Новые оценки $d_{2,1}$ и $d_{3,2}$

{ Алиев Аркадий } Факультет математики и компьютерных наук: СПбГУ

Гипотеза (теперь доказанная)

В работе [1] доказана гипотеза, поставленная Эндрэ Макаи сорок лет назад.
Для данного выпуклого тела K рассмотрим все его переносы вдоль некоторой решётки Λ. Полученное множество $K+\Lambda$ называют решеткой трансляций. Если внутренности полученных копий K не пересекаются, то $K+\Lambda$ называют решеточной упаковкой K. Если любая гиперплоскость в пространстве пересекает одну из копий K, то $K+\Lambda$ называется несепарабельной. Плотностью решетки трансляций называется отношение объема тела K к определителю решетки.
Гипотеза Эндрэ Макаи. Пусть $d_{2,1}(K)$ - наименьшая плотность несепарабельной решетки трансляций $K \subset \mathbb{R}^2$. Тогда

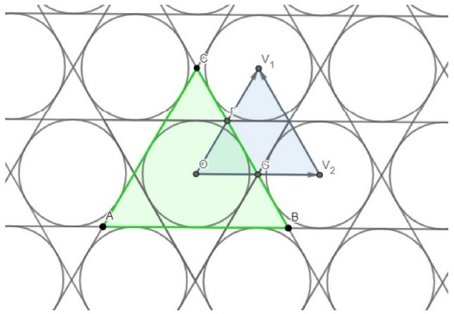
$$max\{d_{2,1}(K)|K \text{ - выпуклое тело}\} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$$

Кроме того, если $d_{2,1}(K) = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$, то K является эллипсом.

Ссылка на [1].

Некоторые конструкции

Пример 1. Построение несепарабельной решетки при помощи описанного треугольника с центром масс в нуле.



Определение 1. Для выпуклого K определим его тело проекций с помощью опорной функции:

$$h_{\Pi K}(u) = |Pr_{u^\perp} K| \forall u \in S^{n-1}.$$

Хорошо известно, что выпуклое тело ΠK с такой опорной функцией существует.

Предложение 1 (Неравенство Петти). Пусть B это единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Тогда для выпуклого тела K имеем:

$$|(\Pi K)^\circ||K|^{n-1} \le |(\Pi B)^\circ||B|^{n-1}.$$

Определение 2. $d_{n,n-1}(K)$ это минимальная плотность несепарабельной решетки трансляций K.

Предложение 2 (Симметризация). Для выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ имеем:

$$d_{n,n-1}(K) \le d_{n,n-1}(K-K).$$

Причем если достигается равенство, то K центрально симметрично.

Теорема 1

Теорема 1.

$$\max\{d_{2,1}(K)|K \subset \mathbb{R}^2 \text{ выпуклое тело}\} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$$

Кроме того, если $d_{2,1}(K) = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$, то K является эллипсом.

План доказательства. Вначале используем симметризацию. Далее заметим, что наименее плотным несепарабельным решеткам трансляций K соответствуют наиболее плотные решеточные упаковки K°. Известно, что наиболее плотные упаковки получаются из вписанных в K° аффинно-правильных шестиугольников. Зафиксируем минимальную площадь вписанного в K° аффинно-правильного шестиугольника, пусть она равна 3. Тогда при помощи вычислений с опорными функциями можно выяснить, что внутри K° находится повернутая на $\frac{\pi}{2}$ копия K. Далее удается оценить площадь слоя между K° и iK и заключить, что $\frac{3}{4}|K^\circ| \ge |K|$. Далее используем неравенство Сантало и получаем оценку сверху на объем K, из чего и следует оценка сверху на плотность. □

Следствие 1. Пусть $\delta_L(K)$ это наибольшая плотность решеточной упаковки тела K. Тогда для центрально симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^2$ имеем:

$$\delta_L(K) \ge \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}|K||K^\circ|,$$

причем равенство достигается только если K является эллипсом.

Доказательство. Легко получается из двойственности. □

Теорема 2

Теорема 2. Пусть $d_{3,2}(K)$ - наименьшая плотность несепарабельной решетки трансляций $K \subset \mathbb{R}^3$. Тогда

$$\max\{d_{3,2}(K)|K \subset \mathbb{R}^3 \text{ выпуклое тело}\} \le \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

Пример 2. Для единичного шара $B \subset \mathbb{R}^3$ имеем $d_{3,2}(B) = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}$.

План доказательства. Вначале используем симметризацию. Далее будем искать плотную упаковку K° специального вида. Вначале для $h \in S^2$ строим наиболее плотную упаковку плоского тела $K^\circ \cap h^\perp$. Пусть $\Lambda_{h^\perp} + K^\circ \cap h^\perp$ - наиболее плотная упаковка. Таким образом мы получили 2 порождающих вектора. Определим третий порождающий вектор $v := h \cdot 2\max_{x \in K^\circ}\langle x, h\rangle$ и пусть $\Lambda_h := \{nv + \Lambda_{h^\perp} | n \in \mathbb{Z}\}$. Нетрудно видеть, что $\Lambda_h + K^\circ$ является упаковкой. В итоге мы получили семейство решеточных упаковок, зависящих от единичного вектора в $\mathbb{R}^3$. $d(\Lambda_h) = |v| d(\Lambda_{h^\perp})$.
Заметим, что $K^\circ \cap h^\perp = (Pr_{h^\perp} K)^\circ$. Тогда из доказательства Теоремы 1 извлекается оценка $d(\Lambda_{h^\perp})|Pr_{h^\perp} K| \le 2\sqrt{3}\pi$. Дальше фиксируем минимальный определитель решетки для K° и получаем условие вида $\max_{x \in K^\circ}\langle x, h\rangle \ge |Pr_{h^\perp} K|$. То есть $\Pi K \subset K^\circ$ и $K \subset \Pi^\circ K$. Далее из неравенства Петти получаем оценку сверху на $|K|$. Таким образом и верхнюю оценку на $d_{3,2}(K)$. □

References

[1] Arkadiy Aliev. New estimates for $d_{2,1}$ and $d_{3,2}$. https://arxiv.org/abs/2207.09552

[2] E. Makai, Jr., On the thinnest non-separable lattice of convex bodies. Studia Sci. Math. Hungar. 13 (1978), 19-27. MR 38a:52016

[3] Endre Makai Jr. and Horst Martini, Density estimates for k-impassable lattices of balls and general convex bodies in $\mathbb{R}^n$, https://arxiv.org/abs/1612.01307, 2016.

[4] P. Tammela: An estimate of the critical determinant of a twodimensional convex symmetric domain (in Russian). Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mat. (1970)

Контактная информация

Алиев Аркадий Артемович
Email arkadiy.aliev@gmail.com
Телефон 89217635179

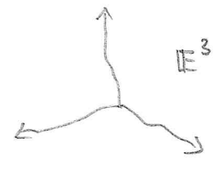
ON KNOTS AND LINKS IN 3-TORUS

Bao Vuong

Томский государственный университет

Региональный научно-образовательный математический центр

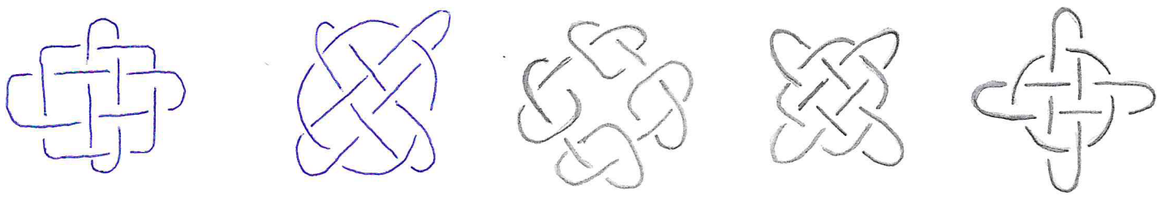
Three - dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^3$



3 - Sphere S^3

$E^3 + \{\infty\}$ $\qquad B^3 \cup_\partial B^3$

Knots and links (classical) in S^3 $\qquad S^1 \hookrightarrow S^3$



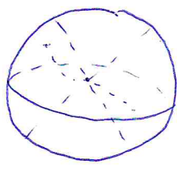
Knots in solid tori

DAVID GABAI SURGERY ON KNOTS IN SOLID TORI

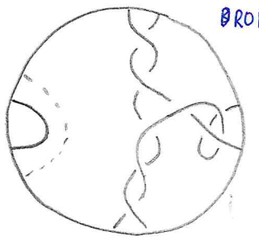
Exactly when can one obtain a $D^2 \times S^1$ by nontrivial surgery on a knot in $D^2 \times S^1$?

Foliation theory

Knots in $RP^3 = B^3/\sim$



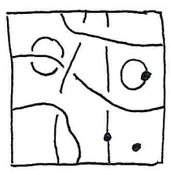
identify antipodal points in S^2



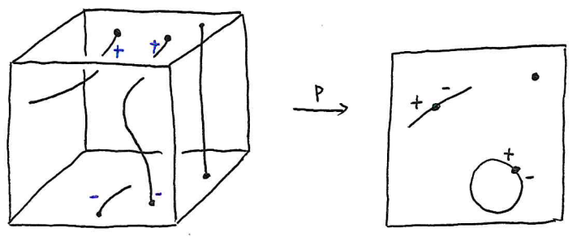
BROBOTUKHINA, HUYNH, LE

A diagram for links in RP^3

Diagram of Knot in T^3

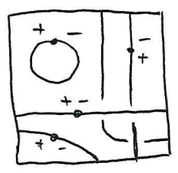


Points in diagrams

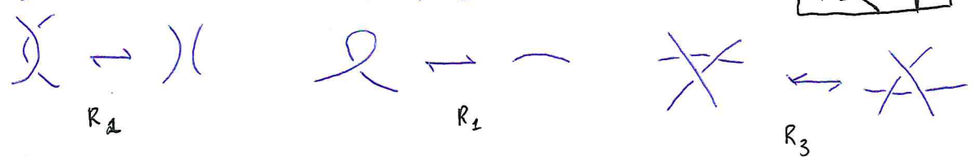


A diagram carries information about over and under crossings, also additional points (with sign). We may assume, that diagrams contain no isolated points, no point at crossings.

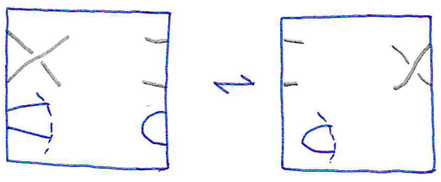
Set of Reidemeister type moves



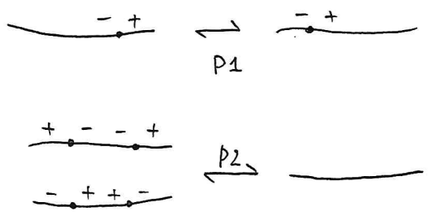
Ordinary Reidemeister moves R_1, R_2, R_3



Moving through boundary an arc or a crossing



R4, R5



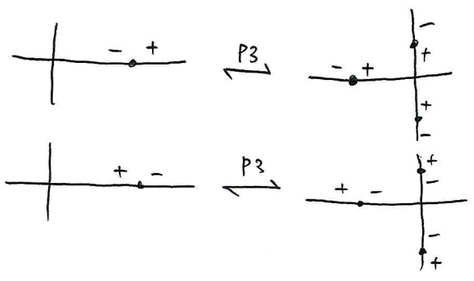
Point moving

P_1 : Point can move along an arc, not meeting any crossing.

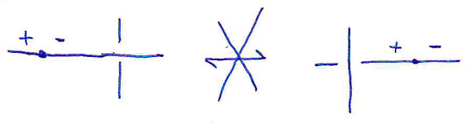
P_2 : Point cancel moves.

P_3 : Point moves through a crossing.

P_4 : Point switching move



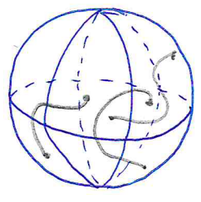
Forbidden



Theorem 1. (V.)

Two links L_0 and L_1 in T^3 are equivalent if and only if their diagrams can be joined by a finite sequence of Reidemeister type moves R_1, R_2, R_3, R_4, R_5; points moves P_1, P_2, P_3, P_4 and diagram isotopies.

Knots in lens spaces $\qquad$ Cattabriga, Manfredi, Mullazzani, Nasybullov, Rigolli

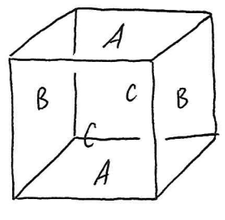


In homology 3-sphere $\qquad$ Audoux, Moussard

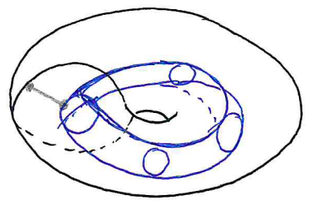
via refining Kricker's lift of the Kontsevich integral

Knots in 3-torus

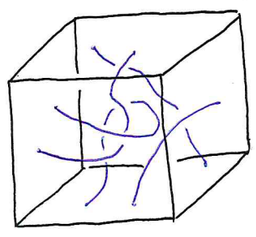
$F: C^3 \to T^3 \cong C^3/\sim$ $\qquad$ the quotient map



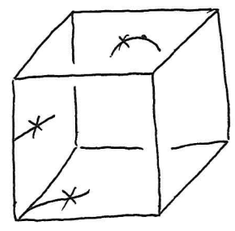
3 - torus



A link L in 3-torus T^3 corresponds to a link L' in the cube C^3. $L' = F^{-1}(L)$



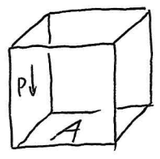
L' in C^3



By moving L via a small isotopy in 3-torus

- L' does not meet edges and vertices of the cube C^3
- $L' \cap \partial C^3$ consists of a finite set of point
- L' is not tangent to ∂C^3

Projection $p: C^3 \to A$, where A is the bottom face of the cube

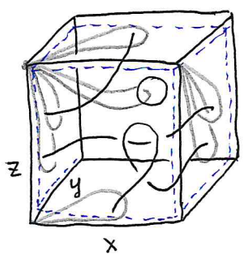


Projecting L' to the face A by p.

Definition : Regular projection

- the projection of L' contains no cusps;
- all auto - intersection of $p(L')$ are transversal;
- the set of multiple points is finite, and all of them are double points;
- no double point is on edges of A.

Fundamental group of link complement in 3 - torus



Associated each arc of a diagram with a generator

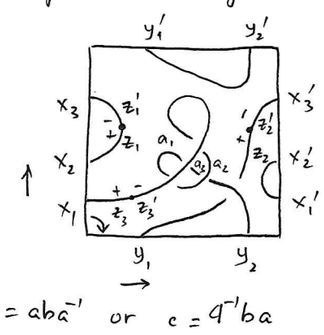
$x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n'$

$y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m'$

$z_1, \dots, z_t, z_1', \dots, z_t'$

$a_1, \dots, a_r$.

torus generators x, y, z



Relations $\quad$ W: Wirtinger relations for each crossing $c = aba^{-1}$ or $c = a^{-1}ba$

Q: Relations between loops corresponding to arcs with identified end points on boundary $x_i' = x x_i x^{-1}$, $y_j' = y y_j y^{-1}$, $z_k' = z z_k z^{-1}$

T: Torus relations $x_1 \cdots x_n = x z x^{-1} z^{-1}$, $y_1 \cdots y_m = y z y^{-1} z^{-1}$, $z_1 \cdots z_t = x y x^{-1} y^{-1}$

Theorem 2. (V.) Let base point be the vertex of the cube (regarded as CW-complex) then the group $\pi_1(T^3 \setminus L)$ of complement of the link L in 3-torus T^3 associated to a diagram has generators $x, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n', y, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', z, z_1, \dots, z_t, z_1', \dots, z_t', a_1, \dots, a_r$ and relations W, T and Q.

Questions

1) The state sum model for the objects
2) The algebra associated to the things behind state sum and point moves.
3) What would we obtain by doing surgery on link in T^3 ?
4) The relations to graphoid and knotoid.
5) Long knot and type of quotient spaces.
6) Analog of Jacobian algebra and cluster algebra for this combinatorial structure
7) Generalization to the case of knots in 3-spaces like $S_g \times S^1$

Enjoy! Thank you!

Вторая конференция Математических центров России
Москва, 7-11 ноября 2022

Проблема Ферма–Торричелли в случае трёх точек в нормированных плоскостях

Илюхин Даниил Александрович

МГУ имени М. В. Ломоносова

Введение

Задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до заданного множества точек в метрическом пространстве, впервые упоминается в 17 веке. В 1643 году Ферма поставил задачу для трёх точек на евклидовой плоскости, и в том же веке Торричелли предложил решение этой проблемы.

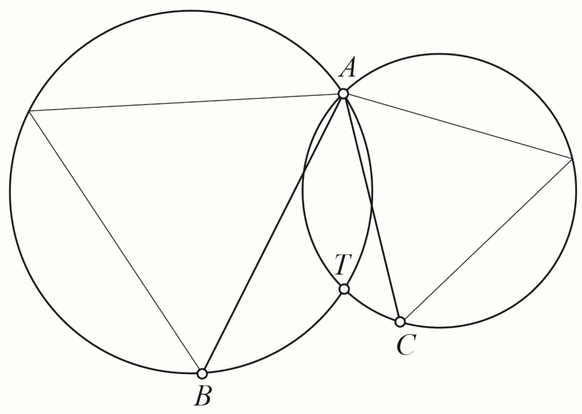


Рис. 1: Конструкция, предложенная Торричелли.

Целью работы является поиск ответа на следующий вопрос: в каких нормах на плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трёх точек. В работе сформулирован и доказан критерий единственности, кроме того показано применение полученного критерия на нормах, задаваемых правильными многоугольниками, так называемых лямбда-плоскостях.

Простота формулировки позволяет рассматривать задачу даже в произвольном метрическом пространстве, так как для её постановки достаточно наличия функции расстояния:

Определение 1. Точка x_0 называется точкой Ферма–Торричелли для точек $A = \{x_1, ..., x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^{n} |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $\mathrm{ft}(A)$.

Приведём два примера решения задачи Ферма–Торричелли на плоскости. На рисунке изображены вершины равностороннего треугольника сначала в евклидовой плоскости, а затем в норме, заданной правильным шестиугольником.

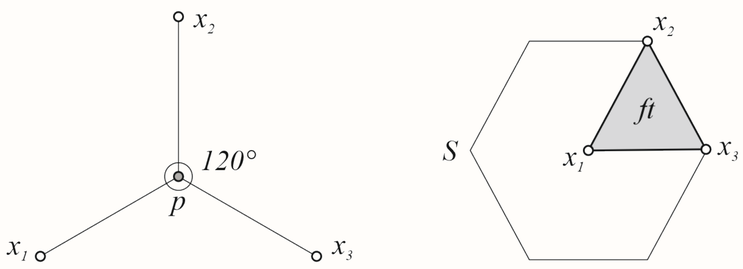


Рис. 2: Решения задачи Ферма–Торричелли для различных норм на плоскости.

Геометрический метод решения задачи Ферма–Торричелли

Далее рассмотрим геометрический метод построения решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы его использовать, наряду с исходным пространством X нужно рассматривать двойственное к нему пространство X^*, состоящее из линейных функционалов.

Определение 2. Функционал $\varphi \in X^*$ называется нормирующим для вектора $x \in X$, если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Теорема 1. Пусть x_0, x_1, ..., x_n — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, ..., n$. Тогда x_0 — точка Ферма–Торричелли для $A = \{x_1, ..., x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, ..., n$, существует нормируюший функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$.

Определение 3. Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим конус $C(x, \varphi) = x - \{a : \varphi(a) = \|a\|\}$.

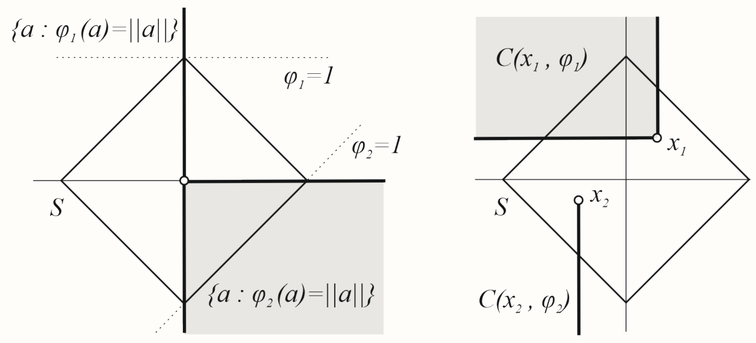


Рис. 3: Построение конусов на манхэттенской плоскости.

Теорема 2. Пусть $A = \{x_1, ..., x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in \mathrm{ft}(A) \setminus A$. По теореме 1 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, ..., n$, существует нормируюший функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$. Тогда $\mathrm{ft}(A) = \cap_{i=1}^{n} C(x_i, \varphi_i)$.

Теоремы 1 и 2 составляют геометрический метод поиска решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы описать применение этой теоремы, рассмотрим подробнее пример с вершинами равностороннего треугольника в шестиугольной норме.

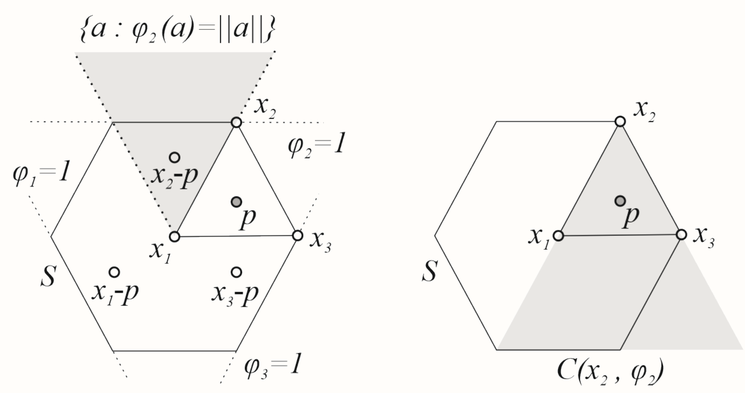


Рис. 4: Построение решения задачи Ферма–Торричелли.

Основные результаты

Критерий единсвтенности

Пусть на нормированной плоскости задано множество из трёх точек $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. Отвечая на вопрос, какой вид имеет множество решений задачи Ферма–Торричелли $\mathrm{ft}(A)$ при этих условиях, можно получить три случая: невырожденный выпуклый многоугольник, отрезок и точка.

Теорема 2 говорит о том, что множество $\mathrm{ft}(A)$ всегда является пересечением трех конусов, которые на плоскости — углы или лучи, то есть

$$\mathrm{ft}(A) = C(x_1, \varphi_1) \cap C(x_2, \varphi_2) \cap C(x_3, \varphi_3)$$

для некоторых функционалов φ_i.

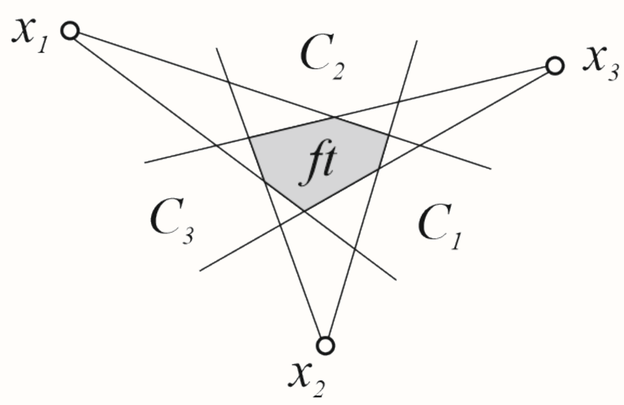


Рис. 5: Решение задачи Ферма–Торричелли — пересечение конусов.

Определение 4. Будем говорить, что единичная окружность на нормированной плоскости состоит из элементов нулевого типа, которыми являются точки, не лежащие внутри уплощений, а также элементов первого типа, которыми являются внутренние точки уплощений.

Определение 5. Возьмём три элемента единичной окружности. Для каждого из них выберем опорную прямую так, чтобы для элемента нулевого типа она пересекала единичную окружность только в одной точке, то есть в самом элементе. По выбранным опорным прямым построим функционалы, линии уровня $\varphi_i = 1$ которых совпадают с этими прямыми. Если найдётся набор опорных прямых такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такую тройку будем называть согласованной.

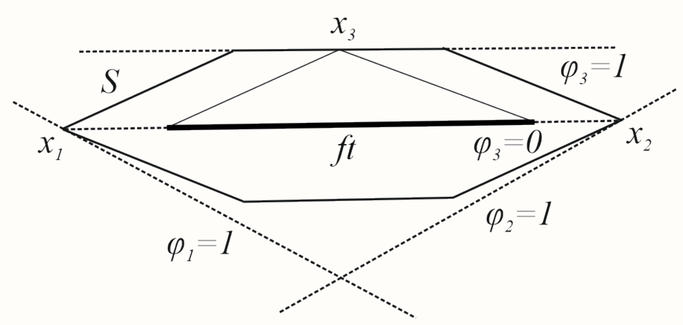


Рис. 6: Пример: решение задачи Ферма–Торричелли — отрезок.

Основная теорема. В нормированной плоскости найдутся три точки, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только тогда, когда существует согласованная тройка элементов единичной окружности такая, что размерность аффинной оболочки входящих в неё элементов нулевого типа равна 1.

Лямбда-нормированные плоскости

На практике критерий применить нелегко, так как ответ для заданной нормы даётся путём перебора уплощений единичной окружности. Если рассматривать его как алгоритм, то его сложность напрямую зависит от их количества, а из-за наличия норм с бесконечным количеством уплощений он даже не является вычислимым за конечное время. Если применить критерий на семействе λ-плоскостей, то получим теорему, классифицирующую нормы данного семейства относительно единственности решения задачи Ферма–Торричелли:

Определение 6. λ-нормированной плоскостью называется плоскость, норма на которой задана правильным 2λ-угольником.

Теорема 3. В λ-нормированной плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трех точек, если и только если $\lambda \not\equiv 0 \mod 3$.

Список литературы

[1] Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces.“, Journal of Optimization Theory and Applications 115, 283-314.

Полнота топологизированных полурешеток

К. А. Казаченко
НОЦ ИММ УрО РАН

В настоящей работе мы исследуем различные виды полноты топологизированных полурешеток и взаимосвязи данных классов.
Полурешеткой называют частично упорядоченное множество, в котором каждая пара элементов имеет точную нижнюю грань. Полурешетку с заданной на ней топологией называют *топологизированной*. Топологизированная полурешетка X называется:

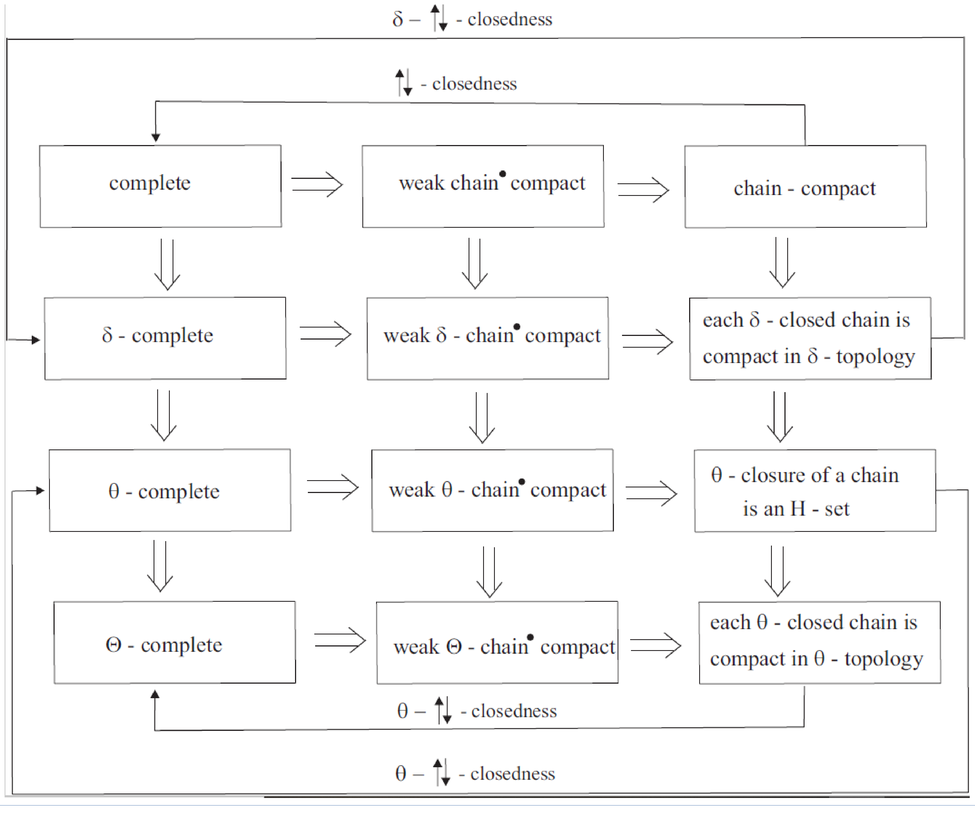
- *полной* (δ-полной, θ-полной, Θ-полной), если для любой цепи $C \subset X$ выполняется $\{\inf C, \sup C\} \subset \overline{C}$ ($\{\inf C, \sup C\} \subset \overline{C}^{\delta}$, $\{\inf C, \sup C\} \subset \overline{C}^{\theta}$, $\{\inf C, \sup C\} \subset \overline{C}^{\Theta}$)

- *weak chain$^{\bullet}$ compact* (*weak $\delta-$chain$^{\bullet}$ compact*, *weak $\theta-$chain$^{\bullet}$ compact*, *weak $\Theta-$chain$^{\bullet}$ compact*), если X компактна в топологии, порожденной предбазой, состоящей из дополнений до замкнутых цепей (δ-замкнутых цепей, θ-замыканий цепей, θ-замкнутых цепей)

- *$\uparrow\downarrow$-замкнутой* (*δ-$\uparrow\downarrow$-замкнутой*, *θ-$\uparrow\downarrow$-замкнутой*), если для любого $x \in X$ множества $\uparrow x = \{y \in X : y \geq x\}$ и $\downarrow x = \{y \in X : y \leq x\}$ замкнуты (δ-замкнуты, θ-замкнуты)

Где $\overline{C}^{\delta} = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{N}(x), \operatorname{Int}\overline{U} \cap C \neq \emptyset\}$, $\overline{C}^{\theta} = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{N}(x), \overline{U} \cap C \neq \emptyset\}$ и $\overline{C}^{\Theta} = \bigcap\{A \subset X : C \subset A \text{ и } A = \overline{A}^{\theta}\}$.

Основные результаты работы отображены на схеме:



Мультиморфизмом полугрупп X и Y называется такое многозначное отображение $\Phi : X \to 2^Y$, что $\Phi(x)\Phi(y) \subset \Phi(xy)$ для любых элементов $x, y \in X$.

Теорема. Пусть X – полная топологизированная полурешетка, Y – $\uparrow\downarrow$-замкнутая топологизированная полурешетка, $\Phi : X \to 2^Y$ – полунепрерывный снизу T_1 мультиморфизм такой, что для любых двух точек $x, y \in X$ неравенство $x \leq y$ влечет $\Phi(x) \cap \uparrow\Phi(y) \subset \Phi(y)$. Тогда полурешетка $\Phi(X)$ полна в том и только в том случае, когда полурешетка $\Phi(x)$ полна для каждого $x \in X$.

Следствие. Пусть X – полная топологизированная полурешетка, Y – $\uparrow\downarrow$-замкнутая топологизированная полурешетка, $\Phi : X \to 2^Y$ – полунепрерывный снизу T_1 мультиморфизм такой, что $\Phi(x) \cap \Phi(y) = \emptyset$ при $x \neq y$. Тогда полурешетка $\Phi(X)$ полна в том и только в том случае, когда полурешетка $\Phi(x)$ полна для каждого $x \in X$.

Пример. Пусть $A_0 = \{0\} \times \omega_1, A_1 = \{1\} \times \omega_1, A_2 = \{2\} \times (\omega_1 + 1)$. Для ординала α определим множества $\lim(\alpha) = \{\beta \in \alpha : \beta$ – предельный ординал$\}$, $\lim^2(\alpha) := \{\beta \in \lim(\alpha) : \beta = \sup(\lim(\beta))\}$ и $\lim^1(\alpha) := \lim(\alpha) \backslash \lim^2(\alpha)$. Ясно, что $\lim(\omega_1), \lim^1(\omega_1)$ и $\lim^2(\omega_1)$ неограничены в ω_1; зафиксируем изоморфизмы $f_1 : \lim(\omega_1) \to \lim^1(\omega_1)$ и $f_2 : \lim^2(\omega_1) \to \lim^2(\omega_1)$.
Пусть $A = A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2$. Определим на A отношение эквивалентности: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или $x = (0, \alpha), y = (1, f_1(\alpha))$ где $\alpha \in \lim(\omega_1)$ или $x = (1, \alpha), y = (2, f_2(\alpha))$ где $\alpha \in \lim^1(\omega_1)$.

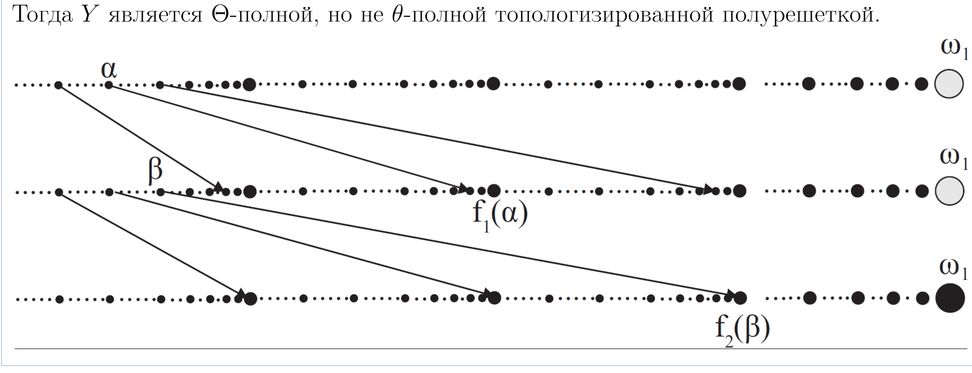
На множестве $Y = A/\sim$ определим операцию:

$$[x] \cdot [y] = \begin{cases} [x], & [x] = [y]. \\ [(0, \min\{\alpha, \beta\})], & (0, \alpha) \in [x], (0, \beta) \in [y]. \\ [x], & [y] = [(2, \omega_1)]. \\ [y], & [x] = [(2, \omega_1)]. \\ [(0, 0)], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $(Y, \leq)$, где $y_1 \leq y_2 \leftrightarrow y_1 \cdot y_2 = y_1$ является полурешеткой. Множества $\{[(i, \beta)] : \beta > \gamma$ и $\beta \leq \alpha\}$ и $\{[(i, \beta) : \beta > \gamma$ и $\beta \leq \alpha$ и $\beta \in I(\omega_1)]$, где $i = \overline{0, 2}$ обозначим через $(\gamma, \alpha]^i$ and $(\gamma, \alpha]^i_I$, соответственно. Определим топологию на Y задав фундаментальные системы окрестностей $\mathcal{B}(x)$:

$$\mathcal{B}(x) = \begin{cases} \{\{x\}\}, x = [(i, \alpha)], i = \overline{0, 2}, \alpha \in I(\omega_1). \\ \{(\beta, \alpha]^0 \cup (\gamma, f_1(\alpha)]^1_I : \beta < \alpha, \gamma < f_1(\alpha)\}, x = [(0, \alpha)], \alpha \in \lim(\omega_1). \\ \{(\beta, \alpha]^1 \cup (\gamma, f_2(\alpha)]^2_I : \beta < \alpha, \gamma < f_2(\alpha)\}, x = [(1, \alpha)], \alpha \in \lim^2(\omega_1). \\ \{(\beta, \alpha]^2_I : \beta < \omega_1\}, x = [(2, \alpha)], \alpha = \omega_1 \vee \alpha \in \lim^1(\omega_1). \end{cases}$$

Тогда Y является Θ-полной, но не θ-полной топологизированной полурешеткой.



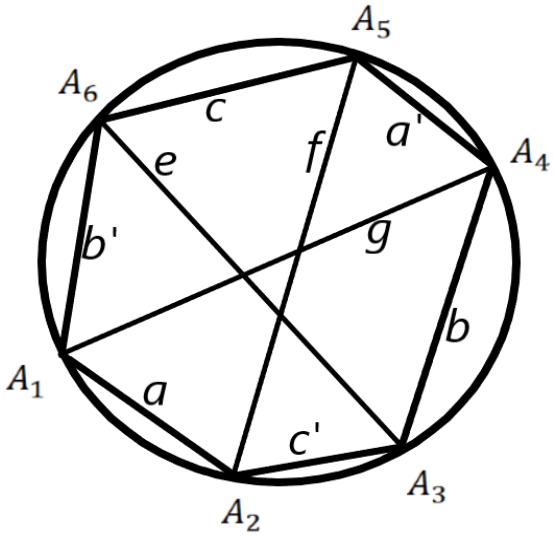
ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ ФУРМАНА

Костин А.В., Костина Н.Н.

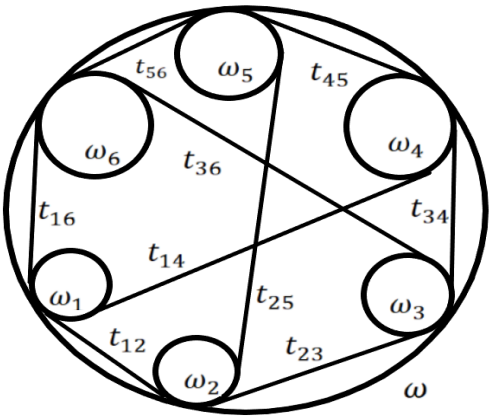
Согласно теореме Птолемея, у четырехугольника, вписанного в окружность на евклидовой плоскости, произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон. Эта теорема имеет различные обобщения. На плоскости в одном из обобщений вместо четырехугольника рассматривается вписанный шестиугольник. Соответствующее утверждение, связывающее длины сторон и «больших» диагоналей вписанного шестиугольника $A_1\,A_2\,A_3A_4A_5A_6$, называют теоремой Птолемея для шестиугольника или теоремой Фурмана:

$$A_1\,A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 = A_1\,A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_1\,A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 +$$

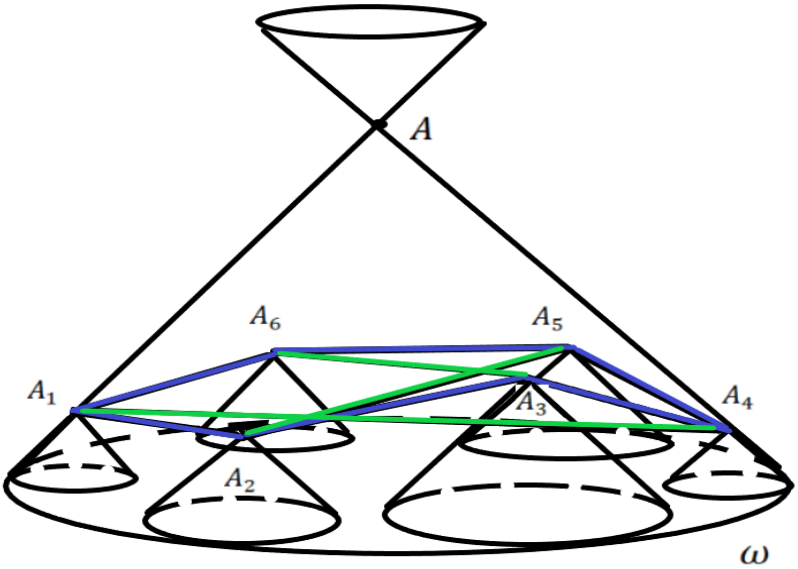
$$+A_2\,A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_2\,A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_1A_6 + A_3\,A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6$$



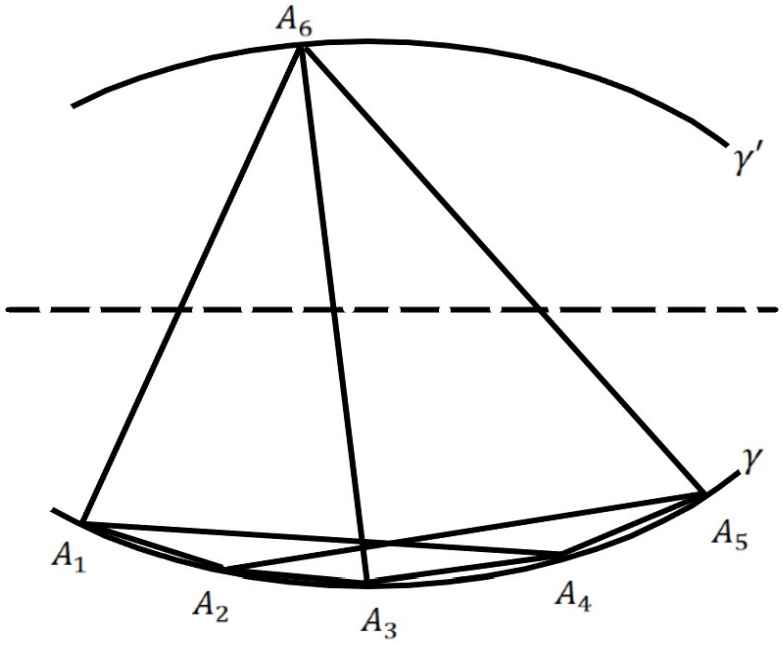
Теорема Кези (Кейси) является другим обобщением теоремы Птолемея. В ней вместо четырех точек, лежащих на некоторой фиксированной окружности, рассматриваются четыре окружности, касающиеся этой окружности, а вместо длин сторон и диагоналей – длины отрезков касательных к окружностям. Имеет место аналог теорем Кези и Фурмана для шести окружностей и отрезков их общих касательных:



Если окружности с центром в точке (*x,y*) и радиусом *z* сопоставить точку с координатами (*x,y,z*) в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$, то теорема о шести окружностях будет интерпретироваться как теорема о шестиугольнике, вписанном в изотропную сферу псевдоевклидова пространства.



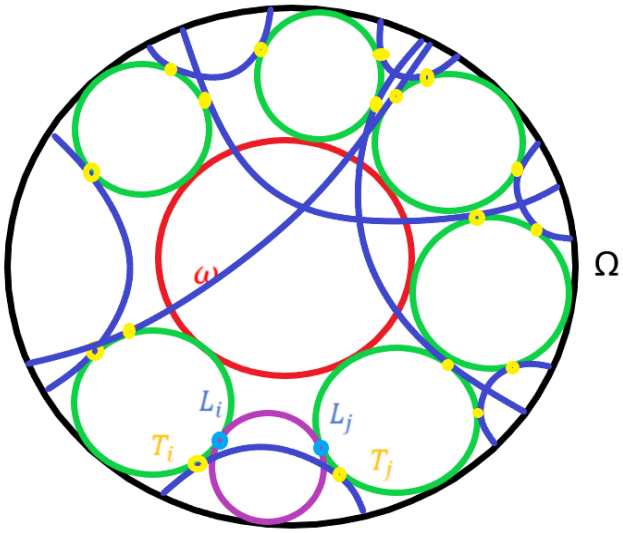
Если кривизна плоскости Лобачевского равна минус единице, то в аналогах теорем Птолемея, Фурмана и Кези для вписанных в окружность многоугольников или окружностей, касающихся одной окружности, длины соответствующих отрезков, делённые на два, будут стоять под знаками гиперболических синусов (или гиперболических косинусов для вершин на разных ветвях эквидистанты).



В данной работе доказываются теоремы, обобщающие на плоскости Лобачевского и теорему Кези, и теорему Фурмана. На плоскости Лобачевского рассматриваются шесть окружностей, касающихся

некоторой линии постоянной кривизны, и для длин отрезков касательных доказываются утверждения, обобщающие эти теоремы. Если в дополнение к длинам отрезков геодезических касательных рассматривать длины дуг касательных орициклов, то между евклидовыми и гиперболическими со-

отношениями можно установить соответствие. Наиболее наглядно это можно продемонстрировать, если взять набор орициклов, касающихся одной линии постоянной кривизны (окружности, орицикла или ветви эквидистанты) на плоскости Лобачевского. В этом случае если длина отрезка геодезической касательной к орициклам равна t, то длина "орициклической" касательной к ним равна sh t/2 . Значит, если геодезические касательные связаны "гиперболическим" соотношением, то "орициклические" касательные будут связаны соответствующим "евклидовым" соотношением. На рисунке представлена такая конфигурация в модели Пуанкаре в круге:

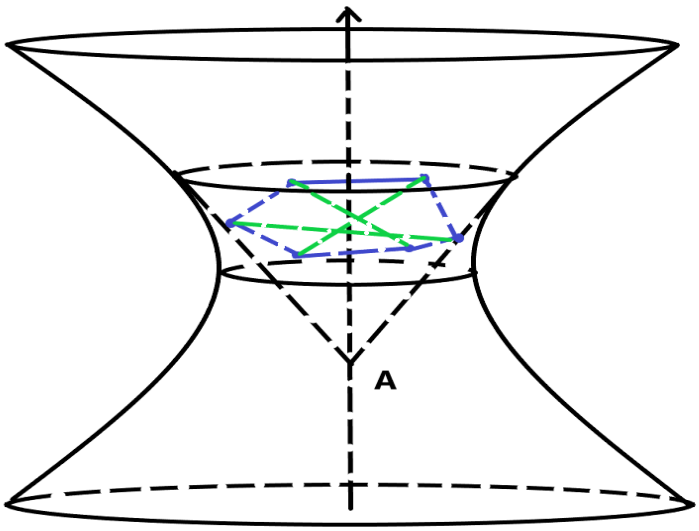


Теорема. Пусть шесть орициклов касаются линии постоянной кривизны ω на плоскости Лобачевского. Пусть длина геодезической касательной орициклов $T_iT_j = t_{ij}$, а длина орициклической касательной $L_iL_j = l_{ij}$, тогда

$$\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{25}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{36}}{2} = \operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{45}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{36}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{56}}{2} +$$
$$+\operatorname{sh}\frac{t_{56}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{45}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{16}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{16}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{t_{25}}{2}.$$

$$l_{14}\cdot l_{25}\cdot l_{36} = l_{12}\cdot l_{45}\cdot l_{36} + l_{12}\cdot l_{34}\cdot l_{56} +$$
$$+ l_{56}\cdot l_{23}\cdot l_{14} + l_{45}\cdot l_{16}\cdot l_{23} + l_{34}\cdot l_{16}\cdot l_{25}.$$

Гиперболический аналог теоремы для шести циклов можно интерпретировать на изотропной сфере трёхмерного псевдогиперболического пространства:



Различение метрических пространств функциями расстояния до 1-пространств

Елена Лычагина, LychaginaEA@yandex.ru

МГУ имени М. В. Ломоносова

Введение

В данной работе изучается вопрос, какие метрические пространства можно отличить друг от друга функциями расстояния до 1-пространств. Решение этой задачи обобщено: мы не будем использовать ни конечность одного из пространств, ни их компактность. В ходе исследования было введено понятие α-размерности метрического пространства и в этих терминах сформулирован признак различимых ограниченных метрических пространств. В статье [1] был приведён пример двух конечных метрических пространств, не различающихся расстояниями до симплексов. В данной работе приводится пример трёхточечного пространства и его раздутия до бесконечного компакта, имеющих одинаковые расстояния до произвольных симплексов. Из этой конструкции порождается целое семейство бесконечных метрических пространств, не различающихся расстояниями до симплексов. Также сформулирован критерий пар неразличимых ограниченных пространств расстояниями до 1-пространств с большим числом точек. В конце работы приведён ряд условий, достаточных для различимости двух ограниченных пространств расстояниями до симплексов с меньшим числом точек.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А. А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А. О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 21-11-00355.

Расстояние Громова–Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Под метрическим пространством в данной работе подразумевается непустое множество с заданной на нём метрикой. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$.

Определение. *Расстоянием Хаусдорфа между непустыми подмножествами A и B пространства X* называется величина

$$d_H(A,\, B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|ab|\}.$$

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку $(X',\, Y',\, Z)$, состоящую из метрического пространства Z и его двух подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовём *реализацией пары* $(X,\, Y)$.

Определение. *Расстоянием Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y* называется величина

$$d_{GH}(X,\, Y) = \inf\{r : \exists (X',\, Y',\, Z), d_H(X',\, Y') \le r\}.$$

Основные обозначения

Пусть $A,\, B \subset X$ — непустые подмножества метрического пространства X. Положим

$$|AB| = \inf\big\{|ab| :\, a \in A,\, b \in B\big\}.$$

Пусть k — кардинальное число, не превосходящее мощности X. Обозначим через $\mathcal{D}_k(X)$ семейство всевозможных разбиений пространства X на k непустых подмножеств. Для разбиения $D = \{X_1,\, X_2, \ldots\} \in \mathcal{D}_k(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup\{\operatorname{diam} X_1,\, \operatorname{diam} X_2, \ldots\}, \qquad \alpha(D) = \inf\big\{|X_iX_j| :\, i \ne j\big\}.$$

Также введём следующие обозначения:

$$\alpha_k^-(X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_k(X)} \alpha(D), \qquad d_k(X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_k(X)} \operatorname{diam} D.$$

$$\alpha_k(X) = \sup_{D\in\mathcal{D}_k(X)} \alpha(D), \qquad d_k^+(X) = \sup_{D\in\mathcal{D}_k(X)} \operatorname{diam} D.$$

1-пространства и расстояние Громова–Хаусдорфа

Определение. *Симплексом* или *1-пространством* будем называть метрическое пространство, в котором все ненулевые расстояния равны между собой. Симплекс мощности n, у которого все расстояния равны $\lambda > 0$, будем обозначать $\lambda\Delta_n$.

Формула для пространств с меньшим кардинальным числом ([2])

Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $\lambda > 0$ и $\#X < \#\lambda\Delta$, тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta,\, X) = \max\{\lambda,\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Формула для пространств с большим кардинальным числом ([2])

Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $n \le \#X$. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеем

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n,\, X) = \inf\Big\{f(D) : D \in \mathcal{D}_n(X)\Big\} = \\ = \inf\Big\{\max\big\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\big\} : D \in \mathcal{D}_n(X)\Big\}.$$

α-размерность

Утверждение. Для любого метрического пространства X величина $\alpha_k(X)$ не возрастает при увеличении кардинального числа k.

Определение. Назовём *α-размерностью метрического пространства X* величину

$$\dim_\alpha(X) = \sup\Big\{k \ge 1 : \alpha_k(X) > 0\Big\}.$$

Заметим, что для любого метрического пространства X его α-размерность не превосходит мощности самого пространства $\dim_\alpha(X) \le \#X$.

Теорема. Пусть X и Y — непустые метрические пространства, и пространство X ограниченно. Предположим, что $\dim_\alpha(X) \ne \dim_\alpha(Y)$. Тогда пространства X и Y являются различимыми.

Формула расстояния для пространств с меньшей α-размерностью ([2])

Пусть X — произвольное ограниченнное метрическое пространство, $n = \#\lambda\Delta \le \#X$, причём $\alpha_n(X) = 0$, тогда

1. если $2d_n(X) \le \operatorname{diam} X$, то
$$2d_{GH}(\lambda\Delta,\, X) = \begin{cases} \operatorname{diam} X - \lambda & \text{при } \lambda < \frac{1}{2}\operatorname{diam} X, \\ \lambda & \text{при } \lambda \ge \frac{1}{2}\operatorname{diam} X; \end{cases}$$
2. если $2d_n(X) > \operatorname{diam} X$, то
$$2d_{GH}(\lambda\Delta,\, X) = \begin{cases} \operatorname{diam} X - \lambda & \text{при } \lambda \le \operatorname{diam} X - d_n(X), \\ d_n(X) & \text{при } \operatorname{diam} X - d_n(X) < \lambda \le d_n(X), \\ \lambda & \text{при } \lambda > d_n(X). \end{cases}$$

Пример пары неразличимых пространств

Пусть M — трёхточечное пространство с расстояниями $a < b < c$, а X — дизъюнктное объединение связных компактных подмножеств $X_1,\, X_2,\, X_3$ таких, что диаметры всех трёх равны $d < \frac{c-a}{2}$, и расстояния между любыми точками из X_1 и X_2, X_1 и X_3, X_2 и X_3 равны соответственно $a,\, b,\, c$. Тогда

$$d_{GH}(\lambda\Delta, M) = d_{GH}(\lambda\Delta, X)$$

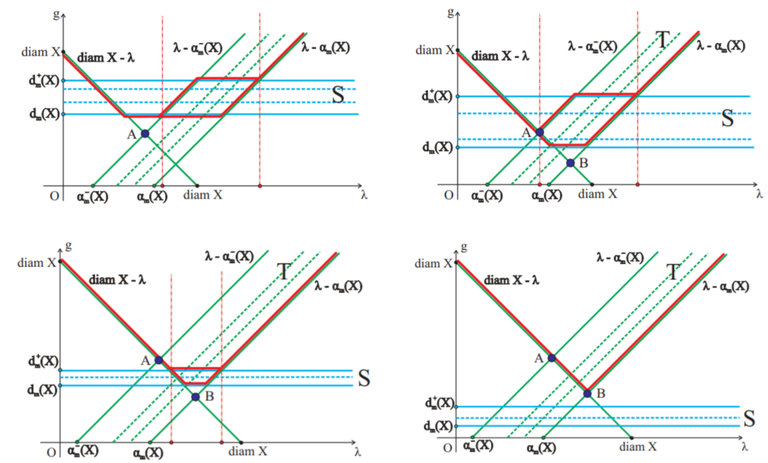
для любого симплекса $\lambda\Delta$.

Свойства пар неразличимых пространств

Теорема. Пусть X и Y — ограниченные метрические пространства. Пусть $\#X > \#Y$ и $\dim_\alpha(X) = \dim_\alpha(Y) = k$, тогда верны следующие утверждения.

1. Пусть $\#\lambda\Delta > \#X$. Тогда пространства X и Y не отличимы с помощью $\lambda\Delta$ для любого $\lambda > 0$ в том и только том случае, когда $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y$.
2. Пусть $\#\lambda\Delta = n$ и $\#X \ge n > \#Y$. Тогда пространства X и Y не отличимы с помощью $\lambda\Delta$ для любого $\lambda > 0$ в том и только том случае, когда $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y$ и $2d_n(X) \le \operatorname{diam} X$.

Возможные графики функции расстояния до 1-пространств



Признаки пар различимых пространств

Теорема. Пусть X и Y — ограниченные метрические пространства. Пусть $\#X \ge \#Y$ и $\dim_\alpha(X) = \dim_\alpha(Y) = k$. Тогда если $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y$ и верно хотя бы одно из следующих трёх условий:

1. существует такое $n \le k$, что $\alpha_n(X) \ne \alpha_n(Y)$;
2. существует такое $n \le k$, что $d_n(X) \ne d_n(Y)$ и $\begin{cases} \operatorname{diam} X - \alpha_n^-(X) < 2d_n(X), \\ \operatorname{diam} Y - \alpha_n^-(Y) < 2d_n(Y); \end{cases}$
3. существует такое $n \le k$, что $d_n(Y) > d_n^+(X)$ и $2d_n(Y) > \operatorname{diam} Y - \alpha_n(Y)$,

то пространства X и Y являются n-различимыми.

Список литературы

1 Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes, ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655.

2 Grigor'ev D. S., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Gromov–Hausdorff Distance to Simplexes, ArXiv e-prints, arXiv:1906.09644.

Гордиевы графы преобразований узлов

Узлы и зацепления

- Зацеплением называется кусочно-гладкое вложение несвязного объединения конечного числа окружностей в S^3 и образ вложения с точностью до объемлемой изотопии.
- Узел — однокомпонентное зацепление.
  L – множество всех зацеплений,
  K – множество всех узлов.

Преобразования

Под преобразованием зацеплений подразумевают некоторую геометрическую процедуру, проводимую над вложенным в S^3 зацеплением;

Шаблон

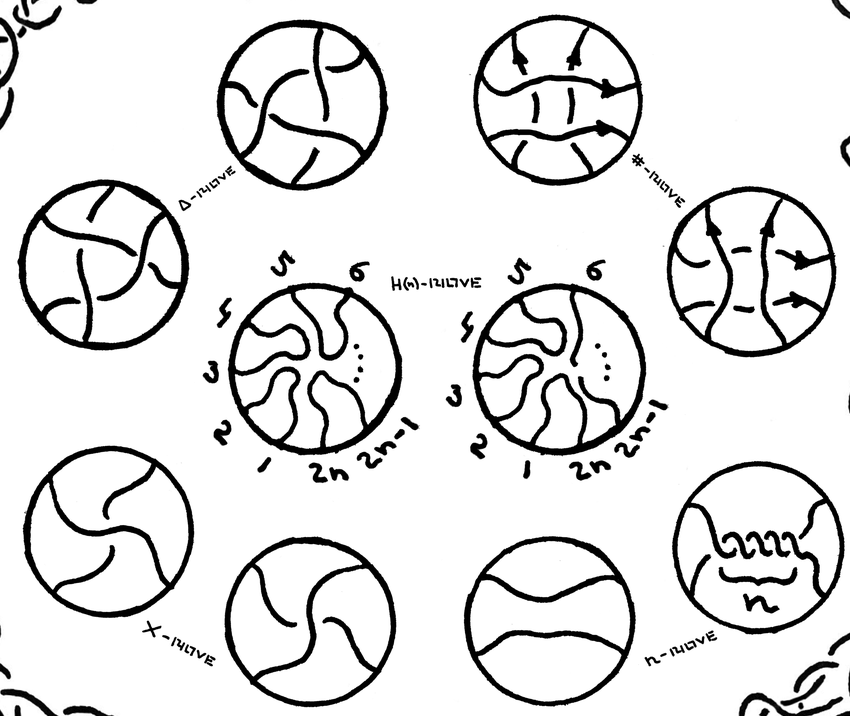
Локальные преобразования

- Тэнгл на n нитях – пара $B_A = (B, A)$; B – трёхмерный шар, A – n дизъюнктных вложенных в B дуг, таких что сфера ∂B пересекается с каждой дугой в концевых точках и только в них;
- Нити тэнгла B_A – компоненты связности A.
- Шаблон локального преобразования — пара n-ниточных тэнглов (B_A, B_C), где B – шар в S^3 и $\partial A = \partial C$;
- Пусть L_1 и L_2 – два зацепления в S^3, B – шар в S^3, δ – шаблон; Тогда L_2 получается из L_1 с помощью δ-преобразования, если существуют зацепления L_1' и L_2' в S^3, что
  - L_1' объемлемо изотопно L_1;
  - L_2' объемлемо изотопно L_2;
  - L_1' и L_2' совпадают вне B;
  - пара $((B, B \cap L_1'), (B, B \cap L_2'))$ совпадает с шаблоном δ;

Тэнгл

Гордиев граф

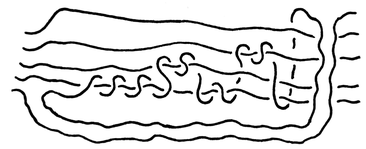
преобразования δ на множестве зацеплений M – это граф, вершинами которого являются зацепления из множества M и две вершины соединены ребром, если одно из зацеплений получается из другого с помощью δ за одно применение. На этом графе есть естественная метрика – число рёбер в кратчайшем пути; Обозначим через $G(\delta, M)$ Гордиев граф δ на множестве M;



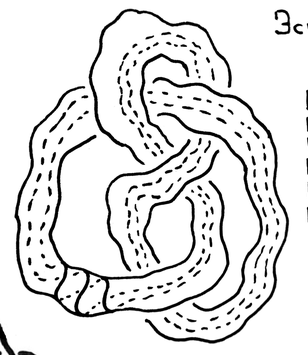
Результаты

Теорема: У любого узла в графе $G(H(2), K)$ есть смежный кабелированный узел.

Теорема: У любой вершины соответствующей узлу в графе $G(H(2), L)$ есть смежная соответствующая Брунновy зацеплению.



Эскиз к доказательству

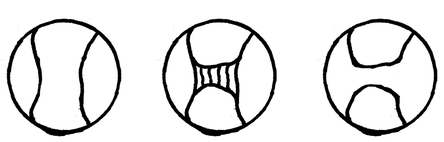


Пример кабелирования

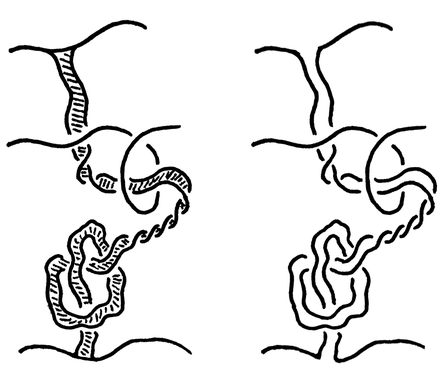
Теорема: Дополнение любого метрического шара в $G(H(2), K)$ имеет только одну бесконечную компоненту связности;

Визуализация H(2)

Локальное преобразование H(2) и преобразование ленточная хирургия имеют один и тот же Гордиев граф. То есть фактически это одно и тоже преобразование с точностью до изотопии (см. картинки). Естественная визуальность ленточной хирургии нередко играет существенную роль в исследовании свойств H(2)-Гордиева графа и позволяет получать удивительные результаты. Не любое локальное преобразование имеет такую изящную визуализацию.



Реализация H(2) с помощью ленточной хирургии и наоборот.



Ленточная хирургия

Гипотезы – шаблоны

Гордиевы графы – удобный инструмент для работы с преобразованиями узлов. Можно задавать вопросы о структуре графа не фиксируя преобразования.

Примеры таких вопросов-шаблонов:

- У любого узла есть смежный гиперболический?
- Если два узла смежны, то всегда ли найдётся третий узел, смежный им обоим?
- Гиперболичен ли граф?
- Наибольшее n, что произвольная вершина содержится в полном подграфе на n вершинах?

Литература

- Hoste J., Nakanishi Y., Taniyama K., Unknotting operations involving trivial tangles, Osaka J. Math. 27 (1990), N3, 555–566.
- Murakami H., Nakanishi Y., On a certain move generating link-homology, Math. Ann. (1989) 284, N1, 75–89;
- Kanenobu T., Miyazawa Y., H(2)-unknotting number of a knot, Commun. Math. Res. 25 (2009), N5, 433–460.
- Scharlemann M.G., Unknotting number one knots are prime, Invent. Math. 82 (1985), N1, 37–55;

Миллер

Алексей Юрьевич

ПМПМ им. Л. Эйлера

miller.m2@mail.ru

Ступ Олисуб

Факты

- Гордиевы графы $G(\Delta, K)$, $G(X, K)$ и $G(H(n), K)$ связны;
- В графе $G(\Delta, K)$ нет треугольников.
- Все узлы, смежные тривиальному в $G(X, K)$ просты;
- В графе $G(X, K)$ для любой вершины и любого $n > 0$ существует полный подграф на n вершинах, содержащий заданную вершину
- Гордиев граф каждого локального преобразования имеет бесконечный диаметр.

Минимальные идеальные триангуляции 3-многообразий, содержащие ровно 3 ребра

Рябков А. И., Фоминых Е. А.

Санкт-Перербургский государственный университет

Аннотация

В основе одного из топологических подходов к доказательству минимальности идеальной триангуляции лежит простая идея: идеальная триангуляция 3-многообразия с непустым краем минимальна тогда и только тогда, когда она содержит наименьшее число ребер среди всех идеальных триангуляций данного многообразия. Поэтому идеальные триангуляции с 1 ребром автоматически минимальны. Полный ответ на вопрос о минимальности идеальных триангуляций с ровно двумя ребрами дан в [1]. А именно, в этой работе доказано, что любая идеальная триангуляция ровно с двумя ребрами, не допускающая уменьшающего преобразования Пахнера типа 3-2, минимальна. Минимальность идеальных триангуляций с тремя ребрами в общем случае неизвестна, однако в работе [2] доказана минимальность так называемых *бедных* идеальных триангуляций с ровно тремя ребрами. Кроме того, в работе [3] с помощью гомологий с коэффицентами в $\mathbb{Z}_2$ доказана минимальность подкласса идеальных триангуляций с ровно тремя ребрами, двойственные специальные полиэдры которых содержат ровно три собственных простых подполиэдра. Нам удалось доказать минимальность нового бесконечного класса идеальных триангуляций с тремя ребрами.

Введение

Пусть M – связное компактное 3-многообразие с непустым краем. Идеальная триангуляция M называется минимальной, если она содержит наименьшее число тетраедров среди всех идеальных триангуляций многообразия M. Известно довольно мало примеров бесконечных серий минимальных идеальных триангуляций.

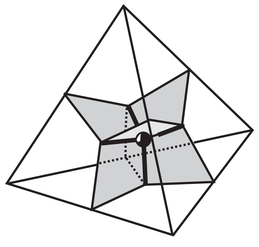


Рис. 1: Построение двойственного специального полиэдра

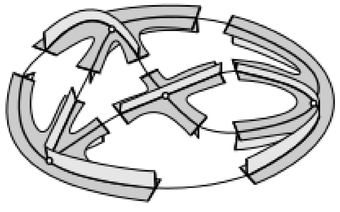


Рис. 2: Общий вид специального полиэдра

Двойственные специальные полиэдры

Рассмотрим объединение линков всех четырех вершин каждого тетраедра идеальной триангуляции в его первом барицентрическом подразбиении. Склейка тетраедров индуцирует склейку линков. Получаем двойственный к исходному полиэдр, который называется *специальным*.

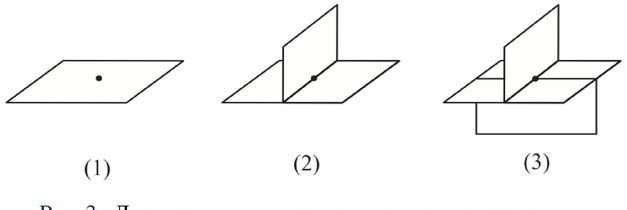


Рис. 3: Допустимые окрестности в простом подполиэдре

Простые подполиэдры

У специального полиэдра имеется естественная клеточная структура. Клеточный подкомплекс специального полиэдра называется *простым подполиэдром*, если линк каждой его точки – это либо (1) окружность, либо (2) окружность с диаметром, либо (3) окружность с тремя радиусами (такие точки будем называть *истинными вершинами*). Число истинных вершин некоторого простого подполиэдра Q будем обозначать через $\mathtt{V}(Q)$. С точки зрения специальных полиэдров становится естественным разделять идеальные триангуляции на классы по числу простых подполиэдров у их двойственных специальных полиэдров.

Основной результат

Пусть P_3 – специальный полиэдр с тремя 2-компонентами и $n \geq 5$ истинными вершинами, имеющий ровно один собственный простой подполиэдр R. Тогда, если $\mathtt{V}(R) < n-4$, то полиэдр P_3 минимален.

Идея доказательства

Доказательство развивает метод, описанный в статьях [1],[3]. Предположим, что полиэдр P_3 не минимален. Значит найдется специальный полиэдр с меньшим числом 2-компонент, задающий то же самое многообразие. Докажем, что это невозможно.
Оригинальный метод опирался на частный случай инвариантов Тураева-Виро под названием ε-инвариант [4]. Уравнения, возникающие из условия равенства ε-инвариантов, были относительно простыми для решения, что и позволяло прийти к противоречию. Описанный далее метод позволяет работать с куда более сложными уравнениями.

Контакты

- Email: ryabkoff.anton@yandex.ru
- Telegram: @Contramund

ε-инвариант

Пусть $\mathcal{F}(P)$ – множество всех простых подполиэдров специального полиэдра P, а ε – корень уравнения $x^2 = x+1$. Сопоставим каждому простому подполиэдру R его вес $w_\varepsilon(R) = (-1)^{\mathtt{V}(R)}\varepsilon^{\chi(R)-\mathtt{V}(R)}$. Тогда значение ε-инварианта полиэдра P вычисляется по формуле $t(P) = \sum_{R\in\mathcal{F}} w_\varepsilon(R)$.

Идея решения уравнений

Если зафиксировать знаки $(-1)^{\mathtt{V}(R)}$ в уравнении равенства ε-инвариантов, то получается уравнение вида $\varepsilon^{a_1} + \ldots + \varepsilon^{a_n} = \varepsilon^{b_1} + \ldots + \varepsilon^{b_m}$ для некоторых целых $\{a_i\}, \{b_j\}$. Для константы ε и любого $n \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство $\varepsilon^n = F(n)\cdot\varepsilon + F(n-1)$, где $F(i)$ – так называемые числа Фибоначчи. Данный факт позволяет оставить в уравнении только слагаемые ε в степени 1 и целые числа.
Так как ε иррационально, то суммы коэффицентов при ε в обоих частях равенства равны. Коэффиценты же эти состоят исключительно из сумм чисел Фибоначчи, что позволяет применить теорему Цекендорфа для нахождения всех решений.
Решениями таких уравнений выступают точные значения выражений вида $\chi(R) - \mathtt{V}(R)$, для всех $R \in \mathcal{F}(P)$. Неравенство $\chi(R) \geq 1 - \mathtt{V}(P)$ позволяет оценить снизу число вершин.

Литература

[1] А. Ю. Веснин, В. Г. Тураев, Е. А. Фоминых, *Сложность виртуальных трехмерных многообразий*, Матем. сб. **207**:11 (2016), 4– 24.

[2] Е. А. Фоминых, Е. В. Шумакова, *Бедные идеальные триангуляции ровно с тремя ребрами минимальны*, Сибирский мат.журнал, **62**:5 (2021), 1163–1172.

[3] А. В. Малютин, Е. А. Фоминых, Е. В. Шумакова, *3-многообразия, задаваемые 4-регулярными графами с тремя эйлеровыми циклами*, УМН, **76**:6 (2021), 197–198.

[4] С.В. Матвеев, М.А. Овчинников, М.В. Соколов, *Построение и свойства t-инварианта*, Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН, 267, Геометрия и топология 5 (2000), 207– 219.

Непрерывные отображения π-пространств

Смолин Владислав Русланович

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского

Введение

Пусть f — непрерывное отображение из пространства $\langle X, \tau_X \rangle$ в пространство $\langle Y, \tau_Y \rangle$. Тогда f называется

- *квази-открытым*, если множество $\mathsf{Int}_{\tau_Y}(f[U])$ непусто для любого непустого $U \in \tau_X$;
- *открытым*, если $f[U] \in \tau_Y$ для любого $U \in \tau_X$;
- *почти открытым*, если для каждой точки $y \in Y$ найдется такая точка $x \in f^{-1}(y)$, что $y \in \mathsf{Int}_{\tau_Y}(f[U])$ для любой открытой окрестности U точки x.

Пространство $\langle X, \tau_X \rangle$ называется *π-пространством*, если оно квази-открыто уплотняется на пространство Бэра (т.е. счетную степень счетного дискрета).

Напомним, что *игра Шоке* на непустом пространстве X определяется следующим образом: два игрока, I и II, поочередно выбирают непустые открытые множества

I	U_0		U_1	$\dots$
II		V_0		V_1 $\dots$

таким образом, что $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$. Игрок II выиграл партию $\langle U_0, V_0, U_1, V_1, \dots \rangle$ в игре Шоке на X, если $\bigcap_n V_n \neq \varnothing$; иначе игрок I выиграл партию. Непустое пространство X называется *пространством Шоке*, если игрок II имеет выигрышную стратегию в игре Шоке на X. Более точные определения можно найти в [Kechris, A. Classical descriptive set theory].

Теорема 1

Непустое топологическое пространство является открытым образом некоторого π-пространства тогда и только тогда, когда оно является пространством Шоке со счетной π-базой и обладает мощностью не более чем $2^{\aleph_0}$

Теорема 2

Непустое топологическое пространство является почти открытым образом некоторого π-пространства тогда и только тогда, когда оно сепарабельно и обладает мощностью не более чем $2^{\aleph_0}$

Открытые вопросы

- Найти описание образов π-пространств при непрерывных замкнутых отображениях;
- Найти описание образов π-пространств при непрерывных три-факторных отображениях.

Расстояние Громова–Хаусдорфа между множествами вершин правильных многоугольников, вписанных в одну окружность

Талипов Талант Камбарович, talipovtalant.live@gmail.com

МГУ им. Ломоносова

Введение

В работе изучается пространство всех метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа. Заметим, что точные значения расстояния Громова–Хаусдорфа между конкретными метрическими пространствами известны лишь для малого числа случаев. Например, в работе [1] было вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа до 1-пространств — метрических пространств с одним ненулевым расстоянием. Также в работе [3] было вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа между отрезком и окружностью. В работе [2] вычисляется расстояние Громова–Хаусдорфа между сферами разных размерностей, между вершинами правильных многоугольников и окружностью, а также между разными правильными многоугольниками, вписанными в одну окружность. Авторы ставят задачу вычисления последнего расстояния и приводят пример решения для m-угольника и $(m+1)$-угольника. В настоящей работе мы делаем некоторые продвижения в решении данной задачи. А именно, полностью исследован случай m- и n-угольников при условии, что m делится нацело на n, а также вычислены все расстояния до 2-угольников и 3-угольников. Автор выражает благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н. Тужилину Алексею Августиновичу и д. ф.-м. н. Иванову Александру Олеговичу за постановку задачи и помощь в работе.

Расстояние Громова–Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $d(x,y)$ или $|xy|$. Для непустых $A, B \subset X$ определим

$$d_H(A,B) = \max\Big\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\Big\}.$$

Определение. Величина $d_H(A,B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа* между A и B. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z'), состоящую из метрического пространства Z' и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). Положим

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\big\{r : \exists (X', Y', Z'), d_H(X', Y') \leqslant r\big\}.$$

Определение. Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа* между X и Y.

Определение. Для множеств X, Y *соответствием* между X и Y называется $R \subset X \times Y$ такое, что для любого $x \in X$ существует $y \in Y$, для которых $(x,y) \in R$ и, обратно, для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, для которых $(x,y) \in R$. Если X, Y — метрические пространства, то определим *искажение соответствия* R следующим образом: $\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||x_1x_2| - |y_1y_2|\big| : (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R\Big\}$. Множество всех соответствий между X и Y будем обозначать $\mathcal{R}(X,Y)$.

Теорема 1 ([4]). Для произвольных метрических пространств X и Y выполняется

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Расстояние Громова–Хаусдорфа и ультраметрические пространства

В работе [2] рассматривалось следующее преобразование метрики. Для метрического пространства (X, d_X) рассмотрим псевдометрическое пространство (X, u_X), где $u_X \colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ определено следующим образом:

$$u_X(x,y) \mapsto \inf\big\{\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d_X(x_i, x_{i+1}) : x_0 = x, \dots, x_n = y\big\}.$$

Расстояние Громова–Хаусдорфа и ультраметрические пространства

Метрическое пространство $\mathbf{U}(X)$ определим как факторпространство (X, u_X) по следующему отношению эквивалентности:

$$x \sim y \iff u_X(x,y) = 0.$$

Теорема 2 ([2]). Для любых метрических пространств X и Y выполняется следующее неравенство:

$$d_{GH}(X,Y) \geqslant d_{GH}\big(\mathbf{U}(X), \mathbf{U}(Y)\big).$$

Расстояние Громова–Хаусдорфа до симплексов

Определение. Метрическое пространство X будем называть *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс мощности m, у которого все ненулевые расстояния равны $\lambda > 0$, будем обозначать $\lambda\Delta_m$. Пусть X — произвольное метрическое пространство, m — кардинальное число, не превосходящее мощности X. Обозначим через $\mathcal{D}_m(X)$ семейство всевозможных разбиений пространства X на m непустых подмножеств. Пусть $A, B \subset X$ — произвольные непустые подмножества X, тогда положим

$$|AB| = \inf\big\{|ab| : a \in A, b \in B\big\}.$$

Для разбиения $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ определим следующие величины:

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i;$$

$$\alpha(D) = \inf\big\{|X_iX_j| : i \neq j\big\}.$$

Теорема 3 ([1]). Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\big\{\operatorname{diam} D, \lambda - \alpha(D), \operatorname{diam} X - \lambda\big\}.$$

Основные результаты

Для каждого натурального $n \geqslant 2$ обозначим через P_n множество вершин правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность S^1. Отметим, что P_2 — пара диаметрально противоположных точек. Наделим множества P_n метрикой, индуцированный с окружности. Для $m, n \geqslant 2$ положим $p_{m,n} = d_{GH}(P_m, P_n)$.

Предложение 1 ([2]). Для любого $m \geqslant 2$ выполняется

$$d_{GH}(S^1, P_m) = \frac{\pi}{m};$$

$$d_{GH}(P_m, P_{m+1}) = \frac{\pi}{m+1}.$$

Лемма 1. Пусть $n \geqslant 2$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $i, j = 1, 2, \dots, n$ и $k, l = 0, 1, \dots, p-1$ выполняется

$$\Big|\min\big(|i-j|, n - |i-j|\big) - \min\Big(\Big|i - j + \frac{k-l}{p}\Big|, n - \Big|i - j + \frac{k-l}{p}\Big|\Big)\Big| \leqslant \frac{|k-l|}{p}.$$

Теорема 4. Пусть $2 \leqslant n \leqslant m$ и m делится на n без остатка, тогда

$$p_{n,m} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m}.$$

Доказательство. Пусть $u_1, \dots, u_n$ — вершины P_n, а $v_1, \dots, v_m$ — вершины P_m. Докажем, что $p_{n,m} \geqslant \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m}$. По теореме 2,

$$p_{n,m} \geqslant d_{GH}\big(\mathbf{U}(P_m), \mathbf{U}(P_n)\big).$$

Заметим, что $\mathbf{U}(P_m), \mathbf{U}(P_n)$ — симплексы мощности m и n с попарными ненулевыми расстояниями $\frac{2\pi}{m}$ и $\frac{2\pi}{n}$ соответственно. Тогда по теореме 3,

$$p_{n,m} \geqslant d_{GH}\big(\mathbf{U}(P_m), \mathbf{U}(P_n)\big) = \frac{1}{2}\max\Big\{\frac{2\pi}{m}, \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{m}\Big\} \geqslant \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m}.$$

Докажем теперь оценку сверху. Пусть $m = pn$, где $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m} = \frac{(p-1)\pi}{pn}$. Построим соответствие $R \in \mathcal{R}(P_n, P_m)$ такое, что $\operatorname{dis} R \leqslant \frac{2(p-1)\pi}{pn}$:

$$R = \bigcup_{i=1}^{n}\big\{(u_i, v_{pi-k}) : k = 0, 1, \dots, p-1\big\}.$$

Тогда по лемме 1 для любых $i, j = 1, 2, \dots, n$ и $k, l = 0, 1, \dots, p-1$ выполняется

$$\big|d(u_i,u_j) - d(v_{pi-l}, v_{pj-k})\big| = \Big|\frac{2\pi}{n}\min\big(|i-j|, n - |i-j|\big) - \frac{2\pi}{pn}\min\big(|pi - pj + k - l|, pn - |pi - pj + k - l|\big)\Big| \leqslant \frac{2\pi|k-l|}{pn} \leqslant \frac{2(p-1)\pi}{pn}.$$

Таким образом, $\operatorname{dis} R \leqslant \frac{2(p-1)\pi}{pn}$, и это завершает доказательство.

Теорема 5. Пусть $m \geqslant 2$, тогда

$$p_{2,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}, & \text{если } m \text{ — нечетное;} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } m \text{ — четное.} \end{cases}$$

Теорема 6. Пусть $m \geqslant 3$, а r — остаток от деления m на 3, тогда

$$p_{3,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } r = 0; \\ \frac{\pi}{3} - \frac{r\pi}{3m}, & \text{если } r \neq 0. \end{cases}$$

Литература

1 Григорьев Д. С., Иванов А. О., Тужилин А. А. Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов. Чебышевский сб., 20:2 (2019), 108-122.

2 Lim S., Memoli F., Smith Z. The Gromov–Hausdorff distance between spheres. ArXiv e-prints, arXiv:2105.00611v5, 2022.

3 Ji Y., Tuzhilin A. A. Gromov–Hausdorff Distance Between Segment and Circle . ArXiv e-prints, arXiv:2101.05762v1, 2021.

4 Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

Стабилизация вложенных регулярных кривых на нормированных плоскостях

Владимир Хачатуров

vladimir.khachaturov@math.msu.ru

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Кафедра Дифференциальной Геометрии и Приложений

Аннотация

Классическая задача Штейнера состоит в построении связного графа минимальной длины, соединяющего данные точки плоскости. В общем случае такая задача является NP-полной. Однако можно показать, что при достаточно плотном расположении граничных точек на регулярной кривой, последовательная вдоль кривой ломаная на этих точках будет кратчайшим деревом Штейнера. Данный факт упрощает построение кратчайших деревьев на регулярных кривых и является предметом данного исследования.

Введение

Простейший пример задачи Штейнера — задача Ферма, состоящая в поиске точки P, сумма расстояний от которой до заданных трёх точек плоскости минимальна.

В более общем случае задача построения кратчайшего дерева для набора граничных точек является **NP-полной**. Однако можно существенно упростить задачу, введя условия на положение точек граничного множества.

Так, Ярник и Кёсслер в своих работах разобрали случай, когда граничное множество представляет собой вершины правильного n-угольника. В результате выяснилось, что для $n = 6$ и $n > 12$ минимальное дерево Штейнера не имеет вершин помимо граничных, а само дерево представляет собой множество сторон многоугольника без любой одной. В случае $n < 6$ минимальное дерево содержит дополнительные вершины. Этот результат позже был улучшен Ду и Хвангом, которые показали, что для $6 < n < 13$ не граничных точек в минимальном дереве нет, и классификация минимальных деревьев на правильных n-угольниках тем самым была завершена.

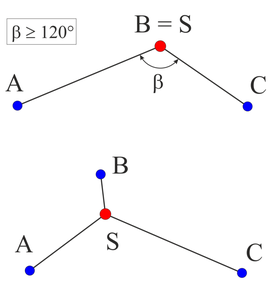


Рис. 1: Решение задачи Ферма

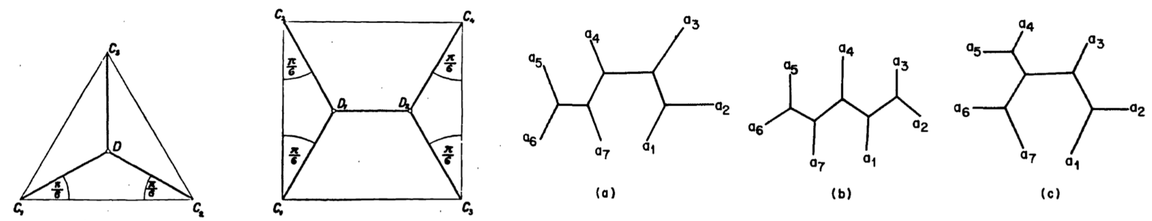


Рис. 2: Классификация SMT на n-угольниках, Топология локально-минимального дерева на 7 вершинах

Свойства точек Штейнера в пространствах **неевклидовых выпуклых норм** подробно исследует в своих работах Сванепоел. Оказывается, все кратчайшие деревья на $\mathbb{R}^n$ со строго выпуклой гладкой нормой имеют общую локальную структуру, схожую со структурой решения задачи Ферма. Например, внутренние вершины кратчайшего дерева в такой норме имеют степень либо два, либо три. При этом в вершинах степени два рёбра стыкуются под углом $180°$. В любой же вершине степени три угол между любыми двумя рёбрами оказывается строго меньше $\Theta < 180°$. Дальше мы будем рассматривать деревья на плоскости именно с такой нормой.

Отметим также, что плоские линейные деревья, имеющие подобную локальную структуру, не обязаны быть кратчайшими, но достаточно малые окрестности каждой точки такого дерева представляют собой кратчайшие деревья. Деревья, обладающие такими локальными свойствами, называются **локально минимальными**. Часто построить локально минимальное дерево значительно легче, чем проверить, что оно является кратчайшим. Однако мы можем модифицировать локально минимальное дерево путём добавления на его рёбра дополнительных граничных вершин степени два так, чтобы оно стало кратчайшим. Этот процесс называется **стабилизацией** локально минимального дерева.

Постановка задачи

Будем рассматривать на плоскости со строго выпуклой гладкой всюду вне нуля нормой вложенную регулярную кривую в качестве локуса граничных точек. При достаточно плотном разбиении кривой угол между соседними точками такого разбиения будет больше некоторого наперёд заданного. Ломаная, построенная последовательно на точках этого разбиения, будет локально минимальным деревом. Хотелось бы понять, при каких условиях эта ломаная будет кратчайшим деревом. Оказывается, при достаточно плотном расположении вершин ломаной на кривой и, соответственно, достаточно маленьких рёбрах этой ломаной, она будет кратчайшим деревом Штейнера.

Структура доказательства

- Непрерывную кривую в $\mathbb{R}^m$ назовем **хорошей**, если любой треугольник, построенный на трех ее последовательных точках, имеет в средней вершине угол, строго больший $\frac{\Theta+\pi}{2}$.
- Пусть Λ — угол величины Θ. Пусть M — конечное непустое множество внутренних вершин произвольного локально минимального дерева G, и M лежит в Λ. Тогда существует вершина w, не принадлежащая множеству M, лежащая в Λ и смежная некоторой вершине v из M.
- Для множества точек L в $\mathbb{R}^2$, лежащих на хорошей кривой, вписанная в неё последовательная ломаная, построенная на этих точках, является единственным локально минимальным деревом, соединяющим данную границу.
- Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — регулярная вложенная кривая. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $t \in [a, b]$ верно $\gamma^{-1}\Big(U_\varepsilon(\gamma(t))\Big) = [t_{0_1}, t_{0_2}]$ и $\gamma[t_{0_1}, t_{0_2}]$ — хорошая. Иными словами, мы можем подобрать радиус окрестности так, что в такой окрестности каждой точки будет лежать ровно один сегмент хорошей кривой.
- На каждом ребре A_iA_{i+1} некоторой ломаной L с точками на регулярной кривой γ построим треугольник с основанием A_iA_{i+1} и вершиной B_i, лежащей на кривой. Выберем B_i так, что треугольник $\triangle A_iA_{i+1}B_i$ — равнобедренный для евклидовой нормы. Ломаную $A_1B_1A_2 \dots B_{n-1}A_n$ назовем **измельчением ломаной** L и обозначим через L^1. Ломаную L^p, определенную по индукции как $L^p = (L^{p-1})^1$, назовем **p-измельчением правильной ломаной** L.

Литература

[1] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, с. 424.

[2] M.R. Garey, R. L. Graham, and D. S. Johnson, *The Complexity of Computing Steiner Minimal Trees*, SIAM Appl. Math., 32 (1977), 835–859.

[3] V. Jarnik and M. KSssler, O minimfilnich grafech obbsahujicich n dan ,ch bodu, asopis P st. Mat. Fys. 63 (1934), 223-235.

[4] D. Z. Du, F. K. Hwang, and J. F. Weng, Steiner Minimal Trees for Regular Polygons. Discrete Comput Geom 2:65-84 (1987).

[5] Konrad J. Swanepoel, *The Fermat-Torricelli problem in normed planes and spaces*. Journal of Optimization Theory and Applications, 2007, с. 24.

[6] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Стабилизация локально минимальных деревьев*, Матем. заметки, 2009, т. 86, N 4, с. 512–524.

[7] Иванов А.О., Съедина О.А, Тужилин А.А. *Структура минимальных деревьев Штейнера в окрестностях лунок их ребер*. Матем. заметки, 2012, т. 91, N 3, с. 353–370.

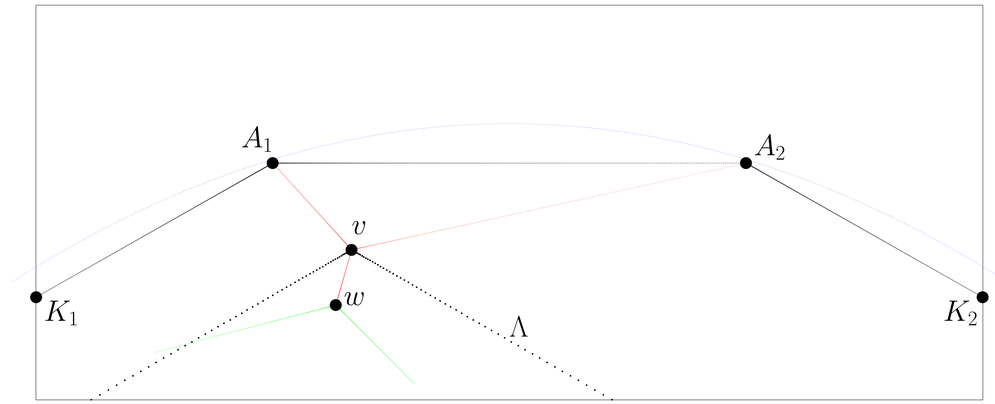


Рис. 3: Участок хорошей кривой с вершиной v

- Ломаную, каждое ребро которой отсекает участок кривой, являющийся хорошим, и соседние звенья ломаной составляют между собой углы больше или равные $\frac{\Theta+\pi}{2}$, назовём *правильной*.
- Пусть L — правильная ломаная для γ, состоящая из $n > 1$ вершин. Пусть n_p обозначает количество вершин ломаной L^p. Тогда $n_p < 2^p\, n$.
- *Плотность* $\sigma(G)$ линейного графа $G \subset \mathbb{R}^m$ — максимум длин ребер графа. *Разреженность* множества $V \subset \mathbb{R}^m$ — это $D(M) = \sup\Big\{|M_1M_2| \;\Big|\; M = M_1 \sqcup M_2,\ M_1 \neq \emptyset, M_2 \neq \emptyset\Big\}$. Тогда для любой правильной ломаной L и любого натурального p имеем $D(V(L^p)) \leq C\frac{\sigma(L)}{(\sqrt{3})^p}$, где $V(L^p)$ обозначает множество вершин ломаной L^p (рассматриваемой как геометрический граф), а $C > 0$ – константа, зависящая только от заданной нормы $||\cdot||$ объемлющего пространства $\mathbb{R}^m$.
- Пусть L — правильная ломаная. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует p_0, что для любого натурального $p > p_0$ расстояние от любой вершины v произвольного дерева $G \in \mathrm{SMT}\Big(V(L^p)\Big)$ до $V(L^p)$ не превосходит ε.

Формулировка основной теоремы

Пусть $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая, вложенная в двумерное пространство со строго выпуклой гладкой всюду вне нуля нормой $||\cdot||$. Пусть дано разбиение $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ отрезка $[a, b]$. Обозначим L ломаную $\gamma(t_0)\gamma(t_1)\cdots\gamma(t_n)$. Тогда существует $p_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $p \geq p_0, p \in \mathbb{N}$, p-измельчение L^p является *единственным* кратчайшим деревом в данной норме для своей границы $V(L^p)$.

Благодарности

Данная работа обобщает и углубляет идеи, предложенные ранее М.Полоновской для случая евклидовой нормы.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А. А. Тужилину и профессору А. О. Иванову за постановку задачи, поддержку, внимание к работе и конструктивные замечания.

Алгоритм построения прямоугольной диаграммы поверхности Зейферта.

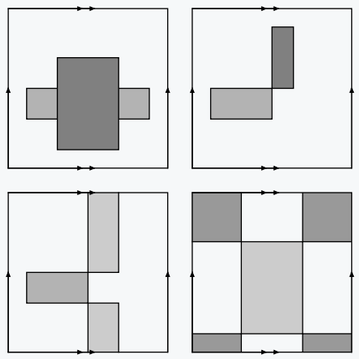
Введение

Прямоугольные диаграммы полезны для изучения узлов. С их помощью решаются некоторые алгоритмические вопросы (монотонное упрощение [1], распознавание лежандровых узлов [2, 3]). Также прямоугольные диаграммы полезны для вычисления гомологий Хегора —Флоера [4, 5].
Естественно расширить этот формализм и на поверхности. В работе Дынникова —Прасолова [6] введено понятие прямоугольной диаграммы поверхности и доказано, что любой класс изотопии компактной поверхности (с краем или без) в $\mathbb{S}^3$ можно представить с помощью такой диаграммы.
В настоящей работе, предложен эффективный алгоритм, который является комбинаторной версией классической процедуры построения поверхности Зейферта по плоской диаграмме [7].

Определение.

Прямоугольная диаграмма зацепления — такой конечный набор точек R в $\mathbb{T}^2$, что любой меридиан и любая параллель тора содержат либо две, либо ни одной точки из R.
Сложность прямоугольной диаграммы зацепления R — количество вершин в этой диаграмме.
Прямоугольник — подмножество тора $\mathbb{T}^2$ вида $[\theta_1;\theta_2]\times[\varphi_1;\varphi_2]$.
Произвольные прямоугольники r и $\widetilde{r}$ называют совместимыми, если множество $r\cap\widetilde{r}$ либо пусто, либо является подмножеством вершин прямоугольника r (и тогда таких вершин одна, две или четыре), либо является прямоугольником, не содержащим вершин прямоугольников r и $\widetilde{r}$ (см. рис.).

Рис.: Примеры совместимых прямоугольников



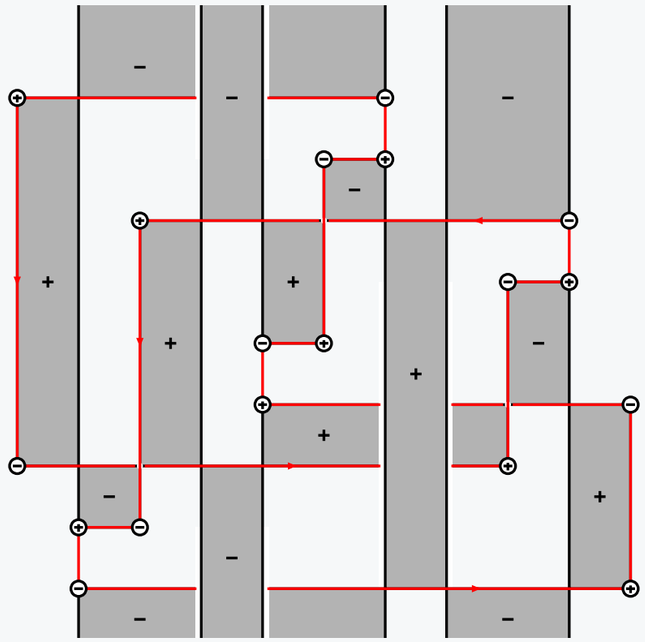
Определение. [Дынников —Прасолов]

Прямоугольная диаграмма поверхности — такой набор прямоугольников $\Pi=\{r_1,\dots,r_k\}$, что для любых $i\neq j$ прямоугольники r_i и r_j совместимы и любой меридиан $\{\theta\}\times\mathbb{S}^1$ и любая параллель $\mathbb{S}^1\times\{\varphi\}$ содержат либо ровно две, либо ни одной свободной вершины, где свободная вершина диаграммы Π — вершина, принадлежащая ровно одному прямоугольнику $r\in\Pi$.

Определение.

Край прямоугольной диаграммы поверхности — набор свободных вершин диаграммы Π. Будем обозначать край через $\partial\Pi$.
Легко видеть, что край прямоугольной диаграммы поверхности является прямоугольной диаграммой зацепления.
Диаграммы зацепления и поверхностей можно ориентировать. Для этого надо каждой свободной вершине и каждому прямоугольнику приписать знак ±1. При этом ориентация поверхности и ее края должны быть согласованы (см. рисунок).

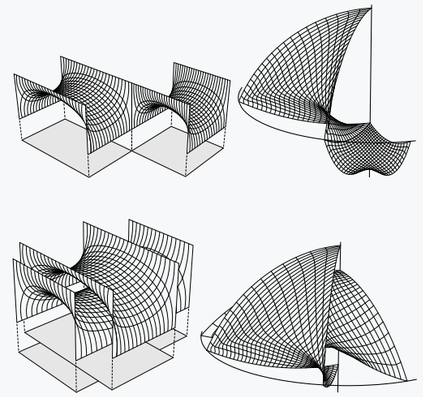
Рис.: Ориентированная прямоугольная диаграмма поверхности.



Сложность прямоугольной диаграммы поверхности — количество прямоугольников в этой диаграмме.

Реализация в пространстве.

С каждой прямоугольной диаграммой поверхности или зацепления мы ассоциируем кусочно-гладкую поверхность или, соответственно, зацепление в $\mathbb{S}^3$ (смотри [6]).
Сопоставим вершине v диаграммы R образ дуги $v\times[0;1]\subset\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times[0;1]$ в $\mathbb{S}^3=\mathbb{S}^1*\mathbb{S}^1$. Прямоугольной диаграмме зацепления R при этом сопоставляется объединение дуг $\widehat{R}=\bigcup_{v\in R}\widehat{v}$.
Прямоугольнику $r=[\theta_1;\theta_2]\times[\varphi_1;\varphi_2]$ сопоставляется некоторый диск $\widehat{r}$, лежащий в тетраэдре $[\theta_1;\theta_2]*[\varphi_1;\varphi_2]$, с границей $\{\theta_1;\theta_2\}*\{\varphi_1;\varphi_2\}$. Причем, если Π — ориентированная прямоугольная диаграмма поверхности, то $\widehat{\Pi}=\bigcup_{r\in\Pi}\widehat{r}$ будет ориентированной C^1-гладкой поверхностью с кусочно-гладким краем $\partial\widehat{\Pi}=\widehat{\partial\Pi}$. Конкретный рецепт сопоставления указан в [6].



Теорема [8]

Существует алгоритм, который по произвольной прямоугольной диаграмме зацепления R сложности m строит ориентированную прямоугольную диаграмму Π поверхности Зейферта для этого зацепления сложности не выше $2m^4$, причем $\partial\Pi$ получается из R не более чем $\frac{m^2}{2}$ стабилизациями.
Для выполнения алгоритма требуется не более $O(m^6)$ арифметических операций, операций сравнения и присваивания.

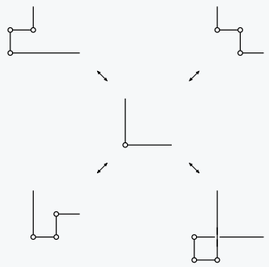
Чернавских Михаил
mike.chernavskikh@gmail.com
МГУ им. Ломоносова

Алгоритм построения прямоугольной диаграммы поверхности Зейферта.

Определение.

Стабилизация — такая замена прямоугольной диаграммы зацепления R на другую прямоугольную диаграмму R', что $|R'| = |R| + 2$ и симметрическая разность $R \triangle R'$ имеет вид (θ_i, φ_j), $i, j = 1, 2$, причем прямоугольник $[\theta_1; \theta_2] \times [\varphi_1; \varphi_2]$, $\theta_1 < \theta_2$, $\varphi_1 < \varphi_2$, не содержит других вершин R и R'.

Рис.: Примеры стабилизаций.



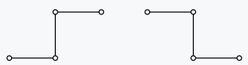
Обозначим через G ориентированный граф, вершинами которого являются перекрестки и вершины диаграммы R, а ребрами — ребра диаграммы R, подразбитые перекрестками.

Определение

Окружность Зейферта на диаграмме R — замкнутый ориентированный путь в графе G, поворачивающий в каждом перекрестке на $\pi/2$.

Определение.

Назовём окружность Зейферта петляющей, если в ней нет участков, изображенных на рисунке и никакие два вертикальных ребра не лежат на одном меридиане.

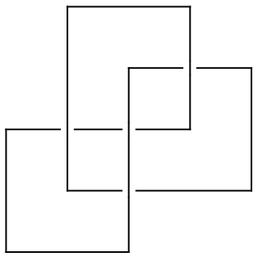


Описание алгоритма.

Наш алгоритм состоит из двух этапов:

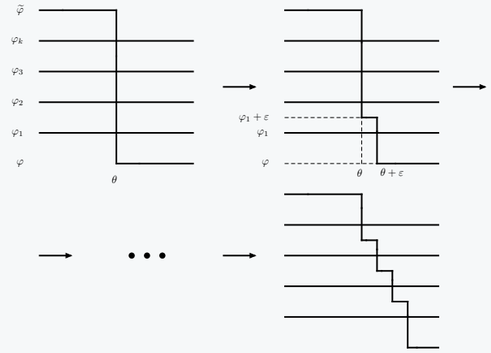
1. Применение некоторого числа стабилизаций, чтобы каждая окружность Зейферта стала петляющей.
2. Затягивание окружностей Зейферта C_i дисками, представленными объединеним прямоугольников.

Рис.: Прямоугольная диаграмма трилистника 3_1.



Шаг 1

Чтобы избежать вертикальных ребер на одном меридиане, применим стабилизации как указано на рисунке



Если в окружности Зейферта встречается запрещенный участок, применим следующую стабилизацию.

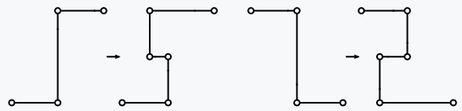
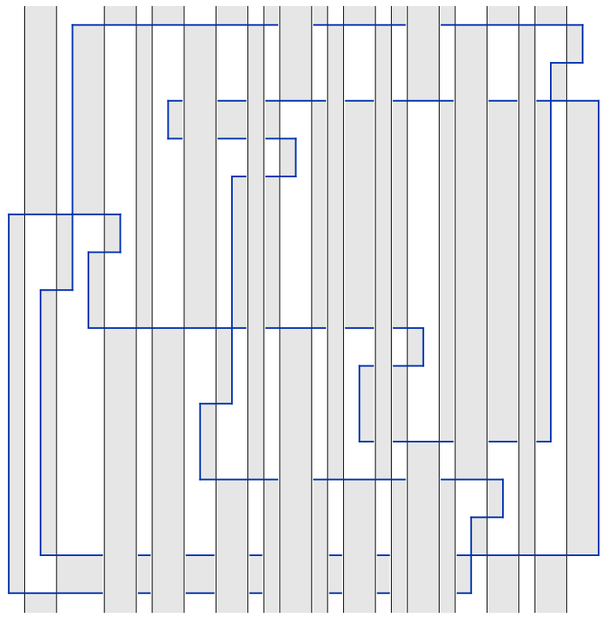


Рис.: Диаграмма поверхности Зейферта для трилистника.



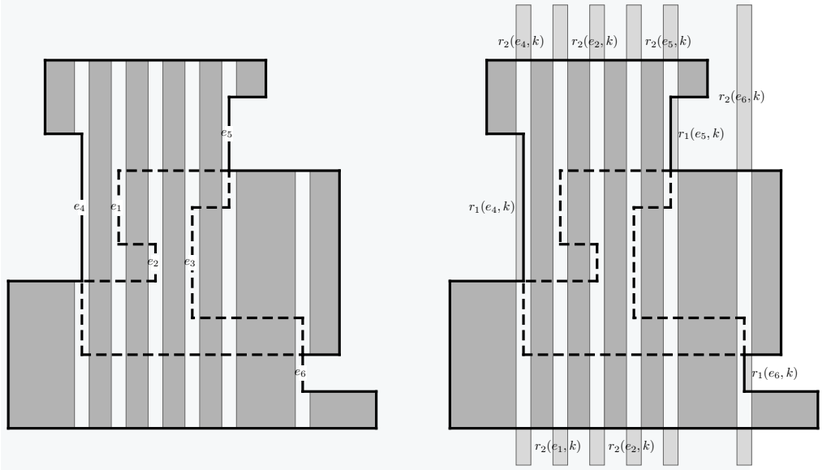
Шаг 2.

Перенумеруем окружности Зейферта $C_1, \dots C_n$ так, чтобы для любых $i < k$ выполнялось $D_k \not\subset D_i$. Для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ положим $\varepsilon_k = \frac{k}{2(n+1)}$.

Будем по индукции строить наборы попарно совместимых прямоугольников Π_i со следующими свойствами:

1. $\partial \Pi_i = V(C_i)$, где $V(C_i)$ — множество вершин C_i.
2. Для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ все прямоугольники объединения $\bigcup_{i \leqslant k} \Pi_i$ попарно совместимы.

Из диска D_i, затягивающего окружность Зейферта C_i, вырежем вертикальные ε_i-окрестности ребер, попавших внутрь D_i и некоторых граничных ребер C_i. Полученное множество есть дизъюнктное объединение прямоугольников (см. рис. слева). За каждое, попавшее внтурь, ребро добавим прямоугольник r_2. За каждое граничное ребро добавим два прямоугольника r_1, r_2.



Список литературы

[1] I.Dynnikov. Arc-presentations of links: Monotonic simplification, Fund.Math. 190 (2006), 29–76; arXiv:math/0208153.
[2] Dynnikov I., Transverse-Legendrian links, Siberian Electronic Mathematical Reports, 16 (2019), 1960–1980.
[3] Dynnikov I., Prasolov M. Rectangular diagrams of surfaces: distinguishing Legendrian knots. J. Topol., 2021, Volume 14, Issue 3, Pages 701–860, arXiv:1712.06366.
[4] Ozsvath P.S. and Szabo Z. Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. Ann. of Math. (2), 159(3):1027–1158, 2004.
[5] Manolescu C., Ozsváth P., Sarkar S. A combinatorial description of knot Floer homology. Ann. of Math. (2) 169 (2009), no. 2, 633–660.
[6] Dynnikov I., Prasolov M. Rectangular diagrams of surfaces: representability, Matem. Sb. 208 (2017), no. 6, 55–108; translation in Sb. Math. 208 (2017), no. 6, 781–841, arXiv:1606.03497.
[7] Seifert H. Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. 110, 571–592 (1935).
[8] М. М. Чернавских, “Алгоритм построения прямоугольной диаграммы поверхности Зейферта”, Сиб. матем. журн., 63:3 (2022), 699–711

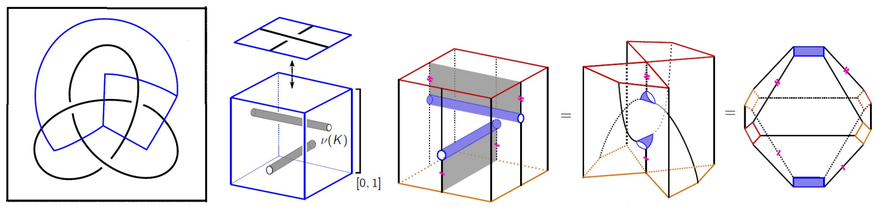
Чернавских Михаил
mike.chernavskikh@gmail.com
МГУ им. Ломоносова

Кластерные алгебры и объемы гиперболических узлов

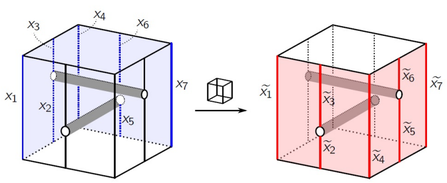
Гиперболические узлы

Узел $K \subset S^3$ называется гиперболическим, если его дополнение $M^3 = S^3 \backslash \nu(K)$ является гиперболическим многообразием. Одним из инвариантов таких узлов является гиперболический объем. Его можно посчитать, например, зная триангуляцию многообразия на идеальные тетраэдры.

Разбиение M^3 на идеальные октаэдры



Триангуляция M^3 и кластерные переменные



$$(x_1, x_2, \ldots, x_7) \mapsto (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_7)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ \frac{x_1x_3x_5+x_3x_4x_5+x_1x_2x_6}{x_2x_4} \\ \frac{x_1x_3x_4x_5+x_3x_4^2x_5+x_1x_3x_5x_7+x_1x_4x_5x_7x_1x_2x_4x_6}{x_2x_4x_6} \\ \frac{x_3x_4x_5+x_3x_5x_7+x_2x_6x_7}{x_4x_6} \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

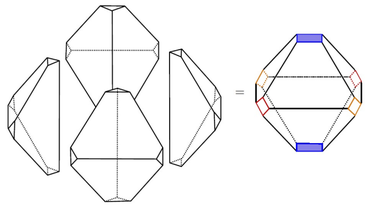
Для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ определим оператор

$$R_i^{\pm 1}(X) = (x_1, \ldots, x_{3i-3}, R^{\pm 1}(x_{3i-2}, \ldots, x_{3i+4}), x_{3i+5}, \ldots, x_{3n+1})$$

Семейство операторов R_i удовлетворяют соотношениям группы кос:

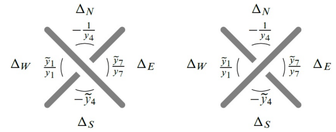
$$R_iR_{i+1}R_i = R_{i+1}R_iR_{i+1} \qquad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2,$$
$$R_iR_j = R_jR_i \qquad \text{при } |i-j| > 1.$$

Связь с кластерными алгебрами



$$\mathrm{cVol}(M) = \mathrm{Vol}(M) + \mathrm{i}\,\mathrm{CS}(M)$$

$$\frac{c_{03}c_{12}}{c_{02}c_{13}} = \pm z, \qquad \frac{c_{01}c_{23}}{c_{03}c_{12}} = \pm\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$



		$\overset{1}{\mathsf{R}}$			$\overset{1}{\mathsf{R}}^{-1}$		
$\triangle$	Volume	$\mathrm{sgn}(\triangle)$	$z_\triangle$	$\frac{1}{1-z_\triangle}$	$\mathrm{sgn}(\triangle)$	$z_\triangle$	$\frac{1}{1-z_\triangle}$
$\triangle_N$	$D\left(-\frac{1}{y_4}\right)$	$-$	$-\frac{x_2x_6}{x_3x_5}$	$\frac{x_3x_5}{x_4x_c}$	$+$	$-\frac{x_3x_5}{x_2x_6}$	$\frac{x_2x_6}{x_4x_c}$
$\triangle_S$	$D(-\tilde{y}_4)$	$-$	$-\frac{\tilde{x}_3\tilde{x}_5}{x_3x_5}$	$\frac{x_3x_5}{\tilde{x}_4x_c}$	$+$	$-\frac{\tilde{x}_2\tilde{x}_6}{x_2x_6}$	$\frac{x_2x_6}{x_c\tilde{x}_4}$
$\triangle_W$	$D\left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1}\right)$	$+$	$\frac{x_2\tilde{x}_3}{x_3x_5}$	$-\frac{x_3x_5}{x_1x_c}$	$-$	$\frac{\tilde{x}_2x_3}{x_2x_6}$	$-\frac{x_2x_6}{x_1x_c}$
$\triangle_E$	$D\left(\frac{\tilde{y}_7}{y_7}\right)$	$+$	$\frac{\tilde{x}_5x_6}{x_3x_5}$	$-\frac{x_3x_5}{x_cx_7}$	$-$	$\frac{x_5\tilde{x}_6}{x_2x_6}$	$-\frac{x_2x_6}{x_cx_7}$

Пример вычислений

Рассмотрим узел 4_1 и его представление в виде косы $(\sigma_3^{-1}\sigma_2)^2\sigma_1^{-1}$.

$$X^1 = \begin{pmatrix} \alpha-\beta\gamma \\ \beta \\ 1 \\ -\alpha+\beta\gamma+\beta \\ \beta \\ -1 \\ \alpha-\beta(\gamma+2) \\ (\lambda-1)(\alpha-3\beta) \\ (\gamma-1)(\lambda-1) \\ \alpha(-\gamma\lambda+\lambda-1)+\beta(3(\gamma-1)\lambda+\gamma+2) \\ \alpha\lambda-\beta(2\lambda+1) \\ \gamma-\gamma\lambda \\ \alpha((\gamma-1)\lambda+\gamma+1)-\beta(2\gamma(\lambda+2)-3\lambda+2) \end{pmatrix}$$

$$X^1 \xrightarrow{R_3^{-1}} X^2 \xrightarrow{R_2} X^3 \xrightarrow{R_3^{-1}} X^4 \xrightarrow{R_2} X^5 \xrightarrow{R_1^{-1}} X^6.$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и λ — корень уравнения $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Вычисляя, получаем комплексный объем узла 4_1, равный $\mathrm{i} \cdot 2.02988\ldots$ С помощью кластерного подхода посчитаны комплексные объемы узлов 5_2 и 6_1.

$$g_{5_2}(\lambda) = 1 - \lambda^2 + \lambda^3$$

Литература

- J. Cho, S. Yoon, C. K. Zickert, On the Hikami-Inoue conjecture, Algebraic and Geometric Topolology 20(1) (2020), 279–301. Preprint version is available at https://arxiv.org/abs/1805.11841.
- K. Hikami, R. Inoue, Braids, volume and cluster algebras, Algebraic and Geometric Topology, 2015, 2175–2194. Preprint version is available at https://arxiv.org/abs/1304.4776.

Богдан Чужинов

b.chuzhinov@g.nsu.ru

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Полные проективные слоения с нулевой трансверсальной кривизной

Основной результат

Теорема о существовании минимальных множеств

Пусть (M, F) — произвольное полное проективное слоение коразмерности $q \geq 2$ на n-мерном гладком многообразии M. Предположим, что трансверсальная кривизна (M, F) равна нулю.

Тогда существует минимальное множество этого слоения.

Серия примеров

Определим отображения:

$$\theta : GL(3, \mathbb{R}) \to PGL(3, \mathbb{R}) = GL(3, \mathbb{R})/\mathbf{C}$$

– проекция на фактор-группу,

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$$

– двулистное накрытие проективного пространства сферой, а

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^2 : w \mapsto \frac{w}{|w|} \ \ \forall \ w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ \ \mu > 1$$

Обозначим через $\gamma_A = \theta(A) \in PGL$ — проективное преобразование, $A \in GL(3, \mathbb{R})$, а через Γ – группу проективных преобразований с образующей γ_A.

Определим слоение надстройкой преобразования γ_A. Действие $\Phi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2) \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2$, такое что

$$\Phi(n, (t, z)) := (t + n, (\gamma_A)^n(z)) \ \ \forall \ n \in \mathbb{Z}.$$

Положим $M = (\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2)/\mathbb{Z}$ — 3-многообразие без края. Обозначим через $k : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2 \to M$ — фактор-отображение, являющееся регулярным накрывающим отображением.

Пусть $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}^1 \times \{z\} \,|\, z \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ — тривиальное слоение произведения $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2$. Так как действие группы $\mathbb{Z}$ сохраняет это слоение, то на M индуцируется слоение (M, F), слои которого являются образами слоев слоения $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2, \mathbb{F})$, причем слои слоения $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2, \mathbb{F})$ накрывают соответствующие слои слоения (M, F).

Так как слоение (M, F) одномерное, то любой его замкнутый слой — одномерное компактное подмногообразие без края, то есть окружность. Следовательно, любой незамкнутый слой диффеоморфен прямой $\mathbb{R}^1$.

При изменении μ действие группы Γ заменяется на топологически сопряженное, а слоение (M, F) заменяется изоморфным в категории слоений. Мы построили 1-параметрическое семейство неизоморфных слоений $(M, F) = (M, F)_\varphi$, зависящее от параметра $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Случай 1.

Если $\frac{\varphi}{\pi} \in \mathbb{Q}$, то существует **континуум минимальных множеств**, диффеоморфных окружности.

Среди них существует единственный изолированный компактный слой, остальные компактные слои образуют рациональные обмотки вложенного тора $\mathbb{T}^2 \subset M$.

Любой некомпактный слой диффеоморфен $\mathbb{R}^1$.

Случай 2.

Если $\frac{\varphi}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, то проективное слоение (M, F) имеет **нетривиальное минимальное множество**, диффеоморфное тору, инуцированное слоение на котором образовано иррациональными обмотками тора $\mathbb{T}^2 \subset M$, и **тривиальное минимальное множество,** содержащее единственный замкнутый слой, диффеоморфный окружности $\mathbb{S}^1$.

Остальные слои собственные и диффеоморфны прямой $\mathbb{R}^1$, причем каждый из них в замыкании содержит оба минимальных множества.

Пример

Пусть

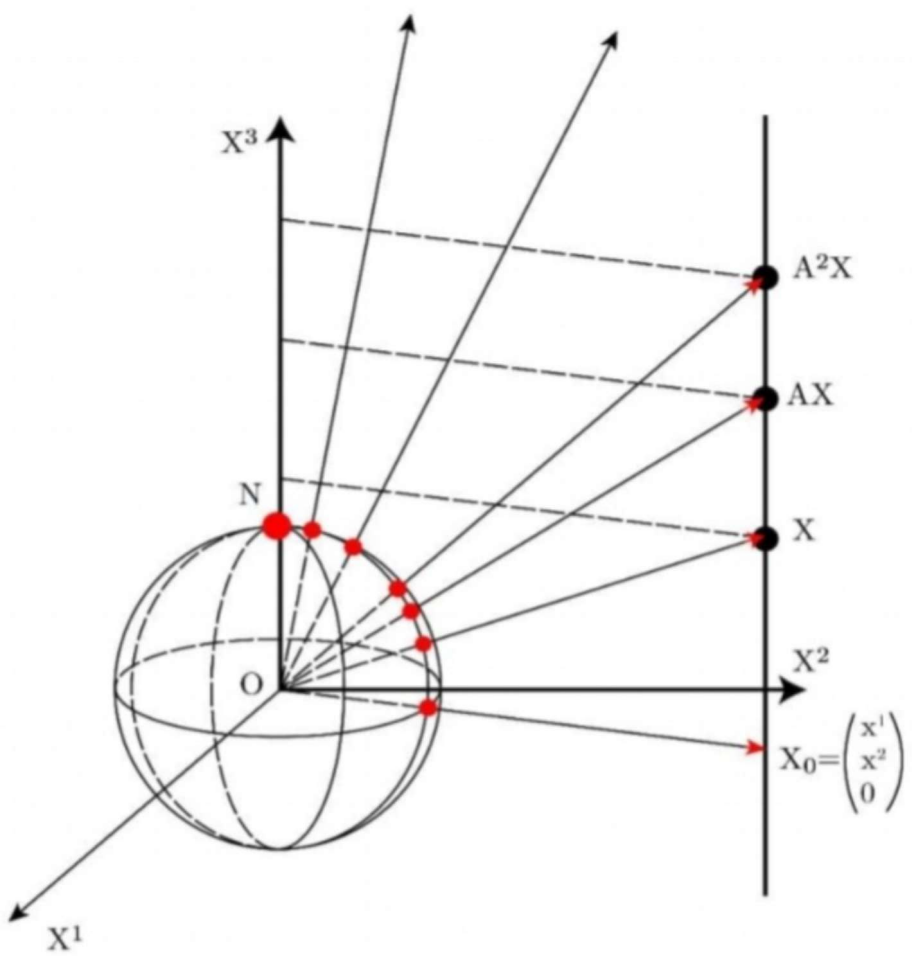
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ \mu > 1, \ X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}, \ X^3 > 0,$$

Тогда

$$AX = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \mu X^3 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$A^n X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \mu^n X^3 \end{pmatrix}.$$



Положим $z = f(\sigma(X)) \in \mathbb{RP}^2$. Пусть $N = f(X_0)$ — «северный полюс». Тогда и $(\gamma_A)^n.z \to N$ при $n \to \infty$.

Вектор $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет равенству $A^n X_0 = \mu^n X_0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$, поэтому «северный полюс» $N = f(\sigma(X_0)) = f(X_0)$ неподвижен относительно γ_A.

Таким образом, «северный полюс» $N = f(X_0)$ – изолированная неподвижная точка группы Г. Следовательно, $L_0 = k(pr_2^{-1}(N)) \cong \mathbb{S}^1$ — изолированный компактный слой слоения (M, F), диффеоморфный окружности $\mathbb{S}^1$.

Список литературы

- Аносов Д.В. Минимальное множество // Математическая энциклопедия. М.: Сов. энц., 1982. Т. 3. С. 690–691.
- Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Из-во МГУ, 1980.
- Жукова Н.И. Минимальные множества картановых слоений // Тр. МИАН. 2007. Т. 256, С. 115–147.
- Жукова Н.И. Глобальные аттракторы конформных слоений // Мат. сб. 2012. Т. 256, С. 115–147.
- Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979.
- Inaba T. An example of a flow on a non-compact surface without minimal set // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1999. V. 19, N 1. P. 31–33.
- Beniere J.C., Meigniez G. Flows without minimal set // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1999. V. 19, № 1. P. 21–30.

Юнусова Р.О, yunusova-ro@yandex.ru
НИУ Высшая школа экономики,
Нижний Новгород, 2022 г