

СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

V международная конференция

SUPERCOMPUTER TECHNOLOGIES OF MATHEMATICAL MODELLING

V international conference

Тезисы докладов
Abstracts

June 27 – 30, 2022 / 27 – 30 июня 2022 г.
Moscow, Russia / Москва, Россия

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Математический центр мирового уровня “Математический институт
им. В.А. Стеклова Российской академии наук”*

**Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
Ammosov North-Eastern Federal University in Yakutsk
Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences
Steklov International Mathematical Center**



Steklov International Mathematical Center



SIMONS FOUNDATION



*V Международная конференция
«Суперкомпьютерные технологии
математического моделирования»*

**V International conference
«Supercomputer technologies of mathematical
modelling»**

ТЕЗИСЫ

ABSTRACTS

27 - 30 июня, Москва, Россия
Russia, Moscow, June 27 - 30

2022

УДК 519.8:004.9(063)

ББК 22.18я431

С11

Международная конференция проводится при поддержке Фонда Саймонса, Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265) и компании «Хуавэй»

Суперкомпьютерные технологии математического моделирования:
тезисы докладов V международной конференции / Под редакцией В.И. Васильева. – Якутск : Издательский дом СВФУ, 2022. – 50 с.

ISBN 978-5-7513-3320-1

В сборник включены тезисы докладов, представленных на V международной конференции «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования».

Для научных и инженерно-технических работников, занимающихся вычислительной математикой и математическим моделированием.

УДК 519.8:004.9(063)

ББК 22.18я431

© Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, 2022

ISBN 978-5-7513-3320-1

© Северо-Восточный федеральный университет, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Пленарные доклады (27.06.2022 — первый день)	6
<u>В.И. Ерофеев</u> . Нелинейная волновая динамика пластин и балок, лежащих на упругих основаниях	6
<u>С.Ю. Доброхотов, Х.Х. Ильясов, О.Л. Толстова</u> . Эффективные асимптотики для линейных волн на поверхности жидкости, порожденных локализованными во времени и пространстве источниками в упругом основании	6
<u>В.В. Булатов</u> . Аналитические методы в задачах волновой динамики стратифицированных сред с течениями	7
<u>А.В. Порубов</u> . Локализация нелинейных волн в метаматериале	7
<u>А.А. Чесноков</u> . Внутренние волны и перемешивание в сдвиговых течениях слоистой стратифицированной жидкости	8
<u>А.П. Чупахин, С.А. Васюткин</u> . Гемодинамика сосудов мозга и аорты	8
Пленарные доклады (28.06.2022 — второй день)	9
<u>В.Ф. Тишкин, М.М. Краснов, М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова</u> . О влиянии выбора численного потока в методе Галеркина с разрывными базисными функциями при решении задач с ударными волнами	9
<u>Г.Г. Лазарева</u> . Математическое моделирование вращения расплава вольфрама под воздействием импульсных нагрузок	9
<u>А.Л. Афендилов, В.С. Никитин</u> . О численном моделировании на декартовых сетках нестационарных задач в сверхзвуковой аэродинамике	10
<u>Ю.М. Лаевский</u> . Многомасштабные явные методы решения сеточных параболических задач	10
<u>А.Л. Карчевский</u> . О решении интегрального уравнения Вольтерра первого рода типа свертки	10
<u>Т.К. Козубская</u> . Опыт вихреразрешающего моделирования турбулентных течений в прикладных задачах аэродинамики и аэроакустики	11
<u>А.В. Аксенов, К.П. Дружков</u> . Построение точных решений системы уравнений одномерной газовой динамики без градиентной катастрофы	11
<u>И.Б. Бахолдин</u> . Структуры разрывов в решениях систем уравнений с исчезающей дисперсией коротких волн	12
<u>А.Н. Голубятников, Д.В. Украинский</u> . К проблеме концентрации энергии	12
Пленарные доклады (29.06.2022 — третий день)	13
<u>С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, Н.С. Новиков, Н.М. Прохошин</u> . Прямые методы решения обратных задач	13
<u>В.В. Шайдуров</u> . Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений со свойствами корректора и предиктора	13
<u>И.Б. Петров</u> . Вычислительные задачи Арктического региона РФ	14
<u>В.А. Гуцин</u> . Создание и развитие ВЦ ИАП РАН	14

<u>Н.И. Сидняев</u> . Численная методика реализации центрально-композиционного ротатабельного плана с учетом неадекватности	15
<u>М.А. Шишленин</u> , С.И. Кабанихин. Итерационные методы решения обратных задач в приложениях	15
<u>Evgeny Savenkov</u> , Vladislav Balashov. Phase-field models and numerical simulation of complex multiphase flows at porescale	15
<u>П.Н. Вабищевич</u> . Численное решение задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений с разностным ядром	16
<u>В.М. Головизнин</u> , Н.А. Афанасьев. Бесповный балансно-характеристический метод решения задач взаимодействия жидкости и газа с деформируемыми объектами	16
<u>В.И. Васильев</u> , А.М. Кардашевский, В.В. Попов. Методы решения дискретных аналогов некоторых обратных задач	17
Секционные доклады (30.06.2022) — 1 секция	18
<u>В.А. Шаргатов</u> , А.П. Чугайнова, Г.В. Коломийцев. Глобальная устойчивость решений в виде бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргера с переменным параметром диссипации	18
<u>А.Г. Кузьмин</u> , А.Н. Рябинин. Двойной гистерезис трансзвукового течения в изогнутом канале	18
<u>Г.В. Решетова</u> , В.А. Чеверда. Локализация зон стабильности вечной мерзлоты и газогидратов ледниковой части Восточно-Сибирского шельфа	18
<u>А.С. Савин</u> , А.Ю. Шашков. Перенос жидких частиц поверхностными и внутренними волнами	19
<u>N.P. Lazarev</u> . Signorini-type problems for 2D composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions	20
<u>Е.Л. Гусев</u> , В.Н. Бакулин. Разработка оптимальных обобщенных моделей долговечности композитов оптимальной структуры и сложности при воздействии экстремальных факторов на основе современных положений молекулярно-кинетической теории (МКТ)	20
<u>V.L. Litvinov</u> , K.V. Litvinova. Mathematical modeling of string vibrations with a movable boundary	21
<u>В.Н. Бакулин</u> . Блочные модели послойного конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами	22
<u>А.А. Федотов</u> , В.В. Канибер, П.В. Храпов. Анализ и прогнозирование изменений температурного режима мерзлого грунта и толщи льда с учетом потепления климата	23
<u>А.А. Мазитов</u> , Ю.О. Бобрен, И.М. Губайдуллин. Математическое моделирование многофазных потоков с использованием современных технологий	23
<u>А.А. Медведев</u> , Н.И. Сидняев. Передача теплоты в изотропном материале	24

<u>Е.С. Казанцева, Н.И. Сидняев.</u> Теорема об алгебре нечетких множеств и решетке функций принадлежности	24
<u>Е.С. Попущина, Н.И. Сидняев.</u> Метод решения уравнений для несжимаемого пограничного слоя в условии абляции	24
<u>Г.В. Коломийцев, В.А. Шаргатов.</u> Исследование решений обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса в виде бегущих волн в среде с нелинейной диссипацией	25
<u>С.В. Горкунов, В.А. Шаргатов.</u> Эволюция ударных волн в условиях промышленной застройки	25
<u>Н.М. Гордеева, С.И. Безродных.</u> Аналитическое решение системы интегродифференциальных уравнений для модели плазмы во внешнем поле	26
<u>Р.И. Фасхутдинова, Л.В. Еникеева, И.М. Губайдуллин.</u> Исследование на устойчивость задач химической кинетики	26
<u>И.В. Баранов, Н.И. Сидняев.</u> Теория планирования эксперимента для определения динамических параметров спускаемых космических аппаратов	27
Секционные доклады (30.06.2022) — 2 секция	28
<u>И.М. Губайдуллин.</u> Разработка и анализ детализированных кинетических моделей промышленно важных каталитических реакций на основе решения прямых и обратных задач	28
<u>V.A.Cheverda, V.I.Kostin.</u> SVD-analysis in application to multiparameter inverse problem of seismic monitoring	28
<u>А.А. Алиханов.</u> Разностные схемы второго порядка аппроксимации для телеграфного уравнения дробного порядка по времени	28
<u>О.И. Криворотько, С.И. Кабанихин.</u> Численные алгоритмы построения сценариев распространения инфекционных заболеваний на основе методов машинного обучения и решения обратных задач для моделей эпидемиологии	29
<u>А.В. Мاستихин, А.А. Мاستихина.</u> О производящей функции финальных вероятностей для эпидемий Бартлетта-Мак-Кендрика и Вейса	30
<u>Д.Ю. Князьков, В.Г. Байдулов, А.С. Савин, А.С. Шамаев.</u> Прямые и обратные задачи динамики поверхности жидкости под действием течений	30
<u>Д.А. Спиридонов, С.П. Степанов, В.И. Васильев.</u> Онлайн обобщённый многомасштабный метод конечных элементов для задачи тепломассопереноса с искусственным промерзанием грунтов	30
<u>А.А. Tyrylgin, D.A. Ammosov, A.V. Grigorev, S.P. Stepanov, M.V. Vasilyeva.</u> Proper orthogonal decomposition for poroelasticity problem in heterogeneous media using neural networks	31
<u>О.А. Тихонова.</u> Численное моделирование уравнения диффузии с дробной производной по времени	31
<u>А.А. Егорова, А.С. Шамаев.</u> О задаче граничного управления, возникающей в теории композиционных материалов	32

<u>В.Н. Алексеев, М.В. Васильева, Э.Т. Чанг.</u> Многомасштабное моделирование задач течения и переноса в тонких областях	32
<u>Л.В. Еникеева, И.М. Губайдуллин.</u> Метод регуляризации Тихонова при решении обратной задачи химической кинетики	33
<u>У.С. Калачикова, М.В. Васильева, Эрик Чун, В.Н. Алексеев.</u> Обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина для уравнения конвекции-диффузии в перфорированных средах	33
<u>Д.А. Аммосов, Я. Эфендиев, Е.Ф. Грекова, М.В. Васильева.</u> Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для упругой среды Коссера	34
<u>Д.Х. Иванов, П.Н. Вабищевич.</u> Численное восстановление правой части эллиптического уравнения в обратной задаче гравиметрии	34
<u>Д.Я. Никифоров.</u> Численное решение задачи фильтрации в неоднородных средах обобщенным многомасштабным методом конечных элементов GMsFEM	35
<u>Павел А. Майоров, В.М. Головизнин, П.А. Майоров, А.В. Соловьев.</u> Численное моделирование трехмерных течений неоднородной жидкости в лабораторных экспериментах по гидростатической модели CABARET-MFSH	35
<u>А.Х. Хибиев, А.А. Алиханов.</u> Разностная схема второго порядка аппроксимации для обобщенного волнового уравнения дробного порядка	36
Секционные доклады (30.06.2022) — 3 секция	37
<u>В.В. Лисица, Т.С. Хачкова, Я.В. Базайкин.</u> Численное моделирование гетерогенных реакций в пористом материале	37
<u>О.С. Сорокикова, Д.Г. Асфандияров, Д.В. Дзама.</u> Исследование гидродинамических режимов циркуляции заливов Кольского и Певек с учетом реальных глубин и береговой линии	37
<u>М.В. Яшина, А.Г. Таташев.</u> Оценки эффективности работы систем разделения процессора для моделирования телекоммуникаций в автомобильном трафике	37
<u>С.П. Степанов, Д.А. Спиридонов, Тина Май.</u> Численное усреднения уравнения Ричардса с использованием нейронных сетей	39
<u>А.В. Григорьев, А.В. Ноговицин.</u> Интеллектуально-вычислительная система для прототипирования и моделирования образцов ножевых изделий	39
<u>Д.Г. Асфандияров, О.С. Сорокикова.</u> Метод решения уравнений Сен-Венана повышенной точности для моделирования течений с большим диапазоном скоростей на основе модифицированной схемы КАБАРЕ	40
<u>В.И. Голубев, И.С. Никитин, Н.И. Хохлов, В.А. Миряха.</u> Численное моделирование сейсмических откликов от трещиноватых геологических слоёв	40
<u>В.Н. Снытников.</u> Математическое моделирование лазерной конверсии углеводородов	41

<u>Е.Е. Пескова, В.Н. Снытников.</u> Вычислительный алгоритм для изучения внутренних ламинарных потоков многокомпонентного газа с разномасштабными химическими процессами	41
<u>А.Н. Семакин.</u> Применение симулятора gem5 к оценке масштабируемости программной реализации алгоритма моделирования переноса примесей в атмосфере	42
<u>О.С. Язовцева, И.М. Губайдуллин, А.Ф. Кокулов, А.А. Макарова, Е.Е. Пескова.</u> Моделирование окислительной регенерации цилиндрического зерна катализатора	42
<u>О.П. Стояновская, В.В. Григорьев, М.Н. Давыдов, Т.В. Маркелова, В.В. Лисица, Н.В. Снытников, Т.А. Савватеева.</u> Гибридный метод SPH-IDIC для суперкомпьютерного моделирования динамики газодисперсных сред с разномасштабными параметрами	43
<u>В.В. Григорьев, А.В. Саввин.</u> Применение суперкомпьютерных технологий для моделирования реагирующих течений в масштабе пор	43
<u>Р.М. Узьянбаев, Ю.О. Бобренева, И.М. Губайдуллин.</u> Применение высокопроизводительных вычислений в одной гидродинамической модели	43
<u>Д.И. Прохоров, Я.В. Базайкин, В.С. Деревщиков.</u> Численное моделирование спекания зерен оксида иттрия	44
<u>Д.В. Дзама.</u> Трехмерные модели атмосферной циркуляции с учетом городской застройки. Методология. Верификация и валидация	45
<u>Н.А. Афанасьев.</u> Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами	45
<u>С.В. Кышпыгыров, Т.А. Платонова, Е.А. Петров.</u> Методы обработки объемных медицинских изображений	45
<u>Петр А. Майоров, В.М. Головизнин, П.А. Майоров, А.В. Соловьев.</u> Негидростатическая модель динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью CABARET-NH	46

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ (27.06.2022 — ПЕРВЫЙ ДЕНЬ)

НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ПЛАСТИН И БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГИХ ОСНОВАНИЯХ

В.И. Ерофеев

*Институт проблем машиностроения РАН, филиал ФГБНУ «Федеральный
исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук»,
Нижний Новгород, Россия*

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
erof.vi@yandex.ru*

Приводится анализ наиболее известных моделей упругого основания. Показано, что, несмотря на различие в названии, речь идет об одной обобщенной модели, характеризующейся двумя коэффициентами. Такая модель позволяет не только сохранить простоту математического аппарата, которая присуща винклеровой модели, но и получить более достоверные результаты. Рассматривается согласованное динамическое поведение пластины и балки, лежащих на обобщенном упругом основании, характеризующимся двумя коэффициентами постели (коэффициентом сжатия и коэффициентом сдвига). Изучаются особенности распространения нелинейных изгибных волн в балке и нелинейных сдвиговых волн в пластине. В частности, рассматривается модуляционная неустойчивость квазигармонических волн, распространяющихся в балке и пластине, закрепленных на нелинейно-упругом основании.

ЭФФЕКТИВНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ПОРОЖДЕННЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ И ПРОСТРАНСТВЕ ИСТОЧНИКАМИ В УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С.Ю. Доброхотов^{*1}, Х.Х. Ильясов², О.Л. Толстова³

¹*Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Москва, Россия,*

²*Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Москва, Россия,*

³*Национальный исследовательский московский государственный строительный
университет, Москва, Россия
s.dobrokhотов@gmail.com*

В докладе обсуждается вопрос о построении эффективных легко реализуемых с помощью программ Mathematica и MatLab формул решения линейных задач о возбуждении волн в слое жидкости (волн цунами, в частности), порожденных локализованными во времени и пространстве источниками, лежащими в упругом полупространстве. Рассмотрение проводится на изучении решений совместной системы уравнений теории волн в жидкости и теории упругости. Полученные приближенные формулы составляют основу аналитико-численных алгоритмов, позволяющих сравнительно легко анализировать зависимость параметров (длины волны, амплитуды, диаграммы направленности) возбуждаемых длинных волн на поверхности жидкости от параметров источника-его размеров, глубины залегания, высоты слоя жидкости и т.д.

Работа выполнена в рамках госзадания АААА-А20-120011690131-7.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД С ТЕЧЕНИЯМИ

В.В. Булатов

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия
internalwave@mail.ru*

В реальных природных стратифицированных средах (океан, атмосфера) вертикальная и горизонтальная динамика фоновых сдвиговых течений в значительной степени связана с внутренними гравитационными волнами. В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на волновую динамику. Обычно предполагается, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат. Если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин внутренних волн, а масштаб временной изменчивости много больше периодов волн, то такие течения можно рассматривать как стационарные и горизонтально однородные. В общей постановке описание волновой динамики в стратифицированной среде с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении. Используя различные приближения, в том числе метод ВКБ, основанный на реалистичном предположении о плавности изменения параметров океанической среды по сравнению длинами внутренних волн можно построить аналитические решения для модельных распределений частоты плавучести и сдвиговых течений. Для исследования механизма взаимовлияния течений и внутренних можно рассматривать различные модельные представления для стратификации и сдвиговых течений. Синтез численных, аналитических и асимптотических результатов может дать первоначальное качественное и количественные представления о волновых процессах с учетом фоновых сдвиговых течений. В работе рассмотрена задача о построении функции Грина уравнения линейных внутренних гравитационных волн в конечном слое стратифицированной среды с фоновыми сдвиговыми течениями. Исследованы аналитические свойства функции Грина, представленной в виде суммы волновых мод (дискретного спектра) и интеграла по разрезу (непрерывного спектра). Показано, что на больших временах вклад от непрерывного спектра вертикальной спектральной задачи экспоненциально мал. Доказана сходимости разложения функции Грина на волновые моды. Показано, что асимптотика функции Грина при больших временах полностью определяется асимптотиками составляющих ее волновых мод. Асимптотики дисперсионных соотношений позволяют исследовать более реалистичную задачу изучения динамики внутренних волн в океане медленноменяющимися и нестационарными параметрами. В этом случае решение можно представить в виде суммы волновых пакетов, фазовая структура которых определяется аналитическими свойствами соответствующих дисперсионных зависимостей. Конкретный выбор фазовой функции (модельных интегралов) определяется аналитическими свойствами дисперсионных соотношений, зависящих от реальной гидрологии океана. Аналитические выражения дисперсионных кривых могут использоваться, в частности, для качественной интерпретации наблюдаемых волновых явлений в океане и для разработки дистанционных методов обнаружения внутренних волн методами радиолокации. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект 20-01-00111А.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В МЕТАМАТЕРИАЛЕ

А.В. Порубов

*Институт Проблем Машинovedения РАН, Санкт-Петербург, Россия
rav@ipme.ru*

Исследование искусственных материалов с задаваемыми свойствами или метаматериалов привлекает большое внимание ввиду их возможного практического применения в современной индустрии. Особое внимание уделяется их деформационно-прочностным свойствам,

на которые, в свою очередь, оказывают влияние динамические процессы внутри материала. Одним из таких процессов является распространение локализованных волн деформации. Энергия, переносимая такими волнами, более существенна для волн с конечной амплитудой, которые описываются в рамках нелинейных моделей.

Рассматривается одна из популярных таких моделей, а именно, модель масса-в масс, реалистичность которой уже подтверждена экспериментально. Исходная дискретная нелинейная модель анализируется при помощи континуального предела. Асимптотически получены различные модельные нелинейные уравнения в частных производных. Построен ряд их точных решений в виде локализованной волны, возможность генерации которых исследована численно. На основании решений установлены качественные изменения в динамике локализованного волнового процесса, связанные с изменением свойств метаматериала. Это позволило разработать метод управления свойствами материала, позволяющий достичь требуемой локализации нелинейной волны деформации.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Грант No 075-15-2021-573).

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ СЛОИСТОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Чесноков

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
chesnokov@hydro.nsc.ru*

Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости является одним из эффективных механизмов трансформации крупномасштабных течений в океане и атмосфере в движения более мелкого масштаба и последующей диссипации энергии. Механизм разрушения внутренних уединенных волн тесно связан с неустойчивостью, вызванной сдвигом скорости на границах раздела, что является объектом интенсивных исследований в лабораторных и полевых наблюдениях.

С использованием оригинального подхода, основанного на применении уравнений многослойной мелкой воды с учетом турбулентного перемешивания, разработаны математические модели генерации и обрушения внутренних волн в неоднородной жидкости над неровным дном. Предложенные гиперболические модели применены для описания динамики внутренних волн большой амплитуды и волновых пакетов в слоистой стратифицированной жидкости, а также для моделирования нестационарных гидрофизических процессов в прибрежных водах. Модели позволяют корректно описать и объяснить особенности перемешивания и формирования вихре-волновых структур.

ГЕМОДИНАМИКА СОСУДОВ МОЗГА И АОРТЫ

А.П. Чупахин^{*1,2}, С.А. Васюткин^{1,2}

¹*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия,*

²*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
alexander190513@gmail.com*

В докладе будет рассказано о различных аспектах исследования течения крови в сосудах головного мозга и в аорте. Важной особенностью моделирования является геометрическая сложность кровеносной сети со множеством ветвлений сосудов. Основой построения математических моделей служит нейрохирургический мониторинг кровотока, построение 3D конфигураций кровеносной сети на основе томографии различных видов, исследования реологии стенок сосудов. Наряду с 3D моделированием на основе промышленных пакетов, которое дает детальную информацию о параметрах течения и поведении стенок сосудов, важную роль играют одномерные модели течения вязкой жидкости в длинных трубах. Выбор различных моделей вязкоупругих свойств стенок сосудов позволяет обнаруживать различные режимы движения крови в сосудах, в том числе при наличии аномалий типа аневризм.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ (28.06.2022 — ВТОРОЙ ДЕНЬ)

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА ЧИСЛЕННОГО ПОТОКА В МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА С РАЗРЫВНЫМИ БАЗИСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

В.Ф. Тишкин*, М.М. Краснов, М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
v.f.tishkin@mail.ru

Известно, что при использовании разностных схем Годуновского типа в некоторых задачах, содержащих ударные волны, возникает развитие неустойчивости типа “карбункул”. Условия появления данного вида неустойчивости — это высокие числа Рейнольдса и низко диссипативный численный поток. В работе [1] замечено, что при таких условиях могут возникать и другие типы неустойчивостей. В настоящей работе проведено исследование подверженности численного решения ударно-волновым неустойчивостям при использовании конкретных численных потоков в разрывном методе Галеркина, реализованном в программном комплексе РАМЕГ3D [2]. Исследование производилось на тестовых задачах из перечня Керка [1]. Наиболее универсальными, при проведении расчетов, оказались гибридные численные потоки [3], позволяющие подавить развитие неустойчивостей и сохранить точность метода.

Список литературы

- [1] Quirk J. J. A contribution to the great Riemann solver debate // ICASEReport No. 92-64. 1992; Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 1994. – V. 18. – P. 555–574.
- [2] Краснов М.М., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Программный комплекс РАМЕГ3D для численного моделирования задач аэротермодинамики на высокопроизводительных вычислительных системах, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № RU2021615026, 02.04.2021
- [3] М. Е. Ладонкина, О. А. Неклюдова, В. Ф. Тишкин. Гибридный численный поток для решения задач сверхзвукового обтекания твердых тел, Матем. моделирование, 33:5 (2021), 47–56

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРАЩЕНИЯ РАСПЛАВА ВОЛЬФРАМА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗОК

Г.Г. Лазарева

ФГАОУ ВО “Российский университет дружбы народов”, Москва, Россия
lazarevanovosibirsk@gmail.com

Проблема разрушения материалов первой стенки и дивертора является одной из ключевых для термоядерных реакторов, основанных на магнитном удержании плазмы. В настоящее время наиболее подходящим материалом для создания такой стенки считается вольфрам. Для использования вольфрама в экспериментальных термоядерных реакторах необходимо изучение эрозии материала, возникающей при экстремальных нагрузках. В докладе представлена модель распределения тока в образце вольфрама и испаряемом веществе при нагреве поверхности электронным пучком. Модель основана на решении уравнений электродинамики в области образца и в парах вольфрама над ним в цилиндрической системе координат. Ток рассматривается, как возможный источник вращения вещества, который наблюдается в эксперименте. Результаты проведенного моделирования показали, что учет термотокков в парах

вольфрама над пластинкой необходим для получения ускорения, способного инициировать наблюдаемое в эксперименте вращение расплава. Параметры модели взяты из экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер темы FSSF-2020-0018).

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СЕТКАХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ В СВЕРХЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

А.Л. Афендииков*, В.С. Никитин

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
andre@keldysh.ru*

Рассматривается нестационарная задача о сверхзвуковом обтекании системы тел, перемежающихся в потоке газа. При свободном движении тел математическая модель состоит из уравнений Эйлера для области, заполненной газом, дополненных уравнениями Ньютона для описания движения твердых тел под действием давления. Вычислительный алгоритм использует локально-декартовы сетки, адаптация которых к решению основана на вейвлетном анализе. Взаимодействие газа с поверхностью твердых тел моделируется при помощи метода свободной границы. Возможности реализованного кода продемонстрированы на задачах о подъеме пылинки под действием ударной волны, о моделировании движения системы тел в двумерном сверхзвуковом потоке невязкого газа и о вылете пеллета из затупленного цилиндрического тела. Получены количественные и качественные результаты о скорости пылинки и о эволюции начальных конфигураций тел.

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-31-90162.

МНОГОМАСШТАБНЫЕ ЯВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Ю.М. Лаевский

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия
laev@labchem.sccc.ru*

Традиционно трудными для численного решения являются дифференциальные уравнения, описывающие процессы со значительной разномасштабностью по пространству и времени. При построении численных схем для решения таких задач часто лимитирующим фактором является не устойчивость алгоритма, а его точность. Причины упомянутой многомасштабности могут быть как геометрической, так физической природы. Практически, речь идет о согласованной локальной адаптации параметров пространственно-временной сетки к требованиям точности и устойчивости, которые диктуются вычислениями на соответствующем масштабе. Данные соображения легли в основу развития так называемых многоуровневых явных схем, обзор которых приводится в докладе. В частности, рассмотрены различные типы сопряжений пространственно-временных областей: сопряжения типа Дирихле и типа Неймана. Приведен набор теорем об устойчивости таких схем. В качестве примеров обсуждается применение разработанных алгоритмов в методах декомпозиции области при наличии геометрической многомасштабности и для задачи о распространении ламинарного пламени, являющейся характерным примером процесса с физической пространственно-временной разномасштабностью.

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА ТИПА СВЕРТКИ

А.Л. Карчевский

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия
karchevs@math.nsc.ru

В докладе будет рассмотрено интегральное уравнение Вольтерра первого рода типа свертки. Данное интегральное уравнение не может быть сведено к интегральному уравнению второго рода, поскольку его ядро и любая его производная в нуле обращается в нуль. По этой причине к данному интегральному уравнению неприменимы методы регуляризации Сергеева, Денисова, Магницкого, (h, α) -регуляризация Апарцина, поскольку все они требуют выполнения условия: либо само ядро, либо какая-то его производная не обращается в нуль в нуле. Метод Денисова требует знание значения искомой функции в нуле, что на практике может быть не выполнено. Метод регуляризации Тихонова приводит к решению уравнения Фредгольма первого рода.

В докладе будет представлено два метода решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода типа свертки. Первый основан на разложении правой части интегрального уравнения по функциям определённого вида, второй — это применение квадратурной формулы. Оба подхода иллюстрируются численными примерами.

Данное интегральное уравнение Вольтерра первого рода типа свертки возникает при решении задачи теплопроводности с данными на времениподобной границе методом сопряженного оператора. Тем не менее, предложенные методы могут быть использованы для решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода типа свертки и в других случаях.

ОПЫТ ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩЕГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ АЭРОДИНАМИКИ И АЭРОАКУСТИКИ

Т.К. Козубская

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
kozubskaya@itamod.ru

Использование высокопроизводительной вычислительной техники и эффективных технологий является критичным условием успешности моделирования нестационарных турбулентных течений и создаваемых ими акустических полей в прикладных задачах, ориентированных на авиационную промышленность.

В докладе рассказывается о накопленном опыте вихреразрешающего моделирования турбулентных течений в задачах аэродинамики и аэроакустики, об используемых моделях и методах, приводятся примеры численного решения промышленно-ориентированных задач. Отдельное внимание при этом уделяется трудностям, с которыми приходится сталкиваться, и еще не решенным проблемам.

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ГРАДИЕНТНОЙ КАТАСТРОФЫ

А.В. Аксенов*, К.П. Дружков

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
aksenov.av@gmail.com; Konstantin.Druzhkov@gmail.com

Рассмотрена одномерная система уравнений газовой динамики для политропного процесса с показателями степени равными трем и пяти третьим. Представлены инварианты характеристик первого порядка. С использованием инвариантов характеристик задачи Коши

сведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Построены решения задач Коши на всей пространственной оси. Полученные решения описывают движение газа без градиентной катастрофы с конечными массой, импульсом и энергией. Приведены графики решений.

СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ В РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ДИСПЕРСИЕЙ КОРОТКИХ ВОЛН

И.Б. Бахолдин

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
ibbakh@yandex.ru

В моделях, правильных с физической точки зрения, скорости распространения волн стремятся к конечным значениям при уменьшении длины волны, т.е. дисперсия коротких волн исчезает. При этом существуют бездиссипативные структуры, но возможно и опрокидывание волн, требующее рассмотрения обобщенных решений или включения диссипации. В качестве примеров рассматриваются уравнения волн в трубах с упругими стенками и уравнения электромагнитной гидродинамики плазмы (ЭМГД), являющихся расширением классических уравнений магнитной гидродинамики посредством добавления дисперсионных членов. Для ЭМГД при включении газодинамической вязкости выявлены структуры, аналогичные ударным волнам в газовой динамике, но требующие учета в условиях на разрывах производных от неизвестных, входящих в уравнения. Рассматриваются методики численного анализа для получения структур бездиссипативных разрывов как предельных решений последовательностей уединенных волн различного типа. Для ЭМГД определены границы существования этих уединенных волн, позволяющие оценить границы существования бездиссипативных структур и оценить возможность опрокидывания волн в зависимости от амплитуды скачка в начальных данных.

К ПРОБЛЕМЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭНЕРГИИ

А.Н. Голубятников*, Д.В. Украинский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
golubiat@mail.ru

Обсуждаются частично инвариантные решения задач динамики вязкого теплопроводного совершенного газа, связанные с проблемой множественной концентрации энергии, как в ньютоновской механике, так и специальной теории относительности.

Можно считать, что эта задача берет своё начало при исследовании сферически-симметричного гравитационного коллапса пылевидной материи, где кинетическая энергия тела конечной массы неограниченно растёт. При учете давления, как правило, значение гравитации становится несущественным и необходимо внешнее сжатие тела, например, поршнем. В свое время Л.И. Седовым была решена автомодельная задача о точечном взрыве. Очевидно, что для получения концентрации энергии нужно было просто построить двойственное решение, однако долгое время этого почему-то не делалось (А.Н. Голубятников, 2013). Введение нелинейной вязкости и теплопроводности, хотя и нарушает автомодельность, но позволяет получить полное решение задачи путём разделения переменных. Это дает возможность построить явно решения задач с произвольным множеством «пузырьков» — центров кумуляции кинетической энергии, при этом внутренняя энергия концентрируется только в достаточно жестких неньютоновских средах.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ (29.06.2022 — ТРЕТИЙ ДЕНЬ)

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

С.И. Кабанихин^{*1,2,3}, М.А. Шишленин^{1,2,3}, Н.С. Новиков^{1,2,3}, Н.М. Прохошин³

¹*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*

²*Институт математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*

³*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

ksi52@mail.ru

Основные и наиболее часто применяемые методы регуляризации обратных задач используют многократное решение соответствующих прямых задач. В методах градиентного спуска необходимо на каждой итерации решать дополнительно сопряженную задачу, а в методе Ньютона-Канторовича (и его модификациях) необходимо обращать производную Фреше, которая в случае многомерных обратных задач является компактным оператором. Решения прямых задач в трехмерном пространстве требует значительных ресурсов. Например, решение начально-краевых задач для гиперболических уравнений и систем (Ламе, Максвелла) в современной геофизике даже для исследования сравнительно небольших объемов порядка 1–3 кубических километров приводит к необходимости использовать специальные параллельные алгоритмы с учетом архитектуры суперкомпьютеров. Отметим также необходимость учета ошибок округления. И самое главное, в геофизике решение прямой задачи требует значения коэффициентов во всей среде (плотность, электропроводность, границы раздела и т.д.), что практически невозможно без предварительного решения обратной задачи. В этой связи все более важное значение приобретают прямые методы решения многомерных обратных задач, которые позволяют находить искомые коэффициенты, минуя перечисленные проблемы, связанные с многократным решением прямых задач. В докладе будет дан краткий обзор современных прямых методов решения многомерных обратных задач, главные из которых основаны на трех подходах: граничное управление, Dirichlet-to-Neumann map, и многомерные аналогии уравнений Крейна-Гельфанда-Левитана-Марченко.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВАМИ КОРРЕКТОРА И ПРЕДИКТОРА

В.В. Шайдуров

ФИЦ «Красноярский научный центр СО РАН», Красноярск, Россия

shaidurov04@mail.ru

Доклад посвящен построению последовательности разностных схем со свойствами корректора и предиктора для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Последовательность схем начинается с явной трехточечной схемы Штёрмера второго порядка аппроксимации. Каждая последующая схема также реализует трехточечную схему Штёрмера с правой частью, дополненной слагаемыми, вычисленными через решение предыдущей схемы. Доказана устойчивость получающихся схем и увеличение порядка сходимости. Представлены результаты вычислений для тестовой задачи, подтверждающие повышение порядка точности построенных схем.

Изложение завершается обсуждением аналогичных разностных схем (со свойствами корректора и предиктора) для уравнений первого порядка.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ АРКТИЧЕСКОГО РЕГИОНА РФ

И.Б. Петров

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

Рассматриваются вычислительные проблемы решения задач Арктического региона РФ. В частности рассматривается семейство сеточно-характеристических методов, разработанных для численного решения динамических задач, учитывающих характеристические свойства систем уравнений гиперболического типа, к которым относятся системы, описывающие поведение деформируемых сред (лед, вода, металлические и бетонные конструкции), а также численные решения (с их помощью) ряда задач, возникающих при индустриальном освоении Арктического региона.

СОЗДАНИЕ И РАЗВИТИЕ ВЦ ИАП РАН

В.А. Гушчин

*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия
gushchin47@mail.ru*

Институт автоматизации проектирования Академии наук СССР, а ныне Российской академии наук был создан в соответствии с Постановлением Президиума АН СССР от 25 июня 1986 года № 1105 «О создании Института автоматизации проектирования АН СССР» на базе ряда подразделений ВЦ АН СССР, Научного Совета по кибернетике при Президиуме АН СССР и МФТИ.

Целью создания такого института в рамках АН СССР было использование высококвалифицированных специалистов и богатого запаса фундаментальных знаний для создания систем автоматизированного проектирования (САПР) в различных предметных областях. Директором-организатором был назначен академик Олег Михайлович Белоцерковский, к этому времени завершивший свое 25-летнее руководство выдающимся вузом нашей страны – Московским физико-техническим институтом (МФТИ).

Учитывая задачи, поставленные перед ИАП, структуру института было решено делать в виде Центров. Коллектив каждого из Центров территориально располагался на отдельной площадке г. Москвы и Московской области, имел полную самостоятельность, возглавлялся ведущим ученым. Были созданы следующие Центры:

- САПР в машиностроении (на территории завода ЗИЛ, руководители: академик Е.П. Велихов и д.ф.-м. н. В.Б. Бетелин (ныне академик));
- САПР больших интегральных схем (БИС) и сверхбольших интегральных схем (СБИС) (район станции метро «Сокол», руководители академик Б.В. Бункин и к.т.н. А.В. Анцигин);
- САПР электронной аппаратуры (РЭА) (г. Одинцово МО, руководитель д.т.н. В.Н. Гридин);
- САПР в градостроительстве (совместно с Москпроект-2, руководитель Ю.Т. Золоев);
- Центр алгоритмического обеспечения (МФТИ и 2-я Брестская ул., руководители: академик О.М. Белоцерковский, д.ф.-м.н. В.В. Щенников).

Изначально ИАП размещался в ВЦ АН СССР и по адресу: ул. Вавилова, д.44. Такая территориальная разбросанность координировалась регулярно проводимыми директоратами и заседаниями Ученого Совета (иногда выездными).

Только в 1987 году ИАП получил свое здание на 2-й Брестской ул. (Распоряжение о передаче корпусов 1, 3, 4 и 5 дома 19/18 из жилого фонда в нежилой было подписано председателем Мосгорисполкома В.Т. Сайкиным (ранее директором ЗИЛа) 31 марта 1987 г.).

Одним из необходимых условий деятельности Института является наличие вычислительной техники. ЭВМ типа БЭСМ-6 и серии ЕС производились в ограниченном числе и заранее распределялись по организациям. ИАП не был первым в этой очереди, правда, заходила речь о поставке ЭВМ «Эльбрус», создаваемой под руководством академика В.А. Мельникова, а в МФТИ была размещена ЭВМ VAX. На этом этапе важную роль сыграли В.Б. Бетелин и

Ю.Т. Золоев: по контракту были закуплены персональные компьютеры Мазовия, Unisys (с процессором Intel 086) и IBM (286 и 386), что позволило вести работы в здании ИАП, не выезжая в МФТИ и ВЦ.

Важную роль в деятельности института сыграло взаимодействие с Индией. А началось это в 1987 году с подписания руководителями двух крупнейших стран — СССР, возглавляемой М.С. Горбачевым, и Индии, возглавляемой Радживом Ганди, — межправительственной Комплексной долгосрочной программы научно-технического сотрудничества (КДП НТС). В то время возглавлял Академию наук СССР академик Г.И. Марчук. Ему и было поручено руководство Программой с советской стороны.

О деталях создания и развития ВЦ ИАП РАН я и планирую рассказать в своем сообщении.

ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА РЕАЛИЗАЦИИ ЦЕНТРАЛЬНО-КОМПОЗИЦИОННОГО РОТАТАБЕЛЬНОГО ПЛАНА С УЧЕТОМ НЕАДЕКВАТНОСТИ

Н.И. Сидняев

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

В докладе представлен метод обработки данных и планирования эксперимента в случае, когда информация поступает непрерывно и последовательно. Анализируются полные и дробные факторные планы, композиционные ортогональные и ротатабельные планы эксперимента для нелинейных моделей. Построены математические модели для случая, когда составленная по исходным данным регрессионная модель неадекватна. Изложен метод оптимального планирования для построения математической модели в виде линейной комбинации линейных и квадратичных функций входных факторов с неизвестными параметрами. В численном алгоритме учитывается момент при сферическом распределении с моментами ротатабельного плана второго порядка, у которого все пятые моменты равны нулю. Показана эффективность рекуррентных алгоритмов оценки с точки зрения вычислений при последовательном планировании.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

М.А. Шишленин^{*,1,2}, С.И. Кабанихин^{1,2}

¹*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,*

²*Институт математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский
государственный университет, Новосибирск, Россия
mshishlenin@ngs.ru*

В настоящее время опубликовано много работ, посвященных задаче нахождения коэффициентов уравнений математической физики в случае, когда данные обратной задачи задаются на части границе исследуемой области, в виде нелокальной информации (интеграл по времени или по пространству) или на заданной кривой внутри области. Подобные обратные задачи возникают в томографии, теплопереносе, термоэластичности, неразрушающем контроле, химической кинетике, медицине, социологии и т.д. В данной работе предложены алгоритмы решения обратных и некорректно поставленных задач уравнений математической физики. Задача заключается в определении коэффициента или граничного условия на недоступной части границе по одной из дополнительных информационных данных. Задача сводится к минимизации целевого функционала градиентным методом. Получены формулы градиентного функционала с использованием решения соответствующих сопряженных задач. Представлены результаты численных расчетов и проведена апробация разработанных алгоритмов на реальных данных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-11-00154-П.

PHASE-FIELD MODELS AND NUMERICAL SIMULATION OF COMPLEX MULTIPHASE FLOWS AT PORESCALE

Vladislav Balashov, Evgeny Savenkov*

*Keldysh Institute od Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia
e.savenkov@gmail.com*

Analysis of multi-phase micro-flows in natural and artificial porous materials is an important problem in different fields. With the development of HPC hardware and μ -CT technologies which allows to construct detailed geometrical models of material microstructure, it becomes possible to evaluate such flows using direct numerical simulation techniques. In geophysical applications such techniques are called “digital rock physics” and provides a powerful tool which extends conventional laboratory measurements.

The talk describes numerical techniques for the analyses of single and multiphase fluid flows in the pore space of core samples with direct resolution of the pore space structure and inter-phase interfaces. The model and algorithms allow for simulation of dense and moderately rarefied gas flows with slipping effects and fluid flows with surface tension and fluid/solid wetting effects.

The core of the approach is quasi-hydrodynamic regularization of classical Navier- Stokes and Navier-Stokes-Cahn-Hilliard equations. The model is thermodynamically consistent and is based on diffuse interface description of the inter-phase boundaries. The regularization terms are dissipative and act as stabilizers of the numerical solution. This allows to use logically simple explicit finite difference schemes with central difference approximations. The developed algorithms allows for highly parallel implementation. Description of the simulation domain is based on voxel representation which allows to use μ -CT data with minimal pre-processing.

A number of simulations demonstrating consistency of the model and algorithms as well as «realistic» flow simulations within realistic μ -CT models are presented.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

П.Н. Вабищевич

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия
vabishchevich@igmail.com*

Рассматриваются вопросы численного решения задачи Коши для эволюционного уравнения с памятью, когда ядро интегрального члена является разностным. Вычислительная реализация связана с необходимостью работать с приближенным решением для всех предыдущих моментов времени. Рассматриваемая нелокальная задача преобразуется в локальную, при этом решается слабо связанная система уравнений с дополнительными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Данный подход основан на аппроксимации разностного ядра суммой экспонент. Получены оценки устойчивости решения относительно начальных данных и правой части для соответствующей задачи Коши. Построены и исследованы двух-слойные схемы с весами с удобной вычислительной реализацией.

БЕСШОВНЫЙ БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ОБЪЕКТАМИ

В.М. Головизнин*, Н.А. Афанасьев

*Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
gol@ibrae.ac.ru*

Построен новый балансно-характеристический метод решения задач взаимодействия потоков жидкости и газа с деформируемыми объектами. Предлагаемый метод является представителем семейства так называемых монолитных (или бесшовных) методов, в которых как газ, так и деформация объектов рассчитываются по единой численной схеме, что позволяет моделировать границу раздела газа и тел естественным образом. Полученный в результате метод является явным, легко масштабируемым и использует лагранжевы координаты для моделирования границы раздела и смешанные эйлерово-лагранжевые координаты для моделирования течения газа и деформации тел. Ключевой особенностью метода является обратимый во времени алгоритм перемещения расчетной сетки, позволяющий избавиться от численной диссипации схемы. Метод апробирован на ряде одномерных и двумерных задач: переход акустических колебаний от газа к упругой среде, удар воздуха о упругое тело, генерация сферических акустических волн колеблющимся пучком.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В.И. Васильев*, А.М. Кардашевский, В.В. Попов

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
vasvasil@mail.ru

В настоящее время теоретическое исследование условной корректности и разработка эффективных численных методов решения обратных задач являются актуальными в связи с широким использованием их в качестве математических моделей различных природных явлений и технологических процессов.

В работах профессора С.И. Кабанихина и его учеников предложен оптимизационный метод решения дискретного аналога обратной задачи для гиперболического уравнения. Профессор А.Л. Карчевский предложил эффективную организацию оптимизационного метода решения конечно-разностного аналога обратной задачи идентификации младшего коэффициента волнового уравнения. Другим эффективным подходом решения обратных задач являются итерационные методы академика А.А. Самарского и его учеников, применяемые к дискретному аналогу исходной ретроспективной обратной задачи теплопроводности. Авторами данной статьи с коллегами выполнены ряд работ с финитными начальными условиями, в которых сначала строится конечно-разностный аналог ретроспективной обратной задачи, потом для численной реализации полученной системы линейных алгебраических уравнений применяется итерационный метод сопряженных градиентов. При этом на каждой итерации решается прямая задача теплопроводности с последующим уточнением искомого начального условия. Данный подход хорошо работает и для определения стационарной правой части. Профессором П.Н. Вабищевичем с коллегами для численного решения обратных задач с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени, предложена специальная декомпозиция решения, при которой переход на новый временной слой осуществляется путем решения двух стандартных сеточных эллиптических задач.

В работе рассматривается ретроспективная обратная задача теплопроводности с нестационарными неоднородными граничными условиями. Она аппроксимируется разностной схемой Кранка–Николсона, имеющей второй порядок аппроксимации как по пространственной переменной, так и по времени. Для определения решения полученной системы линейных алгебраических уравнений предлагается использовать итерационный метод сопряженных градиентов. Приведены примеры восстановления гладкого, негладкого и разрывного начальных условий, в том числе, и с введением «шума», характерного дополнительным условиям обратных задач и его сглаживания с помощью фильтра Савицкого–Голея. Проведенные численные эксперименты показали хорошую эффективность предложенного итерационного метода.

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания No FSRG-2021-0015 в рамках реализации национального проекта «Наука и университеты».

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ (30.06.2022) — 1 СЕКЦИЯ

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ В ВИДЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА С ПЕРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ ДИССИПАЦИИ

В.А. Шаргатов*¹, А.П. Чугайнова², Г.В. Коломийцев¹

¹*НИЯУ МИФИ, Москва, Россия,*

²*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*

VAShargatov@mephi.ru

Для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса рассматриваются решения в виде бегущей волны. Коэффициент диссипации зависит от координаты и времени и имеет вид сглаженной ступеньки в каждый момент времени. Мелкомасштабные процессы диссипации и дисперсии определяют решение задачи о бегущей волне в высокоградиентной области. Функция потока имеет две точки перегиба. Показано, что решения в виде бегущей волны при одной и той же скорости могут сходиться к трем различным предельным значениям за волной. Метод функции Эванса используется для проведения анализа линейной устойчивости. Установлено, что решения в виде бегущей волны могут быть линейно устойчивыми для каждого из трех возможных случаев. Таким образом, найдены линейно устойчивые решения в виде бегущей волны, соответствующие допустимым разрывам в гиперболической модели. Эти разрывы имеют одинаковую скорость, но разные состояния позади их.

ДВОЙНОЙ ГИСТЕРЕЗИС ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ИЗОГНУТОМ КАНАЛЕ

А.Г. Кузьмин*, А.Н. Рябинин

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

a.kuzmin@spbu.ru

Численно исследовано двумерное турбулентное течение воздуха в канале, имеющем изгиб в 9 градусов. Внутренние поверхности верхней и нижней стенок параллельны друг другу перед и после изгиба. На входе в канал скорость потока сверхзвуковая, а на выходе — дозвуковая.

Решения системы уравнений Рейнольдса получены с помощью программы, основанной на методе конечных объемов, с использованием разных моделей турбулентности. Расчеты проводились на вычислительном кластере СПбГУ с ускорителями Tesla Fermi. Полученные решения показали наличие двойного гистерезиса потока в определенных интервалах изменения числа Маха набегающего потока или давления, заданного в выходном сечении. Двойной гистерезис означает возможность реализации одного из трех различных режимов течения при заданных стационарных граничных условиях. Этот эффект необходимо учитывать, в частности, при проектировании воздухозаборников летательных аппаратов, так как различные режимы течения в одних и тех же условиях полета могут существенно влиять на потери полного давления и эффективность работы воздушно-реактивного двигателя.

Список литературы

- [1] A. Kuzmin Non-uniqueness of transonic flow in an intake-type channel. SCTeMM'2019, J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1392. – Article ID 012012. – P. 1–6.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЗОН СТАБИЛЬНОСТИ ВЕЧНОЙ МЕРЗЛОТЫ И ГАЗОГИДРАТОВ ЛЕДНИКОВОЙ ЧАСТИ ВОСТОЧНО-СИБИРСКОГО ШЕЛЬФА

Г.В. Решетова*, В.А. Чеверда

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия
kgv@nmsf.ssc.ru*

Информация о внутреннем строении Восточно-Сибирского арктического шельфа, а именно о мощности мерзлых отложений, является стратегически важной информацией как для освоения нефтегазовых ресурсов Восточной Арктики, безопасного использования Северного морского пути, так и для составления прогнозных сценариев влияния потепления климата.

Применение сейсмических методов изучения криолитозоны шельфа морей Лаптевых и Восточно-Сибирского имеет свои особенности и находится на стадии разработки буровых технологий и геофизических методов интерпретации данных. Одной из характеристик среды, характеризующей проявление влияния глобального потепления на вечную мерзлоту, является ее мощность и глубина залегания, а границы зоны стабильного состояния газогидратов. В свою очередь эти характеристики проявляются в изменчивости сейсмического поглощения. Так, экспериментально было установлено, что зоны растепления характеризуются низкими значениями добротности. Целью данного исследования является изучение проявления особенностей формирования сейсмических волновых полей в геологических средах, типичных для Восточно-Сибирского арктического шельфа с учетом эволюционной изменчивости температуры. Ставится вопрос о возможности выделения зон потери стабильности газогидратов с помощью сейсмического мониторинга изменчивости добротности среды.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-11-20112.

ПЕРЕНОС ЖИДКИХ ЧАСТИЦ ПОВЕРХНОСТНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ

А.С. Савин*, А.Ю. Шашков

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана assavin@list.ru

Как известно, в первом приближении жидкие частицы в поле поверхностной гармонической волны малой амплитуды в бесконечно глубокой идеальной жидкости движутся по окружностям уменьшающихся с глубиной радиусов. В следующем приближении частицы движутся по окружностям, центр которых медленно смещается по горизонту (дрейф Стокса). Метод Стокса позволил открыть эффект дрейфа, однако он мало пригоден для проведения численных расчетов. В настоящей работе представлены результаты численного определения траекторий и средней скорости дрейфа жидких частиц в идеальной несжимаемой однородной и двухслойной жидкостях под воздействием поверхностных и внутренних волн малой амплитуды. Двухслойная жидкость - это модель стратифицированной морской среды, в рамках которой установлено, что характерные скорости волнового переноса жидких частиц в типичных морских условиях могут иметь порядок 1 см/с, что сопоставимо со скоростями переноса, обусловленными другими механизмами, например, турбулентной диффузией.

SIGNORINI-TYPE PROBLEMS FOR 2D COMPOSITE BODIES CONTACTING BY SHARP EDGES OF RIGID INCLUSIONS

N.P. Lazarev

North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation
nyurgun@ngs.ru

A new type of non-classical 2D contact problem formulated over non-convex admissible sets is proposed. Specifically, we suppose that a composite body in its initial state touches a sharp-shaped rigid obstacle at a single contact point. Composite bodies under investigation consist of an elastic matrix and a rigid inclusion. In this case, the displacements on the set, corresponding to a rigid inclusion, have a predetermined structure that describes possible parallel shifts and rotations of the inclusion. Two types of inclusions are considered, namely: thin and bulk. The rigid inclusion is located on the external boundary and has the form of a wedge. The presence of the rigid inclusion imposes a new type of non-penetration condition for certain geometrical configurations of the obstacle and the body near the contact point. The sharp-shaped edges of the obstacle effect such sets of admissible displacements that may be non-convex. For the case of a thin rigid inclusion, which is described by a curve and a volume (bulk) rigid inclusion specified in a subdomain, the energy minimization problems are formulated. The solvability of the corresponding boundary value problems is proved, based on analysis of auxiliary minimization problems formulated over convex sets.

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, grant number FSRG-2020-0006.

РАЗРАБОТКА ОПТИМАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ И СЛОЖНОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФАКТОРОВ НА ОСНОВЕ СОВРЕМЕННЫХ ПОЛОЖЕНИЙ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ (МКТ)

Е.Л. Гусев^{*1,2}, В.Н. Бакулин³

¹*Институт проблем нефти и газа Федерального исследовательского Центра «Якутский научный Центр Сибирского Отделения РАН», Якутск, Россия,*

²*Институт математики и информатики Северо-Восточного федерального университета, Якутск, Россия*

³*Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*

Важность разработки эффективных высокоточных методов долгосрочного прогнозирования определяющих характеристик композиционных материалов (остаточного ресурса, прочности, надежности, долговечности), обуславливается тем, что композиционные материалы и конструкции из них являются неотъемлемой частью современной техники в таких областях, определяющих научно-технический прогресс, как авиа- и космическая техника, судостроение, нефтяная и газовая промышленность и др. Важнейшим преимуществом материала становится его способность как можно дольше сохранять свою работоспособность, под воздействием экстремальных факторов внешней среды (температуры, влажности, солнечной радиации, механических напряжений и др.).

Для удовлетворительного прогнозирования необходимо разработать эффективные и надежные соотношения между кинетическими параметрами физико-химических процессов, происходящих на молекулярном уровне и макросвойствами материалов, определяющими их эксплуатационную пригодность. Эти вопросы составляют важную и актуальную научную проблему, стоящую на пути создания обоснованных подходов к прогнозированию изменения свойств полимерных композиционных материалов при их хранении и эксплуатации [1–3].

На основе современных положений молекулярно-кинетической теории (МКТ) был исследован вопрос о согласовании определяющих параметров математических моделей, вычисленных в результате решения задач прогнозирования в рамках сформулированной вариационной постановки, учитывающей результаты экспериментальных измерений на макроуровне, с соответствующими определяющими параметрами физических моделей, описывающих молекулярные взаимодействия на микроуровне.

Объективная оценка параметров деструктивных элементарных химических реакций в композитах на основе проведенных физических экспериментов позволила построить эффективные обобщенные модели долговечности на долгосрочный период; провести конструктивный анализ влияния отдельных экстремальных факторов на долговечность композита; дать сравнительную оценку степени влияния того или иного экстремального фактора на долговечность композита. Знание параметров деструктивных элементарных химических реакций в композите, инициированных действием экстремальных факторов внешней среды, их сравнительный конструктивный анализ, может позволить разработать методику синтеза новых материалов с повышенной долговечностью. Работа выполнена в рамках госзадания ИПНГ ФИЦ «ЯНЦ СО РАН», г. Якутск, Россия (номер гос. регистрации 122011100162-9) и ИПРИМ РАН, г. Москва, Россия (номер гос. регистрации 121112200126- 5).

Список литературы

- [1] Gusev E.L. Using parallel procedures for the searching of the extremum for the decision of the inverse problems prediction of the defining characteristics of the composite materials // Material Physics and Mechanics. – 2016, – V.26, N 1. – P. 70–72.
- [2] Gusev E.L., Bakulin V.N. Variation formulations of inverse problems in forecasting the residual life of composites // Doklady Physics. – 2018. – V. 63, N 9. – P. 388–392.
- [3] Gusev E.L., Bakulin V.N. The use of generalized models in the variational formulation of the prediction tasks defining characteristics of composite materials // Journal of Physics: Conference Series. Collection of Materials of the VIII International Conference. – 2020. – Vol. 1431. – P. 012017.

MATHEMATICAL MODELING OF STRING VIBRATIONS WITH A MOVABLE BOUNDARY

V.L. Litvinov*, K.V. Litvinova

Moscow State University, Moscow, Russia
Samara State Technical University, Samara, Russia
vladlitvinov@rambler.ru

The resonance characteristics of viscoelastic string with moving boundaries using the Kantorovich–Galerkin method are examined in the article. The phenomenon of resonance and steady passage through resonance are analyzed. One-dimensional systems whose boundaries move are widely used in engineering [1–5]. The presence of moving boundaries causes considerable difficulties in describing such systems. Exact methods for solving such problems are limited by the wave equation and relatively simple boundary conditions. Of the approximate methods, the Kantorovich–Galerkin method described in [5] is the most efficient. However, this method can also be used in more complex cases. This method makes it possible to take into account the effect of resistance forces on the system, the viscoelastic parties of an oscillating object, and also the weak non-stationarity of the boundary conditions. The paper considers the phenomena of steady-state resonance and passage through resonance for transverse oscillations of a string of variable length, taking into account viscoelasticity and damping forces. Performing transformations similar to

transformations [5], an expression is obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the n -th dynamic mode. Expressions are also obtained that describe the phenomenon of steady state resonance and the phenomenon of passage through resonance. The expression that determines the maximum amplitude of oscillations when passing through the resonance was numerically investigated to the maximum. The dependence of the string oscillation amplitude on the boundary velocity, viscoelasticity, and damping forces is analyzed. In conclusion, we note that the above results make it possible to carry out a quantitative analysis of the steady state resonance and the phenomenon of passage through the resonance for systems whose oscillations are described by the formulated problem.

Список литературы

- [1] Vesnitsky A.I., Potapov A.I. Transverse vibrations of strings in mine hoists // Dynamics of systems. Bitter: Bitter. un-t, 1975. Number 7. Pp. 84–89.
- [2] Anisimov V.N., Litvinov V.L. Longitudinal vibrations of a viscoelastic string of variable length // Tr. 4th All-Russian. scientific conf. “Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Mathematical modeling and boundary value problems. Samara, 2007. Part 1. Pp. 25–27.
- [3] Goroshko OA, Savin G.N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Science. Dumka, 1971. Pp.290.
- [4] Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a string moving in the longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19. No. 4. - Pp.161–165.
- [5] Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2018. No2. Pp. 70–77.

БЛОЧНЫЕ МОДЕЛИ ПОСЛОЙНОГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ В ПЛАНЕ ВЫРЕЗАМИ

В.Н. Бакулин

*Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия
vbak@yandex.ru*

Актуальной проблемой механики сплошных сред является вычисление параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами (распространенной формой вырезов). Решение таких задач с необходимой точностью аналитическими методами сталкивается с большими трудностями математического характера [1]. Поэтому приходится применять численные методы и в первую очередь МКЭ. Наиболее точными являются модели послойного анализа [1-3].

Предлагаются блочные конечно-элементные модели естественной кривизны для послойного анализа НДС трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами. Блоки состоят из двумерных конечных элементов (КЭ) тонких моментных несущих слоев и трёхмерных КЭ заполнителя, для которых применяются аппроксимации КЭ несущих слоев.

Приведены результаты моделирования НДС трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН) (номер гос. регистрации 121112200126-5).

Список литературы

- [1] Bakulin V.N. Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Shells with Cutouts. *Mechanics of Solids*, 2019, V.54, №3, pp.448–460
- [2] Bakulin V.N. Block Finite-Element Model of Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Generally Irregular Shells of Double-Curvature Revolution. *Doklady Physics*, 2019, V.64, №1, p.9–13
- [3] Bakulin V.N. Model for Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Rectangular Cutouts // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57, No1. Pp. 102-110.

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА МЕРЗЛОГО ГРУНТА И ТОЛЩИ ЛЬДА С УЧЕТОМ ПОТЕПЛЕНИЯ КЛИМАТА

А.А. Федотов^{*1}, В.В. Канибер, П.В. Храпов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
le-tail@list.ru

Математическая модель представляет из себя начально-краевую задачу для нестационарного одномерного уравнения теплопроводности, моделирующего распределения температуры в среде с учетом фазовых переходов — твердо тело-жидкость. Для определения параметров модели использованы данные метеорологических станций и отчеты об инженерно-геологических изысканиях, которые позволили получить необходимые физические и теплофизические характеристики расчетной области. Численное решение задачи получено методом контрольного объема. Моделирование температурного режима грунта проводилось до момента выхода на нестационарный периодический режим.

Для установившегося периодического режима построены зависимости температуры от глубины для каждого месяца и найдена глубина активного слоя и глубина нулевых амплитуд на 2022 год, а также смоделированы прогнозы температурного режима на 2100 год для выбранных сценариев Representative Concentration Pathway (RCP) глобального потепления.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

А.А. Мазитов^{*1}, Ю.О. Бобренёва¹, И.М. Губайдуллин^{1,2}

¹*Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, Уфа, Россия,*
²*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия*
mazitov.ainur13@gmail.com

Явление возникновения многофазного потока с одновременным течением двух или трех фаз в трубах характерно для многих отраслей производства, в том числе нефтяной промышленности. Несмотря на огромное количество различных прикладных задач, до сих пор возникают трудности при решении и описании фильтрации жидкости в нефтяном пласте.

В работе рассматривается задача моделирования процесса массопереноса двух- фазной жидкой системы в однопоровом коллекторе. Каждая компонента жидкой системы имеет свой индивидуальный набор фильтрационно-емкостных параметров, что усложняет анализ процессов фильтрации. Модель представлена дифференциальными уравнениями в частных производных. Для численного решения задачи предложена оригинальная конечно-разностная схема на неравномерной пространственной сетке. Задача осложнена большим количеством

переменных, что приводит к значительным вычислительным затратам. В качестве решения предлагается эффективный параллельный численный алгоритм, отвечающий архитектуре современных высокопроизводительных систем. Предложенный алгоритм позволяет сокращать время расчета за счет использования неравномерных сеток. Программный модуль обеспечивает возможность многомасштабного моделирования массопереноса на основе вычислительных процессов с использованием неструктурированных сеток.

ПЕРЕДАЧА ТЕПЛОТЫ В ИЗОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ

А.А. Медведев*, Н.И. Сидняев

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

В докладе представлена математическая модель передачи теплоты в изотропном теле. Этот процесс связан с изменением температуры в различных частях тела, поэтому описание такого процесса в макроскопической теории в общем случае сводится к определению нестационарного температурного поля в теле. Рассматривается одномерный процесс передачи теплоты теплопроводностью в плоском слое изотропного материала, считая, что температура является функцией одного пространственного переменного. Плотность материала, его удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности в общем случае неоднородной среды полагаются зависящими только от одной пространственной координаты. При построении модели процесса предполагается, что среда неподвижна, а изменение объема тела, связанное с изменением температуры, пренебрежимо мало. В этом случае можно считать, что теплопроводность не связана с механической работой.

ТЕОРЕМА ОБ АЛГЕБРЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И РЕШЕТКЕ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЖЕННОСТИ

Е.С. Казанцева*, Н.И. Сидняев

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*

В докладе представлен носитель информации, появляющийся при реализации самого массового информационного процесса, когда поступает поток четких сведений об одной точке и пользователь осуществляет конъюнкцию очередного сведения о точке с предыдущим результатом таких действий. Этот процесс направлен на решение задачи идентификации точки. В приложениях этот процесс при насыщенном носителе информации обеспечивает наблюдаемость точки. Рассмотрены основные виды носителей, среди которых особое внимание уделено совершенным носителям, данным о точке и терминальным носителям. Эти носители играют ключевую роль в приложениях. Фокусируется внимание на особом факторе насыщенных носителей информации, а также на естественной возможности позиционного кодирования носителя, если он имеет вид данных о точке по типу позиционной системы записи чисел.

МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В УСЛОВИИ АБЛЯЦИИ

Е.С. Попущина*, Н.И. Сидняев

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Москва, Россия
popushinaes@bmstu.ru*

В докладе представлены общие уравнения, описывающие поведение жидкой пленки вблизи затупленного носка, а именно, уравнения несжимаемого ламинарного пограничного слоя [1]. Для простоты в уравнениях температура, вязкость и давление приняты постоянными как

для жидкой, так и для твердой фаз. Предполагалось, что изменение радиуса затупленного носка при плавлении незначительно и может не учитываться. Кроме того, считалось, что давление вдоль поверхности в жидком слое изменяется так же, как и на внешней границе газообразного пограничного слоя. Для сведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям использованы преобразования Леви. Преобразование уравнений сохранения при абляции с плавлением рассмотрено для двух типов материалов: стеклообразных и материалов, имеющих отчетливую расплавленную фазу с определенной температурой плавления. Изложен метод для получения параметрического решения преобразованных уравнений сохранения для несжимаемого жидкого слоя.

Список литературы

- [1] Сидняев, Н. И. Обтекание гиперзвуковых летательных аппаратов в условиях поверхностного разрушения / Н. И. Сидняев. – Москва : ООО Издательская фирма “Физико-математическая литература”. 2017. – 304 с. – ISBN 978-5- 9221-1666-4. – EDN WPOLDJ.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА В ВИДЕ БЕГУЩИХ ВОЛН В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Г.В. Коломийцев^{*1,2}, В.А. Шаргатов^{1,2}

¹*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия,*

²*Национальный Исследовательский Ядерный Университет “МИФИ”, Москва, Россия
kolomiytsev@theor.mephi.ru*

При распространении нелинейных волн в сплошных средах с диссипацией и дисперсией могут возникать конфигурации, в которых параметры среды резко изменяются в сравнительно узкой области. Одна из моделей, описывающих среды такого типа, приводит к обобщенному уравнению Кортевега-де Вриза-Бюргерса. Особый интерес представляют решения этого уравнения в виде бегущих волн, соответствующих структурам разрывов. В случае, когда плотность потока как функция искомой величины имеет точки перегиба, множество решений этой задачи содержит структуры особых (неклассических) разрывов. В предыдущих работах рассматривались ситуации, в которых коэффициент диссипации среды был либо постоянен, либо зависел от координат бегущей волны. Была изучена устойчивость различных решений задачи о бегущей волне, и классифицированы варианты их эволюции. В данной работе рассматриваются решения обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса в виде бегущих волн в ситуации, когда коэффициент диссипации зависит только от величины искомого параметра среды, так что уравнение становится автономным.

ЭВОЛЮЦИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ПРОМЫШЛЕННОЙ ЗАСТРОЙКИ

В.А. Шаргатов^{1,2}, С.В. Горкунов^{*1,2}

*ИПМех РАН, Москва, Россия,
НИЯУ МИФИ, Москва, Россия
SVGorkunov@mephi.ru*

На промышленных объектах регулярно случаются аварии связанные с возгоранием топливных разливов или повреждением емкостей под высоким давлением. В этих случаях может образовываться ударная волна способная наносить дополнительные повреждения инженерным конструкциям, усугубляя разрушения. Для оценки негативного воздействия, необходимо проводить численное моделирование в трехмерной постановке распространения ударных волн с учетом реальной промышленной застройки.

Численное моделирование в трехмерной постановке проводится методом Годунова–Колгана на вычислительном кластере. Для повышения качества расчета предлагается использовать адаптивную к положению фронта ударной волны расчетную область. Показано, что использование адаптивной расчетной области позволяет существенно повысить точность проводимых расчетов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

С.И. Безродных¹, Н.М. Гордеева^{*2}

¹*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия,*

²*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

nmgordeeva@bmstu.ru

Рассматривается слой плазмы, описываемый системой уравнений Власова–Максвелла. Предполагается, что на плазму действует внешнее возмущающее электрическое поле, направленное строго перпендикулярно границе слоя. Моделируемая плазма является вырожденной, и в отсутствие внешнего воздействия распределение заряженных частиц в ней подчиняется статистике Ферми–Дирака.

В предположении слабого внешнего поля исходная задача сведена к краевой задаче для системы двух линейных интегро-дифференциальных уравнений, где искомыми функциями являются плотность заряженных частиц и напряженность самосогласованного поля. В работе в явном виде построено общее решение указанной системы уравнений, а соответствующая краевая задача сведена к сингулярному интегральному уравнению на бесконечном контуре. Решение этого уравнения найдено аналитически методом задачи Римана линейного сопряжения. Проведено качественное исследование зависимости решения от параметров задачи, которыми являются частота внешнего поля и физические характеристики плазмы.

ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Р.И. Фасхутдинова^{*1,2}, Л.В. Еникеева^{2,3}, И.М. Губайдуллин^{1,2}

¹*Институт нефтехимии и катализа РАН, Уфа, Россия*

²*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия*

³*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

leniza.enikeeva@yandex.ru

В работе проводится исследование на устойчивость реакции алкилирования изобутана олефинами, а именно исследование на устойчивость положения равновесия, то есть устойчивость при достаточно малых возмущениях. Устойчивость положений равновесия динамической системы может быть исследована при помощи первого метода Ляпунова. Сначала находится положение равновесия системы, при котором состояние динамической системы не изменяется во времени. Для химической реакции математическая модель представляет собой систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, где роль переменных играют концентрации реагирующих веществ в реакторе. Однако в химическом реакторе, так же, как и в любой другой реальной системе, неизбежно происходят возмущения стационарного режима. Если после нанесения достаточно малого возмущения положение системы приближается к положению равновесия, то положение является устойчивым. Для исследуемой реакции взяты первые четыре стадии для проработки методологии исследования на устойчивость, однако полученные расчеты показали, что реактор является неустойчивым, так как является реактором периодического действия. На конференции будут представлены результаты для реактора проточного типа.

ЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ

М.Ю. Чепурнов

*Кафедра ФН-1 «Высшая математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
4mi@bk.ru*

Статья посвящена численной оптимизации технологических процессов изготовления тонкостенных деталей.

Объектом исследования является технологический процесс сверхпластической формовки тонкостенной заготовки.

Автором приведены способы решения актуальной научно-технической задачи оптимизации технологического процесса для обеспечения требуемой точности геометрических характеристик ответственных деталей аэрокосмической техники, получаемых сверхпластической формовкой из листовых и трубoproкатных заготовок.

С помощью создания математической модели технологического процесса, конечно-элементной модели, применения различных методов оптимизации автором разработан метод решения задач данного типа и предложена концепция программного продукта для решения подобных задач, который может быть использован при проектировании реальных изделий для нужд машиностроения и авиакосмической промышленности.

ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СПУСКАЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Баранов И.В. *, Н.И. Сидняев

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Москва, Россия
i.w.baranow@yandex.ru*

В докладе представлены полные и дробные факторные планы, а также композиционные ортогональные и ротатабельные планы эксперимента для квадратичных моделей. Построены математические модели для различных комбинаций положения управляющих органов космического аппарата при движении в плотных слоях атмосферы, и проведены расчёты баллистических параметров. Подробно рассмотрены вопросы оптимального планирования для построения математической модели в виде линейной комбинации линейных и квадратических функций от входных факторов с неизвестными параметрами. Выделены существенные факторы, которые необходимо учитывать при построении математических моделей управления баллистическими параметрами. Предложенные модели имеют большое практическое значение на этапе предварительного исследования, при котором из совокупности возможных факторов нужно выделить подмножество переменных, необходимых для построения модели спуска в плотных слоях атмосферы космического аппарата. Правильно выбраны необходимые методы исследования в проблемном поле направления, модифицированы существующие и разработаны новые методы и приемы исходя из задач управления спускаемыми космическими аппаратами.

Список литературы

- [1] Сидняев Н.И. Статистический анализ и теория планирования эксперимента: учебное пособие / Н.И. Сидняев.-М., Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. -195 с.

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ (30.06.2022) — 2 СЕКЦИЯ

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ ДЕТАЛИЗИРОВАННЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОМЫШЛЕННО ВАЖНЫХ КАТАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

И.М. Губайдуллин

*Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, Уфа, Россия
irekmars@mail.ru*

В настоящее время возникла необходимость разработки детализированных кинетических моделей — определение констант и энергий активации детализированных стадий химических превращений на основе решения обратных задач.

В работе систематизированы математические модели прямых задач химической кинетики каталитических реакций. Исследована детализированная кинетическая модель каталитического риформинга бензина с использованием метода группировки компонентов по принадлежности к классу углеводородов и количеству атомов углерода в структуре молекулы, метода анализа чувствительности математической модели для сокращения размерности нелинейной модели. Основным результатом является редуцированная схема каталитического риформинга бензина.

Рассмотрено применение параллельных вычислений к решению обратной задачи для построения кинетической модели процесса алкилирования изобутана со смешанными олефинами C₄, катализируемыми серной кислотой. Разработан параллельный информационно-статистический алгоритм глобального поиска при минимизации функционала разности экспериментальных и расчетных значений концентраций веществ. Данные исследования проводятся в рамках разработки информационно-вычислительных аналитических систем для моделирования и оптимизации каталитических процессов получения товарных бензинов.

SVD-ANALYSIS IN APPLICATION TO MULTIPARAMETER INVERSE PROBLEM OF SEISMIC MONITORING

V.A.Cheverda*, V.I.Kostin

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

Performing seismic monitoring of a hydrocarbon reservoir during its operation provides a fundamental opportunity for operational control over the variability of its mechanical characteristics and, on this basis, to predict its current oil (gas) saturation and in-situ pressure. The current level of development of seismic research technologies makes it quite possible to ensure the required accuracy of the repeatability of experiments and the registration of multicomponent data, both for surface and borehole observation systems.

Downhole observation systems have a number of advantages compared to surface ones, for example, the possibility of rigidly fixing the position of sources and receivers and a significantly lower noise level. In addition, the ability to place both sources and receivers at the level of the target horizon (productive formation) reduces the effect of inhomogeneities in the near-surface part of the section and reduces the length of the wave path. The disadvantage of such an observation system is a small number of sources and receivers placed in the wells. Therefore, of paramount importance is the assessment of the resolution of such surveillance systems and the expected quality of the results obtained with reasonable restrictions on the level of interference (the first percent).

The analysis of resolution and information content carried out in this study proved the fundamental possibility of using downhole acquisition to monitor the variability of elastic parameters in the target area with reasonable requirements for the accuracy of input data (first percent).

This study was supported by Russian Science Foundation under grant 22-11-00104.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

А.А. Алиханов

Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия
aaalikhanov@gmail.com

В данной работе рассматривается начально-краевые задачи для телеграфного уравнения дробного по времени порядка в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, с липшицевой границей $\partial\Omega$. Исходная задача сводится к эквивалентной задаче вида

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \kappa D_{0t}^{\gamma} u(\mathbf{x}, t) + D_{0t}^{-\alpha} \mathcal{A}u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

где оператор D_{0t}^{γ} представляет собой дробную производную в смысле Капуто при $\gamma \in (0, 1)$, единичный оператор при $\gamma = 0$ и оператор дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля при $\gamma \in (-1, 0)$. Эллиптический оператор \mathcal{A} определяется по следующей формуле $\mathcal{A}u(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\operatorname{grad} u(\mathbf{x}, t)) + q(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t)$, $0 < \alpha < 1$, $-1 < \gamma < 1$, $\kappa \leq 0$.

Для задачи (1)–(2) построены разностные схемы второго порядка аппроксимации на базе дискретного аналога дробной производной предложенной работе [1]. Доказаны устойчивость и сходимости предложенных разностных схем со скоростью равной порядку погрешности аппроксимации. Проведены численные расчеты тестовых задач.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-003363 (<https://rscf.ru/project/22-21-00363/>).

Список литературы

- [1] А.А.Алиханов, С. Huang, A high-order L2 type difference scheme for the time-fractional diffusion equation, Appl. Math. Comput., 411 (2021) 126545.

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СЦЕНАРИЕВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ЭПИДЕМИОЛОГИИ

О.И. Криворотько^{*1,2}, С.И. Кабанихин^{1,2}

¹*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*

²*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
krivorotko.olya@inbox.ru

Построение сценариев распространения инфекционных заболеваний с учетом влияния социально-экономических процессов является актуальным с целью разработки комплексного плана мероприятий для сдерживания эпидемии. Для этого была построена совмещенная математическая модель описания эпидемического процесса (на примере распространения COVID-19) с учетом экономических агентов на основе агетного подхода и закона баланса масс. Коэффициенты уравнений, описывающие вероятности перехода между эпидемическими состояниями и реагирования экономических структур, индивидуальны. С этой целью формулируется обратная задача: уточнить параметры совмещенной модели по дополнительной информации о количестве выявленных, госпитализированных, умерших случаев в регионе в фиксированные моменты времени.

Решение обратной задачи сводится к решению задачи минимизации целевого функционала, полученное комбинацией методов глобальной (тензорного разложения, байесовские подходы) и локальной оптимизации. Вычислены границы изменения неизвестных параметров модели. Построены и проанализированы сценарии распространения COVID-19 в некоторых регионах РФ.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ No МК-4994.2021.1.1.

О ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ФИНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ЭПИДЕМИЙ БАРТЛЕТТА-МАК-КЕНДРИКА И ВЕЙСА

А.А. Мастихина, А.В. Мастихин*

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
mastikhin@ibmstu.ru

В рамках теории марковских случайных процессов с непрерывным временем и дискретным множеством состояний рассматривается модели общей эпидемии Бартлетта-Мак-Кендрика и эпидемии Вейса и задача нахождения распределения финальных вероятностей.

Применяются методы теории графов. Наличие в процессах эпидемии поглощающих состояний позволяет ассоциировать с графом траекторий переходных вероятностей некоторый инициальный автомат, регулярные выражения которого связаны с финальными вероятностями. Приводится простой частный случай. Переходя к коммутативным решениям системы для регулярных выражений выводятся трехчленные соотношения. Для вычисления производящей функции использует методы теории непрерывных дробей.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕЧЕНИЙ

В.Г. Байдулов¹, Д.Ю. Князьков^{*1}, А.С. Савин², А.С. Шамаев¹

¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия,*
²*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
Dmitri.Knyazkov@gmail.com

В работе представлены алгоритмы и результаты расчетов динамики поверхностного слоя жидкости под действием вышедших из глубины течений, а также обратные задачи определения характеристик источников этих течений. Обсуждается вопрос об использовании супервычислителей для решения указанных задач.

Исследование выполнено за счет гранта российского научного фонда (проект № 21-11-00151), <https://rscf.ru/project/21-11-00151/>.

ОНЛАЙН ОБОБЩЁННЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ИСКУССТВЕННЫМ ПРОМЕРЗАНИЕМ ГРУНТОВ

Д.А. Спиридонов*, С.П. Степанов, В.И. Васильев

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия
d.stalnov@mail.ru

В данной работе мы представляем Онлайн обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (Online GMsFEM) для решения задачи тепломассопереноса в неоднородных средах с искусственным промерзанием грунта. Математическая модель основана на классической модели Стефана, которая описывает теплообмен с фазовым переходом и включает фильтрацию в пористой среде. Модель описывается набором уравнений температуры и давления. Мы используем метод конечных элементов с методом фиктивных областей для решения задачи на мелкой сетке. Мы применяем метод понижения порядка модели, основанный на Online GMsFEM, для получения решения на грубой сетке. Мы можем использовать онлайн версию GMsFEM, чтобы использовать меньше многомасштабных базовых функций на

оффлайн этапе. В нашем методе мы используем несвязные оффлайн базисные функции, созданные с использованием снейпшот пространства и основанные на спектральных задачах. Это стандартный подход к построению базиса. Мы строим дополнительные базисные функции на оффлайн этапе для учета сезонно охлаждающих установок. Мы используем онлайн многомасштабные базисные функции, чтобы получить более точную аппроксимацию фазового перехода. Мы создаем онлайн базисы, которые уменьшают погрешность, используя локальные невязки. Точность стандартного GMSFEM значительно повышается за счет использования онлайн подхода. Представлены численные результаты в двумерной области со слоистой неоднородностью. Чтобы проверить точность метода, мы представляем результаты с разным количеством оффлайн и онлайн базисных функций. Результаты показывают, что Online GMSFEM может обеспечивать высокоточные решения с минимальными вычислительными ресурсами.

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания No FSRG-2021-0015 в рамках реализации национального проекта «Наука и университеты».

PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION FOR POROELASTICITY PROBLEM IN HETEROGENEOUS MEDIA USING NEURAL NETWORKS

D.A. Ammosov¹, A.V. Grigorev¹, S.P. Stepanov¹, M.V. Vasilyeva², A.A. Tyrylgina^{*,1,3}

¹ North Eastern Federal University, Yakutsk, Republic of Sakha (Yakutia), Russia,

² Texas A&M University - Corpus Christi, Texas, USA,

³ North-Caucasus Center for Mathematical Research, North-Caucasus Federal University, Stavropol, Russia
aa.tyrylgina@mail.ru

In this paper, we consider the poroelasticity problem in heterogeneous media. The mathematical model is described by a coupled system of equations for displacement and pressure in the coupled dual continuum porous media. Our approach utilizes a training process from fine scale direct numerical simulation data projected on proper orthogonal decomposition (POD) with reduced memory requirements. POD is a procedure that takes a provided set of numerical data and creates an orthogonal basis constituted by functions estimated as the solutions of an integral eigenvalue. The existing explicit-implicit schemes are usually that computationally expensive. Therefore, we use a neural network to train certain vertices from our computational grid and using the POD to find an approximate solution a high conductivity pressure. Then, the found solution is used to find the a low-conductive pressure and displacement. The discrete system is constructed based on the finite element method with an explicit-implicit scheme for approximation by time. Numerical results are presented for the model problem in two-dimensional formulations and show that the proposed method provides fast and accurate predictions.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

О.А. Тихонова

СВФУ, ЯО РНОМЦ «Дальневосточный центр математических исследований», Якутск, Россия

oa.tikhonova@gmail.com

В настоящее время многочисленные приложения дробного исчисления в различных областях естествознания вызывает интерес к этим уравнениям. В работе рассматривается уравнение диффузии с дробной производной по времени типа Капуто.

Для численного решения используется неявная разностная схема, при этом дискретная аппроксимация дробной производной берется с помощью квадратурной формулы.

Приводятся численные расчеты при различных значениях порядка дробной производной по времени. Результаты расчетов сравнивались с точным решением на основе функции Миттаг-Леффлера.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 02.02.2022 № 075-02-2022-881.

О ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.А. Егорова^{*1}, А.С. Шамаев²

¹*Кафедра высшей математики и программирования РТУ-МИРЭА, Москва, Россия*

²*ИПМех РАН, Москва, Россия*

В работе рассматривается задача управления одномерными колебаниями эффективных двухфазных слоистых сред с диссипацией. Предполагается, что колебания распространяются перпендикулярно слоям или параллельно им. Слои состоят из вязкоупругих материалов с долговременной памятью с разными характеристиками. Усредненная система описывается интегро-дифференциальным уравнением с ядром, представленным некоторой суммой из убывающих экспоненциальных функций. Управляющее воздействие задается на одном конце полосы в виде граничного условия. Показано, что для рассматриваемых систем при произвольных начальных условиях невозможно привести ее в состояние покоя за конечное время. Формулируется задача о приближенном приведении системы в покой с помощью численного алгоритма.

МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЯ И ПЕРЕНОСА В ТОНКИХ ОБЛАСТЯХ

М.В. Васильева², В.Н. Алексеев^{*1}, Э.Т. Чун³

¹*Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия,*

²*Texas A&M University - Corpus Christi, Texas, США*

³*Китайский университет Гонконга (CUHK), SAR Гонконг, КНР*
alekseev.valen@mail.ru

В данной работе рассматриваются задачи течения и переноса в тонких областях. Задачи моделирования в тонких областях возникают во многих приложениях, где тонкие области приводят к тому или иному типу пониженных моделей. Типичным примером является одномерная модель пониженного порядка для течений в трубообразных геометриях (например, в кровеносных сосудах). Во многих моделях пониженного порядка модельные уравнения априори описываются некоторыми аналитическими подходами. В данной работе предложено использование многомасштабных методов, которые являются альтернативой моделям пониженного порядка и могут представлять моделирование с уменьшенной размерностью с использованием меньшего количества базисных функций (например, использование одной базисной функции соответствует одномерной аппроксимации).

Рассматриваемая в статье математическая модель описывается системой уравнений для скорости, давления и концентрации, где течение описывается уравнениями Стокса, а перенос — нестационарным уравнением конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями на стенах (реактивные границы). Мы начинаем с конечно-элементной аппроксимации задачи на неструктурированных сетках и используем ее в качестве эталонного решения для двух- и трехмерных модельных задач. Аппроксимация с мелкой сеткой разрешает сложную геометрию на уровне сетки и приводит к большой дискретной системе уравнений, решение которой требует больших вычислительных ресурсов. Чтобы уменьшить размер дискретных систем, разрабатывается метод понижения многомасштабной модели, в котором строятся локальные многомасштабные базисные функции для создания низкоразмерной модели на грубой сетке. Предлагаемое понижение многомасштабной модели основана на обобщенных

многомасштабных разрывных методах Галеркина (DG-GMsGEM). В DG-GMsFEM для задач течения начинается с построения пространства снэпшот для каждого интерфейса между ячейками грубой сетки, чтобы зафиксировать возможные течения. Для уменьшения размера пространства снэпшот выполняется уменьшение размерности через решение локальной спектральной задачи и используются собственные вектора, соответствующие наименьшим собственным значениям, в качестве многомасштабных базисных функций для аппроксимации на грубой сетке. Для задачи переноса строятся многомасштабные базисные функции для каждого интерфейса между ячейками грубой сетки и представляем дополнительные базисные функции для учета неоднородных граничных условий на стенках. Наконец, представлены некоторые численные модели для трех тестовых геометрий для двух- и трехмерных задач, чтобы продемонстрировать эффективность метода.

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Л.В. Еникеева^{*1,2}, И.М. Губайдуллин^{2,3}

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,

²Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия,

³Институт нефтехимии и катализа РАН, Уфа, Россия

leniza.enikeeva@yandex.ru

Обратная задача химической кинетики относится к классу задач глобальной оптимизации, так как необходимо найти такой вектор констант скоростей реакции, при котором отклонение расчетных концентраций компонентов реакции от экспериментальных будет минимальным. Обратные задачи химической кинетики относятся к классу некорректно поставленных задач. По Адамару, задача считается поставленной корректно, если

1. ее решение существует,
2. решение единственно,
3. решение устойчиво к вариациям исходных данных.

Если хотя бы одно из перечисленных требований не выполняется, задача признается некорректно поставленной. Встречающиеся на практике обратные задачи химической кинетики обычно имеют решение и условие 1 соблюдается. Однако условия 2 и 3 чаще всего не выполняются.

Для приближенного решения некорректных задач требуются специальные методы, позволяющие гарантированно конструировать решение задачи. Такие методы существуют и их принято называть методами регуляризации. В данной работе применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова, или метод стабилизации, для поиска констант скоростей реакции алкилирования изобутана олефинами.

ОБОВЩЕННЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ РАЗРЫВНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ СРЕДАХ

У.С. Калачикова^{*1}, М.В. Васильева², Эрик Чун³, В.Н. Алексеев¹

¹Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия,

²Texas A&M University Корпус-Кристи, Техас, США,

³Кафедра математики Китайского университета Гонконга, SAR Гонконг

lanasemna@mail.ru

В этой работе мы представляем обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина (GMsDGM) для уравнения конвекции-диффузии в перфорированных средах. Чтобы построить эталонное решение, мы строим мелкую сетку, которая разрешает перфорацию на уровне сетки. Для аппроксимации на мелкой сетке используется разрывный метод Галеркина с внутренним штрафом (IPDG). Чтобы уменьшить размер системы, мы представляем построение аппроксимации на грубой сетке с использованием GMsDGM. В GMsDGM мы строим многомасштабные базисные функции в локальных областях по решениям локальных задач конвекции-диффузии с различными граничными условиями и выполняем понижение размерности по решениям локальных спектральных задач. Исследуются несколько типов построения многомасштабных базисных функций, основанных на различном выборе граничных условий. Представлены численные результаты для нескольких тестовых задач с различными полями скоростей и распределениями перфораций. Также исследуется влияние различных многомасштабных базисных функций с разным количеством базисных функций и разными параметрами модели.

ОБОБЩЕННЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ КОССЕРА

Д.А. Аммосов^{*1}, Я. Эфендиев², Е.Ф. Грекова³, М.В. Васильева⁴

¹Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия,

²Texas A&M University, College Station, United States of America,

³Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия,

⁴Texas A&M University - Corpus Christi, United States of America

dmitryammosov@gmail.com

В данной работе мы рассматриваем модель упругости Коссера. Среда Коссера используется во многих приложениях для описания материалов, частицы которых обладают вращательными степенями свободы. Математическая модель описывается системой уравнений для перемещения и микровращения.

Для численного решения задачи упругости в неоднородной среде Коссера мы предлагаем использовать обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (GMsFEM). Данный многомасштабный метод позволяет решать задачу на грубой сетке, тем самым значительно снижая количество степеней свободы. Для аппроксимации на мелкой сетке мы используем метод конечных элементов со стандартными линейными базисными функциями. С целью проверки эффективности мы рассматриваем двумерные модельные задачи, для каждой из которых вычисляем относительные погрешности в сравнении с решением на мелкой сетке. Наши численные результаты показывают, что предлагаемый многомасштабный метод может обеспечить хорошую точность при значительном снижении размерности дискретной задачи.

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАВИМЕТРИИ

П.Н. Вабищевич^{1,2}, Д.Х. Иванов^{*2}

¹Институт безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия

²СВФУ, ЯО РНОМЦ «Дальневосточный центр математических исследований», Якутск, Россия

djulius.ivanov@yandex.ru

Рассматривается обратная задача гравиметрии по восстановлению области однородного рудного тела по наблюдаемым значениям гравитационного поля. Гравитационное поле находится из решения краевой задачи для эллиптического уравнения с граничным условием третьего рода, численная реализация базируется на методе конечных элементов. Поставленная обратная задача эквивалента задаче восстановления кусочно-постоянной правой части

эллиптического уравнения. Для аналитического представления неизвестной области ее граница приближается нулевой изолинией вспомогательной достаточно гладкой функции. Квази-решение обратной задачи находится из минимизации невязки предсказанных и наблюдаемых данных с помощью градиентного метода. Вычислительные возможности метода приводятся на примере двух- и трехмерных модельных задач.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 02.02.2022 № 075-02-2022-881.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ ОБОЩЕННЫМ МНОГОМАСШТАБНЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ GMSFEM

Д.Я. Никифоров

СВФУ, ЯО РНОМЦ «Дальневосточный центр математических исследований», Якутск, Россия
dju92@mail.ru

При разработке нефтяных и газовых месторождений основная сложность заключается в присущей ей неоднородности, которая выражается высокой контрастностью проницаемости среды. Например, трещиноватый резервуар является неоднородным. Трещины представляют собой каналы с высокой проводимостью, и их влияние необходимо точно учитывать при моделировании. Поскольку существует множество трещин разной длины (макротрещины, мезотрещины и микротрещины), проблема по своей сути является многомасштабной, и для представления влияния трещин на течение необходимы эффективные многомасштабные методы. Для решения вышеописанных задач исследователями разрабатываются различные методы усреднения и многомасштабные методы. Они имеют общую цель: при минимальных потерях в точности решения достичь максимальной экономии вычислительных ресурсов путём уменьшения количества степеней свободы. Так же стоит отметить, что построение многомасштабных базисных функций в обобщенном многомасштабном методе конечных элементов GMSFEM легко поддается распараллеливанию.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 02.02.2022 № 075-02-2022-881.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ЛАБОРАТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САВАРЕТ-MFSH

В.М. Головизнин¹, Павел А. Майоров^{*1,2}, П.А. Майоров^{1,2}, А.В. Соловьев²

¹*ВМК МГУ Кафедра вычислительных методов, Москва, Россия*

²*ИБРАЭ РАН, Москва, Россия*

Распространение трехмерных гравитационных течений встречается при решении многих задач гидравлики, прибрежной динамики, океанологии и метеорологии. Для выяснения динамики гравитационных течений широко используются масштабные лабораторные эксперименты. Данная работа опирается на лабораторные эксперименты по динамике трехмерного гравитационного течения в прямоугольном резервуаре, разделенном на две квадратные емкости стенкой со скользящим затвором. Два резервуара заполнены до одинаковой высоты, один соленой водой, а другой пресной водой. В начале эксперимента затвор быстро удаляют, и гравитационный поток начинает свое развитие.

Описанные выше эксперименты используются для валидации нашей модели САВАРЕТ-MFSH. Многослойная гидростатическая модель САВАРЕТ-MFSH описывает динамику жидкости с переменной плотностью и свободной границей. Вычислительный алгоритм основан на методе гиперболической декомпозиции — представлении многослойной среды в виде отдельных слоев, взаимодействующих через границы раздела.

В работе приводятся результаты численного моделирования лабораторных экспериментов и сравнение с опубликованными экспериментальными данными.

**РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ
ОБОБЩЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**А.Х. Хибиев^{*1,2}, А.А. Алиханов²¹*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия*²*Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия
akhibiev@gmail.com*

Волновые уравнения дробного порядка по времени ($1 < \alpha < 2$), являются хорошим математическим аппаратом для моделирования распространения волн напряжений в вязкоупругих средах, для анализа дробных диффузионных волн в вязкоупругих твердых телах, и для описания степенного затухания с частой, когда волны распространяются через неоднородные среды [1].

В работах [2, 3] были доказаны устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения диффузии дробного и дискретно-распределенного порядков с обобщенными функциями памяти.

В данной работе рассматривается первая краевая задача для волнового уравнения дробного по времени порядка с обобщенной функцией памяти. Построены разностные схемы повышенного порядка аппроксимации. Доказаны безусловная устойчивость и сходимость предложенных разностных схем со скоростью равной порядку погрешности аппроксимации. Проведены численные расчеты тестовых задач.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00363 (<https://rscf.ru/project/22-21-00363/>) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 19-31-90094_Аспиранты.

Список литературы

- [1] T. Sandev, Z. Tomovski. Fractional Equations and Models: Theory and Applications. Springer International Publishing, 2019, 345. 10.1007/978-3-030-29614-8.
- [2] A. A. Alikhanov. A time-fractional diffusion equation with generalized memory kernel in differential and difference settings with smooth solutions, Comput. Methods Appl. Math., 2017, 17(4), 647–660.
- [3] А.Х. Хибиев. Устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2019, 23(3), 582–597.

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ (30.06.2022) — 3 СЕКЦИЯ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕТЕРОГЕННЫХ РЕАКЦИЙ В ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

В.В. Лисица*, Т.С. Хачкова, Я.В. Базайкин

Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия
lisitsavv@ipgg.sbras.ru

Основным способом снижения карбонового следа во всем мире является захоронение CO_2 в геологические формации, что обусловлено как высокой емкостью пористых пластов, так и активными геохимическими процессами, приводящими к формированию химически связанных форм углерода и его надежной консервации. Однако геологическое захоронение CO_2 сопряжено с рядом технологических сложностей. Во-первых, необходимо учитывать изменение структуры геологической формации на масштабе пор, вызванное геохимическими процессами при закачке. Например, выщелачивание карбонатных пород или карбонатного цемента, которое повышает емкость резервуара, но может потенциально приводить к перераспределению напряжений в пласте, развитию процессов трещинообразования и, в конечном счете, к прорыву плюма через породу-покрышку. Поэтому при выборе резервуаров необходимо проводить учет геохимического воздействия на пласт и эффект такого воздействия на разные физические параметры пласта (гидродинамические, геомеханические, сейсмические и пр.) Во-вторых, организация систем наблюдения для сейсмического мониторинга состояния пласта требует тщательной проработки, поскольку получаемые данные должны обеспечивать возможность высокоточной оценки изменения свойств резервуара по сейсмическим (микро-сейсмическим и акустическим) данным. Планирование таких систем возможно только на основе комплексного многофизического предварительного предсказательного моделирования процесса закачки CO_2 в пласт.

В данной работе представлен численный алгоритм для моделирования химического взаимодействия флюида с породой. Для моделирования рассматриваемых гетерогенных реакций задача Стефана решается с использованием конечных разностей с применением метода поверхности уровня в комбинации с методом погруженных граничных условий. Такой выбор методов обеспечивает возможность учета сложной топологии порового пространства и ее изменения в процессе взаимодействия.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ЦИРКУЛЯЦИИ ЗАЛИВОВ КОЛЬСКОГО И ПЕВЕК С УЧЕТОМ РЕАЛЬНЫХ ГЛУБИН И БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ

Д.Г. Асфандияров, О.С. Сороковикова*, Д.В. Дзама

Институт безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия
dasfandiyarov@ibrae.ac.ru, oss@ibrae.ac.ru, dvd@ibrae.ac.ru

Работа посвящена моделированию режимов циркуляции вод Кольского залива и залива Певек, где расположены стоянки АПЛ и плавучая атомная электростанция Ломоносов. Залив Певек - это ключевой порт северного морского пути. Имеет важное стратегическое значение. Созданы алгоритмы, модели, а так же программный комплекс для моделирования процессов с преобладанием адвективных процессов (в приближении гиперболической системы уравнений) с учетом многих физических механизмов, влияющих на циркуляцию в заливах: приливы и отливы, ветровые нагонные волны, учёт реальной трехмерной геометрии водной акватории и береговой линией. Работа модели осуществляется на основе моделирования гидродинамических режимов циркуляции совместно с трёхмерным распространением загрязнения.

ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ СИСТЕМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССОРА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ В АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАФИКЕ

А.Г. Таташев, М.В. Яшина*

*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет,
Москва, Россия*

Алгоритмы диспетчеризации с разделением времени или с разделением пропускной способности широко распространены в современных компьютерных системах и сетях связи. Математические модели таких инфокоммуникационных систем представляют собой системы массового обслуживания со специальными дисциплинами. Для частных случаев таких систем обслуживания получены точные формулы для характеристик этих систем, удобные для практического применения. Характеристики систем, более сложных для аналитического исследования, либо вычисляются с помощью численных методов, либо имитационным моделированием, либо с помощью приближенных подходов, при разработке которых точность даваемого ими приближения оценивается с использованием численных методов или имитационных моделей. Протоколы, используемые в современных и перспективных коммуникационных системах, предусматривают разделение пропускной способности каналов передачи данных путем выделения различным классам сообщений диапазонов частот, предоставляемым эти классам. При этом более приоритетные классы получают преимущества.

Для оценки эффективности работы фрагментов коммуникационных систем с такими протоколами в качестве математических моделей используются многоканальные системы массового обслуживания со специальными дисциплинами, для характеристик которых явные формулы не известны из-за сложности этих систем. Применение численных алгоритмов при исследовании этих систем затрудняется из-за очень большой размерности процесса, так как реальным системам рассматриваемого вида соответствуют системы обслуживания, содержащие несколько десятков каналов. По аналогичной причине, при исследовании этих систем с помощью имитационного моделирования требуются большие интервалы моделирования, так как длительные интервалы времени, в течение которых в системе находится небольшое число обслуживаемых требований, чередуется с длительными интервалами времени, в течение которых система остается сильно загруженной. В инфокоммуникационных системах используются алгоритмы диспетчеризации, в соответствии с которыми предусматривается ограничение на число заданий, одновременно обслуживаемых в режиме разделения времени, с целью обеспечения приемлемого качества обслуживания заданий. Для моделирования работы таких систем используются системы массового обслуживания с дисциплинами ограниченного процессора.

В настоящей работе предлагаются подходы к оценке характеристик систем обслуживания, которые могут применяться в качестве моделей для оценки работы коммуникационных систем мобильной связи, используемых в современных автомобильных сетях. Так называется перспективная технология систем беспроводной связи подключенных автоматизированных транспортных средств, которая на основе концепции IoT дает возможность при движении на магистрали обмениваться информацией между бортовыми компьютерами автомобилей и придорожными устройствами и реализовать приложения типа V2V/V2I/V2X.

Предлагаются также подходы к оценке характеристик систем обслуживания с дисциплинами неограниченного и ограниченного разделения процессора, в частности, с дисциплинами, при которых преимущество предоставляется более приоритетным требованиям, а внутри одного класса требования обслуживаются в режиме разделения процессора. Рассматриваются варианты систем обслуживания с очередью или с потерями требований. Приближенные подходы оцениваются с помощью имитационного моделирования. Для частных случаев получены формулы, дающие точные значения исследуемых характеристик.

Список литературы

- [1] Maslova E.A., Tatashev A.G. Approximate method for preemptive priority service in a multichannel system. Automatic Control and Computer Science, 1992, vol. 26, no 1, pp. 10–15. Translated from Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika, 1992, no. 1, pp. 13–18.
- [2] Alencar M.S., Tatashev A.G., Yashina M.V. Stochastic estimation of on-time message delivery in a packet-switched network with messages of different priorities. 2020 International Conference on Engineering Management of Communication and Technology (EMCTECH), 2020, pp. 1-4, DOI: 10.1109/EMCTECH49634.2020.9261511.
- [3] Alencar M.S., Buslaev D.A., Tatashev A.G., Yashina M.V. Estimation method of v2v networks capacity in saturated traffic flows. 2021 Systems of signals generating and processing in the field of on board communications. IEEE Conference #51389. 16–18 March 2021, Moscow, Russia.

ЧИСЛЕННОЕ УСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИЧАРДСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

С.П. Степанов^{*1}, Д.А. Спиридонов¹, Тина Май²

¹Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

² Университет Дуь Тан, Вьетнам, Якутск, Россия
cere2a@inbox.ru

В данной работе мы используем глубокие нейронные сети (DNN) для исследования метода частичного обучения для численной гомогенизации. В этой исследовании мы используем нейронные сети для прогнозирования (1) эффективной проницаемости, (2а) гомогенизированной матрицы жесткости с грубой сеткой и (2б) функции правой части. Здесь метод машинного обучения разработан с использованием глубокой нейронной сети. Мы проводим два эксперимента (для эффективной проницаемости и гомогенизированной матрицы жесткости) при создании набора данных. Мы предсказываем эффективную проницаемость в первом эксперименте и предсказываем гомогенизированную матрицу с крупной сеткой и функцию правой части во втором эксперименте. Используем набор решений проблем для различных входных ситуаций для обучения нейронных сетей. После обучения нейронных сетей на наборе данных можно проводить быстрые и точные вычисления. Наши численные результаты показывают, что глубокие сети дают хорошие результаты и что их можно применять к данным наблюдений (тестовым данным).

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ПРОТОТИПИРОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАЗЦОВ НОЖЕВЫХ ИЗДЕЛИЙ

А.В. Григорьев^{*}, А.В. Ноговицин

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия
re5itsme@gmail.com

В работе обсуждается интеллектуально-вычислительная система для прототипирования и моделирования образцов ножевых изделий. В практике, ножевые дизайнеры и ножевые изготовители как правило не применяют подходы основанные на математическом моделировании или искусственном интеллекте для анализа и усовершенствования характеристик своих изделий. Поэтому мы предполагаем, что удобное приложение, которое в состоянии это реализовать, будет востребованным. На данном этапе ведется разработка удобного пользовательского интерфейса для мобильных устройств и разрабатывается соответствующее интеллектуально-вычислительная платформа, которая предназначена для твердотельного

компьютерного дизайна изделий, их математического моделирования и построения на этой основе прогноза с применением архитектур сверточных нейронных сетей. В методической части работы исследуются два различных подхода к решению задачи упругости для материала с включениями. В качестве классического подхода мы используем метод конечных элементов. Между тем, мы также применяем подход с применением нейронных сетей для построения решателя на основе решений полученным первым способом. Данный подход заключается в обучении сверточных нейронных сетей на семействе решений, представленных в виде изображений. По результатам применения двух подходов демонстрируется эффективность и применимость методов для решения поставленной задачи.

МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ С БОЛЬШИМ ДИАПАЗОНОМ СКОРОСТЕЙ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СХЕМЫ КАБАРЕ

Д.Г. Асфандияров^{*1}, О.С. Сороковикова¹

¹*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия
dasfandiyarov@ibrae.ac.ru*

На сегодняшний день большое количество численных методик для моделирования различных гидрологических процессов в поймах и руслах рек, открытых каналах, а также в прибрежных зонах основано на решении уравнений Сен-Венана. Данные уравнения гиперболического типа описывают законы сохранения массы и импульса и определяют связь между полем потока и изменением глубины воды с учетом гидравлического сопротивления и неровностей рельефа. Особым случаем является рассмотрение прорывных течений на гидротехнических сооружениях. К численным схемам должны предъявляться высокие требования к надежности и точности моделирования разрывных решений и решений с большими градиентами моделируемых величин.

В данной работе для моделирования подобного рода задач представлена численная методика и ее апробация для широкого диапазона параметров моделируемых процессов. Реализован учет набегания потока на сухое дно, когда уравнения Сен-Венана теряют смысл, учтено влияние различных физических процессов. Например, трение о дно, осадки. Апробация метода проводится на серии задач, допускающих точное решение, и ряде экспериментов, которые широко используются для валидации гидрологических моделей.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ОТКЛИКОВ ОТ ТРЕЩИНОВАТЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЁВ

И.С. Никитин¹, В.И. Голубев^{*1,2}, Н.И. Хохлов², В.А. Миряха¹

¹*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, Москва, Россия,*

²*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», Долгопрудный, Россия
w.golubev@mail.ru*

В настоящее время интерес к выявлению признаков трещиноватых сред в волновом поле возрастает и связан, во многом, с поиском месторождений нефти и газа, приуроченных к карбонатным резервуарам. Появляется необходимость провести численное исследование волновых процессов, происходящих в неоднородных трещиноватых геологических средах, которое позволит выявить особенности сигналов-откликов, формирующихся от трещиноватых включений.

Для моделирования процесса распространения сейсмических волн в трещиноватых геологических средах в настоящей работе используется континуальная модель среды, содержащей

систему плоскостей скольжения с заданной нормалью к ним. Приводится математическая постановка задачи с соответствующими нелинейными условиями на контактных границах, строится численная реализация на основе сеточно-характеристического метода и неявной аппроксимации уравнений, которые содержат малый параметр в знаменателе свободного члена. Приведены результаты решения двумерных и трехмерных задач, полученные с использованием высокопроизводительных вычислительных систем.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект No 19-71-10060).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНОЙ КОНВЕРСИИ УГЛЕВОДОРОДОВ

В.Н. Снытников

*Институт катализа им. Г.К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия
snyt@catalysis.ru*

Современные задачи по переработке добываемых легких углеводородов вызвали интерес к использованию лазерного излучения для интенсификации химических процессов в малотоннажных реакторах. Математическое моделирование в лазерной термохимии продвигалось в конце 80-х годов прошлого столетия и стало вновь развиваться в последние годы.

Для численного моделирования лазерной конверсии легких алканов в дозвуковом потоке создан параллельный код. С его использованием изучаются химические процессы с радикальными реакциями углеводородов в многокомпонентном газе под воздействием лазерного излучения. Оно поглощается этиленом, и газ локально нагревается. Нагрев газа запускает в реакционной среде нелинейные процессы. К ним, помимо автокатализа и поглощения излучения, относятся нагрев от стенок, теплопроводность, диффузия и смешение компонентов. В среде возникают сверхравновесные концентрации радикалов, и происходит интенсификация синтезов. Эти связанные между собой физико-химические процессы имеют по своим скоростям разные масштабы. Основное внимание уделяется конверсии метана в ценные продукты — водород, этилен, ацетилен при температурах стенок лабораторных реакторов. Результаты моделирования, алгоритм и программа найдут свое применение в создании новых технологий лазерной термохимии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ проект 21-19-00429.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКОВ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА С РАЗНОМАСШТАБНЫМИ ХИМИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Е.Е. Пескова*, В.Н. Снытников

*Институт катализа СО РАН, Новосибирск, Россия
e.e.peskova@mail.ru*

Одним из направлений исследований в области вычислительной математики является разработка алгоритмов для изучения динамики многокомпонентного газа при воздействии нескольких источников энергии. В такой динамике проявляются нестационарные процессы с разномасштабными характерными скоростями, что определяет необходимость использования специальных математических моделей и численных схем, обеспечивающих приемлемое число операций при требуемой точности вычислений. В настоящей работе предлагается вычислительный алгоритм для изучения химических процессов в многокомпонентном газе с лазерным излучением. Вычислительный алгоритм построен на основе схемы расщепления по физическим процессам. Аппроксимация конвективных членов в уравнениях Навье-Стокса для дозвуковых течений реализована с помощью WENO схемы повышенного порядка аппроксимации. Разработан код с использованием технологий параллельных вычислений. Продемонстрировано использование кода в расчетах пиролиза этана с радикальными реакциями. Детально

изучается формирование сверхравновесных концентраций радикалов по объему реактора. Разработанный алгоритм и программа найдут свое применение в создании новых технологий лазерной термохимии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ проект 21-19-00429.

ПРИМЕНЕНИЕ СИМУЛЯТОРА GEM5 К ОЦЕНКЕ МАСШТАБИРУЕМОСТИ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

А.Н. Семакин

*Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Москва,
Россия
arte-semaki@yandex.ru*

Моделирование переноса примесей в атмосфере основано на ресурсоемких численных алгоритмах, для реализации которых необходимо применение высокопроизводительных рабочих станций, оснащенных десятками вычислительных ядер. Учитывая высокую стоимость подобных машин, их использование на этапе создания и отладки расчетных программ крайне нерационально. Программы можно писать на дешевых маломощных компьютерах, а дорогие рабочие станции использовать уже только на этапе полезных вычислений. При таком подходе становится актуальной задача постоянной оценки степени масштабируемости программы на целевое число ядер во время ее написания и отладки. Для решения поставленной задачи предлагается использовать симулятор gem5 – программу имитации работы компьютерной системы с заданными компонентами. В данной работе с помощью gem5 имитируются две многоядерные компьютерные системы разной степени детализации и на них производится оценка масштабируемости написанной ранее программы переноса примесей в атмосфере. Также проводится сопоставление полученных оценок с реально наблюдаемыми на настоящем компьютере.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЗЕРНА КАТАЛИЗАТОРА

О.С. Язовцева^{*1}, И.М. Губайдуллин², А.Ф. Кокулов¹, А.А. Макарова¹, Е.Е. Пескова¹

¹*Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия,*

²*Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, Уфа, Россия,
kurinaos@gmail.com*

Окислительная регенерация — это выжиг коксовых отложений с поверхности и пор зерна кислород-содержащим газом. Математическое моделирование является эффективным методом прогнозирования течения процесса регенерации с точки зрения материальной выгоды и временных затрат.

В настоящей работе предлагается математическая модель и численный алгоритм для исследования регенерации зерна катализатора цилиндрической формы.

Модель содержит уравнение материального и теплового баланса, а также кинетические уравнения для описания химических превращений. Ввиду высокой жесткости полученной модели для снижения вычислительной сложности алгоритма выполнено расщепление по физическим процессам, уравнения для описания химических реакций решены специализированными методами, балансовые уравнения — интегро-интерполяционным методом.

В результате моделирования получены картины распределения температуры и реагирующих веществ по зерну катализатора.

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД SPH-IDIC ДЛЯ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ГАЗОДИСПЕРСНЫХ СРЕД С РАЗНОМАСШТАБНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.П. Стояновская*¹, В.В. Григорьев², М.Н. Давыдов¹, Т.В. Маркелова³, В.В. Лисица⁴, Н.В. Снытников⁵, Т.А. Савватеева¹

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия,*

²*Крымская астрофизическая обсерватория РАН, пгт Научный, Бахчисарайский район, республика Крым, Россия*

³*Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия*

⁴*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия*

⁵*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
o.p.sklyar@gmail.com*

Для моделирования на макроуровне динамики газовзвесей с полидисперсными частицами необходимо численно решать уравнения газодинамического типа с релаксационными слагаемыми, описывающими передачу импульса и энергии от газа к частицам и наоборот. Для ультрадисперсных частиц время скоростной и тепловой релаксации намного короче, чем время, на котором рассматривается динамика среды. В этом случае время релаксации является малым параметром задачи, который делает задачу жесткой.

В работе развит метод SPH-IDIC, основанный на лагранжевом методе гидродинамика сглаженных частиц. Погрешность SPH-IDIC при фиксированных счетных параметрах стремится к нулю при бесконечно малых и бесконечно больших временах релаксации. Такие методы имеют преимущество при решении жестких задач, так как позволяют выбирать счетные параметры независимо от малых физических параметров задачи. В SPH-IDIC все силы кроме межфазного обмена рассчитываются с помощью подхода частица-частица, а межфазный обмен рассчитывается неявно с использованием сетки. Это определяет устойчивость и асимптотические свойства метода.

Разработана и верифицирована реализация SPH-IDIC для моделирования трехмерной динамики газодисперсных сред на суперкомпьютерах с распределенной памятью и машинах с графическими ускорителями. Сходимость метода на гладких решениях изучается с помощью дисперсионного анализа.

ПРИМЕНЕНИЕ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕАГИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЙ В МАСШТАБЕ ПОР

В.В. Григорьев*, А.В. Саввин

*Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия
v.v.grigorev@empl.s-vfu.ru*

В реальных инженерных задачах изучаемые случаи пористых сред обычно состоят из сложных микронеоднородностей, что приводит к высоким вычислительным затратам на детальное моделирование микроструктур. Примеров можно привести много: нефтяной пласт, мембрана фильтров очистки, композитные материалы, сердечно-сосудистая система и так далее. В настоящее время есть много аппаратов для получения визуализации многомасштабных пористых сред: ХСТ, FIB-SEM, электронная томография. Однако, для оценки неопределенностей связанных с геометрией и составляющими пористых сред, требуются многочисленные эксперименты, что является весьма дорогим и времязатратным процессом. Создание синтетических пористых сред, которые отвечают всем свойствам реальной геометрии, позволяют выполнять многократное моделирование в различных условиях. Приведено решение трехмерной задачи реагирующего потока в масштабе пор, с применением суперкомпьютерных технологий для оценки неопределенностей связанных с морфологией пористых структур на синтетических пористых средах.

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Р.М. Узьянбаев^{*1,2}, Ю.О. Бобренева², И.М. Губайдуллин^{1,2}

¹Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия,

²Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, Уфа, Россия
ravit-11@mail.ru

В настоящее время идет цифровизация в промышленности. Создание цифровых двойников стало приоритетом многих нефтяных компаний. В таких задачах требуются высокопроизводительные вычислительные системы, чтобы максимально быстро и точно воспроизвести все процессы технического объекта (например, нефтяной скважины). Одним из этапов создания двойника добывающей скважины является разработка цифровой модели. Гидродинамические модели описывают процессы происходящие при добычи нефти. С увеличением размерности и усложнением гидродинамических моделей увеличиваются требования к оперативной памяти и производительности вычислительных систем. Параллельная многопоточная версия для рабочих станций позволяет сократить время расчета за счет использования многоядерности процессоров. В работе рассматривается параллельная реализация математической модели двухфазной фильтрации жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа в рамках гидродинамического исследования на скважине. Для ускорения расчетов используется алгоритм параллельной прогонки, адаптированный к данной задаче. На его основе проведена серия расчетов, подтверждающая эффективность предложенной численной процедуры и ее параллельной реализации.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКАНИЯ ЗЕРЕН ОКСИДА ИТТРИЯ

Д.И. Прохоров^{*1}, Я.В. Базайкин¹, В.С. Деревщиков^{2,3}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия, im@math.nsc.ru

²Институт катализа им. Г.К. Борескова Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия, bic@catalysis.ru

³Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Технология спекания широко используется в современной промышленности, поскольку позволяет получать материалы с заданными свойствами. Использование химических или физических техник для измерения этих свойств может быть сопряжено с разрушением исследуемого образца, что вызывает трудности в оценке эволюции параметров. Компьютерное моделирование процесса спекания позволяет преодолеть эти сложности, а также снизить стоимость исследования.

Интерес к спеканию оксида иттрия вызван тем, что оксид иттрия можно использовать как пористую основу в материалах подверженных высоким температурам, так как он обладает высокой термической стойкостью (температура плавления - 2430° С).

Для моделирования спекания используется метод фазового поля. Модель описывается уравнениями Кана-Хиллиарда и Аллена-Кана, для которых построена разностная схема, параллелизованная с использованием технологии CUDA. Разработан алгоритм отслеживания отдельных зерен, позволяющий уменьшить затраты вычислительных ресурсов. Приведены результаты трехмерного моделирования спекания зерен оксида иттрия, имеющих кубическую форму. Показано изменение удельной площади образца в процессе спекания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 21-71-20003).

ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ С УЧЕТОМ ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ. МЕТОДОЛОГИЯ. ВЕРИФИКАЦИЯ И ВАЛИДАЦИЯ

Д.В. Дзама

Институт безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия
dvd@ibrae.ac.ru

Разработана и реализована модель трехмерной атмосферной циркуляции внутри городской застройки. Модель верифицирована и валидирована в широком диапазоне атмосферных условий. Модель относится к классу так называемых двухслойных моделей. Расчетные ячейки подразделяются на два типа: приповерхностные и не примыкающие к твердой поверхности; с разными методиками расчёта турбулентной диффузии. Проведено сравнение методик и результатов моделирования с общепризнанными коммерческими и открытыми расчётными кодами. Основная особенность разработанных алгоритмов в отличие от них заключается в возможности применения не только при нейтральной стратификации атмосферы, но и при устойчивых и неустойчивых стратификациях. Проведены количественные оценки качества моделирования путем сравнения модельных результатов и экспериментальных данных на основе специальных статистических метрик, рекомендованных в международных документах для моделей подобного целевого назначения.

СХЕМА КАБАРЕ С УЛУЧШЕННЫМИ ДИСПЕРСИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Н.А. Афанасьев

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
vmnaf@cs.msu.ru

Для описания многих современных задач математической физики используются системы дифференциальных уравнений гиперболического типа. Одним из широко применяемых методов решения таких систем является схема КАБАРЕ. В качестве недостатка данной схемы можно выделить сильную аномальную дисперсию при стремлении чисел Куранта к нулю, что может привести к значительным искажениям профиля решения. Ранее была получена улучшенная схема для систем линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа. Особенность данного метода заключается в том, что для вычисления значений на новом временном слое необходимо знать полный набор собственных векторов матрицы системы, постоянной в линейном случае. В нелинейном случае матрица в таких системах зависима от переменных задачи, а ее собственные значения в разностном случае становятся локальными для каждой ячейки сетки, что может приводить к малым числам Куранта в областях наиболее медленно переносимых инвариантов Римана. В данной работе была получена схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем нелинейных уравнений. Новая схема была протестирована на задачах о распространении акустических возмущений и задаче о распаде разрыва. Результаты расчетов продемонстрировали, что дисперсионная ошибка улучшенной схемы значительно меньше, чем у стандартной схемы КАБАРЕ.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ОБЪЕМНЫХ МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

С.В. Кышпыгыров*, Т.А. Платонова, Е.А. Петров

ООО «Сайберия», Якутск, Россия
info@sciberia.io

Цифровизация диагностических процессов в радиологии зародила направление компьютерной обработки медицинских изображений. На текущий момент разработаны системы помощи принятия врачебных решений (СППВР) на базе методов машинного обучения. В частности, методы компьютерного зрения для плоских медицинских изображений, которые показали себя как устойчивые и эффективные. Непрерывное совершенствование радиологического оборудования приводит к улучшению качества медицинских изображений. Подобное

улучшение повышает прогностическую ценность СППВР. Формат медицинских исследований сохраняет объемное изображение в виде ряда плоских изображений.

Для решения ряда медицинских задач требуется одномоментная обработка серии изображений в пределах одного исследования, что невозможно реализовать на персональном компьютере с сохранением разрешения исходных изображений в виду ограниченности памяти устройств для массивно-параллельных вычислений. Решением данной проблемы является использование кластерных вычислений, что позволяет обрабатывать объемные медицинские изображения без потери качества и расширяет спектр диагностических возможностей СППВР.

НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ САВАРЕТ-НН

В.М. Головизнин¹, П.А. Майоров^{1,2}, Петр А. Майоров^{*1,2}, А.В. Соловьев²

¹*ВМК МГУ Кафедра вычислительных методов, Москва, Россия*

²*ИБРАЭ РАН, Москва, Россия*

Модели динамики жидкости делятся на два класса: гидростатические, предполагающие допустимость пренебрежения вертикальным ускорением в уравнении движения, и негидростатические, учитывающие данное ускорение. Влиянием негидростатического фактора нельзя пренебречь при сравнимых вертикальных и горизонтальных размерах расчётной области, а так же в областях с выраженными элементами рельефа.

Представлена балансно-характеристическая численная модель САВАРЕТ-НН для решения уравнений динамики стратифицированной жидкости в негидростатическом приближении.

Система уравнений динамики несжимаемой жидкости со свободной поверхностью приводит к необходимости разрешения эллиптического уравнения, что требует больших вычислительных ресурсов и затрудняет процесс распараллеливания на вычислительных комплексах с распределенной памятью. В работе используется альтернативный подход - гиперболизация исходной системы уравнений, осуществляемая за счет введения искусственной слабой сжимаемости.

Для увеличения расчетного шага по времени используется явно- неявная схема САВАРЕТ: явная вдоль горизонтальных направлений и неявная по вертикали. Введенная неявность разрешается прогонкой. Полученная схема остается сравнимой по сложности с явной схемой САВАРЕТ.

Научное издание

**СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

V международная конференция

Тезисы докладов

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка *Д.Х. Иванов*
Оформление обложки *П.И. Антипин*

Подписано в печать 22.06.2022. Формат 60x80/16.

Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.

Печ. л. 3,1. Уч. изд. л. 3,3. Тираж 100 экз. Заказ 122

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5

Отпечатано в типографии ИД СВФУ