Представляющие системы в пространствах аналитических функций

Определение

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$, состоящее из функций $f : M \to \mathbb{C}$, называется пространством с воспроизводящим ядром (RKHS), если функционал $\delta_\mu : f \mapsto f(\mu)$ непрерывен для любой точки $\mu \in M$.

Пусть $\mathcal{H}$ – RKHS. Тогда по теореме Рисса $\delta_\mu(f) = (f, K_\mu)$ для некоторого $K_\mu(z) \in \mathcal{H}$. Функция $K(z,\mu) = K_\mu(z)$ хранит очень много информации о гильбертовом пространстве.

Определение

Функция $K(z,\mu) = K_\mu(z)$ называется воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{H}$.

Между ядрами и функциональными гильбертовыми пространсвами есть взаимно-однознаное соответствие.

Пример

Ядро Коши (Сегё) $K(z,\mu) = \dfrac{1}{1-\overline{\mu}z}$ – воспроизводящее ядро пространства Харди

$H^2(\mathbb{D}) = \{f\text{– аналитическая в } \mathbb{D} : \sup\limits_{r<1} \int\limits_T |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta) < \infty\}$, где m – нормированная мера Лебега на окружности.

Определение

Система $\{x_n\}_{n\geq 1}$ элементов бесконечномерного банахова пространства X называется представляющей системой для X, если для любого элемента $x \in X$ существует последовательность $\{c_n\}_{n\geq 1}$, такая что

$$x = \sum_{n\geq 1} c_n x_n.$$

Заметим, что коэффициенты в разложении не обязаны определяться единственным образом – это отличает представляющие системы от базисов Шаудера.

Приложения в анализе и PDE

- Приближение произвольного элемента пространства функциями из какого-то класса - классическая задача анализа. Первый возникающий здесь вопрос - полнота системы. Вопрос о представляющих системах - промежуточный между полнотой и базисностью.
- Во многих пространствах аналитических функций не существует базисов Рисса из воспроизводящих ядер, поэтому вопрос о существовании представляющих систем становится интересным.
- Воспроизводящие ядра часто оказываются собственными функциями тех или иных операторов, например, ядра Коши - собственные функции операторов Теплица с антианалитическими символами, экспоненты - собственные функции дифференциальных операторов.

Вопрос

В каких пространствах существуют представляющие системы? Как их описать?

Теорема (П.А. Терехин и К.С. Сперанский, 2018)

Пусть $r_k \to 1-$, $0 < a \leq b < \infty$, $\lambda_n = \lambda_{k,j} = r_k e^{2\pi i j/n_k}$, $j = 0, \ldots, n_k - 1$ и $a/n_k \leq 1 - r_k \leq b/n_k$. Тогда $\mathcal{K}(\Lambda) = \{K_{\lambda_n}(z)\}_n$ есть представляющая система для $H^2(\mathbb{D})$.

Для доказательства теоремы используются тонкие методы функционального анализа.

Особенности доказательства

- Коэффициенты зависят от f нелинейно.
- Коэффициенты не находятся явно, утверждается лишь, что они существуют.
- Нет контроля скорости сходимости.

Теорема 1 (А.Д. Баранов, Т.Г. Батенёв, 2022)

Пусть $r_k \to 1-$, и $\Lambda = \{\lambda_{k,j} = r_k \exp(2\pi i j/n_k) : k \geq 1, j = 0, 1, \ldots, n_k - 1\}$.
Тогда существует C такое, что система $\mathcal{K}(\Lambda) = \{K_{\lambda_n}(z)\}_{\lambda_n \in \Lambda}$ есть представляющая для $H^p(\mathbb{D})$ для любого $p \in (1, \infty)$, если $n_k(1 - r_k) \geq C$.

Тимур Батенёв
СПбГУ

Вторая конференция математических центров России
5-11 ноября, 2022, Москва

Представляющие системы в пространствах аналитических функций

План доказательства теоремы 1

Основная идея доказательства – приближенение интегрла Коши, задающего функцию f, некоторой суммой.

- Пусть $I_j = I_{k,j} = [\exp((2j-1)\pi i/n_k), \exp((2j+1)\pi i/n_k)]$ и пусть $\zeta_j = \zeta_{k,j} = \exp(2\pi i j/n_k)$. Тогда

$$f(r_k z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - r_k\bar{\zeta}z} dm(\zeta) = \sum_{j=0}^{n_k-1} \int_{I_j} \frac{f(\zeta)}{1 - r_k\bar{\zeta}z} dm(\zeta).$$

Естественно приближать $f_{r_k}(z) = f(r_k z)$ с помощью $S(z) = \sum_{j=0}^{n_k-1} \frac{1}{1-r_k\bar{\zeta}_j z} \int_{I_j} f(\zeta)dm(\zeta)$. Можно получить оценку $\|f - S\|_{H^p} \le \gamma\|f\|_{H^p}$, $\gamma < 1$.

- Имея произвольную функцию $f \in H^p$ и выбирая r_{k_1} как описано выше, получаем функцию

$$f_1(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{n_{k_1}-1} \frac{1}{1 - r_{k_1}\bar{\zeta}_{k_1,j}z} \int_{I_{k_1,j}} f(\zeta)dm(\zeta), \quad \|f_1\|_{H^p} \le \gamma\|f\|_{H^p}, \gamma \in (0,1).$$

Далее, применим эту же процедуру к f_1 и найдем r_2 и $\|f_2\|_{H^p}$ такой что $\|f_2\|_{H^p} \le \gamma\|f_1\|_{H^p}$. Продолжая, получим последовательность k_l и последовательность коэффициентов $c_{l,j}$, таких что $\|f - \sum_{l=1}^{N}\sum_{j=0}^{n_{k_l}-1} \frac{c_{l,j}}{1-r_{k_l}\bar{\zeta}_{k_l,j}z}\|_{H^p} \le \gamma^N\|f\|_{H^p}$.

- Видим, что некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда $\sum_{l,j} \frac{c_{l,j}}{1-r_{k_l}\bar{\zeta}_{k_l,j}z}$ сходится к f. Используя ограниченность преобразования Коши в L^p при $1 < p < \infty$, можно доказть, что ряд сходится к f по H^p-норме.

Теорема 2 (А.Д. Баранов, Т.Г. Батенёв, 2022)

Пусть $R_k \to 1-, I_{k,j} = (\exp(2\pi i j/n_k), \exp(2\pi i(j+1)/n_k)), j = 0, \dots, n_k - 1, \zeta_{k,l,j} \in I_{k,j}, \ \Lambda = \{\lambda_{k,l,j} = R_k\zeta_{k,l,j}\}_{k,l,j}$.
Тогда $\mathcal{K}(\Lambda) = \{K_{\lambda_n}(z)\}_{\lambda_n\in\Lambda}$ есть представляющая система для $H^1(\mathbb{D})$ и $A(\mathbb{D})$, если $\log(1/(1-R_k)) = O(M_k)$ и $N_k(1-R_k) \ge C$ для некоторой константы C.

Весовые пространства Харди

Пусть последовательность $\beta = \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \beta_n > 0$ удовлетворяет условиям

$$\limsup\,(1/\beta_n)^{1/n} \le 1,$$
$$\limsup\,\beta_n^{1/n} \le 1.$$

Рассмотрим множество аналитических функций

$$\mathscr{H}_\beta = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\beta_n < \infty \right\}.$$

$\mathscr{H}_\beta$ – RKHS относительно нормы $\|f\|_\beta^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\beta_n$ с воспроизводящим ядром $K_\lambda^\beta(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{\lambda}^n}{\beta_n} z^n$.

Примеры

- $\beta_n = (n+1)^{-1}$ – пространство Бергмана,
- $\beta_n = 1$ – пространство Харди,
- $\beta_n = n+1$ – пространство Дирихле.

Теорема 3 (А.Д. Баранов, Т.Г. Батенёв, 2022)

В пространстве $\mathscr{H}_\beta$ существуют представляющие системы, состоящие из воспроизводящих ядер.

Список литературы

[1] P. Lefèvre E. Fricain, L.H. Khoi. Representing systems generated by reproducing kernels. *Indag. Math.*, 29(3):860–872, 2018.
[2] Yu.F. Korobeinik. Representative systems. *Uspekhi Mat. Nauk*, 36(1):73–126, 1981.
[3] P.A. Terekhin K.S. Speransky. A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space. *Indag. Math.*, 29(5):1318–1325, 2018.
[4] P.A. Terekhin K.S. Speransky. On existence of frames based on the Szegö kernel in the Hardy space. *Izv. VUZ. Matem.*, 2:57–68, 2019.
[5] T. Batenev A. Baranov. Representing systems of reproducing kernels in spaces of analytic functions, 2022. URL `https://arxiv.org/abs/2207.08985`.

Обобщенные гипергеометрические функции с целыми параметрическими разностями

Бахтин К.Е., Прилепкина Е.Г.

РНОМЦ "Дальневосточный центр математических исследований",

ДВФУ, б. Аякс, 10, Владивосток, Россия

Обобщенные гипергеометрические функции [1],[2] играют важную роль в решении задач теоретической физики, прикладной и теоретической математики, статистики и в инженерных науках. Обобщенная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$ {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} a_1,\ldots,a_{p+1} \\ b_1,\ldots,b_p \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n\cdots(a_{p+1})_n}{n!(b_1)_n\cdots(b_p)_n} z^n \tag{1} $$

(при условии, что этот ряд сходится). Знаменитая формула суммирования Минтона [11] для гипергеометрической функции с целыми параметрическими разностями (IPD) мотивировала исследования поведения такого типа гипергеометрических рядов [12], [6], [4]. В ряде работ [8, 9, 10] мы изучали формулы трансформации и суммирования для IPD гипергеометрических функций. В частности, в [10] дано полное описание группы двухчленных преобразований

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix} a,b,c,f+1 \\ d,e,f \end{matrix}\right) := {}_4F_3\left(\begin{matrix} a,b,c,f+1 \\ d,e,f \end{matrix}\middle| 1\right). \tag{2} $$

В настоящем докладе мы представляем результаты для функции ${}_4F_3(1)$, параметры которой содержат пару $\begin{bmatrix} f+m \\ f \end{bmatrix}$ (положительную целую параметрическую разность) и/ или $\begin{bmatrix} b \\ b+n \end{bmatrix}$ (отрицательную параметрическую разность), $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$. Указанные результаты основаны на совместных работах с Карпом Д.Б. и частично опубликованы в [14].

Theorem 1. *Пусть $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{f}_k = (f_1, \ldots, f_k) \in \mathbb{C}^k$. Тогда существуют рациональные функции $V_k = V_k(a, b, c, d, e, \boldsymbol{f}_k)$, $\mu_k = \mu_k(a, b, c, d, e, \boldsymbol{f}_k)$, такие, что*

$$ {}_{k+3}F_{k+2}\left(\begin{matrix} a, b, c, \boldsymbol{f}_k + 1 \\ d, e, \boldsymbol{f}_k \end{matrix}\right) = V_k \cdot {}_4F_3\left(\begin{matrix} a, b, c, \mu_k + 1 \\ d, e, \mu_k \end{matrix}\right). \qquad (3)$$

Значения V_k, μ_k определяются при помощи рекурсии

$$V_{k+1} = V_k(1 + U_{k+1}),\ \mu_{k+1} = \frac{\mu_k \eta_k (1 + U_{k+1})}{\eta_k + \mu_k U_{k+1}},$$

$$U_{k+1} = \frac{V_k^*}{V_k} \cdot \frac{abc(\boldsymbol{f}_k + 1)}{(\boldsymbol{f}_{k+1})(s-2)\mu_k^*},$$

$$\eta_k = \frac{abc}{ab + ac + bc - de + d + e + (s-2)(\mu_k^* - 1) - 1},\ s = d + e - a - b - c,$$

$\mu_k^* = \mu_k(a+1, b+1, c+1, d+1, e+1, \boldsymbol{f}_k)$, $V_k^* = V_k(a+1, b+1, c+1, d+1, e+1, \boldsymbol{f}_k + 1)$, $V_1 = 1$, $\mu_1 = f$.

Из Теоремы 1 вытекает, в частности, что

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix} a, b, c, f+2 \\ d, e, f \end{matrix}\right) = \left(1 + \frac{abc}{(s-2)f(f+1)}\right) {}_4F_3\left(\begin{matrix} a, b, c, \mu + 1 \\ d, e, \mu \end{matrix}\right), \qquad (4)$$

где

$$\mu = \frac{abc + (s-2)f(f+1)}{ab + ac + bc - de + d + e + (s-2)(2f+1) - 1}. \qquad (5)$$

В работе [10] мы предложили алгоритм получения формул суммирования для ${}_4F_3(1)$ с единичной параметрической разностью и с нелинейными ограничениями на параметр f. Теорема 1 позволяет распространить данный алгоритм на суммирование ${}_4F_3(1)$ с параметрической парой $\begin{bmatrix} f+m \\ f \end{bmatrix}$. Продемонстрируем этот подход следующим примером.

Предположим, что $d + e = a + b + c + 3$ и f удовлетворяет уравнению

$$\frac{s_3}{s_2 - (2-d)(1-e)} = \frac{s_3(s_2 - de + d + e + 2f) + (s_3 + f^2 + f)(2 - e - 2d + de - s_2)}{(s_3 + f^2 + f) + (1-d)(s_2 - de + d + e + 2f)}. \qquad (6)$$

Тогда

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix} a, b, c, f+2 \\ d, e, f \end{matrix}\right) = \frac{[(d-b-1)(d-c-1)\mu - a(d-b-c-1)\mu - s_3]\Gamma(d)\Gamma(e)((f)_2 + s_3)}{s_3(f)_2(d-a-1)(d-b-1)(d-c-1)\mu\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}, \qquad (7)$$

где

$$\mu = \frac{s_3 + f^2 + f}{s_2 - de + d + e + 2f},\ s_3 = abc,\ s_2 = ab + ac + bc. \qquad (8)$$

Theorem 2. *Пусть* $\alpha_k = (b-f)[a(c-f)+f(e-c-1)] + kf(e-f-1), \beta_k = a(c-k)+f(e-a-c-1+k)$. *Справедливо следующее трехчленное соотношение:*

$$A(k)_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,c,f+1\\ b+k+2,e,f\end{matrix}\right) + B(k)_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,c,f+1\\ b+k+1,e,f\end{matrix}\right) + C(k)_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,c,f+1\\ b+k,e,f\end{matrix}\right) = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A(k) &= -\frac{\alpha_k(k+1)(b-a+k+1)(b-c+k+1)}{(b+k+1)}, \\ B(k) &= \beta_k(b-a+k)(b-f+k+1)(e-a-c+k) \\ &\quad + ((k+1)(a-f)(b-c+k+1) - a(a-e+1)(b-f+k+1)) \\ &\qquad \times (\beta_k + k(b-c+k)), \\ C(k) &= -\alpha_{k+1}(b+k)(e-a-c-1+k). \end{aligned} \quad (10)$$

Theorem 3. *Существуют рациональные функции* $R_m = R_m(a,b,c,e,f)$, $Q_m = Q_m(a,b,c,e,f)$, *такие, что*

$$_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,c,f+1\\ b+m,e,f\end{matrix}\right) = R_m(a,b,c,e,f)_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,c,f+1\\ b+1,e,f\end{matrix}\right) + Q_m(a,b,c,e,f)\frac{\Gamma(e)\Gamma(e-a-c-1)}{\Gamma(e-a)\Gamma(e-c)}. \quad (11)$$

Функции R_m, Q_m *вычисляются рекурсивно по следующим формулам* :

$$R_m = -\frac{B(m-2)}{A(m-2)}R_{m-1} - \frac{C(m-2)}{A(m-2)}R_{m-2},$$

$$Q_m = -\frac{B(m-2)}{A(m-2)}Q_{m-1} - \frac{C(m-2)}{A(m-2)}Q_{m-2}$$

с начальными значениями $R_0 = 0$, $R_1 = 1$, $Q_0 = e-a-c-1+ac/f$, $Q_1 = 0$ *и* $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, *заданными в* (10).

Из Теоремы 3 и формулы суммирования Гаусса, например, следует равенство

$$_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,c,f+1\\ b+1,e,f\end{matrix}\right) = \frac{a(b-f)}{f(b-a)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}a+1,b,c\\ b+1,e\end{matrix}\right) + \frac{b(f-a)\Gamma(e)\Gamma(e-a-c)}{f(b-a)\Gamma(e-a)\Gamma(e-c)}.$$

Список литературы

[1] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special functions, Cambridge University Press, 1999.

[2] W.N. Bailey, Generalized hypergeometric series, Stecherthafner Service Agency, New York and London, 1964. Reprinted from: Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **32**, 1935.

[3] K-W.Chen, Clausen's Series ${}_3F_2(1)$ with Integral Parameter Differences, Symmetry, 2021; 13(10):1783.

[4] W. Chu, Partial fractions and bilateral summations. J. Math. Phys. 35, 2036 (1994).

[5] A. Ebisu, K. Iwasaki, Three-term relations for ${}_3F_2(1)$. J. Math. Anal. Appl. 2018, 463, 593–610.

[6] G. Gasper, Summation formulas for basic hypergeometric series. SIAM J. Math. Anal. 12, 196–200 (1981).

[7] C. Krattenthaler, K. Srinivasa Rao, On group theoretical aspects, hypergeometric transformations and symmetries of angular momentum coefficients, Symmetries in Science XI (2005), 355–375, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[8] D.B. Karp and E.G. Prilepkina, Extensions of Karlsson-Minton summation theorem and some consequences of the first Miller-Paris transformation, Integral Transforms and Special Functions, Vol. 29, Issue 12 (2018), 955-970.

[9] D.B.Karp and E.G.Prilepkina, Degenerate Miller-Paris transformations, Results in Mathematics, (2019) 74:94.

[10] D.B. Karp and E.G. Prilepkina, Transformations for hypergeometric ${}_4F_3$ with one unit shift: a group theoretic study, Mathematics, 2020, 8(11), 1966.

[11] B.M. Minton, Generalized hypergeometric functions at unit argument. J Math Phys. 1970; 12:1375–1376.

[12] P.W.Karlsson, Hypergeometric functions with integral parameter differences. J Math Phys. 1971;12:270–271.

[13] K.S. Rao, H.D. Doebner, P. Natterman, Generalized hypergeometric series and the symmetries of $3-j$ and $6-j$ coefficients/In: Kanemitsu S., Jia C. (eds) Number Theoretic Methods. Developments in Mathematics, vol 8. Springer, Boston, MA

[14] D.B.Karp and E.G.Prilepkina, Hypergeometric 4F3(1) with integral parameter differences, Lobachevsky Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 6, pp. 1326–1336.

Некоторые свойства гармонических отображений круга на квадратурные области

Борисов Никита Сереевич

МГУ им. М. В. Ломоносова

Основные понятия и постановка задачи.

Ограниченная область D в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется квадратурной областью (в классическом смысле), если для любой функции $f \in \mathrm{Hol}(D) \cap L^1(D)$ (где пр–во $L^1(D)$ рассматривается относительно плоской меры Лебега), выполнено равенство

$$\int_D f(z)\,dxdy = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_j} \alpha_{n,j} f^{(j)}(w_n), \qquad (*)$$

где $w_1, \ldots, w_N \in D$ — зависящий только от D набор точек, а наборы $\alpha_{n,j} \in \mathbb{C}$ и $m_j \in \mathbb{Z}_+$ также зависят только от D.

Гармоническое отображение области $D \subset \mathbb{C}$ на область $G \subset \mathbb{C}$ — это отображение, осуществляемое однолистной в D гармонической функцией. Мы имеем дело с комплексными гармоническими функциями; каждая такая функция имеет вид $h(z) = f(z) + g(\bar{z})$, где f и g — голоморфные функции своих аргументов.

Задача. Найти описание гармонических отображений круга $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ на квадратурные области.

Для сравнения приведем один хорошо известный результат про конформные отображения $\mathbb{D}$ на классические квадратурные области (который можно найти, например, в монографии P. Davis, *The Schwarz function and its applications*, 1974):

Утверждение. Пусть D — жорданова область с аналитической границей. Тогда D является классической квадратурной областью в том и только том случае, когда конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на D является рациональной функцией (с полюсами вне $\overline{\mathbb{D}}$).

В рассматриваемой задаче естественно возникает следующая гипотеза, подтверждающаяся во всех непосредственно проверяемых конкретных примерах.

Гипотеза. Пусть h — гармоническое отображение круга $\mathbb{D}$ на классическую квадратурную область D, имеющее полиномиальную антиголорфную часть. Тогда h является голоморфным (конформным) отображением $\mathbb{D}$ на D.

Несложно проверяется, что сформулированная гипотеза *не верна* без предположения о том, что антиголоморфная часть h является многочленом.

Основной результат состоит в том, что сформулированная выше **гипотеза** верна.

Схема доказательства. Пусть всюду далее $h(0) = 0$.

- На первом этапе доказывается, что для области вида $h(\mathbb{D})$, где h — однолистное гармоническое отображение круга $\mathbb{D}$ с полиномиальной антиголоформной частью не может существовать единого квадратурного соотношения вида

$$\int_D f(z)\,dxdy = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j f^{(j)}(0),$$

  где ряд сходится для любой функции $f \in C(\overline{D}) \cap \mathrm{Hol}(D)$.

  Это вытекает из рассмотрения степенных моментов области D, т.е. выражений $\int_D z^m\,dxdy$ при $m \in \mathbb{Z}_+$, из асимптотики роста которых по специальным последовательностям m_k, $k \to \infty$, можно вывести, что указанное квадратурное соотношение невозможно даже для многочленов.

- Далее, проверяется, что из отсутствия квадратурного соотношения приведенного выше вида вытекает отсутствие и основного квадратурного соотношения $(*)$.

L-специальные области в комплексной плоскости

Постановка задачи

- Пусть $a, b, c \in \mathbb{C}$, а $L\colon f \to af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy}$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в $\mathbb{R}^2$ с постоянными комплексными коэффициентами.
- Пусть λ_1 и λ_2 корни уравнения $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$. В силу эллиптичности L выполнено $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Далее пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Пусть $T_{1,2}$ — преобразования плоскости, определяемые следующим образом $T_j\colon z \to z_j := x + \lambda_j^{-1}y$, $j = 1, 2$.
- Пусть D — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, т.е. такая ограниченная область, что $\partial D = \partial D_\infty$, где D_∞ — это неогр. связная компонента $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ (при этом D односвязна и $D = (\overline{D})^\circ$).

  Класс $\mathrm{AC}(D)$ состоит из всех ф–ий $f \in \mathrm{Hol}(D)$ таких, что $f \circ \varphi$ продолжается до ф–ии, непрерывной в $\{z : |z| \leqslant 1\}$ и абсолютно непрерывной на $\{z : |z| = 1\}$. Здесь φ — конформное отображение круга $\{z : |z| < 1\}$ на D.

Постановка задачи, продолжение...

- Область Каратеодори D называется L-специальной, если существуют такие непостоянные функции $F_1 \in \mathrm{AC}(T_1 D)$ и $F_2 \in \mathrm{AC}(T_2 D)$, где $T_{1,2}\colon z \mapsto z_{1,2} := x + \lambda_{1,2}^{-1} y$, такие, что для любой достижимой (из D) точки $\zeta \in \partial D$ выполнено $F_1(T_1\zeta) = F_2(T_2\zeta)$.
- **Задача:** Найти описание L-специальных областей.

- В терминах L-специальных областей получены критерии равномерной приближаемости функций L-аналитическими многочленами — полиномиальными решениями уравнения $Lf = 0$ (А. Б. Зайцев, 2002-2004).
- Оператор L называется сильно эллиптическим, если λ_1 и λ_2 лежат в разных полуплоскостях в $\mathbb{C}$ относительно $\mathbb{R}$.
- Если L — сильно эллиптический, то L-специальных областей не существует (А. Б. Зайцев, 2002-2004).
- Если L не является сильно эллиптическим, то известен только один пример L-специальной области — это эллипс, параметры которого зависят от a, b, c.

После работ А. Б. Зайцева остался открытым следующий вопрос: описать жордановы L-специальные области, границы которых задаются уравнениями $Q(x, y) = 0$, где Q — многочлен от двух вещественных переменных с комплексными коэффициентами. Этот вопрос остается нерешенным на протяжении последних 10–15 лет.

Этот вопрос содержательно связан с вопросом о неванлинновский областях, функции Шварца границ которых являются рациональными. Неванлинновские области возникают в задача равномерной аппроксимации функций бианалитическими многочленами (при $\lambda_1 = \lambda_2 = -i$). Не приводя точных формулировок сформулируем интересующий нас вопрос: для каких рациональных функций $R(z)$ уравнение $\overline{z} = R(z)$ задает (аналитическую) границу некоторой жордановой области?

Относительно несложно проверяется, что это возможно только в двух случаях: полуплоскости и круга.

В рассматриваемой нами задаче имеет место следующая гипотеза:

Гипотеза

Среди жордановых областей с алгебраическими границами единственной L-специальной областью (для данного L) является область, ограниченная специальным эллипсом.

Теорема

Для любой алгебраической кривой Γ порядка $n \geqslant 3$, заданной уравнением $Q(x,y) = 0$, где Q — многочлен степени n, не существует полиномов $P_1(z)$ и $P_2(z)$ комплексного переменного степени, не превосходящей n, таких, что уравнение $P_1(T_1 z) = P_2(T_2 z)$ задает ту же кривую.

Идея доказательства. Общий случай сводится к случаю, когда $\lambda_1 = -i$ и $\lambda_2 = i\beta$ при $\beta < -1$. Кроме того, в случае, когда кривая $\varGamma$ является невырожденной, можно считать, что коэффициенты Q вещественны. Далее, рассуждая методом от противного, полагаем, что требуемые многочлены P_1 и P_2 существуют. Ясно, что в этом случае $\max\{\deg P_1, \deg P_2\} = n$.

Выразив x и y через z и $z_\beta = T_2 z$ и, подставив полученные выражения в уравнение $Q(x,y)$, получим уравнение кривой $\varGamma$ в переменных z и z_β. Это уравнение сравнивается с уравнением $P_1(z) - P_2(z_\beta) = 0$ кривой $\varGamma$, возникающем в свойстве L-специальности. Это приводит к системе $2(n-1)$ однородных уравнений на $n+1$ коэффициент при мономах степени n. Окончательно получаем, что степень многочлена Q оказывается меньше n, что невозможно.

Точная область однолистного покрытия на классе голоморфных отображений круга в себя с неподвижными точками

Кудрявцева О.С., МЦ ФПМ, ВолгГТУ

Решается задача об области однолистного покрытия на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками и условием на угловую производную в граничной неподвижной точке.

Пусть $\mathscr{B}$ — совокупность голоморфных отображений f круга $\mathbb{D} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\right\}$ в себя;

$$\mathscr{B}_M[0] = \left\{f \in \mathscr{B}\colon f(0) = 0, |f'(0)| \geqslant 1/M\right\}, \; M > 1.$$

Теорема (Landau, 1926)

Пусть $f \in \mathscr{B}_M[0]$. Существует функция, обратная к f и конформно отображающая круг $\{w \in \mathbb{D}\colon |w| < r(M)\}$, где $r(M) = (M - \sqrt{M^2 - 1})^2$, на некоторую область $\mathscr{L}_f \subset \mathbb{D}$. При этом для каждого $\varkappa$, $|\varkappa| = 1$, функция

$$f_\varkappa(z) = z\,\frac{\varkappa - Mz}{M\varkappa - z}$$

принадлежит $\mathscr{B}_M[0]$ и $w(\varkappa) = \varkappa r(M)$ — точка ветвления функции, обратной к $f_\varkappa$.

$$\mathscr{B}_\alpha[0,1] = \left\{f \in \mathscr{B}\colon f(0)=0, f(1)=1, f'(1) \leqslant \alpha\right\}, \quad \alpha > 1.$$

Утверждение (Горяйнов, 2017)

Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$. *Тогда* $|f'(0)| \geqslant (2-\alpha)/\alpha$.

Следствие

Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$. *Существует функция, обратная к* f *и конформно отображающая круг*

$$\mathscr{O}(\alpha) = \left\{w \in \mathbb{D}\colon |w| < \left(\frac{1-\sqrt{\alpha-1}}{1+\sqrt{\alpha-1}}\right)^2\right\}$$

на некоторую область $\mathscr{Z}_f \subset \mathbb{D}$. *При этом функция*

$$f(z) = z\,\frac{\alpha z + (2-\alpha)}{\alpha + (2-\alpha)z}$$

принадлежит классу $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ *и* $w_\alpha = -(1-\sqrt{\alpha-1})^2/(1+\sqrt{\alpha-1})^2$ *— точка ветвления функции, обратной к* f.

В следующей теореме найдена точная область однолистного покрытия на классе $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$.

Теорема

Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$. *Существует функция, обратная к* f *и конформно отображающая область*

$$\mathscr{W}(\alpha) = \left\{ w\colon \frac{|1-w|}{1-|w|} < \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha-1}} \right\}$$

на некоторую область $\mathscr{Z}_f \subset \mathbb{D}$. *Какова бы ни была область* $\mathscr{Y}$, $\mathscr{W}(\alpha) \subset \mathscr{Y} \subset \mathbb{D}$, $\mathscr{Y} \neq \mathscr{W}(\alpha)$, *найдется функция* $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, *не имеющая обратной в области* $\mathscr{Y}$.

Для каждого $\theta \in (-\pi, \pi)$ функция, обратная к

$$f_\theta(z) = z\frac{1-(\alpha-1)e^{i\theta}+\alpha e^{i\theta}z}{\alpha-(\alpha-1-e^{i\theta})z},$$

имеет точку ветвления

$$w_\alpha(\theta) = -e^{i\theta}\left(\frac{\sqrt{\alpha-1}-e^{-i\theta/2}}{\sqrt{\alpha-1}+e^{i\theta/2}}\right)^2.$$

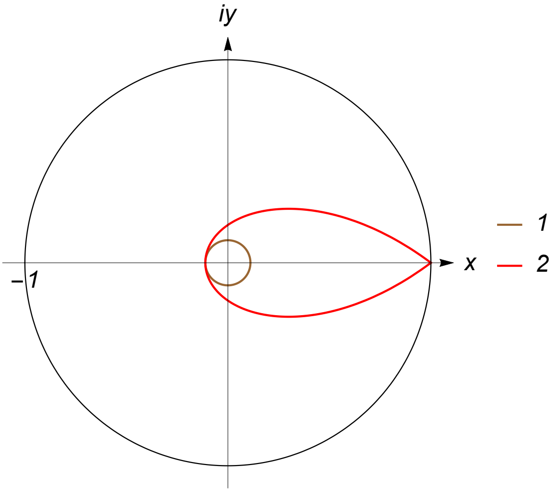


Рис.: Границы областей **1:** $\mathscr{O}(\alpha)$, **2:** $\mathscr{W}(\alpha)$; $\alpha = 1.25$

МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ, С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ

А. Э. Пестовская

Исследуется задача Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на компакте K с ограничением на расположение корней многочленов, а именно, на множестве $\mathcal{P}_n(G)$ многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом, не обращающихся в нуль в открытом множестве G. Получено точное решение для $K = [-1, 1]$ и $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R \geq \varrho_n$, где ϱ_n — определённая величина такая, что $\varrho_n^2 \leq (\sqrt{5} - 1)/2$. Для случая $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$ проведена редукция задач к аналогичным задачам для множества алгебраических многочленов, имеющих все нули на границе ∂G множества G. Вводится понятие постоянной Чебышева $\tau(K, G)$ компакта K относительно открытого множества G, получены двусторонние оценки величины $\tau(K, G)$.

Постановка и обсуждение задачи

Пусть K — непустое компактное множество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и $\operatorname{Conv} K$ — его выпуклая оболочка; G — открытое множество, $G \neq \mathbb{C}$; $\overline{G}$ — замыкание множества G. Пусть $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — открытый круг с центром в точке нуль радиуса $R > 0$. При $R = 1$ для открытого единичного круга используем обозначение D.

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество алгебраических многочленов (точной) степени n с комплексными коэффициентами и со старшим коэффициентом равным единице. Многочлен p_n из $\mathcal{P}_n$ однозначно задаётся своими корнями z_k, $k = \overline{1, n}$, равенством $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$.
Через $\mathcal{P}_n(G)$ обозначим множество алгебраических многочленов из $\mathcal{P}_n$, не обращающихся в нуль на множестве G : $\mathcal{P}_n(G) := \{p_n \in \mathcal{P}_n : p_n(z) \neq 0, z \in G\}$. Для равномерной нормы многочлена используем обозначение $\|p_n\| := \|p_n\|_{C(K)} = \max\{|p_n(z)| : z \in K\}$.

Существует и единственен (в случае, когда K содержит не менее $n + 1$ точки) многочлен T_n с минимальной среди всех многочленов из $\mathcal{P}_n$ нормой на компакте K

$$\|T_n\| = \min\{\|p_n\| : p_n \in \mathcal{P}_n\}.$$

Многочлен T_n называется *многочленом Чебышева степени n для компакта K*. Через $\tau_n(K)$ обозначим его норму, $\tau_n(K) := \|T_n\|$.

С многочленами Чебышева связана важная характеристика компакта

$$\tau(K) := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\tau_n(K)} \tag{1}$$

— *постоянная Чебышева компакта K*. Для постоянной Чебышева компакта K имеют место равенства $\tau(K) = d(K) = c(K)$, связывающие ее с трансфинитным диаметром $d(K)$ и гармонической (логарифмической) емкостью $c(K)$ компакта K (теорема Фекете–Сеге, см. [1, гл. VII, §1,3]).

В настоящей работе исследуются многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на компакте K (имеющие минимальную норму на K) среди всех многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$, т.е. не обращающиеся в нуль на множестве G. Определим *величину наименьшего уклонения от нуля многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$ на компакте K* равенством

$$\tau_n(K, G) := \min\{\|p_n\| : p_n \in \mathcal{P}_n(G)\}. \tag{2}$$

Величину, аналогичную (1), определяемую равенством

$$\tau(K, G) := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\tau_n(K, G)}, \tag{3}$$

будем называть *постоянной Чебышева компакта K относительно множества G*. Задача состоит в нахождении величины (2) и многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$, наименее уклоняющихся от нуля на компакте K, т.е. многочленов, на которых в (2) достигается минимум. А так же в вычислении величины (3) — постоянной Чебышева компакта K относительно множества G.
Корректность определений (2), (3) вытекает из следующей теоремы 1.

Теорема 1 *Для произвольных компакта K и открытого множества G справедливы утверждения:*
(1) *минимум в* (2) *достигается;*
(2) *существует предел последовательности* $\sqrt[n]{\tau_n(K,G)}$.

Свойства наименее уклоняющихся от нуля многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$, величин наименьшего уклонения (2) и постоянной Чебышева (3) при ограничениях несколько отличны от классических. Так, для конечных компактов при достаточно больших n получим $\tau_n(K)=0$ и, как следствие, $\tau(K)=0$. Для величин (2) и (3) уже в случае одноточечного компакта $K=\{\zeta_0\}\subset G$ справедливы равенства $\tau_n(\zeta_0,G)=\rho^n(\zeta_0,\partial G)$, $\quad\tau(\zeta_0,G)=\rho(\zeta_0,\partial G)$, $\quad$ где $\rho(\zeta_0,\partial G)=\min\{|\zeta_0-\zeta| : \zeta\in\partial G\}$ — расстояние от точки ζ_0 до границы множества G.

Заметим также, что в отличие от многочленов Чебышева компакта K, экстремальный многочлен в (2) (как это будет видно из дальнейшего), вообще говоря, не единственный.

Известно [2, гл. I, §3, п. 4], что корни многочленов Чебышева компакта K принадлежат его выпуклой оболочке $\operatorname{Conv} K$. Поэтому в случае когда $\operatorname{Conv} K$ и G не пересекаются, имеют место равенства $\tau_n(K,G)=\tau_n(K)$ и $\tau(K,G)=\tau(K)$. Изучение величин (2) и (3) представляет интерес для случая $(\operatorname{Conv} K)\bigcap G\neq\varnothing$.

Исследования экстремальных свойств алгебраических многочленов с ограничением на расположение нулей началось, по-видимому, с работы П. Турана 1939 г. [3], посвященной неравенствам, дающим оценку снизу нормы производной многочлена через норму самого многочлена.

В 1947 г. П. Лакс [4] доказал гипотезу П. Эрдеша. Утверждение состоит в том, что в классическом неравенстве Бернштейна $\|p_n'\|_{C(D)}\le n\,\|p_n\|_{C(D)}$, $\quad p_n\in\mathcal{P}_n$, рассмотренном на множестве $\mathcal{P}_n(D)$ многочленов, не обращающихся в нуль в единичном круге, точная (наименьшая) константа в два раза меньше (равна $n/2$), т.е. справедливо неравенство

$$\|p_n'\|_{C(D)}\le\frac{n}{2}\,\|p_n\|_{C(D)},\quad p_n\in\mathcal{P}_n(D).$$

Неравенство обращается в равенство на произвольном многочлене, имеющем все свои корни на единичной окружности. Используя это неравенство и ($n-1$ раз) классическое неравенство Бернштейна без ограничений на корни получаем равенства $\tau_n(\overline{D},D)=2$, $\tau(\overline{D},D)=1$. Здесь экстремальными являются многочлены вида $z^n+\varepsilon$, $|\varepsilon|=1$.

В работе Р.Р. Акопяна [5, Теорема 2] найдены многочлены из $\mathcal{P}_n(D_R)$, $R>0$, наименее уклоняющиеся от нуля на единичной окружности относительно L^p-норм, $0\le p\le\infty$, (средних, при $0\le p<1$). Точнее, показано, что ими являются многочлены вида $z^n+\varepsilon R^n$, $|\varepsilon|=1$. Отсюда, в частности, следует, что для величин (2) и (3) справедливы равенства

$$\tau_n(\overline{D},D_R)=1+R^n,\quad\tau(\overline{D},D_R)=\max\{1,R\},\quad R>0.$$

Точное неравенство Бернштейна на множестве многочленов $\mathcal{P}_n(D)$ относительно L^p-норм на единичной окружности получено в работах П. Лакса [4] ($p=2,\infty$), Н. Де Брюйна [6] ($1\le p<\infty$), К. Рахмана и Г. Шмайсера [7] ($0\le p<1$); обобщение неравенства Бернштейна на множестве многочленов $\mathcal{P}_n(D)$ для достаточно широкого класса операторов получено в статье В.В. Арестова [8]. Точное неравенство Бернштейна на множестве многочленов $\mathcal{P}_n(D_R)$ в случае $p=\infty$, $R>1$, получено в работе М.А. Малика [9]; ряд результатов для $p=2$ содержится в статье Р.Р. Акопяна [10].

Обозначим через $M_{n,m}(G)$ точную (наименьшую) константу в неравенстве братьев Марковых для многочленов $\mathcal{P}_n(G)$ на отрезке $I=[-1,1]$

$$\|p_n^{(m)}\|_{C(I)}\le M_{n,m}(G)\,\|p_n\|_{C(I)},\quad p_n\in\mathcal{P}_n(G),\quad m=0,1,\ldots,n. \tag{4}$$

Ясно, что в случае $m=n$ неравенство (4) связано с задачей (2), точнее имеет место равенство $n!=M_{n,n}(G)\,\tau_n(I,G)$. О результатах, связанных с неравенством братьев Марковых с ограничением на корни многочленов, см. статью [11] и приведенную там литературу.

Основные результаты

Редукция к многочленам с корнями на границе области

В этом разделе предполагается справедливость вложения $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$. Для упрощения рассуждений будем считать, что G является областью – открытым связным множеством. Случай, когда множество не является связным, нетрудно сводится к рассматриваемому заменой G на его компоненту связности, содержащую $\operatorname{Conv} K$.

Лемма 1 *Пусть компакт K и область G, такие, что $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$. Тогда для произвольного многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n(G)$, имеющего хотя бы один корень, не принадлежащий границе ∂G области G, существует многочлен $q_n \in \mathcal{P}_n(G)$, такой, что для всех $z \in K$ справедливо строгое неравенство*

$$|q_n(z)| < |p_n(z)|. \tag{5}$$

С помощью леммы 1 доказывается теорема 2 (о редукции).

Теорема 2 *Пусть компакт K и область G, такие, что $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$. Тогда любой экстремальный многочлен в (2) имеет все n корней на границе ∂G области G.*

Замечание 1. *Утверждение теоремы 2 справедливо и для многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$ наименее уклоняющихся от нуля относительно произвольной нормы сохраняющей порядок. В частности, для $L^p(K)$-средних. Это, аналогично доказательству теоремы 2, следует из леммы 1, т.к. неравенство (5) поточечное на компакте K.*

Точное решение при $K = [-1; 1]$ и $G = D_R$

Обозначим через ϱ_n число равное $1/\sqrt{2}$ в случае если $n = 2m$, и единственный в интервале $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2})$ корень уравнения $(\varrho^2 - 1)^{2m}(\varrho^2 + 1) = \varrho^{4m+2}$ если $n = 2m + 1$, $m \geq 1$. Отметим, что последовательность $\varrho_3, \varrho_5, \ldots$ монотонно убывает и $\lim_{m\to\infty} \varrho_{2m+1} = 1/\sqrt{2}$. Тогда при любом $m \geq 1$ получаем, что $\varrho_{2m+1} \in (1/\sqrt{2}, \varrho_3]$, где $\varrho_3 = ((\sqrt{5} - 1)/2)^{1/2}$.

В следующей теореме найдено точное значение величин (2) и (3) в случае, когда компакт K есть отрезок $I = [-1; 1]$, а область G — круг D_R с центром в нуле радиуса $R \geq \varrho_n$ и, как следствие, выписано точное значение константы $M_{n,n}(D_R)$ неравенства 4 при $m = n$.

Теорема 3 *Имеет место равенство*

$$\tau_n(I, D_R) = \begin{cases} \sqrt{1 + R^2}, & n = 1, \quad R \geq 0; \\ R^n, & n > 1, \quad R \geq \varrho_n. \end{cases} \tag{6}$$

При этом минимум в (2) достигается на многочленах $p_n^*(x) = (x^2 - R^2)^m$, при $n = 2m$; $p_n^*(x) = (x^2 - R^2)^m(x \pm iR)$, при $n = 2m + 1$.
Следовательно, справедливы соотношения

$$\tau(I, D_R) = R, \quad \text{при} \quad R \geq 1/\sqrt{2}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} M_{1,1}(D_R) &= (\sqrt{1 + R^2})^{-1} \qquad R \geq 0; \\ M_{n,n}(D_R) &= n! R^{-n}, \quad n > 1, \quad R \geq \varrho_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Замечание 2. *Приведенные в теореме многочлены из $\mathcal{P}_n(D_R)$, наименее уклоняющиеся от нуля на $[-1, 1]$, не единственны. Например, при четных n и $R \geq 1/\sqrt[2l]{2}$ экстремальными являются многочлены $p_{2ml}^{**}(x) = (x^{2l} - R^{2l})^m$, $l, m \in \mathbb{N}$.*

Оценки постоянной Чебышева $\tau(K,G)$

Напомним, что через $\tau(K)$ обозначается постоянная Чебышева компакта K.

Теорема 4 *Для произвольного компакта K и ограниченного открытого множества G справедливы следующие утверждения. Если $K \subset \overline{G}$, то имеют место неравенства*

$$\tau(K) \leq \tau(K,G) \leq \tau(\overline{G}). \tag{9}$$

Если $\mathrm{Conv}\, K \subset \overline{G}$, *то имеют место неравенства*

$$\max_{z\in K} \min_{\zeta\in\partial G} |z-\zeta| \leq \tau(K,G) \leq \min_{\zeta\in\partial G} \max_{z\in K} |z-\zeta|. \tag{10}$$

Следствие 1 *Для произвольного компакта K, удовлетворяющего условию $K \subset \overline{D_R}$ и содержащего точку нуль: $0 \in K$, справедливо равенство*

$$\tau(K, D_R) = R, \quad R > 0. \tag{11}$$

Замечание 3. *Каждое из неравенств в* (9) *и* (10) *в зависимости от K и G может быть как равенством так и строгим неравенством.*

Действительно, например, в случае одноточечного компакта $K = \{\zeta_0\}$ и множества $G = D_R$ если $0 < |\zeta_0| < R$, то $0 < \tau(\zeta_0, D_R) = R - |\zeta_0| < R$. Таким образом, оба неравенства в (10) обращаются в равенства, при этом в (9) оба неравенства строгие. Если $K = \partial D_r$ и $G = D_R$, $0 < r < R$, то справедливы соотношения $R-r < \tau(\partial D_r, D_R) = R < R+r$. В этом случае оба неравенства строгие в (10). Наконец, при $K = \overline{G}$ обращаются в равенства оба неравенства в (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного: учебное пособие. - М., Л.: Наука ГИТТЛ, 1952. - 628 с.

[2] **Смирнов В. И.** Конструктивная теория функций комплексного переменного / В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. - Москва ; Ленинград : Наука, 1964. - 438 с.

[3] **Turán P.** Über die Ableitung von Polynomen, Compositio Mathematica, 7 (1939), 89-95.

[4] **P. D. Lax** Proof of the conjecture of P. Erdos on the derivative of a polynomial, Bull. Amer. Math. Soc. (1947), 509–513.

[5] **Akopyan R.R.** Certain extremal problems for algebraic polynomials which do not vanish in a disk // East J. Approx., V. 9, N 2, 2003, p. 139-150.

[6] **De Bruyn N.G.** Inequalities concerning polynomials in the complex domain // Nederl. Akad. Watensh. Proc. 1947. V. 50. P. 1265-1272.

[7] **Q. I. Rahman and G.Schmeisser** L^p inequalities for polynomials, J.Approx. Theory 53 (1988), 26-33.

[8] **Arestov V.V.** Integral inequalities for algebraic polynomials with a restriction on their zeros // Anal. Math. 1991. Vol. 17, № 1. P.11–20.

[9] **Malik M.A.** On the derivative of a polynomial J. London. Math. Soc. 1, 1 (1969), 57–60.

[10] **Akopyan R.R.** Turan's inequality in H2 for algebraic polynomials with restrictions to their zeros // East J. Approx., 6:1 (2000), 103–124.

[11] **Erdélyi T.** Markov-type inequalities for constrained polynomials with complex coefficients, Illinois J. Math. 42 (1998), 544-563.

Пестовская Алена Эдуардовна
Уральский федеральный университет
НОЦ ИММ УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: a.e.pestovskaya@mail.ru

О связях обобщенной гипергеометрической функции с функцией Майера

Прилепкина Е.Г., Бахтин К.Е.

РНОМЦ "Дальневосточный центр математических исследований",

ДВФУ, б. Аякс, 10, Владивосток, Россия

Чтобы сократить записи формул, примем обозначения:

$$\begin{gathered}\Gamma(\mathbf{a}) = \prod\nolimits_{i=1}^{p} \Gamma(a_i), \quad \sin(\mathbf{a}) = \prod\nolimits_{i=1}^{p} \sin(a_i), \quad (\mathbf{a}) = \prod\nolimits_{i=1}^{p} a_i, \\ \mathbf{a} + \beta = (a_1 + \beta, \dots, a_p + \beta), \quad \mathbf{a}_{[k]} = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p),\end{gathered} \tag{1}$$

для любого вектора $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$, числа β и $\Gamma(\cdot)$ функции Эйлера. Предположим, что $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$ — целые числа и вектор $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ с $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{C}^{q-m}$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{C}^{p-n}$, причем $a_i - b_j \notin \mathbb{N}$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. Тогда G-функция Майера определяется интегралом Меллина-Барнса

$$G^{m,n}_{p,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(\mathbf{a}_1 + s)\Gamma(1 - \mathbf{b}_1 - s)}{\Gamma(\mathbf{b}_2 + s)\Gamma(1 - \mathbf{a}_2 - s)} z^{-s} ds, \tag{2}$$

где контур $\mathcal{L}$ – простая петля с концами в бесконечности и разделяющая левые полюса $s \to \Gamma(\mathbf{a}_1 + s)$ подинтегрального выражения от правых полюсов $s \to \Gamma(1 - \mathbf{b}_1 - s)$. Детали выбора контура $\mathcal{L}$ и сходимость интеграла можно найти, например, в [1, section 16.17]. Степенная функция z^{-s} в (2) определена на римановой поверхности логарифма, $z^{-s} = \exp(-s\{\log|z| + i\arg(z)\})$ с произвольным значением аргумента $\arg(z)$. G функция Майера возникает как фундаментальное решение обобщенного гипергеометрического уравнения и играет важную роль в теории вероятности, статистике, теории случайных матриц [4] и ортогональных полиномов [2]. В данном докладе мы сосредоточимся на изучении главной ветви G-функции Майера со значением аргумента $-\pi < \arg(z) \le \pi$. Представленные результаты основаны на совместных работах с Карпом Д.Б. и частично опубликованы в [5]. Обозначая подинтегральное выражение через (2) $\mathcal{I}(s)$ и комбинируя известные результаты, получим следующую теорему.

Theorem 1 *Пусть $m + n \le p$. Тогда функция $G^{m,n}_{p,p}$ кучочно-аналитическая, для $|z| < 1$ справедлива формула*

$$G^{m,n}_{p,p}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=-a_j-l} \mathcal{I}(s) z^{-s}, \tag{3}$$

и для $|z| > 1$

$$G^{m,n}_{p,p}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=1-b_i+k} \mathcal{I}(s) z^{-s}. \tag{4}$$

Функции (3) и (4), вообще говоря, не являются аналитическим продолжением друг друга. Аналитическое продолжение, порожденное главной ветвью функции Майера в $|z| < 1$, мы будем называть внутренней функцией и обозначать $\mathfrak{G}^{m,n}_{p,p}(z)$. Аналогично, функцию, определенную (2) и (4) для $|z| > 1$ и аналитически продолженную в $|z| < 1$ мы будем называть "внешней" и обозначать через $\mathcal{G}^{m,n}_{p,p}(z)$. Комбинация известных формул дает "рецепт"аналитического продолжения G-функции Майера при помощи обобщенной гипергеометрической функции ($m + n - p = \varkappa$)

$$G^{m,n}_{p,p}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right) = -\frac{(-\pi)^{\varkappa}}{z}\sum_{k=1}^{p}\frac{\Gamma(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}{\Gamma(b_k-\mathbf{a})} z^{b_k}{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix}1-\mathbf{a}+b_k\\ 1-\mathbf{b}_{[k]}+b_k\end{matrix} \,\middle|\, \frac{(-1)^{\varkappa}}{z}\right)$$
$$\times\sum_{j=1}^{m}\frac{\sin(\pi(\mathbf{b}_2-a_j))e^{i\pi(\varkappa+2l-1)(a_j-b_k)}}{\sin(\pi(\mathbf{a}_{1[j]}-a_j))\sin((a_j-b_k)\pi)} \tag{5}$$

с $(\varkappa + 2l - 2)\pi < \arg(z) < (\varkappa + 2l)\pi$ и при добавочном ограничении, что $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}_1$ отличаются друг от друга на нецелые числа. Более тщательно проанализировав связь (5) G-функции Майера и обобщенной гипергеометрической функции, нам удалось получить компактную формулу аналитического продолжения [5] .

Theorem 2 *Предположим, что $m \ge 1$, $m+n = p$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ вещественные вектора размерности p. Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$ с $|z| > 1$ аналитическое продожение функции, определенной рядом (3), задается формулой*

$$\mathfrak{G}^{m,n}_{p,p}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right) = -\exp(\mp i\pi\psi_m)\mathfrak{G}^{p,0}_{p,p}\left(\frac{1}{z} \,\middle|\, \begin{matrix}1-\mathbf{a}\\ 1-\mathbf{b}\end{matrix}\right) + \mathfrak{G}^{n,m}_{p,p}\left(\frac{1}{z} \,\middle|\, \begin{matrix}1-\mathbf{a}\\ 1-\mathbf{b}\end{matrix}\right)$$
$$= -\exp(\mp i\pi\psi_m)\mathcal{G}^{0,p}_{p,p}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right) + \mathcal{G}^{m,n}_{p,p}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right), \tag{6}$$

где $\psi_m = \sum_{j=1}^{m}(b_{n+j} - a_j)$ и знак "$-$" выбирается для $\Im(z) > 0$, тогда как знак +" соответствует $\Im(z) < 0$.

В [5] также приводятся формулы для вычисления $\mathfrak{G}^{m,n}_{p,p}$ на берегах разрезов $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$. В [3, (3.1)] мы показали, что для $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{p-1}$, $d \in \mathbb{R}$ и $0 < x < 1$ имеет место равенство

$$\mathfrak{G}^{p,0}_{p,p}\left(x \left| \begin{matrix} d, \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{matrix} \right.\right) = \frac{\Gamma(\mathbf{a}-d+1)x^{d-1}}{2\pi i \Gamma(\mathbf{b}-d+1)} \left\{ {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} \mathbf{a}-d+1 \\ \mathbf{b}-d+1 \end{matrix} \left| \frac{1}{x} + i0 \right.\right) - \right.$$
$$\left. {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} \mathbf{a}-d+1 \\ \mathbf{b}-d+1 \end{matrix} \left| \frac{1}{x} - i0 \right.\right) \right\}. \quad (7)$$

Соотношение (7) позволяет переносить преобразования для гипергеометрических функций на G-функцию Майера. Например, второе преобразование Миллера-Париса [6], связанное с корнями характеристического полинома $\hat{Q}_m(t) = \hat{Q}_m(a, b, c, \mathbf{f}|t,)$

$$\hat{Q}_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (a)_k (-b-m)_k (t)_k (c-a-m-t)_{m-k}}{(c-a-m)_m (c-b-m)_k k!} {}_{r+2}F_{r+1}\left(\begin{matrix} -k, b, \mathbf{f}+\mathbf{m} \\ b+m-k+1, \mathbf{f} \end{matrix}\right), \quad (8)$$

для G-функции Майера приобретает следующий вид.

Theorem 3 *Пусть a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{p-2}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{p-2}$, $m = m_1 + \cdots + m_{p-2}$. Тогда имеет место следующее тождество*

$$\mathfrak{G}^{p,0}_{p,p}\left(z \left| \begin{matrix} c, d, \mathbf{f} \\ a, b, \mathbf{f}+\mathbf{m} \end{matrix} \right.\right) = z^{d-\alpha-1}(1-z)^{\alpha} \frac{\Gamma(\mathbf{a}-d+1)\Gamma(\hat{\mathbf{b}})}{\Gamma(\hat{\mathbf{a}})\Gamma(\mathbf{b}-d+1)}$$
$$\times \left\{ \cos(\pi\alpha) \mathfrak{G}^{m+2,0}_{m+2,m+2}\left(z \left| \begin{matrix} 1, \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{matrix} \right.\right) + \sin(\pi\alpha) \mathfrak{G}^{m+2,1}_{m+3,m+3}\left(z \left| \begin{matrix} 1, 3/2, \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}}, 3/2 \end{matrix} \right.\right) \right\} \quad (9)$$

где $\mathbf{a} = (a, b, \mathbf{f}+\mathbf{m})$, $\mathbf{b} = (c, \mathbf{f})$, $\alpha = c+d-a-b-m-1$, $\hat{\mathbf{a}} = (c-a-m, c-b-m, \boldsymbol{\lambda}+1)$, $\hat{\mathbf{b}} = (c-d+1, \boldsymbol{\lambda})$ и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ корни второго характеристического полинома $\hat{Q}_m(a-d+1, b-d+1, c-d+1, \mathbf{f}-d+1|t)$, определенного в (8).

Полагая в Теореме 3 $\alpha \in \mathbb{N}_0$, и воспользовавшись интегральным представлением обобщенной гипергеометрической функции в виде преобразования Стилтьеса [3]

$$\frac{\Gamma(\mathbf{a})}{\Gamma(\mathbf{b})} {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} \sigma, \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \left| z \right.\right) = \int_0^1 G^{p,0}_{p,p}\left(t \left| \begin{matrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{matrix} \right.\right) \frac{dt}{t(1-tz)^{\sigma}}, \quad (10)$$

получим следующую теорему.

Theorem 4 *Пусть* $a, b, c, d \in \mathbb{C}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^{p-2}, m = (m_1, \ldots, m_{p-2}) \in \mathbb{N}^{p-2}, m = m_1 + ... + m_{p-2}$, $\alpha = c + d - a - b - m - 1, \alpha \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$
{}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\sigma, a, b, \boldsymbol{f}+\boldsymbol{m} \\ c, d, \boldsymbol{f}\end{matrix}\middle| z\right) = (-1)^\alpha \frac{\alpha!\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(\boldsymbol{f})\Gamma(\mathbf{y})\Gamma(\mathbf{u}-d+2)}{\Gamma(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{m})\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(\mathbf{w})\Gamma(\mathbf{v}-d+2)} \times
$$

$$
\sum_{l=0}^{\alpha} \frac{(-1)^l \Gamma(\mathbf{w}+d+l-\alpha-1)}{l!(\alpha-l)!\Gamma(d+l-\alpha)\Gamma(\mathbf{y}+d+l-\alpha-1)} {}_{m+3}F_{m+2}\left(\begin{matrix}\sigma, \mathbf{w}+d+l-\alpha-1 \\ d+l-\alpha, \mathbf{y}+d+l-\alpha-1\end{matrix}\middle| z\right), \tag{11}
$$

где $\mathbf{u} = (a-1, b-1, \boldsymbol{f}+\boldsymbol{m}-1), \mathbf{v} = (c-1, \boldsymbol{f}-1), \mathbf{w} = (c-a-m, c-b-m, \boldsymbol{t}+1), \mathbf{y} = (c-d+1, \boldsymbol{t})$ *и* $\boldsymbol{t} = (t_1, ...t_m)$ *являются корнями второго характеристического многочлена Миллера-Париса* $\hat{Q}_m(t) = \hat{Q}_m(a-d+1, b-d+1, c-d+1, \boldsymbol{f}-d+1|t)$.

Список литературы

[1] R.A. Askey and A.B. Olde Daalhuis, Generalized Hypergeometric Functions and Meijer G-Function, Chapter 16 in F.W.J. ,Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert C.W. Clark (Eds.) NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, 2010.

[2] M. Bertola, M. Gekhtman and J. Szmigielski Cauchy–Laguerre Two-Matrix Model and the Meijer-G Random Point Field, Communications in Mathematical Physics volume 326 (2014), 111–144.

[3] D.B. Karp and E.G. Prilepkina, Applications of the Stieltjes and Laplace transform representations of the hypergeometric functions, Integral Transforms and Special Functions, volume 28, no.10 (2017), 710–731.

[4] M.D. Springer, W.E. Thompson, The distribution of products of beta, gamma and Gaussian random variables, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), 721–737.

[5] D.B.Karp and E.G.Prilepkina, On Meijer's G function $G^{m,n}_{p,p}$ for $m + n = p$, Integral Transforms and Special Functions, online, 2022. DOI: 10.1080/10652469.2022.2092730

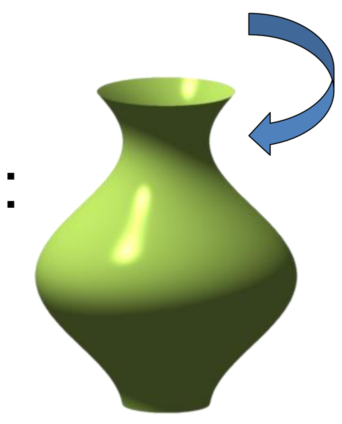
[6] A.R. Miller and R.B. Paris, Transformation Formulas For The Generalized Hypergeometric Function with Integral Parameter Differences, Rocky Mountain Journal Of Mathematics Volume 43, Number 1 (2013), 291–327.

Новые реализации произвольных алгебр Ли векторными полями

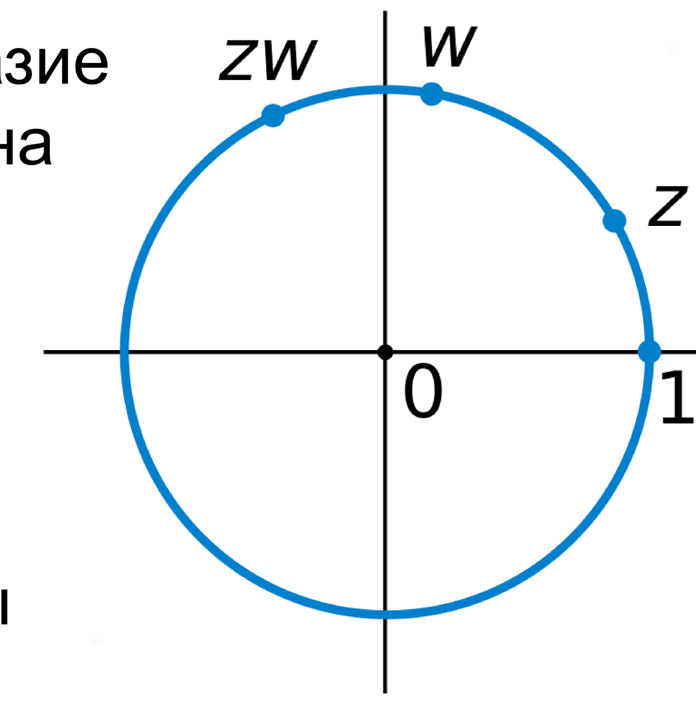
Степанова Мария Александровна, к.ф.-м.н.
мехмат МГУ, МЦМУ МИАН, МЦФПМ МГУ
step_masha@mail.ru

С. Ли

Группа Ли — классическое понятие анализа, алгебры и геометрии. Оно возникло при рассмотрении непрерывных симметрий геометрических объектов. Примеры симметрий: движения плоскости, вращательная симметрия



Группа Ли = гладкое многообразие + группа. Пример: окружность на комплексной плоскости с операцией умножения



Рассмотрим касательное пространство в единице группы

Линеаризация группы Ли: алгебра Ли = векторное пространство + билинейная антикоммутативная операция (a,b) → [a,b] (скобка Ли), удовлетворяющая тождеству Якоби: [[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0 для всех элементов пространства

Примеры алгебр Ли:
Матрицы размера n×n с операцией [A,B]=AB-BA
Векторные поля с операцией взятия коммутатора

На сегодняшний день имеется достаточно развитая теория абстрактных конечномерных групп и алгебр Ли. Однако естественно задать вопрос о том, где и как они возникают в математике.

Широко известна теорема Адо о реализации произвольной конечномерной алгебры Ли с помощью матриц (линейное представление).

И.Д. Адо

Мы приводим реализацию конечномерных алгебр Ли двумя интересными с точки зрения комплексного анализа классами векторных полей: голоморфными автоморфизмами вещественных подмногообразий комплексного пространства и симметриями аналитических дифференциальных уравнений.

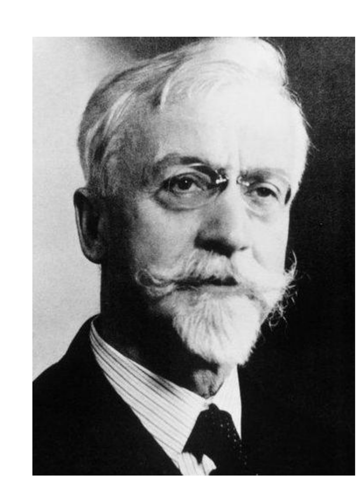
Пусть M — вещественно-аналитическое подмногообразие пространства $\mathbb{C}^N$ (или CR-многообразие), заданное в некоторой окрестности начала координат.

Алгебра Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов подмногообразия M в начале координат состоит из векторных полей, порождающих однопараметрические группы локальных биголоморфных автоморфизмов M (в окрестности начала координат).

Пусть $Z=(Z_1,\dots,Z_N)$ — независимые переменные в пространстве $\mathbb{C}^N$, а $f(Z)=(f_1(Z),\dots,f_k(Z))$ — неизвестные голоморфные функции. Рассмотрим систему S голоморфных дифференциальных уравнений на вектор-функцию f(Z).

Группой симметрий системы S называется локальная группа всех комплексных преобразований некоторой области в пространстве $\mathbb{C}^N_Z \times \mathbb{C}^k_f$ зависимых и независимых переменных, переводящая график каждого решения системы в некоторый график решения той же системы. Алгеброй Ли симметрий системы S называется алгебра Ли, соответствующая группе симметрий системы S (т.е. касательное пространство в единице группы).

Симметрии уравнений тесно связаны с автоморфизмами CR-многообразий при соблюдении некоторых условий невырожденности (d-невырожденность). А именно, с помощью конструкции, восходящей к работам Э. Картана и Б. Сегре, можно сопоставить CR-многообразию систему аналитических уравнений в частных производных, такую что алгебра Ли ее инфинитезимальных симметрий изоморфна комплексификации алгебры голоморфных автоморфизмов данного CR-многообразия. Основной инструмент здесь — это многообразия Сегре, позволяющие переводить вопросы с языка CR-геометрии на язык дифференциальных уравнений и наоборот.



Э. Картан

автоморфизмы CR-многообразий

симметрии дифференциальных уравнений

Б. Сегре

$\mathbb{C}^2$

$(z, w=u+iv)$

$M=\{v=|z|^2\}$

$$\bar z=\zeta, \quad \bar w=\omega \longrightarrow M^{\mathbb{C}}=\left\{\frac{w-\omega}{2i}=z\zeta\right\} \xrightarrow{\frac{d^2}{dz^2}} w''=0$$

Конструкция Картана-Сегре в $\mathbb{C}^2$

В общем случае конструкция Картана-Сегре позволяет строить систему дифференциальных уравнений, такую что ее общее решение есть комплексификация исходного CR-многообразия

Степанова Мария Александровна, к.ф.-м.н.

мехмат МГУ, МЦМУ МИАН, МЦФПМ МГУ

step_masha@mail.ru

Реализация автоморфизмами гиперповерхности

Пусть h – произвольная вещественная алгебра Ли размерности m < ∞. По теореме Адо h изоморфна некоторой подалгебре алгебры $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ для некоторого n, поэтому можно считать, что $h \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Пусть $e_1,\dots,e_m$ – базис в h, а H – локальная псевдогруппа, соответствующая h. В H введем локальные координаты: точке $(\tau_1,\dots,\tau_m)$ из окрестности нуля в $\mathbb{R}^m$ сопоставляется точка $C(t)=\exp(\tau_1 e_1 + \dots + \tau_m e_m)$ из окрестности единицы в H.

Пусть $(z;t;w)=(z_1,\dots,z_n;t_1,\dots,t_m;w=u+iv)$ -- координаты в $\mathbb{C}^{n+m+1}$. Положим

$$P_1(z,\bar z)=2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^{32n}\big(z_j^{4j-2}\bar z_j^{4j-1}+z_j^{4j}\bar z_j^{4j+1}\big)\Big),\qquad P_2(z,\bar z)=2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^{40n}\big(z_j^{4j-2}\bar z_j^{4j-1}+z_j^{4j}\bar z_j^{4j+1}\big)\Big).$$

Обозначим через $P(z,\bar z,t,\bar t)$ выражение $P_1(\overline{C(t)}z, C(t)\bar z)+P_2(C(t)z,\overline{C(t)z})$,
где C(t) – введенная выше матрица. Вещественный аргумент $\tau\in\mathbb{R}^m$ заменяется на комплексный аргумент $t\in\mathbb{C}^m$.

Рассмотрим гиперповерхность Г, заданную в окрестности начала координат уравнением

$$v = P(z,\bar z,t,\bar t) + u\,P^4(z,\bar z,t,\bar t).$$

Теорема 1 (С., 2022). Алгебра Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов гиперповерхности Г в начале координат изоморфна h.

Замечание. Локальная группа автоморфизмов поверхности Г содержит все преобразования $\{z \to Az,\ t \to b(t),\ w \to w\}$. Здесь $A \in H$ – невырожденная матрица с постоянными вещественными коэффициентами, а аналитическая вектор-функция b(t) такова, что C(t)A = C(b(t)). При этом b(t) однозначно восстанавливается по матрице A. Поскольку H – локальная группа, соответствующая h, то h лежит в алгебре автоморфизмов поверхности Г в начале координат. Многочлены P_1 и P_2 в определении функции P подобраны так, чтобы H не содержала других преобразований.

Отметим также, что вместо многочленов P_1 и P_2 можно выбрать два различных многочлена общего положения достаточно высокой степени.

Реализация симметриями дифференциальных уравнений

Гиперповерхность Г, построенная выше, не удовлетворяет нужным условиям невырожденности (d-невырожденность). Поэтому для применения конструкции Картана-Сегре мы выпишем другое многообразие. Пусть $(z;x;t;w)=(z_1,\dots,z_n;x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_m;w_1=u_1+iv_1,\ w_2=u_2+iv_2,\ w_3=u_3+iv_3)$ – координаты в $\mathbb{C}^{2n+m+3}$. Пусть

$$Q_1(z,\bar z)=\sum_{j=1}^{n} z_j^{16n+j+3}\bar z_j.$$

Положим

$$Q(z,\bar z,t,\bar t)=2\,\mathrm{Re}\big(Q_1(\overline{C(t)}z, C(t)\bar z)\big),$$

$$R(x,\bar x,t,\bar t,u_3)=P(x+\mathbb{1},\bar x+\mathbb{1},t,\bar t)+u_3P^4(x+\mathbb{1},\bar x+\mathbb{1},t,\bar t)-P(x+\mathbb{1},\mathbb{1},t,0)-P(\mathbb{1},\bar x+\mathbb{1},0,\bar t)-u_3P^4(\mathbb{1},\mathbb{1},0,0),$$

где $\mathbb{1}=(1,\dots,1)$ – вектор из n единиц. Отметим, что функция R – это выражение $\big(P(x,\bar x,t,\bar t)+u_3P^4(x,\bar x,t,\bar t)\big)$ в окрестности точки $(x_0,\bar x_0,t_0,\bar t_0,u_0)=(\mathbb{1},\mathbb{1},0,0,0)$, из которого мы вычли плюригармонические слагаемые.

Рассмотрим многообразие $\mathcal{M}\subset\mathbb{C}^{2n+m+3}$, заданное в окрестности начала координат системой уравнений

$$v_1 = P(z,\bar z,t,\bar t)+u_1P^4(z,\bar z,t,\bar t),$$
$$v_2 = Q(x,\bar x,t,\bar t)+u_2Q^4(x,\bar x,t,\bar t),$$
$$v_3 = R(x,\bar x,t,\bar t,u_3).$$

С помощью конструкции Картана-Сегре сопоставим многообразию $\mathcal{M}$ систему уравнений S, такую что ее общее решение совпадает с комплексификацией многообразия $\mathcal{M}$.

Теорема 2 (С., 2022). Алгебра Ли симметрий системы S изоморфна комплексификации алгебры Ли h.

Рассмотрим бесконечномерную коммутативную алгебру Ли, т.е. алгебру Ли с базисом $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, таким что $[e_j,e_\ell]=0$ для всех j и ℓ. Ее нельзя реализовать как алгебру Ли векторных полей на конечномерном пространстве, поскольку число коммутирующих векторных полей не может превосходить размерности объемлющего пространства.

Открытый вопрос: Можно ли реализовать произвольную вещественную конечномерную алгебру Ли симметриями дифференциальных уравнений? (А не только ее комплексификацию, что было проделано выше.)

Р. Ш. Хасянов (Санкт-Петербург, Россия)
hasbendshurich@gmail.com

ЗАДАЧА О РАДИУСЕ БОРА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Проблема. Пусть X, Y – банаховы пространства аналитических функций в круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Нужно найти максимальный R, для которого

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(Rz)^n \Big\|_Y \le \|f\|_X.$$

Будем называть такой R радиусом Бора «из X в Y» и обозначать $R_{X\to Y}$. Если X и Y совпадают, просто пишем R_X.

Теорема (Х. Бор, Ф. Рисс, И. Шур, Ф. Винер, 1914, [1]).

$$\sum_{n\ge 0} |a_n| r^n \le \|f\|_\infty, \quad \textit{если } 0 \le r \le 1/3.$$

При этом $1/3$ *– неулучшаемая константа, то есть* $R_{H^\infty} = 1/3$.

Рассмотрим сначала задачу о радиусе Бора в весовых пространствах Блоха.

Определение. *Говорят, что аналитическая в* $\mathbb{D}$ *функция* $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$ *принадлежит весовому пространству Блоха* $B(\omega)$ *с весом* $\omega(|z|) \ge 0$, *если* $\|f\|_{B(\omega)} := |a_0| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \omega(|z|)|f'(z)| < \infty$.

Теорема. *Пусть* $B(\omega)$ *– весовое пространство Блоха с весом* $\omega(r) \ge 0$. *Тогда*

$$R_{B(\omega)} \ge 1/\sqrt{2}.$$

Встаёт естественный вопрос: при каких весах неравенство Бора с $R = 1/\sqrt{2}$ является точным? Используя метод Э. Бомбиери и Ж. Бургейна [2], мы даём критерий точности такого неравенства.

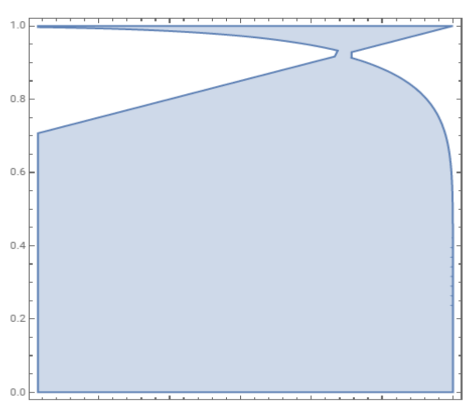
Теорема. *Для того, чтобы неравенство*

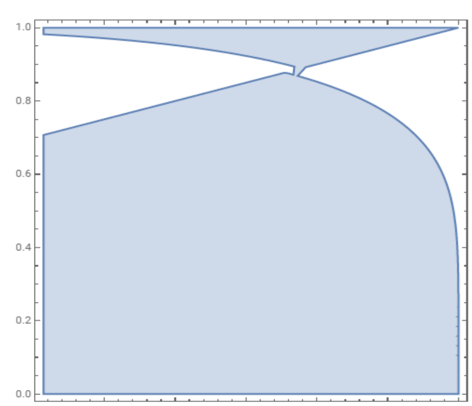
$$\Big|\Big| \sum_{n\ge 0} |a_n| \Big(\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)^n \Big|\Big|_{B(\omega)} \le ||f||_{B(\omega)}$$

было точным необходимо и достаточно, чтобы существовало число $r_0 \in \Big[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\Big]$, *такое что для всех* $r \in [0, 1)$

$$\frac{\omega(r)}{\omega(r_0)} \le \min\Big(2 - \frac{r}{r_0}; \frac{\sqrt{2}r_0 + r}{\sqrt{2}r + r_0}\Big). \qquad (1)$$

Примеры. Приведём примеры весов, удовлетворяющих необходимому и достаточному условию. На рисунках синим цветом обозначена область, в которой выполняется неравенство (1). Оси абсцисс соответствует r_0, оси ординат – r. Видно, что для веса $\omega(r) = r^{11}(1-r^2)$ (рисунок слева) r_0 можно взять, например, равным 0.923. Для веса $\omega(r) = r^7(1-r)$ (рисунок справа) $r_0 \approx 0.885$. Также неравенство (1) выполняется для веса $\omega(r) \equiv 1$, $r_0 = 1$.





Рассмотрим следующие пространства аналитических функций:
$H_k^\infty := \Big\{ f(z) = \sum_{n\geq k} a_n z^n,\ z\in\mathbb{D}:\ \|f\|_{H_k^\infty} := \|f\|_\infty < \infty \Big\}$;
$H_{(k)}^\infty := \Big\{ f(z) = \sum_{n\geq k} a_n z^n,\ z\in\mathbb{D}:\ \|f\|_{H_{(k)}^\infty} := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f^{(k)}(z)| < \infty \Big\}$.
Далее $R_{(k)\to k} := R_{H_{(k)}^\infty \to H_k^\infty}$.

В работе [3] прошлого года Б. Бховмик и Н. Дас доказали следующую теорему:

Теорема ([3]).

$$R_{1\to(1)} = 1 - \sqrt{2/3} = 0.183503...$$

Мы оцениваем мажорирующий ряд функции через супремум её производной в круге:

Теорема.

$$0.872664... \leq R_{(1)\to 1} \leq 0.883677...$$

Теорема. *Пусть* $\|f'\|_\infty \leq 1$ *и* $a := |f'(0)| \geq \left(1 + \frac{1}{2} W\left(\frac{-2}{e^2}\right)\right)^{1/2} = 0.892643....$ *Тогда*

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| r^n \leq \|f'\|_\infty,\ \ r \leq r_1(a) = \frac{1}{a} + \frac{a^2-1}{a(2a^2-1)} W\Big(\frac{1-2a^2}{(a^2-1)e}\Big),$$

где $W(x)$ *– функция Ламберта:* $x = W(x)e^{W(x)}$. *Число* $r_1(a)$ *неулучшаемое.*

В работе 2018 года [4] Б. Бховмик и Н. Дас применили неравенство Бора к подчинённым функциям.

Определение. *Говорят, что функция* $g(z)$ *подчинена функции* $f(z)$*, если существует аналитическая функция* $\omega(z)$*, такая что* $|\omega(z)| \leq 1, z\in\mathbb{D}$, $\omega(0) = 0$ *и* $g(z) = f(\omega(z))$. *Пишут* $g \prec f$.

Пусть $M_f(r) := \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$, где $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Теорема ([4]). *Пусть* $g \prec f$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда*

$$M_g(r) \leq M_f(r),\ \ 0 \leq r \leq 1/3.$$

Мы доказали похожие неравенства с производными:

Теорема. *Пусть* $g(0) = 0$ *и* $g' \prec f'$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда*

$$M_g(r) \leq M_{f'}(r),\ \ 0 \leq r \leq R_{(1)\to 1}.$$

Теорема. *Пусть* $g(0) = 0$ *и* $|g'(z)| \leq |f'(z)|$, $z\in\mathbb{D}$. *Тогда*

$$M_g(r) \leq M_{f'}(r),\ \ 0 \leq r \leq R_{(1)\to 1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bohr. *A theorem concerning power series.* Proceedings of the London Mathematical Society. 1914.
2. E. Bombieri, J. Bourgain. *A remark on Bohr's inequality*, International Mathematics Research Notices 2004, No. 80.
3. B. Bhowmik, N. Das. *On some aspects of the Bohr inequality.* Rocky Mountain J. Math. 51 (1) 87 - 96, February 2021.
4. B. Bhowmik, N. Das. *Bohr phenomenon for subordinating families of certain univalent functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 462 (2), 1087-1098, 2018.