Асимптотическая относительная эффективность статистических критериев проверки соответствия регрессионной модели

Александра Мокроусова, Новосибирский Государственный Университет, Россия

Модель регрессии

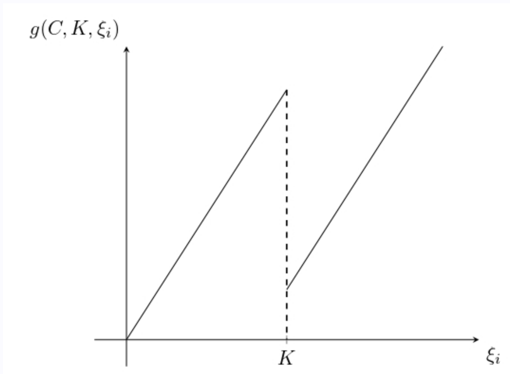
Рассмотрим следующую модель регрессии:

$$\eta_i = a + \theta g\,(C,\, K,\, \xi_i) + e_i,\; i = 1, \ldots, n.$$

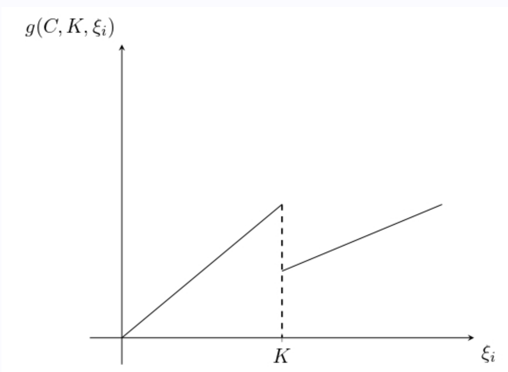
- ξ_i - i.i.d. с функцией распределения F, $E\xi_1 \neq 0$.
- e_i - i.i.d., независимы с ξ_i, $Ee_i = 0$, $De_i = \sigma^2 \neq 0$
- a, θ, C, K - вещественные, неизвестные, фиксированные

Гипотезы

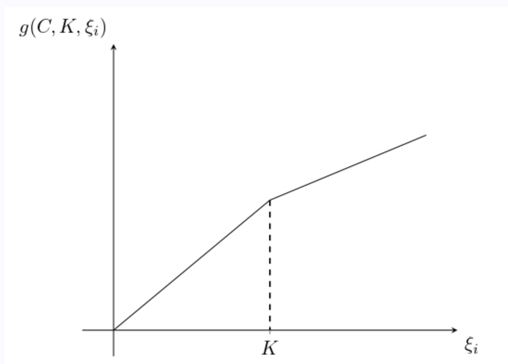
Основная гипотеза $H_0 : g\,(C, K, \xi_i) = \xi_i$
Альтернативные гипотезы:



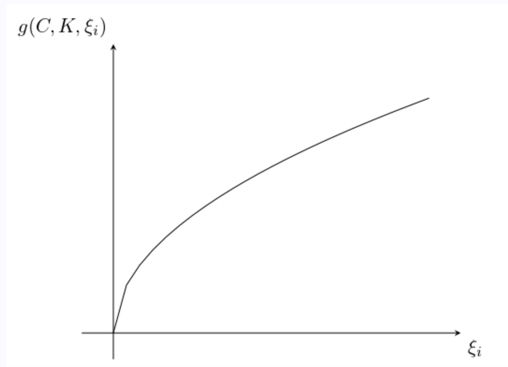
(a) H1



(b) H2



(c) H3



(d) H4

H_0: $g\,(C, K, \xi_i) = \xi_i$
H_1: $g\,(C,\, K,\, \xi_i) = \xi_i I\{\xi_i < K\} + (C + \xi_i) I\{\xi_i \geq K\}$, $C \neq 0$.
H_2: $g\,(C,\, K,\, \xi_i) = \xi_i I\{\xi_i < K\} + C\xi_i I\{\xi_i \geq K\}$, $C \neq 1$.
H_3: $g\,(C,\, K,\, \xi_i) = \xi_i I\{\xi_i < K\} + (K + C(\xi_i - K)) I\{\xi_i \geq K\}$, $C \neq 1$.
H_4: $g\,(C,\, K,\, \xi_i) = \frac{(\xi_i)^C}{K^{C-1}}$, $C \neq 1$ и $C > 0$

Критерии

Критерии, которые проверяют основную гипотезу против *одной* из альтернатив, будут отвергать первую, если их статистика - функционал J_n будет принимать значения в некоторой критической области C. В качестве J_n возьмем следующие функционалы от эмпирического моста:

$$J_n^\infty = \sup_{t \in [0,1]} \left| Z_n^0(t) \right| \qquad J_n^{int} = \left| \int_0^1 Z_n^0(t)\, dt \right|$$

Эмпирический мост - Эмпирический процесс это кусочно-линейная случайная ломаная, построенная по точкам

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{\widehat{\Delta}_k - \frac{k}{n}\widehat{\Delta}_n}{\sqrt{n\widehat{\sigma}^2}} \right)$$

где $\Delta_k = Y_i - \hat{\theta}_n X_i - \hat{a_n}$ - сумма регрессионных остатков, $X_i = \xi_{i:n}$ - порядковые статистики, $Y_i = \eta_[i : n]$ - индуцированные порядковые статистики, а $\hat{\theta}_n$ и $\hat{a_n}$ - оценки параметров θ и a

Асимптотическая относительная эффективность критериев

АОЭ по Питмену критериев может быть вычислена как отношение их приближенных бахадуровских наклонов, которые, в свою очередь, можно вычислить с помощью следующим образом:

Утверждение

Пусть выполненно следующее:

1. $J_n/\sqrt{n} \to b(C)$, по вероятности (почти наверное) при $C \in \mathbf{C}$
2. Распределение $F_n(t, C_0)$ последовательности статистик J_n сходится к распределению $F_J(t)$ при всех t и $n \to \infty$
3. Для некоторого $a > 0$ выполнено $\ln(1 - F_J(t)) \sim -\frac{1}{2}at^2$, при $t \to \infty$

Тогда слабый (сильный) приближенный бахадуровский наклон:

$$c_J^*(C) = ab^2(C)$$

АОЭ по Питмену критериев вычисляется следующим образом:

$$e_{1,2} = \frac{a_1 b_1^2(C)}{a_2 b_2^2(C)} \tag{1}$$

Если $e_{1,2} < 1$, то первый критерий эффективнее в этом смысле, чем второй

Основной результат

Теорема

АОЭ по Питмену супремального критерия со статистикой J_n^∞ относительно интегрального, чья статистика J_n^{int}, проверяющие гипотезу $H_0 : Y_i = a + \theta X_i + \varepsilon_i$, против одной из четырех альтернатив вычисляется по формуле:

$$e_{int,\infty} = \frac{12Var\xi_1}{7Var\xi_1 - 12(\int_0^1 L_F^0(t)\,dt)^2} \frac{(b^{int}(C))^2}{(b^\infty(C))^2 a^\infty},$$

где a^∞ равен максимуму выражения

$$D(t) = t - t^2 - \frac{\left(L_F^0(t)\right)^2}{Var\xi_1},\; t \in [0, 1]$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

ЛИТЕРАТУРА

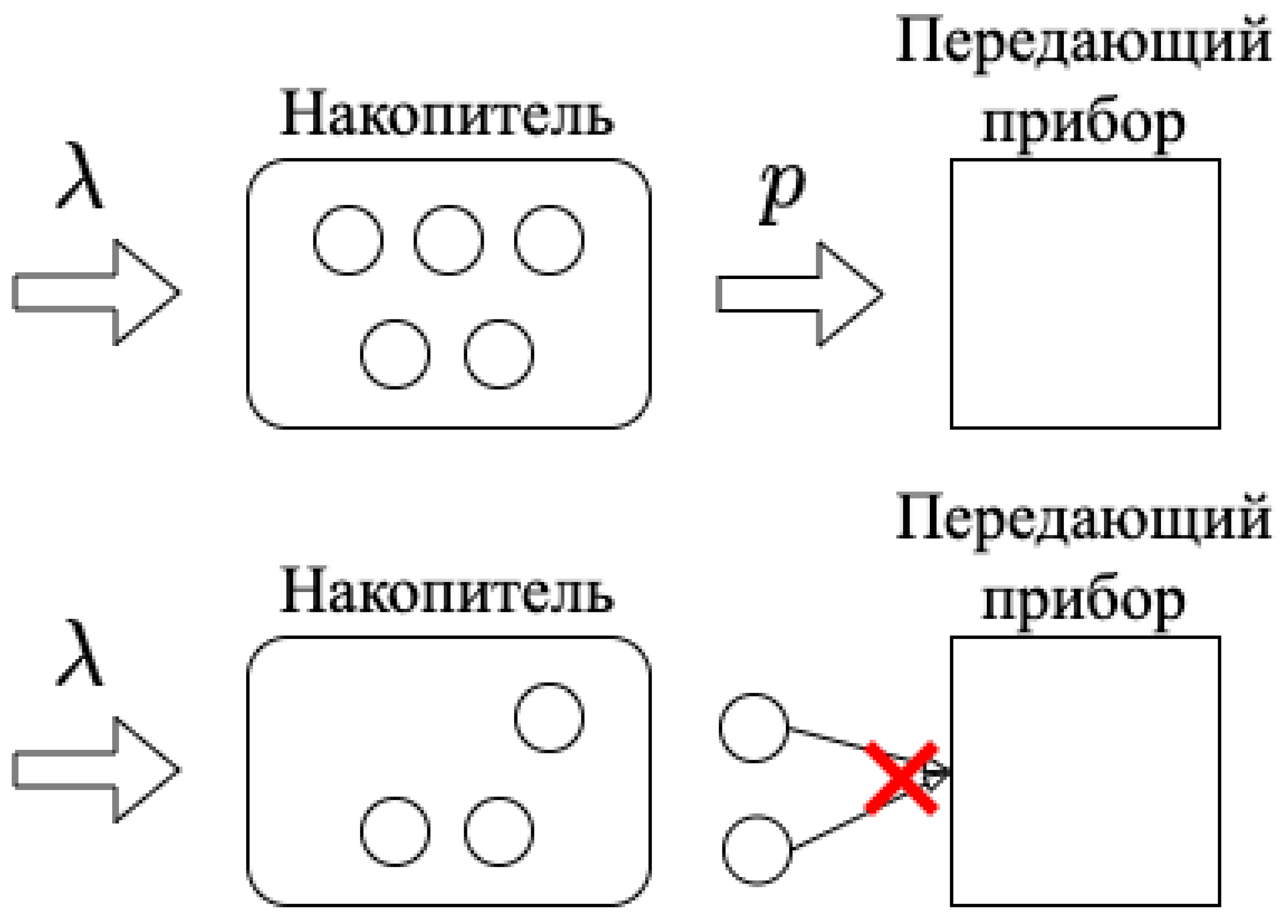
1. Y.Y. Nikitin *textsAsymptotic efficiency of nonparametric tests*, Science, Fizmalit, (1995).
2. A.P. Kovalevskii, E.V. Shatalin, *Asymptotics of Sums of Residuals of One-Parameter Linear Regression on Order Statistics*, Theory of Probability and its Applications, **59**:3 (2015), 375–387
3. H. S. Wieand *A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide*, The annals of Statistics, **4**:5 (1976), 1003-1011.

Стабильность и нестабильность систем случайного множественного доступа с механизмом энергетической подпитки

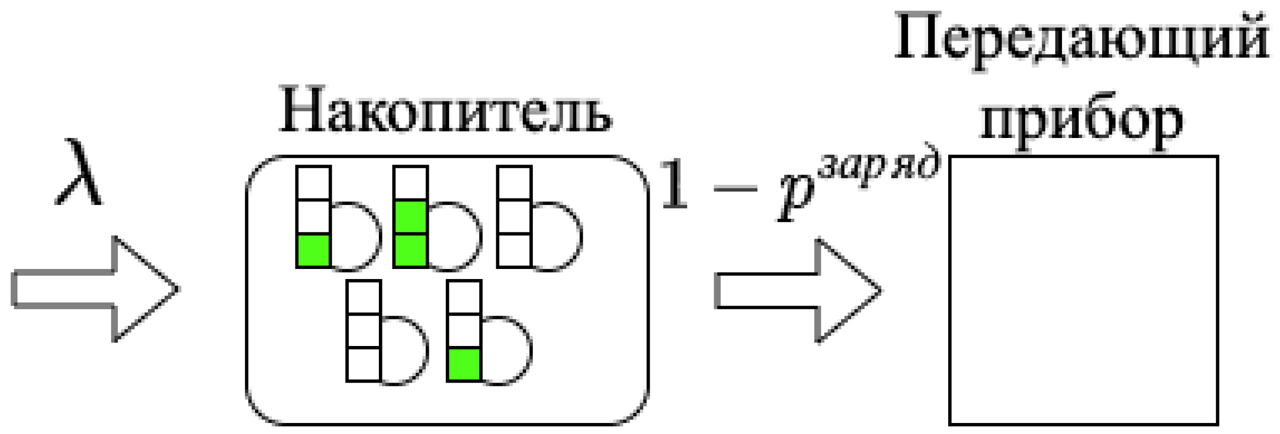
Резлер Александр, НГУ, Новосибирск

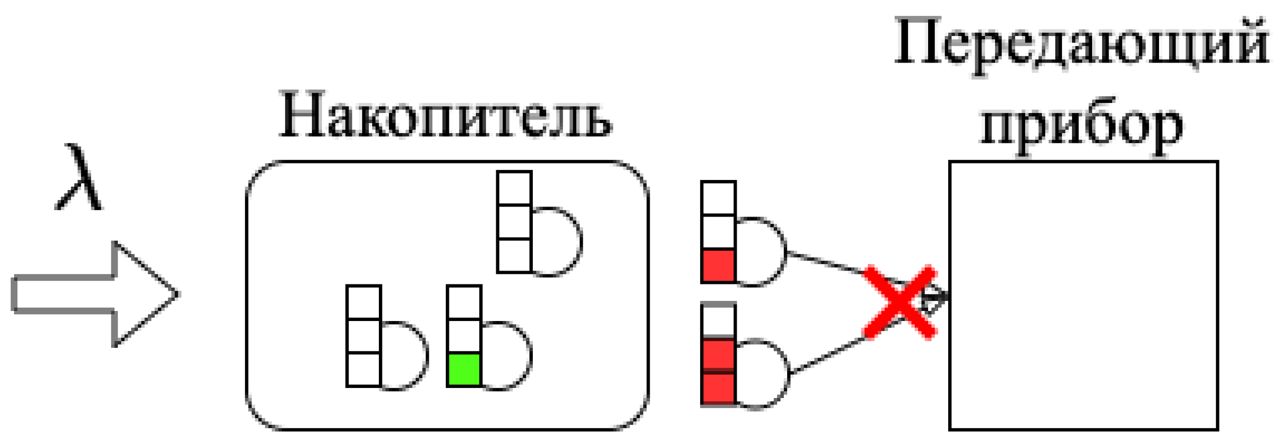
Система случайного множественного доступа с механизмом энергетической подпитки

Система случайного множественного доступа, управляемая протоколом ALOHA:

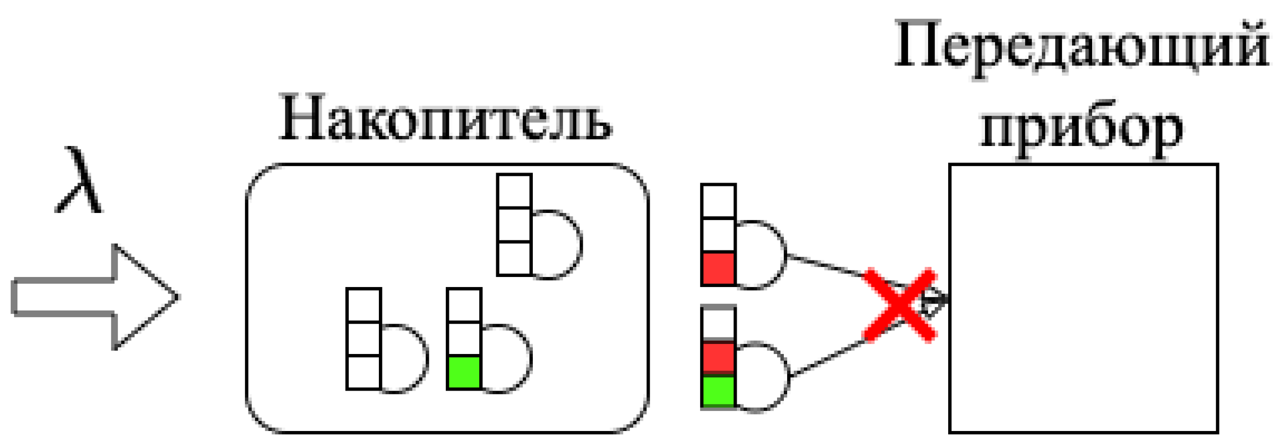


Система случайного множественного доступа, управляемая протоколом ALOHA, снабженная механизмом энергетической подпитки:





(M1)



(M2)

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Определить при каких $\lambda \in \mathbb{R}_+$ система стабильна и нестабильна.

ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема (С.Г. Фосс, Д.К. Ким, А.М. Тюрликов, 2016)

Пусть вместимость каждой батарейки равна 1 и, для некоторой константы $c > 0$, функция, выражающая интенсивность подзарядки, имеет вид $\mu(q) = \min(1, c/q)$, тогда марковская цепь

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - I(B_n(v_n, 1-p) = 1) + \xi_n, \\ v_{n+1} = v_n - B_n(v_n, 1-p) + \widetilde{B}_n(q_n - v_n + \xi_n, \mu(q_n)) \end{cases} \tag{M0}$$

стабильна при $\lambda < ce^{-c}$ и нестабильна при $\lambda > ce^{-c}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема (А.В. Резлер, М.Г. Чебунин, 2022)

Пусть вместимость каждой батарейки неограниченна и, для некоторой константы $c > 0$, функция, выражающая интенсивность подзарядки, имеет вид $\mu(q) = \min(1, c/q)$, тогда марковские цепи

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - I_p(n) + \xi_n, \\ \\ v^{(1)}_{n+1} = v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p) + \widetilde{B}^{(1)}_n(q_n - \sum_{i=1}^{\infty} v^{(i)}_n + \xi_n, \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}^{(2)}_n(v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p), \mu(q_n)) \\ \\ v^{(2)}_{n+1} = v^{(2)}_n - B^{(2)}_n(v^{(2)}_n, 1-p^2) + \widetilde{B}^{(2)}_n(v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p), \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}^{(3)}_n(v^{(2)}_n - B^{(2)}_n(v^{(2)}_n, 1-p^2), \mu(q_n)) \\ \ldots \end{cases} \tag{M1}$$

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - I_p(n) + \xi_n, \\ \\ v^{(1)}_{n+1} = v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p) + \widetilde{B}^{(1)}_n(q_n - \sum_{i=1}^{\infty} v^{(i)}_n + \xi_n, \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}^{(2)}_n(v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p), \mu(q_n)) + B^{(2)}_n(v^{(2)}_n, 1-p^2) \cdot (1 - I_p(n)) \\ \\ v^{(2)}_{n+1} = v^{(2)}_n - B^{(2)}_n(v^{(2)}_n, 1-p^2) + \widetilde{B}^{(2)}_n(v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p), \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}^{(3)}_n(v^{(2)}_n - B^{(2)}_n(v^{(2)}_n, 1-p^2), \mu(q_n)) + B^{(3)}_n(v^{(3)}_n, 1-p^3) \cdot (1 - I_p(n)) \\ \ldots \end{cases} \tag{M2}$$

стабильны при $\lambda < ce^{-c}$ и нестабильны при $\lambda > ce^{-c}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Foss, D. Kim, A. Turlikov, Stability and instability of a random multiple access model with adaptive energy harvesting, Sib. Elektron. Mat. Izv., 13 (2016), 16-25. Zbl 1345.60122
2. А. В. Резлер, М. Г. Чебунин, "Стабильность и нестабильность систем случайного множественного доступа с механизмом энергетической подпитки", Сиб. электрон. матем. изв., 19:1 (2022), 1–17