Примеры коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля над Q (А.Ф. Гундарева, НГУ)

Первая алгебра Вейля

Множество дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами

$$L_n = \partial_x^n + p_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \ldots + p_0(x), \quad p_i(x) \in K[x]$$

образует первую алгебру Вейля $A_1(K) = K[x][\partial_x]$.
В $A_1(K)$ между элементами x и ∂_x выполнено следующее соотношение:

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1.$$

Спектральная кривая

Если два дифференциальных оператора

$$L_n = \partial_x^n + p_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \ldots + p_0(x), \quad L_m = \partial_x^m + q_{m-1}(x)\partial_x^{m-1} + \ldots + q_0(x)$$

коммутируют, то по лемме Берчналла–Чаунди существует ненулевой полином $Q(z, w)$ такой, что $Q(L_n, L_m) = 0$.
Кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$, заданная уравнением $Q(z, w) = 0$, называется спектральной кривой операторов L_n, L_m.

Спектральная кривая

Рассмотрим все решения в $A_1(K)$ уравнения $w^2 = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$:

$$\mathfrak{M} = \{(X, Y) : X, Y \in A_1(\mathbb{C}), \quad Y^2 = X^3 + c_2X^2 + c_1A + c_0\}.$$

На $\mathfrak{M}$ действует $Aut(A_1(\mathbb{C}))$. Если $\varphi \in Aut(A_1(\mathbb{C}))$ и $(X, Y) \in \mathfrak{M}$, то $(\varphi(X), \varphi(Y)) \in \mathfrak{M}$.
Элементы (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) лежат на одной орбите, если существует автоморфизм $A_1(K)$, переводящий (X_1, Y_1) в (X_2, Y_2).

Гипотеза Диксмье

Если уравнение, для которого множество орбит конечно, существует, гипотеза Диксмье, в которой утверждается, что $End(A_1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}) == Aut(A_1(\mathbb{C}))$, верна.

Множество орбит в $A_1(\mathbb{C})$

- Для любого g существует спектральная кривая, заданная уравнением
$$w^2 = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \ldots + c_1z + c_0,$$
для которой множество орбит бесконечно ([2])
- Для почти всех спектральных кривых рода 2 число орбит бесконечно. ([3])

Теорема 1. ([4])

Пусть эллиптическая спектральная кривая, заданная уравнением (1) с рациональными коэффициентами $c_i \in \mathbb{Q}$, содержит хотя бы одну точку (z_0, w_0) с рациональными координатами. Тогда существует счетное семейство коммутирующих дифференциальных операторов, параметризованное рациональными числами $\alpha \in \mathbb{Q}$: $\{(L_{4,\alpha}, L_{6,\alpha}) \in \mathbb{Q}[x][\partial_x]\}$ со спектральной кривой (1) такое, что для различных $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}$ пары операторов $(L_{4,\alpha}, L_{6,\alpha}), \quad (L_{4,\alpha'}, L_{6,\alpha'})$ не переводятся друг в друга элементами из $Aut(A_1(\mathbb{Q}))$.

Следствие 1.1

Множество орбит действия $Aut(A_1(\mathbb{Q}))$ на множестве решений уравнения (1) бесконечно.

Литература

- J. Dixmier Sur les algebres de Weyl // Bull. Soc. Math. France 96 (1968), 209–242.
- A.E. Mironov, A.B. Zheglov Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra// Int. Math. Res. Not. IMRN, 2016: 10 (2016), 2974-2993.
- В.Н. Давлетшина О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два// Сиб. электрон. матем. изв., 10 (2013), 109–112.
- Гундарева А.Ф. О коммутирующих элементах в первой алгебре Вейля над $\mathbb{Q}$ // Сиб. матем. журн., 63:5 (2022), 1052-1063.

K_0 некоторых многообразий

Роман Елисеев
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ

В этом тексте мы введем некоторые определения, необходимые для разговора о функторе K_0, рассмотрим некоторые его свойства, а также приведем пример его вычисления от проективных пространств. Согласно А. Гротендику $K_0(\mathbb{P}^n)$ - свободная абелева група с базисом $[\mathcal{O}], [\mathcal{O}(-1)], ..., [\mathcal{O}(-n)]$. Мы ниже докажем это методом И. Панина.

Ясно, что $K_0(pt) = \mathbb{Z}$. Приведем пример вычисления $K_0(\mathbb{P}^n)$.

Согласно А. Бейлинсону на $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ резольвента Кошуля структурного пучка $\mathcal{O}_\Delta$ диагонали Δ имеет вид

$$(B) \quad 0 \to p_1^*\left(\Omega^n(n)\right) \otimes p_2^*\mathcal{O}(-n)) \to \ldots \to p_1^*\left(\Omega^1(1)\right) \otimes p_2^*(\mathcal{O}(-1)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

(здесь $p_i : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ - проекции).

Поэтому $[\mathcal{O}_\Delta] = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [\mathcal{O}(-i)] \boxtimes [\Omega^i(i)]$

Пусть X - гладкое проективное многообразие, и $f : X \to pt$. Через $<,>$ обозначим симметрическую билинейную форму на $K_0(X)$ со значениями в $K_0(pt) = \mathbb{Z}$, заданную правилом: $< a, b >= f_*(a \otimes b)$

Теорема 1. Пусть X и $f : X \to pt$ как и выше, $\Delta := \Delta(X) \hookrightarrow X \times X$ - диагональ. Предположим, существуют такие $a_i, b_i \in K_0(X)$, что в $K_0(X \times X)$ имеет место $[O_\Delta] = \Sigma a_i \boxtimes b_i$ и кроме того выполнено $< a_i, b_j >= \pm\delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера. Тогда:

а) $K_0(X)-$ конечно-порожденная абелева группа без кручения;

б) Элементы a_i равно как и b_i образуют базис в $K_0(X)$;

Доказательству предпошлем несколько замечаний. Каждый элемент $\mathbf{z} \in K_0(X \times X)$ определяет естественные гомоморфизмы $z_* : K_0(X) \to K_0(X) = (p_2)_* \left(p_1^*(a) \cdot \mathbf{z}\right)$, где $p_1, p_2 : X \times X \to X-$ естественные проекции. Если $\mathbf{z} = c \boxtimes d \overset{\text{def}}{=} p_1^* c \otimes p_2^* d$, то $\mathbf{z}_*(a) = f_*(a \cdot c) \cdot d$ для всех $a \in K_0(X)$ в силу формулы проекции. В частности, если $a \in K_0(X)$, то $z_*(a) =< a, c > \cdot d$.Если $\mathbf{z} = [O_\Delta]$, то $\mathbf{z}_* = \text{id}$. Поскольку $[O_\Delta] =$

$\Sigma a_i \boxtimes b_i$, то для всех $x \in K_0(X)$ имеем $x = [O_\Delta]_* (x) = (\Sigma a_i \boxtimes b_i)_* (x) = \Sigma f_* (a_i \cdot x) \cdot b_i$. Поэтому для $x \in K_0(X)$

$$\Sigma \langle a_i, x\rangle \cdot b_i = x = \Sigma a_i \cdot \langle x, b_i\rangle \qquad (*)$$

Доказательство Теормемы 1. Равенство (*) доказывает, что элементы a_i порождают $K_0(X)$. Свойство $< a_i, b_j >= \pm\delta_{ij}$ показывает, что a_i линейно независимы. Итак, a_i образуют базис свободной абелевой группы $K_0(X)$. Аналогично b_j - это базис свободной абелевой группы $K_0(X)$. Теорема 1 доказана.
Теорема 2. Классы расслоений $O(-i)$ при $0 \leq i \leq n$ и $\Omega^j(j)$ где $0 \leq j \leq n$ образуют два базиса свободной абелевой группы $K_0(P^n)$.
Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий из теоремы 1. В качестве резольвенты структурного пучка диагонали на $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ можно взять резольвенту Бейлинсона (B), условие $< \mathcal{O}(-i), \Omega^j(j) >= \pm\delta_{ij}$ следует из стандартного вычисления[3]. Теорема доказана.

Из Теоремы 2 заключаем, что $K_0(P^n) = \mathbb{Z}^{n+1}$.
Отметим, что в ходе вычислений мы пользовались только резольвентой Бейлинсона и вычислением скалярного произведения. Также отметим, что с помощью формулы (*) и резольвены Капранова структурного пучка диагонали на $G \times G$, приведенные выше вычисления обобщаются на случай грассманианов - там базисом будут выступать классы некоторых расслоений, построенных из тавтологических и антитавтологических расслоений.

Список использованной литературы

0. A.Grothendieck. La theorie des classes de Chern, BuII.Soc.Math.France, 86 (1958), 136-154.
1. И. А. Панин, Алгебраическая K-теория грассмановых многообразий и их скрученных форм, // Функц. анализ и его прил., 1989, том 23, выпуск 2, -С. 71–72
2. Бейлинсон А. А. // Функцион. анализ и его прил.— 1978. Т. 12, вып. 3,—С. 68—69.
3. Капранов М. М. // Функцион. анализ и его прил.— 1985. Т. 17, вып. 2.— С. 78—79

Графы Горески-Коттвица-Макферсона и кольцо Чжоу орисферических многообразий с числом Пикара один

Александра Сонина
sasha-sonina@mail.ru
СПбГУ

Определение

Пусть G — редуктивная группа и $B \subset G$ — борелевская подгруппа. $G-$многообразие X будем называть сферическим, если в X есть плотная $B-$орбита.

Определение

Пусть X — $G-$сферическое мнообразие и пусть H — стабилизатор точки из плотной $G-$орбиты в X. Тогда многообразие X — орисферическое, если H содержит подгруппу, сопряженную с U, где U — максимальная унипотентная подгруппа G, содержащаяся в борелевской подгруппе B.

Теорема

Пусть X — гладкое проективное $G-$орисферическое многообразие с группой Пикара ранга 1 над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Тогда либо X — однородное, либо X может быть однозначно построено из тройки $(Type(G), \omega_Y, \omega_Z)$ находящейся в следующем списке

(1) $(B_n, \omega_{n-1}, \omega_n)$ *с* $n \geq 3$
(2) $(B_3, \omega_1, \omega_3)$
(3) $(C_n, \omega_m, \omega_{m-1})$, *с* $n \geq 2$ *и* $2 \leq m \leq n$
(4) $(F_4, \omega_2, \omega_3)$
(5) $(G_2, \omega_1, \omega_2)$

где $Type(G)$ — полупростой тип Ли группы G, а ω_Y, ω_Z — фундаментальные веса.

GKM-графы

Вершины - неподвижные точки. Ребра - инвариантные прямые. Метка на ребре - характер. Подсчет ориентации: пусть x на прямой и пусть $p = \lim\limits_{t \to 0}(tx)$ и $q = \lim\limits_{t \to \infty}(tx)$. Такие две предельные точки будут неподвижными, тогда поставим ориентацию на ребрах от предела в 0 к пределу к ∞.

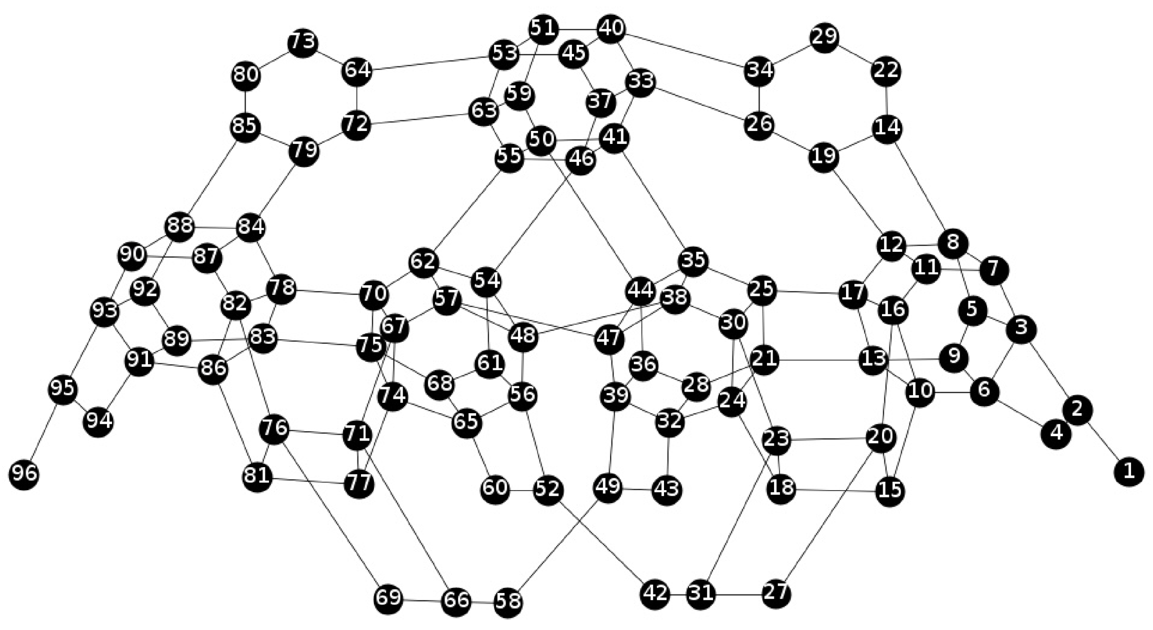
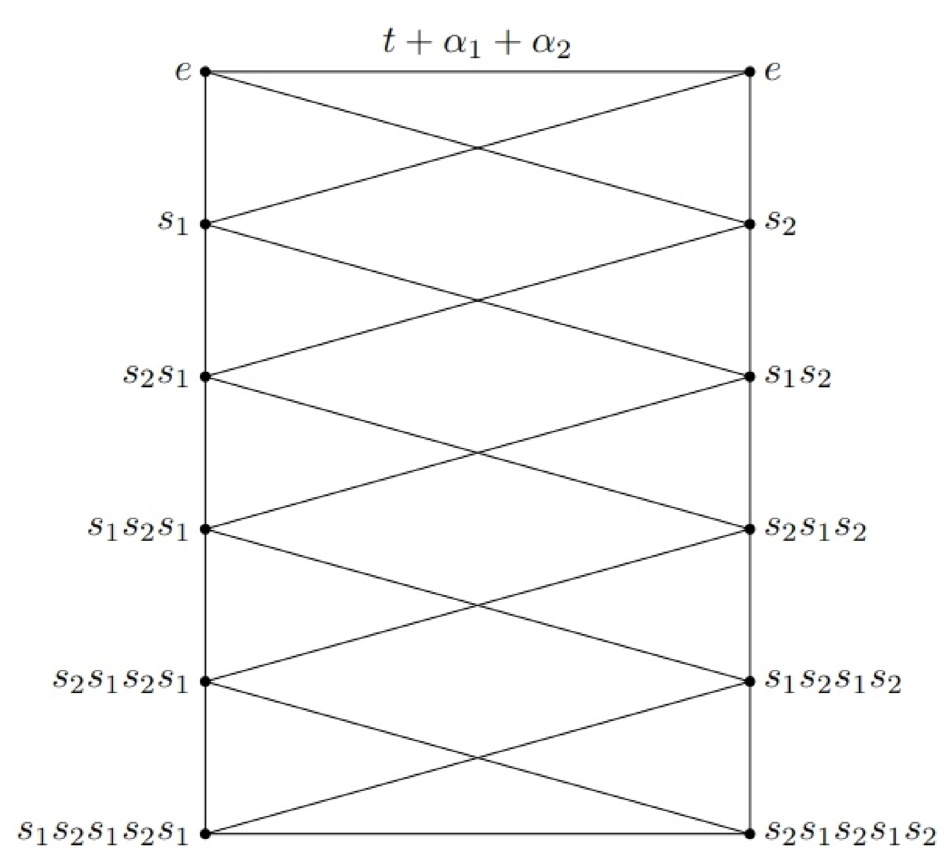


Рис.: Пример GKM-графа



Пусть $\{P_x\}$ - семейство многочленов, которые стоят в вершинах графа. Пусть на ребре xy стоит метка l_{xy}, тогда на этом ребре выполняется условие делимости, если $l_{xy} | (P_x - P_y)$. Расстановка будет называться правильной, если для каждого ребра выполняется условие делимости.

Теорема (M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson,1998)

$CH_T^*(X) = \{(p_v) \in \oplus_{v \in X^T} CH_T^*(v) : l_{uv} | (p_u - p_v)$, если u и v лежат на инвариантной прямой с характером l_{uv} $\}$.

Определение

Система правильных расстановок многочленов называется flow-up базисом, если

1. *Эта система расстановок — базис над $CH_T^*(pt)$.*
2. *Все многочлены, записанные в вершинах, - однородные и степени всех ненулевых многочленов во всех вершинах равны фиксированнной для данной расстановки константе.*
3. *$\forall w$ существует элемент системы расстановок такой, что в этой расстановке в вершине w стоит произведение меток ребер, выходящих из этой вершины, а ненулевые элементы могут стоять только в вершинах v с $v \geq w$.*

Теорема (J.S.Tymoczko, 2009)

Пусть Γ - GKM-граф проективного однородного многообразия. Тогда flow-up базис строится с помощью операторов дифференцирования.

Пусть $f : X \to Y$ - морфизм многообразий, тогда он индуцирует морфизм GKM-графов и можно определить следующие отображения правильных расстановок на них

Определение

Отображение пушфорвард это отображение, которое задается по следующей формуле $f_*(Q)_w = P_w = \sum Q_v \frac{h(w)}{h(v)}$, где сумма берется по всем прообразам вершины w, а $h(w)$ — произведение меток на ребрах входящих (они берутся со знаком -) и выходящих (они берутся со знаком $+$) из вершины w.

Определение

Отображение пулбэк это отображение, которое задается следующей формулой $f^*(P)_w = Q_w = P_{f(w)}$, т.е. мы просто дублируем правильную расстановку из второго графа на первый.

X - орисферическое многообразие типа (1) - (5) из теоремы 1
Первую половину flow-up базиса мы получаем пушфорвардом flow-up базиса из G/P_Z в X.
ζ — первый эквивариантный класс Черна соответствующего расслоения $\mathcal{O}(1)$.
$p_1 : G/(P_Y \cap P_Z) \to G/P_Y$ и $p_2 : G/(P_Y \cap P_Z) \to G/P_Z$.
$\{\xi_i\}$ — flow-up базис для G/P_Y.
$Q = (p_2)_*(p_1^*(\xi_i \zeta^k))$ дополняет ξ_i до правильной расстановки на GKM-графе, соответствующем многообразию X.
По определению пушфорворда, получается следующая формула:

$$Q_u = \sum \frac{(\xi_i)_{[uw]} uw(\zeta^k)}{uw(\prod(\alpha_i))}$$

сумма берется по всем $w \in W(P_Y)/W(P_Y \cap P_Z)$, а произведение в знаменателе по всем $\alpha_i \in U(P_Y) \setminus U(P_Z)$.
$[uw]$ — класс элемента uw в $W(G)/W(P_Z)$.

Пример

Случай $G = G_2$

$$Q_w = \frac{(\xi_i)_{[w]} w(-\alpha_1 - t) - (\xi_i)_{[ws_2]} w(-\alpha_1 - \alpha_2 - t)}{w(\alpha_2)}$$

Пример

Случай $G = F_4$.

$$Q_w = \frac{(\xi_i)_{[w]} w((\alpha_2 + t)^2)}{w(\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4))} - \frac{(\xi_i)_{[ws_3]} ws_3((\alpha_2 + t)^2)}{w(\alpha_3 \alpha_4)} + \frac{(\xi_i)_{[ws_4s_3]} ws_4s_3((\alpha_2 + t)^2)}{w((\alpha_3 + \alpha_4)\alpha_4)}$$

Теорема (A.C., 2022)

$CH_T^*((G_2, \omega_1, \omega_2)) = CH_T^*(pt)[h, flow_2, flow_3] \; / < R_i >_{i \in \{1,2,3,4\}}$, где h — образующая степени 1, $flow_2$ — образующая степени 2, $flow_3$ — образующая степени 3, а R_i — некоторые соотношения.
$R_1 : 2flow_3 + flow_2 \cdot (-3t + 4\alpha_2 + 6\alpha_1) - h \cdot \alpha_2(t - \alpha_2 - \alpha_1) - 4hflow_2 + h^2 \cdot (t - 2\alpha_2 - \alpha_1) + h^3 = 0$

Следствие

$CH^*(X) = CH_T^*(X) \otimes_{CH_T^*(pt)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[h, flow_2, flow_3] / < R_i' >_{i \in I}$, где R_i' получаются из R_i "занулением" переменных t, α_1, α_2, т.е. в соотношениях остаются только мономы степени 0. А именно:
$R_1' : 2flow_3 - 4hflow_2 + h^3 = 0$
$R_2' : -3flow_2^2 + h^2 flow_2 = 0$
$R_3' : +flow_3^2 + 2hflow_2 flow_3 + 4h^2 flow_2^2 - 4h^3 flow_3 = 0$
$R_4' : -flow_2^3 + 2hflow_2 flow_3 + 2h^2 flow_2^2 - 2h^3 flow_3 = 0$

Орбиты, ассоциированные с расстановками ладей в системах корней G_2 и F_4

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

Сурков Матвей Александрович

$\mathfrak{g}$ — простая комплексная конечномерная алгебра Ли
$\mathfrak{b}$ — борелевская подалгебра в $\mathfrak{g}$
Φ — система корней $\mathfrak{g}$
Φ^+ — множество положительных корней
$\mathfrak{n}$ — нильрадикал $\mathfrak{b}$
$N = \exp(\mathfrak{n})$ — унипотентная алгебраическая группа
$N \curvearrowright \mathfrak{n}$ — присоединённое действие
$N \curvearrowright \mathfrak{n}^*$ — коприсоединённое действие
Если Φ — система корней, то $\mathfrak{n} = \langle e_\alpha, \alpha \in \Phi^+\rangle$

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} \mathrm{const} \cdot e_{\alpha+\beta}, & \alpha+\beta \in \Phi^+, \\ 0, & \alpha+\beta \notin \Phi^+ \end{cases}$$

Пример.
$\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{F}) = \{\phi \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{F}) \colon \mathrm{tr}(\phi) = 0\}$
$\Phi = A_{n-1} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$
$A_{n-1}^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \right\}, \ \mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}, \ g.x = gxg^{-1},\ g \in N, x \in \mathfrak{n}$$

Определение
Подмножество D множества Φ^+ называется расстановкой ладей, если $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ для всех различных $\alpha, \beta \in D$.

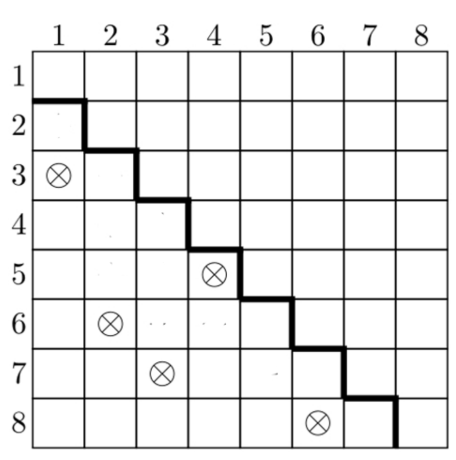
Определение
Расстановка ладей D называется ортогональной, если $(\alpha, \beta) = 0$ для всех различных $\alpha, \beta \in D$.

$\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — базис в $\mathfrak{n}$; $\{e_\alpha^*,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — двойственный базис в $\mathfrak{n}^*$.
Пусть D — расстановка ладей, $\xi \colon D \to \mathbb{C}^\times$ — отображение. Положим

$$f_{D,\xi} = \sum_{\alpha \in D} \xi(\alpha) e_\alpha^* \in \mathfrak{n}^*.$$

Будем рассматривать коприсоединённую орбиту $\Omega_{D,\xi}$ линейной формы $f_{D,\xi}$.
Пусть $\Phi = A_{n-1}$. Отождествим $\mathfrak{n}^*$ с пространством $\mathfrak{n}^-$ строго нижнетреугольных матриц по формуле $\langle \lambda, x \rangle = \mathrm{tr}(\lambda x)$ для $x \in \mathfrak{n}$, $\lambda \in \mathfrak{n}^-$. Тогда фактически $e_{i,j}^* = e_{j,i}$.

Пример. Пусть $n = 8$, $D = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 - \varepsilon_6,\ \varepsilon_3 - \varepsilon_7,\ \varepsilon_4 - \varepsilon_5,\ \varepsilon_6 - \varepsilon_8\}$. На рисунке ниже схематично нарисована линейная форма $f_{D,\xi}$, символы $\otimes$ расставлены в ячейках, соответствующих корням из D.



Определение
Базисное подмногообразие $\mathcal{O}_{D,\xi}$, соответствующее расстановке ладей D и отображению $\xi \colon D \to \mathbb{C}^\times$, — это

$$\mathcal{O}_{D,\xi} = \sum_{\alpha \in D} \Omega_{\{\alpha\},\xi_\alpha},$$

где ξ_α — ограничение ξ на $\{\alpha\}$.

Определение
Расстановка ладей D называется несингулярной если $\alpha - \beta \notin \Phi^+$ для различных $\alpha, \beta \in D$.

Гипотеза 1
Каждое базисное подмногообразие $\mathcal{O}_{D,\xi}$ является аффинным подмногообразием в $\mathfrak{n}^*$, и

$$\mathfrak{n}^* = \bigsqcup_{D,\xi} \mathcal{O}_{D,\xi},$$

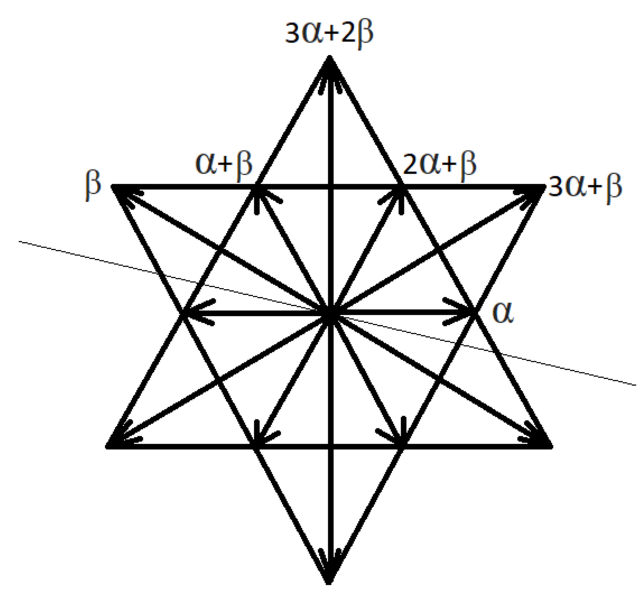
где объединение берется по всем несингулярным расстановкам ладей D и всем отображениям $\xi \colon D \to \mathbb{C}^\times$.

Гипотеза 2
Пусть D — несингулярная расстановка ладей, а ξ_1, ξ_2 — различные отображения из D в $\mathbb{C}^\times$. Тогда соответствующие коприсоединенные орбиты Ω_{D,ξ_1} и Ω_{D,ξ_2} не совпадают.

Теорема (К.А.М. Андре, 1994)
Гипотеза 1 верна для $\Phi = A_{n-1}$.

Теорема (М.С., 2021)
Гипотеза 1 верна для $\Phi = G_2$.

Для G_2 выписаны явные уравнения $\mathcal{O}_{D,\xi}$.



	D	Уравнения $\mathcal{O}_{D,\xi}$		D	Уравнения $\mathcal{O}_{D,\xi}$
1	$\varnothing$	$\lambda_\gamma = 0$ **для всех** $\gamma \in \Phi^+$	**2**	α	$\lambda_\alpha = \xi(\alpha)$, $\lambda_\gamma = 0$ **для** $\gamma \neq \alpha$
3	β	$\lambda_\beta = \xi(\beta)$, $\lambda_\gamma = 0$ **для** $\gamma \neq \beta$	**4**	$\alpha + \beta$	$\lambda_{\alpha+\beta} = \xi(\alpha+\beta)$, $\lambda_{2\alpha+\beta} = \lambda_{3\alpha+\beta}$ $= \lambda_{3\alpha+2\beta} = 0$
5	$2\alpha + \beta$	$\lambda_{2\alpha+\beta} = \xi(2\alpha+\beta)$, $2c_2\lambda_\beta\lambda_{2\alpha+\beta}$ $-c_1\lambda_{\alpha+\beta}^2 = 0$, $\lambda_{3\alpha+\beta} = \lambda_{3\alpha+2\beta} = 0$	**6**	$3\alpha + \beta$	$6c_3^2\lambda_\beta\lambda_{3\alpha+\beta}^2$ $-c_1c_2\lambda_{2\alpha+\beta}^3 = 0$, $2c_3\lambda_{\alpha+\beta}\lambda_{3\alpha+\beta}$ $-c_2\lambda_{2\alpha+\beta}^2 = 0$, $\lambda_{3\alpha+\beta} = \xi(3\alpha+\beta)$, $\lambda_{3\alpha+2\beta} = 0$
7	$3\alpha + 2\beta$	$2c_5\lambda_\alpha\lambda_{3\alpha+2\beta}$ $-2c_3\lambda_{\alpha+\beta}\lambda_{3\alpha+\beta}$ $+c_2\lambda_{2\alpha+\beta}^2 = 0$, $\lambda_{3\alpha+2\beta} = \xi(3\alpha+2\beta)$	**8**	$\alpha,\ \beta$	$\lambda_\alpha = \xi(\alpha)$, $\lambda_\beta = \xi(\beta)$, $\lambda_\gamma = 0$ **для** $\gamma \neq \alpha,\ \beta$
9	β, $2\alpha + \beta$	$\lambda_{2\alpha+\beta} = \xi(2\alpha+\beta)$, $2c_2\lambda_\beta\lambda_{2\alpha+\beta} - c_1\lambda_{\alpha+\beta}^2 =$ $2c_2\xi(\beta)\xi(2\alpha+\beta)$, $\lambda_{3\alpha+\beta} = \lambda_{3\alpha+2\beta} = 0$	**10**	β, $3\alpha + \beta$	$6c_3^2\lambda_\beta\lambda_{3\alpha+\beta}^2 - c_1c_2\lambda_{2\alpha+\beta}^3$ $= 6c_3^2\xi(\beta)\xi(3\alpha+\beta)^2$, $2c_3\lambda_{\alpha+\beta}\lambda_{3\alpha+\beta}$ $-c_2\lambda_{2\alpha+\beta}^2 = 0$, $\lambda_{3\alpha+\beta} = \xi(3\alpha+\beta)$, $\lambda_{3\alpha+2\beta} = 0$
11	$\alpha + \beta$, $3\alpha + \beta$	$2c_3\lambda_{\alpha+\beta}\lambda_{3\alpha+\beta}$ $-c_2\lambda_{2\alpha+\beta}^2 =$ $2c_3\xi(\alpha+\beta)\xi(3\alpha+\beta)$, $\lambda_{3\alpha+\beta} = \xi(3\alpha+\beta)$, $\lambda_{3\alpha+2\beta} = 0$	**12**	α, $3\alpha + 2\beta$	$2c_5\lambda_\alpha\lambda_{3\alpha+2\beta}$ $-2c_3\lambda_{\alpha+\beta}\lambda_{3\alpha+\beta}+$ $c_2\lambda_{2\alpha+\beta}^2$ $= c_5\xi(\alpha)\xi(3\alpha+2\beta)$, $\lambda_{3\alpha+2\beta} = \xi(3\alpha+2\beta)$

Предложение
Если D — расстановка ладей, ξ_1, ξ_2 — отображения из D в $\mathbb{C}^\times$, $\beta \in D$ — максимальный корень и $\xi_1(\beta) \neq \xi_2(\beta)$, то $\Omega_{D,\xi_1} \neq \Omega_{D,\xi_2}$.

Предложение (М.В. Игнатьев, А.А. Шевченко, 2019)
Пусть Φ — неприводимая система корней, а D — несингулярная расстановка ладей в Φ^+. Пусть β_0 — корень в D, ξ_1 и ξ_2 — отображения из D в $\mathbb{C}^\times$, для которых $\xi_1(\beta_0) \neq \xi_2(\beta_0)$. Предположим, что существует простой корень $\alpha_0 \in \Delta$, удовлетворяющий условиям $(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$ и $(\alpha_0, \beta) = 0$ для всех $\beta \in D$ таких, что $\beta \not< \beta_0$. Тогда $\Omega_{D,\xi_1} \neq \Omega_{D,\xi_2}$.

Лемма
Пусть D — несингулярная ортогональная расстановка ладей в Φ^+, а $\xi_1,\ \xi_2 \colon D \to \mathbb{C}^\times$ — отображения. Предположим, что существует единственный максимальный корень β_0 в D (относительно естественного порядка на Φ^+), а $\beta \in D \setminus \{\beta_0\}$ таков, что $\gamma \not> \beta$ для всех $\gamma \in D \setminus \{\beta_0\}$. Также предположим, что $\beta_0 - \beta = \gamma_1 + \ldots + \gamma_k$ однозначно выражается в виде суммы положительных корней γ_j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Далее предположим, что $\beta + \sum_{j \in J} \gamma_j \in \Phi^+$ для каждого подмножества $J \subset \{1,\ \ldots,\ k\}$. Если $\xi_1(\beta) \neq \xi_2(\beta)$, то Ω_{D,ξ_1} и Ω_{D,ξ_2} не совпадают.

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$, где $\mathfrak{n}^-$ — нильрадикал борелевской подалгебры, противоположной $\mathfrak{b}$. Пусть Φ^- — множество отрицательных корней, тогда корневые векторы e_α, $\alpha \in \Phi^-$, образуют базис $\mathfrak{n}^-$. Далее, пусть $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ — простые корни из Φ, а h_{α_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$, — базис $\mathfrak{h}$ такой, что $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi\} \cup \{h_{\alpha_i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ является базисом $\mathfrak{g}$.

Зафиксируем на этом базисе линейный порядок $\leqslant_t$ такой, что $e_\alpha <_t h_{\alpha_i} <_t e_{-\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \Phi^+$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $e_\alpha <_t e_\beta$, если $\alpha, \beta \in \Phi$ и $\alpha > \beta$. Это отождествляет $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_{\dim \mathfrak{g}}(\mathbb{C})$, а $\mathrm{ad}(\mathfrak{n})$ с подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{u}$ всех верхнетреугольных матриц из $\mathfrak{gl}_{\dim \mathfrak{g}}(\mathbb{C})$ с нулями на диагонали. Эта модификация свела случай произвольной системы корней к случаю A_{n-1}, изученному Андре.

Теорема (М.С., 2021)
Гипотеза 2 верна для ортогональных расстановок ладей в случае $\Phi = F_4$.