Международная конференция по математическому анализу и дифференциальным уравнениям

Сборник тезисов

19-23 сентября 2022г.

Цахкадзор, Армения

Yerevan State University
Krasnoyarsk Mathematical Center
Southern Federal University
Institute of Mathematics NAS Armenia

International Conference on Mathematical Analysis and Differential Equations

Abstracts

19-23 September 2022

Tsaghkadzor, Armenia

Yerevan
«Meknark»
2022

Ереванский Государственный Университет
Красноярский Математический Центр
Южный Федеральный Университет
Институт Математики НАН Армении

Международная конференция по математическому анализу и дифференциальным уравнениям

Сборник тезисов

19-23 сентября 2022г.

г. Цахкадзор, Армения

Ереван
«Мекнарк»
2022

УДК 517(082)
ББК 22.161я43
М 431

М 431 Международная конференция по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. Сборник тезисов. г. Цахкадзор, Армения, 19-23 сентября 2022г.– Ереван: «Мекнарк», 2022.- 93 с.

В сборник включены тезисы докладов, представленных на международную конференцию по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. Издание представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов.

УДК 517(082)
ББК 22.161я43

ISBN 978-9939-962-00-9

Программный комитет:

Сергеев Армен Глебович (председатель), *Математический институт имени В.А. Стеклова РАН*
Геворкян Гегам Григорьевич, *Ереванский Государственный Университет*
Трещев Дмитрий Валерьевич, *Математический институт имени В.А. Стеклова РАН*
Кисляков Сергей Витальевич, *Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В.А. Стеклова РАН*
Аптекарев Александр Иванович, *Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН*
Думанян Ваграм Жораевич, *Ереванский Государственный Университет*
Волович Игорь Васильевич, *Математический институт имени В.А. Стеклова РАН*
Саакян Артур Артушович, *Ереванский Государственный Университет*
Насыров Семен Рафаилович, *Казанский (Приволжский) федеральный университет*
Давыдов Алексей Александрович, *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
Хачатрян Хачатур Агавардович, *Ереванский Государственный Университет*
Чирка Евгений Михайлович, *Математический институт имени В.А. Стеклова РАН*
Мусин Ильдар Хамитович, *Институт математики с ВЦ УНЦ РАН*
Барсегян Григорий Арташесович, *Институт математики НАН РА*
Цих Август Карлович, *Сибирский Федеральный Университет*
Карапетянц Алексей Николаевич, *Южный Федеральный Университет*
Аветисян Карен Ларикович, *Ереванский Государственный Университет*

Организационный комитет:

Хачатрян Агавард Хачатурович (председатель), *Институт математики НАН РА*
Петросян Айкануш Самвеловна (ученый секретарь), *Национальный аграрный университет Армении*
Маргарян Вачаган Николаевич, *Российско-Армянский Университет*
Арутюнян Тигран Нерсесович, *Ереванский Государственный Университет*
Аветисян Метаксия Овнановна, *Национальный аграрный университет Армении*
Бушуева Наталья Александровна, *Красноярский Математический Центр*
Мкртчян Александр Джанибекович, *Сибирский Федеральный Университет*
Акопян Александр Рубенович, *Российско-Армянский Университет*

Конференция поддержана
Фондом Исследовательская математика,
Ереванским государственным университетом,
Комитетом по науке МОНКС РА,
РНОМЦ “Красноярский математический центр”,
РНОМЦ Южного федерального университета

ISBN 978-9939-962-00-9

Содержание (Contents)

О разрешимости одного класса интегральных уравнений на положительной полупрямой с выпуклой нелинейностью

Акопян А.Р. (Российско-Армянский Университет)
e-mail: alexander.hakobyan@gmail.com
Хачатрян Х.А. (Ереванский Государственный Университет)
e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

В работе рассматривается следующий специальный класс нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой с интегральным оператором не обладающим свойством полной непрерывности в пространстве ограниченных функций:

$$f(x) = \lambda(x) \int_0^\infty K(y)G(f(r(x,y)))dy,\ x \in \mathbb{R}^+ := [0,\infty). \tag{1}$$

относительно искомой неотрицательной и ограниченной функции $f(x)$.

В уравнении (1) λ и K измеримые функции на множестве $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$a)\ 0 \le \lambda(x) \le 1, \lambda(x) \not\equiv 1, x \in \mathbb{R}^+, \lambda(x) \uparrow \text{ на } \mathbb{R}^+, x(1-\lambda(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

$$b)\ K(x) > 0, x \in \mathbb{R}^+, K \in L_1(\mathbb{R}^+), \int_0^\infty K(x)dx = 1,$$

где $L_1(\mathbb{R}^+)$ - пространство суммируемых функций на множестве $\mathbb{R}^+$.

Нелинейность G обладает следующими свойствами:

1) существует число $\eta > 0$, такое, что $G \uparrow$ на отрезке $[0,\eta]$,
2) $G(u) \ge u,\ u \in [0,\eta],\ G(\eta) = \eta,$
3) $G(0) = 0,\ G \in C(\mathbb{R}^+),$

где $C(\mathbb{R}^+)$ - пространство непрерывных функций на множестве $\mathbb{R}^+$.

В (1) $r(x,y)$ непрерывная функция на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, принимает неотрицательные значения и удовлетворяет следующим ограничениям:

I) при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ функция $r(x,y) \uparrow$ по y на множестве $\mathbb{R}^+$ и при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}^+$ функция $r(x,y) \uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$.

II) $r(x,0) \ge x$, $x \in \mathbb{R}^+$ и существует число $\delta > 0$, такое, что

$$r(x,\delta) \ge x + \delta,\ x \in \mathbb{R}^+.$$

В различных частных случаях данный класс уравнений имеет приложения в конкретных направлениях математической физики. В частности, такие уравнения встречаются в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в кинетической теории плазмы и в теории p-адических открыто-замкнутых струн (см. [1]-[5]). Сочетание специальных итерационных методов (см. [6]) с методами теории монотонных операторов (см. [7]), действующих в определенных конусных отрезках, позволяет доказать следующую конструктивную теорему:

Теорема 1. *При условиях a), b), 1)-3) и I), II) нелинейное интегральное уравнение* (1) *обладает неотрицательным нетривиальным и ограниченным на* $\mathbb{R}^+$ *решением* $f(x)$, *причем существует* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ *и* $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Также приводится пример нелинейности уравнения, в случае которого единственность решения в пространстве ограниченных функций нарушается. В конце рассматриваются конкретные частные примеры указанного класса уравнений, первая часть из которых имеет прикладной интерес, а вторая часть имеет чисто теоретический характер.

Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

Литература

[1] Л. Г. Арабаджян. Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде. Дифференц. уравнения, 23:9 (1987), 1618–1622.
[2] В. В. Соболев. Проблема Милна для неоднородной атмосферы. Докл. АН СССР, 239:3 (1978), 558–561.
[3] Cerncignani C. The Boltzmann equation and its applications. Springer - Verlag, New York, 1998.
[4] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян. Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях, ТМФ, 172:3 (2012), 497–504.
[5] Х. А. Хачатрян. О разрешимости в $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с некомпактным оператором Гаммерштейна-Немыцкого, Алгебра и анализ, 24:1 (2012), 223–247.
[6] Х. А. Хачатрян. Некоторые классы нелинейных интегральных уравнений Урысона на полуоси. Докл. НАН Беларуси, 55:1 (2011), 5–9.
[7] Х. А. Хачатрян. Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси. Докл. РАН, 425:4 (2009), 462–465.

О простоте и сложности аналитических функций

Белошапка В.К. (Московский университет им. М.В.Ломоносова)
e-mail: vkb@strogino.ru

Ценность математического исследования, как учат нас классики, в загадочном сочетании глубины и простоты. Антитезой глубины является тривиальность, антитезой простоты – сложность. Проблема сложности и ее оценки присутствует, так или иначе, в любой математической дисциплине. Взгляд на математику с позиций теории сложности позволяет переосмыслить достижения прошлого, обнаружить неожиданные связи и сформулировать вопросы на будущее [1]. Этот подход позволяет обнаружить неожиданные связи между уравнением Лапласа и эллиптическими функциями, уравнением теплопроводности и интегралом ошибок и пр.

В докладе будет дан обзор результатов по сложности аналитических функций нескольких переменных. Среди них:

– Схемы композиции и классы сложности.
– Описание классов средствами дифференциальной алгебры.
– Калибровочная группа, теорема о стабилизаторе, связь с теорией тканей.
– Теорема Вейерштрасса и алгебраические функции первого класса.[2]
– Геометрия классов: классы как бесконечномерные многообразия.
– Стратификация решений дифференциальных соотношений (спектр).[3]
– Описание решений сложности один ряда уравнений матфизики.[4]

Литература

[1] А. Г. Витушкин. 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы. УМН, 2004, 59:1(355), 11–24.
[2] V. K. Beloshapka. Algebraic Functions of Complexity One, a Weierstrass Theorem, and Three Arithmetic Operations. Russian Journal of Mathematical Physics (RJMP), 2016, Vol. 23, no. 3, pp. 343–347.
[3] М. А. Степанова. Об аналитической сложности дифференциально-алгебраических
функций. Матем. сб., 210:12 (2019), 120–135.
[4] V. K. Beloshapka. On Simple Solutions of Some Equations of Mathematical Physics. Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 27, No. 3, 2020, pp. 272–276.

Теоремы единственности для простых тригонометрических рядов и их применение к кратным рядам

Геворкян Г.Г. (Ереванский государственный университет)
e-mail: ggg@ysu.am

Если дважды формально интегрировать тригонометрический ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} =: \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n(x), \tag{1}$$

с ограниченными коэффициентами, то получится равномерно сходящийся ряд

$$F(x) := Ax + B + \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{A_n(x)}{n^2}. \tag{2}$$

Выражения

$$S(x,h) := \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}, \quad h > 0, \tag{3}$$

называют суммами Римана ряда (1), выражение $S^*(x) := \sup_{h>0} |S(x,h)|$-мажорантой Римана ряда (1). Если ряд (1) в точке x сходится, то $\lim_{h\to 0} S(x,h) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n(x)$. А вообще, если существует $\lim_{h\to 0} S(x,h) = S$, то говорят, что ряд (1) в точке x методом Римана суммируется к значению S.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть для ряда (1), с коэффициентами стремящимися к нулю, всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества B, выполняется $S^*(x) < \infty$ и суммы $S(x,h)$ по мере сходятся к некоторой интегрируемой функции f, когда $h \to 0$. Тогда ряд (1) является рядом Фурье функции f.*

Теорема 2. *Пусть для ряда (1), с ограниченными коэффициентами, всюду выполняется $S^*(x) < \infty$ и суммы $S(x,h)$ по мере сходятся к некоторой интегрируемой функции f, когда $h \to 0$. Тогда ряд (1) является рядом Фурье функции f.*

Учитывая регулярность метода суммирования Римана, из теоремы 1 получается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть для ряда (1) всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества выполняется $\sup_N \left|\sum_{|n|\leq N} A_n(x)\right| < \infty$ и $\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} A_n(x) = f(x)$ по мере, где f-некоторая интегрируемая функция. Тогда ряд (1) является рядом Фурье функции f.*

Эти теоремы являются усилениями классических теорем Валле Пуссена [1] о единственности тригонометрических рядов. Кроме того с применением теорем 1-3 получаются новые классы множеств для кратных тригонометрических рядов.

Напомним что множество $E \subset \mathbb{T}^d$, $d \geq 1$, называется U-множеством (VP-множеством) d-кратных тригонометрических рядов, если из сходимости d-кратного тригонометрического ряда всюду, кроме, быть может точек множества E к нулю (к всюду конечной интегрируемой функции f), следует что этот ряд тривиальный (является рядом Фурье функции f). Ясно, что любое VP-множество является U-множеством.

В случае $d \geq 2$ нужно уточнить, что понимаем, когда говорим ряд сходится. Все зависит от того какие частичные суммы кратного ряда расматриваются. В настоящей работе мы рассматриваем прямоугольные частичные суммы, т.е. сходимость по Прингсхейму.

В 1972 году Эш и Уеланд [2] доказали, что в случае $d = 2$ пустое множество является U-множеством для двойных тригонометрических рядов, сходящихся по Прингсхейму.

Долгое время оставался открытым ответ на следующий вопрос:

Если d-кратный ($d \geq 3$) тригонометрический ряд сходится к нулю по Прингсхейму всюду на $\mathbb{T}^d$, то обязяны ли все коэффициенты этого ряда быть нулями.

В 1991 году Ш.Е. Тетунашвили [3] доказал ряд важных теорем в которых содержится положительный ответ на вышеуказанный вопрос. Он также получил богатый класс непустых VP-множеств для кратных тригонометрических рядов, сходящихся по Прингсхейму.

С применением теорем 1-3 получаются новые классы VP-множеств для кратных тригонометрических рядов. Сформулируем одну из них.

Теорема 4. *Пусть двойной тригонометрический ряд*

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn}e^{i(mx+ny)}, \quad \textit{с суммами} \quad S_{MN}(x,y) := \sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N} a_{mn}e^{i(mx+ny)} \qquad (4)$$

удовлетворяет условиям $\lim_{M,N\to\infty} S_{MN}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y)\notin\mathcal{G}$, *где* f *– всюду конечная интегрируемая функция, и*

$$\mathcal{G} = \bigcup_{y\in Y} X_y \times \{y\}, \quad \textit{где} \quad mes(Y) = 0 \quad \textit{и} \quad mes(X_y) = 0, \quad \textit{для любого} \quad y \in Y.$$

Тогда ряд (4) является рядом Фурье функции f.

Литература

[1] Ch. J. Vallee-Poussin. Sur l'unicite du developpement trigonometrique. Bull. de l'Acad. Roy. Belgique, 1912, 702-718.

[2] J. Ash, G. Welland. Convergence, uniqueness and summability of multiple trigonometric series. Trans. Amer. Math. Soc., V. 163 (1972), 401-436.

[3] Ш. Т. Тетунашвили. О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму. Мат. сб., т. 182:8(1991), 1158-1176.

Функции, универсальные относительно тригонометрической системы

Григорян М.Г. (Ереванский государственный университет)
e-mail: gmarting@ysu.am

В докладе будут рассмотроны вопросы, связанные с существованием и описанием структуры **(универсальных функций)** функций,ряды Фурье которых в том или ином смысле универсальны в классах $L^p[-\pi,\pi]$, $L^p[-\pi,\pi]^2$, $p\in[0,1)$. Отметим,что существование функций, универсальных в том или ином смысле изучалось многими математиками (Биркгоф, Марцинкевич, Гроссе - Эрдман, Лью...), работавшими в теории функций как действительного,так и комплексного переменного и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической печати

Понятие универсального ряда (как по классическим,так и по общим ортонормальным системам) восходит к работам Меньшова и Талаляна. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками. В работах $[1]-[8]$ мы изучили вопрос существования и описания структуры функций, которые универсальны в том или ином смысле для классов $L^p[0,1)$ при $p\in(0,1)$ и $L^0[0,1)$как относительно системы Уолша так и относительно тригонометрической системы.Нетрудно видеть, что из знаменитой теоремы Колмогорова (ряд

Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится по мере) следует что не существует интегрируемой функции ряд Фурье которой по тригонометрической системе (а также по системе Уолша) был бы универсальным в классе всех измеримых функций.

Тем не менее в работе [5] автром построена интегрируемая функция такая, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для ее коэффициентов Фурье можно достичь того, что уже вновь полученный ряд будет универсальным в классе измеримых функций.

Будем говорить, что функция $u \in L^1(T^2)$ для класса $L^p(T^2)$ относительно двойной тригонометрической системы $\{e^{ikx}e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$

а) **универсальна (по прямоугольнам, соотвественно по сферам)**, если прямоугольные, соотв. сферические частичные суммы ряда Фурье функции $u(x,y)$ по двойной системе $\{e^{ikx}e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ плотны в $L^p(T^2)$,

б) **условно универсальна** (по прямоугольникам, соотв. по сферам), если существует последовательность знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$, что прямоугольные (соотв. сферические) частичные суммы ряда $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s}\widehat{u}_{k,s}e^{ikx}e^{isy}$ был бы плотныими в $L^p(T^2)$,

в) **почти универсальна**(по прямоугольникам, соотв. по сферам), если существует последовательность знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$, с $\rho^2(\Omega)_\Lambda = 1$ такая, что прямоугольные (соотв. сферические) частичные суммы ряда $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,l}\widehat{u}_{k,s}e^{ikx}e^{isy}$ был бы плотныими в $L^p(T^2)$, где $\Omega = \Omega(u) = \{(k,s) \in \Lambda = \Lambda(u) = spec(u),\ \delta_{k,s} = 1\}$,

$$\rho^2(\Omega)_\Lambda := \lim \sup_{m\to\infty, n\to\infty} \frac{\neq (\Omega \cap ((-n,n)\times(-m,m)))}{\neq (\Lambda \cap ((-n,n)\times(-m,m))}. \tag{4}$$

Как упоминалось выше, теорема Колмогорова исключает существование универсальной функции (одной переменной) для пространства $L^p[-\pi,\pi]$, $p \in (0,1)$ относительно тригонометрической системы. Несмотря на то, что теорема Колмогорова, как доказал Р.Д.Гецадзе, не верна для двойной тригонометрической системы (Р.Д.Гецадзе ,отвечая на вопрос Меньшова Д.Е.,показал, что в пространстве размерности больше 1 кубические частные суммы интегрируемой функции могут не сходиться по мере, а работе С.В.Конягина показано,что функцию можно выбрать так,что любая подпоследовательность кубических частных сумм почти всюду не ограничена), но тем не менее и в двумерном случае также не существует функции универсальной для пространства $L^p[-\pi,\pi]^2$, $p \in (0,1)$ относительно двойной тригонометрической системы. Этот важный результат недавно был получен С. В. Конягиным.

Теорема 1. *Не существует функции $u \in L^1(T^d)$, $d \geq 2$ универсальной по прямоугольникам для класса $L^p(T^d)$, $p \in (0,1)$ относительно d-мерной тригонометрической системы.*

В этом докладе изучается существование функций, которые **(условно) почти универсальны** для класса $L^p(T^2)$, $p \in (0,1)$, **относительно двойной тригонометрической системы** $\{e^{ikx}e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$,

Справедливо следующее утверждение

Теорема 2. *Существует функция $u \in L^1(T^2)$ почти универсальна как по прямоугольникам так и по сферам для всех классов $L^p(T^2)$, $p \in (0,1)$ относительно двойной тригонометрической системы.*

Заметим, что из теоремы 1 Конягина вытекает, что теорема 2 окончательна в определенном смысле.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

Литература

[1] M. G. Grigoryan. On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series. Banach Journal of Math. Analysis, 11, 3 (2017), 698–712.
[2] М. Г. Григорян. Функции, с универсальнымирядами Фурье- Уолша. Матем. Сб. 211:6 (2020), 107–131.
[3] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan. On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$. Journal of Func. Anal. 270:8 (2016), 3111–3133.
[4] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan. On the universal function. Journal of approximation theory. 225,(2018), 191–208.
[5] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян. Функции,универсальные относительно тригонометрической системы. Изв. РАН. Сер. матем., 85:2 (2021), 73–94.
[6] М. Г. Григорян. Об универсальных рядах Фурье. Матем. Заметки. 108:2 (2020), 296–299.
[7] М. Г. Григорян. О существовании и структуре универсальных функций. Док. РАН, Матем (Doklady Mathematics), 496, (2021), 30-33.

Многомерные интерполяции Эрмита

Дураков М.Е. (Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия)
e-mail: durakov_m_1997@mail.ru
Лейнартас Е.К. (Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия)
e-mail: elyaynartas@sfu-kras.ru
Цих А.К. (Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия)
e-mail: atsikh@sfu-kras.ru

Интерполяционные формулы Лагранжа и Эрмита базируются на интерпретации узлов интерполяций в виде корней подходящих полиномов. Поэтому такие формулы относят к классу алгебраических интерполяций. Идеология алгебраических интерполяций получила в последнее время пристальное внимание с точки зрения интерполяционной теории функций многих переменных (см., например [1]-[3]).

Одной из рассматриваемых нами задач является многомерная интерполяция Лагранжа:

Задача 1. *Для заданных значений $\{c_w\}$, $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$, найти многочлен $f(z)$ с условием*

$$f(w) = c_w, \qquad w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0).$$

Которая решается следующей теоремой:

Теорема 1. *Следующий многочлен решает поставленную задачу*

$$f(z) = \sum_{w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)} c_w H(z,w) \operatorname*{res}_w \left(\frac{1}{\boldsymbol{p}^I} \right),$$

где $\operatorname*{res}_w \left(\frac{1}{\boldsymbol{p}^I} \right)$ *— локальный вычет Гротендика, а* $H(z,\zeta)$ *— это определитель матрицы* (h_{jk})*:*

$$p_j(z) - p_j(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - \zeta_k) h_{jk}(z,\zeta), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — нульмерный полиномиальный идеал. Обозначим через B_w мономиальный базис локальной алгебры $\mathcal{O}_w / \langle \boldsymbol{p} \rangle$ в точке $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$. Размерность этой алгебры совпадает с кратностью отображения $\boldsymbol{p}$ в корне w (см. [4], раздел 19.4). Множество показателей ℓ базисных мономов $(z-w)^\ell \in B_w$ обозначим A_w.

Следующей рассматриваемой задачей является многомерная интерполяция Эрмита:

Задача 2. *Для заданных значений* $\{c_{w,\ell}\}, w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0); \ell \in A_w$*, найти многочлен* $f(z)$ *с условием*

$$\frac{\partial^{|\ell|} f}{\partial z^\ell}(w) = c_{w,\ell}, \qquad w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0) \qquad \ell \in A_{w_j},$$

где $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ *и* $|\ell| = \ell_1 + \ldots + \ell_n$.

Мы здесь рассмотрим вариант приведенной задачи в случае, когда многогранники Ньютона носителей A_{w_j} по сути являются параллелепипедами вида $\{0 \le \ell_1 \le d_1 - 1\} \times \ldots \times \{0 \le \ell_n \le d_n - 1\}$.

Теорема 2. *Предположим, что для каждого корня* $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$ *существует такой вектор* $d_w = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}_+^n$*, что*

$$\frac{\partial^{|\ell|} p_i}{\partial z^\ell}(w) = 0, \ 0 \le \ell \le d_w - I, \tag{1}$$

$$\det \left\| \frac{\partial^{d_k} p_i}{\partial z_k^{d_k}}(w) \right\| \ne 0 \quad (\text{ здесь } i, k = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Тогда многочлен

$$f(z) = \sum_{w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)} \det H_w(z) \left[\sum_{\substack{\ell \le d_w - I \\ k \le d_w - I - \ell}} \frac{c_{w,\ell}}{\ell!} (z-w)^{\ell+k} \operatorname*{res}_w \left(\frac{(z-w)^{d_w - I - k}}{\boldsymbol{p}^I} \right) \right]$$

решает поставленную задачу, где $H_w(z) = ||h_{ik}||$*, — матрица из представления*

$$\begin{pmatrix} p_1(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{pmatrix} = H_w(z) \begin{pmatrix} (z_1 - w_1)^{d_1} \\ \vdots \\ (z_n - w_n)^{d_n} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Следующая лемма доказывает существование этого представления (3) и помогает понять структуру локальных идеалов $\langle \boldsymbol{p} \rangle_w$ в условиях (1) и (2).

Лемма 1. *Дана система ростков $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{O}_w$ таких, что выполняются условия (1), (2): Тогда в кольце $\mathcal{O}_w$ имеет место равенство идеалов:*

$$\langle Q_1, \ldots, Q_n \rangle = \langle (z_1 - w_1)^{d_1}, \ldots, (z_n - w_n)^{d_n} \rangle.$$

Исследования поддержаны грантом РНФ № 20-11-20117.

Литература

[1] D. Alpay, P. Jorgensen, I. Lewkowicz, and D. Volok. A new realization of rational functions, with applications to linear combination interpolation, the Cuntz relations and kernel decompositions. Complex Var. Elliptic Equ., №61(1), (2016), 42–54.

[2] D. Alpay, A. Yger. About a Non-Standard Interpolation Problem. Comput. Methods Funct. Theory, 19 (2019), 97–115.

[3] D. Alpay, A. Yger. Cauchy-Weil formula, Schur-Agler type classes, new Hardy spaces of the polydisk and interpolation problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 504(2), 2021.

[4] А.К. Цих. Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.

Дзета-функция Римана и одномерные возмущения самосопряженных операторов

Капустин В.В. (Санкт-Петебрургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова)
e-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Одним из подходов к доказательству классической гипотезы Римана о нулях дзета-функции является идея построения самосопряженного оператора, спектр которого представляет собой множество нетривиальных нулей дзета-функции, развернутое на вещественную ось. Доклад посвящен построению операторов с таким спектром, являющихся малыми (одномерными) возмущениями самосопряженных дифференциальных операторов.

Для спектрального анализа некоторых важных классов дифференциальных операторов используется теория пространств де Бранжа. Поэтому первым шагом в докладе будет построение конкретного пространства де Бранжа, содержащего слегка модифицированную кси-функцию Римана, а именно, деленную на многочлен третьей степени [1]. Далее с помощью естественного аналога преобразования Фурье построенный оператор пересаживается в гильбертово пространство канонической системы, соответствующей пространству де Бранжа [1]. Это позволяет строить малые возмущения операторов Штурма–Лиувилля со спектром, соответствующим множеству нулей дзета-функции. В частности, показано, что в качестве такого оператора можно взять оператор Шредингера на полуоси с потенциалом Морса [2].

Литература

[1] В. В. Капустин. Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора. Алгебра и анализ, 33:4 (2021), 107–124.
[2] В. В. Капустин. Операторы Шрёдингера с потенциалами Морса и нули дзета-функции Римана. Матем. заметки, 111:2 (2022), 304–307.

Срезки дискриминанта системы полиномов Лорана

Клешкова Е.А. (Сибирский федеральный университет)
e-mail: ekleshkova@gmail.com

Геометрия дискриминантной гиперповерхности отражена в структуре многогранника Ньютона дискриминанта. В частности, её асимптотическое поведение «на бесконечности » контролируется «экстремальными» мономами дискриминанта, которые соответствуют вершинам многогранника Ньютона. В случае одного уравнения, который считают классическим, многогранник Ньютона дискриминанта детально изучен [3]. Кроме того, в работе [4] найден новый подход к доказательству известных факторизационных тождеств для срезок классического дискриминанта. Доказательство основано на свойствах сигма-процесса для логарифмического отображения Гаусса дискриминантной гиперповерхности. Мы используем подобную технику в исследовании срезок дискриминантов полиномиальных систем.

Рассмотрим *приведенную систему* n триномиальных уравнений

$$Q_i := y^{\omega^{(i)}} + x^{(i)} y^{\sigma^{(i)}} - 1 = 0,\ i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

с неизвестными $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, переменными комплексными коэффициентами $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, в которой $y^{\omega^{(i)}} = y_1^{\omega_1^{(i)}} \cdot \ldots \cdot y_n^{\omega_n^{(i)}}$, $y^{\sigma^{(i)}} = y_1^{\sigma_1^{(i)}} \cdot \ldots \cdot y_n^{\sigma_n^{(i)}}$ — мономы неизвестных $y_1, \ldots, y_n$ с целыми показателями. Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторное пространство $\mathbb{C}_x^n$. Предполагается, что матрица $\omega := (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})$ невырожденная.

Обозначим через ∇° подмножество в $\mathbb{C}_x^n$ всех коэффициентов $x = \left(x^{(i)}\right)$, для которых полиномиальное отображение $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ имеет кратные нули в комплексном алгебраическом торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, то есть

$$\nabla^\circ = \left\{ x \in \mathbb{C}_x^n : Q_1(y^0) = \cdots = Q_n(y^0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(y^0) = 0,\, y^0 \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n \right\},$$

где $\frac{\partial Q}{\partial y}$ — якобиан отображения Q.

Определение 1. *Дискриминантным множеством* ∇ системы (1) называют замыкание множества ∇° в пространстве коэффициентов. Если множество ∇ есть гиперповерхность, то определяющий её полином $\Delta(x)$ называют *дискриминантом* системы (1).

Напомним, что *многогранником Ньютона* $\mathcal{N}_\Delta$ полинома $\Delta(x)$ называется выпуклая оболочка (в пространстве $\mathbb{R}^n$) носителя $\Delta(x)$. Каждый моном

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ может быть визуализирован как точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ решётки $\mathbb{Z}^n$. Под *носителем* полинома понимают множество всех показателей его мономов, имеющих ненулевые коэффициенты.

Определение 2. *Срезкой* полинома $\Delta(x)$ на грань h многогранника $\mathcal{N}_\Delta$ называют сумму всех мономов из $\Delta(x)$, показатели которых принадлежат h.

Связь между полиномом $\Delta(x)$ и его срезкой на грань h устанавливает функция $H_h^\tau(x) := \tau^d \Delta\left(\frac{x_1}{\tau^{\mu_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\tau^{\mu_n}}\right)$, в которой $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — координаты внешней нормали μ к грани h, d — взвешенная степень относительно веса μ для всех мономов из срезки $\Delta(x)|_h$. Она является гомогенизацией дискриминанта системы (1) относительно веса μ и обладает свойством: $H_h^\tau(x) \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} \Delta(x)|_h$. Согласно [1] отображение $\mathbb{CP}_s^{n-1} \to \mathbb{C}_x^n$ с координатами

$$x^{(i)} = -\frac{|\omega| s_i}{\langle \tilde{\psi}_i, s\rangle} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\langle \tilde{\psi}_k, s\rangle}{\langle \psi_k, s\rangle}\right)^{\frac{\psi_k^{(i)}}{|\omega|}}, \ i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

определяет параметризацию дискриминантного множества ∇ системы (1). В формулах (2) ψ_k, $\tilde{\psi}_k$ суть строки матриц $\Psi := \omega^* \sigma$ и $\tilde{\Psi} := \Psi - |\omega| E_n$ соответственно, в которых $\sigma := (\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(n)})$, ω^* — присоединённая матрица к ω, а E_n — единичная матрица. В [2] показано, что строки $\psi_1, \ldots, \psi_n$ и $\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_n$ как правило определяют нормальные направления для гиперграней многогранника Ньютона дискриминанта системы (1). С помощью параметризации (2) и свойства функции $H_h^\tau(x)$ исследована параметризация нулевого множества срезки $\Delta(x)|_{h_j}$ на грань h_j, имеющую нормаль ψ_j, $j = 1, \ldots, n$, в предположении, что $\psi_j^{(j)} \neq 0$. В результате исследования сформулирована гипотеза о структуре срезки $\Delta(x)|_{h_j}$.

Гипотеза 1. Срезка $\Delta(x)|_{h_j}$ дискриминанта приведённой системы (1) на грань h_j с точностью до мономиального множителя представляет собой композицию дискриминанта приведённой системы $n-1$ уравнений и мономиальных функций от коэффициентов $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ системы (1).

Носитель системы и мономиальные функции выписаны явно.

Результаты, представленные в докладе, получены совместно с Антиповой И.А.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Литература

[1] И. А. Антипова, А. К. Цих. Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n неизвестных. Изв. РАН. Сер. матем, **76**: 5 (2012), 29–56.

[2] I. A. Antipova, E. A. Kleshkova. On facets of the Newton polytope for the discriminant of the polynomial system. Сиб. электрон. матем. изв., 18:2 (2021), 1180–1188

[3] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. Discriminants, Resultants, and Miltidimensional Determinants. Birkhauser (1994).

[4] E. Mikhalkin, V. Stepanenko, A. Tsikh. Blow-ups for the Horn-Kapranov parametrization of the classical discriminant. In: P. Exner et al. (eds.), Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. The Ari Laptev Anniversary Volume, EMS Series of Congress Reports, **18**, EMS Publishing House, (2021), 315–329.

Инъективные эндоморфизмы алгебры Теплица

Кузнецова А.Ю. (Казанский Федеральный университет)
e-mail: alla.kuznetsova@gmail.com
Григорян Т.А. (Казанский государственный энергетический университет)
e-mail: tkhorkova@gmail.com

Алгеброй Теплица $\mathcal{T}$ ([1]) называется C^*-алгебра, порожденная всеми операторами Теплица с непрерывными символами на пространстве Харди $H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2 : f_n = 0, \quad n < 0\}$, f_n — коэффициенты Фурье,в котором семейство $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ образует ортонормированный базис. Оператор правого сдвига T, $Tz^n = z^{n+1}$, является генератором алгебры Теплица. Алгебра $\mathcal{T}$ является расширением алгебры функций, непрерывных на единичной окружности $C(\mathbb{T})$ с помощью компактных операторов K, то есть существует короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow K(H^2) \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

где i — вложение, и π — фактор-отображение.

Наша цель — описать инъективные эндоморфизмы алгебры Теплица. Согласно теореме Кобурна, отображение $T \mapsto V$, где V — неунитарная изометрия, расширяется до эндоморфизма $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$, связь показывает следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{T} & \xrightarrow{\pi} & C(\mathbb{T}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\
0 & \longrightarrow & K_V & \longrightarrow & \mathcal{T}_V & \xrightarrow{\pi_V} & C_V(\mathbb{T}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{T} & \xrightarrow{\pi} & C(\mathbb{T}) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

где α — $*$-изоморфизм, i — вложение, $\alpha \circ ß = \tau : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ — эндоморфизм, $V = \tau(T)$ и $\mathcal{T}_V$ — C^*-алгебра, порожденная V.

Предложение 1. *Пусть* $\operatorname{End}_0 \mathcal{T}$ *полугруппа всех инъективных эндоморфизмов, и* $\operatorname{Iso}(\mathcal{T})$ *— полугруппа всех неунитарных изометрий,*

$$\tau \in \operatorname{End}_0 \mathcal{T} \Longleftrightarrow \tau(T) \in \operatorname{Iso} \mathcal{T}.$$

Скажем, что эндоморфизм α является компактным возмущением эндоморфизма β, если $\alpha(A) - \beta(A)$ — компактный оператор для всех $A \in \mathcal{T}$.

Индексом эндоморфизма $\tau \in \mathrm{End}_0\,\mathcal{T}$ будем называть индекс Фредгольма $\mathrm{ind}\,\tau(T)$, тогда $\mathrm{ind}\,(\tau_1 \circ \tau_2) = -\mathrm{ind}\,\tau_1 \mathrm{ind}\,\tau_2$.

Полугруппа эндоморфизмов единичной окружности изоморфна $U(\mathbb{T}) = \{u \in C(\mathbb{T}) : |u| = 1\}$. Функцию $u \in U(\mathbb{T})$ рассматриваем как отображение $u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$, тогда $U(\mathbb{T})$ полугруппа относительно операции суперпозиции, и эндоморфизму $\chi \in \mathrm{End}\,C(\mathbb{T})$ соответствует $\chi(z) \in U(\mathbb{T})$, z — тождественная функция. Для $\chi \in \mathrm{End}\,C(\mathbb{T})$ тоже определим индекс через индекс ветвления $\chi(z)$, $\mathrm{ind}\,\chi = -\mathrm{wn}\,\chi(z)$.

Пусть $\mathrm{End}_0\,C(\mathbb{T}) = \{\chi \in \mathrm{End}\,C(\mathbb{T}) : \mathrm{ind}\,\chi < 0\}$, $\mathrm{End}_n\,C(\mathbb{T}) = \{\chi \in \mathrm{End}_0\,C(\mathbb{T}) : \mathrm{ind}\,\chi = -n\}$, и $\mathrm{End}_n\,\mathcal{T} = \{\tau \in \mathrm{End}_0\,\mathcal{T} : \mathrm{ind}\,\tau = -n\}$.

Теорема 1. *Существует сюрьективный полугрупповой эндоморфизм*

$$\gamma : \mathrm{End}_0\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{End}_0 C(\mathbb{T})$$

такой, что $\gamma(\mathrm{End}_n\mathcal{T}) = \mathrm{End}_n C(\mathbb{T})$, *причем для всех* $u \in \mathrm{End}_0 C(\mathbb{T})$ *любые* $\alpha, \beta \in \gamma^{-1}(u)$ *являются компактным возмущением друг друга.*

Выделим среди эндоморфизмов подполугруппу эндоморфизмов Бляшке $\mathrm{End}_{\mathcal{B}}\,(T)$ ([2,3]), порожденную отображениями $T \mapsto b_n(T)$, где

$$b_n(T) = e^{i\theta} \prod_1^n (T - z_i I)(I - \overline{z_i} T)^{-1} = e^{i\theta} \prod_1^n \left(\frac{T - z_i I}{I - \overline{z_i} T}\right), \quad |z_i| < 1.$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}$ — равномерно замкнутая подалгебра $\mathcal{T}$, порожденная $\sum_0^m c_n T^n$, $c_n \in \mathbb{C}$. Пусть $\alpha \in \mathrm{End}_0\,\mathcal{T}$, и $\alpha(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Тогда $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathcal{B}}\,(\mathcal{T})$

Литература

[1] L. Coburn, The C^*-algebra generated by an isometry I, Bull. Am. Math. Soc., 73 (1967), 722–726.

[2] S. Grigoryan, T. Tonev, Blaschke inductive limits of uniform algebras, IJMMS, 27:10 (2001), 599 –620.

[3] T. Grigoryan, A. Kuznetsova, Blaschke C^*-algebras, Lobachevskii Journal of Mathematics, 41:4 (2020), 631–636.

О взаимосвязи двух теоретико-потенциальных задач равновесия: векторной на плоскости и скалярной на компактной римановой поверхности с внешним гармоническим полем в контексте проблемы описания слабой асимптотики полиномов Эрмита-Паде для обобщённой системы Никишина

Лопатин И.А. (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

e-mail: lopatin@mi-ras.ru

Проблема описания слабой асимптотики нулей полиномов Эрмита-Паде (типов I и II) в настоящее время в значительной степени исследована для ряда систем марковских функций; наиболее общей из них является обобщённая система Никишина [1, 3], или $\mathcal{GN}$-система, включающая в себя как частные случаи уже ставшие классическими системы Анжелеско [2] и Никишина [5]. Слабые асимптотики описываются в терминах соответствующих векторных теоретико-потенциальных задач равновесия; представляющей собой задачу минимизации функционала энергии для векторного потенциала в классе векторных мер с ограничениями на массы компонент.

В работе [6] в рамках развития нового подхода к обобщению теории Шталя на полиномы Эрмита-Паде С. П. Суетиным на примере модельной задачи о слабой асимптитике нулей полиномов Эрмита-Паде типа I для некоторой конкретной $\mathcal{GN}$-системы $\mathcal{F}_0$ из двух функций была анонсирована разработка новой терминологии, основанной на описании предельных мер в терминах скалярной теоретико-потенциальной задачи равновесия с внешним гармоническим полем, поставленной на компактной римановой поверхности. Рассмотренная в [6] система в обозначениях работы [1] соответствует графу с $\mathcal{V} = \{O, 1, 2\}$, $(O, 1) = \{\alpha_1^1\}$, $(1, 2) = \{\alpha_2^1, \ldots, \alpha_2^p\}$; ребру α_1^1 отвечает отрезок $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ и мера $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, рёбрам α_2^j соответствуют отрезки F_j и меры σ_j т. ч. $\frac{d\sigma_j}{dx} > 0$ п. в. на F_j; при этом $\operatorname{conv} \bigsqcup_{k=1}^p F_k \cap [-1, 1] = \varnothing$. Слабый предел считающих мер нулей соответствующего $\mathcal{F}_0$ полинома $Q_{\vec{n},2}$ в [6] описан как решение скалярной теоретико-потенциальной задачи равновесия на компактной двулистной римановой поверхности рода нуль с ядром $\log \frac{|1-\varphi(\boldsymbol{z})\varphi(\boldsymbol{t})|}{|z-t|^2}$ в присутствии внешнего гармонического поля $\log |\varphi(\boldsymbol{z})|$; здесь и далее $\boldsymbol{q}$ – точка на римановой поверхности, $q = \pi(\boldsymbol{q})$, π – каноническая проекция на риманову сферу; $\phi(\circ)$ – функция, обратная к функции Жуковского. В работе [4] предложенная С. П. Суетиным схема была развита для несколько более общей $\mathcal{GN}$-системы $\mathcal{F}_g$, а именно соответствующей графу, у которого $(O, 1) = \{\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^{g+1}\}$, ребру α_1^j соответствует отрезок $E_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$ и мера, являющаяся сужением $\frac{dx}{r(x)w(x+i0)}$ на E_j; здесь $w(z) = \sqrt{p(z)}$, $p(z) = \prod_{j=1}^{2g+2}(z - e_j)$, $e_1 = -1$, $e_{2g+2} = 1$, $r(z) \in \mathbb{R}[z]$ и не имеет нулей на $\operatorname{conv} \bigsqcup_{j=1}^{g+1} E_j$; $\operatorname{conv} \bigsqcup_{j=1}^{g+1} E_j \cap \operatorname{conv} \bigsqcup_{k=1}^{p} F_k = \varnothing$. Аналогичная введённой в [6] теоретико-потенциальная задача для $\mathcal{F}_g$ ставится на компактной двулистной римановой поверхности рода g относительно ядра $\log \frac{1}{|z-t|} + g_\psi(\boldsymbol{z}, \infty^{(0)}, \boldsymbol{t})$ и внешнего поля $\log |\Phi(\boldsymbol{z})|$, где $g_\psi(\boldsymbol{z}, \circ, \diamond)$ – биполярная функция Грина с некоторым (выбранным) нормировочным потенциалом ψ из работы [8]; $\Phi(\circ)$ есть многозначная функция с однозначным модулем, конформно отображающая рассматриваемую риманову поверхность на риманову сферу.

Вместе с тем, в работе [7] было показано, что для системы $\mathcal{F}_0$ соответствующая скалярная теоретико-потенциальная задача равновесия на римановой поверхности эквивалентна классической теоретико-потенциальной задаче равновесия на плоскости в том смысле, что по мере λ, являющейся решением первой задачи, восстанавливается вектор-мера (λ_1, λ_2), являющаяся решением второй и наоборот. Доклад будет посвящён обобщению этого результата на случай системы $\mathcal{F}_g$, а также в целом проблеме дальнейшего развития применения скалярной задачи равновесия на римановой поверхности с внешним гармоническим полем к описанию слабой асимптотики полиномов Эрмита-

Паде для $\mathcal{GN}$-систем, соответствующим произвольным графам с неориентированными циклами.

Грант РНФ, проект № 19-11-00316.

Литература

[1] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде, Матем. сб., 201:2 (2010), 29–78.
[2] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа, Теория чисел, математический анализ и их приложения, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, 157, 1981, 31–48.
[3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин. Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа, Матем. сб., 188:5 (1997), 33–58.
[4] И. А. Лопатин. Об обобщении скалярного подхода к описанию слабой асимптотики полиномов Эрмита-Паде для системы Никишина, Матем. сб., 2022, в печати.
[5] Е. М. Никишин. Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде, Изв. вузов. Матем., 1986, 2, 33–41.
[6] С. П. Суетин. О новом подходе к задаче о распределении нулей полиномов Эрмита–Паде для системы Никишина, Комплексный анализ, математическая физика и приложения, Сборник статей, Тр. МИАН, 301, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018, 259–275.
[7] С. П. Суетин. Об эквивалентности скалярной и векторной задач равновесия для пары функций, образующей систему Никишина, Матем. заметки, 106:6 (2019), 904–916
[8] Е. М. Чирка. Потенциалы на компактной римановой поверхности, Комплексный анализ, математическая физика и приложения, Сборник статей, Тр. МИАН, 301, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018, 287–319.

Алгебраические и асимптотические свойства интерполяций смешанного типа

Лысов В.Г. (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша)
e-mail: vlysov@mail.ru

Биортогональные многочлены Коши [1] имеют ряд значимых приложений [2]–[4]. Недавно было обнаружено [5], что на наряду с ортогональными многочленами они являются специальными (“граничными”) случаями многочленов, решающих смешанную интерполяционную задачу.

В докладе речь пойдет о паре двойственных постановок интерполяционной задачи смешанного типа. Мы обсудим алгебраические свойства их решений, такие как соотношения ортогональности, нормальность индексов, рекуррентные формулы. Поговорим об асимптотике и сходимости интерполяций, а также представим некоторые новые приложения [6].

Литература

[1] M. Bertola, M. Gekhtman, J. Szmigielski. Cauchy biorthogonal polynomials. J. Approx. Theory 162 (2010), 832–867.
[2] M. Bertola, M. Gekhtman, J. Szmigielski. The Cauchy two-matrix model. Comm. Math. Phys. 287:3 (2009), 983–1014.
[3] M. Bertola, T. Bothner. Universality Conjecture and Results for a Model of Several Coupled Positive Definite Matrices. Comm. Math. Phys. 337:3 (2015), 1077–1141.
[4] L. G. González Ricardo, G. López Lagomasino. Strong Asymptotic of Cauchy Biorthogonal Polynomials and Orthogonal Polynomials with Varying Measure. Constr. Approx. (2022).
[5] В. Г. Лысов. Аппроксимации Эрмита–Паде смешанного типа для системы Никишина. Труды МИАН 311 (2020), 213–227.
[6] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов. Многоуровневая интерполяция системы Никишина и ограниченность матриц Якоби на бинарном дереве. УМН 76:4 (2021), 179–180.

О гипоэллиптических относительно группы переменных многочленах

Маргарян В.Н. (Российско-Армянский университет)
e-mail: vachagan.margaryan@yahoo.com

В работе рассматриваются связи между различными типами гипоэллиптичности относительно группы переменных и добавление "младших"членов, сохраняющий тип гипоэллиптичности.

Пусть $\mathbf{N}_0-$множество целых неотрицательных чисел, $\mathbf{N}_0^n-$ множество n-мерных мультииндексов, а $\mathbf{R}^n-$ n-мерное вещественное эвклидово пространство.

Определение 1. (см. [1], определение 11.1.2 и теорему 11.1.3) *Многочлен P от переменного $\xi \in \mathbf{R}^n$ называется гипоэллиптическим, если для любого $0 \neq \alpha \in \mathbf{N}_0^n$ при $|\xi| := \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \to \infty$ $D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$.*

Пусть $n \geq 2$, $1 \leq k < n$, $\xi^{'} := (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\xi^{''} := (\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$, $\xi := (\xi^{'}, \xi^{''})$, а многочлен P от переменного ξ представлен в следующем виде

$$P(\xi) = P(\xi^{'}, \xi^{''}) = \sum_{\alpha^{'} \in \mathbf{N}_0^k} (\xi^{'})^{\alpha^{'}} P_{\alpha^{'}}(\xi^{''}). \tag{1}$$

Определение 2. (см. [1], определение 11.2.4 и теорему 11.2.3) *Многочлен P, представленный в виде (1), называется частично гипоэллиптическим по $\xi^{''}$ (гипоэллиптическим по Гордингу-Малгранжу по $\xi^{''}$), если*
a) многочлен $P_{0^{'}}$ гипоэллиптичен по $\xi^{''}$,
b) для любого $0 \neq \alpha^{'} \in \mathbf{N}_0^k$ при $|\xi| \to \infty$ $P_{\alpha^{'}}(\xi^{''})/P_{0^{'}}(\xi^{''}) \to 0$.

Определение 3. (см. [2]) *Многочлен P от переменного ξ называется гипоэллиптическим по Буренкову относительно $\xi^{'}$, если для дюбого $0 \neq \alpha^{'} \in$*

$\mathbf{N}_0^k$ *при* $|\xi| \to \infty$ $\left|D^{\alpha'} P(\xi)\right| / (1 + |P(\xi)|) \to 0$.

Определение 4. (см. [3]) *Скажем, что многочлен P мощнее многочлена Q и запишем $Q < P$, если существует постоянная $c > 0$, для которого*

$$|Q(\xi)| \leq c(1 + |P(\xi)|) \ \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть многочлены P и Q, $Q < P$ представлены в виде (1). Если P Г-М гипоэллиптичен по $\xi^{''}$, то многочлен $P + (Q - Q_{0'})$ также Г-М гипоэллиптичен по $\xi^{''}$.*

Теорема 2. *Пусть для Б-гипоэллиптического по $\xi^{'}$ многочлена, представленного в виде (1), $P_{0'}(\xi^{''})$ гипоэллиптичен по $\xi^{''}$. Тогда многочлен Г-М гипоэллиптичен по $\xi^{''}$.*

Следствие 1. *Если при условиях теоремы 2 $Q < P$, то $P + (Q - Q_{0'})$ Г-М гипоэллиптичен по $\xi^{''}$.*

Теорема 3. *Пусть $k = 1$, а многочлен P Г-М гипоэллиптичен по $\xi^{'}$. Тогда P Б-гипоэллиптичен по ξ_1.*

Литература

[1] Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Москва: Мир, (1986), II том.
[2] В. И. Буренков. Аналог теоремы Хермандера для функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Сб. Советско-Чехословацкой конф. Армения (1980).
[3] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян. О сравнении мощности частично гипоэллиптических многочленов. Известия НАН Армении, т. 57, № 5, (2022), 14–24.

Лоренцева метрика как 1-форма на расслоении небесных сфер

Маресин И. В. (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (Москва))
e-mail: innocenti.maresin@gmail.com

Будет построена *метрическая 1-форма*, позволяющая задать лоренцеву метрику, опираясь на расслоение небесных сфер. Для физического пространства-времени её значения (на касательных векторах) имеют размерность длины, а вообще метрическая форма пропорциональна корню квадратному из метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. При этом, особым образом заданная метрическая 1-форма может использоваться и как способ задания пространства-времени вообще, а не только представителя в заданном конформном классе.

Будет выведено дифференциальное соотношение, связывающее метрическую 1-форму ϕ с другой 1-формой — *прото-контактной формой* ϑ, описанной ранее. Образ ядра формы ϑ под действием естественной проекции задаёт контактную структуру на 5-мерии световых геодезических.

Данное сообщение основано на докладе, сделанном на семинаре Витушкина 28 октября 2020 г. [1], но результат будет изложен менее технично.

Литература

[1] И. В. Маресин. Комплексная и контактная геометрия, а также комплекснозначные дифференциальные формы в теории пространства-времени. Семинар по многомерному комплексному анализу, online, 28 октября 2020 г. http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=26697&option_lang=rus

Геометрические методы решения уравнений Шлефли

Медных А.Д. (Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия)
e-mail: mednykh@math.nsc.ru

Классическое уравнение Шлефли связывает дифференциал объема неевлидова многогранника с длинами его сторон и дифференциалами его двугранных углов. В случае, когда гауссова кривизна неевклидова пространства постоянна и равна K оно имеет вид

$$KdV = \frac{1}{2}\sum_i l_{\alpha_i} d\alpha_i,$$

где сумма берется по всем ребрам с длинами l_{α_i} и двугранными углами α_i.

Аналогичная формула справедлила и для объемов узлов и зацеплений, моделируемых в неевклидовой геометрии.

В докладе изучаются многогранники, узлы и зацепления, моделируемые в гиперболической, сферической и евклидовой геометриях. Мы приводим полученные в работах [1]–[4] тригонометрические тождества, связывающие длины ребер и углы указанных многообразий. Обнаружились довольно любопытные вещи: для таких длин и углов справедливы аналоги школьных теорем синусов, косинусов и тангенсов. Это позволило найти совершенно новый геометрический подход к решению дифференциальных уравнений Шлефли. В результате вычисляются в квадратурах объемы различных семейств многогранников, узлов и зацеплений в гиперболической и сферической геометриях. Если узел моделируется в евклидовой геометрии, то в качестве единицы длины необходимо взять длину самого узла. Тогда удается доказать, что вычисленный таким образом евклидов объем, является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Литература

[1] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных. Объем куба Ламберта в сферическом пространстве. Матем. заметки, 86:2 (2009), 190–201.
[2] N. Abrosimov, A. Mednykh. Volumes of Polytopes in Spaces of Constant Curvature. Fields Inst. Commun., Vol. 70 (2014), 1–26.
[3] N. Abrosimov, A. Mednykh. Geometry of knots and links.IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, Vol. 33, Topology and Geometry, (2021), 433–454.

[4] A. D. Mednykh. Volumes of two-bridge cone manifolds in spaces of constant curvature. Transform. Groups 26:2 (2021), 601–629.

О факторизации срезок дискриминанта многочлена

Михалкин Е.Н. (Сибирский федеральный университет)
e-mail: mikhalkin@bk.ru:
Степаненко В.А. (Сибирский федеральный университет)
e-mail: v-stepanen@mail.ru:
Цих А.К. (Сибирский федеральный университет)
e-mail: atsikh@sfu-kras.ru:

Дискриминантом многочлена степени n

$$f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n$$

называется неприводимый многочлен $\Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ с целочисленными коэффициентами, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда f имеет кратные корни. Дискриминанты играют фундаментальную роль в теории алгебраических функций, в теории особенностей, в алгебраической геометрии, о чем свидельствует значительное число публикаций (см., например, [1]-[4]).

В книге [5] доказано, что многогранник Ньютона $\mathcal{N}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ указанного дискриминанта комбинаторно эквивалентен $(n-1)$-мерному кубу. Отметим, что другое доказательство этого факта дано В. Батыревым ([6]).

В работе [7], по результатам которой будет сделан доклад, изучены параметризации Горна-Капранова и на примере параметризации классического дискриминанта получены новые доказательства факторизационных тождеств для срезок такого дискриминанта. Поясним это, нас интересуют срезки дискриминанта Δ_n на грани его многогранника $\mathcal{N}(\Delta_n)$, образующиеся путем пересечения p некоординатных гиперграней. Напомним, что *срезкой* многочлена Δ_n на грань h его многогранника $\mathcal{N}(\Delta_n)$ называют сумму всех мономов из Δ_n, показатели которых принадлежат h.

В докладе будет приведена идея доказательства сформулированной ниже следующей теоремы из [7] о факторизационных формулах для срезок Δ_n на грани $\mathcal{N}(\Delta_n)$. Для формулировки этой теоремы введем обозначения. Пусть $h_K := h_{k_1} \cap \ldots \cap h_{k_p}$, грань $\mathcal{N}(\Delta_n)$, полученная пересечением p некоординатных гиперграней. Здесь мультииндекс $K = \{k_1, \ldots, k_p\}$ определяет разбиение набора $\{0, 1, \ldots, n\}$ на $p+1$ поднаборов (отрезков)

$$K_i = \{k_i, k_i + 1, \ldots, k_{i+1}\},\ i = 0, 1, \ldots, p,$$

считая $k_0 = 0$, $k_{p+1} = n$. Обозначим через $l_i := k_{i+1} - k_i$ длину K_i и

$$f_{K_i} := a_{k_i} + a_{k_i+1} y + \ldots + a_{k_{i+1}} y^{l_i}.$$

Теорема 1. *Срезка Δ_n на грань h_K факторизуется в виде произведения*

$$\Delta_n\big|_{h_K} = a_K^2 \prod_{i=0}^{p} \Delta_{l_i}(f_{K_i}),$$

где $a_K^2 = a_{k_1}^2 \dots a_{k_p}^2$, *а* Δ_{l_i} *– дискриминанты многочленов* f_{K_i} *степеней* l_i. Проиллюстрируем данную теорему на крнкретном примере. Для многочлена седьмой степени $f(y) = \sum\limits_{k=0}^{7} a_k y^k$ срезка $\Delta_7\big|_{h_{2,5}}$ на грань $h_2 \cap h_5$ представится в виде произведения трех дискриминантов:

$$a_2^2 a_5^2 \Delta_2(a_0, a_1, a_2)\Delta_3(a_2, a_3, a_4, a_5)\Delta_2(a_5, a_6, a_7),$$

т.е. дискриминантов многочленов $a_0 + a_1 y + a_2 y^2$, $a_2 + a_3 y + a_4 y^4 + a_5 y^5$ и $a_5 + a_6 y + a_7 y^2$.

Также в докладе будет рассмотрен случай для срезок Δ_n и на координатные гиперграни его многогранника $\mathcal{N}(\Delta_n)$.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Литература

[1] В.А. Васильев. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997. 538 с.

[2] E.N. Mikhalkin, A.K. Tsikh. Singular strata of cuspidal type for the classical discriminant. Sbornik: Mathematics. 2015. V. 206, № 2. P 282–310.

[3] I.A. Antipova, E.N. Mikhalkin, A.K. Tsikh. Rational expressions for multiple roots of algebraic equations. Sbornik: Mathematics. 2018. V. 209, № 10. P. 1419–1444.

[4] A.I. Esterov. Galois theory for general systems of polynomial equations. Compositio Mathematica. 2019. V. 155. № 2. P. 229–245.

[5] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkhäuser: Boston. 1994.

[6] V. Batyrev. Winter School lectures in Arizona (2004) (http://swc.math.arizona.edu/ oldaws/04Notes.html).

[7] E.N. Mikhalkin, V.A. Stepanenko, A.K. Tsikh. Blow-ups for the Horn-Kapranov parametrization of the classical discriminant. В кн. «Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. EMS Series of Congress Reports. Publication house EMS. 2021. P. 315-329.

Определение симметрической индикатрисы рассеяния по функциям отражения и пропускания однородного слоя

Мурадян М.Г. (Армянский государственный экономический университет)
e-mail: maxim_muradyan@yahoo.com

Задача стационарного когерентного неизотропного рассеяния в однородном трехмерном плоском слое $0 \le \tau \le r$, при отсутствии внутренних источников, в случае симметрической индикатрисы рассеяния, описывается системой интегро-дифференциальных уравнений переноса

$$\frac{d\varphi^+(\tau)}{d\tau} = (-A + L)\varphi^+(\tau) + L\varphi^-(\tau), \ -\frac{d}{d\tau}\varphi^-(\tau) = L\varphi^+(\tau) + (-A + L)\varphi^-(\tau).$$

Здесь вектор-функции $\varphi^+(\tau,\omega)$ и $\varphi^-(\tau,\omega)$ – интенсивности излучения на глубине τ (рассчитанной со стороны левой границы слоя) по направлениям возрастания и убывания соответственно, $d\omega$ – мера Лебега на единичной полусфере Ω^+. L и A – независящие от τ неограниченные операторы вида ($\omega\,\omega'$ – скалярное произведение векторов ω и $\omega' \in \Omega^+$)

$$Lf = \frac{1}{\omega\, n}\int\limits_{\Omega^+} g(\omega\,\omega')f(\omega')\,d\,\omega', \quad Af = \frac{1}{\omega\, n}\, f(\omega), \quad \int\limits_{\Omega^+} g(\omega\,\omega')\,d\,\omega \le 1.$$

где $n \in \Omega^+$ – внутренная нормаль к левой плоской границе слоя, $\omega\, n \ge 0$, $g(\omega\,\omega')$ – индикатриса рассеяния, удовлетворяющая условиям $g(\omega\,\omega') \ge 0$, $g(-\omega\,\omega') = g(\omega\,\omega')$.

Каждому слою толщины r соответствует оператор отражения $R(r)$ и пропускания $T(r)$. Если среда слева освещена излучением $\varphi^+(0,\omega) = \alpha$, а справа – $\varphi^-(r,\omega) = \beta$, то по смыслу этих операторов, из среды слева и справа выходят излучения $R(r)\,\alpha + T(r)\,\beta$ и $T(r)\,\alpha + R(r)\,\beta$ соответственно. Операторы $R(r)$ и $T(r)$ положительные и действуют в подходящим образом выбранном банаховом пространстве, причем $\|R(r) + T(r)\| \le 1$. Случай $\|R(r) + T(r)\| = 1$ называется консервативным, а случай $\|R(r) + T(r)\| < 1$ – диссипативным. Важно отметить, что в настоящее время существуют эффективные методы измерения $R(r)$ и $T(r)$ плоского слоя.

Обозначим через $R(\infty)$ оператор отражения от однородного полупространства с таким же материалом, что и наш слой. $R(\infty)$ удовлетворяет обобщенному уравнению Амбарцумяна (I – единичный оператор)

$$AR(\infty) + R(\infty)A = [I + R(\infty)]\,L\,[I + R(\infty)]\,. \tag{1}$$

В связи с астрофизическими и другими приложениями Енгибарян [1] предложил определить оператор L из (1), если заранее известен оператор отражения от полупространства $R(\infty)$:

$$L = [I + R(\infty)]^{-1}\,[AR(\infty) + R(\infty)A]\,[I + R(\infty)]^{-1}\,. \tag{2}$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае объемный коэффициент поглощения равен 1, т.е. A известный оператор. Обратимость оператора $I+R(\infty)$ следует из неравенства $\|R(\infty)\| < 1$ (диссипативный случай).

Задача 1. *По известным операторам $R(r)$ и $T(r)$ найти оператор L.*

Один метод решения подставленной задачи предложен в работе [1]. В его основе лежит следующая идея. Зная операторы отражения и пропускания слоя толщины r, с помощью некоторой процедуры определяются соответствующие операторы слоя толщины $r/2$. Неоднократным повторением процесса "деления слоя", можно найти операторы отражения и пропускания сколь угодно тонкого слоя. Тем самым приближенно определяется оператор L, описывающий элементарный акт рассеяния.

В настоящей докладе предлагается метод непосредственного определения оператора L, опирающийся на следующие построения.

Посредством операторов $R(r)$ и $T(r)$ составим нелинейное операторное уравнение [1]

$$W = [R(r) + T(r)W]\ [T(r) + R(r)W]\,.$$

Это уравнение обладает решением, удовлетворяющее условиям $W>0$, $\|W\|<1$. Оно является сильным пределом монотонно возрастающего итерационного процесса

$$W_{n+1} = [R(r) + T(r)W_n]\ [T(r) + R(r)W_n]\,, \quad W_0 = 0, \ \ n = 0, 1, \ldots.$$

Доказывается, что $R(\infty) = R(r) + T(r)\,W$. Соотношения этого типа, связывающее характеристики полупространства и конечного слоя, физическими соображениями впервые были получены в работе [2]. После определения $R(\infty)$, оператор L определяется по формуле (2).

Задача 2. *По известному оператору $R(r)$ найти оператор L, при условии, что толщина слоя не мала.*

В ряде работ (см., напр., [3]) теоретически и экспериментально исследована зависимость отражения и пропускания от толщины слоя. Оказалось, что функция отражения во многих случаях быстро приближается к асимптотическому значению по мере увеличения толщины слоя. В частности, для гамма-излучения было установлено, что коэффициент отражения слоя толщиной более 1 или 2 длин свободного пробега частицы от источника энергии практически такой же, как коэффициент отражения полубесконечной среды, т.е. для таких слоев практически верно равенство $R(r) = R(\infty)$. Теперь из (2) можно определить оператор L, тем самым индикатрису рассеяния.

Литература

[1] Н. Б. Енгибарян, М. Г. Мурадян, Р. С. Варданян. Некоторые задачи дистанционного зондирования. Тр. XII научных чтений по космонавтике. М: ИИЕТ АН СССР, (1989), 14–21.

[2] Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян. О линейных задачах переноса. Докл. АН СССР, Т. 217, N 3 (1974), 533–535.

[3] A. Shimizu, K. Aoki. Application on invariant embedding to reactor physics. New-York: Acad. Press, 1972.

О вычислении вычетных интегралов

Мышкина Е.К.[1] (Сибирский федеральный университет)
e-mail: elfifenok@mail.ru

Щуплев А.В.[2] (РНОМЦ «Красноярский математический центр»)
e-mail: ashchuplev@sfu-kras.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, \ldots, z_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(z_1, \ldots, z_n) = 0, \end{cases}$$

где все $f_1, \ldots, f_n$ целые функции. Предположим, что система имеет конечное число нулей в $\mathbb{C}^n$, тогда нули можно определить из их степенных сумм, вычисленных опосредованным способом. В работах [1, 2] было предложено вычислять степенные суммы нулей системы с помощью вычетных интегралов. Напомним, что вычетным интегралом для отображения $(f_1, \ldots, f_n)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и голоморфной (в $\mathbb{C}^n$ или $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$) $n-$формы φ называется интеграл

$$J(\varphi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|f_1|=\varepsilon_1, \ldots, |f_n|=\varepsilon_n} \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_n}.$$

При определенных ограничениях на вид функций f_j в [1, 2] показано, как для малых ε_j вычетные интегралы $J_\beta = J(z^{-\beta-I}dz)$, где $\frac{1}{z^{\beta+I}} = \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \ldots z_n^{\beta_n+1}}$ для $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, связаны со степенными суммами нулей системы. При этом вычетные интегралы J_β представляются в виде конечных сумм, зависящих только от коэффициентов разложения функций f_j в степенные ряды с центром в нуле, что позволяет применять для их вычисления программы символьной алгебры.

Продолжая исследования, начатые в указанных статьях, мы показываем как использовать этот метод для решения систем неалгебраических уравнений.

[1] *Автор использовал финансовую поддержку Российского научного фонда, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки (грант 22-21-20028).*

[2] *Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).*

Литература

[1] А. М. Кытманов, Е. К. Мышкина.Нахождение степенных сумм корней систем неалгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$. Изв. вузов. Матем., 12, (2013), 36–50.
[2] А. М. Кытманов, Е. К. Мышкина.О степенных суммах корней систем целых функций конечного порядка роста. Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 14:3 (2014), 62–82.

Оптимальное распределение средств для одновременного выхода на заданный уровень фондовооруженности группы объектов в кратчайшее время

Николенко П.В. (Ростовский государственный экономический университет)
e-mail: petr.v.nikolenko@gmail.com
Новикова Л.В. (Южный федеральный университет)
e-mail: lvnovikova@sfedu.ru

В модели инвестиции–потребление динамика фондовооруженности подчинена закону (см., [1, с. 312]) $\dot{x} = sf(x) - \mu x$.
Здесь x — фондовооруженность, $\dot{x}$ — производная по времени, f — производственная функция, $f(x)$ — стоимость, произведенная в единицу времени

одним работающим, s — доля произведенной стоимости, которая возвращается в производство в виде инвестиций, μ — коэффициент амортизации фондов.

Рассмотрим группу объектов, каждый со своим законом динамики

$$\dot{x}_i = s_i f_i(x_i) - \mu_i x_i = F_i(x_i), \quad \text{где } \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

На момент времени нуль фондовооруженность составляет величину $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, требуется, чтобы за кратчайшее время фондовооруженность достигла значений $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$. Для этого в дополнение к собственным инвестициям $s_i f_i(x_i)$ выделена сумма S, которая поступает на объект с номером i в виде финансового потока $u_i(t)$. Так, что уравнение динамики для x_i приобретает вид:

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + u_i(t),$$

причем $u_i(t) \in [0, p_i]$, где p_i — предельная способность к поглощению инвестиций. Таким образом, выполняется условие

$$\int\limits_0^{t_1} (u_1(t) + u_2(t) + \ldots + u_n(t))\, dt = S,$$

где t_1 момент завершения процесса, то есть это такое t, для которого

$$x_1(t_1) = x_1^1, \ x_2(t_1) = x_2^1, \ \ldots, \ x_n(t_1) = x_n^1.$$

Требуется определить функции u_i так, чтобы t_1 оказалась минимальной. Предполагается, что f_i обладает обычными свойствами производственных функций:

$$f_i' > 0, \quad f_i'' < 0, \quad \lim_{x \to 0} f_i'(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f_i'(x) = 0.$$

Сформулируем задачу в виде задачи теории управления:

$$\begin{cases} t_1 \to \min \\ \dot{x}_i = F_i(x_i) + u_i \\ \dot{x}_{n+1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ \dot{x}_i(0) = x_i^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1 \\ x_{n+1}(0) = 0, \quad x_{n+1}(t_1) = S \\ 0 \leqslant u_i \leqslant p_i, \ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Теорема. *Если (x, u) оптимальный процесс, то каждая компонента управления и имеет не более двух точек переключения. Значения x_i ($i = 2, \ldots, n$), которые соответствуют моментам переключения, определяются из следующей системы:*

$$\begin{cases} \int\limits_{[\hat{x}_1^0, \hat{x}_1^1]} \dfrac{dx}{F_1(x)} + \int\limits_{\overline{[\hat{x}_1^0, \hat{x}_1^1]}} \dfrac{dx}{F_1(x) + p_1} = \int\limits_{[\hat{x}_i^0, \hat{x}_i^1]} \dfrac{dx}{F_i(x)} + \int\limits_{\overline{[\hat{x}_i^0, \hat{x}_i^1]}} \dfrac{dx}{F_i(x) + p_i} \\ p_1 \int\limits_{\overline{[\hat{x}_1^0, \hat{x}_1^1]}} \dfrac{dx}{F_1(x) + p_1} + \ldots + p_n \int\limits_{\overline{[\hat{x}_n^0, \hat{x}_n^1]}} \dfrac{dx}{F_n(x) + n} = S \end{cases},$$

причём $F_i(\hat{x}_i^0) = F_i(\hat{x}_i^1)$.

Пример. $F_1(x) = 10\sqrt{x} - 0{,}1x$, предельная способность к поглощению инвестиций первым объектом $p_1 = 30$.

$F_2(x) = 15\sqrt{x} - 0{,}2x$, где предельная способность к поглощению инвестиций вторым объектом $p_2 = 35$. Заданные значения фондовооруженности для первого и второго объекта:

$$[x_1^0; x_1^1] = [500; 3000], \quad [x_2^0; x_2^1] = [400; 2500]; \quad S = 300.$$

Вычисляя функции φ_1, φ_2, получаем: $(\varphi_1(y)) = (100 - \sqrt{y})^2$, $(\varphi_2(z)) = (75 - \sqrt{z})^2$. Выбирая $x_0 = (y_0; z_0) = (1500; 1200)$ последовательно получаем $x_1 = (y_1; z_1)$, $\ldots$, $x_n = (y_n, z_n)$.

Результаты вычислений приведены в следующей таблице:

n	y_n	z_n
1	1500	1200
2	2059,3	1376,6
3	2469,6	1389,3
4	2469,7	1389,5

$$(\varphi_1(y_4)) = 2530{,}5, \quad (\varphi_2(z_4)) = 1423{,}1.$$

Таким образом, на промежутке $[2469{,}7; 2530{,}5]$ $u_1 = 0$, $u_1 = 35$ на его дополнении, на промежутке $[1389{,}5; 1423{,}1]$ $u_2 = 0$ и $u_2 = 35$ на его дополнении.

Литература

[1] П. В. Николенко, Л. В. Новикова. Об одной экстремальной задаче в модели инвестиции-потребление. Владикавказский математический журнал. 2 (2022).

Теоремы существования и единственности для одного класса интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра с монотонной нелинейностью

Петросян А.С. (Национальный Аграрный Университет Армении,
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)
e-mail: Haykuhi25@mail.ru

В кинетической теории газов при изучении нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана (в рамках модифицированной модели Бхатнагара-Гросса-Крука) возникает необходимость исследовать вопросы существования и единственности решения для специального класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра со стохастическим ядром. Доклад посвящен изучению вопросов существования и единственности нетривиального ограниченного решения такого уравнения, а также исследованию асимптотического поведения данного решения в бесконечности.

В конце будут приведены прикладные примеры нелинейностей данного уравнения удовлетворяющие всем ограничениям доказанных утверждений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00223).

Многомерные аналоги формулы суммирования Эйлера-Маклорена и преобразование Бореля степенных рядов

Петроченко М.Е. (Сибирский Федеральный Университет)
e-mail: petrochenkomax@rambler.ru
Лейнартас Е.К. (Сибирский Федеральный Университет)
e-mail: lein@mail.ru

Обозначим $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$, $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n}$, $\mathbb{Z}_{\geqslant}$ — множество неотрицательных целых чисел. Для $x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$ обозначим рациональный параллелипипед

$$\Pi(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant t_j \leqslant x_j,\ j = 1, \ldots, n\}$$

и для функции $\varphi(t)$ переменных $t = (t_1, \ldots, t_n)$ рассмотрим задачу о нахождении суммы

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t), \tag{1}$$

т.е. требуется найти явную формулу, в которой сумма (1) выражается через конечное, не зависящее от x число значений некоторой функции.

В нашей работе [1] предлагается новый подход к приведённой задаче суммирования, основанный на использовании преобразования Бореля кратных степенных рядов и интегральных представлений для верхней и нижней функции преобразования. Этот подход позволяет не только получить интегральное представление для дискретной первообразной, но и новый вариант формулы Эйлера-Маклорена.

Для начала определимся с типом суммируемых функций. Будем предполагать, что наши функции являются целыми (то есть всюду аналитическими) и наложим ограничение на их рост на бесконечности. А именно, обозначим $Exp(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых функций $\varphi(z) : \mathbb{C}^n_z \to \mathbb{C}$ экспоненциального типа, т.е. целых функций, удовлетворяющих неравенству $|\varphi(z)| \leqslant Ce^{\langle \sigma, |z| \rangle}$, где $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n),\ \sigma_j,\ C > 0$ — некоторые константы, $|z| = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$.

Для фиксированной функции $\varphi(z) \in Exp(\mathbb{C}^n)$ рассмотрим множество

$$\sigma_\varphi = \{\sigma \in \mathbb{R}^n_{>} : |\varphi(z)| \leqslant Ce^{\langle \sigma, |z| \rangle},\ \text{для некоторой константы } C > 0\}.$$

Для функций из $Exp(\mathbb{C}^n)$ можно рассмотреть преобразование Бореля. Преобразованием Бореля степенного ряда

$$\varphi(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{a_\nu}{\nu!} z^\nu$$

называется ряд вида

$$\mathfrak{B}[\varphi(z)] = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{a_\nu}{z^{\nu+I}}.$$

Функции $\varphi(z)$ и $\mathfrak{B}[\varphi(z)]$ называются ассоциированными по Борелю, $\varphi(z)$ — верхняя функция, $\mathfrak{B}[\varphi(z)]$ — нижняя функция преобразования.

Приведём интегральное представление для дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x) \in Exp(\mathbb{C}^n)$, $\sigma \in \sigma_\varphi$ и $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_j| = r_j,\ r_j \geqslant \sigma_j,\ r_j \neq 2\pi m,\ j = 1,\dots,n,\ m \in \mathbb{Z}_{\geqslant}\}$, тогда функция, определённая формулой*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]e^{\langle x,\xi\rangle}}{e^{\xi}-I}d\xi \tag{2}$$

является дискретной первообразной для $\varphi(x)$, и для суммы (1) справедлива формула:

$$S(x) = w_{NL}(\delta,\pi)f(x). \tag{3}$$

Оператор Ньютона-Лейбница $w_{NL}(\delta,\pi)$ является аналогом формулы Ньютона-Лейбница для функций дискретного переменного. Интегральное представление (2) и дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница (3) позволяют получить два варианта формулы Эйлера-Маклорена.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы (1) точка $(2\pi,\dots,2\pi) \in \sigma_\varphi$, тогда справедливы следующие варианты формулы Эйлера-Маклорена для суммы (1):*

$$S(x) = \sum_{\nu\in I+\mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{\partial^{\nu-I}\varphi(0)}{\partial t^{\nu-I}}\frac{1}{\nu!}w_{NL}(\delta,\pi)B_\nu(x), \tag{4}$$

$$S(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{B_\nu}{\nu!}w_{NL}(\delta,\pi)\partial^{\nu-I}\varphi(x).$$

Здесь частная производная минус первой степени - это интеграл от 0 до x_i

$$\frac{\partial^{-1}\varphi(x)}{\partial x_j} = \int\limits_0^{x_j} \varphi(\pi_j x + te_j)dt.$$

Отметим, что вариант (4) формулы Эйлера-Маклорена является новым даже для случая $n = 1$.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Литература

[1] Е.К. Лейнартас, М.Е. Петроченко. Многомерные аналоги формулы суммирования Эйлера-Маклорена и преобразование Бореля степенных рядов, Сибирские Электронные Математические Известия, том 19, №1, стр. 91-100 (2022).

О некотором классе "эквивалентности" дифференциальных операторов и о выявлении линейных свойств нелинейных задач переноса

Пикичян О.В. (Бюраканская обсерватория НАН РА)
e-mail: hovpik@gmail.com

1. Пусть на границы одномерной рассеивающей-поглощающей анизотропной среды $[0, L]$ геометрической толщины L, состоящей из двухуровневых атомов, падают мощные потоки излучения интенсивностей x (слева) и y (справа). Требуется определить интенсивность поля излучения $I^{\pm}(l, x, y, L)$ на геометрической глубине $0 \le l \le L$ а также отраженно-пропущенные излучения $I^{+}|_{(l=L)} = u^{+}$ и $I^{-}|_{(l=0)} = u^{-}$ (положительным считается направление роста глубины).). С этой целью традиционно формулируется двухточечная краевая задача для уравнения переноса излучения. Последнее представляет из себя кинетическое уравнение Больцмана, написанного для фотонного газа. Применением нелинейного аналога принципа инвариантности Амбарцумяна (метода нелинейного сложения слоев) к этой задаче, нетрудно получить полный набор дифференциальных уравнений инвариантного погружения (в смысле Беллмана) и посредством исключения производных по пространственным переменным перейти к функциональным уравнениям полной инвариантности Амбарцумяна (ПИА). В итоге для определения одних и тех искомых величин $I^{\pm}$ получим две отдельные системы уравнений: система кинетических уравнений Больцмана и система функциональных уравнений ПИА, соответственно:

$$\hat{B} I^{\pm} = \pm\alpha^{\pm}(I^{+}, I^{-}) \quad \text{и} \quad \hat{A} I^{\pm} = \pm\alpha^{\pm}(I^{+}, I^{-}), \tag{1}$$

$$\hat{B} \equiv \frac{d}{dl} \quad \text{и} \quad \hat{A} \equiv \alpha^{+}(x, u^{-})\frac{\partial}{\partial x} - \alpha^{-}(u^{+}, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2}$$

где величиной $\alpha^{\pm}$ представлен "интеграл столкновений" данной задачи. Хотя дифференциальные операторы (2) в системах (1) имеют совершенно разную природу, однако их воздействие на искомые величины (при соответствующих граничных и начальных условиях) в итоге приводит к идентичному результату $\pm\alpha^{\pm}(I^{+}, I^{-})$. Выделим класс таких систем вводом условного понятия некоторой "эквивалентности" их операторов.

Определение. *Класс операторов* $\hat{H}, \hat{W}, \ldots \hat{V}$ *назовем "F - эквивалентными" между собой, если существует такая функция (или функции) f, воздействие на которую (которые) каждым из этих операторов, при удовлетворении определенных условий $h, w \ldots v$ соответственно,* *приводит к одному и тому же выражению $F\{f\}$. Эту эквивалентность кратко обозначим посредством*

$$F_{\hat{H}_h \equiv \hat{W}_w} F_{\equiv \dots} F_{\equiv \hat{V}_v}. \tag{3}$$

Между операторами (2), согласно определению, имеет место "α-эквивалентость" в виде

$$\alpha_{\hat{B}_{(2)} \equiv \hat{B}_{(3)}} \alpha_{\equiv \hat{A}_{(5)}}. \tag{4}$$

Приравнивание левых частей уравнений (1) приводит к новым уравнениям

$$\frac{d}{dl} I^{\pm}(l,x,y,L) = \left[\alpha^{+}(x,u^{-})\frac{\partial}{\partial x} - \alpha^{-}(u^{+},y)\frac{\partial}{\partial y}\right] I^{\pm}(l,x,y,L). \tag{5}$$

Преимущество уравнений (5) по отношению нелинейных систем (1) очевидны- они линейные и раздельные. Естественно их называть кинетическими уравнениями эквивалентности (КУЭ).

2. В операторе $\hat{A}$ требуется знание решения $u^{\pm}(x,y,L)$ задачи "отражения-пропускания", которые находятся из своей системы функциональных уравнений ПИА

$$\begin{cases} \hat{A}u^{+} = +\alpha^{+}(u^{+},y), \\ \hat{A}u^{-} = -\alpha^{-}(x,u^{-}), \end{cases} \qquad u^{+}|_{y=0} \equiv T_L^{+}(x), \quad u^{-}|_{y=0} \equiv R_L^{-}(x). \tag{6}$$

Для решения системы (6) нами был предложен метод, так называемых, "линейных образов" $T^{\pm}$ и $R^{\pm}$ функций отражения-пропускания $u^{\pm}$. Решения (6) отыскиваются в виде простой линейной комбинации вводимых "линейных образов":

$$\begin{aligned} u^{+}(x,y,L) &= T^{+}(x,y,L)x + R^{+}(x,y,L)y, \\ u^{-}(x,y,L) &= T^{-}(x,y,L)y + R^{-}(x,y,L)x. \end{aligned} \tag{7}$$

Этим выявляется определенные "линейное свойство" решения сугубо нелинейной задачи (6) и, например, в частном случае изотропной среды при консервативном рассеянии позволяет получить явные аналитические решения в замкнутой форме ($\xi \equiv x + y$)

$$u^{+} = (x-y)T + y, \quad u^{-} = -(x-y)T + x, \quad T(\xi) = q\frac{1+b\xi}{1+qb\xi}. \tag{8}$$

Торические морфизмы и диагонали рядов Лорана

Почекутов Д.Ю. (Сибирский федеральный университет)
e-mail: dpotchekutov@sfu-kras.ru

Пусть $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{C}^{\times} := \mathbb{C} - \{0\}$ – его мультипликативная группа, и $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – подполе вещественных чисел. Пусть M – решетка ранга n, а N – двойственная к ней решетка. Рассмотрим n-мерный комплексный тор

$T^n := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^{\times}$. Зафиксируем базис $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n$ решетки M и двойственный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ решетки N. Тогда $M \simeq \mathbb{Z}^n$, $N \simeq (\mathbb{Z}^n)^*$, а тор может быть записан в виде

$$T^n_{\boldsymbol{z}} = \mathbb{C}^{\times} \times \ldots \times \mathbb{C}^{\times}.$$

Это абелева группа, которая имеет структуру комплексного многообразия, снабженного координатными функциями $\boldsymbol{z} := (z_1, \ldots, z_n)$.

Многочлен Лорана Q над $\mathbb{C}$ – это конечная сумма вида

$$Q(\boldsymbol{z}) := \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in A} a_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

где A – конечное подмножество двойственной к $\mathbb{Z}^n$ решетки $(\mathbb{Z}^n)^*$, $q_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{C}$ и $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}} := z_1^{\alpha^1} \ldots z_n^{\alpha^n}$. Обозначим через $Z^{\times}(Q) := \{\boldsymbol{z} \in T^n_{\boldsymbol{z}} : Q(\boldsymbol{z}) = 0\}$ множество нулей в $T^n_{\boldsymbol{z}}$ многочлена Лорана Q. *Амеба* $\mathcal{A}_Q$ многочлена Лорана Q – это образ $Z^{\times}(Q)$ относительно логарифмического отображения

$$\Lambda : T^n_{\boldsymbol{z}} \to \mathbb{R}^n,\ \Lambda(\boldsymbol{z}) := (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|),$$

где $\mathbb{R}^n := \mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Пусть $P(\boldsymbol{z})$, $Q(\boldsymbol{z})$ – неприводимые многочлены Лорана. Рассмотрим ряд Лорана (с центром в начале координат)

$$F(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\beta} \in (\mathbb{Z}^n)^*} C_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\beta}} \tag{1}$$

рациональной функции $F(\boldsymbol{z}) = P(\boldsymbol{z})/Q(\boldsymbol{z})$. Хорошо известно, что область абсолютной сходимости ряда Лорана (1) является логарифмически выпуклой. Более того, она имеет вид $\Lambda^{-1}(E)$, где E – компонента связности дополнения $\mathbb{R}^n - \mathcal{A}_Q$.

Пусть $\boldsymbol{Q} := (\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_r)$ – упорядоченный набор r векторов, которые порождают подрешетку L ранга r решетки $(\mathbb{Z}^n)^*$. При $\boldsymbol{k} := (k^1 \ldots, k^r) \in (\mathbb{Z}^r)^*$ будем использовать обозначение $\boldsymbol{Qk} := k^1\boldsymbol{q}_1 + \ldots + k^r\boldsymbol{q}_r$. Тогда *полной $\boldsymbol{Q}$-диагональю* ряда Лорана (1) называется ряд Лорана

$$d_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in (\mathbb{Z}^r)^*} C_{\boldsymbol{Qk}} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}},$$

зависящий от r переменных (r – *ранг* диагонали). Другими словами, диагональ $d_{\boldsymbol{Q}}(t)$ – это производящая функция r-мерной подпоследовательности $\{C_{\boldsymbol{Qk}}\}$ n-мерной последовательности $\{C_{\boldsymbol{\beta}}\}$ коэффициентов Лорана ряда (1).

Диагонали рациональных функций естественно возникают в статистической механике (см. [1]) и перечислительной комбинаторике. Р. Стэнли предложил в [2, п. 6.1] следующую иерархию наиболее важных для перечислительной комбинаторики классов производящих функций:

$$\{\text{рациональные}\} \subset \{\text{алгебраические}\} \subset \{D\text{-конечные}\}.$$

Классический результат утверждает, что диагонали рядов Тейлора рациональных функций двух переменных (случай $n = 2$ и $r = 1$) являются алгебраическими функциями. Он остается верным и в случае рядов Лорана рациональных функций двух переменных [3, Теорема 1]. При $n > 2$ даже диагонали рядов Тейлора рациональных функций являются, как правило, неалгебраическими, см. [4, п. 2] и [5, п. 4] для конкретных примеров.

В докладе мы рассматриваем примеры, показывающие, что такие диагонали могут быть алгебраическими, и раскрываем, как интегральные представления помогают объяснить этот феномен. Мы показываем, что диагональ $d_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{t})$ может быть представлена в виде интеграла от рациональной формы ω с параметрами $\boldsymbol{t}$ по $(n-r)$-мерному циклу $\Lambda^{-1}(\boldsymbol{y}')$, где $\boldsymbol{y}'$ – точка в компоненте $\tilde{E}' \subset \mathbb{R}^{n-r}$ дополнения к амебе знаменателя ω. Основным результатом является теорема.

Теорема 1. *Пусть набор $\boldsymbol{Q}$ порождает насыщенную r-мерную подрешетку*[1] *решетки $(\mathbb{Z}^n)^*$, и p – размерность конуса рецессии компоненты $\tilde{E}'$. Тогда, если условие*

$$n - r - p = 1$$

выполнено, то полная диагональ $d_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{t})$ ряда Лорана (1) рациональной фукнции $F(\boldsymbol{z})$ является алгебраической функцией.

[1]Напомним, что подрешетка L решетки N называется *насыщенной* $\Leftrightarrow$ для любых $\boldsymbol{v} \in N$, если $k\boldsymbol{v} \in L$, где k – положительное целое, то $\boldsymbol{v} \in L$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11- 20117).

Литература

[1] A. Bostan, S. Boukraa, G. Christol, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Ising n-fold integrals as diagonals of rational functions and integrality of series expansions. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 46:18 (2013), 185–202.
[2] R. Stanley. Enumerative combinatorics, Volume 2, Cambridge University Press, 1999.
[3] D. Pochekutov. Diagonals of the Laurent series of rational functions. Siberian Mathematical Journal, 50:6 (2009), 1081–1091.
[4] H. Furstenberg. Algebraic functions over finite fields. Journal of Algebra, 7:2 (1967), 271–277.
[5] D. Pochekutov. Analytic continuation of diagonals of Laurent series for rational functions. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 14:4 (2021), 360–368.

Список интегральных представлений для диагонали ряда Лорана рациональной функции

Сенашов А.В. (Сибирский федеральный университет)
e-mail: asenashov@mail.ru

Рассмотрим произвольный ряд Лорана для рациональной функции

$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, с центром в нуле:

$$F(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n}, \tag{1}$$

где P и Q – несократимые полиномы. Известно, что такие ряды сходятся в областях $Log^{-1}(E)$, где E – связная компонента дополнения $\mathbb{R}^n\backslash A_Q$ амебы знаменателя Q [1]. Напомним, что *амебой* A_Q полинома Q или алгебраической гиперповерхности

$$V = \{z\in(\mathbb{C}\backslash 0)^n : Q(z) = 0\}$$

называется образ V при отображении $Log : (\mathbb{C}\backslash 0)^n \to \mathbb{R}^n$, определенном формулой

$$Log : (z_1,\ldots,z_n) \to (\log|z_1|,\ldots,\log|z_n|).$$

Согласно результату статьи [2] существует инъективная функция порядка

$$\nu : E \to \mathbb{Z}^n \bigcap N_Q,$$

сопоставляющая каждой связной компоненте E дополнения $\mathbb{R}^n\backslash A_Q$ целочисленный вектор $\nu = \nu(E)$, принадлежащий многограннику Ньютона N_Q многочлена Q.

Рассмотрим $p-$мерную подрешетку $l \subset L$, с базисом $q^{(1)},\ldots,q^{(p)}$. Мы подразумеваем, что этот базис может быть расширен до L $n-p$ целочисленными векторами $q^{(p+1)},\ldots,q^{(n)}$ (это предложение эквивалентно тому, что все $p\times p$ - миноры матрицы $\tilde{A} = (q^{(1)},\ldots,q^{(p)})$ взаимно просты) (см. [3] или предложение 4.2.13 [4]). Таким образом, матрица

$$A = (q^{(1)},\ldots,q^{(n)})$$

унимодулярна, и мы будем подразумевать, что ее определитель равен 1. Направления $q^{(1)},\ldots,q^{(p)}$ задают диагональную подпоследовательность $\{c_{lq}\}_{l\in\mathbb{Z}^p}$, где $l\cdot q$ означает произведение $1\times p$ - матрицы l и $p\times n$ - матрицы $\tilde{A}$: $lq = l_1q^{(1)} + \cdots + l_pq^{(p)}$. Производящие функции

$$d_q(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^p} c_{l_q} t_1^{l_1}\cdots t_p^{l_p}$$

указанных подпоследовательностей называются *полными q-диагоналями* ряда.

Пусть ряд Лорана функции (1) сходится в $Log^{-1}(E)$, где E это связная компонента $\mathbb{R}^n - A_Q$ порядка ν. Выберем $t = (t_1,\ldots,t_p)$ так что амебы многочленов $z^{q_1} - t_1,\ldots,z^{q_p} - t_p$ разделяли E на 2^p частей $E(\varepsilon)$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)$ пробегают семейство всех вершин $p-$мерного куба $[-1,1]^p$. $E(\varepsilon)$ – пересечение E с конусом $\{x\in\mathbb{R}^n : \varepsilon_1(e^{x\cdot q_1} - |t_1|) > 0,\ldots,\varepsilon_p(e^{x\cdot q_p} - |t_p|) > 0\}$.
Множество всех таких t в $(\mathbb{C}\backslash 0)^p$ обозначим T, оно задается полуалгебраическими условиями на $|t_1|,\ldots,|t_p|$.

Для $t \in T$ для полной p-мерной диагонали $d_q(t)$ ряда Лорана (1) допустимо интегральное представление (предложение 2 [5])

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} F(z) \frac{z^{q^{(1)}} \dots z^{q^{(p)}}}{(z^{q^{(1)}} - t_1) \dots (z^{q^{(p)}} - t_p)} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n},$$

где $\Gamma = \sum\limits_{\varepsilon} (\varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_r) Log^{-1}(x(\varepsilon))$ и $x(\varepsilon)$ это точка из $E(\varepsilon)$. Используя замену переменных $w = A^{-1}z$, задающую торический морфизм, получаем следующую теорему, позволяющую понизить кратность интегрального представления с сохранением рациональности подынтегрального выражения.

Теорема 1. *Пусть $q = (q_1, \dots, q_r)$ порождают насыщенную $p-$мерную подрешетку L. Тогда для $t \in T$ полная диагональ ряда (1) может быть представлена в следующей форме*

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-p}} \int\limits_{Log^{-1}(y)} \frac{\tilde{P}(t, w_{p+1}, \dots, w_n)}{\tilde{Q}(t, w_{p+1}, \dots, w_n)} \frac{dw_{p+1} \dots dw_n}{w_{p+1} \dots w_n},$$

где $y = (y_{p+1}, \dots, y_n)$ точка в компоненте $\tilde{E}$ порядка $(\mu^{p+1}, \dots, \mu^n)$ дополнения амебы $\tilde{Q}(t, w_{p+1}, \dots, w_n)$, где $\mu = A^{-1}\nu$.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Литература

[1] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky. Discriminants, Resultants and Multidimentional Determinates. Boston : Bikhauser, 1994.

[2] M. Forsberg, M. Passare, A. K. Tsikh. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas. Advances in mathematics, 151:1 (2000), 45–70.

[3] L. Nilsson, M. Passare, A. K. Tsikh. Domains of Convergence for A-hypergeometric Series and Integrals. Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 12:4 (2019), 509–529.

[4] Т. М. Садыков, А. К. Цих. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М: Наука, – 2014.

[5] Д. Ю. Почекутов. Диагонали рядов Лорана рациональных функций. Сиб. матем. журн., 50:6 (2009), 1370–1383.

Эрмитовы уравнения Янга–Миллса и их обобщения

Сергеев А.Г. (Математический институт им. В.А.Стеклова)
e-mail: sergeev@mi-ras.ru

Эрмитово уравнение Янга–Миллса — это нелинейное уравнение на эрмитову метрику, заданную на голоморфном векторном расслоении над компактным кэлеровом многообразием. Его можно также рассматривать как уравнение на унитарную связность, ассоциированную с указанной эрмитовой метрикой. Если размерность базового многообразия равна 1, то решениями эрмитова уравнения Янга–Миллса являются плоские связности. Если эта размерность равна 2, решениями являются анти-автодуальные связности, называемые иначе инстантонами. Тем самым, эрмитовы уравнения Янга–Миллса можно рассматривать как многомерное обобщение уравнений дуальности.

Основным результатом первой части доклада, относящейся к эрмитовым уравнениям Янга–Миллса, является теорема Дональдсона о существовании и единственности решения граничной задачи Дирихле для эрмитова уравнения Янга–Миллса на компактном кэлеровом многообразии с краем.

Вторая часть посвящена деформированному эрмитову уравнению Янга–Миллса. Это обобщение эрмитова уравнения Янга–Миллса возникло в работах Яу с соавторами. Деформированное эрмитово уравнение Янга–Миллса редуцируется к эрмитову уравнению Янга–Миллса в пределе большого объема. Существование решения деформированного эрмитова уравнения Янга–Миллса при дополнительных условиях типа положительности кривизны доказывается с помощью потока теплопроводности. Этот поток существует при всех временах и в пределе большого объема сходится к решению деформированного эрмитова уравнения Янга–Миллса.

Реализация алгебр Ли голоморфными автоморфизмами гиперповерхностей

Степанова М.А. (МГУ им. М.В.Ломоносова)
e-mail: step_masha@mail.ru

Существует ряд результатов о реализации групп и алгебр Ли автоморфизмами конкретных классов многообразий. Утверждения такого рода дают ответ на естественный вопрос о том, насколько богат класс автоморфизмов для выбранного множества геометрических объектов. Например, известно ([1]), что любую линейную связную группу Ли можно реализовать как группу голоморфных автоморфизмов ограниченной области. Также известно ([2]), что каждая связная группа Ли может быть реализована как группа голоморфных автоморфизмов некоторого многообразия Штейна. Однако соответствующий результат для вещественных гиперповерхностей отсутствовал, насколько известно автору доклада. В докладе мы восполним этот пробел и покажем, что любую конечномерную вещественную алгебру Ли можно реализовать также как алгебру голоморфных автоморфизмов ростка вещественно-аналитической гиперповерхности комплексного пространства.

Литература

[1] А. Е. Туманов, Г. Б. Шабат. Реализация линейных групп Ли билогоморфными автоморфизмами ограниченных областей. Функц. анализ и его прил., 1990, том 24, выпуск 3, 94–95.
[2] J. Winkelmann. Realizing connected Lie groups as automorphism groups of complex manifolds. arXiv:math/0204225v2.

О комбинаторных коэффициентах резольвенты границы полиэдра

Ульверт Р.В.(Сибирский федеральный университет,
Сибирский университет науки и технологий)
e-mail: ulvertrom@yandex.ru

Рассмотрим набор $f_1, \ldots, f_n$ полиномов Лорана от n переменных. Одним из достаточных условий конечности множества решений системы уравнений $f_1 = \cdots = f_n = 0$ в комплексном алгебраическом торе $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ является условие *развернутости* набора многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ данных полиномов, которое выражает тот факт, что многогранники находятся в общем положении относительно друг друга.

Пусть $\Delta = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n$ — сумма Минковского развернутого набора $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Каждая грань $\Gamma \subset \Delta$ единственным образом представляется в виде суммы $\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n$, где Γ_i — грань Δ_i. Из условия развернутости следует, что в этом разложении хотя бы одно из слагаемых Γ_i является вершиной. Каждой вершине A многогранника Δ сопоставляется *комбинаторный коэффициент* k_A, равный локальной степени ростка $(\partial\Delta, A) \to (\partial\mathbb{R}^n_+, 0)$ специальным образом построенного *характеристического отображения* (см. [1]). Комбинаторный коэффициент k_A может быть найден как число подсчитанных с учетом знака *правильных* флагов граней $A = \Gamma^0 \subset \Gamma^1 \subset \ldots \subset \Gamma^{n-1} \subset \Gamma^n = \Delta$, $\dim \Gamma^m = m$, в которых первые m слагаемых $\Gamma^m_i \subset \Delta_i$ грани $\Gamma^m = \Gamma^m_1 + \ldots + \Gamma^m_n$ имеют положительную размерность, а последние $n - m$ слагаемых являются вершинами (см. [2]).

Комбинаторные коэффициенты появляются в известной теореме Гельфонд – Хованского о глобальном вычете Гротендика в $\mathbb{T}^n$, которая утверждает, что для полиномов Лорана $f_1, \ldots, f_n$ с развернутым набором многогранников Ньютона и любого полинома Лорана f сумма вычетов Гротендика формы $\omega = (f/f_1 \ldots f_n)\,(dz_1/z_1) \wedge \cdots \wedge (dz_n/z_n)$ по всем корням системы уравнений $f_1 = \cdots = f_n = 0$ в $\mathbb{T}^n$ равна $(-1)^n \sum k_A res_A \omega$, где суммирование распространяется на все вершины многогранника-суммы Δ, и $res_A\omega$ — *торический вычет* формы ω в вершине $A \in \Delta$ (см. [1]).

Мы предлагаем другое определение комбинаторных коэффициентов для собственных граней любых размерностей произвольного компактного выпуклого полиэдра в $\mathbb{R}^n$ с раскрашенными гранями. В специальном случае *хорошей* раскраски комбинаторные коэффициенты граней определяются однозначно и также могут быть вычислены на основе подсчета числа правильных флагов.

Пусть Δ — компактный выпуклый полиэдр размерности n в $\mathbb{R}^n$, и F — множество всех его граней, взятых с фиксированной ориентацией. Рассмотрим цепной комплекс $C = (F; \partial)$, в котором абелева группа C порождается множеством свободных образующих F. Пусть $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество индексов, которые мы будем интерпретировать как различные цвета с соответствующими номерами. Отображение $\chi\colon I \to 2^{F \setminus \Delta}$ будем называть *раскраской* граней полиэдра Δ. Будем говорить, что каждая грань $\Gamma \in \chi(i)$ окрашена в цвет i (окрашиваются только собственные грани). Обозначим через $H(i)$

подгруппу в C, порожденную всеми гранями, окрашенными в цвет i.

Граница $\partial\Delta$ полиэдра Δ является циклом комплекса C. Последовательность отображений $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ назовем *резольвентой* цикла $\partial\Delta$, соответствующей раскраске граней χ, если $\xi_p \colon I^{p+1} \to C$ — альтернированное отображение с образом $\xi_p(i_0, i_1, \ldots, i_p) \in H(i_0) \cap H(i_1) \cap \cdots \cap H(i_p)$, причем $\partial\Delta = \xi_0(1) + \cdots + \xi_0(n)$ и $\partial\xi_p(i_0, i_1, \ldots, i_p) = \sum_{i \in I} \xi_{p+1}(i, i_0, i_1, \ldots, i_p)$ (в более общем виде определение резольвенты дается в [3]). Можно сказать, что резольвента сопоставляет каждому поднабору $\{i_0, i_1, \ldots, i_p\}$ цветов из I некоторую цепь, являющуюся суммой граней размерности $n-p-1$, раскрашенных во все цвета этого поднабора, взятых с некоторыми целочисленными коэффициентами. Резольвента существует тогда и только тогда, когда $\partial\Delta \in H(1) + \cdots + H(n)$, то есть граница полиэдра полностью окрашена. При этом для каждой собственной грани Γ размерности m полиэдра Δ и каждого упорядоченного поднабора $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-m}$ цветов определен комбинаторный коэффициент $k_\Gamma(i_1, i_2, \ldots, i_{n-m})$ с которым эта грань входит в цепь $\xi_{n-m-1}(i_1, i_2, \ldots, i_{n-m})$.

Назовем раскраску граней χ полиэдра Δ *хорошей*, если выполняются следующие условия: грани размерности $n-1$ окрашены в единственный цвет, причем в каждый цвет $i \in I$ окрашена хотя бы одна такая грань; грань Γ размерности меньше $n-1$ окрашена в цвет i тогда и только тогда, когда в этот цвет окрашена некоторая грань большей размерности, содержащая Γ; каждая грань размерности m окрашена не более, чем в $n-m$ различных цветов.

Теорема. *Пусть χ — хорошая раскраска граней полиэдра Δ размерности n. Тогда существует единственная резольвента $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ границы полиэдра $\partial\Delta$, соответствующая этой раскраске. При этом комбинаторный коэффициент $k_\Gamma(i_1, i_2, \ldots, i_{n-m})$ собственной грани Γ размерности m равен количеству флагов граней $\Gamma = \Gamma_m \subset \Gamma_{m+1} \subset \cdots \subset \Gamma_n = \Delta$, $\dim\Gamma_j = j$, окрашенных так, что грань Γ_j, $m+1 \le j \le n-1$, имеет в точности последние $n-j$ цветов из списка $i_1, i_2, \ldots, i_{n-m}$. Каждый флаг учитывается со знаком $(\Gamma_m|\Gamma_{m+1})(\Gamma_{m+1}|\Gamma_{m+2})\ldots(\Gamma_{n-1}|\Gamma_n)$, где $(\Gamma_j|\Gamma_{j+1})$ — коэффициент $+1$ или -1, с которым грань Γ_j входит в цепь $\partial\Gamma_{j+1}$.*

Резольвента границы полиэдра и связанные с ней комбинаторные коэффициенты возникают в теории многомерных вычетов и интегральных представлений. В частности, их использование расширяет область применения теоремы Гельфонд – Хованского.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Литература

[1] O.A. Gelfond , A.G. Khovanskii. Toric geometry and Grothendieck residues. Mosc. Math. J., 2:1(2002), 99–112.

[2] I. Soprounov. On combinatorial coefficients and the Gelfond–Khovanskii residue formula. Contemp. Math., 334 (2003), 343–349.

[3] A.M. Gleason. The Cauchy – Weil theorem. J. Math. Mech., 12:3 (1963), 429–444.

Гранд пространства типа Морри

Умархаджиев С.М. (Коплексный научно-исследовательский институт РАН, Академия наук Чеченской Республики)
e-mail: umsalaudin@gmail.com

Введены ([1]) **пространства типа Морри** $M^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$, определяемые нормой

$$\|f\|_{M^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x\in E}\left(\int_0^\infty w(r)^q \left(\int_{|x-y|<r}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{q}{p}} \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{q}},$$

где E – произвольное множество из $\mathbb{R}^n$, $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $1\le p<\infty$, $1\le q<\infty$, $w\in\Omega_q(\mathbb{R}_+)$,

$$\Omega_q(\mathbb{R}_+) := \left\{w:\ w \text{ есть вес и } \int_t^\infty \frac{w(r)^q}{r}dr<\infty,\ t>0\right\}.$$

В случаях $E=\{0\}$ и $E=\mathbb{R}^n$ мы имеем известные *локальные* и *глобальные* пространства типа Морри, соответственно.

Частное гранд пространство типа Морри. Пусть $1\le p<\infty$, $1<q<\infty$.

$$\|f\|_{M_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0<\delta<q-1}\varphi(\delta)\sup_{x\in E}\left(\int_0^\infty w(r)^{q-\delta}b(r)^{\frac{\delta}{q}}\left(\int_{|x-y|<r}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{q-\delta}{p}}\frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{q-\delta}},$$

где $\varphi\in L^\infty(0,q-1)$, $\varphi(\delta)>0$ и $\lim_{\delta\to 0}\varphi(\delta)=0$. definition

Смешанная грандизация пространств типа Морри.Пусть $U\subseteq R_{p,q}$ и $(0,0)$ есть предельная точка множества U. Пусть $1<p<\infty$, $1<q<\infty$, $\varphi\in L^\infty(U)$, $\varphi(\varepsilon,\delta)>0$ for $(\varepsilon,\delta)\in U$ and $\lim_{U\ni(\varepsilon,\delta)\to(0,0)}\varphi(\varepsilon,\delta)=0$. Назывём U-грандизацией ${}^U M_{a,b}^{p),q),w}(\mathbb{R}^n)$ пространства типа Морри множество функций, определяемое нормой

$$\|f\|_{{}^U M_{a,b}^{p),q),w}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U}\varphi(\varepsilon,\delta)\sup_{x\in E}\left(\int_0^\infty w(r)^{q-\delta}b(r)^{\frac{\delta}{q}}\right.$$
$$\left.\times\left(\int_{|x-y|<r}|f(y)|^{p-\varepsilon}a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}}dy\right)^{\frac{q-\delta}{p-\varepsilon}}\frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}.$$

Вложения.

Теорема 1. *Условия $a\in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $b\in L^1(\mathbb{R}_+,\frac{dr}{r})$ достаточны для вложения*

$$M^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow {}^U M_{a,b}^{p),q),w}(\mathbb{R}^n)$$

для любого множества U.

Если $b \in L^1(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r})$, то пространство $M^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$ вложено в частное гранд пространство $M_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)$.

Операторы с однородными ядрами. Далее полагаем, что $E = \{0\}$.

Рассматриваем операторы вида

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(|x|, |y|) f(y) dy,$$

где ядро $\mathcal{K}$ однородно степени $-n$. Обозначим

$$w^*(t) := \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \frac{w(tr)}{w(r)} \text{ и } \varkappa^*(n) := |S^{n-1}| \int_0^\infty s^{\frac{n}{p'}-1} |\mathcal{K}(1,s)| \, w^* \left(\frac{1}{s}\right) ds.$$

Теорема 2. *Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и $w \in \Omega_q(\mathbb{R}_+)$. Условие $\varkappa^*(1) < \infty$ достаточно для ограниченности оператора*

$$Kf(x) = \int_0^\infty \mathcal{K}(x,y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

в пространстве $M^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)$ и $\|Kf\|_{M^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)} \leq \varkappa^*(1) \|f\|_{M^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)}$.

Следствие. *Оператор Харди*

$$H^\alpha f(x) = |x|^{\alpha - n} \int_{|y|<|x|} \frac{f(y)}{|y|^\alpha} dy, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

ограничен в $M^{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\lambda > 0$, тогда и только тогда, когда $\alpha < \frac{n}{p'} + \lambda$ и $\|H^\alpha\| = \frac{|S^{n-1}|}{\frac{n}{p} + \lambda - \alpha}$.

Теорема 3. *Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 < q < \infty$ и $w \in \Omega_q(\mathbb{R}_+)$. Если*

$$\sup_{0<\delta<\delta_0} \varphi(\delta) \int_0^\infty t^{\frac{n}{p'}-1} |\mathcal{K}(1,t)| w^* \left(\frac{1}{t}\right) \left[b^* \left(\frac{1}{t}\right)\right]^{\frac{\delta}{q(q-\delta)}} dt < \infty$$

для некоторого $\delta_0 \in (0, q-1)$, то оператор K ограничен в пространстве $M_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)$.

Литература

[1] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev. Grand Morrey type spaces. Vladikavkaz Mathematial Journal. 2020, Volume 22, Issue 4, P. 104–118.

Феномен Гартогса и спектральная последовательность Лере

Феклистов С.В. (Сибирский федеральный университет)
e-mail: sergeyfe2017@yandex.ru

Пусть X, Y — комплексные многообразия и $\phi \colon X \to Y$ — голоморфное локально тривиальное расслоение со связным некомпактным слоем F, $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X.

Теорема о спектральной последовательности композиции функторов между абелевыми категориями [4] позволяет получить спектральную последовательность Лере для когомологий с компактными носителями.

Предложение 1. *Существует спектральная последовательность*

$$E_r^{p,q} \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{F}),$$

где $E_2^{p,q} = H_c^p(Y, R^q\phi_!\mathcal{F})$.

Используя длинную точную последовательность пары и формулу Кюннета [1], удается вычислить стебли пучков $R^q\phi_!\mathcal{O}_X$, где $\mathcal{O}_X$ — пучок голоморфных функций на X.

Предложение 2. $(R^q\phi_!\mathcal{O}_X)_y \cong \mathcal{O}_{Y,y} \otimes H_c^q(F, \mathcal{O}_F)$.

Анализируя второй лист спектральной последовательности $E_r^{p,q}$, получаем следующий результат об обращении в нуль группы когомологий с компактными носителями.

Теорема 1. *Пусть $\phi\colon X \to Y$ — голоморфное локально тривиальное расслоение с некомпактным слоем F. Предположим, что $H_c^i(F, \mathcal{O}_F) = 0$ для всех $i < q$. Тогда $H_c^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i < q$.*

Если слой F является многообразием Штейна, то получаем

Следствие 1. *$H_c^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i < \dim F$.*

В частности, если $F = \mathbb{C}^l$ и $l > 1$ (к примеру, ϕ — голоморфное векторное расслоение), тогда получаем результат Р. Двилевича об обращении в нуль группы $H_c^1(X, \mathcal{O}_X)$ [3].

Одним из приложений теоремы 1 является результат о феномене продолжения Гартогса в некоторых почти однородных алгебраических G-многообразиях.

Определение 1. *Будем говорить, что некомпактное связное комплексное многообразие X допускает феномен Гартогса, если для каждой области $W \subset X$ и каждого компакта $K \subset W$ таких, что $W \setminus K$ связно, гомоморфизм ограничения $\mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(W \setminus K)$ является изоморфизмом.*

Определение 2. *Некомпактное комплексное многообразие X называется (b, σ)-компактифицируемым, если существует компактное комплексное многообразие X' и открытое голоморфное вложение $i\colon X \hookrightarrow X'$, со следующими свойствами: $X' \setminus X$ — собственное аналитическое подмножество, имеющее b связных компонент;* $\dim H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) = \sigma$.

При этом, если X является кэлеровым (соотв. G-многообразием), то требуется чтобы X' также являлось кэлеровым (соотв. G-многообразием) и вложение $i\colon X \hookrightarrow X'$ сохраняет соответствующие структуры (в случае кэлеровых многообразий — кэлерова структура на X индуцирована кэлеровой структурой на X'; в случае G-многообразий — вложение i является G-эквивариантным).

Заметим, что число b есть в точности число топологических концов многообразия X (в частности, не зависит от выбора компактификации X'). В случае кэлеровых многообразий, число σ равно размерности многообразия Альбанезе $A(X')$.

Теорема 2. *Пусть* $\phi\colon X \to Y$ *— голоморфное локально тривиальное расслоение со связным некомпактным слоем* F*. Предположим, что* X *является* $(1, \sigma)$*-компактифицируемым, а* F *является* $(1, 0)$*-компактифицируемым и допускает феномен Гартогса. Тогда* X *допускает феномен Гартогса.*

Пусть X — неособое почти однородное алгебраическое G-многообразие с открытой орбитой $\Omega = G/H$. М. Брион показал [2], что любое такое многообразие является G-эквивариантным однородным $(G_{aff}H)$-расслоением над многообразием Альбанезе $A(X) \cong A(\Omega) = G/(G_{aff}H)$, слой которого является почти однородным алгебраическим G_{aff}-многообразием, где G_{aff} — замкнутая связная нормальная аффинная подгруппа в G такая, что фактор G/G_{aff} является абелевым многообразием.

Пусть Ω' — открытая орбита почти однородного G_{aff}-многообразия F. Так как G_{aff} — аффинная группа, то многообразие Альбанезе $A(G_{aff})$ нульмерно, а значит и $A(\Omega')$ тоже нульмерно. Поэтому, если слой F является (b, σ)-компактифицируемым, то $\sigma = 0$. Из теоремы 2 получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* X *— неособое кэлерево почти однородное* $(1, \sigma)$*-компактифицируемое алгебраическое* G*-многообразие, причем* $\sigma \neq 0$*. Пусть* F *— слой отображения Альбанезе* $X \to A(X)$*. Если* F *имеет один топологический конец и допускает феномен Гартогса, то* X *допускает феномен Гартогса.*

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Литература

[1] G. E. Bredon. Sheaf Theory. Springer-Verlag, New York, 1997.
[2] M. Brion. Log homogeneous varieties. arXiv:math/0609669, 2007, p. 32.
[3] R. Dwilewicz. Holomorphic extensions in complex fiber bundles. J.Math. Anal. Appl. 322. 2006, pp. 556 – 565.
[4] C. Voisin. Hodge theory and complex algebraic geometry II. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 77, 2009.

О математических моделях распространения эпидемических заболеваний

Хачатрян А.Х. (Институт математики НАН Армении)
e-mail: aghavard59@mail.ru
Нариманян А.Ж. (Университет Бремена, Германия)
e-mail: arsen@narimanyan.de

Рассматриваются три математические модели, описывающие распространение эпидемии среди населения.

В рамках первой модели [1], задача сводится к нелинейному интегральному уравнению сверточного типа на всей оси. Доказана теорема существования непрерывного решения на $\mathbb{R}$. В определенном классе функций доказана также единственность решения вышеуказанного уравнения. Приведены результаты численных расчетов.

Вторая модель [2], известная под названием “COVID-19”, описывается нелинейным интегральным уравнениям типа Вольтера. Доказано существование единственного непрерывного дифференцируемого решения указанного уравнения. Вторая модель была применена для “COVID-19” на примере Франции в период с 27.12.2019 по 27.06.2020 где на 104-ый день было обнаружено максимальное число инфицированных. Рассматриваемая модель дает максимальное число инфицированных на 105 день и с достаточно большой точностью описывает поведение распространения инфекции.

И в конце в рамках третьей SIR модели [3] изучается проблема географического распространения эпидемии. Задача сводится к нелинейному многомерному интегральному уравнению. При определенных условиях доказываются теоремы существования и единственности решения в пространстве монотонных непрерывных и ограниченных функций. Результаты применены к нескольким тестовым примерам с соответствующими численными расчетами.

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

Литература

[1] A. Kh. Khachatryan. Solvability of One Nonlinear Integral Equation Arising in Modelling of Geographical Spread of Epidemics. OTHA, Operator Theory and Harmonic Analysis, Springer Proc. in Math. and Stat, 2021, 253–272.
[2] А. Г. Сергеев, А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян. Математическая модель распространения пандемии типа Covid-19. Труды ММО, 83:1, 2022 (в печати).
[3] Kh. A. Khachatryan, A. Zh. Narimanyan, A. Kh. Khachatryan. On Mathematical Modelling of Temporial Spatial Spread of Epidemics. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 15:6, 2020, 1–14.

Вопросы отсутствия или существования и единственности нетривиального решения для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки

Хачатрян Х.А. (Ереванский Государственный Университет,
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)
e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Доклад посвящен изучению вопросов отсутствия или существования и единственности нетривиального неотрицательного и ограниченного решения для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений сверточного типа на полуоси и на всей прямой. Уравнения указанного характера встречаются в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, а также в математической теории географического распространения эпидемии в рамках модели Дикмана-Капера. Из сформулированных результатов как частный случай получается полное решение открытой проблемы В.С. Владимирова о единственности роллинговых решений в p-адических уравнениях. В конце доклада будут приведены конкретные прикладные примеры указанных уравнений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00223).

О разрешимости одной системы нелинейных бесконечных алгебраических уравнений в пространстве ограниченных последовательностей

Хачатрян Х.А. (Ереванский Государственный Университет)
e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am
Аветисян М.О. (Национальный аграрный университет Армении)
e-mail: avetisyan.metaqsya@mail.ru

Доклад посвящен изучению вопросов существования и единственности, а также исследованию качественных свойств решения для одного класса нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица. Указанная система возникает в дискретных задачах динамической теории p-адических струн, в математической теории распространения эпидемии, в теории переноса излучения в неоднородных средах. Доказаны теоремы существования и единственности нетривиального неотрицательного решения в пространстве ограниченных последовательностей. Изучена также асимптотическое поведение построенного решения. В конце приведены специальные прикладные примеры.

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

О построении и исследовании решений класса сингулярных интегральных уравнений с монотонными нелинейными компонентами на всей оси

Хачатрян Х.А. (Ереванский Государственный Университет,
Институт математики НАН Армении)
e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am
Андриян С.М. (Национальный аграрный университет Армении)
e-mail: smandriyan@hotmail.com

Основной целью работы, которой посвящён доклад, является исследование класса сингулярных интегральных уравнений с двумя монотонными нелинейностями на всей числовой оси. Актуальность и значимость исследований этих уравнений связана с их многочисленными важными приложениями. Они возникают, в частности, в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, в кинетической теории газов, в математической биологии при исследовании пространственно - временного распределения эпидемии (см., например, [1]-[5] и ссылки в них).

Весьма важным в практическом отношении являются свойства функций, описывающих нелинейности уравнений. Как известно, в явном виде нелинейные уравнения удаются решить лишь в исключительных случаях. Построение и исследование решения сопряжены с трудностями, вызванными как сложностью их структуры, так и неограниченностью множества, на котором они рассматриваются. Поэтому важнейшее значение имеют теоремы существования и единственности решений, а также качественные методы для выявления характера решений.

В настоящей заметке рассматриваемый класс нелинейных уравнений характеризуется наличием не только чётного консервативного ядра и сингулярной функции, а также наличием двух нелинейных компонент, существенно затрудняющих исследование. При этом следует отметить, что каждая из нелинейностей и ядро уравнения имеют более общие представления, включающие в себе случаи конкретных нелинейностей и конкретных ядер ранее исследуемых уравнений (см., например, [1]-[5]).

На базе рассуждений и результатов работ [6]-[10] первого автора разработаны и обоснованы методы, специально приспособленные к решению рассматриваемого класса нелинейных интегральных уравнений. Посредством построения специальных последовательных приближений доказана конструктивная теорема существования нетривиального непрерывного решения. Тем самым для данного случая были установлены условия разрешимости рассматриваемого класса нелинейных уравнений, при этом несужающие естественные условия отмеченных выше прикладных задач. Исследовано поведение построенного решения, найден его предел на $\pm$ бесконечности. Выявлены некоторые свойства этого решения, для которого в том числе получена интегральная оценка.

Для получения единственного решения введён определённый класс функций, непрерывных и ограниченных почти всюду на $\mathbb{R}$. В этом классе доказана теорема единственности, особенно важная с прикладной точки зрения. При доказательстве теоремы единственности использованы соответствующие идеи работ [8]-[10].

Результаты представленной работы обобщают некоторые ранее полученные результаты исследований в этом направлении. Действенность полученных теорем иллюстрируются примерами рассматриваемых уравнений. Таким образом, с расширением класса нелинейностей удаётся расширить круг применимости полученных результатов к исследуемому классу уравнений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

Литература

[1] В. С. Владимиров. О нелинейных уравнениях p-адических открытых замкнутых и открыто-замкнутых струн. ТМФ, 149:3 (2006), 354–367.

[2] И. Я. Арефьева, И. В. Волович. О нелокальных космологических уравнениях на полуоси. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1:22 (2011), 16–27.
[3] В. С. Владимиров. К вопросу несуществования решений уравнений p-адических струн. ТМФ, 174:2 (2013), 208–215.
[4] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян. О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны. ТМФ, 189:2, (2016), 239–255.
[5] O. Diekmann. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. J. Math. Biology 6:2, 109–130 (1978).
[6] Х. А. Хачатрян. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны. Изв. РАН. Сер. матем., 82:2 (2018), 172–193.
[7] Х. А. Хачатрян. О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн. Тр. ММО, 79:1 (2018), 117–132.
[8] A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan. A uniqueness theorem for a nonlinear singular integral equation arising in p-adic string theory. Уч. записки ЕГУ, сер. Физика и Математика, 53:1 (2019), 17–22.
[9] Kh. A. Khachatryan, S. M. Andriyan, A. A. Sisakyan. On the solvability of a class of boundary value problems for systems of the integral equations with power nonlinearity on the whole axis. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2, (2018), 54–73.
[10] Х. А. Хачатрян. Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегральных уравнений свертки с монотонной нелинейностью. Изв. РАН. Сер. матем., 84:4 (2020), 198–207.

Обобщённые эллиптичности в теориях дифференциальных и алгебраических уравнений

Цих А.К. (Сибирский федеральный университет)
e-mail: atsikh@sfu-kras.ru

Классические интегральные преобразования Фурье, Лапласа и Меллина служат центром пересечения многих областей анализа. Цель анализа Фурье состоит в разложении произвольной функции в сумму (обычно не дискретную, а непрерывную) характеров. В классе непрерывных функций f, нормированных условием $f(0) = 1$, совокупность характеров состоит из экспонент $f(x) = e^{\langle x,a\rangle}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Если ограничиться изучением функций и распределений (обощённых функций), достаточно хорошо ведущих себя на бесконечности, то можно брать число a чисто мнимым $a = \pm i\xi$. Таким образом, искомое разложение получается в виде преобразования Фурье.

Концепция распределения образовала замечательный тандем с теорией дифференциальных уравнений. После основополагающих результатов И.Г. Петровского (1937) и Г. Вейля (1940) было обнаружено свойство аналитичности решений–распределений u эллиптического уравнения $P(D)u = 0$. Оставался открытым вопрос о свойстве дифференцируемости. Он был решён

Л. Хёрмандером в 1955 г. введением понятия *гипоэллиптического* полинома как полинома $P(x)$ со свойством

$$P^{(\alpha)}(x)/P(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty \text{ в } \mathbb{R}^n, \; \alpha \neq 0,$$

где $P^{(\alpha)}(x)$ – смешанная производная P порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Фундаментальная теорема Хёрмандера гласит [1], что для всякого открытого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ свойство дифференцируемости всякого решения–распределения уравнения $P(D)u = 0$ имеет место только для гипоэллиптических полиномов P.

Параллельная цель анализа Меллина предполагает рассмотрение характеров в виде собственных функций операторов сдвига в «логарифмической шкале», т.е. функций $f : \mathbb{C}_*^n \to \mathbb{C}$ на комплексном алгебраическом торе $\mathbb{C}_*^n := (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ со свойством $f(x \odot y) = f(x)c(y)$, где $x \odot y = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$. В классе функций аналитических в торе совокупность характеров состоит из степенных функций $x^z = (x_1^{z_1}, \ldots, x_n^{z_n})$. Таким образом, ядро преобразования Меллина определяется дифференциальной формой $x^z dx/x$.

В докладе будет рассмотрено преобразование Меллина для функции $1/P$, где P — полином. Такая функция играет важную роль в построении фундаментального решения оператора $P(D)$. Итак, мы рассматриваем интеграл

$$M[1/P](z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{x^{z-I}}{P(x)} dx. \tag{1}$$

Напомним, что *срезкой* полинома $P = \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha x^\alpha$ в направлении ковектора $a \in \mathbb{R}^{n*}$ называют полином $P_a = \sum\limits_{\alpha \in \Delta^a} c_\alpha x^\alpha$, где Δ^a есть грань многогранника Ньютона полинома P в направлении a.

Определение 1. *Полином P называется квазиэллиптическим, если для любого ненулевого ковектора $a \in \mathbb{R}^{n*}$ его срезка P_a не обращается в нуль в торе $(\mathbb{R}\backslash 0)^n$. Если $P_a \neq 0$ в $\mathbb{R}_+^n$, то P называется квазиэллиптическим на $\mathbb{R}_+^n$.*

Теорема 1. Областью сходимости интеграла (1) является полоса $\Delta^\circ + i\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mu^{(k)} \in \mathbb{Z}^n$ внешние нормали к гиперграням многогранника Δ. Таким образом, $\Delta = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle \mu^{(k)}, u \rangle \leqslant \nu^{(k)}, k = 1, \ldots, N\}$.

Теорема 2. Пусть полином P является квазиэллиптическим на $\mathbb{R}_+^n$. Тогда в каждой трубчатой области $U_{[k]} + i\mathbb{R}^n$, где

$$U_{[k]} = \bigcap_{j \neq k} \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \left\langle \mu^{(j)}, u \right\rangle < \nu^{(j)} \right\}, \; k = 1, \ldots, N,$$

преобразование $M[1/P](z)$ представляется выражением

$$M_k(z) = e^{-i\pi \langle \mu^{(k)}, z \rangle} \Gamma(-\langle \mu^{(k)}, z \rangle) \Gamma(1 + \langle \mu^{(k)}, z \rangle) \Phi_k(z),$$

в котором

$$\Phi_k(z) = v.p. \int_{V_k} \mathrm{Res}\left(\frac{x^{z-I}}{P(x)}dx\right), \tag{2}$$

где $V_k \subset \{P=0\}$ – поверхность вещественной размерности $n-1$.

Ранее в [3] было доказано представление вида

$$M[1/P](z) = \Phi(z) \prod_{k=1}^{N} \Gamma\left(\nu^{(k)} - \left\langle \mu^{(k)}, z \right\rangle\right),$$

в котором $\Phi(z)$ есть целая функция. Согласно (2) $\Phi(z)$ — функция экспоненциального типа.

Результаты, представленные в докладе, получены совместно с И.А. Антиповой и Т.А. Ефимовым.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Литература

[1] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.* 94 (1955), 161–248.
[2] Т.О. Ермолаева, А.К. Цих, Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов, *Матем. сб.* (1996) № 187:9, 45-64.
[3] L. Nilsson, M. Passare, Mellin transform of multivariate rational functions, *Journal of Geometric Analysis* — 2013. — Vol. 23. — P. 24–46.

Области сходимости для случая двумерных гипергеометрических рядов

Черепанский А.Н. (Сибирский Федеральный Университет)
e-mail: alex.cherepanskiy@gmail.com

В докладе представлен результат исследования областей сходимости гипергеометрических рядов, представляющих решения для общего тетраномиального алгебраического уравнения

$$a_0 + a_l y^l + a_m y^m + a_n y^n = 0, \tag{1}$$

где l, m, n – взаимно просты и $l < m < n$.

Простыми мономиальными преобразованиями такое уравнение можно свести к приведенному виду, зафиксировав произвольную пару коэффициентов a_p, a_q. Решения уравнений тогда будут представляться в виде двойных степенных рядов гипергеометрического типа. Приведем описание областей сходимости D_{pq} рассматриваемых рядов в виде явных функциональных неравенств, с участием дискриминанта Δ полного уравнения (1).

Комбинаторное описание таких областей сходимости было дано в работе Пассаре-Циха [1].

Для приведенного уравнения обозначим дополнительную пару коэффициентов через a_t, a_s.

Теорема. [2] *За исключением областей D_{0l} и D_{mn} с нечетным l и четными m и n, области D_{pq} определяются одним или двумя неравенствами следующего типа:*

$$\Delta\Big|_{a_p=\pm 1, a_q=\pm 1}(\pm |a_s|, \pm |a_t|) \lesseqgtr 0.$$

Исследование выполнено в рамках гранта РНФ № 20-11-20117.

Литература

[1] Passare M., Tsikh A. K. Algebraic equations and hypergeometric series. The Legacy of N.H.Abel, Springer-Verlag, 2004. P. 653–672.
[2] Cherepanskiy A.N., Tsikh A.K. Convergence of two-dimensional heypergeometric series for algebraic functions. Integral Transforms and Special Functions, 2020.

L^p bounds for orthogonal polynomials and applications

Aptekarev A.I. (Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS)
e-mail: aptekaa@keldysh.ru

The classical Steklov problem deals with bounds of the Tchebyshëv norm $\|p_n\|^{\infty}(\Delta)$ for the polynomials $p_n(x)$, orthonormal with respect to the strictly positive wieght function $w \in L^1(\Delta)\bigcap S_\delta$, $S_\delta := \{w : w(x) \geq \delta > 0, x \in \Delta\}$. Modern applications (in particular, to the information entropy of quantum systems) motivate us to consider also the estimates of L^p norms: $\|p_n\|_w^p(\Delta)$ for the Steklov weight functions $w \in X(\Delta)\bigcap S_\delta$ from the various classes $X := L^\infty$, S — (the Szego class), BMO, A_p — (the Muckenhoupt class).

Our talk is based on the joint paper with Sergey Denisov and Michel Alexis [1]. Thus, we focus on $\|p_n\|_w^p$, $p > 2$, for $w \in A_2\bigcap S_\delta$.

References

[1] M. Alexis, A. Aptekarev and S. Denisov. Continuity of Weighted Operators, Muckenhoupt Ap Weights, and Steklov Problem for Orthogonal Polynomials. International Mathematics Research Notices, Vol. 2022, No. 8, pp. 5935–5972.

Local reconstruction by the spherical radon transform

Aramyan R.H. (Institute of Mathematics of NAS of RA)
e-mail: rafikaramyan@yahoo.com:

Thermoacoustic tomography (TAT) is a new safe method for Tomography. The mathematical base of TAT is the spherical Radon transform that maps a function to its integrals over spheres with the centers at detectors.

We denote by $\mathbf{R}^d$ the Euclidean d - dimensional space. Let $\mathbf{S}^{d-1}$ be the $d-1$ dimensional unit sphere in $\mathbf{R}^d$ with the center at the origin $O \in \mathbf{R}^d$ and by $S(P,t)$ we denote the sphere of radius $t > 0$ centered at $P \in \mathbf{R}^d$.
The main mathematical problem is to restore a real valued function f supported compactly in a region $G \subset \mathbf{R}^d$ from the mean value $Mf(P,t)$ of f over spheres $S(P,t)$ centered on some set L.
Exact inversion formulas for the spherical Radon transform are known for different geometries of detectors.
The article [2] applies the consistency method for the inversion of the spherical mean Radon transform in 3D with detectors on a plane. A new iterative inversion formula is found which gives an algorithm to recover an unknown function supported completely on one side of a plane from its spherical means over spheres centered on the plane. This formula has the benefit of being local in the following sense: for a fixed point (x,y,z), to reconstruct f(x,y,z) we need the values of the spherical mean of f with the centers in a neighborhood of the projection of (x,y,z) onto the detector's plane. The consistency method first was already applied in [1] to invert the spherical mean Radon transform in 2D with detectors on a line and a new iterative formula to recover an unknown function was found which has the benefit of being local.

References

[1] R. Aramyan. To local reconstruction from the spherical mean Radon transform, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 470 (2019) 102 - 117.
[2] R. Aramyan. Local reconstruction from the spherical Radon transform in 3D. arXiv preprint arXiv:2206.11605, 2022.

On Some Clifford-valued Bergman Type Operators

Avetisyan K.L. (Yerevan State University)
e-mail: avetkaren@ysu.am

Clifford-valued Bergman projections on the monogenic Bergman spaces over the real ball of $\mathbb{R}^n$ have been already studied in a paper of Brackx, Sommen and Van Acker [1], and developed then by Ren and Malonek [2]. We extend and generalize their results by considering more general Bergman operators and finding a necessary and sufficient condition for them to be bounded on weighted Lebesgue spaces of Clifford-valued functions. Sharp estimates for the weighted monogenic Bergman kernel are also given.

References

[1] F. Brackx, F. Sommen, N. Van Acker. Reproducing Bergman kernels in Clifford analysis. Complex Variables Theory Appl., 24: 3-4 (1994), 191–204.
[2] G. Ren, H.R. Malonek. Bergman projection in Clifford analysis. In: Clifford algebras (Cookeville, TN, 2002), Prog. Math. Phys., 34, Birkhäuser, Boston, MA (2004), 125–139.

Homogeneous operators and homogeneous integral operators

Avetisyan Zh.G. (University of Ghent, Belgium and RMC Rostov-on-Don, Russia)
e-mail: zhirayr.avetisyan@ugent.be
Karapetyants A.N. (RMC Rostov-on-Don, Russia)
e-mail: karapetyants@gmail.com

We introduce and study in a general setting the concept of homogeneity of an operator and, in particular, the notion of homogeneity of an integral operator. In the latter case, homogeneous kernels of such operators are also studied. The concept of homogeneity is associated with transformations of a measure - measure dilations, which are most natural in the context of our general research scheme. For the study of integral operators, the notions of weak and strong homogeneity of the kernel are introduced. The weak case is proved to generate a homogeneous operator in the sense of our definition, while the stronger condition corresponds to the most relevant specific examples - classes of homogeneous integral operators on various metric spaces, and allows us to obtain an explicit general form for the kernels of such operators. The examples - various specific cases - illustrate general statements and results given in the paper and at the same time are of interest in their own way.
The talk is based on the following paper:

[1] Z. Avetisyan, A. Karapetyants. Homogeneous operators and homogeneous integral operators, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2022.

System of variational inequalities with interconnected obstacles

Barkhudaryan R.H. (Yerevan State University, Yerevan, Armenia)
e-mail: barkhudaryan@ysu.am

We consider interconnected obstacle problems and develop a numerical approximation scheme for them. These problems are given as (weakly coupled) systems of variational inequalities and model optimal decision or switching under uncertainty. For example, these problems can be regarded as a system-version of the American-type option problem with multiple choices and switching between them. These systems can be written (for vector-valued functions $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_m)$) as

$$\min(-L^i u_i - f_i, \min_{j\neq i}(u_i - u_j + \psi_{ij})) = 0, \qquad u_i|_{\partial\Omega} = g_i,$$

for $i = 1, \ldots, m$ and with the compatibility condition on $\partial\Omega$, $g_i - g_j + \psi_{ij} \geq 0$, $i \neq j \geq 0$. One has also to assume certain no-gain on the loop condition (see (1)). A solution to the preceding system is understood in the viscosity sense (see [1,2,3]).

For the sake of simplicity, we consider the case where $L^i \equiv L^j$. Additionally, for the optimal switching problem to be well defined, we impose a non-profit loop condition; that is, for any $x \in \Omega$ and any loop $i_0, i_1, \ldots i_p = i_0$, where $2 \leq p \leq n$, we assume that

$$\sum_{j=1}^{p} \psi_{i_{j-1},i_j} \geq 0. \tag{1}$$

We examine the above optimal switching problem from different perspectives focusing primarily on an iterative method and a monotone scheme. We begin by addressing the theory of viscosity solutions for these systems and show the equivalence between several definitions. Next, we consider a monotone scheme to study the existence of solutions and for numerical computations. Subsequently, we discuss an application in the theory of financial bubbles.

References

[1] R. Barkhudaryan, D.A. Gomes, M. Salehi, H. Shahgholian, System of variational inequalities with interconnected obstacles, Applicable Analysis, 101, (2), pp. 605-628, (2022).
[2] R. Barkhudaryan, M. Juras, M. Salehi, Iterative scheme for an elliptic non-local free boundary problem, Applicable Analysis, 95, (12), pp. 2794-2806, (2016).
[3] A. Arakelyan, R. Barkhudaryan, H. Shahgholian and M. Salehi, Numerical treatment to a non-local parabolic free boundary problem arising in financial bubbles, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 45, (1), pp. 59-73, (2019)

Gabor frames for rational functions

Belov Yu.S. (Saint-Petersburg State University)
e-mail: j_ b_juri_ belov@mail.ru

Let g be a function in $L^2(\mathbb{R})$. By $\mathcal{G}_\Lambda$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ we denote the system of time-frequency shifts of g,

$$\mathcal{G}_\Lambda = \{e^{2\pi i\omega x} g(x-t)\}_{(t,\omega)\in\Lambda}.$$

A typical model set Λ is the rectangular lattice $\Lambda_{\alpha,\beta} := \alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$ and one of the basic problems of the Gabor analysis is the description of the frame set of g i.e., all pairs α, β such that $G_{\Lambda_{\alpha,\beta}}$ is a frame in $L^2(\mathbb{R})$.

It follows from the general theory that $\alpha\beta \leq 1$ is a necessary condition (we assume $\alpha, \beta > 0$, of course). Do all such α, β belong to the frame set of g?

Up to 2011 only few such functions g (up to translation, modulation, dilation and Fourier transform) were known, see [3,6]. In 2011 K. Gröchenig and J. Stöckler extended this class by including the totally positive functions of finite type (uncountable family yet depending on finite number of parameters), see [5], and later added the Gaussian finite type totally positive functions, see [4]. We suggest another approach to the problem and prove that all Herglotz rational functions with imaginary poles also belong to this class, [1, Theorem 1.1]. This approach also gives new results for general rational functions. In particular, we are able to confirm Daubechies conjecture for rational functions and irrational densities and prove some results about irregular sampling, [2].

References

[1] Y. Belov, A. Kulikov, Y. Lyubarskii, Gabor frames for rational functions, to appear in Inventiones mathematicae, https://arxiv.org/abs/2103.08959;
[2] Y. Belov, A. Kulikov, Y. Lyubarskii, Irregular Gabor frames of Cauchy kernels, Applied and Computational Harmonic Analysis 57, March 2022, Pages 101–104;
[3] X. Dau, Q. Sun, The abc-problem for Gabor systems, Memoirs of the American Mathematical Society, 244, 1152, (2016);
[4] K. Gröchenig, J.L. Romero, J. Stöckler, Sampling theorems for shift-invariant spaces, Gabor frames, and totally positive functions, Inventiones mathematicae, 211 (3), 1119–1148, (2016);
[5] K. Gröchenig, J. Stöckler, Gabor frames and totally positive functions, Duke Mathematical Journal, 162 (6), 1003–1031, (2011);
[6] K. Seip, Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space, I, J. Reine Angew. Math. 429 (1992) 91–106.

About estimates of Lebesque constants for Hölder spaces

Berezhnoi E.I. (Yaroslavl State University)
e-mail:ber@uniyar.ac.ru

We set $T = [0, 2\pi]$, and, as usual, in the periodic case points 0 and 2π we will identify.

Let $S(\mu)$ be the space of Lebesgue measurable functions $f : T \to R$, $\chi(D)$ be the characteristic function of D. Along with Lebesgue spaces $L^p \equiv L^p(T)$, $p \in [1, \infty]$ are often used in harmonic analysis ideal and symmetric spaces.

The Banach space of measurable functions X on T is said to be ideal if $f \in X$, $g \in S(\mu)$, and inequalities $|g(t)| \leq |f(t)|$ hold for almost all $t \in T$ we have $g \in X$ and $\|g|X\| \leq \|f|X\|$.

Two functions $f, g \in S(\mu)$ are said to be equimeasurable if relations $\mu\{t \in \Omega : |f(t)| \leq \lambda\} = \mu\{t \in T : |g(t)| \leq \lambda\} < \infty$ hold for all $\lambda > 0$. For each function $f \in S(T)$ denote by f^* the nonincreasing function equimeasurable with $|f|$. A Banach ideal space X is said to be symmetric if norms of equimeasurable functions are the same.

For every ideal space X, the dual ideal space $X^{'}$ is well defined: it consists of functionals, continuous on X and representable in the integral form with finite norm

$$\|g|X^{'}\| = \sup\{\int_T g(t)f(t)dt : \|f|X\| \leq 1\}.$$

Below we give several examples of symmetric spaces.

Let $h(.)$ be an N-function. The Orlicz space L_h consists of functions with finite norm

$$\|f|L_h\| = \inf\{\lambda > 0 : \int_0^{2\pi} h(\frac{|f(t)|}{\lambda})dt \leq 1\}.$$

Suppose given a positive concave function $\psi(t)$ such that $\psi(0)=0$. The Lorentz space $\Lambda(\psi)$ (Marcinkiewicz space $M(\psi)$) consists of all functions with finite norm

$$\|f|\Lambda(\psi)\| = \int_0^{2\pi} f^*(t)d\psi(t), \quad (\|f|M(\psi)\| = \sup_{t\in(0,2\pi]} \frac{\psi(t)}{t}\int_0^t f^*(t)dt \ ).$$

For each $f: T\to R$ with formulas

$$\Delta_1(f(t),\tau) = f(t+\tau)-f(t), \quad \Delta_k(f(t),\tau) = \Delta(\Delta_{k-1}(f(t),\tau),\tau)$$

we define differences of the k-th order f with step τ at the point t. Let X be a symmetric space on T and let ω be some modulus of continuity of the k-th order. How usually, via $H_k^\omega(X)$ denote the space of functions in which the norm is given by the equality $\|f|H_k^\omega(X)\| = \|f|C(T)\| + \sup_{\tau>0}\frac{\|\Delta_k(f(.),\tau)|X\|}{\omega(\tau)}$.
Substituting the spaces L^p, L_h, $\Lambda(\psi)$, $M(\psi)$ instead of X, we obtain Hölder spaces with integral smoothness calculated in the corresponding space.

Below we will consider only the case $k=2$. No changes in formulations of assertions of the report for other k are required.

Let ω a modulus of continuity of the 2-th order, a symmetric space X on T, from which the space $H_2^\omega(X)$ is constructed, be given. We fix $n\in N$. Let's put

$$\omega(\frac{\pi}{(n+0,5)}) = \omega_n, \ D_n(t) = \frac{\sin(n+0.5)t}{\sin(0.5)t}, \ (t\in T, \ n\in N).$$

Fix points $t_k = \frac{k\pi}{(n+0,5)}$, $\quad k=0,1,2,...,2n+1$, and for $k=0,1,2,...,2n$ we form gaps $U_k = [t_k+\frac{1}{4}t_1, t_{k+1}-\frac{1}{4}t_1]$.

We define Lebesgue constants for the space $H_2^\omega(X)$ by formulas:

$$L_n(H_2^\omega(X)) = \sup\{\int_T f(t)D_n(t)dt : \|f|H_2^\omega(X)\|\le 1\}. \tag{1}$$

Theorem 1. *Let $L_n(H_2^\omega(X))$ be defined by the equality (1).*
Then there is a positive constant c_0 such that for all $n\in N$ inequalities hold

$$c_0^{-1}\omega(\frac{\pi}{n})n\|\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\chi(U_k)|X'\| \le L_n(H_2^\omega(X)) \le c_0\omega(\frac{\pi}{n})n\|\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\chi(U_k)|X'\|.$$

Let us illustrate the obtained results with examples.

Theorem 2. *Let $p\in[1,\infty]$. Then*

$$L_n(H_2^\omega(L^p)) \sim c(p)\begin{cases} \omega(\frac{\pi}{n})n^{1/p}, & \text{if } 1\le p<\infty; \\ \omega(\frac{\pi}{n}) \ \ln n, & \text{if } p=\infty. \end{cases}$$

Let be a N -function h, $h^*(t) = \inf_{s>0}\{ts-h(s)\}$, $(t\in R_+)$. Then

$$L_n(H_2^\omega(L_h)) \sim c(h)\omega(\frac{\pi}{n})n\inf\{\lambda>0 : \sum_{k=1}^n h^*(\frac{1}{k\lambda}) \le \frac{2n+1}{\pi}\}.$$

Let be a positive concave function $\psi : [0, 2\pi] \to R_+$, $\psi(0) = 0$. Then

$$L_n(H_2^\omega(\Lambda(\psi))) \sim \omega(\frac{\pi}{n})n \sup_{k=1,2,\dots,n} \frac{\psi(t_1 k)\ln k}{k};$$

$$L_n(H_2^\omega(M(\psi))) \sim \omega(\frac{\pi}{n}) \sum_{k=1}^{n} \{\frac{1}{\psi(kt_1)} - \frac{k-1}{k}\frac{1}{\psi((k-1)t_1)}\}.$$

From **Theorems 1 − 2** in a standard way one can obtain criteria for the convergence of Fourier series for spaces $H_2^\omega(X)$, which refines the Dini criterion.

Szegő measures and vibration of Krein strings

Bessonov R.V. (St. Petersburg State University and PDMI RAS)
e-mail: bessonov@pdmi.ras.ru

We give a dynamical characterization of Szegő measures on the real line. Szegő condition for a measure $\mu = w\,dx + \mu_s$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(x)}{1+x^2}\,dx > -\infty,$$

is proved to be equivalent to a stable propagation of waves on an associated Krein string. Related results in scattering theory of Dirac operators will be also discussed. Joint work with Sergey Denisov (University of Wisconsin-Madison).

The author is supported by the Russian Science Foundation grant 19-71-30002.

Electrical filters and multiband approximation

Bogatyrev A.B. (Marchuk Inst. for Numerical Math., Moscow State Uni.,
Moscow Cent. for Fund. and Appl. Math.)
e-mail: ab.bogatyrev@gmail.com

Optimization problem for an electrical filter is a multiband generalization of the fourth Zolotarev problem about the best uniform approximation of the Sign function [1]. The problem attracted attention of many prominent mathematicians. One of the approaches to the practical solution of the problem is to use an analytic formula (Ansatz) with few unknown parameters [2]. A survey of the recent developments in the topic will be given [3].

References

[1] E.I. Zolotarev. Zapiski Sankt-Peterburgskoi akad. nauk, 30:5 (1877).
[2] A.B. Bogatyrev. Sb. Math., 201:11 (2010).
[3] A.B. Bogatyrev. Proceedings of AMS, 149:7 (2021).

Capacities related with second-order elliptic equations

Fedorovskiy K.Yu. (Lomonosov Moscow State Univ. & St. Petersburg State Univ.)
e-mail: kfedorovs@yandex.ru

In the talk we plan to consider geometric and metrical properties of B- and C-capacities (capacities defined in classes of bounded and continuous functions) related with homogeneous second-order elliptic equations with constant complex coefficients. These capacities appear quite natural in problems on uniform approximation of functions on compact sets in $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, by solutions of the equations under consideration. In the case of harmonic functions (when the operator under consideration is the Laplace operator), the properties of such capacities are well known and they were deeply studied in classical works on potential theory at the first half of the 20th century. In the general case, these capacities are poor studied up to now. We plan to show how (in which approximation problems) the capacities under discussion arise, to state the main problems related with these capacities and to discuss approaches to solve them and principal issues and difficulties differ these capacities from the harmonic ones. Next, for a wide class of equations under consideration we plan to present new two-side estimates of B_+- and C_+-capacities (B- and C-capacities determined by potentials of positive measures) via harmonic capacities in the same dimension. The constructions are based on relatively simple explicit formulae for fundamental solutions of equations under consideration, which we also plan to present and discuss.

The talk is based on the joint work in progress with Petr Paramonov (Lomonosov Moscow State University).

The work presented in this talk is carried out in frameworks of the research project supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-11-00071).

On the growth of symbols of degenerate operators

Ghazaryan H.G. (Institute of Mathematics of NAS RA,
Russian-Armenian University)
e-mail: haikghazaryan@mail.ru

In connection with a study numerous problems of the theory of linear differential equations, the quation naturally arises of obtaining the conditions under which symbol (caracteristic polynomial) $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ of the differential operator $P(D) = P(D_1, ..., D_n)$ increases at infinity as the modulus of its argument increases infinitely. We denote by I_n the set of such polynomials.

Elliptic, semielliptic and hypoelliptic polynomials increase at infinity ([1]), while hyperbolic by Gȧrding (consequently hyperbolic by Petrovsky) ([2], [3] or [1]) or almost hypoelliptic polynomials ([6]) can remain bounded under infinite argument increase. At the same time, it turns out that to check the hypoelliptisity of an differential operator $P(D)$ the main difficulty lies precisely in finding algebraic conditions for checking that the symbol $P(\xi)$ of the operator $P(D)$ increases infinitely at infinity, i.e. $P \in I_n$.

Let $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ be a linear differential operator with constant coefficients and $(P) = \{\alpha : \gamma_\alpha \neq 0\}$. The minimal convex hhull of the set $(P) \cup \{0\}$ is called the Newton polyhedron of operator $P(D)$ (polynomial $P(\xi)$) and is denoted by $\Re(P)$. A polyhedron $\Re$ is said to be **complete** ([4]), if $\Re$ has a vertex at the origin and one vertex (distinct from the origin) on each coordinate axis of R^n. The $k-$dimensional fases of a polyhedron $\Re$ are denoted by $\Re_i^k$ $(i = 1, ..., M_k,\ k = 0, 1, ..., n-1)$. The face $\Re_i^k (1 \leq i \leq M_k, 0 \leq k \leq n-1)$ is said to be principal ([4]) if among the outward normals of this face there is one with at list one positive component.

Let $\Re = \Re(P)$ be Newton polyhedron of a polynomial $P(\xi)$, $\Re_i^k (1 \leq i \leq M_k, 0, \leq k \leq n-1)$ be its principal faces and $P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ be subpolynomial corresponding to the face $\Re_i^k$. The face $\Re_i^k$ is called nondegenerate ([4], [5]) if $P^{i,k}(\xi) \neq 0$ for all $\xi \in R^n : \xi_1 ... \xi_n \neq 0$. Otherwise, the face called degenerate. Let $\Gamma := \Re_{i_0}^{k_0}$ $(1 \leq i_0 \leq M_k,\ 0, \leq k_0 \leq n-1)$ be some principal degenerate face of the Newton polyhedron of a polynomial $P(\xi)$. Denote by $\Lambda(\Gamma)$ the set of all outward normals Γ and by $\sum(\Gamma)$ the set of points η for which $P^{i_0,k_0}(\eta) = 0$. Let us represent the polynomial P in terms of the vector $\lambda \in \sum(\Gamma)$ as the sum of $\lambda-$ homogeneous polynomials

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{N(\lambda)} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{N(\lambda)} \sum_{(\lambda,\ \alpha) = d_k(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

where $P_0(\xi) \equiv P^{i_0,k_0}(\xi)$ and $P_j(\xi) = P_j(\xi, \lambda)$ are $\lambda-$homogeneous $(j = 0, 1, ..., N(\lambda))$, $d_0(\lambda) > d_1(\lambda) > ... > d_N(\lambda) \geq 0$.

Also denote by $J(\Gamma, \eta, \lambda)$ the smallest of the numbers $k : 1 \leq k \leq M$ for which $P_k(\eta) \neq 0$.

When a polynomial P is degenerate the partial solution of problem $P \in I_n$ gives by following statement

Theorem. *Let $\Re = \Re(P)$ be the complete Newton polyhedron of polynomial P : $P(\xi) > 0\ \forall \xi \in R^n$. Let all the principal faces $\Re_i^k$ $(i = 1, ..., M_k, k = 0, 1, ..., n-1)$ of $\Re$ eqcept for principal face $\Gamma \equiv \Re_{i_0}^{k_0}$ $(1 \leq i_0 \leq M_k, 1 \leq k_0 \leq n-1)$ be nondegenerate and face Γ be degenerate. Let $J(\Gamma, \eta, \lambda) = 1$ for all $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ and $\eta \in \Sigma(\Gamma)$. Then $P \in I_n$ if and only if $d_1(\Gamma, \eta, \lambda) > 0$ and $P_1(\eta) > 0$ for all $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ and $\eta \in \Sigma(\Gamma)$.*

References

[1] L. Hörmander. The Analysis of linear Partial Differential Operators. v.1, v.2. Springer - Verlag, (1983).

[2] L. Gårding. Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. Acta Math. 85, (1951), 1–62.

[3] I.G. Petrovskii. Über das Cauchysche Problem für system von partiellen Differentialgleichungen. Math. Sb., 2:44, (1937), 815–870.

[4] V.P. Mikhailov. The behavior at infinity of a class of polynomials. Proc. Steklov Inst. Math., 91, (1967), 65–86.

[5] L.R. Volevich, S.G. Gindikin. On a class of hypoelliptic operators. Math. Sbornik, 75:3, (1968), 400 –416. (in Russian). English Trans. Math. USSR Sb. 4, (1968), 369 – 384.
[6] G.G. Kazaryan. On almost hypoelliptic polynomials. Doklady Ross. Acad. Nauk, 398:6, (2004), 701-703.

On the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 6$

Hakopian H.A. (Yerevan State University)
e-mail: hakop@ysu.am
Vardanyan G.K. (Yerevan State University)
e-mail: gagik.vardanyan2000@gmail.com
Vardanyan N.K. (Yerevan State University)
e-mail: vardanyan.navasard@gmail.com

A two-dimensional n-correct set is a set of nodes admitting unique bivariate interpolation with polynomials of total degree at most n. We are interested in correct sets GC_n with the property that all fundamental polynomials are products of linear factors. In 1982, M. Gasca and J. I. Maeztu conjectured that any GC_n set necessarily contains $n+1$ collinear nodes [1].

So far, the Gasca-Maeztu conjecture has been confirmed to be true only for $n \leq 5$. The case $n = 2$ is trivial. The case $n = 3$ was established by M. Gasca and J.I. Maeztu in [1]. The case $n = 4$ was proved by J.R. Busch [2]. The case $n = 5$ was proved by H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann [3]. Recently G. Vardanyan provided a simpler and shorter proof for this case [4].

In this paper [5], we make a step in proving the Gasca-Maeztu Conjecture for $n = 6$. Let us mention that the analogue of this step was crucial in the proof of the case $n = 5$ (see [3], Prop. 3.12, [4], Prop. 2.8). More precisely, we prove the following

Theorem. *Assume that $\mathcal{X}$ is a GC_6 set with no line passing through seven nodes. Then for no node in $\mathcal{X}$ the fundamental polynomial is a product of linear factors three of which vanish at* $18\ (= 6 + 6 + 6)$ *nodes of* $\mathcal{X}$.

References

[1] M. Gasca and J.I. Maeztu. On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$, Numer. Math. **39** (1982) 1-14.
[2] J.R. Busch. A note on Lagrange interpolation in $\mathbb{R}^2$, Rev. Un. Mat. Argentina **36** (1990) 33-38.
[3] H. Hakopian, K. Jetter, and G. Zimmermann. The Gasca-Maeztu conjecture for $n = 5$, Numer. Math., **127** (2014) 685-713.
[4] G. Vardanyan, A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 5$, J. Cont. Math. Anal., **57** (2022) 183-190.
[5] H. Hakopian, G. Vardanyan, and N. Vardanyan. On the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 6$. Submitted to J. Cont. Math. Anal., 1-25.

About some properties of the kernels of transformation operators for the Sturm-Liouville and dirac equations

Harutyunyan T.N. (Yerevan State University)
e-mail: hartigr@yahoo.co.uk

We obtain an analogue of the Gelfand-Levitan equation for the kernel of transformation operator, generated by Sturm-Liouville equation (with real summable potential) with Dirichlet initial condition. The existence and uniqueness of the solution of this integral equation is proved. Besides, the representation of this solution in the form of a series is obtained.

For the matrix- kernel of the transformation operator, generated by Dirac equation, and for the matrix-kernel of the inverse operator the representation through a basis, consisting of the identity matrix and three Pauli matrix is obtained.

On weighted solutions of $\overline{\partial}$-equation in the complex plane $\mathbb{C}$

Hayrapetyan F.V. (Yerevan State University)
e-mail: feliks.hayrapetyan1995@gmail.com
Karapetyan A.H. (NAS RA, Institute of Mathematics)
e-mail: armankar2005@rambler.ru

In the papers [1, 2] (see also [3]) the spaces $L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbb{C})$ of complex-valued measurable functions f with finite norm

$$\left(\iint\limits_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\sigma|w|^\rho}|w|^\gamma dm(w)\right)^{1/p}$$

were introduced, where $1 < p < \infty$, $\rho, \sigma > 0$ and $\gamma > -2$. Moreover, for the subspaces $H^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbb{C}) \equiv H(\mathbb{C}) \cap L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbb{C})$ of entire functions the following integral representation was established:

Theorem 1. *If $f \in H^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbb{C})$, then*

$$f(z) = c \cdot \iint\limits_{\mathbb{C}} f(w) \cdot E_{\rho/2}\left(\sigma^{2/\rho} z\overline{w}; \mu\right) e^{-\sigma|w|^\rho}|w|^\gamma dm(w), \quad z \in \mathbb{C}, \qquad (1)$$

where $\mu = \frac{\gamma+2}{\rho}$, $c = \frac{\rho\cdot\sigma^\mu}{2\pi}$ and

$$E_{\rho/2}(\omega, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{\Gamma(\mu + \frac{2k}{\rho})}, \quad \omega \in \mathbb{C},$$

is well-known Mittag-Leffler type entire function.

In [4] an analogue of this result (Pompeiju-type formula) was obtained for C^1-functions in $\mathbb{C}$, satisfying certain growth conditions at infinity:

Theorem 2. *Assume that a function $f \in C^1(\mathbb{C})$ satisfies the following conditions:*

- *for some* $\varepsilon \in (0,1)$

$$f(w) = O(e^{\sigma(1-\varepsilon)|w|^\rho}), \quad when \quad |w| \to \infty;$$

- *for some* $\varepsilon \in (0,1)$

$$\frac{\partial f(w)}{\partial \overline{w}} = O(e^{\sigma(1-\varepsilon)|w|^\rho}), \quad when \quad |w| \to \infty.$$

Then we have

$$f(z) = c \cdot \iint_{\mathbb{C}} f(w) \cdot E_{\rho/2}\left(\sigma^{2/\rho} z\overline{w}; \mu\right) e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma dm(w)$$

$$-\frac{1}{\pi} \cdot \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f(w)}{\partial \overline{w}}}{w - z} \cdot \Psi(z,w) dm(w), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

where the kernel Ψ *is defined as follows:*

$$\Psi(z,w) = 1 + \frac{\rho \cdot \sigma^\mu (z-w)}{w} \int_0^{|w|} e^{-\sigma \cdot r^\rho} \cdot r^{\gamma+1} E_{\rho/2}\left(\sigma^{2/\rho} r^2 \frac{z}{w}; \mu\right) dr. \tag{3}$$

It is natural to use the second term in (2) as a base to write out an explicit solution formula for $\overline{\partial}$-equation in the whole complex plane $\mathbb{C}$. In other words the following result is established:

Theorem 3. *Assume that* $g \in C^k(\mathbb{C})$, $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ *and for some* $\varepsilon \in (0,1)$

$$g(w) = O(e^{\sigma(1-\varepsilon)|w|^\rho}), \quad when \quad |w| \to \infty.$$

If we put

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \cdot \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w - z} \cdot \Psi(z,w) dm(w), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

then $f \in C^k(\mathbb{C})$ *and*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = g(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

References

[1] M.M. Djrbashian. On representability of some classes of entire functions. Dokl. Akad. Nauk ArmSSR, 7:5 (1947), 193–197 (in Russian).

[2] M.M. Djrbashian. On the problem of representability of analitic functions. Soobshch. Inst. Matem. Mekh. Akad. Nauk ArmSSR, 2 (1948), 3–40 (in Russian).

[3] M.M. Djrbashian, A.H. Karapetyan. Integral representations and uniqueness theoremsfor entire functions in several variables. J. Contemp. Math. Analysis, 26:1 (1991), 3–19 (in Russian).

[4] M.M. Djrbashian. Weighted integral representations of smooth or holomorphic functions in the unit disc and in the complex plance. J. Contemp. Math. Analysis, 28:4 (1993), 1–27.

Probability inequalities for multiplicative sequences of random variables

Karagulyan G.A. (Institute of Mathematics of NAS of RA)
e-mail: g.karagulyan@gmail.com

A sequence of bounded random variables ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$ (finite or infinite) is said to be multiplicative if the equality

$$\mathbf{E}\left[\phi_{n_1}\phi_{n_2}\ldots\phi_{n_\nu}\right] = 0 \tag{1}$$

holds for all $\nu \geq 1$ and all possible choices of indexes $n_1 < n_2 < \ldots < n_\nu$. Well-known examples of multiplicative sequences are mean zero independent random variables and more general, the martingale-differences, since the condition

$$\mathbf{E}(\phi_n|\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}) = 0$$

in the definition of the martingale-difference implies (1). The trigonometric sequences $\{\sin(2n_k\pi x)\}$ with integer n_k, satisfying $n_{k+1} \geq 2n_k$, are known to be non-martingale examples of multiplicative systems on $[0, 1]$.

The multiplicative systems were introduced by Alexits (see [1]), who also proved that the uniformly bounded multiplicative systems are convergence systems. The multiplicative systems were considered also in the context of central limit theorems and law of iterated logarithm (see for example [2], [3]). Such properties of multiplicative systems are closely related to Khintchine type inequalities. Let r_n, $n = 1, 2, \ldots$, be the Rademacher independent random variables. The classical result of Khintchine states that for each $p, q > 0$ there exists a constant $c_{p,q}$ such that the inequality

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n x_k r_k(t)\right|^p\right)^{1/p} \leq c_{p,q}\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n x_k r_k(t)\right|^q\right)^{1/q} \tag{2}$$

holds for any choices of real coefficients x_k. Kahane [4] generalized Khintchine's inequality (2), taking coefficients x_k from a Banach space F and replacing in (2) the absolute value by the norm of F.

The classical definition of multiplicative system requires (1) for all subsets $\{n_1, \ldots, n_\nu\} \subset \mathbb{Z}$. We say $\phi = \{\phi_k\}$ is l-multiplicative if relation (1) holds for all nonempty subsets of cardinality $\leq l$. Likewise, ϕ is called l-independent if for any collection of l variables of the system ϕ is stochastically independent. We consider systems of bounded random variables $\phi = \{\phi_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ satisfying

$$A_k \leq \phi_k \leq B_k, \text{ where } A_k < 0 < B_k. \tag{3}$$

Setting $C_k = \min\{-A_k, B_k\}$, we define the l-multiplicative error of ϕ to be the quantity

$$\mu_l(\phi) = \sum_{1\le\#\{n_1,n_2,\ldots,n_\nu\}\le l} \frac{1}{C_{n_1}C_{n_2}\ldots C_{n_\nu}} \left|\mathbf{E}[\phi_{n_1}\phi_{n_2}\ldots\phi_{n_\nu}]\right|.$$

Our main result is the following inequality.

Theorem. *Let $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ be a convex function and $\phi = \{\phi_k : k = 1,2,\ldots,n\}$ be a of random variables, satisfying (3). Then it holds the inequality*

$$\boldsymbol{E}[G(\phi_1,\ldots,\phi_n)] \le (1+\mu_l(\phi))\boldsymbol{E}[G(\xi_1,\ldots,\xi_n)],$$

where ξ_k, $k = 1,2,\ldots,n$ are $\{A_k, B_k\}$- valued mean zero l-independent random variables.

Corollary 1. *Let $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ be a convex function. If $\phi = \{\phi_k : k = 1,2,\ldots,n\}$, is a l-multiplicative system of random variables, satisfying $\|\phi_k\|_\infty \le 1$, then we have*

$$\boldsymbol{E}[G(\phi_1,\ldots,\phi_n)] \le \boldsymbol{E}[G(r_1,\ldots,r_n)],$$

where r_k, $k = 1,2,\ldots,n$, are Rademacher l-independent random variables.

Corollary 2. *Let X be a Banach space, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ be a convex function and $\phi = \{\phi_k : k = 1,2,\ldots\}$ be a full-multiplicative system of random variables, satisfying $\|\phi_k\|_\infty \le 1$. Then for any finite vector sequence $\{x_k\} \subset X$ it holds the bound*

$$\boldsymbol{E}\left[\Phi\left(\max_n\left\|\sum_{k=1}^n x_k\phi_k\right\|\right)\right] \le \boldsymbol{E}\left[\Phi\left(\max_n\left\|\sum_{k=1}^n x_k r_k\right\|\right)\right],$$

where r_k are Rademacher independent random variables.

Different applications and extensions of these inequalities will also be considered. The results of the present report are continuation of author's investigation of [5].

References

[1] G. Alexits. Convergence problems of orthogonal series, Pergamon Press, New York-Oxford-Paris, 1961. 1988.

[2] I. Berkes. On Strassen's version of the loglog law for multiplicative systems. Studia Sci. Math. Hungar., 8 (1973), 425–431.

[3] K. Fukuyama. On Strassen's version of the loglog law for multiplicative systems. Probab. Theory Related Fields, 89(1991), 159–179.

[4] J.-P. Kahane. Sur les sommes vectorielles $\sum \pm u_n$. C. R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964), 2577–2580.

[5] G.A. Karagulyan. Probability inequalities for multiplicative sequences of random variables. Proc. Amer. Math. Soc., 9 (2021), 3725–3737.

On extension of weighted spaces of holomorphic functions in the unit bidisc to the unit matrix disc

Karapetyan A.H. (Institute of Mathematics, NAS of Armenia)
e-mail: armankar2005@rambler.ru

Let $m, n \geq 1$ be arbitrary natural numbers. Denote by $M_{mn} \cong C^{mn}$ the space of all complex $m \times n-$ matrices. The domain

$$R_{mn} = \{\zeta \in M_{mn} : I^m - \zeta \cdot \zeta^* \quad is \quad positive \quad definite\} \tag{1}$$

is called **Cartan classical domain of type I** or **unit matrix disc**. For $0 < p < \infty$ and $t > -1$ denote by $H_t^p(R_{mn})$ the space of all holomorphic functions $f(\zeta)$, $\zeta \in R_{mn}$, with finite "norm"

$$||f||_{p,t}^p := \int_{R_{mn}} |f(\zeta)|^p \cdot [\det(I^m - \zeta \cdot \zeta^*)]^t d\mu_{mn}(\zeta). \tag{2}$$

In [1] the following problem was investigated: what type of function spaces in the unit bidisc U_2 are obtained when the spaces $H_t^p(R_{2n})$ ($0 < p < \infty$ and $t \geq 0$) are **restricted** (so-called diagonal mapping) to the "diagonal" of the domain R_{2n}.

One of possible solutions of above-mentioned problem was given in [1]:

Theorem 1. *Assume that $n \geq 2$, a function f is holomorphic in R_{2n} and $\tilde{f}(a, d)$ is a restriction of f to the unit bidisc U_2. Then for arbitrary $p > 0$ and $t \geq 0$ we have:*

$$\rangle\rangle \tilde{f} \langle\langle_{p,t,n}^p \leq 4 \cdot \left(\frac{(t+1)(t+2)}{\pi^2} \right)^{n-1} \cdot ||f||_{p,t}^p, \tag{3}$$

where the "norm" $\rangle\rangle \bullet \langle\langle$ is defined as follows:

$$\rangle\rangle \tilde{f} \langle\langle_{p,t,n}^p := \int_{|d| \leq |a| < 1} |\tilde{f}(a,d)|^p \cdot (1 - |a|^2)^{t+n+1} \cdot (1 - |d|^2)^{t+n-1} dm(a) dm(d) +$$

$$+ \int_{|a| \leq |d| < 1} |\tilde{f}(a,d)|^p \cdot (1 - |a|^2)^{t+n-1} \cdot (1 - |d|^2)^{t+n+1} dm(a) dm(d). \tag{4}$$

In the present report an inverse problem is investigated: what type of function spaces are obtained when weighted L^p-spaces (generated by the norm of the type (4)) of holomorphic functions in the unit bidisc U_2 are **extended** to the domain R_{n2}. The mentioned **extension** is understood as follows:

Definition. *Let $n \geq 2$ be an arbitrary natural number. For a function $f(a, d)$ given in the domain U_2 , put*

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{23} & \cdots & \zeta_{2n} \end{pmatrix} \equiv f(\zeta_{11}, \zeta_{22}) \tag{5}$$

which is defined in R_{2n} and called an **extension** *of the function f to this domain.*

Theorem 2. *Assume that $n \geq 2$ is a natural number, $0 < p < \infty, t \geq 0$. For arbitrary holomorphic function $f(a,d)$ in the unit bidisc U_2 put*

$$\S f\S^p_{p,t,n} := \int_{0<|d|<|a|<1} |f(a,d)|^p \cdot (1-|a|^2)^{t+n} \cdot (1-|d|^2)^{t+n-1} dm(a)dm(d) +$$

$$+ \int_{0<|a|<|d|<1} |f(a,d)|^p \cdot (1-|a|^2)^{t+n-1} \cdot (1-|d|^2)^{t+n} dm(a)dm(d). \qquad (6)$$

If $\hat{f}$ is the extension of function f to R_{2n} in the sense of (5), then

$$||\hat{f}||^p_{p,t} \quad \leq \quad \S f\S^p_{p,t,n} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi^2 + \frac{\pi^2 \cdot 2^{2t+4}}{(t+1)(t+2)}\right) \cdot \left(\frac{\pi^2}{(t+1)(t+2)}\right)^{n-2}. \qquad (7)$$

References

[1] A.H. Karapetyan. On restriction of weighted spaces of holomorphic functions in the unit matrix disc to the unit bidisc. Lobachevskii J. Math., 40:8 (2019), 1084–1089.

Hausdorff-Berezin and Hausdorff-Zhu integral operators in complex analysis

Karapetyants A.N. (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)
e-mail:karapetyants@gmail.com

We will discuss two classes of complex analysis operators that are very similar in definition, but the operators of these classes have completely different characteristics (properties).

In recent papers, some classes of operators in complex analysis have been studied, which, among other, contain classical operators of mathematical physics. For example, in [1] we introduce and study a class of Hausdorff-Berezin operators on the unit disc based on Haar measure. This class includes the Berezin transform itself, as well as some other classical operators, such as the invariant Green's potential. We discuss certain algebraic properties of these operators and obtain boundedness conditions for them, and discuss questions of approximations of functions by the constructions in the form of Hausdorff-Berezin operators (see also [2]).

A related new class of operators, called the Hausdoff-Zhu operators by the authors, also appears naturally in problems of spectral representations (we refer to [3]). Conditions of boundedness, compactness, and nuclearity of this operators are given. A special attention is paid to particular but important cases of analytic symbols and radial symbols. In particular it is shown that Hausdorff-Zhu operators with analytic symbols are at most two-dimensional and their spectra are computed.

We will partially touch upon the more general properties of homogeneity or invariance for operators in these classes, by analogy with studies in [2,4].

References

[1] A. Karapetyants, S. Samko, and K. Zhu, A Class of Hausdorff-Berezin Operators on the Unit Disc. Complex Anal. Oper. Theory 13, 3853–3870 (2019).
[2] A. Karapetyants, E.Liflyand. Defining Hausdorff operators on Euclidean spaces. Math. Meth. Appl. Sci. (2020); 1-12.
[3] A. Karapetyants, A. Mirotin.A class of Hausdorff-Zhu operators. Analysis and Mathematical Physics 12(3) 2022
[4] A. Karapetyants, Z. Avetisyan, Homogeneous operators and homogeneous integral operators. Math. Meth. Appl. Sci. 2022

On continuous selections of set-valued mappings in optimization problems

Khachatryan R.A. (Yerevan State University)
e-mail: khrafik@ysu.am

In this paper we consider a parametric problem of the form

$$f(x,y) \to \inf,\ x \in M,$$

where M is a convex closed subset of a Hilbert or uniformly convex space X and y is a parameter belonging to a topological space Y.
The problem of the continuity of the set-valued mapping a_ϵ is considered. By using the linearization and gradient projection methods we study the problem of the existence of continuous selections of the set-valued mapping

$$a_\epsilon(y) = \{x \in M / f(x,y) \leq \inf_{x\in M} f(x,y) + \epsilon\}$$

where $\epsilon > 0$.
We prove the following

Theorem 1. *Suppose that*
1) X is a Hibpert space, Y is a topological space, and $M \subset X$ is a convex compact set;
2) $f(x,y)$ is a s convex function with respect to the variable x;
3) $f(x,y)$ and $f'_x(x,y)$ are continuous.
Then for any point (x_0, y_0) $x_0 \in a_\epsilon(y_0)$, there is a continuous selection of the mapping a_ϵ passing through it, i.e there exists a continuous function $x : Y \to M$, such that

$$x(y) \in a_\epsilon(y)\ \ \forall y \in Y,\ x(y_0) = x_0.$$

References

[1] E. Michael. Continuous Selections 1, Ann. Math., 2 (1956), 361-381.
[2] D. Repovs, P.V. Semenov. Continuous selections of multivalued mappings, Kluvert, Dordrecht, 1998. equation. Nonlinear Analysis. Theory Math. Appl., 2:6 (1978), 721–737.

Holomorphic maps of Hermitian CR-quadrics

Kruzhilin N.G. (Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences)
e-mail: kruzhil@mi-ras.ru

We consider Hermitian CR-quadrics of small codimension in complex linear spaces. We discuss conditions ensuring that local holomorphic maps between such quadrics are linear fractional or birational. The arguments are mostly based on an analysis of the Segre families associated with the quadrics.

Zeta-function of zeros of some entire function

Kuzovatov V.I. (Siberian Federal University)
kuzovatov@yandex.ru

This abstract is devoted to the study of the properties of the zeta-function $\zeta_f(s)$ of zeros of an entire function $f(z)$. We obtain an explicit expression for the kernel of the integral representation of the zeta-function in one case.

Concerning generalizations of the zeta-function, we note that in 1950s Gelfand, Levitan and Dikii studied the zeta-function associated to eigenvalues of the Sturm-Lioville operator. As it turned out, its value is connected with the trace of the operator. Further their approach was developed by Lidskii and Sadovnichii who considered a class of entire functions of one variable, defined the zeta-function of their zeroes and investigated its domain of analytic continuation. Smagin and Shubin constructed the zeta-functions for elliptic operators, as long for operators of more general type, proved a possibility of meromorphic continuation of the zeta-function and gave some information on its poles.

Multidimensional results were obtained by Kytmanov and Myslivets. They introduced the concept of zeta-function associated with a system of meromorphic functions $f = (f_1, \dots, f_n)$ in $\mathbb{C}^n$. With the help of the residue theory, these authors gave an integral representation for the zeta-function, but the system of functions $f_1, \dots, f_n$ was subject to rigid constraints.

Theorem 1. *Let $f(z)$ be an entire function of the zero order in $\mathbb{C}$ and satisfy the condition*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \omega_0 = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \to \infty.$$

Suppose that $0 < \mathrm{Re}\ s < 1$. Then

$$\zeta_f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \omega_0\right) x^{-s}\, dx,$$

where ω_0 is the limit value of $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ at infinity.

The method of proof of Theorem 1 shows that the statement remains valid in the case when $f(z)$ is an entire function of order less than 1.

Theorem 2. *Let $f(z)$ be an entire function of order $\rho < 1$ with zeros $z_n = -\pi n^2$. Then for real $x \in (0; +\infty)$ the following holds*

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} cth \sqrt{\pi x} - \frac{1}{2x}.$$

The author was supported by RSF, Krasnoyarsk Territory and Krasnoyarsk Regional Fund of Science (project number 22-21-20028).

Appell Functions in the Theory of Hyperholomorphic Functions

Malonek H.R. (CIDMA - University of Aveiro, Portugal)
e-mail: hrmalon@ua.pt

The aim of our contribution is to show that Appell functions [2] are a useful tool in hyperholomorphic function theory. Particularly, it will be shown that Appell's hypergeometric function F_1 can advantageously used as generating function of generalized Appell polynomials in the setting of hypercomplex analysis. This result is based on unique analytic continuation properties of hyperholomorphic functions (see [4]). Here, it is obtained in different ways, one of them through the application of the hypercomplex derivative, the others by the consideration of related gradients due to variations in the applied variables.

Hyperholomorphic functions (for more details see [4]) are the main object of an approach to higher dimensional problems by using a generalization of the theory of functions of one complex variable from the plane to higher dimensional Euclidean spaces. They are Clifford algebra valued solutions of a generalized Cauchy-Riemann system of one hypercomplex variable. Different from the usual approach by functions of several complex variables, this approach allows to work with complex-like methods in any dimension, particularly in the 3-dimensional Euclidean space with "real world applications e.g. in quasi-conformal mapping or, more general, in harmonic analysis, potential theory, differential geometry, operator theory, BVP of PDE, analytic number theory, discrete and computational mathematics, etc.

In general, a Clifford algebra is constructed from a finite dimensional vector space with (not necessarily positive definite) inner product, introducing an algebra multiplication which both reflects the properties of this inner product and a corresponding outer product (W. K. Clifford 1878). But for our purposes it is sufficient to start with the vector space $\mathbb{R}^n$ equipped with an orthonormal basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ and a non-commutative product according to the multiplication rules

$$e_k e_l + e_l e_k = -2\delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n,$$

where δ_{kl} is the Kronecker symbol. The set $\{e_A : A \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ with

$$e_A = e_{h_1} e_{h_2} \cdots e_{h_r}, \quad 1 \leq h_1 < \cdots < h_r \leq n, \quad e_\emptyset = e_0 = 1,$$

forms a basis of the 2^n-dimensional Clifford algebra $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ over $\mathbb{R}$. Each element $\alpha \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ can be represented in the form $\alpha = \sum_A \alpha_A e_A$, where α_A are real numbers. Let $\mathbb{R}^{n+1}$ be embedded in $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ by identifying $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ with

$$x = x_0 + \underline{x} \in \mathcal{A}_n := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathcal{C}\ell_{0,n}.$$

Here, $x_0 = Sc(x)$ and $\underline{x} = e_1 x_1 + \cdots + e_n x_n = V(x)$ are the scalar resp. vector parts of the para-vector $x \in \mathcal{A}_n$. Like in the complex case,the conjugate of x is given by $\bar{x} = x_0 - \underline{x}$ and its norm by $|x| = (x\bar{x})^{\frac{1}{2}} = (x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. The extension of this norm to the norm of $\alpha \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ is straightforward and leads to

$$|\alpha| = (\sum_A \alpha\bar{\alpha})^{1/2} = (\sum_A \alpha_A^2)^{1/2}.$$

As consequence, the usual approach to hypercomplex function theory considers $\mathcal{C}\ell_{0,n}$-valued functions $f(x) = \sum_A f_A(x) e_A, f_A(x) \in \mathbb{R}$, as mappings

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{A}_n \longmapsto \mathcal{C}\ell_{0,n}.$$

The advantage of this approach is to deal with only one hypercomplex variable x. A second hypercomplex structure of $\mathbb{R}^{n+1}$ different from that given by $\mathcal{A}_n$, and for the first time systematically used in [3] (very recently discussed and applied for other purposes in [1]), consists in using n hypercomplex variables z_k (now called Fueter variables; see [1], [4]) defined by the following isomorphism:

$$\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n = \{\vec{x} : z_k = x_k - x_0 e_k; x_0, x_k \in \mathbb{R}\}.$$

Hence, $f(z) = \sum_A f_A(x) e_A$ can also be considered as mapping $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n \longmapsto \mathcal{C}\ell_{0,n}$.

The aforementioned different approaches to the use of Appell's function F_1 as hyperholomorphic generating function also allow to illustrate interesting numerical facts, e.g. the generation of the generalized Vietoris number sequence by hypercomplex polynomial Appell sequences (see [4]).

References

[1] D. Alpay, I. L. Paiva, D. Struppa , A general setting for functions of Fueter variables: differentiability, rational functions, Fock module and related topics, Israel Journal of Mathematics, 236, (2020), 207–246.

[2] P. Appell, Sur les fonctions hypergéométriques et hypersphériques de deux variables. J. de mathématiques pures et appliquées 3e série. 8 (1882), 173-216

[3] H. Malonek, A new hypercomplex structure of the Euclidean space $\mathbb{R}^{m+1}$ and the concept of hypercomplex differentiability, Complex Variables Theory Appl., 14:4 (1990), 25–33

[4] H. R. Malonek, I. Cação, M. I. Falcão, G. Tomaz. Harmonic Analysis and Hypercomplex Function Theory in Co-dimension One. In: A. Karapetyants. V. Kravchenko. E. Liflyand.(eds) Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis. OTHA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 291. Springer, Cham, (2019), 93–115.

Trigonometric Convexity for the Multidimensional Indicator

Mkrtchyan A.J. (Siberian Federal University, Institute of Mathematics NAS)
e-mail: alex0708@bk.ru
Vagharshakyan A.A. (Institute of Mathematics NAS)
e-mail: avaghars@kent.edu

The concept of indicator is well-known for analytic functions in one complex variable. Multidimensional indicator after Ivanov is a generalization of that concept for analytic functions in several complex variables. We state the trigonometric convexity for two-dimensional indicator after Ivanov [1].

Defination 1. Denote by $\Delta_{\alpha_j} \subset \mathbb{C}$ the open sector determined by the angle $0 < \alpha_j < \pi/2$ as follows: $\Delta_{\alpha_j} = \{z_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon |\arg(z_j)| < \alpha_j\}$.

Defination 2. Recall that a function f is of finite exponential type (h_1, h_2) in the Cartesian product $\Delta_{\alpha_1} \times \Delta_{\alpha_2}$ if for any $\varepsilon > 0$ there exists a constant $k_\varepsilon \geq 0$ such that

$$|f(z_1, z_2)| \leq k_\varepsilon e^{(h_1+\varepsilon)|z_1|+(h_2+\varepsilon)|z_2|},$$
$$\text{for all } (z_1, z_2) \in \Delta_{\alpha_1} \times \Delta_{\alpha_2}.$$

In definition 2 we tacitly assume that $h_1, h_2 \geq 0$.

Defination 3. Denote by $Exp(\alpha_1, \alpha_2)$ the class of functions f that are analytic and of finite exponential type in $\Delta_{\alpha_1} \times \Delta_{\alpha_2}$.

Defination 4. Namely, Ivanov introduced the following set:

$$T_f\left(\vec{\theta}\right) = \left\{\vec{\nu} \in \mathbb{R}^2 \colon \ln\left|f\left(\vec{r}e^{i\vec{\theta}}\right)\right| \leq \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + C_{\vec{\nu},\vec{\theta}}, \text{ for all } \vec{r} \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}\right\},$$

Theorem *Let a function $f \in Exp(\alpha_1, \alpha_2)$ and the numbers $A_1^+, A_2^+, A_1^-, A_2^-$ satisfy:*

$$\left(A_1^+, A_2^+\right) \in \overline{T}_f(\alpha_1, \alpha_2), \quad \left(A_1^-, A_2^-\right) \in \overline{T}_f(-\alpha_1, -\alpha_2),$$
$$\left(A_1^+, A_2^-\right) \in \overline{T}_f(\alpha_1, -\alpha_2), \quad \left(A_1^-, A_2^+\right) \in \overline{T}_f(-\alpha_1, \alpha_2).$$

Then for constants C_1, C_2 determined from the following formulas:

$$C_1 \sin(2\alpha_1) = A_1^+ \sin(\theta_1 + \alpha_1) + A_1^- \sin(\alpha_1 - \theta_1),$$

$$C_2 \sin(2\alpha_2) = A_2^+ \sin(\theta_2 + \alpha_2) + A_2^- \sin(\alpha_2 - \theta_2),$$

we have

$$(C_1, C_2) \in \overline{T}_f(\theta_1, \theta_2).$$

References

[1] A. Mkrtchyan, A. Vagharshakyan, Trigonometric convexity for the multidimensional indicator after Ivanov. arXiv:2205.02585 (2022).

A note on Hadamard - Bergman convolution operators

Morales E.A. (Southern Federal University, Rostov-on-don, Russia)
e-mail: evelynmorales2507@gmail.com

This paper is a continuation of the recent studies of the class of Hadamard-Bergman operators. The notion of an operator constructed according to the Carleson measure on the Bergman space is introduced, the Berezin transform of the Hadamard-Bergman operator is studied, and the sufficient conditions are given for compactness and belonging to the Schatten ideals in various cases, that is, when the kernel of the operator is a holomorphic function, an $L^1(\mathbb{D})$ function, or when the operator is constructed via the measure of Carleson.

Weighted Hardy operator on the poly-tree

Mozolyako P.A. (Saint Petersburg University)
pmzlcroak@gmail.com

Let Γ be a poly-tree, i.e. a collection of dyadic rectangles on $\mathbb{R}^n$ (Cartesian product of usual dyadic intervals on $\mathbb{R}$) with natural order by inclusion.
The Hardy operator and its 'adjoint' are

$$\mathbf{I}f(R) := \sum_{R\subset Q} f(Q)$$

$$\mathbf{I}^*f(Q) := \sum_{R\subset Q} f(R).$$

We are investigating the action of this operator from $L^2(\Gamma, w^{-1})$ to $L^2(\Gamma, \mu)$, or, which is the same, $\mathbf{I}^*$ from $L^2(\Gamma, \mu^{-1})$ to $L^2(\Gamma, w)$, where w and μ are just collections of non-negative weights attached to the elements of Γ. If for given μ, w the Hardy operator is bounded, we call (μ, w) *the trace measure-weight pair.*

Our main goal is to provide a characterization of such pairs. They appear naturally in a number of settings – Hardy operators on $[0, +\infty)^n$, Carleson measures for analytic and harmonic weighted Dirichlet spaces on the poly-disc, maximal operators on dyadic rectangles, etc.

We plan to give a short review of known results and discuss some recent developments regarding the case of non-product weights.

Holomorphic continuation of functions with boundary Morera properties

Myslivets S.G. (Siberian Federal University)
e-mail: sMyslivets@sfu-kras.ru

We consider some results related to the holomorphic extension of functions that are continuous on the boundary of a bounded domain with a piecewise-smooth boundary to this domain. We will talk about functions that satisfy the Morera boundary condition. It consists in the equality of zero integrals of this function at the intersection of the boundary of this domain with coplex lines or complex planes. E.Greenberg studied functions with the Morera property in the ball (in fact, this result was contained in the article by M.L.Agranovsky and R.E.Walsky). I.Globevnik and E.L.Stout and D.Govekar obtained Morera's boundary theorem for an arbitrary bounded domain with a twice smooth boundary. The local version of Morera's theorem is considered by I.Globevnik, D.Govekar-Leban. In the work of S.G.Myslivets, functions with the Morera property along complex curves are considered. In the works of the author, some families of complex lines sufficient for holomorphic extension of functions are given.

Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ with a connected piecewise-smooth boundary. (A domain with a piecewise-smooth boundary is a smooth polyhedron). Consider one-dimensional complex lines $l_{z,b}$ of the form

$$l_{z,b} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ \zeta_j = z_j + b_j t, \ j = 1, \dots, n, \ t \in \mathbb{C}\}, \tag{1}$$

passing through a point $z \in \mathbb{C}^n$ in the direction of a vector $b = \{b_1, \dots, b_n\} \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (the direction of b is determined with an accuracy of up to multiplication by a complex number $\lambda \neq 0$). By Sard's theorem, for almost all $z \in \mathbb{C}^n$ and almost all $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$, the intersection $\partial D \cap l_{z,b}$ is a finite set of piecewise-smooth curves (except for the degenerate case where $\partial D \cap l_{z,b} = \varnothing$).

Definition 1. *We say that a continuous function f on ∂D ($f \in \mathcal{C}(\partial D)$) satisfies the Morera property along a complex plane l of dimension k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, if*

$$\int\limits_{\partial D \cap l} f(\zeta)\beta(\zeta) = 0$$

for any differential form β of type $(k, k-1)$ with constant coefficients. It is assumed that the plane l transversally intersects the boundary of the domain D. If $l_{z,b}$ is a complex line intersecting ∂D transversally, then the Morera property along $l_{z,b}$ consists of the equality

$$\int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z + bt)dt = \int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z_1 + b_1 t, \dots, z_n + b_n t)dt = 0 \tag{2}$$

for the given parameterization $\zeta = z + bt$ of the complex line $l_{z,b}$.

For complex lines, we consider a more general condition. Let k be a fixed non-negative integer, then the condition

$$\int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z + bt)t^k dt = \int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z_1 + b_1 t, \dots, z_n + b_n t)t^k dt = 0 \tag{3}$$

we will call *the generalized Morera property.* For $k = 0$, the condition (3) becomes the condition (2).

We formulate this result. Let D be s smooth polyhedron (that is smooth parts od the boundary are of class $\mathcal{C}^2$) and the complement $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ is connected.

Theorem 1. *Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ with a connected piecewise-smooth boundary and let for a fixed k and a function $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ the condition (3) hold for almost all lines $l_{z,b}$ of the form (1) intersecting an open set $V \subset D$ (or an open set $V \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$), then the function f is holomorphically extended into D.*

Earlier we proved this theorem for domains with a smooth boundary and for $k = 0$ it was proved by J. Globevnik and L. Stout.

Now we will consider the so-called sufficient sets for holomorphic continuation. Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ with a connected smooth boundary. Recall that a smooth manifold Γ of class $\mathcal{C}^\infty$ is said to be *generic* if the complex linear span of the tangent space $T_z(\Gamma)$ coincides with $\mathbb{C}^n$ for each point $z \in \Gamma$. We denote the family of all complex lines intersecting Γ by $\mathfrak{L}_\Gamma$.

Theorem 2. *Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ with a connected smooth boundary and let for a fixed k and a function $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ the condition (3) hold for almost all lines l from $\mathfrak{L}_\Gamma$ then the function f is holomorphically extended into D.*

References

[1] Globevnik J., Stout T.L. Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables. Duke Math. J., 64:3 (1991), 571–615.

[2] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. Some families of complex lines sufficient for holomorphic extension of functions. Russ. Math., 55:4 (2011), 60-66.

[3] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. Multidimensional Integral Representations. Problems of Analytic Continuation, Springer Verlag, Basel, Boston, 2015.

[4] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. On Functions with the Boundary Morera Property in Domains with the Piecewise-smooth Boundary. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'uternye Nauki, 32:1 (2021), 50-58.

Discrete Painlevé II equation and representation of symmetric group

Novokshenov V.Yu. (Institute of Mathematics, Ufa Science Center RAS)

e-mail: novik53@mail.ru

Discrete Painlevé equation of the second type

dPII
$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{n x_n}{\nu(x_n^2 - 1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

is transformed into the classical Painlevé II equation $u''(t) = tu(t) + 2u^3(t)$ under the scaling [1]

$$t = (n - 2\nu)\,\nu^{-\frac{1}{3}}, \quad x_n = (-1)^n \nu^{-\frac{1}{3}} u(t), \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Equation dPII is integrable by means of special version of Riemann-Hilbert problem (see [2]), its asymptotics as $n \to \infty$ were found in [1].

Let S_n be a symmetric group of order n, i.e. the permutation group of the set of n elements denoted by integers $1, 2, \ldots, n$. Put $\lambda_n(\sigma)$ to be largest increasing subset in permutation $\sigma \in S_n$ and $|\cdot|$ be the number of elements. Set $p_k^n = \frac{1}{n!}\Big|\{\sigma \in S_n,\ |\lambda_n(\sigma)| \le k\}\Big|$, and introduce the generating function

$$p_k(\nu) = e^{-\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^{2n}}{n!}\, p_k^n,$$

where ν is some parameter. Take all partitions $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in S_{|\lambda|}$ such that $|\lambda_1| \ge \cdots \ge |\lambda_l| > 0$, $|\lambda_1| \le k$ and $|\lambda| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_l|$. Let $\dim\lambda$ be a dimension of irreducible representation of symmetric group $S_{|\lambda|}$, then one has

$$p_k(\nu) = e^{-\nu^2} \sum_{|\lambda_1| \le k} \left(\frac{\dim\lambda}{|\lambda|!}\, \nu^{|\lambda|} \right)^2,$$

where summation is taken over all partitions λ. Calculation of $p_k(\nu)$ is an important task in representation theory of the symmetric group. As it was proven in [3] this function has the form of Toeplitz determinant

$$p_k(\nu) = e^{-\nu^2} \det[I_{i-j}(2\nu)]_{i,j=1}^{k}, \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_m(2\nu)\zeta^m = e^{\nu(\zeta+\zeta^{-1})}, \tag{3}$$

where I_m are modified Bessel functions of the first kind.

Another form of $p_k(\nu)$ is linked with special dPII solution, namely, if one set the initial data

$$x_0 = \mp 1, \quad x_1 = \pm I_1(2\nu)/I_0(2\nu) \tag{4}$$

and find solution x_n of dPII, then [2]

$$\frac{p_{n+1}(\nu)p_{n-1}(\nu)}{p_n^2(\nu)} = 1 - x_n^2. \tag{5}$$

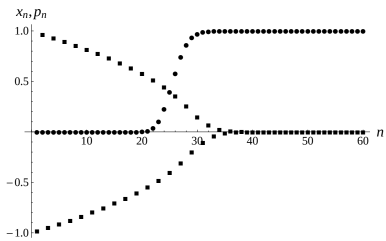

Figure 1: Special solution of dPII with $\nu = 15$ and initial conditions (4) (squares) and corresponding values of $p_n(\nu)$ in (5) (circles).

The constraint (5) is used to estimate x_n with initial conditions (4). The limit of the Toeplitz determinant is given by the well-known Szegö theorem

$$\lim_{n\to\infty} \det[I_{i-j}(2\nu)]_{i,j=1}^{n} = e^{\nu^2}.$$

Thus, $p_n(\nu) \to 1$ and $x_n \to 0$ as $n \to \infty$. This also follows from probabilistic argument, i.e. the asymptotics $p_n(\nu) \to 1$ means that increasing sequence l_n always certainly is no longer than n.

The structure of solutions x_n, p_n are shown in Figure 1. The point $n = 2\nu$ marks a transition of x_n from oscillation to exponential decay and p_n from 0 to 1. This is due to the scaling (2) and the choice of Painlevé II solution with asymptotics

$$u(t) \sim \begin{cases} \sqrt{-t/2}, & t \to -\infty, \\ \frac{t^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right), & t \to +\infty \end{cases} \tag{6}$$

(Hastings - McLeod solution).

Theorem. *Equation dPII (1) with initial conditions (4) has asymptotics (6) in terms of Hastings - McLeod solution $u(t)$*

$$x_n = (-1)^n \nu^{-\frac{1}{3}}\, u(t), \quad t = (n - 2\nu)\, \nu^{-\frac{1}{3}},$$

and generating function $p_n(\nu)$ of irreducible representation of symmetric group S_n is found by formula (5).

References

[1] V. Yu. Novokshenov, Asymptotic solutions to discrete Painlevé equation of the second type. Math. Notes, 112:4 (2022) 613–624.

[2] A. Borodin, Discrete gap probabilities and discrete Painlevé equations. Duke Math. J. 117:3 (2003) 1–54.

[3] I. M. Gessel, Symmetric functions and precursiveness. J. Combin. Theory, Ser. A 53 (1990) 257–285.

A boundary value problem for fractional differential inclusions of order $1 < q < 2$ with an almost lower semicontinuous multimap

Obukhovskii V. (Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia)
e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Petrosyan G. (Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia)
e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Soroka M. (Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia)
e-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

In recent decades, the study of boundary value problems for fractional differential equations and inclusions in Banach spaces has become very popular (see, for example, [6]-[8]). One of the best methods for investigating such problems is the methods of nonlinear analysis (see [1]-[5]). In the present work we consider in a separable Banach space E a boundary value problem for a semilinear differential inclusion

$$^{C}D_0^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), t \in [0, T], \tag{1}$$

with a boundary conditions

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1. \qquad (2)$$

Here the symbol ${}^C D_0^q$ denotes the Caputo fractional derivative of order $1 < q < 2$, $A : D(A) \subset E \to E$ is a linear operator generating a family of cosine operator–functions, $F : [0, T] \times E \multimap E$ is an almost lower semicontinuous (a.l.s.c.) multivalued map that satisfy the following conditions

$(F1)$ $F : [0, T] \times E \to K(E)$ is a.l.s.c.;

$(F2)$ for every $r > 0$ there exists a function $\omega_r \in L^\infty([0, T])$ such that for all $x \in E$ with $\|x\| \le r$ we have:

$$\|F(t, x)\| \le \omega_r(t)$$

for a.e. $t \in [0, T]$;

$(F3)$ there exists a function $\mu \in L^\infty([0, T])$ such that for every bounded subset $Q \subset E$ we have:

$$\chi(F(t, Q)) \le \mu(t)\chi(Q),$$

for a.e. $t \in [0, T]$, where χ is the Hausdorff measure of noncompactness in E.

Theorem 1. *Under conditions (A), $(F1) - (F3)$ the set of mild solutions of boundary value problem (1)–(2) is a nonempty subset of the space $C([0, T]; E)$.*

The work was supported by the Russian Science Foundation (project number 22-71-10008).

References

[1] I.N. Gurova, M.I. Kamenskii. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations. Differential Equations, 32:1 (1996), 106–112.

[2] R. Johnson, M. Kamenskii. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods. Journal of Differential Equations, 140:1 (1997), 186–208.

[3] M. Kamenskii, O. Makarenkov, L. N. Wadippuli, R.P. de Fitte. Global stability of almost periodic solutions to monotone sweeping processes and their response to non-monotone perturbations. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 30 (2018), 213–224.

[4] M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems. Journal of Dynamics and Differential Equations, 23:3 (2011), 425–435.

[5] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, Walter de Gruyter, Berlin – New-York, 2001.

[6] M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space. Mathematics, 9:2 (2021), 136–154.

[7] M.I. Kamenskii, G.G. Petrosyan, C.-F. Wen. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 5:1 (2021), 155–177.
[8] G. Petrosyan. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order. The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics, 34 (2020), 51–66.

Completely bounded Schur multipliers

Peller V.V. (St.Petersburg State University)
e-mail: peller@msu.edu

I am going to speak about my joint results with A.B. Aleksandrov.

Definition 1. A matrix $\{a_{jk}\}_{j,k\geq 0}$ of complex numbers is called a *Schur multiplier of Schatten–von Neumann class* $\boldsymbol{S}_p$, $p>0$, if for an arbitrary matrix $\{b_{jk}\}_{j,k\geq 0}$ of an operator on ℓ^2 of class $\boldsymbol{S}_p$, the matrix

$$\{a_{jk}b_{jk}\}_{j,k\geq 0}$$

also represents an operator of class $\boldsymbol{S}_p$.

Definition 2. A matrix $\{a_{jk}\}_{j,k\geq 0}$ of complex numbers is called a *completely bounded Schur multiplier of Schatten–von Neumann class* $\boldsymbol{S}_p$, $p>0$, if for an arbitrary block operator matrix $\{B_{jk}\}_{j,k\geq 0}$ (i.e., the B_{jk} are operators on Hilbert space) of class $\boldsymbol{S}_p$, the operator block matrix

$$\{a_{jk}B_{jk}\}_{j,k\geq 0}$$

also represents an operator of class $\boldsymbol{S}_p$.

It is well known that for $p=1$ and $p=2$ each Schur multiplier of class $\boldsymbol{S}_p$ is completely bounded. Gilles Pisier posed a problem of whether the same is true for all $p\geq 1$.

The main result of the talk is that for $p\in(0,1)$, each Schur multiplier of class $\boldsymbol{S}_p$ must be completely bounded.

On the Convergence Domains of Hypergeometric Series for Solutions to Systems of Algebraic Equations

Phan Kh.Q. (Siberian Federal University, Russia)
e-mail: phquangkhanh@gmail.com
Tsikh A.K. (Siberian Federal University, Russia)
e-mail: atsikh@sfu-kras.ru

In 1889 J. Horn gave a description of convergence domain for the *hypergeometric series* in two variables a,b (see Horn, [3]), that is the parameterization $|a| = \varphi_1(s), |b| = \varphi_2(s), s\in\mathbb{R}_+$ for the conjugate radii of convergence domain. In 1991 Kapranov [4] proposed an remarkable analog of the parameterization. In 2020, by using the *Horn-Kapranov parametrization*, introduced by A. K. Tsikh and M. Passare [5], Cherapanskiy and Tsikh [2] have a description for the convergence domain of the hypergeometric series presenting the solution to an algebraic equations with order n.

In our study, we use parameterizations for $\{A_1, ..., A_n\}$-discriminants of systems of algebraic equations, introduced by Tsikh and Antipova [1], to describe the convergence domain of hypergeometric series presenting solution $y = (y_1, y_2)$ to the system

$$\begin{cases} a_1 y^{\alpha_1} + a_2 y^{\alpha_2} + a_3 y^{\alpha_3} = 0, \\ b_1 y^{\beta_1} + b_2 y^{\beta_2} + b_3 y^{\beta_3} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

with variable coefficients $a_j, b_j \in \mathbb{C}^2$ and fixed exponents $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}^2$. Using suitable division we can reduce each such trinomial equation and then obtain a reduced system of the form

$$\begin{cases} y_1^m + a y_1^p y_2^q - 1 = 0, \\ y_2^l + b y_1^u y_2^v - 1 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

where $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ and $(p, q), (u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

The discriminant for the general system (1) is a polynomial denoted by $\Delta(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$. For the reduced system (2) the discriminant is the polynomial $\Delta(1, a, -1, 1, b, -1)$.

For the solution $y = (y_1, y_2)$ to (2) with $(\mu_1, \mu_2), (p, q), (u, v) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$, we consider the hypergeometric series for the monomial function

$$y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} c_\alpha a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}. \tag{3}$$

And for the so-called *principal solution* (satisfying initial condition $y(0, 0) = (1, 1)$), we get the following expression of coefficients c_α:

$$c_\alpha = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \Gamma_\alpha \cdot \mathrm{R}_\alpha,$$

where

$$\Gamma_\alpha = \frac{\Gamma(\frac{\mu_1+m}{m} + \frac{p}{m}\alpha_1 + \frac{u}{m}\alpha_2)\Gamma(\frac{\mu_2+l}{l} + \frac{q}{l}\alpha_1 + \frac{v}{l}\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)\Gamma(\frac{\mu_1+m}{m} + \frac{p-m}{m}\alpha_1 + \frac{u}{m}\alpha_2)\Gamma(\frac{\mu_2+l}{l} + \frac{q}{l}\alpha_1 + \frac{v-l}{l}\alpha_2)},$$

$$\mathrm{R}_\alpha = \frac{(\mu_1 + u\alpha_2)(\mu_2 + q\alpha_1) - uq\alpha_1\alpha_2}{(\mu_1 + p\alpha_1 + u\alpha_2)(\mu_2 + q\alpha_1 + v\alpha_2)}.$$

We call Γ_α the *gamma-part* and R_α the *rational-part* of the coefficient c_α.

Theorem 1. *Let $\Delta(1, a, -1, 1, b, -1)$ be the discriminant of the system (3). The convergence domain of the hypergeometric series (3) representing the monomial $y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}$ of the principal solution is determined by 1 or 2 or 3 inequalities of the types*

$$\pm\Delta(\pm 1, \pm|a|, -1, \pm 1, \pm|b|, -1) < 0. \tag{4}$$

In order to explain the statement of this theorem let us consider the following example.

Example 1. *Consider the system of trinomial equations*

$$\begin{cases} y_1^3 + ay_1y_2 - 1 = 0, \\ y_2^3 + by_1y_2 - 1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

with the discriminant $\Delta(1, a, -1, 1, b, -1) =: \Delta(a, b)$*:*

$$\Delta(a, b) = -27 - 4a^3 + 6a^2b + 6ab^2 - 4b^3 + a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4.$$

The convergence domain of the series for the monomial $y_1^{\mu_1}y_2^{\mu_2}$ *of the principal solution to the system (5) is determined by two inequalities of the type (4) as following:*

$$D = \{\Delta(|a|, -|b|) < 0\} \cap \{\Delta(-|a|, |b|) < 0\}.$$

This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2022-876).

References

[1] I.A. Antipova and A.K. Tsikh. The discriminant locus of a system of n Laurent polynomials in n variables. Russian. In: Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. translation in Izv. Math., 76.5 (2012), 881-906.
[2] A.N. Cherepanskiy and A.K. Tsikh. Convergence of two-dimensional hypergeometric series for algebraic functions. In: Integral Transforms and Special Functions, 31.10, (2020), 838-855.
[3] J. Horn. Uber die Konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veranderlichen. In: Math Ann, 34, (1889), 544-600.
[4] M.M. Kapranov. A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map. In: Math. Ann., 290, (1991), 277-285.
[5] M. Passare and A.K. Tsikh. Algebraic equations and hypergeometric series. The Legacy of N.H. Abel. Springer-Verlag, (2004), 653-672.

On the 3-generated commutative rings of differential operators

Shabat G.B. (Russian State University for the Humanities)
george.shabat@gmail.com

The general theory of commutative rings of differential operators (containing the operators of almost all orders) was basically completed in 1970-s; the complete classification in algebro-geometric terms can be found, e.g., in [1]-[2]. This theory established the bijection of the isomorphic classes of such rings and certain linear flows on the jacobians of projective models of their spectra.

A special attention was paid to the rings, generated by two operators of the coprime order, usually of order 2 and of some odd order; the theory of such rings turned out to be equivalent to the theory of KdV hierarchy. However, the corresponding algebraic curves were always hyperelliptic.

In order to handle the general (canonical curves), one should consider the rings, generated by more than two operators. In the paper [3] the author considered the simplest possible case of this kind – that of generators of orders 3,4,5. The following theorem is a result of straightforward calculation.

Theorem 1. *For an operator* $\mathrm{D}^3 + p\mathrm{D} + q$ *there exist operators of orders 4 and 5, commuting with it, if and only if for some constants* $C_1, \ldots, C_{11}$ *the following system of ordinary differential equation holds:*

$$p''' - 2q'' + 2pp' - 4pq = 3C_1p' + 6C_1q + 3C_2p + C_4, \tag{1}$$

$$2p^{\mathrm{IV}} - 3q'' + 6pp'' + 3p'^2 - 3pq' + \frac{4}{3}p^3 - 6q^2 = 9C_1q' + 9C_2q + C_5, \tag{2}$$

$$p^{\mathrm{IV}} + 5pp'' + 15p'q + \frac{5}{3}p^3 - 15q^2 = -9C_7p' + 18C_7q + 9C_8p + C_{10}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} q^{\mathrm{IV}} + 10p''q + 10p'q' + 5pq'' + 5p^2q - 15qq' = \\ = -6C_7p'' - 3C_7p^2 + 9C_7q' + 9C_8q + C_{11}. \end{aligned} \tag{4}$$

In [3] the solutions of (1)-(4) were rationally parametrized and some algebro-geometric application of this parametrization presented. The main step used the transformation to the system

$$\begin{gathered} (5) := 2(1), \\ (6) : -2(2) - 3(1)', \\ (7) := (3), \\ (8) = 2(4) - 3(1)'. \end{gathered}$$

The system (5)-(8) demonstrates some enigmatic phenomena: two of the equations are *non-differential* and two are *linear* in $q - \frac{1}{2}p'$. The explanation of these phenomena was out of reach in 1980-s.

The talk will be devoted to algebro-geometric interpretation of the related construction, based on the well-known smooth models of genus-two curves as quintics in the projective 3-space. Some interesting special cases will be considered and the discrete analogs discussed.

References

[1] V.G. Drinfeld. Commutative subrings of certain noncommutative rings. Functional Analysis and Its Applications, 1977, 11:1, 9-12.
[2] I. M. Krichever. Commutative rings of ordinary linear differential operators. Functional Analysis and Its Applications, 1978, 12:3, 175–185.
[3] G. B. Shabat. A system of equations of S. P. Novikov. Functional Analysis and Its Applications, 1980, 14:2, 158–160.

Test wavelets on the Vilenkin groups

Skopina M.A. (St. Petersburg State University and
Regional Mathematical Center of Southern Federal University)
e-mail: skopinama@gmail.com

Let G_p denote the locally compact Vilenkin group associated with a positive integer $p \geq 2$. It is well known that the characters of G_p are the generalized Walsh functions (see [1], [2]). As well as the additive group of the p-adic number field $\mathbb{Q}_p$, the group G_p is a special case of zero-dimensional groups. A general method for constructing the Haar bases on different structures (including local fields of positive characteristic and zero-dimensional groups) was proposed in [3]. It is known [4] that any orthogonal wavelet basis for $L^2(\mathbb{Q}_p)$ consisting of band-limited functions is a "damaged"(wavelet equivalent) Haar basis. The situation is different for the Vilenkin groups, where there exist orthogonal band-limited wavelet bases essentially different from the Haar bases. The first examples of such bases were constructed in [5].

Similarly to the real setting, the construction of wavelets on the Vilenkin groups is based on a multiresolution analysis generated by a scaling function that has a number of special properties, in particular, it must be refinable (solution of a refinement equation). Such wavelet systems are called MRA-based. MRA-based wavelets inherit important properties (such as smoothness and compactness of the support) of the generating scaling function. That is why we are interested in providing smoothness for refinable functions as much as possible, and the band-limited functions are optimal in this sense. In contrast to the real setting, there exist compactly supported band-limited functions on G_p. The class of such functions is an analogue of the Schwartz class on the real line, and these functions are finite linear combinations of the generalized Walsh functions which, in turn, are step functions. Wavelets generated by step scaling functions are also step functions. That is why compactly supported band-limited refinable functions lead to the test wavelets, which is used in the approximation theory on the Vilenkin groups. In particular, it is known that test wavelets provide the best order of approximation in some functional spaces. A number of concrete examples of compactly supported step scaling functions generating wavelet bases and frames on G_p exist in the literature (see, e.g., [5], [6]).

In the present paper, we give a complete description of all compactly supported refinable step functions on G_p and the corresponding wavelets, in particular, to construct MRA-based tight frames and orthogonal wavelet bases.

References

[1] Schipp F., Wade W. R., Simon, P. *Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, New York: Adam Hilger, 1990.

[2] Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Transl. from the Russian by W. R. Wade. Mathematics and Its Applications. Soviet Series. 64. Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers Group. xiii, 368 p. (1991).

[3] Novikov I. Ya., Skopina M. A. Why are Haar bases in various structures the same? *Math. Notes* **91** (6) (2012), 895-898.
[4] Evdokimov S., Skopina M. On orthogonal p-adic wavelet bases, *J. Math. Anal. Appl.*, 424 (2) (2015), 952-965.
[5] Farkov Yu. A. Orthogonal p-wavelets on $\mathbb{R}_+$. Skopina M. (ed.), *International conference on wavelets and splines, St. Petersburg, Russia, July 3-8, 2003. Proceedings.* St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 4-26 (2005).
[6] Farkov Yu. A. Wavelet frames related to Walsh functions, *Eur. J. Math.* 5 (1) (2019), 250-267.

Mathematical model of a non-classical problem of bending a beam of variable thickness with an additional condition

Stepanyan S.P. (Yerevan State University)
e-mail: seyran.stepanyan@ysu.am

It is known that the elements used in various construction systems are in the form of beams, plats, and shells.The clarification of the bearing capacity of these elements, depending on external influences becomes decisive. In this regard, the mathematical description of the observed physical problem is very important.
The following problem is considered in this work.
An orthotropic beam is observed with variable thickness h, length l, and width b. The beam is under the action of a uniformly distributed load.
Let us describe the mathematical of the problem.

The following system of differential equations was obtained to solve the problem of beam bending, which is based on the refined theory of orthotropic plates of variable thickness [1].

$$\begin{cases} -8h\frac{d\varphi_1}{dx} - 16\frac{dh}{dx}\varphi_1 = 12q, \\ Eh^2\frac{d^3w}{dx^3} + 2Eh\frac{dh}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} - Ea_{55}h^2\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - 2Ea_{55}h\frac{dh}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx} + 8\varphi_1 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

The beam is elastically clamped at the edge $x = 0$.
It is known [2] that the condition of elastic clamp is described by the following equations:

$$\frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x), \quad w = a\frac{dw}{dx} + BN_x, \; D = \frac{3B}{a^2}. \tag{3}$$

Here w, N_x, and M_x are the bending, the shear force, and the bending moment, respectively. D and B are the parameters of the elastically clamped support.
When $x = l$, then we have that

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0. \tag{4}$$

The beam is articulated at some distance from the elastic clamping rib $w = 0$, which gives an additional condition. At this point the following condition hold

$$w = 0; \ \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \tag{5}$$

Thus, the system of differential equations (1) obtained for solving the physical problem, together with the conditions (2), (3), and (4), is a mathematical model of the problem of bending a beam of variable thickness.
Numerical optimization is completed depending on the set of different values of parameters.
The optimal solution has been found.

References

[1] R.M. Kirakosyan.Applied theory of orthotropic plates of variable thickness, taking into account the influence of deformations transverse shear.Yerevan, Science, 2000, (In Russia).
[2] R.M. Kirakosyan, S.P. Stepanyan. Non-classical problem of bending an orthotropic beam of variable thickness with an elastically clamped support, Reports of the National Academy of Science of Armenia 3:114 (2014), 205-212.(In Russia)

Maz'ya's Φ-inequalities

Stolyarov D.M. (St. Petersburg State University)
e-mail: d.m.stolyarov@spbu.ru

The talk will be devoted to a special class of limiting Sobolev inequalities, where the vectorial nature of functions and operators plays the crucial role. Sometimes such inequalities are called Bourgain–Brezis inequalities. Consider a version of the limiting Sobolev inequality $\|\nabla f\|_{L_{d/(d-1)}} \lesssim \|\Delta f\|_{L_1}$, here we consider smooth compactly supported functions f on $\mathbb{R}^d$, and the sign $\lesssim$ means there is a multiplicative constant independent of the choice of f. Such a bound **is not** true (it should not be mixed with the Gagliardo–Nirenberg inequality $\|f\|_{L_{d/(d-1)}} \lesssim \|\nabla f\|_{L_1}$, which **is** true). In [1], Vladimir Maz'ya suggested a non-linear modification: let now $\Phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be a positively $d/(d-1)$ homogeneous function, then

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi\big(\nabla f(x)\big)\, dx\Big| \lesssim \|\Delta f\|_{L_1}^{\frac{d}{d-1}},$$

provided Φ satisfies additional cancellation condition $\int_{S^{d-1}} \Phi(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0$; here S^{d-1} is the unit sphere in $\mathbb{R}^d$ equipped with the standard Hausdorff measure σ. He considered the special case $d = 2$ and Φ is a quadratic form and conjectured the inequality is always true.

I will try to survey the proof of the inequality or at least explain the main ideas. The approach is not the most common for the field. We will first construct a discrete model that mimics the problem and solve that version using a harmonic analysis technique called the Bellman function (having its origins in the stochastic optimal control). Then, we will transfer the ideas of proof to the original continuous setting (such a trick is quite common in harmonic analysis and there are many instruments available). This will lead us not to the proof of Maz'ya's conjecture only, but also to a wider class of inequalities: we will describe all the (sufficiently regular) pairs K, Φ, where $K\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell$ is an $(d-\alpha)$ positively homogeneous kernel and $\Phi\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ is $d/(d-\alpha)$ positively homogeneous function, such that the inequality

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi\big(K * g(x)\big)\,dx\Big| \lesssim \|g\|_{L_1}^{\frac{d}{d-\alpha}},$$

holds true for all smooth compactly supported functions g with zero mean.

Based on the papers [2] *and* [3] *and supported by the Russian Science Foundation grant n. 19-71-10023.*

References

[1] V. Maz'ya. Estimates for differential operators of vector analysis involving L_1-norm, J. Eur. Math. Soc., 12:1 (2010), 221–240.
[2] D. Stolyarov. On Φ-inequalities for martingale fractional integration and their Bellman functions, https://arxiv.org/abs/2107.09336.
[3] D. Stolyarov. Fractional integration of summable functions: Maz'ya's Φ-inequalities, https://arxiv.org/abs/2109.08014.

Degenerate third order differential-operator equations

Tepoyan L.P. (Yerevan State University)
e-mail: tepoyan@yahoo.com

We consider two boundary value problems (BVP) for degenerate differential-operator equations of third order

$$Su \equiv (t^\alpha u'')' - Au' + Bu = f, \quad u(0) = u'(0) = u'(b) = 0, \tag{1}$$

$$Mu \equiv (t^\alpha u'')' - Au' + Bu = f, \quad u(b) = u'(0) = u'(b) = 0, \tag{2}$$

where $t \in (0,b)$, $\alpha \geq 0$, $A, B : H \to H$ are in general unbounded linear operators in *separable* Hilbert space H, commute with D_t, $f \in L_2((0,b),H)$, i.e. $\|f\|^2 = \int_0^b \|f(t)\|_H^2\,dt < \infty$.

We assume that the operators $A, B : H \to H$ have a *common complete system* of eigenfunctions $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, which form Riesz basis in H, i.e., $A\varphi_k = a_k\varphi_k$, $B\varphi_k = b_k\varphi_k$, $k \in \mathbb{N}$ and for every $x \in H$ we have

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\varphi_k, \tag{3}$$

and there are some positive constants c_1 and c_2 such that

$$c_1 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \le \|x\|_H^2 \le c_2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2. \tag{4}$$

We prove that under some conditions on the operators A, B and on the number α the boundary value problems (1) and (2) have unique generalized solutions $u \in L_2((0,b),H)$ for any $f \in L_2((0,b),H)$.

First we investigate *one-dimensional* cases of boundary value problems (1) and (2), when $Au = au, Bu = bu$, $a, b \in \mathbb{C}$. Then we consider operator equations.

LPR inequality for arbitrary Vilenkin systems

Tselishchev A.S. (Leonhard Euler International Mathematical Institute, PDMI)
e-mail: celis-anton@yandex.ru

Let f be a function on $\mathbb{R}$. For an arbitrary measurable set $E \subset \mathbb{R}$ we denote by P_E the Fourier multiplier that acts on f in a following way:

$$P_E f = (\chi_E \widehat{f})^{\vee}.$$

The famous Littlewood–Paley theorem (which was proved in [1]) states that if $I_j = [2^j, 2^{j+1}) \cup (-2^{j+1}, -2^j]$, then for every p, $1 < p < \infty$, we have

$$\|f\|_{L^p} \asymp \Big\| \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |P_{I_j} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p}.$$

The notation $A \asymp B$ means that there exist positive constants c and C such that $cA \le B \le CA$.

The sequence $\{2^j\}$ in the theorem may be replaced by any lacunary sequence $\{\lambda_j\}$, that is, λ_j should satisfy the condition $\lambda_{j+1}/\lambda_j \ge c > 1$.

In the paper [2] Rubio de Francia proved that if I_j are arbitrary disjoint intervals in $\mathbb{R}$ then for any p, $2 \le p < \infty$, we have

$$\Big\| \Big(\sum_{j} |P_{I_j} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

We will discuss a similar inequality in the context of arbitrary Vilenkin systems; the functions in these systems are characters of the infinite product of cyclic groups.

References

[1] Littlewood, J. E. and Paley, R. E. A. C., *Theorems on Fourier series and power series (II)*, Proc. London Math. Soc. (2), **42** (1936), 52–89.
[2] José L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 1–14.

Sectorial Paley-Wiener theorem

Vagharshakyan A.A. (Institute of Mathematics, Armenia)
e-mail:avaghars@kent.edu

By correcting, simplifying and extending a result of M. Morimoto, we prove a Paley-Wiener type theorem for functions of exponential type in a sector. It serves as a sectorial analogue of Polya's theorem on the indicator of entire functions and improves a result of M. Dzhrbashyan and A. Avetisyan by finding the maximal convex set of analytic continuation inside a sector.

References

[1] A. Vagharshakyan. Sectorial Paley-Wiener theorem. arXiv:2205.02192 (2022).

Научное издание

Международная конференция по математическому анализу и дифференциальным уравнениям

Сборник тезисов

г. Цахкадзор, Армения
19-23 сентября 2022г.

Подписано в печать 02.09.2022
Формат 60x84, 1/16. Бумага офсетная.
Печать лазерная. Усл. печ. лист. 5.4, Тираж 90 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета ООО «Мекнарк»
г.Ереван, ул. Х.Абовяна 41, тел. +374 91 40 27 97

http://www.mathnet.ru/conf2097