z из* (3) *полна в нормированном пространстве $C(\operatorname{clos} S) \bigcap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ по норме* (2).

Литература

1. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б.Н. Хабибуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — 176 с. `http://www.researchgate.net/publication/271841461`

2. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций / Б.Н. Хабибуллин // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 4. — С. 603–616.

3. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрическая вероятность / Л. Сантало. — М. : Наука, 1983.

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА НУЛЕЙ ФУНКЦИИ ДЭВЕНПОРТА-ХЕЙЛЬБРОННА, ЛЕЖАЩИХ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Ш.А. Хайруллоев (Душанбе, ТНУ)
shamsullo@rambler.ru

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией Дэвенпорта-Хейльбронна называется функция, которая определяется равенством

$$f(s) = \frac{1-iæ}{2}L(s,\chi) + \frac{1+iæ}{2}L(s,\bar{\chi}),$$

где $L(s,\chi)$ — функция Дирихле. Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [1]. Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s),$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s = 0.5$), не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leqslant T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1980 г. С.М. Воронин [2] доказал, что *критическая прямая* то есть $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leqslant T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geqslant T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А. Карацуба. Он в 1989 году доказал, что при ε и ε_1 – произвольно малых фиксированных положительных числах, не превосходящих 0.001, и $T \geqslant T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \qquad (1)$$

В 1993 г. А.А. Карацуба [3], воспользовавшись новым усовершенствованным методом, при котором возникают почти такие же тригонометрические суммы, как при выводе оценки (1), при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, $0 < \varepsilon_1 < 0,01$, ε_1 — фиксированное число, получил более точную оценку вида

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}). \qquad (2)$$

Автору удалось доказать оценку (2) для коротких промежутках критической прямой, имеющих более короткую длину.

Теорема 1. *Пусть ε — произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$, $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$ выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H\sqrt{\ln T} \exp(-c_8\sqrt{\ln\ln T}),$$

где $c_8 > 0$ – абсолютная постоянная.

Основным утверждением, позволяющим доказать эту теорему, является новая оценка специальных тригонометрических сумм $W = W(T)$ равномерных по параметру в терминах экспоненциальных пар [4].

Литература

1. Davenport H. On the zeros of certain Dirichlet series / H. Davenport // J. Lond. Math. Soc. — 1936. — Vol. 11. — PP. 181–185 and 307–312.

2. Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой / С.М. Воронин // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1980. — Т. 44. — № 1. — С. 63–91.

3. Карацуба А.А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле / А.А. Карацуба // Труды МИАН. — 1994. — Т. 207. — С. 180–196.

4. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А., Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой / З.Х. Рахмонов, Ш.А. Хайруллоев, А.С. Аминов // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20, — вып. 4(72). — С. 271–293.

О $C(\alpha,\beta)$ —СУММИРУЕМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ю.Х. Хасанов (Душанбе, РТСУ)
yukhas60@mail.ru

Пусть $B_p^{(2)}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ есть линейное пространство, состоящее из функций $f(x_1,x_2)$, для которых $|f(x_1,x_2)|^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ интегрируема по Лебегу в пространства R^2 с нормой

$$\|f(x_1,x_2)\|_{B_p^{(2)}} = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{(2T)^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} |f(x_1,x_2)|^p dx_1 x_2 \right\}^{1/p} < \infty.$$

Для функции $f(x_1,x_2) \in B_p^{(2)}$ рассмотрим ряд Фурье

$$\sum_{n_1}\sum_{n_2} A_{n_1 n_2} exp(i(\lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \lambda_{n_2}^{(2)} x_2)),$$

где

$$A_{n_1 n_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} f(x_1,x_2) exp(-i(\lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \lambda_{n_2}^{(2)} x_2)) dx_1 dx_2$$

— коэффициенты Фурье рассматриваемой функции.

Приводим утверждения, которые устанавливают достаточные условия абсолютной чезаровской суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодической функции $f(x_1,x_2) \in B_p^{(2)}$ в терминах поведения их коэффициентов Фурье, для различных значений α и β.

При $-1 < \alpha, \beta < \frac{1}{2}$ условия

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} 2^{\frac{n}{2}(1-2\beta)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \rho_{k,0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}(1-2\beta)} \left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \rho_{0,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty;$$

при $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ условия

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(m+1)(n+1)}\left\{\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\rho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{m+1}\left\{\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\rho_{k,0}^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\left\{\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\rho_{0,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty;$$

при $\alpha > \frac{1}{2}, \beta > \frac{1}{2}$ условия

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\rho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\rho_{k,0}^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\rho_{0,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

обеспечивают почти всюду на R^2 $|C;\alpha,\beta|$ — суммируемости указанного двойного ряда Фурье функции $f(x_1,x_2) \in B_p^{(2)}$.

В работе также рассмотрены $|C;\alpha,\beta|$ — суммируемости двойного ряда Фурье функции $f(x_1,x_2) \in B_p^{(2)}$ для значений $\alpha > \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$; $\alpha < \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ и $\alpha < \frac{1}{2}, \beta > \frac{1}{2}$.

Заметим, что признаки абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье почти–периодических в смысле Безиковича функций $f(x) \in B_p$ $(p \geqslant 1)$, в зависимости от поведения показателей Фурье, рассмотрены в работах [1]-[2].

Литература

1. Тиман М.Ф., Хасанов Ю.Х Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти–периодических функций Безиковича / М.Ф. Тиман, Ю.Х. Хасанов // Укр. мат. журнал. — 2009. — Т. 61, № 9. — С.1267—1276

2. Хасанов Ю.Х Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти–периодических функций / Ю.Х. Хасанов // Укр. мат. журнал. — 2013. — Т. 65, № 12. —С.1716—1722.

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В.Л. Хацкевич, О.А. Махинова (Воронеж, ВУНЦ ВВС)
vlkhats@mail.ru

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, Σ — σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P — вероятностная мера; обозначим через J множество нечетких чисел с квадратично-суммируемыми индексами.

Измеримое отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$ называют нечетко-случайной величиной (Н.С.В.), если при любом $\omega \in \Omega$ множество $\tilde{X}(\omega)$ является нечетким числом из J (см., напр., [1]).

Рассмотрим интервалы α-уровней Н.С.В. $\tilde{X}$ при фиксированном ω. А именно, $X_\alpha(\omega) = \{t \in R : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(t) \geqslant \alpha\}$, где $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(t)$ — функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$, а $\alpha \in (0,1]$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega,\alpha), X^+(\omega,\alpha)]$, где границы $X^-(\omega,\alpha)$ и $X^+(\omega,\alpha)$ — случайные величины. Они называются, соответственно, левым и правым α -индексами Н.С.В. $\tilde{X}$.

В дальнейшем будем рассматривать класс $\mathfrak{X}$ Н.С.В. $\tilde{X}$, для которых α -индексы $X^-(\omega,\alpha)$ и $X^+(\omega,\alpha)$ являются квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0,1]$ функциями.

В соответствии с [2] определим ковариацию между Н.С.В. $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ с интервалами α-уровня $[X^-(\omega,\alpha), X^+(\omega,\alpha)]$ и $[Y^-(\omega,\alpha), Y^+(\omega,\alpha)]$ формулой

$$Cov[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0.5\int_0^1 (Cov[X^-(\omega,\alpha), Y^-(\omega,\alpha)]+$$

$$+Cov[X^+(\omega,\alpha), Y^+(\omega,\alpha)])d\alpha,$$

где под знаком интеграла стоят ковариации между соответствующими случайными величинами.

Рассмотрим вопрос об оптимальной линейной аппроксимации (прогнозируемой) Н.С.В. $\tilde{Y}$ по системе (прогнозирующих) Н.С.В. $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n$. В ряде работ задачи такого рода рассматривались. При этом специфика задачи определяется выбором расстояния, которое требуется минимизировать.

Обозначим через $Y^{\pm}(\omega,\alpha)$ и $X_i^{\pm}(\omega,\alpha)$ - индексы Н.С.В. $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_i$ $(i=1,...,n)$.

Рассмотрим задачу об аппроксимации Н.С.В. $\tilde{Y}$ линейными комбинациями $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\tilde{X}_i$ с вещественными коэффициентами β_i $(i=1,...,n)$ по критерию минимизации следующего выражения

$$F(\beta_1,...,\beta_n)=\int\limits_0^1 D(Y^+(\omega,\alpha)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i X_i^+(\omega,\alpha))d\alpha+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i X_i^-(\omega,\alpha))d\alpha\to\min\ (\beta_i\in R,\ \ i=1,...,n), \tag{1}$$

где знак D означает дисперсии соответствующих случайных величин.

Теорема 1. *Пусть Н.С.В. $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,...,\tilde{X}_n$ принадлежат классу $\mathfrak{X}$. Пусть $\tilde{X}_i$ попарно некоррелированы и их дисперсии $D(\tilde{X}_i)=\sigma_i^2\neq 0$. Тогда задача (1) имеет решение, причем единственное. Оно имеет вид*

$$\beta_i^*=\frac{Cov[\tilde{Y},\tilde{X}_i]}{\sigma_i^2}\quad(i=1,...,n). \tag{2}$$

Отметим, что коэффициенты (2) напоминают известные для «обычных» случайных величин (см., напр., [3] гл. II, §11).

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 те оптимальные коэффициенты β_i^*, которым соответствуют неотрицательные ковариации $Cov[\tilde{Y},\tilde{X}_i]\geqslant 0$ - неотрицательны. А те оптимальные коэффициенты β_i^*, которые соответствуют отрицательным ковариациям $Cov[\tilde{Y},\tilde{X}_i]<0$ - отрицательны.*

Отметим отличие теоремы 1 от результата работы [4]. В работе [4] введено понятие квазискалярного произведения между Н.С.В. и рассмотрена задача о линейной регрессии относительно минимизации некоторого расстояния, связанного с введенным квазискалярным произведением. При этом предполагается попарная квазиортогональность системы Н.С.В. $\tilde{X}_i$ $(i=1,...,n)$, по которой осуществляется регрессия.

Определим коэффициент корреляции между Н.С.В.$\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$

$$k[\tilde{Y},\tilde{Z}]=\frac{Cov[\tilde{Y},\tilde{Z}]}{\sigma(\tilde{Y})\sigma(\tilde{Z})}, \tag{3}$$

где $\sigma(\tilde{Y})$ и $\sigma(\tilde{Z})$ среднеквадратичные отклонения Н.С.В. $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$.

Определение (3) и свойства коэффициента корреляции обсуждаются в [2]. Например, равенство $k[\tilde{Y}, \tilde{Z}] = 1$ означает, что $\tilde{Y} - \tilde{y} = \lambda(\tilde{Z} - \tilde{z})$, где $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ - нечеткие ожидания Н.С.В. $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$, а $\lambda = \sigma(\tilde{Y})/\sigma(\tilde{Z})$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, причем дисперсия* $D(\tilde{Y}) = \sigma^2 \neq 0$. *Пусть дополнительно все ковариации* $Cov[\tilde{Y}, \tilde{X}_i] \geqslant 0$ $(i = 1, ..., n)$. *Тогда оценка* $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_i^* \tilde{X}_i$ *имеет максимальный коэффициент корреляции по сравнению с другими линейными оценками вида* $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_i \tilde{X}_i$ *при* $\beta_i \geqslant 0$ $(i = 1, ..., n)$.

Отметим, что теорема 2 в случае «обычных» случайных величин соответствует результату о максимальной корреляции линейного предиктора с прогнозируемой случайной величиной (см., напр., [5] гл. 5, §5.6). Для Н.С.В. результаты подобного типа ранее не отмечались.

Литература

1. Puri M. L. Fuzzy random variables. / M.L. Puri , D.A. Ralesku. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1986. — № 114. — С. 409 - 422.

2. Feng Y. The variance and covariance of fuzzy random variables. / Y. Feng, L. Hu., H. Shu. // Fuzzy Sets and Systems. — 2001. — № 120. — С. 487-497.

3. Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев. — М. : Наука, 2007, Кн. 1. — 552 с.

4. Khatskevich V.L. On the law of large numbers and linear regression of fuzzy random variables. / V.L. Khatskevich. // The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5). — 2020. — С. 73-77.

5. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика / Г.И. Ивченко., Ю.И. Медведев. — М. : Книжный дом Либроком, 2019. — 352 с.

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И ОБОБЩЕННЫЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ПРОСТЕЙШЕГО ВИДА

А.П. Хромов (Саратов, СГУ)
KhromovAP@sgu.ru

Расходящиеся ряды в понимании Эйлера появились впервые в [1] и нашли широкое применение в смешанной задаче для волнового уравнения [2–8]. В настоящей работе такие ряды используются в смешанной задаче для уравнения теплопроводности и уравнения Шредингера простейшего вида. Кроме того, рассматриваются два расходящихся ряда из косинусов, порождаемых формальными решениями по методу Фурье таких задач. Суммы этих рядов из косинусов находятся с применением теории обобщенных функций и тем самым открываются новые возможности использования обобщенных функций в смешанных задачах.

1. Рассмотрим следующую обобщенную смешанную задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x) \in L[0,1]$ и комплекснозначна.

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье есть

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} 2(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x. \tag{4}$$

Решить обобщенную задачу (1)–(3) — значит найти сумму ряда (4). При $t > 0$ из (4) имеем

$$u(x,t) = \int_0^1 G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

где $G(x,\xi,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi\xi\sin n\pi x$ есть функция мгновенного точечного источника.

Обозначим
$$\omega(x,t;\varphi)=\int\limits_0^1 G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Лемма 1. *Имеет место оценка:*
$$\sup_{x\in[0,1]}|\omega(x,t;\varphi)|\leqslant 2m(t)\|\varphi\|_1,$$
где $m(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi^2 t}$, $\|\cdot\|_1$ *— норма в* $L[0,1]$.

Лемма 2. *При любом* $T>0$ $m(t)\in L[0,T]$.

Теорема 1. *Решение обобщенной смешанной задачи* (1)–(3) *определяется по формуле:*
$$u(x,t)=\begin{cases}\omega(x,t;\varphi), & t>0,\\ \varphi(x), & t=0.\end{cases}$$

2. Рассмотрим неоднородную задачу:
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\quad x,t\in[0,1]\times[0,\infty),\tag{6}$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0,\tag{7}$$
$$u(x,0)=0,\tag{8}$$
где $f(x,t)$ класса Q, т. е. $f(x,t)\in L[Q_T]$, $Q_T=[0,1]\times[0,T]$ при любом $T>0$.

Формальное решение задачи (6)–(8) по методу Фурье есть
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t e^{-n^2\pi^2(t-\tau)}2\int\limits_0^1 f(\xi,\tau)\sin n\pi\xi\sin n\pi x\,d\xi\,d\tau.\tag{9}$$

Обозначим $m_1(\tau)=\int\limits_0^1|f(\xi,\tau)|\,d\xi$.

Лемма 3. *Интеграл* $\int\limits_0^t m(t-\tau)m_1(\tau)\,d\tau$ *при* $t\leqslant T$ *принадлежит* $L[0,T]$.

Теорема 2. *Решение обобщенной смешанной задачи* (6)–(8) *существет при* $x \in [0,1]$ *и почти всех* t, *причем*

$$\sup_{x\in[0,1]} |u(x,t)| \leqslant 2 \int\limits_0^t m(t-\tau)m_1(\tau)\,d\tau.$$

3. С рядом (4) связан ряд из косинусов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi x. \tag{10}$$

Приступаем к нахождению суммы расходящегося ряда (10). Достаточно найти эту сумму при $x \in [-1,1]$. Привлекаем обобщенные функции. В качестве основного пространства K возьмем множество всех функций, финитных на $[-1,1]$ и бесконечно дифференцируемых. Пусть $\sigma_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\pi x$ есть частичная сумма ряда (10).

Лемма 4. *Имеет место формула:*

$$(\sigma_n(x), \psi(x))_1 = -(\nu_n(x), \psi'(x))_1, \tag{11}$$

где $\nu_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k\pi x}{k\pi}$, $(f(x), g(x))_1 = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

Введем функцию

$$\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{1}{2}(1+x), & x \in [-1,0). \end{cases}$$

Лемма 5. *Производная по Соболеву функции* $\nu(x)$ *есть*

$$\nu'(x) = -\frac{1}{2} + \delta(x), \tag{12}$$

где $\delta(x)$ — *дельта-функция Дирака.*

Теорема 3. *Сумма расходящегося ряда* (10) *в пространстве обобщенных функций есть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi x = -\frac{1}{2} + \delta(x).$$

Замечание. Другим путем этот результат получен в [9].

4. Перейдем теперь к другому расходящемуся ряду из косинусов.

Исходной теперь является следующая обобщенная смешанная задача для простейшего уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{13}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{14}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{15}$$

где $\varphi(x)$ та же функция, что и в п. 1.

Формальное решение задачи (13)–(15) по методу Фурье есть

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-in^2\pi^2 t}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x. \tag{16}$$

С рядом (16) связан следующий ряд по косинусам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-in^2\pi^2 t}\cos n\pi x. \tag{17}$$

Ряд (17) расходящийся в обычном смысле. Для нахождения его суммы аналогично п. 3 привлечем обобщенные функции, но теперь их будем рассматривать по переменной t.

Теорема 4. *Сумма расходящегося ряда* (17) *при* $t \in [0,\infty)$ *и* $x \in [0,1]$ *есть производная по Соболеву* $f'_t(x,t)$ *по переменной* t *в пространстве обобщенных функций по* t *функции* $f(x,t)$, *являющейся суммой схлдящегося ряда*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik^2\pi^2}[1 - e^{-ik^2\pi^2 t}]\cos k\pi x.$$

Теорема 5. *Решением обобщенной смешанной задачи* (13)–(15) *является*

$$u(x,t) = -g'_t(x,t),$$

где $g'_t(x,t)$ — *производная по Соболеву функции*

$$g(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2(\varphi(\xi), \sin k\pi\xi)\sin k\pi x \frac{1}{ik^2\pi^2}e^{-ik^2\pi^2 t}.$$

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с геометрической прогрессией / А.П. Хромов // Современные методы теории краевых задач : материалы международной конференции «Понтрягинские чтения – XXX» (3–9 мая 2019 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 291–300.

2. Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью / А.П. Хромов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2019. — Т. 19, вып. 3. — С. 280–287.

3. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международной Саратовской зимней школы (Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.). — Саратов : Научная книга, 2020. — С. 433–439.

4. Хромов А.П. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 215–238.

5. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 319–324. URL: https://sgu.ru/node/184778 (дата обращения: 15.03.2022).

6. Ломов И.С. Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения / И.С. Ломов // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2021. — № 4. — С. 37–42.

7. Ломов И. С. Новый метод построения обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2022. — № 3. — С. 33–40.

8. Ломов И.С. Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы / И.С. Ломов // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1471–1488.

9. Ломов И.С. Обобщенные функции в задачах математической физике : учебное пособие / И.С. Ломов. — М. : МАКС Пресс, 2021. — 109 с.

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Ф.Г. Хуштова (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
khushtova@yandex.ru

В области $\Omega_T = \{(x,y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x,y) - D^{\alpha}_{0y} u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $B_x = x^{-b}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^b\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор Бесселя, $|b| < 1$, D^{α}_{0y} — дробная производная в смысле Римана—Лиувилля порядка $0 < \alpha \leqslant 1$ [1, с. 9], [2, с. 14].

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω_T назовем функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω_T, и такую, что $y^{1-\alpha}u$, $x^b y^{1-\alpha}u_x \in C(\bar{\Omega}_T)$, $B_x u$, $D^{\alpha}_{0y}u \in C(\Omega_T)$, $\bar{\Omega}_T$ — замыкание области Ω_T.

Задача. *Найти регулярное в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}u(x,y) = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^b u_x(x,y) = hu(0,y) - \nu(y), \quad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\nu(y)$ — заданная функция, $h = const$.

Далее $f(y) * g(y)$ — свёртка Лапласа, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [3, с. 5], [4, с. 11], $H^{2,0}_{1,2}[...]$ — H-функция Фокса [5, с. 528], [6, с. 1], $E_{\mu,\mu}(z)$ — функция типа Миттаг-Леффлера [7, с. 117].

Примем обозначения $2\beta = 1-b$, $\lambda = 2^{2\beta-1}h\Gamma(\beta)/\Gamma(1-\beta)$, $\mu = \alpha\beta$,

$$E(y) = y^{\mu-1}E_{\mu,\mu}\left(-\lambda\, y^{\mu}\right),$$

$$K(x,y) = \frac{x^{2\beta}y^{-1}}{2\,\Gamma(1-\beta)} H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{x^2}{4y^{\alpha}}\left|\begin{array}{l}(0,\alpha)\\(-\beta,1),\,(0,1)\end{array}\right.\right],$$

$$\widetilde{K}(x,y) = K(x,y) - \lambda\, K(x,y) * E(y).$$

Теорема 1. *Пусть $y^{1-\alpha}\nu(y) \in C[0,T]$ и выполняется условие $\lim\limits_{y\to 0} y^{1-\alpha}\nu(y) = 0$. Тогда функция*

$$u(x,y) = \int\limits_0^y \widetilde{K}(x, y-\eta)\,\nu(\eta)\,d\eta$$

является решением задачи (1) – (3).

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи* (1) – (3), *удовлетворяющего для некоторого* $k > 0$ *условию*

$$\lim_{x\to\infty} y^{1-\alpha} u(x,y) \exp\left(-kx^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0.$$

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.

3. Кузнецов Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. — М. : Высшая школа, 1965. — 248 с.

4. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. — М. : Физматлит, 1963. — 358 с.

5. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Физматлит, 2003. — 688 с.

6. Kilbas A.A. H-Transform. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M. Saigo. — Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. : Chapman and Hall/CRC, 2004. — 389 p.

7. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. — М. : Наука, 1966. — 672 с.

ТЕОРИЯ РЕФЛЕКСИВНОСТИ ДЛЯ СУЩЕСТВЕННО НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

И.Г. Царьков (Москва, МГУ)

tsar@mech.math.msu.su

В этой работе мы изучим перенесение понятия рефлексивного пространства со случая симметричного линейного пространства, т.е. обычного нормируемого пространства, на случай несимметричного конус-пространства. Подчеркнем, что один из результатов этого исследования таков: равномерно выпуклые существенно несимметричные линейные пространства являются рефлексивными. Пусть в линейном пространстве X над полем $\mathbb{R}$ есть выпуклое множество B со следующими свойствами: 1. $0 \in B$; 2. любая прямая $\ell = \{te \mid t \in \overline{\mathbb{R}} :=$

[1] Исследование выполнено в МГУ им. М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-21-00204).

$[-\infty,+\infty]\}$ $(e\neq 0)$, проходящая через ноль, пересекает множество B по отрезку в расширенном смысле, т.е. $B\cap\ell=\{te\mid t\in[\alpha,\beta]\subset\overline{\mathbb{R}}\}$. При этом мы считаем, что расширенный конец $\alpha=-\infty$ $(\beta=+\infty)$, если промежуток пересечения прямой-оси ℓ с множеством B, неограничен снизу (сверху). С множеством B свяжем расширенный функционал Минковского $p_B : X\to[0,+\infty]$, положив для всех $x\in X\setminus\{0\}$, его значение равным $\inf\{t\in\overline{\mathbb{R}}_+ := [0,+\infty]\mid tB\ni x\}$. Если ни при каком конечном $t\geqslant 0$ точка x не принадлежит множеству tB, то мы по определению считаем, что $p_B(x)=+\infty$. И, конечно, полагаем, что $p_B(0)=0$. Тем самым, формула $\|\cdot|:=p_B(\cdot)$ задает на X расширенную несимметричную полунорму. Множество ненулевых векторов $e\in X$, для которых $\|e|<+\infty$ будем называть значимыми и через $\mathbf{Z}$ будем обозначать множество всех таких векторов, а множество $\mathbf{K}=\mathbf{K}(X)$, состоящее из векторов te $(t\geqslant 0,\ e\in\mathbf{Z})$, будем называть конус-пространством для полунормы $\|\cdot|$. Таким образом, $\mathbf{K}=\mathbf{Z}\cup\{0\}$. Через $\mathbf{L}=\mathbf{L}(\mathbf{K})$ обозначим максимальное линейное многообразие, состоящее из векторов te $(t\in\mathbb{R},\ \pm e\in\mathbf{Z})$. Если $\|e|>0$ для всех ненулевых векторов $e\in\mathbf{Z}$, то расширенную полунорму $\|\cdot|$ будем называть расширенной нормой. По определению положим $B(x_0,r)=x_0+rB=\{x\in X\mid \|x-x_0|\leqslant r\}$, $S(x,r):=B(x_0,r)\setminus\overset{\circ}{B}(x_0,r)\quad(x_0\in X,\ r\geqslant 0)$. Через S будем обозначать множество $S(0,1)$. Тем самым в пространстве X° – всех линейных функционалов на X можно рассмотреть конус $\mathbf{K}^*$, состоящий из всех ограниченных линейных функционалов на X. На конус-пространстве $\mathbf{K}^*$ определена несимметричная норма (полунорма) $\|\cdot|_*$, которая расширяется до обобщенной нормы на X° при помощи равенства $\|x^*|_*:=+\infty$ для всех $X^\circ\setminus\mathbf{K}^*$. На самом деле, эта норма (полунорма) есть функционал Минковского множества, состоящего из всех ограниченных сверху числом 1 линейных функционалов на X. Конус-пространство $\mathbf{K}^*$ будем называть сопряженным пространством с $\mathbf{K}$. Здесь надо отметить, что в случае существенно несимметричного линейного пространства сопряженное с ним пространство не является линейным. Далее аналогичным способом можно ввести $\mathbf{K}^{**}:=(\mathbf{K}^*)^*$ второй сопряженный конус и т.д. Также в качестве носителей соответственно расширенных норм $\|\cdot|$, $\|\cdot|_*$ и $\|\cdot|_{**}$ можно вместо линейных пространств X, X° и $X^{\circ\circ}:=(X^\circ)^\circ$ рассмотреть соответственно линейные оболочки конусов $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}^*$ и $\mathbf{K}^{**}$ или любые линейные пространства их содержащие. При необходимости соответствующие расширенные (обобщенные) нормы доопределяются значением $+\infty$. Любой элемент $x\in\mathbf{K}$ можно трактовать как элемент второго сопряженного конуса, если определить действие элемента x на конус-пространство $\mathbf{K}^*$ формулой $x(x^*) := x^*(x)$. Такое сопоставление элементов конус-пространства $\mathbf{K}$ элементу конус-пространства $\mathbf{K}^{**}$ будем называть *естественным вложением* конус-пространства $\mathbf{K}$ в конус-пространство $\mathbf{K}^{**}$ и обозначать как отображение $\mathfrak{J} : \mathbf{K} \to \mathbf{K}^{**}$. И $\mathbf{K}$ – рефлексивно (по определению), если $\mathfrak{J}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^{**}$. Мы будем рассматривать только те конус-пространства $\mathbf{K}$, для которых $\mathfrak{J}(\mathbf{K})$ – правое замыкание $\mathfrak{J}(\mathbf{L}(\mathbf{K}))$ в $\mathbf{K}^{**}$.

Теорема 1. *Рефлексивность конус-пространства $\mathbf{K} = \mathbf{K}(X)$ эквивалентно тому, что любой функционала $x^* \in S^*$ (т.е. функционал $x^* \in \mathbf{K}^*$ единичной нормы) достигает своей нормы.*

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{K}$ – право-полное конус-пространство. Тогда $\mathbf{K}$ рефлексивно тогда и только тогда, когда всякое право-полное сепарабельное конус-подпространство $\mathbf{K}_0$ рефлексивно.*

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{K}$ – право-полное конус-пространство. Тогда $\mathbf{K}$ рефлексивно тогда и только тогда, когда всякое право-полное конус-подпространство $\mathbf{K}_0$ рефлексивно.*

ОБ УСЛОВИЯХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ВЫХОДОВ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА[1]

О.Б. Цехан (Гродно, ГрГУ)
tsekhan@grsu.by

Рассматривается линейная нестационарная система вида

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = A\,(t,\mu)\, z(t),\ z = (x,y)' \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^{n_1}, y \in \mathbb{R}^{n_2}, t \in T, \\ &v(t) = c\,(t)\, z(t),\ \ v \in \mathbb{R},\ \ t \in T,\ z(t_0) = z_0,\ z_0 = (x_0, y_0)', \end{aligned} \tag{1}$$

где μ — параметр, $\mu > 0$, $A\,(t,\mu) = A^1(t) + \frac{1}{\mu}A^2(t)$, $A^1\,(t) = \left(\begin{smallmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^2\,(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{smallmatrix}\right)$, $c(t) = [c_1(t), c_2(t)]$, $A_i\,(t)\,, \overline{1,4}$, $c_j\,(t)\,, j = 1,2,$ — непрерывные на T матричные функции подходящих размеров, $n = n_1 + n_2$.

Пусть реализовалось некоторое фиксированное $\mu > 0$ и в системе (1) реализовалось некоторое начальное состояние $z_0 = z(t_0)$, что породило процесс $z(t,\mu) = z(t, z(t_0), \mu)$ $(t \in T)$ и выходную функцию $v(t,\mu) = v(t, z(t_0), \mu)$ $(t \in T)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025", задание 1.2.04)..

Для целого $m > 0$ обозначим через $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных матриц $P(t)$ размера $\big((m+1)\times(m+1)\big)$ с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$ $(k, i = 0, 1, \ \ldots, m)$, удовлетворяющими условию $p_{kk}(t) \neq 0$ $(t \in T)$, $(k = 0, 1, \ \ldots, m)$. Используя понятие квазидифференцируемости относительно $P(t) \in \mathcal{U}_k(T)$ [1] следуя [2] введем

Определение. При фиксированном $\mu > 0$ система (1) имеет P-класс k, если всякая ее выходная функция $v(t, z_0, \mu)$, $t \in T$, имеет непрерывные квазипроизводные относительно матрицы $P(t)$ до порядка k включительно.

Применение Леммы 2.1 [2, с. 32] к системе (1) доказывает

Утверждение. *При фиксированном $\mu > 0$ система (1) имеет P-класс k тогда и только тогда, когда для $j = 0, 1, \ \ldots, k$ существуют и непрерывны функции-строки*

$$\begin{aligned} &s_0(t,\mu) = p_{00}(t)c(t), \\ &s_j(t,\mu) = p_{jj}(t)\big(s_{j-1}(t)A(t,\mu) + \dot{s}_{j-1}(t,\mu)\big) + \sum_{i=0}^{j-1} p_{ji}(t)s_i(t,\mu). \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть для выбранной $P \in \mathcal{U}_n(T)$ существуют n-вектор функции $s_j^m(t)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, определяемые рекуррентными соотношениями

$$s_j^m(t) = \begin{cases} s_0^0(t) = p_{00}(t)c(t), \\ s_j^m(t) = 0,\ m > j \text{ или } m < 0, \\ p_{jj}(t)s_{j-1}^m(t)A^1(t) + p_{jj}(t)s_{j-1}^{m-1}(t)A^2(t) + \\ +\dot{s}_{j-1}^m(t) + \sum_{i=m}^{j-1} p_{ji}(t)s_i^m(t),\ m = \overline{1, j-1}. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема. *Система (1) имеет P- класс n для любого $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда $\forall j = \overline{0, n-1}, m = \overline{0, j}$, n-вектор функции $s_j^m(t)$ (4) непрерывно дифференцируемы.*

Доказательство. *Достаточность.* Если верны предположения леммы, то определены вектор-строки $s_j^m(t), \forall j = \overline{0, n}$, $m = \overline{0, j}$, (4). Методом матиндукции с использованием (2) доказывается, что тогда определены строки $s_j(t,\mu), j = \overline{0, n}$ (2) и $\forall \mu > 0$ они представимы в виде $s_j(t,\mu) = \sum_{m=0}^{j} \frac{1}{\mu^m} s_j^m(t)$, откуда согласно Утверждению следует, что достаточность верна. *Необходимость.* Пусть система (1) имеет P- класс n для любого $\mu > 0$. Тогда функции, определенные в (2), непрерывны $\forall j = \overline{0, n}$. Согласно (2) из непрерывности $s_k(t,\mu)$ следует непрерывная дифференцируемость $s_{k-1}(t,\mu)$, поэтому $\forall \mu > 0$ непрерывно дифференцируемы функции $s_j(t,\mu) \forall j = \overline{0, n-1}$. Далее с учетом $s_j(t,\mu) = \sum_{m=0}^{j} \frac{1}{\mu^m} s_j^m(t)$ доказывается непрерывная дифференцируемость $s_j^m(t)$ для любых $j = \overline{0, n-1}, m = \overline{0, j}$, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Если выполнены условия Теоремы, то матрица P, относительно которой квазидифференцируемы выходы системы (1), не зависит от μ и определяется тройкой $\left(A^1, A^2, c\right)$.*

Доказанные условия гарантируют существование зависящей от параметра матрицы наблюдаемости [2, стр. 33] для линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем вида (1) при любом положительном значении параметра и могут быть использованы при анализе P-равномерной наблюдаемости таких систем.

Литература

1. Дерр В.Я. К обобщенной задаче Балле Пуссена // Дифференц. уравнения — 1987 — 23:11. — С. 1861–1872.

2. Астровский А.И., Гайшун И.В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. — Минск: Беларус. навука, 2013.

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ: РАЦИОНАЛЬНАЯ СУЩНОСТЬ И ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ

Н.В. Черноусова (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
chernousovi@mail.ru

Модель экзаменационной работы по математике сохраняет преемственность. Единый государственный экзамен по математике (ЕГЭ по математике) профильного уровня полностью соответствуют требованиям к уровню подготовки выпускников средней общеобразовательной школы. В целях эффективного отбора выпускников для продолжения образования в высших учебных заведениях задания 2 части работы предназначены для проверки знаний на том уровне требований, который традиционно предъявляется вузами с профильным экзаменом по математике. Содержание и структура экзаменационной работы дают возможность достаточно полно проверить комплекс умений по математике, в том числе умения решать уравнения и неравенства.

Результаты проверки экзаменационных работ показывают, что выпускники используют различные методы решения неравенств. В последнее время очевидно превалирование метода рационализации при решении заданий под номером 14. Всегда ли этот выбор осознан и необходим? Статистика проверки работ такова: «решаемость» этого задания невысока, примерно около 17% логично и обоснованно приводят решение задания.

Можно выделить типичные ошибки учащихся при использовании различных способов решения неравенств. При использовании обобщенного метода интервалов учащиеся допускают формальное выполнение шагов метода интервалов и отдельных этапов без понимания его сути; расстановка знаков на числовой прямой происходит без учета области определения функции. Метод рационализации школьники зачастую используют, не приведя неравенство к стандартному виду, не учтя особые допустимые условия его использования.

Проверка умения решать неравенства ежегодно выявляет, что школьники не умеют логично, обоснованно решать простейшие квадратные и дробно-рациональные неравенства. В чем причина происходящего? Почему ежегодные статистические данные отмечают лишь незначительный рост выполнения заданий? Метод рационально достаточно недавно был включен в общую систему школьного математического образования. Психолого-педагогические и методические исследования доказали – восприятие и запоминание информации легче, если она структурирована. В настоящее время в большинстве случаев сведена к разбору типовых заданий, отсутствует системность в подходе к решению заданий, не все учебные пособия содержать систему задач, ограничиваются лишь набором тематической направленности.

Литература

1. Черноусова Н.В. К вопросу о методе рационализации в ЕГЭ по математике / Н.В. Черноусова // Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина : Сер. «Педагогика» (История и теория математического образования). - Елец, 2014. С. 154-158.

ДВОИЧНЫЕ БАЗИСНЫЕ СПЛАЙНЫ И ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ[1]

С.А.Чумаченко (Саратов, СГУ)
chumachenkosergei@gmail.com

Основная проблема сплайн интерполяции состоит в следующем: по значениям $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ построить функцию $S(x)$ такую, что
1) $S(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и m раз дифференцируема на $\mathbb{R}$, $\quad m \geqslant 1$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-2101-00037).

2) на каждом отрезке $[j, j+1]$ функция $S(x)$ есть многочлен степени m.
3) $S(j) = f_j$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.
В данном докладе рассматривается решение основной проблемы сплайн интерполяции двоичными базисными сплайнами. При этом найдено представление в виде, при котором не нужно решать систему бесконечного числа уравнений.

Определение 1. *Пусть $W_{2^n-1}(x)$— функции Уолша, $If(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ $(x \in [0,1])$ — оператор интегрирования, Функцию*

$$\psi_{n,N}(x) = Q(n,N)I^N W_{2^n-1}(x), x \in [0,1],\ n,\ N \in \mathbb{N},\ N \leqslant n,$$

будем называть двоичным базисным сплайном N-й степени от n-й функции Уолша, где $Q(n,N)$ — нормирующий коэффициент $\psi_{n,N}(x)$ в $C[0,1]$.

Определение 2. *Обозначим через $P_k(0,+\infty)$ совокупность кусочно–многочленных функций k-й степени , имеющих непрерывные производные до $k-1$-го порядка на $[0,+\infty)$, и которые на каждом отрезке $[t-1,t]$ $(t \in \mathbb{N})$ совпадают с некоторым многочленом k-й степени. Аналогично определяется и пространство $P_k(-\infty,+\infty)$.*
Обозначим $F_{n,n}(x) = \psi_{n,n}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Теорема 1. *Совокупность функций*

$$F_{n,n}\left(x-j\right), j \in \mathrm{Z},\ j > -2^n,\ j \notin \left[-2^{d+1}+1, -2^d-1\right],$$

$$0 \leqslant d < n,\ d \in \mathrm{N},$$

образуют базис пространства $P_n(0,+\infty)$.

Для начала определим коэффициенты перед двоичными базисными сплайнами, которые в точке $x=0$ не равны нулю. Это функции вида $F_{n,n}\left(x-2^t\right)$. Коэффициенты вида $c_{-2^t}, 0 \leqslant t \leqslant n$ в разложении функции $f \in P_n(0,+\infty)$ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} c_{-1} = \frac{a_{n-1}}{\psi_{n,n}^{(n-1)}\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{a_{n-1}\cdot Q(1,1)}{Q(n,n)} = \frac{a_{n-1}\cdot 2^{\frac{2+3-1-2}{2}}}{2^{\frac{2n^2+3n-n^2-2}{2}}} = \frac{a_{n-1}}{2^{\frac{n^2+3n-4}{2}}}, \\ \dots \\ c_{-2^t} = \frac{a_{n-t} - \sum_{j=0}^{t-1} c_{-2^j}\, \psi_{n,n}^{(t)}\left(\frac{1}{2^{n-t}}\right)}{2^{\frac{(n^2-t^2)+3(n-t)}{2}}}, \\ \dots \end{cases}$$

где $a_t = f^{(t)}(0)$.
После этого можно продолжить вычисления на положительную полуось. Коэффициент c_i при $i \geqslant 0$ однозначно вычисляется рекуррентным соотношением в целочисленной точке $i+1$. Наконец, вычисления можно продолжить и на отрицательную полуось, таким образом система

$$F_{n,n}(x-j),\ j \in \mathrm{Z}, j \notin \left[-2^{d+1}+1, -2^d-1\right],\ 0 \leqslant d < n,\ d \in \mathrm{N}.$$

есть базис в пространстве $P_n(-\infty, +\infty)$.

Литература

1. Чумаченко С. А. Гладкие аппроксимации в $C[0,1]$. Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2021 г.).

2. Чуи К. Введение в вейвлеты : Москва, Мир,2001. 412 с.

3. Лукомский С. Ф.,Мушко М. Д. О двоичных базисных сплайнах 2-й степени// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2018. Т. 18, вып. 2. С. 172–182.

СКОРОСТЬ РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

С.А. Шабров, Ал-Гарайхоли Иван Абдулкариим Хузам
(Воронеж, ВГУ)
shabrov_s_a@math.vsu.ru

В работе изучена скорость роста спектральной задачи

$$\begin{cases} -\left(pu_x'\right)_\sigma' + qu = \lambda M_\sigma' u; \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр.

Решение (1), как и в работах [1]–[3], будем искать в классе E — абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых $u_x'(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$.

В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\sigma(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство $-\Delta\left(pu_x'\right)(\xi) + u(\xi)q(\xi) = \lambda M_\sigma'(\xi)u(\xi)$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $M(x)$ σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ (описание построения множества $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ см. [1]–[3]), $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $q(x)$ — σ–суммируема, $q(x) \geqslant 0$.

Доказана теорема.

Теорема. *Пусть выполнено дополнительное условие:* $M'_\sigma(x) > 0$. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{1/2+\delta}},$$

где λ_n *— собственные значения задачи (1), сходится при любом* $\delta > 0$*, и расходится при* $\delta = 0$.

Литература

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

2. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

3. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ)

shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Наличие достаточного количества не только первых интегралов, но и других тензорных инвариантов, как известно [1, 2], позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт достаточно естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими (асимптотическими) предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (в смысле комплексного анализа) функции (см. также [3–5]).

Как показано ранее, задача о движении четырехмерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как “поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее четырехмерное пространство”. Эта задача приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [6]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по трехмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего четырехмерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим трехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д. Впервые частные случаи систем с тремя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [4, 5]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Так в начале работы изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, трехмерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Далее в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным в начале работы. В заключительной части работы рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Также указываются достаточные условия интегрируемости.

Литература

1. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.

2. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 117–148.

3. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях / М.В. Шамолин // Успехи матем. наук. — 1998. — Т. 53, № 3. — С. 209–210.

4. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 84–90.

5. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491, № 1. — С. 95–101.

6. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Доклады РАН. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 506–509.

К ПРОДОЛЖЕНИЮ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВДОЛЬ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)

nashananin@inbox.ru

Пусть

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},\ i^2 = -1, \qquad (1)$$

- линейный дифференциальный оператор порядка $m \geqslant 1$ с вещественно аналитическими, комплекснозначными коэффициентами, определенный в открытом множестве Ω. Обозначим через $\mathcal{K}_x(P) \subset T^*_x\Omega$ ядро симметрической m-линейной формы

$$\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m = 1}^{n} \frac{\partial^m p_m}{\partial \xi_{j_1} \dots \partial \xi_{j_m}}(x, \xi) \eta^1_{j_1} \dots \eta^m_{j_m},$$

индуцируемой в точке $x \in \Omega$ и старшим символом оператора P.

Предположим, что:

(1) $\bigcup\limits_{x \in \Omega} (x, K_x(P) \setminus \{0\}) = \mathrm{Char}(P)$;

(2) коразмерность ядра $K_x(P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$ и равна k.

Множество $\cup_{x \in \Omega}(x, K_x(P))$ образует подрасслоение $K(P)$ расслоения $T^*\Omega$ коразмерности k, которое в касательном расслоении $T\Omega$ индуцирует гладкое k-мерное подрасслоение:

$$L(P) = \{(x, \tau) \in T\Omega \,|\, x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0 \ \forall \xi \in K_x(P)\}.$$

Через $\mathcal{L}(P)$ обозначим дифференциальную систему, порожденную $L(P)$, то есть подмодуль C^∞-сечений подрасслоения $L(P) \subset T\Omega$ модуля C^∞-сечений $\mathcal{T}\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ порождает в C^∞-модуле $\mathcal{T}\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞-подмодулей $\mathcal{H}^j$, в которой первый элемент $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули $\mathcal{H}^{j+1}$ порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$. Дифференциальную систему $\mathcal{L}$ называют неголономной, если найдется такое число r, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}^1 \subsetneqq \mathcal{H}^2 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathcal{H}^r = \mathcal{H}^{r+1} \subsetneqq \mathcal{T}\Omega.$$

Дополнительно к условиям (1) и (2) предположим, что

(3) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ неголономна и подпространство $\mathcal{H}^r_x \subset T_x\Omega$ имеет размерность m, не зависящую от точки $x \in \Omega$, причем $k < m < n$.

В этом случае подмодуль $\mathcal{H}^r$ является голономной дифференциальной системой и в силу теоремы Фробениуса через каждую точку $x^0 \in \Omega$ проходит максимальное связное интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{H}^r, x^0}$.

Теорема 1. *Пусть P – оператор вида* (1) *с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющий условиям* (1), (2) *и* (3), *функции $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда из равенства ростков $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ в точке*

$x^0 \in \Omega$ следует, что $u^1_x \cong u^2_x$ во всех точках x связной компоненты $\mathcal{F}_{x^0}$ множества $M_{\mathcal{H}^r,x^0} \cap \{y \in \Omega \,|\, (Pu^1)_y \cong (Pu^2)_y\}$, содержащей x^0.

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1)/ Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.

2. Шананин Н.А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами / Н.А. Шананин // Матем. заметки 111:6 (2022), С. 921-–928; Math. Notes, 111:6 (2022), P. 954-–960.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ В ИССЛЕДОВАНИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

З.И. Шарифзода (Таджикистан, Душанбе, ТНУ),
sakhara-2803@mail.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x, \varepsilon), \tag{1}$$

где $x = (x^1, x^2, x^3)$ - векторная функция; $f(x, \varepsilon)$ — непрерывно — дифференцируемая вектор — функция по совокупности переменных x, ε; ε - положительный и достаточно малый параметр; A - квадратная матрица. Кроме того, относительно матрицы A предполагаем, что оно имеет следующие собственные значения: $\pm i\beta \in \sigma(A)$, $\beta \neq 0$, $\beta > 0$; $\gamma \in \sigma(A)$, $\gamma \neq 0$, $\gamma \in R^1$. А также предполагаем, что система (1) при достаточно малых значениях ε имеет периодическое решение $x(t + T, \varepsilon) \equiv x(t, \varepsilon)$.

Следует, отметит, что в случае $x \in R^2$ система (1) было рассмотрено в работе [1]. В данной работе для исследования вопроса о существовании циклов отправным пунктом послужила классическая теорема Л.С.Понтрягина [2], которая сформулирована при предположении аналитичности функции $f(x, \varepsilon)$ по совокупности переменных x, ε и в отличие от метода Понтрягина, не предполагалось дифференцируемость всех входящих функций.

Далее, интерес представляет когда $x \in R^3$. При всех предположениях на систему (1) согласно теоремы Жордана, имеем

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

В системе (1) введя замену $x = Uy$, имеем

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \beta y_2 + \varepsilon g_1(y_1, y_2, y_3, \varepsilon), \\ \dot{y}_2 = -\beta y_1 + \varepsilon g_2(y_1, y_2, y_3, \varepsilon), \\ \dot{y}_3 = \gamma y_3 + \varepsilon g_3(y_1, y_2, y_3, \varepsilon). \end{cases} \tag{2}$$

На первый этап рассмотрим необходимое условие существования циклов в системе (1). Для исследования необходимого условия существования циклов, приведем систему (2) к более простому виду. С этой целью переходим к полярной системе координат.

Пусть $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ - решение системы (2), не обращающееся в нуль. Полагая

$$\begin{cases} y_1 = r(t)cos\varphi(t), \\ y_2 = r(t)sin\varphi(t), \\ \dot{y}_3 = \gamma y_3 + \varepsilon g_3(r(t)cos\varphi(t), r(t)sin\varphi(t), y_3, \varepsilon), \end{cases}$$

имеем

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon[g_1(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3) \cdot cos\varphi + g_2(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3) \cdot sin\varphi], \\ \dot{\varphi} = -\beta - \frac{\varepsilon}{r}[g_1(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3) \cdot cos\varphi - g_2(rcos\varphi, rsin\varphi, y_3) \cdot sin\varphi], \\ \dot{y}_3 = \gamma y_3 + \varepsilon g_3(r(t)cos\varphi(t), r(t)sin\varphi(t), y_3, \varepsilon), \end{cases}$$

Теорема 1. *Предположим, что для некоторой последовательности значений $\varepsilon = \varepsilon_k$, $\varepsilon_k \to 0$, при $k \to \infty$ система (2) имеет периодическое решение $y_k(t + T, \varepsilon) \equiv y_k(t, \varepsilon)$ с периодом $T = T(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющее условию $||y_k(t, \varepsilon)|| < C$. Тогда существует такое ρ_0, что $F(\rho_0) = 0$.*

Литература

1. Шарифзода З.И. О циклических решениях уравнения Понтрягина с малым параметром / З.И. Шарифзода, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров //Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. -2021. —С. 167-171.

2. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М. : Наука, 1976. — 496 с.

3. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПОНТРЯГИНА НА ЦИЛИНДРЕ

З.И. Шарифзода, И.Дж. Нуров (Душанбе, ТНУ)
nid1@mail.ru

В работе рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \varphi' = -\frac{\partial H(\varphi,y)}{\partial y} + \mu \cdot P(\varphi, y, \mu), \\ y' = \frac{\partial H(\varphi,y)}{\partial \varphi} + \mu \cdot Q(\varphi, y, \mu), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $H(\varphi, y) \equiv H(\varphi + 2\pi, y)$, $P(\varphi, y, \mu) \equiv P(\varphi + 2\pi, y, \mu)$, $Q(\varphi, y, \mu) \equiv Q(\varphi + 2\pi, y, \mu)$ - непрерывны по совокупности переменных φ, y, μ в области $|\mu| < \mu_0$.

Система вида (1) рассматривается на цилиндрической фазовой поверхности [1] и возникает в задачах определяющие динамику синхронных генераторов и двигателей, динамику полета самолета, и многих других задач. Следовательно, изучении подобных систем в настоящее время играют большую роль в различных областях техники.

Основная цель работы - исследовать решения $(\varphi(t), y(t))$ системы (1) удовлетворяющее условиям: $\varphi(T) = \varphi(0) + 2k_0\pi$, $k_0 \in Z$, $y(T) = y(0)$ при $\mu \neq 0$, где T-неизвестный период. Разрешая уравнения $H(\varphi, y) = h$, (h-const) относительно y при предположении, что

$$(\partial(\varphi, y)/\partial y) \neq 0,$$

определим функцию $y = Y(\varphi, h)$. Далее, по функциям $P(\varphi, y, 0)$, $Q(\varphi, y, 0)$ определим скалярную функцию

$$F(h) = \int_0^{2\pi} [Q(\varphi, Y(\varphi, V), 0) + P(\varphi, Y(\varphi, V), 0) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, Y(\varphi, V))}{H'_y(\varphi, Y(\varphi, V))}] d\varphi \tag{2}$$

Для исследования вопроса о существовании циклов системы (1) как и в работе [2] отправным пунктом послужила классическая теорема Л.С. Понтрягина [1,с.209], которая сформулирована при предположении аналитичности функций, $P(\varphi, y, \mu)$ и $Q(\varphi, y, \mu)$ по совокупности переменных φ, y, μ:

Теорема [1]. Для того чтобы у системы (1) существовал предельный цикл, рождающийся из кривой $y = Y(\varphi, h_0)$, необходимо, чтобы

$$F(h) = \int_0^{2\pi} [Q(\varphi, Y(\varphi, h_0), 0) - P(\varphi, Y(\varphi, h_0), 0) \cdot Y'_\varphi(\varphi, h_0)] d\varphi = 0,$$

и достаточно, чтобы при условии $F(h_0) = 0$ выполнялось

$$F_1(h_0) = \int_0^{2\pi} \frac{P'_\varphi(\varphi, Y(\varphi, h_0), 0) + Q'_y(\varphi, Y(\varphi, h_0), 0)}{-H'_y(\varphi, Y(\varphi, h_0))} d\varphi \neq 0.$$

Если $F(h_0) = 0$ и $F_1(h_0) \neq 0$, то рождающийся цикл единственный и притом устойчивый, если $\mu F_1(h_0) < 0$, $H'_y(\varphi, Y(\varphi, h)) > 0$ или $\mu F_1(h_0) > 0$, $H'_y(\varphi, Y(\varphi, h)) < 0$, и неустойчивый, если $\mu F_1(h_0) > 0$, $H'_y(\varphi, Y(\varphi, h)) > 0$ или $\mu F_1(h_0) < 0$, $H'_y(\varphi, Y(\varphi, h)) < 0$.

Однако, условия $F'(h) \neq 0$ не выполняется для некоторых задач. Сформулируем утверждения для случая непрерывных функций $P(\varphi, y, \mu)$, $Q(\varphi, y, \mu)$ в терминах самой функции $F(h)$. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (Аналог теоремы Понтрягина). *Предположим, что для некоторой последовательности значений $\mu = \mu_\kappa \neq 0$, $\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$ система (1) имеет периодическое решение $(\varphi(t, \mu_k), y(t, \mu_k))$, с периодом $T_{\mu_k} > 0$, удовлетворяющие условию $|\varphi(t, \mu_k)| + |y(t, \mu_k)| \leqslant M$, $M > 0$. Тогда существует такое h_0, что $F(h_0) = 0$.*

Теорема 2. *Пусть $h_0 > 0$ - решение уравнения $F(h) = 0$ и в окрестности точки h_0, $[h_0 + \varepsilon, h_0 - \varepsilon]$, $h_0 - \varepsilon > 0$ функция $F(h) \neq 0$ при $h \neq h_0$, причем значения функции $F(h)$ меняют знак при переходе через точку h_0. Тогда система (1) при достаточно малых значениях μ имеет периодическое решение $(\varphi(t, \mu), y(t, \mu))$, удовлетворяющее условию $|H(\varphi(t), y(t)) - h_0| < \varepsilon_0$.*

Следующий этап разработан аналитическая формула(алгоритм) построения примеров для системы (1) удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2.

Предположим, что даны функции $F_0(V)$, $Q_0(\varphi, V, \mu)$, $P(\varphi, y, \mu)$-непрерывные по совокупности переменных, причем предполагается, что функция $H(\varphi, y)$ имеет непрерывную частную производную по обоим аргументам, $H'_y(\varphi, y) \neq 0$ при всех φ и y. Определим функцию

$Q(\varphi, y, \mu)$ следующим равенством

$$Q(\varphi, y, \mu) = F_0(H(\varphi, y)) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi, y), \mu) - P(\varphi, y, \mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, y)}{H'_y(\varphi, y)} \quad (3).$$

В равенстве (3) перенеся слагаемую $P(\varphi, y, \mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi,y)}{H'_y(\varphi,y)}$ в левую часть, имеем

$$Q(\varphi, y, \mu) + P(\varphi, y, \mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, y)}{H'_y(\varphi, y)} = F_0(H(\varphi, y)) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi, y), \mu).$$

Далее, рассмотрим уравнение $H(\varphi, y) = V$. Полагая, что данное уравнение имеет решение относительно y. Фиксируя (φ, V) обозначим через $Y(\varphi, V)$ - решения этого уравнения: $H(\varphi, Y(\varphi, V)) \equiv V$. В равенстве (3) пологая $y = Y(\varphi, V)$, имеем:

$$Q(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) + P(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, Y(\varphi, V))}{H'_y(\varphi, Y(\varphi, V))} =$$

$$= F_0(H(\varphi, Y(\varphi, V))) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi, Y(\varphi, V)), \mu).$$

Так как $H(\varphi, Y(\varphi, V)) \equiv V$, то последнее равенство можем переписать в виде

$$Q(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) + P(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, Y(\varphi, V))}{H'_y(\varphi, Y(\varphi, V))} = F_0(V) \cdot Q_0(\varphi, V, \mu).$$

В этом равенстве полагая $\mu = 0$ и затем интегрируя ее от нуля до 2π по φ, получим

$$\int_0^{2\pi} [Q(\varphi, Y(\varphi, V), 0) + P(\varphi, Y(\varphi, V), 0) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, Y(\varphi, V))}{H'_y(\varphi, Y(\varphi, V))}] d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} F_0(H(\varphi, Y(\varphi, V))) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi, Y(\varphi, V)), \mu) d\varphi.$$

Тогда в силу (2), имеем

$$F(V) = \int_0^{2\pi} F_0(V) \cdot Q_0(\varphi, V) d\varphi.$$

Пример 1. Пусть $F_0(V) = (V-1)^3$, а функция $Q_0(\varphi, V, 0) = 3 + cos\varphi$, тогда, получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -(2 + cos\varphi), \\ \dot{y} = -sin\varphi \cdot y + \mu \cdot [(2 + cos\varphi) y - 1]^3 \cdot (3 + cos\varphi). \end{cases}$$

В рассматриваемом примере функция $H(\varphi, y) = (2 + cos\varphi) \cdot y$, $P(\varphi, y, \mu) = 0$, а функция $Q(\varphi, y, \mu) = [(2 + cos\varphi)y - 1]^3 \cdot (3 + cos\varphi)$, то

$$F(V) = \int_0^{2\pi} (V - 1)^3 \cdot (3 + cos\varphi) d\varphi,$$

где V-скалярный параметр. Следовательно, имеем $F(V) = 6\pi \cdot (V - 1)^3$. В точке $V = V_0 = 1$, функция $F(V_0) = 0$, а его производная в этой точке $F'(V_0) = (V_0 - 1)^3 \cdot (3 + cos\varphi) = 0$.

Пример 2. Пусть $F_0(V) = \sqrt{|V - 1|} sign(V - 1)$, а функция $Q_0(\varphi, V, 0) = 2 + cos^2\varphi$, тогда получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -2y, \\ \dot{y} = -2sin\varphi + \mu \cdot \sqrt{|y^2 + 2cos\varphi - 1|} sign(y^2 + 2cos\varphi - 1) \cdot (2 + cos^2\varphi). \end{cases}$$

Так как в рассматриваемом примере функция $H(\varphi, y) = y^2 + 2cos\varphi$, $P(\varphi, y, \mu) = 0$, а функция $Q(\varphi, y, \mu) = \sqrt{|y^2 + 2cos\varphi - 1|}\ sign(y^2 + 2cos\varphi - 1) \cdot (2 + cos^2\varphi)$, то

$$F(V) = \int_0^{2\pi} \sqrt{|V - 1|} sign(V - 1) \cdot (2 + cos^2\varphi) d\varphi,$$

где V-скалярный параметр. Следовательно, имеем $F(V) = 5\pi \cdot \sqrt{|V - 1|} sign(V - 1)$. В точке $V = V_0 = 1$, функция $F(V_0) = 0$ и в этой точке функция не дифференцируема и выполняются условия теорем 1 и 2.

Литература

1. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М. : Наука, 1976. — 496 с.

2. Мухамадиев Э.М. О периодических решениях нелинейного дифференциального уравнения, зависящего от параметра / Э.М. Мухамадиев, З.И. Шарифзода, И.Д. Нуров // ДАН РТ. — 2018. — Т. 61, № 11-12. —С.822-828.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СВЯЗАННЫЕ С НИМИ[1]

А.А. Шкаликов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
ashkaliko@yandex.ru

Многие уравнения математической физики могут быть записаны в форме

$$A_0 u + A_1 \frac{du}{dt} + \cdots + A^m \frac{d^m u}{dt^m} = 0,$$

где $u = u(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве H, а $A_j,\ j = 1, \ldots, m,$ — неограниченные операторы, действующие в этом пространстве. Наиболее важен случай $m = 2$, но уравнения порядка $m = 4$ также встречаются в приложениях.

Постановки задач для таких уравнений, вопросы единственности и разрешимости соответствующих задач тесно связаны с изучением спектральных свойств пучков операторов

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^m A_m, \tag{1}$$

которые мы называем оператор-символами указанных уравнений. Мы выделим классы уравнений, которые назовем гиперболическими и эллиптическими. Для таких уравнений проведем постановки краевых задач и получим теоремы единственности и разрешимости.

Выделим класс пучков, которые назовем *стандартными.* Предполагаем, что область определения основного оператора A_0 совпадает с областью определения оператора S^m, где $S = S^* >> 0$ — самосопряженный равномерно положительный оператор. При $j = 1, 2, \ldots, m$ для областей определения операторов A_j справедливы включения $\mathcal{D}(A_j) \supseteq \mathcal{D}(S^{m-j})$, причем операторы $A_j S^{j-m}$ ограничены. Другими словами: операторы $A_j,\ j = 0, 1, \ldots, m$ представимы в виде $A_j = B_j S^{m-j}$, где K_j — ограниченные операторы, а оператор B_m ограничен и обратим. Кроме того, предполагаем, что существует число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, такое, что $A(\lambda_0)$ обратим.

Стандартный пучок назовем *пучком Келдыша*, если $B_0 = S^m + K_0,\ B_m = 1 + K_m,\ B_j = K_j,\ j = 1, 2, \ldots, m-1$, где все операторы K_j компактны в исходном пространстве H, а оператор S также компактен и имеет конечный порядок p, то есть, $\mu_k(S) \geqslant \mathrm{const} k^p$, где $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные значения оператора S.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-11-00261).

Положим $H_m := \mathcal{D}(S^m)$ (это гильбертово пространство, так как оператор S^m замкнут) и определим интерполяционные пространства $H_{m\theta} := [H_m, H]_\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. В частности, $H_j = \mathcal{D}(S^j)$. Введем пространства $\mathcal{H}_\theta := H_{m-1+\theta} \oplus H_{m-2+\theta} \oplus \cdots \oplus H_\theta$.

Если $\{\lambda_k, y_k\}$ — собственная пара пучка $A(\lambda)$ (то есть, λ_k собственное значение, а y_k собственный вектор), то $u_k(t) = e^{\lambda_k t} y_k$ — есть решение уравнения {1}, которое назовем *элементарным решением.* Можно выписать элементарные решения, отвечающие жордановым цепочкам, если они есть, но для краткости далее предполагаем что все собственные значения пучка $A(\lambda)$ простые. Введем оператор следа, соответствующий задаче Коши для уравнения {1}

$$\mathcal{T}_\xi u(t) = \{u_k(\xi), u'(\xi)_k, \ldots, u^{(m-1)}(\xi)\}$$

Векторы $\mathbf{y}_k = \mathcal{T}_0 y_k \in \mathcal{H}_\theta$ назовем *следами элементарных решений* уравнения {1}. Эти элементы называют также производными по Келдышу цепочками.

Теорема 1. *Пусть спектр пучка $A(\lambda)$ дискретен, то есть состоит из собственных значений конечной кратности (это так, если оператор S^{-1} компактен). Тогда следы элементарных решений $\{\mathbf{y}_k\}$ образуют минимальную систему в пространствах $\mathcal{H}_\theta$ при любом $\theta \in [0,1]$ и полную систему в этих пространствах, если пучок $A(\lambda)$ является пучком Келдыша.*

Из этой теоремы следует, что задачу Коши для уравнения {1} можно приближенно решить в пространстве $\mathcal{H}_\theta$, то есть, для любых начальных данных $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_\theta$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная линейная комбинация элементарных решений $u(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t)$ (конечно, такая функция есть решение уравнения {1}), такая, что

$$\|\mathcal{T}_0 u(t) - \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{H}_\theta} < \varepsilon.$$

Однако функция $u(t)$ может расти при $t \to \infty$, даже если спектр пучка $A(\lambda)$ лежит в левой комплексной полуплоскости (ограниченность решений и их производных в соответствующих пространствах можно гарантировать только если система следов $\{\mathbf{y}_k\}$ есть безусловный базис). Тем более нельзя утверждать существование точного решения задачи Коши для уравнения {1}. Более того, можно показать, что в случае пучка Келдыша при $m > 2$ задача Коши всегда некорректна.

В качестве общего определения гиперболического уравнения можно принять такое: *уравнение гиперболическое, если задача Коши для него корректна.* Выделим класс квадратичных пучков операторов, для которых соответствующие уравнения гиперболические.

Положим

$$A(\lambda) = \lambda^2 F + \lambda B + C, \quad B = D + iG.\texttt{\textbackslash eqno\{2\}}$$

Здесь $F = F^*$ ограничен и обратим, $C = C^*$ обратим, $D \geqslant 0$ и G симметрические операторы, подчиненные оператору $|C|$ в смысле квадратичных форм. Полагаем также, что индексы инерции $\nu(F)$ и $\nu(C)$ операторов D и C (то есть, число их отрицательных собственных значений) конечны. Пучки с такими условиями на коэффициенты назовем гиперболическими. Следующая теорема оправдывает такое название.

Теорема 2. *Пусть $A(\lambda)$ гиперболический пучок и $S = |C|^{1/2}$ Обозначим $\mathcal{H} = H_1 \oplus H$, $H_1 = \mathcal{D}(S)$. Тогда $\forall\, \mathbf{u}_0 = \{u_0, u_1\} \in \mathcal{H}$ существует решение $u(t)$ уравнения $A(d/dt)u(t) = 0$, такое, что*

$$\lim_{t\to+0} \|u(t) - u_0\|_{H_1} \to 0, \lim_{t\to+0} \|u'(t) - u_1\|_H \to 0.$$

Существуют постоянные M и σ, такие, что

$$\|u(t)\|_{H_1} + \|u'(t)\|_H \leqslant Me^{\sigma t}.$$

Число растущих элементарных решений уравнения (индекс неустойчивости) не превосходит числа $\nu(F) + \nu(C)$ и равно этому числу, если $D > 0$. Если оператор S имеет порядок α, а оператор B является p–подчиненным оператору S в смысле квадратичных форм (см. [1]), причем $\alpha^{-1} \leqslant 1 - p$, то производные по Келдышу цепочки (следы элементарных решений) образуют безусловный базис (возможно со скобками) в пространстве $\mathcal{H}$.

Из утверждения теоремы следует, что семейство операторов

$$\mathcal{U}(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

является сильно непрерывной полугруппой. Ее генератор является линеаризатором пучка $A(\lambda)$, который можно построить явно. Изучение гиперболических пучков с матричными коэффициентами (при $F = 1$) восходит к работам лорда Кельвина [2].

При изучении эллиптических пучков ($m = 2n$) ставятся только n начальных условий в нуле, а на бесконечности решение ищется в виде суммы убывающего решения и конечного числа волн (элементарных решений), уносящих энергию (условия излучения). Такие волны отвечают собственным парам $\{\lambda_k, y_k\}$ положительного типа: $\lambda_k \in i\mathbb{R}$, $(A'(\lambda_k)y_k, y_k) > 0$.

Мы не будем давать общее определение эллиптических пучков. Ограничимся случаем $m = 2$ и пучками вида

$$A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B - C, \quad B = D + iG,\ D \geqslant 0,$$

где $C = C^* >> 0$, операторы D и G симметрические, причем B является $C^{1/2}$–подчиненным (см. [1]) с $C^{1/2}$–гранью <2. Смена типа пучка обусловливается сменой знака оператора C. Выделенный класс пучков обслуживает достаточно широкий класс эллиптических пучков и уравнений.

Теорема 3. *Пусть $A(\lambda)$ удовлетворяет указанным условиям и оператор C^{-1} компактен. Тогда пучок $A(\lambda)$ допускает факторизацию*

$$A(\lambda) = (\lambda - C^{1/2}K^{-1})(\lambda - KC^{1/2}),$$

где K ограниченный и обратимый оператор в H, а спектр оператора $Z = KC^{1/2}$ лежит в левой полуплоскости, причем на мнимой оси к его спектру относятся те и только те собственные значения, которые отвечают парам положительного типа. Оператор Z является генератором голоморфной полугруппы в пространствах H_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Краевая задача для соответствующего уравнения с начальным условием $u(0) = u_0 \in H_\theta$ и условием излучения на бесконечности имеет единственное решение $u(t) = e^{tZ}u_0$.

В докладе будут приведены примеры конкретных задач, которые иллюстрируют сформулированные результаты.

Литература

1. Шкаликов А.А. Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром / А.А. Шкаликов // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 5. С. 1.

2. Tompson (Lord Kelvin) Tretise in Natural Phylosophy. Part 1 / Tompson (Lord Kelvin) and Tait P. — Cambrige Univ. Press, 1869.

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ РИМАНА В ЯВНОМ ВИДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ю. О. Яковлева (Самара, СамГТУ)
julia.yakovle@mail.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащую производные порядка меньше четвертого,

$$MU \equiv U_{x_1x_2x_3x_4} + \Omega U = 0, \tag{1}$$

где $U\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right)$ — искомая m - мерная вектор-функция, $x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \in \mathbb{R}$, Ω — постоянная действительная $(m \times m)$ матрица.

Сопряженным оператором по Лагранжу для рассматриваемой системы уравнений (1) является оператор

$$M^*V \equiv V_{x_1x_2x_3x_4} + V\Omega,$$

где $V(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4; \xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3,\, \xi_4)$ — квадратная матрица порядка m

Матрица Римана

$$V = V(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4; \xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3,\, \xi_4)$$

для системы уравнений (1) удовлетворяет условию

$$M^*V = 0$$

и интегральному уравнению [4]

$$V(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4; \xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3,\, \xi_4) - \int\limits_{\xi_1}^{x_1}\int\limits_{\xi_2}^{x_2}\int\limits_{\xi_3}^{x_3}\int\limits_{\xi_4}^{x_4} V(\alpha, \beta, \gamma, \sigma)\, d\alpha d\beta d\gamma d\sigma = E.$$

Используя определение обобщенной гипергеометрической функции [2, 3], матрица Римана для системы уравнений (1) построена в явном виде

$$V(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4; \xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3,\, \xi_4) = \\ = {}_0F_3\left(1; 1; 1;\, (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)(x_4 - \xi_4))\, \Omega\right).$$

Литература

1. Андреев А.А, Яковлева Ю.О. Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными / А.А. Андреев, Ю.О. Яковлева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ.-мат. науки, 3(24). — 2011. — С. 35-–41

2. Андреев А.А, Огородников Е.Н. Матричные интегродифференциальные операторы и их применение / А.А. Андреев, Е.Н. Огородников // Вестник Самарского государственного технического университета. — 1999. — С. 27–37.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1973. — 296 с.

4. Миронов А.Н. О функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве / А.Н. Миронов // Известия вузов. Математика. — 2010. —№ 3. — С. 23—27.

EXACT SOLUTIONS OF A NONLINEAR FRACTIONAL MODEL VIA EXPANDED DIRECT ALGEBRAIC METHOD

Volkan Ala (Mersin, Turkiye, Mersin University)
volkanala@mersin.edu.tr

This work contains constructing the exact solutions of a nonlinear fractional model. The expanded direct algebraic method is used to get the exact solutions of considered model. 2D- and 3D- figures of the solutions are plotted using software. The results impress that the proposed method is powerful and effective to work out new solutions of various types of nonlinear fractional partial differential equations raised in applied sciences.

Introduction Investigating different solutions of nonlinear fractional differential equations have become the subject of interest for scientists. Therefore, many numerical and analytical methods have been developed and successfully employed to solve these equations such as improved Bernoulli sub-equation function method [1-2], the sine-Gordon method [3], direct algebraic method [4], the new extended direct algebraic method [5-6].

During the last decade, several definitions of fractional derivatives have been used in literature. The fractional derivative used in this study is referred to the Atangana's fractional derivative [7]. Before starting the solution procedure for the considered equation let us give the basic properties of the proposed method:

Expanded direct algebraic method

This section presents a brief description of the new extended direct algebraic method. Let us give the description of the extended algebraic method [6]:

Step 1: Let us consider the following nonlinear time fractional partial differential equation in beta derivative sense with the form:

$$P(u, D_t^{\beta} u, D_x^{\beta} u, D_{xx}^{2\beta} u, ...) = 0. \tag{1}$$

Here P involves $u(x,t)$ and its beta derivatives. The aim is to convert (1) into the ordinary differential equation with a suitable wave transformation as

$$u(x,t) = V(\xi), \quad \eta = mx - \frac{\gamma}{\beta}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}, \tag{2}$$

m and γ are arbitrary constants. Using (2), (1) turns into the ordinary differential equation in the form

$$N(V, V', V'', ...) = 0, \tag{3}$$

where N is the function of V and its derivatives with respect to ξ. Integrating (3) term to term, we acquire integration constants which may be determined then.

Step 2: Suppose that (3) has a formal position presented below:

$$V(\xi) = \sum_{j=0}^{N} b_j Q^j(\xi), b_N \neq 0, \tag{4}$$

where b_j $(0 \leqslant j \leqslant N)$ are constant coefficients to be determined later and N is a positive integer which is found by balancing procedure in (4) and $Q(\xi)$ satisfies the ordinary differential equation in the form

$$Q^{'}(\xi) = \log A\left(\alpha + \beta Q(\xi) + \sigma Q^2(\xi)\right), \ A \neq 0, 1, \tag{5}$$

where α, β and σ are constants. The solution set of (5) is given as follows:

Case 1. If $\beta^2 - 4\alpha\sigma < 0$ and $\sigma \neq 0$,

$$Q_1(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}}{2\sigma} tan_A\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}}{2}\xi\right),$$

$$Q_2(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}}{2\sigma} cot_A \left(\frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}}{2} \xi \right),$$

$$Q_3(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}}{2\sigma} (tan_A(\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}\xi) \\ \pm \sqrt{pq} sec_A(\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}\xi)),$$

$$Q_4(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}}{2\sigma} (-cot_A(\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}\xi) \\ \pm \sqrt{pq} csc_A(\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}\xi)),$$

$$Q_5(\xi) = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}}{4\sigma} (tan_A(\frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\sigma)}}{4}\xi) \\ - cot_A(\frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha)\sigma}}{4}\xi)),$$

Remark 1. The generalized hyperbolic and trigonometric functions are defined as follows [8]:

$$sinh_A(\xi) = \frac{pA^{\xi} - qA^{-\xi}}{2}, \quad cosh_A(\xi) = \frac{pA^{\xi} + qA^{-\xi}}{2},$$

$$tanh_A(\xi) = \frac{pA^{\xi} - qA^{-\xi}}{pA^{\xi} + qA^{-\xi}}, \quad coth_A(\xi) = \frac{pA^{\xi} + qA^{-\xi}}{pA^{\xi} - qA^{-\xi}},$$

$$sech_A(\xi) = \frac{2}{pA^{\xi} + qA^{-\xi}}, \quad csch_A(\xi) = \frac{2}{pA^{\xi} - qA^{-\xi}},$$

$$sin_A(\xi) = \frac{pA^{i\xi} - qA^{-i\xi}}{2i}, \quad cos_A(\xi) = \frac{pA^{i\xi} + qA^{-i\xi}}{2},$$

$$tan_A(\xi) = -i\frac{pA^{i\xi} - qA^{-i\xi}}{pA^{i\xi} + qA^{-i\xi}}, cot_A(i\xi) = i\frac{pA^{i\xi} + qA^{-i\xi}}{pA^{i\xi} - qA^{-i\xi}},$$

$$sec_A(\xi) = \frac{2}{pA^{i\xi} + qA^{-i\xi}}, \quad csc_A(\xi) = \frac{2i}{pA^{i\xi} - qA^{-i\xi}},$$

where ξ is an independent variable, p and q are constants greater than zero and called deformation parameters.

References

1. Bulut H.,Yel G., Başkonuş H. M. An application of improved Bernoulli sub-equation function method to the nonlinear time-fractional Burgers equation. // Turk. J. Math. Comput. Sci., 2016. — Vol. 5, — pp. 1–7.

2. Ala V. New exact solutions of space-time fractional Schrodinger-Hirota equation. // Bulletin of the Karaganda Uni. Math. Series., 2022 — Vol. 107, No. 3.

3. Ismael H.F., Bulut H. On the wave solutions of (2+1)-dimensional time-fractional Zoomeron equation. // Konuralp Journal of Mathematics., 2020 . — Vol. 8, No. 2. — pp. 410–418.

4. Rezazadeh H, Khodadad F. S., Manafian J.. New structure for exact solutions of nonlinear time fractional Sharma-Tasso-Olver equation via conformable fractional derivative. // Appl. Appl. Math., 2017. — Vol. 12, No. 1. — pp. 405–414.

5. Şenol M. New analytical solutions of fractional symmetric regularized-long-wave equation. // Revista Mexicana de Fisica., 2020. — Vol. 66, No. 3.

6. Rezazadeh H. New solitons solutions of the complex Ginzburg-Landau equation with Kerr law nonlinearity. //Optik., 2018. — Vol. 167.

7. Atangana A., Baleanu D., Alsaedi A. New properties of conformable derivative. //Open Math., 2015. — Vol. 13, No. 1. — pp. 1–10.

8. Ren Y., Zhang H. New generalized hyperbolic functions and auto-Backlund transformation to find new exact solutions of the (2+1)-dimensional NNV equation. //Phys. Lett. A, 2006. — Vol. 357, No. 6.

APPLICATION OF THE KANTOROVICH–GALERKIN METHOD FOR ANALYSIS OF RESONANT SYSTEMS

V.L. Litvinov (Samara, SSTU; Moscow, MSU)
vladlitvinov@rambler.ru

The article considers the resonant characteristics of the nonlinear oscillations of the rope with moving borders. The phenomena of resonance and passage through resonance are analyzed. An approximate method has been developed for taking into account the influence of resistance forces and viscoelastic properties on system. This method also allows us to consider a wider class of boundary conditions compared to other approximate methods for solving boundary value problems with moving borders. Resonance characteristics of a viscoelastic rope during movement. The article deals with the boundaries by the Kantorovich–Galerkin method phenomena of resonance and stationary passage through resonance are analyzed. One-dimensional systems with moving boundaries are widely used in engineering [1–5]. The presence of mobile boundaries causes significant difficulties in descriptions of such systems. Exact methods for solving such problems are limited wave equation and relatively simple boundary conditions. From approximate methods, the most effective is the Kantorovich–Galerkin method described in [5]. However, this method can also be used in more complex cases. This method does it is possible to take into account the effect of resistance forces on the system, viscoelastic properties of an oscillating object, as well as weak non-stationarity border conditions. The paper considers the phenomena of stationary resonance and passage through resonance for transverse vibrations of a rope of variable length, taking into account viscoelasticity and damping forces. Performing transformations similar to those given in [5], we obtain an expression for the oscillation amplitude corresponding to the n-th dynamic mode. Expressions describing the phenomenon of stationary state resonance and the phenomenon of passing through resonance. The expression that determines the maximum amplitude of oscillations during the passage of the resonance was numerically investigated to the maximum. The dependence of the rope vibration amplitude on the limiting velocity, viscoelasticity, damping forces are analyzed. The results of numerical studies allow us to draw the following conclusions: - with decreasing boundary velocity, viscoelasticity and damping forces, the amplitude of oscillations increases; - as the boundary velocity, viscoelasticity and damping forces tend to zero, the oscillation amplitude tends to infinity. In conclusion, we note that the above results make it possible to carry out a quantitative analysis of the stationary resonance and the phenomenon of passage through resonance for systems whose oscillations are described by the problem.

References

1. Vesnitsky A.I., Potapov A.I. Transverse oscillations of the ropes of mine hoists // Dynamics systems. Gorky: Gorkovsk. un-ta, 1975. No. 7. S. 84–89.

2. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Longitudinal oscillations of a viscoelastic rope of variable length // Tr. 4th All-Russian scientific. conf. "Mathematical Modeling and Boundary value issues. Part 1: Mathematical models of mechanics, strength and reliability structural elements. Samara, 2007, pp. 25–27.

3. Goroshko O.A., Savin G.N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kyiv: Naukova Dumka, 1971.

4. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction direction // Bull. Samara scientific Center Rus'. acad. scientific 2017. V. 19, No. 4. S. 161–165.

5. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solution of boundary value problems with conditions on moving boundaries // Byull. Rus.acad. Sciences, Solid Mech. 2018. No. 2. P. 70–77.

FORMATION OF A HOLISTIC PICTURE OF THE WORLD BY MEANS OF MATHEMATICAL CONTENT IN THE SYSTEM OF ADDITIONAL EDUCATION

N.I. Lobanova, N.N. Yaremko, M.A. Rodionov, I.V. Akimova (Zelenocumsk, Russia, MUDO CEW; Moscow, Russia, NUST MISIS; Penza, Russia, Penza State University)

lobantchik@yandex.ru, yaremki@yandex.ru, do7tor@mail.ru, ulrihr@list.ru

The problem of developing a holistic picture of the world is now relevant both at the individual and social levels. One of the important factors of such formation is the practical-oriented orientation of mathematical education [1–3].

The basis of a practical-oriented approach in mathematical education, as you know, is a rational combination of fundamental education and vocational training, which involves identifying mathematical laws in wildlife, showing the relationships of mathematics with other scientific disciplines and art, as well as practical areas of human activity. Practical-oriented tasks [4] can serve as the main means for the disclosure of these issues. In the framework of our research, as examples of such problems, plot problems for solving differential equations are considered.

These tasks, due to the lack of educational time, are planned to be considered as part of additional education. We built a theoretical model for teaching high school students the elements of the theory of differential equations, and developed a special elective course for high school students «Differential equations and their applications», which presented the main classes of differential equations and the corresponding practice-oriented tasks [5–6]. The structure and content of the course are detailed in the report.

The developed educational materials were used in the practice of the MUDO «Center for Extracurricular Work in Zelenokumsk, Sovetsky District» and a number of schools in the Stavropol Territory for 5 years. As our experience shows, the study of the above types of equations, on the one hand, does not pose special difficulties for high school students who are interested in mathematics and have a good knowledge of the mathematical apparatus in the volume of secondary school.

References

1. Rodionov, M., Dedovets, Z. (2018) Developing Students Motivation for Learning through Practical Problems in School. Advances in Science, Technology and Engineering Systems. 258–266.

2. Selyutin V.D., Yaremko N.N. Propadeutics of teaching to solving ill-posed problems in the preparation of a future teacher of mathematics in a university / Scientific notes of the Orel State University. 2022. No. 1 (94). pp. 268–272.

3. Yaremko N.N., Barakova E.A. Formation of regulatory universal educational actions in educational and research mathematical activities. / Educational experiment in education. 2020. No. 3 (95). pp. 56–62.

4. Rodionov, M.A., Fedoseyev, V.M., Dedovets, Z., Shabanov, G.I., Akimova, I.V. (2018) Specifics of Designing a Technological Component in an Integrated Methodological System of Mathematical Training of Future Engineers. Integration of Education. 383–400.

5. Lobanova, N. I. (2016) Elements of the theory of differential equations in the system of additional education. Online journal "World of Science". Retrieved from http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf

6. Lobanova N.I., Ammosova N.V., Rodionov M.A., Akimova I.V., Puchcov N.P. Elements of the theory of differential equations as a means of forming ideas about a holistic picture of the world among senior students // International Congress on Academic Research in Society, Technology and Culture (october 24–25, 2020 Grozny) / «European Proceedings of Social and Behavioural Sciences» (Великобритания). Web of Science Core Collection. Том 107 - ISCKMC 2020. pp. 981–989 Doi : 10.15405 / epsbs.2021.05.131

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE SPECTRAL OBSERVABILITY OF A LINEAR TIME-INVARIANT THREE-TIME-SCALE SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY

C.A. Naligama (Yanka Kupala State University, Belarus)
chammme@gmail.com

Let $A_{i1j}, A_{i2}, A_{i3},\ j = \overline{0,l},\ C_j, j = \overline{1,3}$ be constant matrices of proper dimensions; $p \triangleq \frac{d}{dt}$ be the differentiation operator, $h = const > 0$, e^{-ph}, be the delay operator: $e^{-jph}g(t) = g(t - jh)$, $A_{i1}\left(e^{-ph}\right) \triangleq \sum\limits_{j=0}^{l} A_{i1j}e^{-jph}$, $i = \overline{1,3}$, $\mathsf{A}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}\right) = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11}\left(e^{-ph}\right) & A_{12} & A_{13} \\ \frac{\mathsf{A}_{21}\left(e^{-ph}\right)}{\varepsilon_1} & \frac{A_{22}}{\varepsilon_1} & \frac{A_{23}}{\varepsilon_1} \\ \frac{\mathsf{A}_{31}\left(e^{-ph}\right)}{\varepsilon_2} & \frac{A_{32}}{\varepsilon_2} & \frac{A_{33}}{\varepsilon_2} \end{bmatrix}$, be matrix operators,

The following Three-time-scale Singularly Perturbed Linear Time-invariant System with Multiple Commensurate Delays in the slow state variables (TSPLTISD) is considered in the matrix-operator form:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = A\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}\right) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix},\ x \in \mathbb{R}^{n_1},\ y \in \mathbb{R}^{n_2},\ z \in \mathbb{R}^{n_3} \qquad (1)$$

with the output: $v(t) = C_1x(t) + C_2y(t) + C_3z(t), t \in T = [0, t_1], v \in \mathbb{R}^m, m \leqslant n = n_1 + n_2 + n_3$. Here $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$, x, y, z are the slow, fast and fastest variables, respectively.

Let $\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \det\left[\lambda I_n - \mathsf{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-\lambda h})\right] = 0\right\}$ be the set of eigenvalues of the TSPLTISD (1) and $\Sigma_\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ be the finite-dimensional system that is the projection of TSPLTISD (1) on the generalized proper subspace, associated with its eigenvalue $\lambda \in \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Definition. For a given $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, TSPLTISD (1) is considered to be spectrally observable for any $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$ and $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$, if any system $\Sigma_\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, associated with the $\lambda \in \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, is observable.

The TSPLTISD (1) can be separated into its slow, fast and fastest subsystems, that asymptotically aproximated by the Degenerate System (DS), ε_1-Boundary Layer System (ε_1-BLS) and the ε_2-Boundary Layer System (ε_2-BLS) with its spectrum σ_s, $\sigma_{f_{\varepsilon_1}}$, $\sigma_{f_{\varepsilon_2}}$ [3]. By the matrix of system (1) we define $N(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-\lambda h}) = \begin{bmatrix} \lambda I_n - \mathsf{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-\lambda h}) \\ C_1, C_2, C_3 \end{bmatrix}$, and similarly we define $N_s(\lambda, e^{-\lambda h})$, $N_{f_{\varepsilon_1}}(\lambda)$, $N_{f_{\varepsilon_2}}(\lambda)$, by DS's and BLSs' system matrises.

Following the criterion of spectral observability from [1, 2], we obtain

Lemma. The DS of the system (1) is spectrally observable if and only if $rank\ N_s(\lambda, e^{-\lambda h}) = n_1$, $\forall \lambda_s \in \sigma_s$. The ε_1-BLS is spectrally observable if and only if $rank\ N_{f_{\varepsilon_1}}(\lambda) = n_1$, $\forall \lambda_{f_{\varepsilon_1}} \in \sigma_{f_{\varepsilon_1}}$. The ε_2-BLS is spectrally observable if and only if $rank\ N_{f_{\varepsilon_2}}(\lambda) = n_2$, $\forall \lambda_{f_{\varepsilon_2}} \in \sigma_{f_{\varepsilon_2}}$.

Theorem. Let the DS, the ε_1-BLS and the ε_2-BLS for (1) be spectrally observable. Then there are $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^* > 0$ that the TSPLTISD (1) is spectrally observable for all $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$ and $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$.

Sketch of Proof. For a given $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$ and $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$, the system (1) is spectrally observable if and only if $rank\ N(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-\lambda h}) = n_1 + n_2 + n_3$, $\forall \lambda \in \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. After applying a non-degenerate decoupling transformation to the (1), taking into account the invariance of the spectrum and the preservation of the rank of the matrix under non-degenerate transformations, we obtain a similar condition in terms of the system matrices of the decoupled system. Using the separation of the spectrum [3] under the observability conditions of the subsystems (Lemma), taking into account the preservation of the rank of a matrix under small additive perturbations for sufficiently small values of $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, similarly to [4], we prove the completeness of the rank of the observability matrix for the decoupled system, which implies the fulfillment of the observability condition for TSPLTISD (1) and satisfies the Theorem.

References

1. K. Bhat, H. Koivo, Modal characterizations of controllability and observability for time-delay systems, IEEE Trans. Automat. Contr. 21:2 (1976) 292-293.

2. E.B. Lee, A. Olbrot, Observability and related structural results for linear hereditary systems, International Journal of Control, 34:6 (1981) 1061-1078.

3. Naligama, C.A., Tsekhan, O.B. , On the Stability of Three-Time-Scale Linear Time-Invariant Singularly Perturbed Systems with State Delay. Dynamic Control and Optimization, pp.141–159. (2022)

4. Kokotovic, P. V., Khalil, H. K., & O'Reilly, J. . Singular perturbation methods in control: Analysis and design. Academic Press,(1986).

OPTIMAL CONVERGENCE FOR FRACTIONAL EQUATIONS[1]

Piskarev S.I. (Moscow, Lomonosov Moscow State University)
piskarev@gmail.com

This talk is devoted to the study of the well–posed Cauchy problem with a fractional Caputo derivative of the order $\alpha \in (0,1)$ in time in a Banach space E :

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = u^0. \qquad (1)$$

It is well–known [1] that the order of convergence in the approximation by a difference scheme with uniform grid of such equations has an order controlled by the exponent α, i.e. $O(\tau^{\alpha})$. Here we first investigate the well–posedness of (1) on a Holder class of functions [2] and the second we consider the non-uniform grid of the scheme, i.e. $t_n = T(n/N)^r$, $r > 1$, $0 \leqslant n \leqslant N$. The stability and accuracy estimates (like $N^{-r}\ln N$ for $r = 2-\alpha$) for a proposed finite difference scheme [3] are obtained.

References

1. Kokurin M. Yu. Finite-Difference Methods for Fractional Differential Equations of Order 1/2 / Piskarev S. I., Spreafico M. // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. — 2017. — Volume 133, P. 120–129.

2. Liu R. Well–Posedness and Approximation for Nonhomogeneous Fractional Differential Equations / Piskarev S. // Numerical Functional Analysis and Optimization — 2021. — V. 42, № 6. p. 619–643.

3. Kokurin M. Implicit Difference Scheme on a Graded Mesh for Solving Cauchy Problems with a Fractional Caputo Derivative in a Banach Space / Piskarev S. // Izvestia vysš., ucebnyh Zavedenii (VUZ), Mathematics — 2022. — № 11. p. 1 – 14.

[1] This research was partially supported by the grant from Russian Science Foundation (project № 23-21-00005).

SOME HADAMARD-TYPE FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES

A. Senouci (Algeria, University of Tiaret)
kamer295@yahoo.fr

The notion of Hadamard-type fractional integral was introduced by Kilbas (see [1]). In this work, we give new integral inequalities for Hadamard-type fractional operators. As consequence some two sided estimates are deduced for the Hadamard fractional operators.

Definition 1. (Space X_c^p) [1], [2], [3]. The space $\mathbf{X}_c^p(a,b)$ of those real-valued Lebesgue measurable functions on $(a,b), 0 < a < b < \infty$ for which $\|f\|_{\mathbf{X}_c^p} < \infty, 1 \leqslant p \leqslant \infty, c \in \mathbb{R}$, where the norm is defined by

$$\|f\|_{\mathbf{X}_c^p} = \left(\int_a^b |x^c f(x)|^p \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

and

$$\|f\|_{\mathbf{X}_c^\infty} = ess \sup_{x \in (a;b)} |x^c| f(x)| < \infty.$$

In particular when $c = \frac{1}{p}$ the space $\mathbf{X}_{\frac{1}{p}}^p$ coincides whith the classical Lebesgue space $L_p(a,b)$.

Definition 2. [1]. (Hadamard-type fractional integrals). Let $0 < a < b < +\infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. The Hadamard type fractional integral operators ${}^\mu H_{a+}^\alpha$, ${}^\mu H_{b-}^\alpha$, of order $\alpha \in \mathbb{R}$ of function $f(x) \in L_1[a,b]$ are defined by

$${}^\mu H_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^\mu \left[\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right]^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, x > a \text{ (left)} \qquad (1)$$

and

$${}^\mu H_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\frac{x}{t}\right)^\mu \left[\ln\left(\frac{t}{x}\right)\right]^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \ , x < b \text{ (right)}. \quad (2)$$

We set ${}^0H_{a+}^0 f = {}^0 H_{b-}^0 f = f$.

Remark 1. If $\mu = 0$, we have the Hadamard operators (left and right) ${}^0H_{\cdot}^\alpha := H_{\cdot}^\alpha$.

Theorem 1. *Let* $0 < a < b \leqslant \infty$, r, $s > 0$, r_1, p, $p' \geqslant 1$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, μ, $c \in \mathbb{R}$, $\mu \geqslant c$ *and* f, $h \in \mathbf{X}_c^{r_1}(a,b)$ *be two positive functions such that* $0 <^\mu \mathbf{H}_{a+}^\alpha f^{r_1}$, ${}^\mu\mathbf{H}_{a+}^\alpha h^{r_1} < \infty$ *for all* $x > a$. *If*

$$0 < m \leqslant \frac{f(x)^r}{h(x)^s} \leqslant M < \infty, \qquad (3)$$

then for all $x \in [a;b]$,

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pp'}} \ {}^{\mu}\mathbf{H}^{\alpha}_{a+} f^{\frac{r}{p}} h^{\frac{s}{p'}}(x) \leqslant [{}^{\mu}\mathbf{H}^{\alpha}_{a+} f(x)^{r}]^{\frac{1}{p}} [{}^{\mu}\mathbf{H}^{\alpha}_{a+} h(x)^{s}]^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pp'}} \ {}^{\mu}\mathbf{H}^{\alpha}_{a+} f^{\frac{r}{p}} h^{\frac{s}{p'}}(x). \tag{4}$$

Remark 2. Similar inequalities are obtained for the right operator ${}^{\mu}\mathbf{H}^{\alpha}_{b-}$.

Corollary 1. *If we choose* $r = s = 1$, $\mu = 0$ *in (4) and* $r = p$, $s = p'$, $\mu = 0$ *in (4), then we get respectively the following two sided estimates for the Hadamard fractional operators*

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pp'}} \mathbf{H}^{\alpha}_{a+} f^{\frac{1}{p}} h^{\frac{1}{p'}}(x) \leqslant \left[\mathbf{H}^{\alpha}_{a+} f(x)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\mathbf{H}^{\alpha}_{a+} h(x)\right]^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pp'}} \mathbf{H}^{\alpha}_{a+} f^{\frac{1}{p}} h^{\frac{1}{p'}}(x), \tag{5}$$

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pp'}} \mathbf{H}^{\alpha}_{a+} (fh)(x) \leqslant \left[\mathbf{H}^{\alpha}_{a+} f(x)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\mathbf{H}^{\alpha}_{a+} h(x)^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pp'}} \mathbf{H}^{\alpha}_{a+} (fh)(x). \tag{6}$$

References

1. Kilbas A.A. Hadamard-type fractional calculus / A.A. Kilbas // J. Korean Math. Soc. —2001. —V. 38, n. 6. — P. 1191-1204.

2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications / S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev // Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland, —1993.

3. Katugampola U.N. New approach to a generalized fractional integral / U.N.. Katugampola // Math. Comput., 2011. — V. 218 , n. 3. — 860-865.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. THIRD TRIPLET STATE

S.M. Tashpulatov, R.T. Parmanova (Tashkent, INP)
sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru

The Hubbard model first appeared in 1963 in the works [1]. We consider the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system for third triplet state of the system. Hamiltonian of the system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^{+}_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}+$$

$$+(A_0-A)\sum_{\gamma} a^{+}_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^{+}_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^{+}_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma})+$$

$$+(U_0-U)a^{+}_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^{+}_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \qquad (1)$$

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; B (B_0) is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites, τ, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site; γ is the spin index, $\gamma=\uparrow$ or $\gamma=\downarrow$, $\uparrow$ and $\downarrow$, and $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^{\nu}$, where Z^{ν} is a ν-dimensional integer lattice.

It is known that the Hamiltonian H acts in the antisymmetric complex Foc'k space $(\mathcal{H}_{as}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_{as}})$. Suppose that φ_0 is the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The third triplet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice and their interactions with the basis functions ${}^3t^1_{p,q,r,k} = a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{q,\downarrow}a^{+}_{r,\uparrow}a^{+}_{k,\uparrow}\varphi_0$. The linear subspace ${}^3\mathcal{H}^t_1 \subset \mathcal{H}_{as}$, corresponding to the third triplet state is the set of all vectors of the form ${}^3\psi^t_1 = \sum_{p,q,r,k\in Z^{\nu}} f(p,q,r,k)\,{}^3t^1_{p,q,r,k}$, $f \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the Hilbert space $l_2((Z^{\nu})^4)$. Denote by ${}^3H^t_1$ the restriction of operator H to the subspace ${}^3\mathcal{H}^t_1$. Let $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$, $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

Theorem 1. *Let $\nu = 1$. Then A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$), then the essential spectrum of* *the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of eight segments:* $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z, 3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z, 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, *and discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of a three point:* $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, *where* $z = A+\varepsilon_1$, *and* z_3 *and* z_4 *are same concrete real numbers, lying the below (above) of the essential spectrum of operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

B). If $\varepsilon_2 = -2B$ *or* $\varepsilon_2 = 0$ *and* $\varepsilon_1 < 0$ *(respectively,* $\varepsilon_2 = -2B$ *or* $\varepsilon_2 = 0$ *and* $\varepsilon_1 > 0$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of eight segments:* $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z, 3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z, 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, *and discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of a three points:* $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, *where* $z = A-\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ *(respectively,* $z = A+\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$*).*

C). If $\varepsilon_1 = 0$ *and* $\varepsilon_2 > 0$ *or* $\varepsilon_1 = 0$ *and* $\varepsilon_2 < -2B$*, then the essential spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of sixteen segments:* $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1]\cup[3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2]\cup[2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1]\cup[2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2]\cup[2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2]\cup[A-2B+3z_1, A+2B+3z_1]\cup[A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2]\cup[A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2]\cup[A-2B+3z_2, A+2B+3z_2]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3]\cup[A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4]\cup[A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4]$, *and discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of a eleven points:* $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z_1, 2z_1+2z_2, 4z_2, z_1+3z_2, 3z_1+z_2, z_1+z_2+z_3, z_1+z_2+z_4, 2z_1+z_3, 2z_2+z_3, 2z_1+z_4, 2z_2+z_4\}$, *where* $z_1 = A-\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, *and* $z_2 = A+\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, *and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

References

1. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands. // Proc. Roy. Soc. A. — 1963. — V. 276. — P. 238–257.

ON ONE PROBLEM FOR NONLINEAR PERIDYNAMIC EQUATION

A.V. Yuldasheva (Uzbekistan,Tashkent, LSU)
yuasv86@mail.ru

We consider equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (-\Delta)^s u = f(x,t), \quad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{1}$$

with initial data

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

where $s \in (0, 1/2)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n -$ domain with piecewise smooth boundary and $n \geqslant 3$.

We suppose, that $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ is unknown function, kernel $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ and function $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ are scalar functions.

According to definitions from [1], equation (1) can be rewrite as

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\Omega} \frac{[u(x,t) - u(y,t)]}{|x-y|^{n+2s}}\, dy = f(x,t), \quad x \in \Omega, \ t > 0. \tag{3}$$

Now we formulate the main result of the paper on the solvability of problem (1)-(2).

Theorem 1. *Let $0 < \beta < 2s/n$. Then for any $T > 0$ and $\varphi \in W_2^{2s}(\Omega)$, $\psi \in W_2^{2s}(\Omega)$ и $f \in C\{[0,T] \to W_2^{2s}(\Omega)\}$ problem (1)-(2) has a unique solution from $C^2\{[0,T] \to H^{\beta}(\Omega)\}$.*

References

1. Maha Daoud, El Haj . Fractional Laplacians : a short survey / M. Daoud, E.H. Laamri // Discrete and Continuous Dynamical Systems Series. — 2022. — V.. 15, № 1. — P. 95–1116.

Именной указатель

Н а у ч н о е   и з д а н и е

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ**

**Материалы
Международной конференции
Воронежская зимняя математическая школа**
(27 января – 1 февраля 2023 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета
О.Е. Иванкова

Подписано в печать 17.02.2023. Формат $60\times84/16$,
Усл. п. л. 22,4. Уч.-изд. л. 22,0. Тираж 200 экз. Заказ 151

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3