

Quantum mechanics and quantum field theory.  
Algebraic and geometric approaches.  
Квантовая механика и квантовая теория поля.  
Алгебраический и геометрический подходы.

A. Schwarz

Department of Mathematics  
University of California  
Davis, CA 95616, USA,  
schwarz @math.ucdavis.edu

I. Frolov

Department of Mathematics,  
National Research Nuclear University MEPhI  
(Moscow Engineering Physics Institute)  
115409, Kashirskoe shosse 31, Moscow, Russia  
frolovi55@mail.ru

**Аннотация**

This is a non-standard exposition of main notions of quantum mechanics and quantum field theory that also includes some recent results. It is based on algebraic approach where the starting point is an associative algebra with involution and states are defined as positive linear functionals on this algebra and on geometric approach where the starting point is a set of states considered as a convex subset of linear space. The exposition does not depend on textbooks in quantum mechanics.

Standard formulas for quantum probabilities are derived from decoherence. This derivation allows us to go beyond quantum theory in geometric approach. Particles are defined as elementary excitations of ground state (and quasiparticles as elementary excitations of any translation invariant state). It follows from this definition that the notion of identical particles is very natural. The scattering of particles is analyzed in the framework of generalization of Haag-Ruelle theory. The conventional scattering matrix does not work for quasiparticles (and even for particles if the theory does not have particle interpretation). The analysis of scattering in these cases is based on the notion of inclusive scattering matrix, closely related to inclusive cross-sections. It is proven that the conventional scattering matrix can be expressed in terms of Green functions (LSZ formula) and inclusive scattering matrix can be expressed in terms of generalized Green functions that appear in the Keldysh formalism of non-equilibrium statistical physics. It is shown that generalized Green functions and inclusive scattering matrices appear also in the formalism of L-functionals that can be identified with positive functionals on Weyl or Clifford algebras.

The derivation of the expression of the evolution operator and other physical quantities in terms of functional integrals is based on the notion of symbol of operator; these arguments

can be applied also in geometric approach. This result can be used, in particular, to give a simple derivation of diagram technique for generalized Green functions.

The notion of inclusive scattering matrix makes sense in geometric approach (but it seems that one cannot give a definition of conventional scattering matrix in this situation).

The geometric approach is used to show that quantum mechanics and its generalizations can be considered as classical theories where our devices are able to measure only a part of observables.

This text is based on first ten lectures of the course taught by A. Schwarz in the Spring of 2022; see [www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru) for lectures (in Russian) and slides (in English).

**Keywords** Inclusive scattering matrix; generalized Green function, geometric approach

# Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>4</b>
1.1	Введение . . . . .	4
1.1.1	Выпуклые множества . . . . .	4
1.1.2	Квантовая теория. Геометрический подход . . . . .	5
1.1.3	Алгебраический подход к квантовой теории . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Лекция 2</b>	<b>12</b>
2.1	Квантовая механика как деформация классической механики. Алгебра Вейля . . . . .	12
2.2	Квадратичные гамильтонианы . . . . .	16
2.3	Стационарные состояния . . . . .	17
2.4	Пространство Фока . . . . .	18
2.5	Гамильтонианы сохраняющие число частиц . . . . .	21
2.6	Представления алгебры Вейля . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Лекция 3</b>	<b>25</b>
3.1	Алгебра Клиффорда и алгебра Грассманна . . . . .	25
3.2	Представления алгебры Клиффорда . . . . .	28
3.3	Статистическая физика . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Лекция 4</b>	<b>36</b>
4.1	Адиабатическое приближение. Декогерентность . . . . .	36
4.2	L-функционалы . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Лекция 5</b>	<b>45</b>
5.1	Функциональные интегралы . . . . .	45
5.2	L-функционалы и функциональные интегралы . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Лекция 6</b>	<b>55</b>
6.1	Солитоны как аналоги частиц . . . . .	55
6.2	Частицы и квазичастицы . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Лекция 7</b>	<b>64</b>
7.1	Одночастичные и многочастичные состояния . . . . .	64
7.2	Рассеяние; <i>in</i> - и <i>out</i> -состояния . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Лекция 8</b>	<b>74</b>
8.1	Связь с локальной квантовой теорией поля . . . . .	74
8.2	Функции Грина. Связь с матрицей рассеяния. . . . .	77
<b>9</b>	<b>Лекция 9</b>	<b>85</b>
9.1	Обобщенные функции Грина . . . . .	85
9.2	Матрица Мёллера . . . . .	85
9.3	Матрица рассеяния. Формула LSZ . . . . .	90
9.4	Инклюзивная матрица рассеяния . . . . .	92
<b>10</b>	<b>Лекция 10</b>	<b>94</b>
10.1	Удаление лишних состояний . . . . .	94
10.2	Квантовая механика из классической механики . . . . .	94

# 1 Лекция 1

## 1.1 Введение

В обычном изложении квантовой механики мы живем в гильбертовом пространстве и рассматриваем операторы в этом пространстве. Самосопряженные операторы отвечают наблюдаемым. Это подход, которым пользуются физики почти всегда, но он имеет свои недостатки. Я буду говорить про другие подходы. Это прежде всего, алгебраический подход, где исходным пунктом является алгебра наблюдаемых — ассоциативная алгебра с инволюцией, в которой самосопряженные элементы являются наблюдаемыми. Этот подход, по-моему, почти столь же стар, как и сама квантовая механика. Кроме того, я буду говорить про геометрический подход, в котором исходная точка — это множество состояний [1-7]. Этот подход я предложил пару лет тому назад, и он много более общий чем алгебраический подход.

Основная вещь, которая, по-моему, недостаточно подчеркивается в обычном изложении квантовой механики (чуть больше говорится в квантовой теории поля) это то, что понятие частицы не является основным в квантовой механике. Это понятие производное. Частицы — это элементарные возбуждения основного состояния. Квазичастицы (тоже важное понятие) — это элементарные возбуждения любого трансляционно инвариантного состояния. Основное понятие, которое есть в физике элементарных частиц — это понятие матрицы рассеяния и о нем я буду больше всего говорить. Это понятие тесно связано с понятием сечения рассеяния.

Кроме того, я буду говорить о понятии инклюзивной матрицы рассеяния, тесно связанном с понятием инклюзивного сечения рассеяния. Матрицы рассеяния выражаются через функции Грина известной формулой, принадлежащей Леману, Симанчику и Циммерману, а инклюзивные матрицы рассеяния выражаются через обобщенные функции Грина, которые появились впервые в неравновесной статистической физике в формализме Келдыша.

### 1.1.1 Выпуклые множества

Перед тем как переходить к физике, я хочу сказать несколько слов про выпуклые множества, которые у меня будут появляться многократно.

Выпуклое множество  $\mathcal{C}$  — это подмножество векторного пространства, которое вместе с каждым двумя точками содержит отрезок, соединяющий эти точки. Важно то, что в выпуклом множестве можно рассматривать смесь точек этого множества. Если взять несколько точек множества и каждой точке приписать неотрицательное число так, чтобы сумма чисел равнялась единице, то тогда сумма точек  $e_i \in \mathcal{C}$  с коэффициентами  $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$  также будет принадлежать выпуклому множеству. Эта сумма  $\sum p_i e_i \in \mathcal{C}$  называется смесью точек множества с вероятностями  $p_i$ . Можно рассматривать числа  $p_i$  как веса, и тогда эта сумма будет представлять центр тяжести. Другое важное понятие — это понятие крайней точки выпуклого множества. Крайняя точка — это такая точка, которая не лежит внутри никакого отрезка с концами, принадлежащими множеству. У многогранника крайние точки — это вершины. У шара крайние точки — это сфера, ограничивающая этот шар.

Я всегда буду считать, что в том векторном пространстве, которое я рассматриваю, есть какая-то топология, есть понятие непрерывности и, тем самым, понятие замкнутого множества. Я буду предполагать, что все выпуклые множества, которые я рассматриваю, замкнуты, и тогда можно рассматривать смесь не только конечного числа точек, но и смесь счетного числа точек. В последнем случае сумму нужно считать бесконечной.

Также можно рассматривать смесь точек любого подмножества выпуклого множества, если на подмножестве задано распределение вероятностей. Если, скажем, на сфере, ограничивающей шар, задано распределение вероятности с плотностью вероятности  $\rho(\lambda)$ , то можно рассматривать смесь исходя из этого распределения вероятности: просто вместо суммы нужно брать интеграл. Если  $\lambda$  — это параметры, описывающие точки на сфере,  $\omega(\lambda)$  — это точки сферы, тогда можно рассматривать такую смесь, беря вместо суммы интеграл  $\int \omega(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$ . Если выпуклое множество компактно, то каждая точка является смесью его крайних точек.

### 1.1.2 Квантовая теория. Геометрический подход

В двух словах я повторяю то, что мне нужно из квантовой механики. Начну с того, что для меня понятие состояния в квантовой механике — это понятие матрицы плотности. Матрица плотности — это самосопряженный оператор  $K$ , который положительно определен и у которого след равен единице:  $tr K = 1$ . Множество матриц плотности выпукло, а его крайние точки называются чистыми состояниями. Эти чистые состояния отвечают векторам в гильбертовом пространстве. Каждому нормированному вектору  $\Psi$  соответствует матрица плотности, которая определяется как ортогональная проекция на этот вектор:

$$K_{\Psi}(x) = \langle x, \Psi \rangle \Psi.$$

Нужно заметить что если два вектора пропорциональны ( $\Psi' = \lambda\Psi$ ), то соответствующие матрицы плотности совпадают:  $K_{\Psi'} = K_{\Psi}$ .

У матрицы плотности  $K$  существует базис из собственных векторов  $e_i$  с неотрицательными собственными значениями  $p_i$  сумма которых равна 1. Можно считать, что каждому из этих векторов соответствует чистое состояние, а матрица плотности — это смесь этих чистых состояний. В том представлении, в котором матрица диагональна, ее диагональные элементы обозначим как  $p_i$ . Поскольку след равен единице, их сумма равна единице:  $\sum p_i = 1$ . Поскольку матрица положительно определена, эти диагональные элементы неотрицательны:  $p_i \geq 0$ . Следовательно, можно сказать, что матрица плотности — это смесь чистых состояний с вероятностями  $p_i$ .

В обычных курсах все это рассказывается в обратном порядке начиная с чистых состояний. Матрицы плотности определяются как смешанные состояния.

Я обсудил один способ представления матрицы плотности как смеси чистых состояний. На самом деле, это можно делать бесконечным множеством разных способов.

В геометрическом подходе исходной точкой является множество состояний. Предполагается, что это ограниченное замкнутое выпуклое подмножество топологического линейного пространства. Оказывается, что этих предположений достаточно для того, чтобы построить содержательную теорию.

### 1.1.3 Алгебраический подход к квантовой теории

В то время как в геометрическом подходе основное — это пространство состояний, в алгебраическом подходе основное — это алгебра наблюдаемых  $\mathcal{A}$ . Напомню, что алгебра — это векторное пространство, в котором можно умножать элементы с дистрибутивным законом, но еще я потребую, чтобы в этой алгебре была инволюция. Типичный пример алгебры (для меня основной) — это алгебра ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. В этой алгебре есть инволюция  $A \rightarrow A^*$ , которая отвечает переходу к сопряженному оператору. Она обладает тем свойством, что, перейдя дважды к сопряженному оператору, мы возвращаемся к исходному:  $A^{**} = A$ . Если брать сопряженный к произведению оператор, это будет опять же произведение, но в обратном порядке:  $(AB)^* = B^*A^*$ . Кроме того, инволюция антилинейна. В

алгебре операторов это простые свойства, а для произвольных ассоциативных алгебр с инволюцией (\*-алгебр) это — аксиомы.

Я всегда предполагаю, что в алгебре есть какая-то топология, в которой все операции непрерывны. Я обычно про эти топологии говорить не буду, во-первых, потому, что это требует времени, а, во-вторых, потому, что разные топологии могут быть одинаково разумны. В некоторых ситуациях более удобны одни, в других ситуациях — другие. Того, что есть топология обычно бывает мало. Иногда требуется, чтобы была норма, в которой алгебра является банаховым пространством, тогда требуется, чтобы норма произведения была меньше или равна чем произведение норм ( $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ ) (это определение банаховой алгебры). Иногда требуется нечто большее, например, чтобы алгебра была  $C^*$ -алгеброй. (Это значит, что норма произведения  $A^*A$  равна квадрату нормы оператора  $A$ , то есть  $\|A^*A\| = \|A\|^2$ ). Я обычно не буду уточнять, какая именно топология выбрана. Я хочу подчеркнуть, что при рассмотрении гомоморфизма или автоморфизма алгебры я буду всегда считать, что он согласован с инволюцией.

Если есть алгебра с инволюцией, то самосопряженные элементы ( $A = A^*$ ) отвечают физическим величинам. Сами по себе самосопряженные элементы алгебры не образуют. Произведение самосопряженных элементов — это не обязательно самосопряженный элемент. Этот недостаток алгебраического подхода было замечен еще в 30-е годы, что привело к понятию йордановой алгебры. Йордан заметил, что хотя произведение самосопряженных элементов не является самосопряженным, но если взять антикоммутатор  $A \circ B = AB + BA$ , где  $A$  и  $B$  — самосопряженные, этот антикоммутатор снова будет самосопряженным. Он аксиоматизировал эту операцию. Теория йордановых алгебр была построена в 30-е годы, в основном, в знаменитой работе Йордана, Вигнера и фон Нойманна. Но хотя йорданова алгебра — очень красивый и действительно полезный во многих частях математики объект, в физике до сих пор он не получил большого применения. Сейчас он естественно появился в геометрическом подходе и, может быть, снова вернется в физику.

Если начинать со \*-алгебры (с алгебры с инволюцией), можно определить понятие состояния: состояние — это линейный функционал  $\omega$  на алгебре  $A$ , удовлетворяющий условию неотрицательности на элементах вида  $A^*A$ :

$$\omega(A^*A) \geq 0.$$

Состояния, отличающиеся численным множителем, отождествляются. Часто удобно рассматривать только состояния, удовлетворяющие условию  $\omega(1) = 1$  (нормированные состояния).

Теперь можно определить понятие математического ожидания в данном состоянии. Для функции  $f(A)$  от  $A \in \mathcal{A}$  математическое ожидание задается формулой:

$$\langle f(A) \rangle_\omega = \omega(f(A)).$$

Для  $C^*$ -алгебры можно определить  $f(A)$  для любой непрерывной функции от самосопряженного элемента  $A$ ; тогда, зная математическое ожидание для всех непрерывных функций, можно определить понятие распределения вероятностей физической наблюдаемой в нормированном состоянии (состоянии, для которого  $\omega(1) = 1$ ).

Одного понятия состояния мало: нужно еще понятие эволюции состояния, потому что целью физики, как и любой науки — делать предсказания. Физик прежде всего рассматривает задачу: если есть какое-то начальное состояние, нужно предсказать, что будет потом.

В алгебраическом подходе для того, чтобы определить эволюцию, нужно прежде всего рассмотреть группу  $Aut$  автоморфизмов алгебры. Напомним, что автоморфизмы  $\mathcal{A}$  всегда должны коммутировать с инволюцией, и тогда эта группа автоморфиз-

мов, естественно действующая на линейных функционалах, переводит положительные функционалы в положительные (состояния в состояния). В любом подходе к квантовой теории состояния должны зависеть от времени. Должен быть оператор эволюции  $U(t)$ , который переводит состояние в начальный момент в состояние  $\omega(t)$  в какой-то другой момент времени  $t$ . Тогда  $\omega(t) = U(t)\omega(0)$ .

В алгебраическом подходе можно считать, что операторы  $U(t)$  являются автоморфизмами алгебры; они порождают обозначаемые точно так же операторы, действующие на состояния. Как и в обычной квантовой механике, есть картина Шредингера, где эволюционирует состояние, и есть картина Гейзенберга, где эволюционирует оператор. Эти две картины эквивалентны:

$$\omega(t)(A) = \omega(A(t)).$$

Наблюдать динамику состояния по времени при неподвижном элементе алгебры, это то же самое, что наблюдать динамику элемента алгебры  $A$  при неизменном состоянии.

В физике оператор эволюции обычно вычисляется исходя из уравнения движения, описывающих тот же оператор эволюции, но за бесконечно малое время. Если есть инвариантность относительно сдвига времени, то можно утверждать, что оператор, описывающий изменение за бесконечно малый промежуток времени, сам от времени не зависит. Уже было сказано, что изменение за конечное время должно быть автоморфизмом алгебры, значит, изменения за бесконечно малые промежутки времени — это инфинитезимальные автоморфизмы. Зная инфинитезимальный автоморфизм  $A$ , будем решать уравнение движения  $dV/dt = AV$ . Решение выражается через экспоненту от инфинитезимального автоморфизма  $e^{At} \in \mathcal{A}$ . В результате получаем однопараметрическую группу автоморфизмов, состоящую из преобразований вида  $e^{At}$  (операторов эволюции). (Физики в курсах квантовой механики пишут обычно мнимую единицу в экспоненте — я ее не пишу, но, конечно, никакой разницы в этом нет). Решение уравнения движения имеет вид  $V(t) = e^{At}V(0)$ .

Я не дал формального определения инфинитезимального автоморфизма. Одно из возможных формальных определений: инфинитезимальный автоморфизм — это касательный вектор к кривой в группе автоморфизмов в единичном элементе этой группы. Можно потребовать несколько больше: чтобы эта кривая была однопараметрической подгруппой.

Важно отметить, что инфинитезимальный автоморфизм является дифференцированием алгебры. Это означает, что он должен удовлетворять правилу Лейбница: применяя его к произведению  $xy$  нужно сначала применить его к первому сомножителю, оставляя второй неизменным, потом — ко второму сомножителю, первый оставив неизменным  $A(xy) = (Ax)y + x(Ay)$ . Это следует мгновенно из самого определения автоморфизма и самого определения инфинитезимального автоморфизма. Если есть инфинитезимальный автоморфизм, то  $1 + tA$  при малом  $t$  — это уже автоморфизм. (Точнее,  $1 + tA$  плюс нечто высшего порядка по  $t$  — это есть автоморфизм). Если применить определение автоморфизма, как раз получится правило Лейбница.

Обратно, если есть дифференцирование, то есть если выполнено правило Лейбница, и еще к тому же оно согласованно с инволюцией, то есть, выполняется условие  $(Ax)^* = A(x^*)$ , то можно надеяться, что это инфинитезимальный автоморфизм. Для того чтобы проверить, что это так, нужно написать уравнение движения

$$dU/dt = AU,$$

где  $U(t)$  — это элемент алгебры  $\mathcal{A}$ . Если это уравнение имеет решение с начальным условием  $U(0) = 1$ , то  $A$  является инфинитезимальным автоморфизмом — аналогом гамильтониана. Я буду говорить, что  $A$  это “гамильтониан”. Если алгебра конечномерна, то можно применить теорему существования решений дифференциальных

уравнений. В этом случае дифференцирование и инфинитезимальный автоморфизм — это одно и то же. Поскольку алгебра в физике бесконечномерна, то это в общем случае не так. Не всякое дифференцирование определяет инфинитезимальный автоморфизм. Нужно, чтобы уравнение движения имело решение, то есть, чтобы отвечающая этому уравнению эволюция существовала. Поэтому есть различие между дифференцированием и инфинитезимальным автоморфизмом. Легко проверить, что дифференцирования образуют алгебру Ли. Это же верно для дифференцирований, которые согласованы с инволюцией. Можно считать, что дифференцирования согласованные с инволюцией образуют алгебру Ли группы автоморфизмов  $Aut(\mathcal{A})$ . Для случая бесконечномерных групп понятие алгебры Ли не очень хорошо определено, но, тем не менее, это важное понятие, которое очень хорошо работает во многих случаях.

Я рассматривал случай, когда уравнение движения не зависит от времени, но, вообще говоря, это не обязательно. “Гамильтониан” может зависеть от времени, и тогда уравнение движения для операторов эволюции имеет вид:

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U(t).$$

Если оператор  $A(t)$  не зависит от  $t$ , то операторы эволюции образуют однопараметрическую группу:

$$U(t + \tau) = U(t)U(\tau).$$

Матрице плотности  $K$  отвечает линейный функционал  $\omega(A) = trKA$  на алгебре ограниченных операторов; этот функционал удовлетворяет условию  $\omega(A^*A) \geq 0$ . (Легко понять, что это условие вытекает из положительной определенности оператора  $K$ ). Эволюция матрицы плотности, как это рассказывается в курсе квантовой механики, описывается уравнением, в котором в правой части стоит коммутатор с самосопряженным оператором. Это уравнение имеет вид  $dK/dt = H(K)$ , где  $H(K) = [\hat{H}, K]/i\hbar$ ,  $\hat{H}$  — это обычный гамильтониан, а  $H$  — это “гамильтониан”.

Здесь введены следующие обозначения: операторы в гильбертовом пространстве — операторы с крышечкой, а операторы на матрицах — без крышечки. По теореме Стоуна самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве (не обязательно ограниченные) отвечают однопараметрическим подгруппам группы унитарных операторов. Унитарные операторы можно считать действующими на матрицах плотности. В теореме Стоуна требуется, чтобы подгруппы были непрерывны в сильном смысле. (Я не буду пояснять, что это такое — мне это не понадобится). Если самосопряженный оператор ограничен, то соответствующая однопараметрическая подгруппа дифференцируема в смысле сходимости по норме. В дальнейшем я не буду обращать внимания на эти тонкости.

Я хочу еще пару слов сказать про связь алгебраического подхода со стандартным подходом, основанным на гильбертовых пространствах, и объяснить, почему алгебраический подход лучше. Пусть у нас имеется сохраняющее инволюцию представление алгебры  $\mathcal{A}$  операторами в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Иными словами, рассмотрим сохраняющий инволюцию гомоморфизм алгебры  $\mathcal{A}$  в алгебру операторов. Обозначим оператор, отвечающий элементу  $A$  алгебры  $\mathcal{A}$  через  $\hat{A}$ , тогда каждому нормированному вектору  $\Phi \in \mathcal{H}$  отвечает нормированное же состояние  $\omega$  алгебры  $\mathcal{A}$  по формуле

$$\omega(A) = \langle \hat{A}\Phi, \Phi \rangle.$$

Более того, каждой матрице плотности  $K$  отвечает состояние по формуле  $\omega(A) = tr(K\hat{A})$ . Иными словами, можно получать состояния алгебры из векторов в гильбертовом пространстве. Возникает естественный вопрос: все ли состояния алгебры можно так получить? Ответ на этот вопрос положительный. Всякое состояние может



быть представлено вектором в гильбертовом пространстве, и это причина того, что физики в состоянии работать все время в гильбертовом пространстве.

Почему это во многих случаях неудобно? Дело в том, что исходя из алгебры наблюдаемых невозможно ограничиться одним гильбертовым пространством — в разных ситуациях придется рассматривать разные гильбертовы пространства. Например, в статистической физике рассматриваются равновесные состояния. Каждое равновесное состояние лежит в своем гильбертовом пространстве. Это не всегда удобно.

Одним гильбертовым пространством, как правило, можно обойтись в квантовой теории поля, потому что там обычно рассматривается гильбертово пространство, в котором лежит основное состояние. Его элементы отвечают возбуждениям основного состояния, которые только и нужны в квантовой теории поля. По этой причине в квантовой теории поля обычно можно обойтись одним гильбертовым пространством, но это не всегда — в квантовой электродинамике этого сделать нельзя: там электрон одевается облаком мягких фотонов, которые выводят из изначального гильбертова пространства.

Сейчас я собираюсь доказать, что каждое состояние алгебры с инволюцией представляется вектором из гильбертова пространства, которое я собираюсь построить. Построение такого гильбертова пространства осуществляется конструкцией Гельфанда – Наймарка – Сигала (GNS-конструкция), которую я сейчас объясню. Для каждой алгебры  $\mathcal{A}$  я построю предгильбертово пространство  $\mathcal{E}$ . (Здесь мне будет удобно работать с предгильбертовыми пространствами.) Я построю представление алгебры операторами в этом предгильбертовом пространстве таким образом, что некоторому циклическому вектору, который я обозначаю буквой  $\theta \in \mathcal{E}$ , будет отвечать состояние  $\omega(A) = \langle \hat{A}\theta, \theta \rangle$ . То, что вектор циклический означает, что всякий другой вектор можно из него получить с помощью операторов из алгебры (все векторы имеют вид  $\hat{A}\theta$ , где  $A \in \mathcal{A}$ ).

Конструкция, которую я буду объяснять, однозначна с точностью до эквивалентности, как будет видно из построения. Для ее построения я предположу, что такое представление у меня уже есть, и определю в алгебре скалярное произведение по формуле

$$\langle A, B \rangle = \omega(B^* A).$$

Зная это скалярное произведение в алгебре, я могу вычислить произведение векторов  $\hat{A}\theta$  и  $\hat{B}\theta$  просто перекидывая  $\hat{B}$  на первый сомножитель, а дальше пользуюсь тем, что гомоморфизм, сохраняет инволюцию, я могу с этой пары операторов перекинуть крышечку на  $B^* A$ . Это как раз и есть  $\omega(B^* A)$ :

$$\langle \hat{A}\theta, \hat{B}\theta \rangle = \langle \hat{B}^* \hat{A}\theta, \theta \rangle = \langle (\widehat{B^* A})\theta, \theta \rangle = \omega(B^* A).$$

В результате получилось так, что если я знаю  $\omega(B^* A)$ , то могу вычислить скалярное произведение  $\hat{A}\theta$  и  $\hat{B}\theta$ . Так как вектор  $\theta$  циклический, каждый вектор пространства имеет вид  $\hat{A}\theta$ . Это условие цикличности. Теперь я могу сказать, что имеется отображение  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ , которое переводит  $A$  в  $\hat{A}\theta$ , и это отображение сюръективное (то есть, на). Отсюда следует, что  $\mathcal{E}$  получается из  $\mathcal{A}$  факторизацией. Нужно профакторизовать по всем векторам, которые дают 0 в скалярном произведении с любыми другими векторами (нулевым векторам).

Чтобы дать теперь окончательный ответ на вопрос: как построить  $\mathcal{E}$  исходя из алгебры  $\mathcal{A}$  и  $\omega$ , нужно просто взять алгебру  $\mathcal{A}$ , ввести в ней скалярное произведение по формуле  $\omega(B^* A)$  и профакторизовать по нулевым векторам. Получится предгильбертово пространство. (Факторизуя по нулевым векторам, можно снова определить скалярное произведение в фактор-пространстве). В результате получилась эта конструкция, которую я, по существу, вывел, а не придумал. Я увидел, что она

обязательно должна быть такой, потому что исходя из того, что вектор  $\theta$  циклический, я сделал две вещи: во-первых, построил предгильбертово пространство, а, во-вторых, доказал, что моя конструкция по существу единственна, ничего другого сделать нельзя. Я ее вывел из цикличности. Это рассуждение (конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала) — самый важный элемент из того, что я в этой лекции собираюсь рассказывать. Этой конструкцией я буду пользоваться много раз. Вместо предгильбертова пространства я могу рассматривать его пополнение  $\bar{\mathcal{E}}$  — гильбертово пространство (тогда вектор  $\theta$  будет циклическим в более слабом смысле: векторы вида  $A\theta$  будут плотны в  $\bar{\mathcal{E}}$ ).

Для иллюстрации возьмем какое-то стационарное состояние (состояние, которое не меняется при эволюции) и применим к нему GNS-конструкцию. Тогда получится некоторое гильбертово пространство и циклический вектор в нем, который тоже будет стационарным, не будет зависеть от времени.

Утверждение: если исходить из стационарного состояния, то в новом гильбертовом пространстве, полученном с помощью данной конструкции будет действовать группа унитарных операторов, отвечающих операторам эволюции  $U(t)$ .

Это очень просто понять. Дело в том, что GNS-конструкция использовала в качестве скалярного произведения  $\omega(B^*A)$ . Но это скалярное произведение инвариантно относительно операторов  $U(t)$  потому что  $\omega$  инвариантно (то есть, не изменяется оператором эволюции). Раз скалярное произведение инвариантно, то операторы  $U(t)$  спускаются в унитарные операторы  $\hat{U}(t)$ . Операторы  $\hat{U}(t)$  образуют однопараметрическую группу. У нее есть генератор (инфинитезимальный автоморфизм)  $\hat{H}$ , и это то, что в физике называется гамильтонианом. (На самом деле это не совсем так, потому что в физике гамильтониан считается самосопряженным оператором, и для этого нужно поставить мнимую единицу в определении:  $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t}$ ).

Я говорю, что состояние  $\omega$  — это основное состояние, если спектр оператора  $\hat{H}$  неотрицателен. Обращаю внимание, что основное состояние будет иметь нулевую энергию при таком определении. Это оказывается согласованным со стандартным определением. Если применить GNS-конструкцию к алгебре ограниченных операторов и состоянию, отвечающему собственному вектору гамильтониана с собственным значением  $E$ , то тогда генератором группы  $\hat{U}(t)$  построенной с помощью GNS-конструкции будет  $\hat{H} - E$ . В квантовой теории поля всегда говорят, что мы будем отсчитывать энергию от основного состояния, и не будем обращать внимание на тот бесконечный вклад, который присутствует в буквальном подходе. Алгебраическая GNS-конструкция делает это сама по себе.

Я все время говорил, что рассматриваю алгебраический подход в квантовой механике. Этот подход прекрасно работает и в классической механике. Чтобы показать это, будем работать в гамильтоновом формализме и тогда можно повторить те же самые рассуждения. Чистое состояние описывается обобщенными импульсами  $p = (p_1, \dots, p_n)$  и обобщенными координатами  $q = (q^1, \dots, q^n)$ , представляющими точки в  $2n$ -мерном пространстве, которое называется фазовым пространством. Это — чистое состояние, но, точно так же как в квантовой механике, можно рассматривать и смешанные состояния.

Смешанное состояние — это распределение вероятностей на фазовом пространстве или положительная мера на фазовом пространстве (считается, что мера всего пространства равна единице). Все эти распределения вероятностей образуют выпуклое множество  $\mathcal{D}$ . Чистые состояния — это крайние точки этого множества. Чистое состояние — это распределение вероятностей, которое сосредоточено ровно в одной точке. Ему отвечает плотность распределения вероятностей, которая является дельта-функцией. Любая функция является суперпозицией дельта-функций (иными словами, любую функцию можно представить как интеграл от дельта-функций). Это

означает, что всякому распределению вероятностей на фазовом пространстве отвечает распределение вероятностей на чистых состояниях, а чистые состояния можно отождествить с крайними точками пространства всех состояний.

В рассматриваемом случае, соответствующем в классической механике, всякое состояние может быть представлено единственным образом как смесь чистых состояний. Это отличает классическую механику от квантовой механики, где состояние может быть представлено как смесь чистых состояний множеством разных способов. Позже я расскажу, как квантовую механику можно получить из классической механики, если позволить себе рассматривать не все наблюдаемые. Естественно с физической точки зрения предположить, что наши приборы не могут измерить всё, что есть на свете. Мое утверждение: если есть такая ситуация, то классическая механика может превратиться в квантовую механику.

Дальше я напомним хорошо известное уравнение движения Гамильтона

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

и уравнение Лиувилля для плотности распределения вероятностей, которое записывается в терминах скобок Пуассона как:

$$\frac{d}{dt}\rho(p, q, t) = \{H, \rho(p, q, t)\}.$$

Скобки Пуассона при этом определяются формулой

$$\{f, H\} = -\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Для того чтобы определить эволюцию  $U(t)$  нужно будет решить уравнение  $\frac{d}{dt}U(t) = LU(t)$ , где  $L\rho = \{H, \rho\}$ . Это уравнение эквивалентно уравнению Лиувилля. Для того, чтобы в этом убедиться, нужно просто проверить, что на чистых состояниях оно сводится к гамильтоновым уравнениям. В классической механике, точно так же как в квантовой, можно следить как развиваются наблюдаемые (а не состояния). Наблюдаемые - это действительные функции  $f(p, q)$  на фазовом пространстве. Легко можно вывести из уравнений Гамильтона, что это развитие происходит в соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dt}f(p(t), q(t)) = -\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p}$$

или

$$\frac{d}{dt}f(p(t), q(t)) = \{f, H\},$$

где в правой части стоит скобка Пуассона. Теперь мы видим, что находимся в той же ситуации как квантовая механика или, наоборот, квантовая механика находится в той же ситуации, как и классическая механика. У нас есть наблюдаемые. Они образуют алгебру  $\mathcal{A}$ . Эти наблюдаемые вы можете перемножать. Есть понятие инволюции. (Инволюция — это просто комплексное сопряжение). Каждому состоянию  $\omega$  отвечает линейный функционал на наблюдаемых  $\mathcal{A}$ : нужно взять интеграл от функции по распределению вероятностей

$$\omega(f) = \int f\omega.$$

(Распределение вероятностей — это мера, по которой можно проинтегрировать). Этот функционал удовлетворяет условию положительности:  $\omega(f) \geq 0$  при  $f \geq 0$  потому что для каждой положительной функции будет неотрицательный ответ. Функции типа  $A^*A$ , несомненно, положительны (просто квадрат модуля), так что классическая механика входит как маленький кусочек в алгебраический подход к квантовой механике, но есть разница: в классической механике алгебра наблюдаемых коммутативна.

## 2 Лекция 2

### 2.1 Квантовая механика как деформация классической механики. Алгебра Вейля

Теперь я попытаюсь объяснить как математик мог бы вывести квантовую механику из классической. Он знает, что квантовая механика в пределе малой постоянной Планка сводится к классической. Это означает, что квантовая механика получается деформацией — маленьким изменением классической механики. Должно быть семейство алгебр  $\mathcal{A}_\hbar$ , которое зависит от постоянной Планка  $\hbar$ . Зависимость эта непрерывная и дифференцируемая. При равной нулю постоянной Планка  $\hbar = 0$  должна получаться классическая механика, то есть, должна получаться коммутативная алгебра с произведением  $A \cdot B$ . Будем считать (это не обязательно, как мы увидим вскоре), что все эти алгебры определены в том же самом векторном пространстве, то есть, сложение и умножение на число независимы от постоянной Планка, а умножение элементов алгебры зависит от постоянной Планка  $A \cdot_\hbar B$ . Теперь рассмотрим коммутатор в этой алгебре, зависящей от постоянной Планка:

$$[A, B]_\hbar = A \cdot_\hbar B - B \cdot_\hbar A$$

Наше основное требование — чтобы этот коммутатор обращался в ноль при обращении в ноль постоянной Планка:  $\hbar = 0$ . Будем считать, что зависимость от постоянной Планка является гладкой. Это означает, что коммутатор представляется как линейная по  $\hbar$  часть и нечто более высокого порядка:

$$[A, B]_\hbar = i\{A, B\}\hbar + O(\hbar^2).$$

То, что линейно по  $\hbar$  обозначено как фигурная скобка, умноженная на мнимую единицу; я докажу, что фигурная скобка — это и есть скобка Пуассона. Точнее, она имеет те же свойства, которые есть у скобки Пуассона. Это означает, что новая операция есть дифференцирование (удовлетворяет правилу Лейбница):

$$\{A \cdot B, C\} = \{A, C\} \cdot B + A \cdot \{B, C\}$$

и, кроме того, удовлетворяет аксиомам алгебры Ли. Нетрудно доказать, что это так. Свойства обычного коммутатора в ассоциативной алгебре:

$$[A, B] = -[B, A],$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0,$$

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$$

должны удовлетворяться при каждой постоянной Планка  $\hbar$ . Разложим все эти равенства по постоянной Планка. Во втором равенстве нужно разлагать до второго порядка, а в остальных — до первого достаточно. Если приравнять члены первого порядка по  $\hbar$ , то как раз получаются нужные свойства. То есть, мы убедились, что в пределе из квантовой механики получается классическая механика. Коммутатор переходит в скобку Пуассона.

Давайте посмотрим: можно ли пойти наоборот. Мы видели как из квантовой механики получается классическая. А теперь мы интересуемся: можно ли из классической механики получить квантовую? Для этого я сначала опишу все возможные скобки Пуассона в том случае, когда алгебра  $\mathcal{A}$  является алгеброй полиномиальных функций на каком-то векторном пространстве с координатами  $(u^1, \dots, u^n)$ . Если она является

алгеброй полиномов, то для того, чтобы вычислить, как работает скобка Пуассона, нужно знать только какова скобка Пуассона у этих координат. Это обусловлено тем, что любая другая функция — это полином, а у меня есть свойство, которое позволяет вычислять скобку Пуассона от произведения. Полином — это линейная комбинация произведений координат, и поэтому скобку двух полиномов можно вычислить. Результат вычисления таков:

$$\{A, B\} = \frac{1}{2} \sigma^{kl}(u) \frac{\partial A}{\partial u^k} \frac{\partial B}{\partial u^l}, \quad (1)$$

где  $\sigma^{kl}(u)$  обозначает скобку Пуассона координат  $u^k, u^l$ .

Наоборот, можно проверить, что если  $\sigma$  является антисимметрической и независимой от  $u$ , то это выражение будет удовлетворять условиям, наложенным на скобку Пуассона. Это как раз ситуация, которая возникает, когда мы имеем дело со стандартной скобкой Пуассона в фазовом пространстве.

Теперь я могу задать вопрос: как продеформировать скобку Пуассона, чтобы получилось то, что мне нужно в квантовой механике. Эта задача непростая. Она была решена сравнительно недавно Концевичем. Но в том случае, когда матрицы  $\sigma$  не зависят от  $u$ , то есть, когда скобка Пуассона двух координат не зависит от  $u$ , то сделать это очень легко. Именно, я определю алгебру  $\mathcal{A}_\hbar$  как ассоциативную алгебру с генераторами  $\hat{u}^k$ , связанными соотношением:

$$\hat{u}^k \hat{u}^l - \hat{u}^l \hat{u}^k = i\hbar \sigma^{kl}. \quad (2)$$

Я просто переписал то условие, которое у меня было наложено на скобку Пуассона координат. Это, конечно, можно было сделать и в том случае, когда  $\sigma$  зависит от  $u$ , но тогда неизвестно: получилась бы ассоциативная алгебра или нет. Если же  $\sigma$  не зависит от  $u$ , то получается ассоциативная алгебра, которая называется алгеброй Вейля. Если мы исходим из полиномов, то это — единственный (с точностью до выбора генераторов) способ продеформировать скобку Пуассона. Я ввожу инволюцию в алгебре Вейля считая генераторы  $\hat{u}^k$  самосопряженными.

Мы получили коммутационные соотношения, которые несколько в другом виде хорошо известны из квантовой механики. Чтобы это показать, я потребую, чтобы матрица  $\sigma$  была обратима. Тогда эту матрицу можно упростить. Это антисимметричная матрица и, в буквальном смысле, ее диагонализировать нельзя, однако ее можно записать в подходящем базисе как блочно-диагональную матрицу, состоящую из двумерных блоков. Если этим воспользоваться, то заменив систему генераторов, можно свести коммутационные соотношения в алгебре Вейля к хорошо известным в квантовой механике коммутационным соотношениям:

$$\hat{p}_k \hat{p}_l = \hat{p}_l \hat{p}_k, \quad \hat{q}^k \hat{q}^l = \hat{q}^l \hat{q}^k, \quad \hat{p}_k \hat{q}^l - \hat{q}^l \hat{p}_k = \frac{\hbar}{i} \delta_k^l.$$

Это — коммутационные соотношения для координат и импульсов в стандартной квантовой механике. Они называются каноническими коммутационными соотношениями.

Вместо самосопряженных генераторов можно взять другие генераторы, которые не самосопряжены, но сопряжены друг с другом и удовлетворяют соотношениям

$$\hat{a}_k \hat{a}_l = \hat{a}_l \hat{a}_k, \quad \hat{a}_k^* \hat{a}_l^* = \hat{a}_l^* \hat{a}_k^*, \quad \hat{a}_k \hat{a}_l^* - \hat{a}_l^* \hat{a}_k = \hbar \delta_{kl}.$$

Здесь  $\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}^k + i\hat{p}_k)$ ,  $\hat{a}_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}^k - i\hat{p}_k)$ .

Так обозначаются операторы рождения и уничтожения, но, пока что, это у меня — формальный математический объект. Я их ввел формально и написал для них коммутационные соотношения. Эти коммутационные соотношения тоже называются каноническими коммутационными соотношениями.

Могу ли я теперь сказать, что полученная алгебра  $\mathcal{A}_\hbar$  — это деформация коммутативной алгебры? Формально — не могу, потому что, когда я определял понятие деформации, то потребовал, чтобы все эти алгебры были определены на одном и том же пространстве, иначе было бы трудно рассматривать все одновременно. Моя коммутативная алгебра состояла из полиномов, а эта алгебра состоит неизвестно из чего. Но ее тоже можно сделать состоящей из полиномов. Это делается очень просто.

Построенная алгебра порождена элементами  $\hat{q}^k$  и  $\hat{p}^k$ , то есть, ее элементы являются суммами мономов, составленных из генераторов  $\hat{q}^k$  и  $\hat{p}^k$ . Благодаря наличию коммутационного соотношения я могу сдвинуть все генераторы  $\hat{q}^k$  налево а  $\hat{p}^k$  направо (можно и наоборот) и потом снять крышечки с них. Тогда получится обычный полином и я могу сказать, что элемент из моей алгебры представлен полиномом, который называется  $q$ - $p$ -символом. Тогда алгебра определена на пространстве полиномов. Это не очень хорошее представление, потому что оно не согласовано с инволюцией. Тем не менее оно тоже очень полезно во многих случаях.

Если исходить из операторов  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^*$ , то можно использовать ту же самую идею: сдвинуть  $\hat{a}_k^*$  налево,  $\hat{a}_k$  — направо и получится то, что называется нормальной формой элемента вейлевской алгебры. Теперь опять можно снять крышечки и получить полином, который называется символом Вика. Физики термин “символ Вика” не используют, но слово “нормальная форма” они используют все время. Как легко видеть, переход к нормальной форме согласован с инволюцией.

Мы можем рассматривать алгебру Вейля с бесконечным числом образующих. До сих пор параметр  $k$  у нас считался дискретным (хотя количество  $u_k$  или  $a_k$  с индексом  $k$  могло быть бесконечным), но можно считать этот параметр непрерывным. Например, рассматривать алгебру с генераторами  $\hat{a}(k), \hat{a}^*(l)$  и соотношениями

$$\begin{aligned}\hat{a}(k)\hat{a}(l) &= \hat{a}(l)\hat{a}(k), & \hat{a}^*(k)\hat{a}^*(l) &= \hat{a}^*(l)\hat{a}^*(k), \\ \hat{a}(k)\hat{a}^*(l) - \hat{a}^*(l)\hat{a}(k) &= \hbar\delta(k, l).\end{aligned}$$

В этом случае вместо символа Кронекера возникает непрерывный его аналог:  $\delta$ -функция. Так как функция  $\delta(k, l)$  — это обобщенная функция, генераторы алгебры  $\hat{a}(k), \hat{a}^*(l)$  нужно также рассматривать как обобщенные функции. Обобщенная функция — это такая функция, которая имеет смысл только под знаком интеграла. Имеют смысл только элементы  $\hat{a}(f) = \int f(k)\hat{a}(k)dk$  и  $\hat{a}^*(g) = \int g(l)\hat{a}^*(l)dl$ , представляющие собой формальные интегралы. Эти элементы линейно зависят соответственно от  $f$  и  $g$  и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}\hat{a}(f)\hat{a}(g) &= \hat{a}(g)\hat{a}(f), & \hat{a}^*(f)\hat{a}^*(g) &= \hat{a}^*(g)\hat{a}^*(f), \\ \hat{a}(f)\hat{a}^*(g) - \hat{a}^*(g)\hat{a}(f) &= \hbar\langle f, \bar{g} \rangle.\end{aligned}$$

Для того, чтобы эти соотношения имели смысл, нужно чтобы было определено скалярное произведение  $\langle f, \bar{g} \rangle$ . Поскольку скалярное произведение зависит от  $g$  антилинейно, то в нем стоит комплексное сопряжение от  $g$ . Я обычно буду считать, что индекс  $k$  дискретен, но следует понимать, что все можно перенести на случай непрерывного индекса.

Я уже говорил, что элементы алгебры Вейля можно представлять полиномами, например, с помощью понятия виковского символа, который определяется с помощью сдвига всех генераторов  $\hat{a}_k^*$  налево и снятием крышечек.

Виковские символы согласованы с определением инволюции. (Инволюции в алгебре отвечает комплексное сопряжение полиномов.)

Переход к символам — это операция, которая тесно связана с операцией квантования. Что такое квантование? Пусть имеется классический гамильтониан и мы хотим

получить его квантовый аналог. Если гамильтониан зависит от  $u_k$ , то при простой замене  $u$  на  $\hat{u}$  возникает проблема, в каком порядке ставить эти генераторы? В классике не важен порядок:  $u_1 u_2$  и  $u_2 u_1$  — это одно и то же, но если переходить к квантовой механике, к алгебре Вейля, то все зависит от порядка. Это — то, что по-английски называется «ordering ambiguity» и означает, что нет однозначной процедуры квантования. Ее можно сделать однозначной выбрав понятие символа, но символов разных много.

Есть такие случаи, когда квантовый гамильтониан имеет естественное определение. Это, например, стандартная в классической механике ситуация, когда гамильтониан делится на кинетическую и потенциальную энергии. Кинетическая энергия зависит только от импульсов, а потенциальная энергия — только от координат, и тогда можно ставить шапочки и все будет абсолютно однозначно потому что квантовые импульсы между собой коммутируют и квантовые координаты между собой коммутируют.

Для того, чтобы написать уравнение движения есть стандартный способ: в классических уравнениях движения на месте скобок Пуассона нужно писать коммутаторы:

$$\frac{\partial \hat{u}^k}{dt} = i[\hat{H}, \hat{u}^k].$$

В этой формуле я считаю, что  $\hbar = 1$ . В дальнейшем постоянная Планка  $\hbar$  всегда будет приниматься равной единице, если не сказано обратное.

Уравнение движения осмыслено, если гамильтониан  $\hat{H}$  является элементом алгебры Вейля. Я уже объяснял, что в уравнении движения должна стоять операция, которая удовлетворяет правилу Лейбница. Такая операция называется дифференцированием. Коммутатор вида  $D_h(a) = [h, a]$  как раз удовлетворяет правилу Лейбница  $[h, ab] = [h, a]b + a[h, b]$  для любой алгебры и поэтому пока  $\hat{H}$  является элементом алгебры Вейля — все замечательно. Единственное, что нехорошо — это то, что он очень часто не является элементом алгебры Вейля в случае бесконечного количества степеней свободы. Типичный пример — гамильтониан вида

$$\hat{H} = \sum \epsilon_k \hat{a}_k^* \hat{a}_k.$$

Когда число индексов бесконечно, это бесконечная сумма. В алгебре Вейля ничего похожего нет. Этот гамильтониан не принадлежит алгебре Вейля. Тем не менее, можно формально взять коммутатор гамильтониана  $\hat{H}$  и  $\hat{a}_k$ . Получается уравнение движения, которое еще встретится неоднократно:

$$\frac{d\hat{a}_k}{dt} = -i\epsilon_k \hat{a}_k, \quad \frac{d\hat{a}_k^*}{dt} = i\epsilon_k \hat{a}_k^*.$$

Таким образом, в случае бесконечного числа степеней свободы гамильтониан — это не элемент алгебры Вейля, а просто формальное выражение вида

$$\hat{H} = \sum \Gamma_{m,n}(k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_n) \hat{a}_{k_1}^* \dots \hat{a}_{k_m}^* \hat{a}_{l_1} \dots \hat{a}_{l_n},$$

которое само по себе смысла оператора и смысла элемента алгебры Вейля не имеет, но, тем не менее, имеет смысл под знаком коммутатора в уравнениях движения. Это происходит не всегда, но есть очень простые условия, когда оно точно имеет смысл. Когда берется коммутатор операторов  $\hat{a}_k$  или  $\hat{a}_k^*$  с произведением, следует прокоммутировать с каждым элементом этого произведения. При коммутировании возникнет символ Кронекера, а в коммутатор войдут только те коэффициенты, у которых индекс совпадает с индексом у операторов, с которыми происходит коммутирование. Если у всякого индекса в гамильтониане есть только конечное число ненулевых коэффициентов содержащих этот индекс, то уравнение движения имеет смысл.

## 2.2 Квадратичные гамильтонианы

Перейдем к рассмотрению квадратичных гамильтонианов вида

$$H(u) = \frac{1}{2} H_{kl} u^k u^l.$$

Здесь упорядочение не играет никакой роли, потому что при смене порядка появится константа. Эта константа несущественна, поскольку гамильтониан используется только под знаком коммутатора, где константы исчезают. Классические уравнения движения и квантовые уравнения движения совершенно одинаковы. Более того, если мы умеем решать классические уравнения движения, то сразу же умеем решать и квантовые уравнения движения, потому что все уравнения движения линейны, а разница между классической и квантовой механикой возникает только тогда, когда перемножаются операторы. Тут же перемножать ничего не нужно, так что все очень просто.

Эту же задачу можно сделать еще проще, а именно, можно гамильтониан упростить. Если предположить, что гамильтониан положительно определен и матрица  $H_{kl}$  невырождена, то можно представить гамильтониан как сумму квадратов.

Остается еще проблема с матрицей  $\sigma$ . Ее тоже можно сделать проще, сохраняя при этом представление гамильтониана как суммы квадратов. Для того чтобы сохранить это свойство, следует брать только ортогональные преобразования. Заметим, что  $\sigma$  — антисимметричная матрица (так как она появилась из алгебры Вейля). Если антисимметричную матрицу умножить на мнимую единицу получится матрица, которая отвечает самосопряженному оператору и ее можно диагонализировать. Эта диагонализация происходит в комплексной области, но можно сказать, что вместе с каждым собственным вектором будет и комплексно сопряженный собственный вектор. Можно рассмотреть картинку, которая содержит два комплексно сопряженных вектора, взять в ней действительную и мнимую части и получить представление матрицы  $\sigma^{kl}$  в блочно-диагональном виде с двумерными блоками. Эти двумерные блоки будут являться антисимметричными матрицами, поэтому гамильтониан примет форму суммы гамильтонианов вида

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \epsilon^2 \hat{q}^2),$$

где  $[\hat{p}, \hat{q}] = \frac{1}{i}$ . Это чрезвычайно важное упрощение, которое всегда можно сделать для положительного квадратичного гамильтониана. Я это рассказывал для случая конечного числа степеней свободы. Важно заметить, что для случая бесконечного числа степеней свободы это все тоже правильно. Единственная проблема заключается в том, что при диагонализации самосопряженного оператора кроме дискретного спектра может появиться непрерывный спектр. Я к этому еще вернусь. Теперь рассмотрим гамильтониан

$$\hat{H} = \sum \frac{1}{2} (\hat{p}_k^2 + \epsilon_k^2 (\hat{q}^k)^2)$$

и будем решать соответствующие ему уравнения движения

$$\frac{d\hat{p}_k}{dt} = -\epsilon_k^2 \hat{q}^k, \quad \frac{d\hat{q}^k}{dt} = \hat{p}_k.$$

Это стандартные уравнения движения осциллятора точно такие же, как в классике. Их можно решить десятками способов, но самый простой способ — это ввести новые переменные

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\epsilon_k} \hat{q}^k + \frac{i\hat{p}_k}{\sqrt{\epsilon_k}}), \quad \hat{a}_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\epsilon_k} \hat{q}^k - \frac{i\hat{p}_k}{\sqrt{\epsilon_k}}).$$



В таком случае уравнения движения

$$\frac{d\hat{a}_k}{dt} = -i\epsilon_k\hat{a}_k, \quad \frac{d\hat{a}_k^*}{dt} = i\epsilon_k\hat{a}_k^*,$$

которые отвечают гамильтониану

$$\hat{H} = \sum \epsilon_k \hat{a}_k^* \hat{a}_k, \quad (3)$$

имеют очень простое решение:

$$\hat{a}_k(t) = e^{-it\epsilon_k} \hat{a}_k(0), \quad \hat{a}_k^*(t) = e^{it\epsilon_k} \hat{a}_k^*(0).$$

В случае бесконечного числа степеней свободы в силу спектральной теоремы тоже можно считать, что все диагонально, но вместо суммы возникнет интеграл и тогда гамильтониан будет иметь вид:

$$\hat{H} = \int d\lambda \epsilon(\lambda) \hat{a}^*(\lambda) \hat{a}(\lambda).$$

В физике  $\lambda$  — это обычно совокупность непрерывных и дискретных индексов, а интеграл включает как обычное интегрирование, так и суммирование по дискретному индексу. В частном случае когда теория трансляционно инвариантна, мы считаем, что операторы  $\hat{a}^*(x)$  и  $\hat{a}(x)$  зависят от координат  $x$ , которые можно сдвигать не меняя гамильтониана. Это значит, что гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \int dx dy \epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{a}^*(\mathbf{x}) \hat{a}(\mathbf{y}),$$

где коэффициент зависит только от разности  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ . (В рассматриваемом выражении могут быть также дискретные индексы — по ним нужно проводить суммирование.)

Можно перейти к импульсному представлению (взять преобразование Фурье). Тогда гамильтониан примет вид:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{k} \epsilon(\mathbf{k}) \hat{a}^*(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}).$$

Мы будем все время рассматривать трансляционно инвариантные гамильтонианы, и эта формула будет существенно использоваться.

## 2.3 Стационарные состояния

Теперь кратко обсудим стационарные (не зависящие от времени) состояния. Если операторы эволюции обозначить  $U(t)$ , то для стационарного состояния выполняется условие  $U(t)\omega = \omega$ .

Если работать в формализме матриц плотности  $K$ , то, учитывая что уравнения движения для матрицы плотности записывается как коммутатор с гамильтонианом  $\hat{H}$ , можно сделать вывод что матрица плотности представляет стационарное состояние, если она коммутирует с гамильтонианом. В частности, если матрица плотности является функцией оператора  $\hat{H}$ , то состояние стационарно.

Если говорить не о матрице плотности, а о векторе состояния, то стационарное состояние удовлетворяет условию  $\hat{H}\Psi = E\Psi$ , то есть стационарное состояние является собственной функцией гамильтониана. Гамильтониан имеет смысл оператора энергии, а  $E$  — это уровень энергии. Вектор  $\Psi$  с течением времени просто умножается на множитель:

$$\Psi(t) = \hat{U}(t)\Psi = e^{-itE}\Psi \sim \Psi.$$

Вектор меняется — состояние не меняется.

В алгебраическом подходе гамильтониан может быть формальным выражением, но можно применить GNS-конструкцию к какому-то стационарному состоянию  $\omega$  и получить гильбертово пространство, в котором есть унитарные операторы, описывающие эволюцию (сдвиг по времени) и есть генератор группы временных трансляций, который имеет смысл гамильтониана — оператора энергии. Его собственные значения имеют смысл уровней энергии возбуждений состояния  $\omega$ . Точнее говоря, такая интерпретация будет совершенно правильной в том случае, когда само  $\omega$  стационарно и трансляционно инвариантно (инвариантно как относительно пространственных, так и временных трансляций).

Проиллюстрировать это можно следующим образом: трансляционно инвариантное состояние можно представить в виде горизонтальной прямой. У него обычно бесконечная энергия, но все отсчитывается от этой бесконечной энергии. (В алгебраической квантовой механике никакой бесконечной энергии нет — просто надо отсчитывать энергию от энергии этого состояния, считая ее равной нулю). Возбуждение нужно воспринимать как сосредоточенный в конечной области горбик на этой горизонтальной прямой, и тогда имеет смысл понятие энергии. Эта энергия отсчитывается уже от энергии трансляционно инвариантного состояния.

Важное и простое замечание, которое в курсе квантовой механики объясняется в несколько менее общей ситуации, заключается в следующем. Рассмотрим классический гамильтониан  $H(u)$ , у которого есть минимум в невырожденной критической точке. Это означает, что квадратичная часть в разложении Тейлора положительно определена; тогда нет нулевых мод, квантовый гамильтониан в первом приближении квадратичен; в соответствующих координатах он будет иметь вид:

$$\hat{H} = \int d\lambda \epsilon(\lambda) \hat{a}^*(\lambda) \hat{a}(\lambda) + \dots,$$

где обозначенные как ... члены начинаются с кубических по  $\hat{a}^*, \hat{a}$  (линейных членов быть не может потому что мы находимся в критической точке). Члены высшего порядка по  $\hat{a}^*, \hat{a}$  также являются членами высшего порядка по постоянной Планка. По крайней мере, в квазиклассике можно этими членами пренебречь. Если же мы работаем не в квазиклассическом приближении, здесь можно поставить какой-то множитель и рассматривать теорию возмущений по этому множителю.

## 2.4 Пространство Фока

Перейдем теперь к рассмотрению представлений алгебры Вейля (или, что то же — представлений канонических коммутационных соотношений). Среди этих представлений есть одно замечательное, самое простое, которое называется представлением Фока, а пространство, в котором оно живет, называется пространством Фока. Определяется фоксовое представление просто: в нем существует циклический вектор  $|0\rangle$ , который уничтожается всеми операторами  $\hat{a}_k$ :

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0.$$

Это условие с точностью до эквивалентности однозначно определяет представление. Попробуем сейчас выписать в конкретной форме то как оно устроено.

Вектор  $|0\rangle$  — циклический. Определение циклическости зависит от того, живем ли мы в предгильбертовом или в гильбертовом пространстве. Если мы живем в предгильбертовом пространстве, то, применяя элементы алгебры к циклическому вектору, можно получить все векторы. Если мы живем в гильбертовом пространстве это не совсем так: нужно разрешить взятие предела. То есть, взять еще замыкание множества

тех векторов, которые получаются с помощью алгебраических операций. Давайте посмотрим, что будет здесь? Оператор  $\hat{a}_k$  уничтожает  $|0\rangle$ , поэтому действовать им на  $|0\rangle$  не надо — ничего нового не получится. Нужно действовать только операторами рождения  $\hat{a}_k^*$ :

$$(\hat{a}_{k_1}^*)^{n_1} \dots (\hat{a}_{k_s}^*)^{n_s} |0\rangle. \quad (4)$$

Здесь применены операторы рождения много раз. (Конечное число раз, так как в алгебре Вейля существуют только конечные комбинации этих операторов.)

Теперь спрашивается: можем ли мы получить что-нибудь новое, если применим к этому выражению оператор  $\hat{a}_k$ ? Ответ: нет, не получим, потому что можно пользуясь коммутационными соотношениями переставить оператор  $\hat{a}_k$  так, чтобы он действовал на вакуум. Тогда оператор  $\hat{a}_k$  исчезнет в силу наложенного условия. Поэтому только выражения вида (4) и их линейные комбинации принадлежат пространству Фока, если пользоваться буквальным определением цикличности без взятия предела. Дальше следует заметить, что все выписанные состояния (4) являются собственными векторами любого гамильтониана формы  $\hat{H} = \sum \epsilon_k \hat{a}_k^* \hat{a}_k$  с собственными значениями, равными  $\sum n_k \epsilon_k$ .

Как это проверить? Легко посчитать коммутатор гамильтониана (3), с которым мы сейчас работаем, с оператором  $\hat{a}_l^*$ :

$$\hat{H} \hat{a}_l^* = \hat{a}_l^* \hat{H} + \epsilon_l \hat{a}_l^*.$$

Чтобы вычислить действие гамильтониана  $\hat{H}$  на (4) достаточно, пользуясь этим соотношением, передвинуть гамильтониан на  $|0\rangle$ . Несколько более простое формальное рассуждение таково: известно, как операторы  $\hat{a}_k^*$  изменяются с течением времени — просто умножаются на численную экспоненту. По этой причине динамика вектора состояния сводится к умножению на экспоненту с некоторым показателем. Динамика здесь ровно такая, какая требуется для стационарного состояния.

Мы получили ортогональный (но не ортонормированный) базис фоковского пространства, который состоит из собственных векторов (4).

Все полученные формулы можно применить для случая многомерного гармонического осциллятора. Там операторы  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^*$  называются операторами рождения и уничтожения квантов. В кристалле атомы как-то между собой взаимодействуют, но кристалл находится в стационарном состоянии близком к основному состоянию. По крайней мере, в первом приближении кристалл описывается квадратичным гамильтонианом. Для квантов в этой ситуации есть другое название: фононы — кванты звука. В общем случае мы имеем дело с системой невзаимодействующих бозонов. Операторы  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^*$  называются операторами рождения и уничтожения частиц, а числа  $n_k$  в формуле для уровней энергии  $\sum n_k \epsilon_k$  называются числами заполнения.

Если мы хотим, чтобы фоковское пространство было гильбертовым пространством, нужно взять пополнение.

Есть свои преимущества в том и в другом подходе. В предгильбертовом пространстве рассматриваемые операторы определены везде. В гильбертовом пространстве — это неограниченные операторы, которые не всюду определены, но есть возможность рассматривать пределы.

Предгильбертово фоковское пространство может быть представлено как пространство полиномов. В самом деле, есть следующая формула для базиса:

$$(\hat{a}_{k_1}^*)^{n_1} \dots (\hat{a}_{k_s}^*)^{n_s} |0\rangle.$$

Чтобы получить полином, я предлагаю вычеркнуть  $|0\rangle$  и снять крышечку. Получится некоторый моном.

Линейная комбинация таких мономов — это полином. То есть, каждому элементу фоковского пространства (которое до пополнения мы считаем предгильбертовым)

можно сопоставить полином. Легко посчитать, что скалярное произведение в таком представлении в виде полиномов будет даваться формулой:

$$\langle F, G \rangle = \int da^* da F(a^*) G(a^*)^* e^{-a^* a}, \quad (5)$$

где  $F(a^*)$  и  $G(a^*)$  — это полиномы, отвечающие разным векторам. Обращаю внимание, что  $G(a^*)$  стоит со звездочкой. Звездочка, примененная к  $a$  дважды — это опять  $a$ , и поэтому здесь уже будет полином от  $a$ .

Проверим, что скалярное произведение записывается в виде (5). Это можно посчитать, но этого даже не нужно делать. Дело в том, что фоковское пространство однозначно определяется наличием циклического вектора, который уничтожается всеми операторами уничтожения при том, что операторы рождения и уничтожения удовлетворяют нужным коммутационным соотношениям. В пространстве полиномов от  $a_k^*$  я определяю оператор  $\hat{a}_k^*$  просто как умножение на  $a_k^*$ , а оператор  $\hat{a}_k$  — как дифференцирование по  $a_k^*$ . Легко понять, что умножение и дифференцирование как раз удовлетворяют необходимым коммутационным соотношениям. Если умножить на  $a_k^*$ , а потом продифференцировать и применить правило Лейбница, то как раз получится то что нужно.

Таким образом, мы имеем коммутационные соотношения, есть и циклический вектор, который просто равен единице. Полином равный единице обнуляется введенными операторами уничтожения и является правильным кандидатом на  $|0\rangle$ , цикличность тоже имеет место. Осталось проверить, что  $\hat{a}_k$  и  $\hat{a}_k^*$  сопряжены друг к другу. (Это нужно, чтобы правильно работала инволюция.) Действительно, в формуле (5) можно применить интегрирование по частям и убедиться, что действительно для этого скалярного произведения умножения и дифференцирования сопряжены друг другу. В итоге все свойства фоковского представления выполнены, и поэтому не нужно сравнивать исходное скалярное произведение с новым: оно обязательно будет таким же (с точностью до численного множителя).

До сих пор мы имели дело с полиномами. Но я хочу все-таки иметь возможность работать в гильбертовом пространстве. Для этого нужно пополнить пространство полиномов, и тогда кроме полиномов появятся и другие функции. Они будут голоморфными функциями от  $a_k^*$ , но это будут не все голоморфные функции, а только те, что имеют конечную норму в нашем скалярном произведении.

Важно отметить, что все эти рассуждения применимы и к бесконечному числу степеней свободы. Хотя там интеграл бесконечномерен, но, все равно, он оказывается хорошо определенным.

Есть еще один способ описания фоковского пространства. Дело в том, что полиномы связаны с симметрическими функциями от дискретного аргумента. Хорошо известно, что если имеется квадратичная форма, то всегда можно считать, что коэффициенты этой квадратичной формы симметричны по индексам. Если есть кубичный полином, можно считать, что коэффициент зависит от трех индексов, но, опять же, можно наложить условие симметрии. Его нужно наложить, если вы хотите иметь однозначное представление. Для полиномов высших степеней ситуация аналогична. Поэтому можно считать что есть единственное представление для всякого элемента предгильбертова фоковского пространства в форме:

$$\sum_n \sum_{k_1, \dots, k_n} f_n(k_1, \dots, k_n) \hat{a}_{k_1}^* \dots \hat{a}_{k_n}^* |0\rangle,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а коэффициенты симметричны по индексам. Это значит, что фоковское пространство представимо как последовательность симметрических функций от

растущего числа переменных:

$$f_0, f_1(k), f_2(k_1, k_2), f_3(k_1, k_2, k_3), \dots$$

Пока мы работаем с полиномами, должно быть только конечное количество симметричных функций от  $k_1, k_2, k_3, \dots$ . В этом пространстве можно взять пополнение, и тогда придется рассматривать последовательность функций  $f_0, f_1(k), \dots$ , которые должны удовлетворять единственному условию: норма этой бесконечной последовательности конечна. Обычно эта последовательность записывается как столбик (фоковский столбик). Эта запись имеет смысл и в том случае, когда  $k$  — непрерывный параметр. В лекциях по квантовой механике фоковское пространство обычно определяется именно как пространство состоящее из столбиков симметрических функций.

## 2.5 Гамильтонианы сохраняющие число частиц

В квантовой теории важную роль играет оператор

$$\hat{N} = \sum \hat{a}_k^* \hat{a}_k = \int d\lambda \hat{a}^*(\lambda) \hat{a}(\lambda),$$

который представляет собой сумму по всем  $k$  (или интеграл, если есть непрерывный индекс). Этот оператор имеет физический смысл числа частиц или числа квантов, когда имеем дело с осцилляторами. Название не важно, а важно, что если есть собственный вектор  $X$  оператора числа частиц с каким-то собственным значением  $N$ , то операторы  $\hat{a}_k^*$ , действуя на  $X$ , увеличивают число частиц на единицу, а  $\hat{a}_k$ , наоборот, уменьшают на единицу (рождают частицу или уничтожают частицу). Это значит, что оператор, сохраняющий число частиц, должен содержать одинаковое количество операторов рождения и уничтожения. Будем рассматривать квадратичные гамильтонианы обладающие этим свойством.

Квадратичные гамильтонианы сохраняющие число частиц очень важны потому, что вблизи состояния с минимальной энергией (основного состояния) они играют основную роль. Возьмем квадратичный гамильтониан, который сохраняет число частиц:

$$\hat{H} = \int dx dy A(x, y) \hat{a}^*(x) \hat{a}(y) = \langle a^*, Aa \rangle.$$

В нем есть произведения типа  $a^*a$ , а произведений типа  $a^*a^*$ ,  $aa$ , — нет. Если у оператора  $A$  есть только дискретный спектр, то можно записать гамильтониан в виде:

$$\hat{H} = \sum \epsilon_k \hat{a}_k^* \hat{a}_k,$$

где  $\hat{a}_k = \int dx \phi_k(x) \hat{a}(x)$  отвечает собственной функции  $\phi_k(x)$  оператора  $A$ .

Давайте теперь возьмем в качестве  $x$  и  $y$  векторы в евклидовом пространстве и будем считать что  $A$  записан в виде:  $A = -\frac{1}{2m} \Delta + \hat{U}$ , который хорошо известен из обычной квантовой механики. Это тот оператор, который получается из квантования классического гамильтониана вида  $\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{x})$ . В таком случае гамильтониан  $\hat{H}$  описывает систему невзаимодействующих нерелятивистских тождественных бозонов. Если добавить сохраняющие число частиц неквадратичные члены, получится гамильтониан системы взаимодействующих нерелятивистских тождественных бозонов.

Хочу обратить внимание что содержание этой лекции — это, в каком-то смысле, объяснение того, как математик мог бы угадать квантовую механику, но не угадал. Угадали, конечно, физики. Смотрите, какова была логика. Математик знает, что наблюдаемые в классической теории — это просто алгебра функций на фазовом

пространстве. Он знает, что квантовая механика — это несколько продеформированная классическая механика: все подчиняется классическим законам, но в некоторых ситуациях должны быть поправки. Исходя из этого он говорит: давайте я эту коммутативную алгебру продеформирую: ассоциативность оставлю, но введу некоммутативность. Простейшая деформация, которая есть — это алгебра Вейля. Математик угадал, что нужно жить с алгеброй Вейля, а после этого он понимает, что в алгебре Вейля нужно рассматривать простейший гамильтониан, который описывает жизнь около основного состояния. Это — квадратичный гамильтониан. Уровни энергии этого гамильтониана даются формулой:

$$\sum \epsilon_k \hat{n}_k,$$

где  $\hat{n}_k = 0, 1, 2, \dots$  — числа заполнения. Эта формула описывает уровни энергии системы невзаимодействующих тождественных частиц. То есть, в появлении тождественных частиц никакой тайны нет. С точки зрения математика, именно они должны возникнуть. Наоборот, нетождественных частиц может не быть, а тождественные всегда есть, потому что простейший квадратичный гамильтониан уже описывает тождественные частицы.

В нерелятивистском случае одночастичные уровни энергии  $\epsilon_k$  должны получаться при квантовании классического одночастичного гамильтониана  $\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{x})$ . Добавив неквадратичные члены, мы приходим к гамильтониану системы нерелятивистских тождественных бозонов.

## 2.6 Представления алгебры Вейля

Теперь перейдем к вопросу, как на самом деле устроены другие представления алгебры Вейля и есть ли они вообще? Прежде всего отметим, что другие представления, несомненно, есть: можно взять прямую сумму двух представлений, и это будет новое представление. Так как фоковское представление, как нетрудно видеть, неприводимо, (внутри него нет никакого другого представления), то основной вопрос заключается в том, какие есть неприводимые представления? Ответ на этот вопрос такой: в случае когда рассматриваются представления алгебры Вейля с конечным числом генераторов (случай конечного числа степеней свободы), то единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление — это фоковское. Его можно записывать в разных видах. Есть, например, представление, в котором оператор импульса реализуется как дифференцирование, а оператор координаты — как умножение, но оно эквивалентно фоковскому. Там тоже можно ввести операторы  $\hat{a}^*, \hat{a}$ .

В общем случае ответ на этот вопрос трудно дать, потому что вопрос плохо сформулирован. Дело в том, что в гильбертовом пространстве операторы  $\hat{a}_k^*, \hat{a}_k$  имеют какую-то область определения. Она — не все гильбертово пространство. Можно область определения изменить немножко, а оператор оставить тем же самым и спросить себя: это то же самое представление или другое? С формально математической точки зрения — другое. На самом деле, конечно, то же самое. При работе с неограниченными операторами эта проблема всегда возникает. Ее можно решить, но лучше иметь дело с ограниченными операторами. Это можно сделать.

Можно рассмотреть экспоненты:

$$V_\alpha = e^{i\alpha_k \hat{u}^k},$$

в показателе которых стоит линейная комбинация самосопряженных операторов  $\hat{u}^k$ , удовлетворяющих коммутационным соотношениям:

$$\hat{u}^k \hat{u}^l - \hat{u}^l \hat{u}^k = i\sigma^{k,l}.$$

Коэффициенты в экспоненте  $V_\alpha$  выбраны действительными, тогда в показателе стоит оператор вида мнимая единица, умноженная на самосопряженный оператор. Тогда то, что получилось — это оператор унитарный, а унитарный оператор ограничен. С такими операторами удобно жить. Имеет место соотношение:

$$V_\alpha V_\beta = e^{-i\frac{1}{2}\alpha\sigma\beta} V_{\alpha+\beta}. \quad (6)$$

В этом легко убедиться, если использовать формулу:

$$e^X e^Y = e^{X+Y} e^{\frac{1}{2}C},$$

которая верна, если коммутатор операторов  $X$  и  $Y$  представляет собой число, которое здесь обозначено буквой  $C$ :

$$[X, Y] = C.$$

В рассматриваемом нами случае ровно такая ситуация, и поэтому математики, если они не хотят иметь дело с неограниченными операторами, работают с этими унитарными операторами и с экспоненциальной формой коммутационных соотношений (6). Это — экспоненциальная форма алгебры Вейля. С точки зрения физика это — та же самая алгебра, с которой мы имели дело, с точки зрения математика, это не совсем так.

Существует единственное неприводимое представление алгебры Вейля в случае конечного числа степеней свободы. Я дам доказательство этого факта, не пользуясь экспоненциальной формой алгебры Вейля. Оно не вполне строгое, но, с точки зрения физика, оно вполне приемлемо.

Рассуждение такое: рассмотрим уже упомянутый оператор числа частиц  $\hat{N} = \sum \hat{a}_k^* \hat{a}_k$ . В случае конечного числа генераторов это хороший оператор. Возьмем собственный вектор этого оператора и начнем применять к нему операторы уничтожения. (Математик спросит: откуда вы знаете, что есть такой собственный вектор, но физик, наверное, это делать не будет). Если все операторы уничтожения дают ноль, я скажу, что это как раз тот самый фоковский вакуум, который нам нужен. Если есть такой оператор, который не дает ноль, тогда я применю оператор уничтожения еще раз и еще раз и еще раз и буду делать это до тех пор, пока у меня не получится такой вектор  $|0\rangle$ , который обнуляется всеми операторами уничтожения:  $a_k|0\rangle = 0$ .

Такой вектор обязательно есть, потому что оператор числа частиц положительно определен, а операторы уничтожения уменьшают число частиц. После этого я возьму то подпредставление, в котором он лежит. Я применю к вектору  $|0\rangle$  все операторы  $\hat{a}_k^*$  много раз и, когда я возьму линейные комбинации получившихся выражений, у меня получится пространство, которое инвариантно относительно всех операторов рождения и уничтожения. Это — подпредставление моего представления и оно будет, несомненно, фоковским представлением потому, что там есть вектор, который уничтожается всеми  $\hat{a}_k$  и этот вектор циклический (я все могу получить из него). Отсюда все получается.

В случае бесконечного числа генераторов эти рассуждения неприменимы. Я сейчас объясню, как построить пример представления, которое не является фоковским, но, тем не менее является хорошим представлением. Я возьму фоковское пространство и возьму новые операторы, которые я буду обозначать буквой  $\hat{A}_k$ . Это старые операторы минус число:

$$\hat{A}_k = \hat{a}_k - f_k, \quad \hat{A}_k^* = \hat{a}_k^* - \bar{f}_k$$

(для каждого  $\hat{a}_k$  я вычитаю свое число). Рассматривая коммутационные соотношения, которые мне нужны для алгебры Вейля, я сразу увижу, что все они удовлетворяются. Таким образом, я снова получил представление канонических коммутационных соотношений, представление алгебры Вейля.

Теперь я попытаюсь решить уравнение  $\hat{A}_k \Theta = 0$ . Его решения — это собственные функции операторов  $\hat{a}_k$ . Мы с этими векторами встретимся много раз. Они называются иногда пуассоновскими векторами. Легко понять, что ответ будет представлен экспонентой

$$\Theta = e^{f\hat{a}^*} |0\rangle$$

где  $f\hat{a}^* = \sum f_k \hat{a}_k^*$ . Если рассматривать представление векторов из фоковского пространства с помощью функций, легко увидеть, что это действительно собственный вектор всех операторов  $\hat{a}_k$ .

Легко вычислить норму пуассоновского вектора и скалярное произведение двух пуассоновских векторов.

Скалярное произведение задается интегралом; этот интеграл гауссов и легко берется. Норма  $\Theta$  будет конечной, если сумма  $\sum |f_k|^2$  конечна. Если норма конечна, тогда вектор  $\Theta$  принадлежит фоковскому пространству и представление эквивалентно фоковскому представлению, но если норма бесконечна, то это не так и в представлении нет вектора, который уничтожается операторами  $\hat{a}_k$ . Оно не является фоковским раз нет такого вектора и следовательно это представление — пример того, что есть неприводимые представления, которые неэквивалентны фоковскому представлению. В таком представлении нет даже подпредставления эквивалентного фоковскому. В случае конечного числа степеней свободы  $\sum |f_k|^2$  всегда конечна, и там эти рассуждения ничего не дают.

Теперь я хочу обобщить эту конструкцию. Я рассмотрю оператор  $\hat{A}_k$ , определенный несколько по-другому. Раньше я просто добавлял  $f_k$ , а тут я еще возьму линейные преобразования:

$$\begin{aligned}\hat{A}_k &= \Phi_k^l \hat{a}_l + \Psi_k^l \hat{a}_l^* + f_k \\ \hat{A}_k^* &= \bar{\Psi}_k^l \hat{a}_l + \bar{\Phi}_k^l \hat{a}_l^* + \bar{f}_k\end{aligned}$$

и потребую, чтобы новые операторы  $\hat{A}_k, \hat{A}_k^*$  тоже удовлетворяли каноническим коммутационным соотношениям. Это накладывает некоторые условия на коэффициенты. Такое преобразование называется линейным каноническим преобразованием. Операторы  $\hat{A}_k, \hat{A}_k^*$  определяют новое представление алгебры и, опять же, если вектор  $\Theta$ , являющийся решением уравнения  $\hat{A}_k \Theta = 0$ , принадлежит фоковскому пространству, то тогда линейное каноническое преобразование эквивалентно фоковскому представлению. Такое каноническое преобразование называется собственным. Если же эти условия не выполнены, то это преобразование не эквивалентно фоковскому представлению. Линейные канонические преобразования часто бывают полезны. Их аналоги в фермионном случае называются боголюбовскими преобразованиями. Они важны в теории сверхпроводимости.



## 3 Лекция 3

### 3.1 Алгебра Клиффорда и алгебра Грассманна

У вейлевской алгебры есть близкие родственники, которые определяются теми же самыми формулами, как и вейлевская алгебра, только вместо коммутаторов стоят антикоммутаторы:

$$u^k u^l + u^l u^k = 2h^{kl},$$

где  $h^{kl}$  — обратимая матрица. Эта формула описывает алгебру Клиффорда.

Есть еще другое понятие — алгебра Грассмана, которая получится, если  $h^{kl}$  считать равным нулю:

$$u^k u^l + u^l u^k = 0.$$

В клиффордовской алгебре требуется, чтобы справа была обратимая матрица. Грассманова алгебра не является частным случаем клиффордовской — здесь в правой части стоит ноль. Элементы грассмановой алгебры — это тоже полиномы, но только, как говорят, от антикоммутирующих переменных. Для клиффордовой алгебры верно все то же, что было сказано для алгебры Вейля почти буквально. Просто всюду нужно заменять коммутаторы на антикоммутаторы. Единственное отличие состоит в том, что в то время как все сказанное в прошлой лекции о невзаимодействующих бозонах, в алгебре Клиффорда будет относиться к невзаимодействующим фермионам.

Начнем с грассмановой алгебры. Это ассоциативная алгебра с единицей и с антикоммутирующими генераторами  $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ :

$$\epsilon^i \epsilon^j = -\epsilon^j \epsilon^i. \quad (7)$$

Она обозначается  $\Lambda_n$ .

Каждый элемент грассмановой алгебры можно однозначным образом записать как сумму мономов по  $\epsilon^i$  так, чтобы в каждом мономе индексы возрастали:  $\omega = \alpha + \sum_i \alpha_i \epsilon^i + \sum_{i < j} \alpha_{ij} \epsilon^i \epsilon^j + \dots + \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \epsilon^{i_1} \dots \epsilon^{i_k} + \dots + \alpha_{1, \dots, n} \epsilon^1 \dots \epsilon^n$ . Это очевидно: мы можем воспользоваться отношениями антикоммутации, чтобы переставить меньшие индексы налево, а двух совпадающих индексов не может быть. (Если положить  $i = j$ , получится, что квадрат равен нулю. Я напоминаю, что все алгебры рассматриваются над комплексными числами и на 2 можно делить.)

Грассманова алгебра, так же, как и обычная алгебра полиномов,  $\mathbf{Z}$ -градуированная. Это значит, что есть понятие степени: степень каждого монома — это число генераторов в этом мономе; ясно, что при умножении степени складываются, так что в этом смысле все так же как у обычных полиномов. Следующее замечание: можно получить другое однозначное представление элементов грассманновой алгебры не упорядочивая индексы, а наложив требование антисимметричности коэффициентов. Это точно так же как в обычных полиномах — генераторы можно переставлять и поэтому можно считать, что коэффициенты симметричны. Здесь же можно переставлять, но со знаком минус и поэтому можно считать, что коэффициенты антисимметричны.

Я уже говорил, что есть понятие степени ( $\mathbf{Z}$ -градуировки). Важнее всего то, что из этой  $\mathbf{Z}$ -градуировки можно получить  $\mathbf{Z}_2$ -градуировку сказав, что существуют четная и нечетная части, четные и нечетные элементы. Есть то, что натянуто на четные мономы  $\Lambda_n^{even} = \sum_{k \geq 0} \Lambda_n^{2k}$  и то, что натянуто на нечетные мономы  $\Lambda_n^{odd} = \sum_{k \geq 0} \Lambda_n^{2k+1}$ . Это разбиение на четную и нечетную части здесь более важно, чем степень, потому что именно оно заведует умножением.

Четный элемент коммутирует с чем угодно, и это понятно, потому что при перестановке двух генераторов возникает знак минус, но если это проделать дважды,

то минус на минус даст плюс и ничто не изменится. Два нечетных элемента между собой антикоммутируют.

Можно сказать, что элемент грассмановой алгебры — это полином от антикоммутирующих элементов  $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$  или, иными словами, это функция антикоммутирующих переменных, но она автоматически полиномиальна, потому что есть только конечное число мономов (в случае, когда есть конечное число антикоммутирующих переменных). Аналогия с полиномами — это важная идея, потому что она подсказывает, что должен быть анализ в грассмановой алгебре, и, действительно, такой анализ есть. Можно определить дифференцирование по переменной  $\partial_i = \partial/\partial\epsilon^i$ . Просто надо вычеркнуть эту переменную. Если переменной  $\epsilon^i$  в мономе нет, то эта производная равна нулю. Вычеркивая переменную  $\epsilon^i$  нужно учесть, что переменная может стоять где угодно. Для случая антикоммутирующих переменных есть понятия левой производной и правой производной. Будем для определенности рассматривать левую производную; это означает, что перед тем как вычеркивать следует соответствующий элемент переместить налево — поставить на первое место:

$$\partial_i(\epsilon^i \epsilon^{i_1} \dots \epsilon^{i_n}) = \epsilon^{i_1} \dots \epsilon^{i_n} \quad (8)$$

$$\partial_i(\epsilon^{i_1} \dots \epsilon^{i_n}) = 0. \quad (9)$$

Понятие производной связано с правилом Лейбница. Здесь тоже есть правило Лейбница, но только с той разницей, что появляется знак, который связан с перестановками, о которых уже было сказано:

$$\partial_i(\omega\rho) = (\partial_i\omega) \cdot \rho + (-1)^{\bar{\omega}} \cdot \omega \cdot \partial_i\rho, \quad (10)$$

где  $\omega, \rho \in \Lambda_n$ , а  $\omega$  обладает определенной четностью  $\bar{\omega}$ , то есть  $\omega$  является либо четной ( $\bar{\omega} = 0$ ) либо нечетной ( $\bar{\omega} = 1$ ). Это называется градуированным правилом Лейбница. Если выполнено это правило, говорят про нечетное дифференцирование, если выполнено обычное правило Лейбница, говорят про четное дифференцирование.

Есть и понятие интегрирования  $\int : \Lambda_n \rightarrow \mathbf{C}$ . Интеграл любого монома не максимальной степени дает ноль, а интеграл монома максимальной степени — плюс или минус единицу:

$$\int \epsilon^{i_1} \dots \epsilon^{i_k} d^n \epsilon = 0 \quad \text{if } k < n,$$

$$\int \epsilon^1 \dots \epsilon^n d^n \epsilon = 1.$$

Я выбрал обозначение, при котором плюс единица получается тогда, когда эти генераторы упорядочены в возрастающем порядке. Легко понять, что интеграл от производной всегда равен нулю:

$$\int (\partial_i \omega) d^n \epsilon = 0. \quad (11)$$

Это происходит потому, что в производной не может быть члена максимальной степени — при дифференцировании уменьшается количество генераторов. Из этого и из правила Лейбница можно вывести правило интегрирования по частям:

$$\int (\partial_i \omega) \cdot \rho d^n \epsilon = -(-1)^{\bar{\omega}} \int \omega \cdot \partial_i \rho d^n \epsilon.$$

Хочу заметить, что, рассматривая грассманову алгебру  $\Lambda_n$ , мы фиксировали систему образующих  $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ . Естественным образом, можно перейти к другим образующим (это — аналог замены переменных) и тогда изменится все — изменится понятие дифференцирования, изменится понятие интегрирования. Для таких преобразований

существует аналог теоремы о дифференцировании сложной функции, аналог якобиана, о которых я много говорить не буду.

Я хочу рассмотреть только частный случай, когда замена переменных линейна:

$$\tilde{\epsilon}^i = \sum A_j^i \epsilon^j. \quad (12)$$

Легко понять, что в интеграле появится детерминант при замене переменных точно так же, как при обычной замене переменных с той только разницей, что там, где стоял детерминант, здесь стоит детерминант в минус первой степени.

Следующее замечание состоит в том, что в гладкую функцию  $f$ , которая зависит от действительной переменной  $x \in \mathbf{R}$ , можно подставить четный элемент грассмановой алгебры  $\omega$ , и выражению  $f(\omega)$  можно придать смысл. В грассмановой алгебре всякий элемент может быть представлен в виде суммы  $\omega = a + \nu$ , где  $a$  — число, а  $\nu$  — нильпотентный элемент (т.е.  $\nu^k = 0$  для некоторого  $k$ ). Возьмем разложение функции  $f(a + \nu)$  в ряд Тейлора по нильпотентной части:

$$f(\omega) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \nu + \dots + \frac{f^l(a)}{l!} \nu^l + \dots \quad (13)$$

и заметим, что из-за нильпотентности этот ряд Тейлора имеет конечное число членов — остается только полином, и это имеет четкий смысл.

В частности, можно рассмотреть экспоненту. Нужно заметить, что для экспоненты имеются обычные правила. (Четные элементы между собой коммутируют, и поэтому все формальные рассуждения можно проводить для экспоненты четного элемента грассмановой алгебры так же, как и для числа.) В качестве примера рассмотрим экспоненту квадратичного выражения:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 \epsilon^1 \epsilon^2 + \lambda_2 \epsilon^3 \epsilon^4 + \dots + \lambda_k \epsilon^{2k-1} \epsilon^{2k}} &= e^{\lambda_1 \epsilon^1 \epsilon^2} \dots e^{\lambda_k \epsilon^{2k-1} \epsilon^{2k}} = \\ &= (1 + \lambda_1 \epsilon^1 \epsilon^2) \dots (1 + \lambda_k \epsilon^{2k-1} \epsilon^{2k}), \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$\int e^{\lambda_1 \epsilon^1 \epsilon^2 + \dots + \lambda_k \epsilon^{2k-1} \epsilon^{2k}} d^{2k} \epsilon = \lambda_1 \dots \lambda_k. \quad (14)$$

В более общем случае, когда  $\omega = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \epsilon^i \epsilon^j$ , можно привести антисимметричную невырожденную матрицу  $a$  к блочно-диагональному виду путем замены переменных. Используя правило замены переменных, можно вычислить гауссов интеграл:

$$\int e^\omega d^n \epsilon = (\det a)^{1/2}. \quad (15)$$

Ответ такой же, как и в обычном случае, но только там, где был детерминант в степени  $-1/2$  здесь будет детерминант в степени  $+1/2$ . Точнее говоря, совпадение имеет место с точностью до множителя, который может быть убран с помощью соответствующей нормировки меры.

Следующее замечание заключается в том, что можно рассматривать функции одновременно от коммутирующих и от антикоммутирующих переменных. Это просто означает, что в разложениях по антикоммутирующим переменным коэффициенты можно считать функциями от коммутирующих переменных. Можно рассматривать либо полиномиальные функции, либо гладкие функции. Мы получаем функции на суперпространстве. Это просто слова — вы говорите, что суперпространство это такое пространство, на которой заданы функции (эти функции я определил), а точек у суперпространства в таком формальном определении нет. На самом деле, можно определить понятие точки суперпространства — это важно и удобно. Об этом я несколько слов скажу, но не буду здесь давать никаких точных определений.

Есть понятие супермногообразия. Мы можем рассматривать полиномиальные или гладкие функции коммутирующих переменных  $x^1, \dots, x^m$  и антикоммутирующих переменных  $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$  — элементов алгебры  $\mathbb{C}[x^1, \dots, x^m] \otimes \Lambda^n$  или алгебры  $C^\infty(\mathbb{R}^m) \otimes \Lambda^n$ . Кроме того, могут быть некоторые уравнения: на коммутирующие и антикоммутирующие переменные можно наложить условия. Важно чтобы в условии все слагаемые были одинаковой четности. Например, может быть такое условие:  $x^1 + \epsilon^1 \epsilon^2 = 0$ . Получаем алгебраические супермногообразия. Обычные алгебраические многообразия задаются полиномиальными уравнениями в обычном линейном пространстве. Здесь есть коммутирующие переменные и полиномиальные уравнения.

Представим себе, что коэффициенты этих уравнений являются целыми числами. Если есть такие уравнения, то можно считать переменные  $x^i$  какими угодно: действительными, комплексными, элементами какого-то кольца, элементами поля вычетов по модулю  $n$ . Это все имеет смысл.

Можно рассматривать алгебраическое многообразие над разными полями или над разными кольцами, то есть, можно говорить, что есть точки алгебраического многообразия над каким-то полем, каким-то кольцом. Например, если рассмотреть, скажем, окружность мнимого радиуса  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , то действительных точек у такого объекта нет, а над комплексными числами точки есть. Когда рассматриваются супермногообразия, возникает такая же ситуация. Можно рассматривать переменные в уравнении принадлежащими некоторой грассмановой алгебре (любой). И тогда появится понятие  $\Lambda$ -точки супермногообразия, где  $\Lambda$  — любая грассманнова алгебра. Нужно только позаботиться о том, чтобы вместо четной переменной подставлялся четный элемент грассманновой алгебры, а вместо нечетной переменной нечетный. Иными словами, нужно чтобы четность сохранялась при введении  $\Lambda$ -точек.

Понятие  $\Lambda$ -точки очень удобно. Оно, например, позволяет дать очень простое определение понятия супералгебры Ли. Супералгебра Ли — это  $\mathbf{Z}_2$ -градуированная алгебра с некоторым обобщением правила Якоби. Запоминать это обобщение не надо. Просто нужно сказать, что это обобщение должно быть таким, чтобы  $\Lambda$ -точки супералгебры Ли образовывали обыкновенные алгебры Ли. Подробно я об этом говорить не буду. То, что я рассказывал — это маленький кусочек того, что называется суперматематикой.

## 3.2 Представления алгебры Клиффорда

Следующие рассуждения, как я уже обещал, будут в точности повторять рассуждения предыдущей лекции, только вместо “Вейль” я буду говорить “Клиффорд” и вместо слова “коммутатор” я буду говорить “антикоммутатор”.

Согласно определению алгебры Клиффорда, антикоммутатор генераторов является симметричной невырожденной матрицей  $h^{kl} = h^{lk}$ :

$$\hat{u}^k \hat{u}^l + \hat{u}^l \hat{u}^k = 2h^{kl}.$$

Эти же соотношения встречаются при рассмотрении уравнений Дирака: гамма-матрицы являются генераторами алгебры Клиффорда.

Будем рассматривать алгебру Клиффорда, в которой есть инволюция, предполагая при этом, что генераторы  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^*$  получаются друг из друга с помощью инволюции и удовлетворяют равенствам:

$$\hat{a}_k \hat{a}_l + \hat{a}_l \hat{a}_k = 0, \quad \hat{a}_k^* \hat{a}_l^* + \hat{a}_l^* \hat{a}_k^* = 0, \quad \hat{a}_k \hat{a}_l^* + \hat{a}_l^* \hat{a}_k = \delta_{kl},$$

которые называются каноническими антикоммутационными соотношениями. Они получаются из канонических коммутационных соотношений заменой коммутаторов на

антикоммутирующие. Отмечу, что, представленные здесь антикоммутирующие соотношения — это в точности антикоммутирующие соотношения, которые получаются, если в алгебре Грассмана взять дифференцирование и умножения на генераторы.

Можно рассматривать алгебры Клиффорда с бесконечным числом генераторов или генераторы  $\hat{a}(k), \hat{a}(k)^*$ , зависящие от непрерывного параметра и удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned}\hat{a}(k)\hat{a}(l) &= -\hat{a}(l)\hat{a}(k), & \hat{a}^*(k)\hat{a}^*(l) &= -\hat{a}^*(l)\hat{a}^*(k), \\ \hat{a}(k)\hat{a}^*(l) + \hat{a}^*(l)\hat{a}(k) &= \delta(k, l).\end{aligned}$$

— все то же самое, что и для алгебры Вейля, не стоит повторяться.

В алгебре Клиффорда, определяемой с помощью генераторов  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^*$ , есть понятие нормальной формы. Точно так же как и в случае алгебры Вейля генераторы  $\hat{a}_k^*$  уводятся налево,  $\hat{a}_k$  уводятся направо, но есть небольшая особенность. Раньше, получая нормальную форму, я мог определить виковский символ, просто снимая крышечки и рассматривая  $a_k, a_k^*$  как комплексные переменные. Здесь этого нельзя сделать — получится ноль, но я могу сделать то же самое, говоря при этом, что, снимая крышечки, я получаю антикоммутирующие переменные. Иными словами, из элементов алгебры Клиффорда я могу получить полином от антикоммутирующих переменных, произнося все те же слова, только вставляя при этом приставку “анти”.

Рассмотрим формальный гамильтониан

$$\hat{H} = \sum \Gamma_{m,n}(k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_n) \hat{a}_{k_1}^* \dots \hat{a}_{k_m}^* \hat{a}_{l_1} \dots \hat{a}_{l_n}.$$

Гамильтониан всегда нужно считать четным элементом. Когда количество переменных бесконечно, гамильтониан обычно не является элементом алгебры Клиффорда, но коммутаторы, тем не менее имеют смысл, если наложить те же условия, что и для алгебры Вейля.

Определение фоковского представления алгебры Клиффорда в точности повторяет данное для алгебры Вейля: требуется, чтобы существовал циклический вектор  $|0\rangle$ , для которого выполнено условие  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$ . В силу условия цикличности можно получить все что угодно, применяя к вектору  $|0\rangle$  операторы  $\hat{a}_k^*$ . Все состояния будут линейными комбинациями мономов вида  $\Pi(\hat{a}_k^*)^{n_k}|0\rangle$ .

Единственная разница заключается в том, что показатели  $n_k$  в этих мономах могут быть только ноль или единица ( $n_k = 0, 1$ ) потому что  $\hat{a}_k^{*2} = 0$ . Это — то, что называется принципом Паули. Опять же, элементы этого базиса являются собственными векторами любого гамильтониана вида  $\sum \epsilon_k \hat{a}_k^* \hat{a}_k$  и собственные значения даются точно той же формулой, как и в бозонном случае:  $\sum n_k \epsilon_k$ .

Показатели  $n_k$  называются числами заполнения; операторы  $\hat{a}_k^*$  являются операторами рождения, а  $\hat{a}_k$  — операторами уничтожения по тем же причинам, что и в бозонном случае. Можно сказать, что гамильтониан  $\sum \epsilon_k \hat{a}_k^* \hat{a}_k$  описывает невзаимодействующие фермионы.

Теперь вспомним, что в бозонном случае для получения представления элементов фоковского пространства полиномами я в мономах снимал крышечки и получал полином от комплексных переменных. Сейчас я хочу сделать то же самое: снять крышечки и получить полином от антикоммутирующих переменных. В этом случае все будет абсолютно то же. Форма скалярного произведения абсолютно такая же, только интегрирование будет вестись по антикоммутирующим переменным. Как и в случае алгебры Вейля, легко проверить, что в этом представлении оператор  $\hat{a}_k^*$  действует как умножение,  $\hat{a}_k$  действует как дифференцирование, и это дает правильные антикоммутирующие соотношения.

Единственное, что осталось проверить, это то, что в скалярном произведении

$$\langle F, G \rangle = \int da^* da F(a^*) G(a^*)^* e^{-a^* a}$$

умножения и дифференцирования являются сопряженными операторами. Это можно сделать, применяя интегрирование по частям, с той лишь разницей, что при вычислениях следует применять градуированное правило Лейбница.

Если рассматривать одни полиномы мы получим предгильбертово пространство, но можно взять пополнение. В случае конечного числа степеней свободы брать пополнение не надо — там только полиномы и есть, а в случае бесконечного числа степеней свободы, если мы хотим работать в гильбертовом пространстве, фоковское пространство нужно пополнить.

В фоковском пространстве векторы можно представить в виде суммы мономов с антисимметрическими коэффициентами:

$$\sum_n \sum_{k_1, \dots, k_n} f_n(k_1, \dots, k_n) \hat{a}_{k_1}^* \dots \hat{a}_{k_n}^* |0\rangle$$

в то время как для алгебры Вейля коэффициенты симметрические. В пополненном фоковском пространстве эти суммы бесконечны. Другими словами, точка фоковского пространства представляется последовательностью антисимметрических функций тогда как в алгебре Вейля она была последовательностью симметрических функций. Это стандартное представление из учебников квантовой механики. Такое представление работает также в случае, когда  $k$  является непрерывным параметром.

Можно, опять же, рассмотреть оператор числа частиц:

$$\hat{N} = \sum \hat{a}_k^* \hat{a}_k = \int d\lambda \hat{a}^*(\lambda) \hat{a}(\lambda)$$

и снова  $\hat{a}_k^*$  увеличивает число частиц на единицу,  $\hat{a}_k$  — уменьшает.

Перейдем теперь к рассмотрению операторов, которые сохраняют число частиц, как и в нерелятивистской квантовой механике, где гамильтониан сохраняет число частиц. Самый простой гамильтониан — квадратичный гамильтониан.

$$\hat{H} = \int dx dy A(x, y) \hat{a}^*(x) \hat{a}(y) = \langle a^*, Aa \rangle.$$

Если оператор  $A$  имеет дискретный спектр, то, диагонализуя его, мы получим оператор

$$\hat{H} = \sum \epsilon_k \hat{a}_k^* \hat{a}_k,$$

где  $\epsilon_k$ ,  $\phi_k(x)$  — собственные значения и собственные функции оператора  $A$ :

$$\hat{a}_k = \int dx \phi_k(x) \hat{a}(x).$$

В прошлой лекции было сказано, что, взяв  $A = -\frac{1}{2m} \Delta + \hat{U}$ , мы получаем систему невзаимодействующих нерелятивистских бозонов. Имея тот же оператор, но используя канонические антикоммутиационные соотношения, мы получаем систему невзаимодействующих нерелятивистских фермионов. Единственная разница заключается в том, что нужно считать, что этот оператор действует на многокомпонентные функции от  $x$ . Он имеет точно такой же вид, но есть еще и дискретный индекс.

Какие канонические соотношения нужно брать — зависит от того, как действует на волновые функции ортогональная группа. Действие ортогональной группы на дискретные индексы определяет спин частицы. В случае полуцелого спина нужно

квантовать с помощью алгебры Клиффорда, а в случае целого спина — с помощью алгебры Вейля. По-другому можно сказать, что если представление неприводимое, то все определяется числом индексов. Если четное число, то мы имеем дело с алгеброй Вейля, если нечетное — с алгеброй Клиффорда.

Для того чтобы описывать взаимодействующие частицы в нерелятивистской квантовой механике, нужно добавить члены более высокого порядка с равным количеством операторов рождения и уничтожения; тогда эти члены сохраняют число частиц.

В случае конечного числа степеней свободы существует единственное неприводимое представление алгебры Клиффорда, и оно изоморфно фоковскому представлению. Доказательство неприводимости фоковского представления и его единственности такое же, как и в случае алгебры Вейля с той лишь разницей, что представленное доказательство будет строгим. В предыдущем случае оно было нестрогое, потому что операторы  $\hat{a}_k$  и  $\hat{a}_k^*$  в случае алгебры Вейля являются неограниченными операторами, а здесь все эти операторы ограничены. Это легко понять, потому что выполняется соотношение  $\hat{a}_k \hat{a}_k^* + \hat{a}_k^* \hat{a}_k = 1$ , в котором оба слагаемые положительно определены, их сумма равна единице и, следовательно, каждый из операторов ограничен.

Если мы имеем бесконечное число степеней свободы, то число операторов  $\hat{a}_k$  и  $\hat{a}_k^*$  бесконечно. Можно рассмотреть каноническое преобразование, введя новые генераторы, которые по-прежнему удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям. Здесь очень легко построить пример канонического преобразования. Дело в том, что условия антикоммутиативности симметричны относительно  $\hat{a}_k$  и  $\hat{a}_k^*$ . Если поменять местами операторы рождения и уничтожения, то в коммутаторе изменится знак, а в антикоммутиаторе ничего не изменится и, поэтому, если просто поменять местами операторы рождения и уничтожения, появится снова представление алгебры Клиффорда, и нужно задать вопрос: будет ли это представление эквивалентно исходному? Ответ: не всегда.

Дальнейшие рассуждения точно такие же, как и в бозонном случае. Возьмем в пространстве Фока операторы, определенные формулой  $\hat{A}_k = \hat{a}_k$  для  $k \in I$ ,  $\hat{A}_k = \hat{a}_k^*$  для  $k \notin I$ . Эти операторы подчиняются каноническим антикоммутиационным соотношениям, следовательно, они задают представление алгебры Клиффорда. Для того чтобы это представление было фоковским, у него должен быть циклический вектор  $\Theta$  который обнуляется всеми новыми операторами уничтожения:  $\hat{A}_k \Theta = 0$ .

Очень легко найти решение этого уравнения. Нужно подействовать на  $|0\rangle$  теми операторами  $\hat{a}_k^*$ , которые изменились ( $k \notin I$ ). Напомню, изменившиеся операторы  $\hat{a}_k^*$  стали операторами уничтожения. Теперь если взять моном с операторами  $\hat{a}_k^*$ , то действуя на этот моном любым оператором  $\hat{a}_k^*$  из этого множества, получим ноль потому что операторы  $\hat{a}_k^*$  будут появляться дважды с одним и тем же индексом. Тех же операторов  $\hat{a}_k$ , которые не менялись в этом произведении нет — они тоже дают ноль, потому что их можно перенести на  $|0\rangle$ . Таким образом, у нас получился моном  $\Theta$ , который удовлетворяет соотношению  $\hat{A}_k \Theta = 0$ .

Дальше все зависит от того, сколько операторов было изменено. Если их число конечно — все в порядке, будет получен конечный моном. Если же изменилось бесконечное число операторов, будет получено что-то, что фоковскому пространству совершенно не принадлежит — моном бесконечной степени. Новое представление не будет эквивалентно фоковскому, так как у него нет циклического вектора, который нам нужен. Таким образом, мы получили пример неэквивалентных представлений. Это рассуждение восходит к Дираку. Дираковское море подразумевает заполнение бесконечного количества состояний, в результате чего получается неэквивалентное представление антикоммутиационных соотношений.

Перейдем к рассмотрению линейных канонических преобразований вида:

$$\begin{aligned}\hat{A}_k &= \Phi_k^l \hat{a}_l + \Psi_k^l \hat{a}_l^*, \\ \hat{A}_k^* &= \bar{\Psi}_k^l \hat{a}_l + \bar{\Phi}_k^l \hat{a}_l^*.\end{aligned}$$

В отличие от вейлевского случая, здесь нельзя добавлять численные слагаемые, но все остальное то же самое. Если потребовать, чтобы новые операторы удовлетворяли каноническим антикоммутиационным соотношениям, мы получим новое представление алгебры Клиффорда. Это — то что называется боголюбковским преобразованием.

Вот, более или менее все, что я хотел рассказать про алгебру Клиффорда. В заключение я еще хотел добавить, что алгебра Клиффорда тесно связана с представлениями ортогональной группы. Из нее мгновенно получается то, что называется спинорным представлением ортогональной группы.

### 3.3 Статистическая физика

Переходя к новой теме, напомним некоторые положения из статистической физики.

Как в классической, так и в квантовой механике есть понятие равновесного состояния и в обоих случаях оно определяется как состояние с максимальной энтропией при заданных условиях. Выражение “заданные условия” может иметь разные смыслы в разных ситуациях, но условие максимума энтропии при заданных условиях должно быть выполнено. Если состояние представлено матрицей плотности, то энтропия состояния записывается формулой

$$S = -\text{Tr} K \log K.$$

Если матрица плотности диагональна, то диагональные элементы матрицы  $p_i$  интерпретируются как вероятности, и эта формула дает обычное классическое выражение для энтропии:

$$S = - \sum p_i \log p_i.$$

Если задан гамильтониан  $\hat{H}$ , то мы можем зафиксировать среднюю энергию. Можно зафиксировать допустимый интервал энергии — тогда это будет микроканоническое распределение, но давайте зафиксируем среднюю энергию  $E = \text{Tr} \hat{H} K$  (тогда мы получим каноническое распределение). Максимизируя энтропию при заданной средней энергии, увидим, что матрица плотности, на которой достигается максимум энтропии, дается формулой:

$$\frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z}. \quad (16)$$

Константу  $Z$  мы можем вычислить, потому что матрица плотности по определению должна иметь след равный единице и поэтому знаменатель должен быть равен следу оператора  $e^{-\beta \hat{H}}$ :

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}.$$

Это выражение носит название статистической суммы.

Если спектр  $\hat{H}$  дискретен с уровнями  $E_i$ , то

$$Z = \sum e^{-\beta E_i}.$$

Физический смысл  $\beta$  — это обратная температура:  $\beta = \frac{1}{T}$ . Из выражения для статистической суммы видно, что при  $\beta \rightarrow \infty$  или, что то же самое,  $T \rightarrow 0$ , вклад в это выражение вносит только член с минимальной энергией, то есть, член отвечающий основному состоянию, которое мы считаем невырожденным. Таким образом, в



случае нулевой температуры получается чистое состояние — единственное основное состояние.

Вывод выписанной формулы (16) для состояния с максимальной энтропией использует метод Лагранжа для случая когда зафиксирована средняя энергия  $Tr\hat{H}K = E$ , а кроме того, как мы знаем, что след матрицы плотности равен единице  $TrK = 1$ . Все это нужно включить в число условий. Можно стандартным способом посчитать вариацию выражения

$$L = -TrK \log K - \beta Tr(\hat{H}K - E) - \zeta(TrK - 1)$$

и найти стационарные точки:

$$-\log K - 1 - \beta\hat{H} - \zeta = 0.$$

Единственная тонкость заключается в том, что нужно использовать формулу:

$$\delta Tr\phi(K) = Tr\phi'(K)\delta K. \quad (17)$$

Достаточно проверить эту формулу для случая  $\phi(K) = K^n$ . Когда рассматривается вариация функции  $K^n$ , то в силу некоммутативности будет  $n$  членов, но когда вы берете след, то все эти члены становятся одинаковыми и получается ответ, соответствующий (17).

Следующее замечание заключается в том, что хотя статистическая сумма  $Z$  сама по себе не имеет физического смысла, но через нее более или менее все выражается.

Тесно связаны с логарифмом статсуммы выражения для средней энергии

$$E = \bar{H} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

и энтропии

$$S = \beta E + \log Z.$$

Есть еще важная характеристика, которая называется свободной энергией. Она определяется формулой  $F = E - TS$  и выражается через статсумму так:

$$F = -T \log Z.$$

Свободная энергия удобна тем, что вместо нахождения максимума энтропии можно искать минимум свободной энергии. Это сразу следует из метода множителей Лагранжа.

Как правило физические величины можно получать так: берем какой-то гамильтониан, к нему что-то прибавляем и смотрим что получится в пределе, когда то, что было прибавлено, стремится к нулю. При этом следует заметить, что когда гамильтониан  $\hat{H}$  чуточку меняется:

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{H} + \lambda A + \dots,$$

то изменение статистической суммы

$$Z(\lambda) = Z + (-\beta)\lambda Tr A e^{-\beta\hat{H}} + \dots$$

управляется средним значением этой добавки.

Оператор  $A$  — это тоже физическая величина, и она заведует изменением статсуммы. Изменение статсуммы выражается в терминах среднего значения (математического ожидания) этой физической величины:

$$\bar{A} = \frac{Tr A e^{-\beta\hat{H}}}{Z}.$$

(Для этого выражения я буду использовать еще альтернативное обозначение  $\langle A \rangle$ ).

Перейдем теперь к основной нашей цели – к тому, что называется корреляционной функцией. Корреляционная функция — это просто среднее значение произведения некоторых физических величин  $\langle A_1 \cdots A_n \rangle$ . Можно считать также, что эти физические величины зависят от времени — являются гейзенберговскими операторами и удовлетворяют гейзенберговским уравнениям. Тогда выражение  $\langle A_1(t_1) \cdots A_n(t_n) \rangle$  тоже называется корреляционной функцией. Можно рассматривать корреляционные функции по любому состоянию — не обязательно состоянию равновесия, но если речь идет о состоянии равновесия, я пишу в качестве индекса значение обратной температуры:  $\langle A_1(t_1) \cdots A_n(t_n) \rangle_\beta$ .

Здесь я хочу заметить, что все сказанное про статсумму и связанные с ней вещи применимо очень часто в случае конечного числа степеней свободы, а в случае бесконечного числа степеней свободы применимо достаточно редко. В нерелятивистской квантовой механике применимо, когда мы находимся в конечном объеме. В бесконечном объеме это не работает даже в нерелятивистской квантовой механике. Очень важно понимать, что на самом деле даже в нерелятивистской квантовой механике, но в бесконечном объеме следует рассматривать статсумму сначала в конечном объеме, а после этого — перейти к пределу бесконечного объема в корреляционных функциях. Нельзя работать сразу в бесконечном объеме.

Еще я должен заметить, что при переходе к бесконечному объему обычно берется предел, при котором сохраняется не число частиц, а плотность числа частиц. Иными словами, при переходе к пределу число частиц меняется пропорционально объему, и тогда плотность числа частиц остается постоянной.

Предположим теперь, что набор корреляционных функций в бесконечном объеме получен — что с ним делать? Нет никакого гильбертова пространства, в котором определены эти операторы  $A$  в бесконечном объеме, но есть корреляционные функции. Обычно в таком случае по этим корреляционным функциям строится гильбертово пространство, применяя некий аналог конструкции GNS. Физики это обычно делают неявно. Они просто говорят “теперь у нас есть равновесное состояние — его можно представить вектором в гильбертовом пространстве или матрицей плотности в гильбертовом пространстве и там действуют эти операторы  $A$ ”. На самом деле, нужно применять конструкцию, которая в аксиоматической квантовой теории поля называется “reconstruction theorem”. Там роль корреляционных функций играют функции Вайтмана.

Перейду теперь к вопросу: как можно поступать в алгебраическом подходе с равновесными состояниями в ситуации, когда невозможно использовать принцип максимума энтропии? Здесь можно применить то, что называется условием Кубо — Мартина — Швингера (KMS):

$$\langle A(t)B \rangle_\beta = \langle BA(t + i\beta) \rangle_\beta. \quad (18)$$

Это условие на корреляционные функции наблюдаемых  $A$  и  $B$  в равновесном состоянии. Его легко вывести в случае конечномерного гильбертова пространства, потому что в этом случае все хорошо определено. В таком случае есть оператор Гейзенберга, в определении которого участвует  $e^{iHt}$ , есть матрица плотности, в которой фигурирует  $e^{-\beta H}$ , но время можно считать комплексным и тогда, когда комплексное число является действительным, получается операторы эволюции, а в случае когда оно является чисто мнимым и  $Im(t) > 0$ , то тогда будет получена матрица плотности равновесного состояния (с точностью до множителя). Это важное замечание, которое заключается в том, что можно пытаться жить в комплексном времени, заменяя время вещественное временем комплексным или чисто мнимым. Это — то, что называется словом “виков поворот”. Не любое комплексное время годится, потому что если в показателе

степени будет стоять положительное выражение, то это будет вещь в конечномерном случае вполне хорошая, а в бесконечномерном случае — плохая. Однако корреляционную функцию  $\langle BA(t) \rangle_\beta$  можно продолжить аналитически в полосу  $0 \leq \text{Im}(t) \leq \beta$  и за счет этого условие KMS будет иметь смысл.

Условие KMS не использует понятие энтропии — нужно знать только корреляционные функции. Оно работает также в бесконечном объеме. Можно рассматривать условие KMS как определение равновесного состояния. Равновесное состояние, как я его определял раньше, практически почти всегда является единственным, а здесь появляется простор для того, чтобы равновесное состояние было неединственным. Эта неединственность равновесного состояния связана с наличием фазовых переходов. Условие KMS является заменой условия максимума энтропии в случае алгебраической квантовой теории.

Разберем теперь примеры.

Самый простой пример — квадратичный гамильтониан.

Положительно определенный квадратичный гамильтониан можно привести к виду:

$$\hat{H} = \sum \epsilon_i \hat{a}_i^* \hat{a}_i,$$

описывающему невзаимодействующие бозоны. Невзаимодействующие бозоны с точки зрения формальной — это то же самое, что многомерный гармонический осциллятор, для которого легко можно посчитать матрицу плотности равновесного состояния, статистическую сумму, среднее значение энергии и т.д.. Статсумма просто распадается на произведение статсумм для разных значений  $k$ . Для каждого  $k$  можно просуммировать геометрическую прогрессию, а потом взять произведение

$$Z = \prod \frac{1}{1 - e^{\beta \epsilon_i}}.$$

Среднее значение энергии вычисляется по формуле:

$$E = \bar{H} = \sum \epsilon_i \bar{n}_i,$$

где  $\bar{n}_i = (e^{\beta \epsilon_i} - 1)^{-1}$  — средние числа заполнения.

Для случая фермионов существенной разницы нет:

$$Z = \prod (1 + e^{\beta \epsilon_i}),$$

$$\bar{H} = \sum \epsilon_i \bar{n}_i,$$

где  $\bar{n}_i = (e^{\beta \epsilon_i} + 1)^{-1}$ . Основная разница в том, что в выражении для чисел заполнения стоит не минус, а плюс и поэтому средние числа заполнения всегда не превышают единицы.

В заключение добавлю, что, как я говорил, все корреляционные функции можно получать с помощью дифференцирования статистической суммы, но удобнее дифференцировать ее логарифм, который совпадает с точностью до множителя со свободной энергией. При этом дифференцировании получаются не сами корреляционные функции, а то, что называется усеченными корреляционными функциями. Что это такое? Если рассматривать, например, корреляционные функции двух операторов, это среднее значение  $\langle AB \rangle$ , а если дифференцировать свободную энергию, то получится  $\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ . Грубо говоря, вычитается часть, отвечающая меньшему количеству операторов. Такие функции будут мне важны позже.

## 4 Лекция 4

### 4.1 Адиабатическое приближение. Декогерентность

Эту лекцию я начну с объяснения того, что происходит, когда гамильтониан  $\hat{H}(t)$  зависит от времени, но меняется медленно (адиабатически). Я предполагаю, что все уровни энергии  $E_n(t)$  различны и зависят от  $t$  непрерывно и даже дифференцируемо. Соответствующие собственные векторы я обозначаю  $\phi_n(t)$ . Я предполагаю, что зависящий от времени вектор  $\phi_n(t)$  меняется медленно и его производной по  $t$  можно пренебречь. Мы покажем, что если начать с собственного вектора гамильтониана  $\hat{H}(t=0)$ , то во время эволюции, управляемой медленно меняющимся гамильтонианом  $\hat{H}(t)$  он остается собственным, но это будет собственный вектор переменного гамильтониана. При эволюции будет возникать фазовый множитель  $\alpha_n(t)$ :

$$\hat{U}(t)\phi_n(0) = e^{-i\alpha_n(t)}\phi_n(t), \quad (19)$$

который определяется уравнением:

$$\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = E_n(t). \quad (20)$$

Это легко получить — нужно просто продифференцировать предыдущее равенство с учетом правила Лейбница, пренебрегая при этом производной от  $\phi_n(t)$ . Это рассуждение чуточку неаккуратно, потому что я предположил, что  $\phi_n(t)$  с течением времени меняется медленно, что не очевидно, потому что собственный вектор определен неоднозначно (только с точностью до множителя). Можно ли подобрать множитель так, чтобы это условие выполнялось — это не так ясно.

Проведем более аккуратное рассмотрение. Будем считать, что гамильтониан  $\hat{H}(g)$  зависят от какого-то параметра или многих параметров, которые я обозначил буквой  $g$ . Предположим, что собственные векторы  $\phi_n(g)$  и собственные значения  $E_n(g)$  гладко зависят от  $g$ . Будем считать, что параметр  $g$  зависит от времени таким образом, что производной от  $g$  по  $t$  можно пренебречь. Стандартный выбор таков: фиксируется  $g(t)$  и строится семейство  $g_a(t) = g(at)$ , где  $a \rightarrow 0$ . Очевидным образом, на таких функциях условие малости производной по  $t$  выполняется. В таком случае все приведенные выше рассуждения становятся вполне аккуратным.

Для того чтобы обобщить эти рассуждения на матрицы плотности, следует просто заметить, что зависимость матрицы плотности  $K(t)$  от времени определяется уравнением

$$\frac{dK}{dt} = H(t)K(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}(t), K(t)],$$

где стоит коммутатор с гамильтонианом  $\hat{H}(t)$ . Этот коммутатор и есть оператор  $H(t)$  (без крышечки), действующий на  $K$ .

Теперь нужно рассмотреть собственные векторы  $\psi_{mn}(t)$  оператора  $H(t)$ . Их легко найти. Это будут просто проекции на собственные векторы гамильтониана  $\hat{H}(t)$ , которые я обозначил как  $\phi_n(t)$ :

$$\psi_{mn}(t)x = \langle x, \phi_n(t) \rangle \phi_m(t).$$

В представлении где оператор  $\hat{H}(t)$  диагонален это будут матрицы, у которых стоит единица в позиции  $(m, n)$ , а остальные элементы нулевые. В этом случае в точности такое же рассуждение, которое было приведено выше, определяет эволюцию  $U(t)$  этих собственных векторов:

$$U(t)\psi_{mn}(0) = e^{-i\beta_{mn}(t)}\psi_{mn}(t), \quad \frac{d\beta_{mn}(t)}{dt} = E_m(t) - E_n(t). \quad (21)$$

Это легко проверяется. Нужно продифференцировать по  $t$  и пренебречь производной вектора  $\psi_{mn}(t)$ . Очень важное замечание состоит в том, что когда  $m = n$  можно считать, что фаза обращается в ноль:  $\beta_{mn} = 0$ .

Представим то же самое в несколько других обозначения, а именно, возьмем матрицу плотности и запишем ее как сумму по собственным векторам с какими-то коэффициентами  $k_{mn}$ :

$$K = \sum k_{mn} \psi_{mn}.$$

Вместо того, чтобы рассматривать эволюцию собственных векторов  $\psi_{mn}$  рассмотрим эволюцию коэффициентов  $k_{mn}(t)$ . Формулы те же самые — коэффициенты  $k_{mn}(t)$  получают фазовые множители, а в показателе стоит  $\beta_{mn}(t)$ :

$$k_{mn}(t) = e^{-i\beta_{mn}(t)} k_{mn}, \quad \beta_{mn}(t) = \int_0^t (E_m(\tau) - E_n(\tau)) d\tau.$$

Если адиабатический гамильтониан  $\hat{H}(t)$  таков, что в момент  $T$  он возвращается к тому, что был в нулевой момент времени:  $\hat{H}(T) = \hat{H}(0)$ , то диагональные элементы матрицы  $K$  не меняются, но меняются недиагональные элементы — они умножаются на фазовый множитель.

Фиксируем теперь гамильтониан  $\hat{H}$ . Можно себе представить молекулу или атом или что-нибудь побольше — любую квантовую систему и эта система живет в каком-то внешнем мире. Будем считать, что внешнее окружение просто меняет гамильтониан, который управляет молекулой; новый гамильтониан  $\hat{H}(t)$  может зависеть от времени, но мы считаем, что он меняется медленно. Можно себе представить, что около молекулы довольно далеко от нее пролетает какая-то космическая частица. В таком случае есть электрическое поле, которое возникает от этой частицы. Это означает, что гамильтониан из-за космической частицы изменился. Если эта частица пролетает достаточно далеко, то можно считать, что изменение адиабатично.

Мой любимый пример: вы проводите эксперимент, а в соседней комнате кто-то решил подогреть свой завтрак и включил микроволновку. Тогда у вас тоже возникает какое-то электрическое поле, которое, несомненно, можно считать адиабатическим.

Другой пример: мы знаем, что живем в мире, где есть микроволновое космическое излучение, которое тоже порождает некоторое электромагнитное поле. Очень маленькое, но тем не менее оно есть. Этих адиабатических возмущений мы не знаем, но мы знаем, что на диагональные элементы матрицы плотности адиабатическое возмущение не оказывает влияния, а у недиагональных элементов матрицы плотности появляются фазовые множители, которые мы, естественно, не знаем, потому что не знаем возмущения.

То, что я сказал, можно интерпретировать другим способом. Можно рассмотреть линейные комбинации вида  $\alpha_0 \phi_0 + \alpha_1 \phi_1$  двух или большего количества собственных векторов гамильтониана  $\hat{H} = \hat{H}(0)$ . При рассмотрении эволюции этого состояния будут появляться фазовые множители:  $\alpha_k(t) = e^{-iE_k t} \alpha_k$ . Эти фазовые множители появляются всегда, они предсказуемы, но если наложено адиабатическое возмущение, то тогда фазовые множители становятся непредсказуемыми, а абсолютные значения коэффициентов  $\alpha_k(t)$  остаются постоянными. Раньше два собственных вектора когерентно менялись с течением времени (пока не было адиабатического возмущения), а сейчас эта когерентность исчезла. Это — то, что называется декогерентностью.

Теперь я хочу объяснить как из этих очень простых соображений появляется стандартный рецепт теории измерений. Будем считать, что та же самая молекула взаимодействует с окружающей средой и есть случайное адиабатическое возмущение  $\hat{H}(t)$  гамильтониана рассматриваемой системы  $\hat{H}$ . Это означает что есть гамильтониан, который зависит от каких-то параметров  $\lambda \in \Lambda$ , по которым есть некоторое распределение вероятности. Будем считать, что это адиабатическое возмущение

действует в период времени от 0 до  $T$  и тогда, как я уже говорил, коэффициенты  $k_{mn}$  матрицы плотности  $K_\lambda(T)$  в представлении  $\hat{H}$  получают фазовые множители  $K_\lambda(T) = \sum C_{mn}(\lambda, T)k_{mn}\psi_{mn}$ . Фазовые множители  $C_{mn}(\lambda, T)$  равны единице для диагональных элементов и не равны единице для остальных элементов. Поскольку гамильтониан случайный, матрицу плотности следует усреднять по этому возмущению, то есть, у недиагональных элементов нужно усреднить этот фазовый множитель. Совершенно ясно, что при усреднении этих фазовых множителей получается нечто по модулю меньшее единицы. Наложив некоторые условия, легко проверить, что среднее от недиагональных матричных элементов будет равно нулю.

Формальное доказательство заключается в следующем. Я уже говорил, что мы можем включить наш гамильтониан в некоторое семейство гамильтонианов  $\hat{H}(g)$ , где  $g$  принадлежит некоторому множеству параметров обозначенному через  $\Lambda$  ( $g \in \Lambda$ ). Будем считать, что все эти возмущения таковы, что  $g(0) = 0, g(1) = 0$  а зависимость гамильтониана от времени определяется формулой  $\hat{H}(g(t))$ . Я определяю адиабатический гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H}_\alpha(t) = \hat{H}(g(\alpha t)),$$

где  $\alpha \rightarrow 0$ . При этом растянется время. Если раньше оно изменялось от нуля до единицы, то сейчас — от нуля до  $T = \alpha^{-1}$ . Если обозначить через  $E_n(g)$  собственные значения гамильтониана  $\hat{H}(g)$ , то значения фазовых множителей вида  $e^{-i\beta_{mn}(t)}$  при  $t = T$  будут определяться следующей формулой:

$$\beta_{mn} = \int_0^T d\tau (E_m(g(\alpha\tau)) - E_n(g(\alpha\tau))).$$

Проведя замену переменных  $\alpha\tau = \tau'$ , можно  $1/\alpha$  вынести за знак интеграла:

$$\beta_{mn} = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 d\tau' (E_m(g(\tau')) - E_n(g(\tau'))).$$

Воспользуемся теперь леммой Римана – Лебега, которая утверждает, что если ищется среднее значение экспоненты  $e^{ikx}$  с большим, стремящемся к бесконечности показателем и среднее берется с какой-то сколько-нибудь приличной функцией (точное высказывание — она должна быть абсолютно интегрируемой), то тогда искомое среднее в пределе будет стремиться к нулю:

$$\int e^{ikx} \rho(x) dx \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ .

Если распределение вероятностей по  $\lambda$  не слишком плохое (с приличной плотностью распределения вероятности), то коэффициенты  $k_{mn}$  матрицы плотности исчезнут, если  $m \neq n$ . В результате матрица плотности  $K$  становится диагональной после введения случайных адиабатических возмущений.

Обозначим теперь диагональные матричные элементы буквами  $p_n$ . В обычном подходе  $p_n$  — это вероятности различных состояний. У нас же так и получилось: усредненная матрица плотности — это смесь чистых состояний с вероятностями  $p_n$ . Таким образом, получилась обычная формула для вероятностей разных чистых состояний в данном смешанном состоянии. Из этих соображений получаются обычные формулы теории измерений.

Отмечу, что обычно говорится, что если имеет место взаимодействие с классической системой, то матрица плотности становится диагональной. В терминах волновых функций это называется коллапсом. В приведенных рассуждениях нет классической системы.

Таким образом коллапс волновой функции можно вывести из случайного адиабатического взаимодействия. Здесь нет постоянной Планка — есть только адиабатика.

До сих пор мы рассматривали обычную квантовую механику, а теперь рассмотрим геометрический подход к квантовой теории. Я уже говорил, что есть алгебраический подход, где исходная точка это алгебра наблюдаемых — ассоциативная алгебра с инволюцией. Собственно наблюдаемыми являются самосопряженные элементы алгебры. Состояния определяются как положительные линейные функционалы на этой алгебре, то есть, понятие состояния вторично. Давайте будем считать, что понятие состояния первично, что есть некоторое множество состояний и подумаем, что от него нужно потребовать.

Первым делом я хочу потребовать, чтобы у меня было понятие смеси состояний — не смешанного состояния, а смеси состояний, чтобы любые состояния можно было смешивать с некоторыми вероятностями, с некоторыми весами. Это совершенно необходимое требование и, в общем-то, оно не имеет отношения к физике. Можно, например, в экономике или в теории игр рассматривать смешанные стратегии. Для того чтобы можно было смешивать, множество должно быть выпуклым. Будем считать, что выпуклое множество — это подмножество некоторого векторного пространства и тогда понятие смешивания будет определено очевидным образом: если  $x_i$  — точки выпуклого множества,  $p_i$  — неотрицательные числа, сумма которых равна единице, то смесь этих точек дается формулой  $\bar{x} = \sum p_i x_i$  (числа  $p_i$  рассматриваются как веса или вероятности).

Что нужно еще потребовать? Если мы смешиваем конечное количество состояний, то ничего больше не надо. Но если мы хотим смешивать бесконечное количество состояний, то необходимо понятие предела, а для этого нужны две вещи. Во-первых, нужна топология в векторном пространстве  $\mathcal{L}$ , в котором лежит выпуклое множество  $\mathcal{C}_0$ . Оно должно быть топологическим векторным пространством. Для простоты предположу, что это банахово пространство (нормированное полное пространство). Во-вторых нужно потребовать, чтобы пределы принадлежали тому же самому множеству — чтобы множество было замкнутым. При выполнении этих условий можно смешивать любое бесконечное множество состояний и поэтому мы требуем, чтобы множество состояний было замкнутым выпуклым множеством.

Еще потребуем, чтобы множество было ограниченным. Это, по существу, единственное требование, которое нужно для того чтобы развивать теорию.

Также мне нужно иметь понятие оператора эволюции  $\sigma(t)$ , который переводит состояние в момент времени ноль в состоянии какой-то момент времени  $t$ . (Ведь что самое главное не просто в физике — в науке? Нужно уметь предсказывать будущее.) Что мне нужно потребовать от этого оператора эволюции? Для каждого состояния я должен получить другое состояние, то есть, оператор эволюции должен отображать множество состояний в себя. Кроме того, я считаю, что  $t$  может быть отрицательным; тогда оператор эволюции будет обратимым преобразованием множества состояний.

Будем считать, что оператор эволюции — это линейное преобразование. Точнее, мы считаем, что он может быть продолжен как линейный оператор на векторное пространство  $\mathcal{L}$ , включающее множество  $\mathcal{C}_0$ . Введем понятие группы автоморфизмов множества состояний  $\mathcal{C}_0$ . Это группа линейных операторов в объемлющем пространстве  $\mathcal{L}$ , которые обратимы и отображают множество  $\mathcal{C}_0$  на себя. Естественно считать, что оператор эволюции будет автоморфизмом. Иногда удобно наложить на оператор эволюции дополнительные условия, например, потребовать, чтобы операторы эволюции принадлежали некоторой подгруппе  $\mathcal{V}$  группы автоморфизмов. Это необходимо, например, в классической механике.

Дальше нужно написать уравнение движения. Обычно мы считаем, что знаем изменение системы за бесконечно малое время. Это называется уравнением движения.

В самом общем виде уравнение движения можно записать так:

$$\frac{d\sigma}{dt} = H(t)\sigma(t), \quad (22)$$

где  $H(t)$  это линейный оператор.

Формально можно сказать, что  $H(t)$  определяется из этого уравнения, но в физике мы обычно считаем, что оператор  $H(t)$  известен и нужно найти оператор эволюции. Назовем оператор  $H(t)$  “гамильтонианом” (в кавычках). Если “гамильтониан” не зависит от времени, то оператор эволюции — это экспонента от “гамильтониана” :  $\sigma(t) = \exp(Ht)$ . Всё как в обычной квантовой механике, я лишь не поставил мнимую единицу. Можно считать это просто определением экспоненты: для независимого от времени оператора  $H$  в банаховом пространстве экспоненту можно определить как решение уравнения (22).

Из уравнения (22) следует, что “гамильтониан” принадлежит алгебре Ли группы  $\mathcal{V}$  (он является касательным вектором группы  $\mathcal{V}$  в единичном элементе группы). Группа  $\mathcal{V}$ , вообще говоря, бесконечномерна, поэтому понятие касательного вектора зависит от выбора топологии в группе, но я не буду обращать внимание на эти тонкости. Кроме того, разумно потребовать, чтобы для не зависящего от времени “гамильтониана” уравнение (22) имело решение.

Теперь у меня есть понятие состояния, у меня есть уравнения движения, но еще мне нужно ввести понятие наблюдаемой. Раньше я шел от наблюдаемых к состояниям, а сейчас хочу перейти от состояний к наблюдаемым. Что такое наблюдаемая? Прежде всего, это должен быть оператор  $A$  на который мы наложим те же условия, как и на “гамильтониан”. Иными словами, мы требуем, чтобы была определена экспонента  $\sigma_A(t) = \exp(At)$ , которую можно рассматривать как однопараметрическую подгруппу в  $\mathcal{V}$ .

Зафиксируем еще функционал  $a$ , который инвариантен относительно операторов  $\sigma_A(t) = \exp(At)$ . (Это условие эквивалентно условию  $a(Ax) = 0$ .) Функционал  $a$  определяет значения наблюдаемой.

В частности, в случае обычной квантовой механики  $\mathcal{V}$  — это группа унитарных операторов. Она действует на матрицы плотности по формуле  $U(K) = \hat{U}K\hat{U}^{-1}$ , где  $\hat{U}$  — унитарный оператор. Если  $\hat{A}$  — самосопряженный оператор (не обязательно ограниченный), то экспоненту  $e^{i\hat{A}t}$  можно рассматривать как однопараметрическую подгруппу группы  $\mathcal{V}$ . Так получаются все однопараметрические подгруппы непрерывные в сильной топологии (теорема Стоуна). Это позволяет отождествить самосопряженные операторы с элементами алгебры Ли группы унитарных операторов. Здесь есть маленькие трудности, которые заключаются в том, что коммутатор неограниченных самосопряженных операторов не всегда определен и поэтому, строго говоря, структура алгебры Ли нарушается. Эти трудности возникают всегда и к рассматриваемому подходу не имеют никакого отношения.

“Гамильтониан” выражается через самосопряженный оператор  $\hat{H}$  по формуле

$$H(K) = \frac{1}{i}[\hat{H}, K],$$

где  $K$  — матрица плотности. (Мы считаем, что  $\hbar = 1$ ).

Аналогично, любому самосопряженному оператору  $\hat{A}$  мы сопоставляем оператор на матрицах плотности по формуле:

$$A(K) = \frac{1}{i}[\hat{A}, K]. \quad (23)$$

Наблюдаемая задается парой  $(\hat{A}, a)$ , где  $\hat{A}$  — самосопряженный оператор, действующий на матрицах плотности по формуле (23) и функционал на матрицах плотности  $a$  задается формулой  $a(K) = \text{tr}(\hat{A}K)$ .



В алгебраическом подходе группа  $\mathcal{V}$  состоит из автоморфизмов ассоциативной алгебры с инволюцией  $\mathcal{A}$  ( $*$ -алгебры); в частности, самосопряженный элемент  $A$  алгебры  $\mathcal{A}$  определяет инфинитезимальный автоморфизм (элемент алгебры Ли группы  $\mathcal{V}$ ) по формуле  $\alpha_A(X) = i[A, X]$ . Линейный функционал  $\omega$  на алгебре называется положительным, если  $\omega(X^*X) \geq 0$  для всех  $X \in \mathcal{A}$ ; множество всех положительных функционалов я обозначаю буквой  $\mathcal{C}$ .

Множество состояний  $\mathcal{C}_0$  состоит из нормированных положительных функционалов (функционалов, удовлетворяющих условию  $\omega(1) = 1$ ). Это — ограниченное выпуклое множество; на нем естественным образом действует группа  $\mathcal{V}$ . Наблюдаемая — это пара  $(A, a)$ , где  $A$  — это самосопряженный элемент алгебры  $\mathcal{A}$ , рассматриваемый как инфинитезимальный автоморфизм, а  $a$  — это линейный функционал на  $\mathcal{C}_0$  сопоставляющий состоянию  $\omega$  число  $a(\omega) = \omega(A)$ .

В геометрическом подходе точно так же есть декогерентность. Доказательство этого, практически такое же, как и раньше. Я начну с независящего от времени “гамильтониана”, обозначаемого буквой  $H$  (без крышечки). Тогда оператор эволюции — это просто экспонента  $\sigma(t) = e^{tH}$ . Я предположу, что оператор  $H$  диагонализуем, то есть, существует базис  $(\psi_j)$ , состоящий из собственных векторов оператора  $H$ :

$$H\psi_j = \epsilon_j\psi_j.$$

Я предположил, что оператор эволюции отображает множество состояний в себя и что множество состояний является ограниченным. При этих условиях следует ожидать, что этот оператор диагонализуем.

Это легко доказать в конечномерном случае. Если  $\sigma(t) = e^{tH}$  — это семейство ограниченных операторов в конечномерном пространстве и эти операторы не просто ограничены — они ограничены вместе, то есть, норма всех этих операторов ограничена одним и тем же не зависящим от  $t$  числом, то из этого сразу следует две вещи. Во-первых, собственные значения этих операторов чисто мнимые, потому что функция вида  $e^{\epsilon t}$  ограничена только в том случае, если  $\epsilon$  чисто мнимое. (Асимптотика определяется вещественной частью, а мнимая часть дает фазовый множитель; если  $\epsilon$  — действительное число, ограниченность будет только в том случае, когда  $\epsilon = 0$ .) Во-вторых, в случае наличия жордановой клетки размера больше единицы, экспонента  $\sigma(t) = e^{tH}$  тоже не будет ограниченной. Таким образом, в конечномерном случае во-первых все собственные значения чисто мнимые, а во-вторых все жордановы клетки одномерны, то есть  $H$  диагонализуем.

В бесконечномерном случае этого недостаточно для диагонализуемости, но тем не менее жордановых клеток быть не может и в этом случае. Поэтому нужно ожидать, что оператор  $H$  диагонализуем. Я это и буду предполагать.

Теперь я повторяю свои рассуждения. Я включаю мой “гамильтониан” в семейство  $H(g)$  “гамильтонианов”, с собственными значениями  $(\epsilon_j(g))$  и собственными функциями  $(\psi_j(g))$ :

$$H(g)\psi_j(g) = \epsilon_j(g)\psi_j(g),$$

удовлетворяющими прежним условиям — базис гладко зависит от  $g$  и для значения  $g = 0$  получается исходный “гамильтониан”:  $H(0) = H$ .

Дальше я говорю, что  $\psi_j$  — это робастная нулевая мода, если  $\epsilon_j(g) \equiv 0$ , то есть, собственное значение равно нулю при любом  $g$ . Можно было бы сказать, что это — устойчивая нулевая мода (она была у  $H$  и остается нулевой модой после введения  $H(g)$ ), но слово “устойчивость” занято для других целей.

Теперь я хочу сделать все то же, что я делал раньше — буду считать, что взаимодействие со средой определяется случайным “гамильтонианом”  $H(g(t))$ , где  $g$  зависит от  $t$ , и буду считать, что эти случайные “гамильтонианы” адиабатичны. Они медленно меняются так, что производной от  $g$  по  $t$  можно пренебречь. Можно сказать, что

рассматривается адиабатическая эволюция. Собственный вектор при этом остается собственным вектором меняющегося “гамильтониана”, но в нем появляется фазовый множитель:

$$\sigma(t)\psi_j = e^{\rho_j(t)}\psi_j(g(t)),$$

где  $\frac{d\rho_j}{dt} = \epsilon_j(g(t))$ . Тут нет мнимой единицы, но  $\epsilon_j(g)$  само чисто мнимое. Для доказательства просто нужно продифференцировать правую часть этого выражения по  $t$  применяя уравнения движения и пренебрегая производной  $\dot{g}(t)$ .

Фазовый множитель не появляется для робастных нулевых мод, а для неробастных появляется. Если же адиабатическое возмущение действовало некоторое конечное время, то в конце для робастных нулевых мод просто ничего не изменится. В середине эти моды менялись, они становились нулевыми модами другого гамильтониана, а в конце они приходят к тому, что было:  $\sigma(T)\psi_j = \psi_j$ , если  $g(T) = g(0)$ . У всех остальных мод есть фазовые множители.

Дальше все так же, как в обычной квантовой механике. Для неробастных нулевых мод все случайные фазовые факторы после усреднения по случайному возмущению обнуляются, а для робастных нулевых мод ничего не меняется.

В обычной квантовой механике робастные нулевые моды — это диагональные элементы матрицы плотности в  $\hat{H}$  — представлении. Они, как мы знаем, являются нулевыми модами, потому что все диагональные матрицы коммутируют между собой, поэтому здесь применимы предыдущие высказывания.

Интерпретировать это нужно так: произвольное состояние  $x \in \mathcal{C}_0$  можно разложить по собственным функциям оператора  $H$ , и при этом взаимодействие с окружающей средой убьет все моды, кроме робастных нулевых мод. Я обозначу через  $P'$  тот оператор, который убивает все, кроме робастных нулевых мод, и теперь можно сказать, что вся наблюдаемая физика лежит в проекции на робастные нулевые моды  $P'x \in \mathcal{C}_0$ . Далее нужно разложить состояния  $P'x \in \mathcal{C}_0$  по чистым робастным нулевым модам  $P'x = \sum p_i u_i$ . Коэффициенты  $p_i$  в этом разложении должны быть интерпретированы как вероятности. В обычной квантовой механике таким образом получают обычные вероятности. В общем случае коэффициент  $p_i$  — это вероятность чистой робастной нулевой моды  $u_i$  в состоянии  $x$ .

Гамильтониану  $H$  отвечает физическая величина  $(H, h)$ , где функционал  $h$  нужно отождествить с энергией. Коэффициент  $p_i$  следует интерпретировать как вероятность найти энергию  $h(u_i)$  в состоянии  $x$ . (Предполагается, что все числа  $h(u_i)$  различны. Если некоторые из них совпадают, то чтобы получить вероятность того, что энергия равна  $h$ , нужно просуммировать все коэффициенты  $p_i$ , для которых  $h(u_i) = h$ .)

Если все нулевые моды робастные, то можно написать простую формулу для оператора:  $P' = P$ , где  $P$  — оператор, убивающий все ненулевые моды:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t) dt.$$

Если в этом интеграле разлагать  $\sigma(t)$  по собственным векторам, то для ненулевых мод появляются ненулевые фазовые множители; усредняя их по времени, в результате получаем ноль.

Сейчас я объяснил то, как появляются вероятности для “гамильтонианов”. Они интерпретируются как вероятности различных уровней энергии. Повторить те же самые рассуждения можно рассматривая и другие наблюдаемые, представляемые в виде  $(A, a)$ , где  $A \in \mathcal{V}$ ,  $a$  — функционал, для которого  $a(Ax) = 0$ . Можно определить понятие робастной нулевой моды для любой наблюдаемой.

Я дам несколько другое, более общее, определение робастной нулевой моды. Когда говорится, что  $x$  — это робастная нулевая мода, прежде всего, нужно потребовать,

чтобы это была нулевая мода:  $Ax = 0$ . Если  $A$  слегка меняется (заменяется на близкий элемент  $A'$  группы  $\mathcal{V}$ ), то нужно потребовать, чтобы у  $A'$  была нулевая мода  $x'$ , близкая к исходной нулевой моде  $x$ . Дальше все то же самое, что было сказано для энергии, можно повторить для произвольной наблюдаемой. Нужно рассмотреть проекцию  $P_A$  на пространство нулевых мод:  $\mathcal{C}_A = (\text{Ker} A) \cap \mathcal{C} = \text{Im}(P_A)$ , где

$$P_A = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{At}.$$

(Я предположил, что все нулевые моды робастные). После этого нужно разложить проекцию на нулевые моды по крайним точкам:

$$P_A(x) = \sum p_i u_i.$$

Коэффициенты  $p_i$  будут интерпретироваться как вероятности значений  $a(u_i)$  в состоянии  $x$ .

## 4.2 L-функционалы

Я сейчас объяснил, что есть формализм, в котором начальный объект — это множество состояний. Возникает вопрос, который должен задать физик: удобен ли этот формализм, удобно ли в этом формализме считать? На этот вопрос я собираюсь сейчас ответить, вернувшись уже к обычному формализму квантовой механики. Я буду работать в рамках алгебраического подхода, в котором алгеброй является алгебра Вейля с генераторами  $\hat{u}^i$  и соотношениями

$$\hat{u}^k \hat{u}^l - \hat{u}^l \hat{u}^k = i\hbar \sigma^{k,l}.$$

Я хочу ввести понятие L-функционала, определяемого для всякой матрицы плотности  $K$  в любом представлении алгебры Вейля по формуле:

$$L_K(\alpha) = \text{tr} e^{i\alpha_k \hat{u}^k} K = \text{tr} V_\alpha K,$$

где  $V_\alpha = e^{i\alpha_k \hat{u}^k} = e^{i\alpha \hat{u}}$  — операторы, которые мы уже рассматривали,  $\alpha_k$  — это набор чисел, отвечающих генераторам алгебры Вейля. Напомню, что алгебру Вейля можно задавать генераторами  $V_\alpha$ . Если  $u_k$  — самосопряженные, а  $\alpha_k$  — действительные, то эти генераторы унитарны и удовлетворяют соотношениям

$$V_\alpha V_\beta = e^{-i\frac{\hbar}{2} \alpha \sigma \beta} V_{\alpha+\beta},$$

где  $\alpha \sigma \beta = \alpha_k \sigma^{k,l} \beta_l$ .

Это так называемая экспоненциальная форма алгебры Вейля.

Важное свойство L-функционалов заключается в том, что они объединяют вместе все представления алгебры Вейля. Проблема неэквивалентности представлений алгебры Вейля в формализме L-функционалов полностью исчезает. В формуле для L-функционала унитарный оператор умножается на оператор из класса операторов имеющих след, и поэтому след хорошо определен.

Я могу ввести пространство  $\mathcal{L}$  всех линейных функционалов на алгебре Вейля. Можно считать, что L-функционал определяет линейный функционал на алгебре Вейля:  $L_K \in \mathcal{L}$ . (Это вытекает из замечания, что всякий элемент, выраженный через генераторы  $V_\alpha$  с помощью конечного числа операций сложения и умножения является линейной комбинацией генераторов  $V_\alpha$ .) Как легко проверить, функционал  $L_K$  положителен и, кроме того, нормирован (на единичном элементе алгебры он равен единице). В дальнейшем я буду отождествлять L-функционалы с положительными функционалами на алгебре Вейля.

Определим операции в рассматриваемом пространстве  $\mathcal{L}$ . Эти операции определены для любой алгебры с инволюцией.

Если имеется алгебра с инволюцией, то на линейных функционалах есть две операции, отвечающие элементу  $A$  этой алгебры. Можно определить операцию на функционале  $\omega(x)$ , где  $x$  — элемент алгебры, умножая  $x$  справа на  $A$ . Другая операция получается если умножать слева на  $A^*$ . Первую из них я обозначил той же самой буквой  $A$ , а другую —  $\tilde{A}$  :

$$(A\omega)(x) = \omega(xA), \quad (\tilde{A}\omega)(x) = \omega(A^*x).$$

Зададимся вопросом: остается ли функционал положительным при действии этими операторами? Ответ: нет, но если применить комбинацию  $\tilde{A}A$ , тогда положительные функционалы будут переходить в положительные функционалы (которые не обязательно нормированы). Напомню, что положительные функционалы должны быть неотрицательны на элементах вида  $x = B^*B$ . Легко проверить, что при действии операции  $\tilde{A}A$  происходит преобразование  $x \rightarrow A^*xA = (BA)^*xBA$ . Отсюда видно, что положительность сохраняется.

Это важное высказывание. Мы обозначили через  $\mathcal{C}$  пространство всех положительных функционалов (ненормированных состояний). В нем действует оператор  $\tilde{A}A$ .

Следующее замечание состоит в том, что операторы вида  $\tilde{A}$  всегда коммутируют с операторами вида  $A$ . Это происходит потому, что один умножает слева, а другой — справа.

Далее, если оператор имеет вид  $A = e^{itH}$ , тогда  $\tilde{A} = e^{-it\tilde{H}}$ . Отсюда легко вывести, что если уравнения движения записать как

$$id\sigma/dt = (\tilde{H} - H)\sigma, \quad (24)$$

то оператор эволюции будет иметь вид  $e^{-it(\tilde{H}-H)}$ . Согласно предыдущему замечанию, это выражение может быть представлено в виде  $\tilde{A}A$ . То есть если уравнения движения записать в виде (24), то  $\sigma$  не выводит за пределы конуса положительных функционалов (конуса ненормированных состояний). Это я буду использовать.

Перейдем теперь к вопросу о виде уравнений движения в случае алгебры Вейля. Легко вычислить операторы  $V_\beta$  и  $\tilde{V}_\beta$  :

$$(V_\beta L)(\alpha) = e^{+i\frac{\hbar}{2}\alpha\sigma\beta} L(\alpha + \beta), \quad (\tilde{V}_\beta L)(\alpha) = e^{+i\frac{\hbar}{2}\alpha\sigma\beta} L(\alpha - \beta),$$

Запишем  $\hat{H}$  как интеграл

$$\hat{H} = \int d\beta h(\beta) V_\beta.$$

Этот оператор будет самосопряженным если  $h(-\beta) = h(\beta)^*$ . Введем постоянную Планка и сделаем замену  $\frac{1}{\hbar}\hat{H} \rightarrow \tilde{H}$ . Уравнение движения, в котором  $\tilde{H}$  играет роль гамильтониана примет вид:

$$i\hbar \frac{d\sigma}{dt} = (\tilde{H} - \hat{H})\sigma.$$

Это уравнение в L-функционалах можно записать в виде:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dL}{dt} &= \int d\beta h(-\beta) e^{+i\frac{\hbar}{2}\alpha\sigma\beta} L(\alpha - \beta) - \int d\beta h(\beta) e^{+i\frac{\hbar}{2}\alpha\sigma\beta} L(\alpha + \beta) = \\ &= - \int d\beta h(\beta) (e^{+i\frac{\hbar}{2}\alpha\sigma\beta} - e^{-i\frac{\hbar}{2}\alpha\sigma\beta}) L(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

В результате приходим к формуле:

$$\frac{dL}{dt} = - \int d\beta h(\beta) \frac{2 \sin(\frac{\hbar}{2}\alpha\sigma\beta)}{\hbar} L(\alpha + \beta).$$

Из этой формулы ясно, что уравнение движения для L-функционалов имеет предел когда  $\hbar \rightarrow 0$ .

## 5 Лекция 5

### 5.1 Функциональные интегралы

Настоящая лекция посвящена, прежде всего, широко применяемому в квантовой механике функциональным интегралам. Я буду рассказывать об основанном на идее Березина подходе, который позволяет применять их и в обычном подходе к квантовой механике, и в геометрическом подходе, и в формализме L-функционалов.

В квантовой механике физическая величина представляется в виде функционального интеграла — бесконечномерного интеграла, где подынтегральное выражение включает экспоненту от действия, умноженную на что-то. Действие — это функционал от кривой (точнее, от функции  $q(\tau)$ , график которой мы рассматриваем как кривую):

$$S[q(\tau)] = \int_0^t d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau)).$$

В данном выражении  $q(\tau)$  стоит в квадратных скобках, чтобы подчеркнуть, что  $S$  — это не функция, а функционал, который зависит не от точки кривой, а от кривой.

Матричный элемент  $\langle q_2 | \hat{U}(t) | q_1 \rangle$  оператора эволюции в координатном представлении:  $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$ , выражается через функциональный интеграл с подынтегральным выражением:

$$e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)]},$$

для которого область интегрирования — это кривые  $q(\tau)$  с заданными начальными и конечными значениями  $q(0) = q_1, q(t) = q_2$ .

Что же означает слово “функциональный интеграл”? Интеграл описанного мной типа можно аппроксимировать конечномерными интегралами: под знаком функционального интеграла заменить обычный интеграл, скажем, на интегральные суммы и взять предел. Проблема в том, что в отличие от теории из курса обычного интегрального исчисления, когда способ приближения несущественен, для функциональных интегралов это вовсе не так. Кроме того, предел, как правило, не существует: он обычно или бесконечный, или нулевой, и нужно предпринимать какие-то действия для того, чтобы извлечь из всего этого конечный ответ.

То, что я собираюсь обсуждать, может быть сделано строгим до некоторого момента. Строгие вещи можно сделать для гауссовых интегралов, представляющих собой интегралы от экспонент квадратичных выражений, возможно, умноженных на полином. Для вычисления таких интегралов в конечномерном случае можно воспользоваться формулой:

$$\int \exp\left(\frac{i}{2} \langle Ax, x \rangle + i \langle b, x \rangle\right) dx = (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{i}{2} \langle A^{-1}b, b \rangle\right).$$

(В этой формуле должен стоять постоянный множитель, который мы не пишем, включив его в определение интеграла. Оператор  $A$  может быть комплексным, но нужно наложить условия, гарантирующие, что интеграл имеет смысл.) Дифференцируя это выражение по  $b$ , мы приходим к выводу, что интеграл вида

$$\int P(x) \exp\left(\frac{i}{2} \langle Ax, x \rangle\right) dx,$$

где  $P(x)$  — некоторый полином может быть выражен через детерминанты, а, по крайней мере, для случая эллиптических операторов существует вполне хорошая теория

вычисления таких детерминантов. Опять же, такой детерминант нужно чем-то приближать и после этого выбрасывать бесконечные члены разложения для логарифма детерминанта.

Тем не менее если имеется подынтегральное выражение вида  $W(x) = Q(x) + gV(x)$ , где  $Q$  — квадратичное выражение по  $x$ , а константу  $g$ , мы считаем малой, то тогда нормированный функциональный интеграл вида:

$$\frac{\int e^{W(x)} dx}{\int e^{Q(x)} dx}$$

можно представить, в виде суммы фейнмановских диаграмм. В более общем случае, когда  $W(x)$  представляется как квадратичное по  $x - x_0$  выражение плюс кусочек, который содержит только мономы большей степени по  $x - x_0$ , теория возмущений тоже хорошо определена.

После этих предварительных слов перейдем к вопросу, как можно построить эти функциональные интегралы? Их можно строить для более или менее любой физической величины. Я буду строить функциональный интеграл для экспоненты оператора, действующего в банаховом (не обязательно в гильбертовом) пространстве или, что почти то же, я буду решать уравнение движения:

$$\frac{d\sigma}{dt} = H(t)\sigma(t) \quad (25)$$

и искать оператор эволюции.

Оператор  $H(t)$  в уравнении движения может быть функцией от  $t$ , но, для того чтобы упростить формулы, я буду считать, что  $H$  не зависит от  $t$ ; это совершенно несущественно.

Давайте теперь то пространство, в котором действует оператор  $H$ , обозначим буквой  $\mathcal{L}$  и определим понятие символа оператора. Мы встречались с этим понятием. Я хочу дать очень общее определение. Символ оператора — это функция, определенная на каком-то пространстве. Я буду считать, что на пространстве с мерой, потому что хочу интегрировать, но мне ничего не нужно из теории пространств с мерой. Достаточно понимать, что символ оператора — это функция, определенная где-то, где есть понятие интегрирования.

Символы будем выделять подчеркиванием снизу. Основные свойства символов следующие. Символ равен тождественно единице, если оператор равен единице. Символ  $\underline{A}$  должен зависеть линейно от оператора  $A$ . Произведению операторов  $C = AB$  должна отвечать некоторая операция на символах, которую я обозначу символом  $*$ , то есть  $\underline{C} = \underline{A} * \underline{B}$ .

Теперь я проведу совершенно тривиальные рассуждения, которые сразу приводят к функциональному интегралу. Я буду использовать стандартную формулу для экспоненты:

$$\sigma(t) = e^{tH} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{tH}{N}\right)^N.$$

Если я буду рассматривать экспоненту от символа  $\exp \frac{t}{N} \underline{H}$ , то при больших  $N$ , в первом приближении будет справедлива формула:

$$\underline{1 + \frac{tH}{N}} = e^{\frac{t}{N} \underline{H}} + O(N^{-2}).$$

Ошибка будет иметь порядок  $\frac{1}{N^2}$ , но когда  $N \rightarrow \infty$ , то этой поправкой можно пренебречь, и в результате получается выражение:

$$\underline{\sigma(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N(t),$$

$$I_N(t) = e^{\frac{t}{N}H} * \dots * e^{\frac{t}{N}H}$$

( $N$  сомножителей).

Мое утверждение заключается в том, что я вывел представление оператора эволюции в качестве функционального интеграла. Нужно только дать примеры символов и расшифровать, что такое “звездочка”.

Я хочу подчеркнуть одну вещь, на мой взгляд, важную и физиками недооцененную. Дело в том, что до сих пор я приводил тривиальные рассуждения, которые могут быть сделаны строгими. На самом деле, не нужно говорить про функциональные интегралы — просто нужно исследовать функции  $I_N(t)$ . Можно, например, применять метод стационарной фазы и получать более или менее те же результаты, что и на языке функциональных интегралов, проводя вполне строгие рассуждения.

Позже я введу большой класс операторов, для которых операция  $*$  записывается в простом виде. Этот класс операторов включает в себя  $q$ - $p$ -символы и виковские символы, про которые я уже рассказывал. Сейчас я буду обсуждать их в несколько ином виде. Я считаю, что символ — это функция от двух переменных  $\underline{A}(\alpha, \beta)$ . Для этого большого класса символов выражение для символа произведения выглядит так:

$$\underline{C}(\alpha, \beta) = \int d\gamma d\gamma' \underline{A}(\alpha, \gamma) \underline{B}(\gamma', \beta) e^{c(\alpha, \gamma) + c(\gamma', \beta) - c(\alpha, \beta) - r(\gamma', \gamma)}, \quad (26)$$

где  $c(\alpha, \beta)$  и  $r(\alpha, \beta)$  — некоторые функции. Для  $q$ - $p$ -символов это просто скалярные произведения с точностью до знака:

$$c(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = r(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -i\mathbf{p}\mathbf{q}. \quad (27)$$

Позже я вернусь к вопросу как получаются такого типа формулы, а пока я считаю, что есть такая формула для символа произведения. Зная формулу для произведения двух операторов, можно записать формулу для произведения  $n$  операторов  $A_1, \dots, A_N$ :

$$\underline{C}(\alpha, \beta) = \int d\gamma_1 d\gamma'_1 \dots d\gamma_{N-1} d\gamma'_{N-1} \underline{A}_1(\alpha, \gamma_1) \underline{A}_2(\gamma'_1, \gamma_2) \dots \underline{A}_n(\gamma'_{N-1}, \beta) e^{\rho_N},$$

где

$$\rho_N = c(\alpha, \gamma_1) + c(\gamma'_1, \gamma_2) + \dots + c(\gamma'_{N-1}, \beta) - c(\alpha, \beta) - r(\gamma'_1, \gamma_1) - \dots - r(\gamma'_{N-1}, \gamma_{N-1}).$$

В результате получаем произведение символов, умноженное на экспоненту от некоторого выражения, которое обозначено символом  $\rho_N$ . Возвращаясь к выражению  $I_N(t)$ , приближающему оператор эволюции, мы можем представить его в виде:

$$I_N(t) = \int d\gamma_1 d\gamma'_1 \dots d\gamma_{N-1} d\gamma'_{N-1} e^{\rho_N} \exp\left(\frac{t}{N}(\underline{H}(\alpha, \gamma_1) + \underline{H}(\gamma'_1, \gamma_2) + \dots + \underline{H}(\gamma'_{N-1}, \beta))\right).$$

То, что я рассказал — это очень широкая схема. Есть один совершенно конкретный пример — это  $q$ - $p$ -символ. Я хочу заметить, что если рассматривать ядро единичного оператора в смысле математики (или матрицу единичного оператора, как говорят физики), то это —  $\delta$ -функция: в координатном представлении  $\langle \mathbf{q}_2 | 1 | \mathbf{q}_1 \rangle = \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ , а в импульсном представлении  $\langle \mathbf{p}_2 | 1 | \mathbf{p}_1 \rangle = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ . Мы же хотим, чтобы символ единичного оператора был равен единице, а не  $\delta$ -функции. Это очень просто сделать. Дело в том, что преобразование Фурье от  $\delta$ -функции — это константа, поэтому для того, чтобы получить символ, дающий для единичного оператора единицу, мы должны просто взять преобразование Фурье и помножить на постоянный множитель. Раз матрица — это  $\delta$ -функция от аргумента  $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$ , значит, возьмем преобразование Фурье матричного элемента  $\langle \mathbf{q}_2 | A | \mathbf{q}_1 \rangle$  по этому аргументу:

$$\underline{A}^{q-p}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{y} \langle \mathbf{y} | A | \mathbf{q} \rangle e^{i\mathbf{p}(\mathbf{q}-\mathbf{y})}.$$

Здесь написано, что  $q$ - $p$ -символ (я так назвал этот символ) — это просто преобразование Фурье матричного элемента по разности между аргументами. Это действительно символ. Для единицы это единица. Очевидно, можно взять обратное преобразование Фурье и выразить матричные элементы  $\langle \mathbf{p}_2 | A | \mathbf{p}_1 \rangle$  через  $q$ - $p$ -символ. Поскольку мы знаем, как выразить матричный элемент произведения через матричные элементы сомножителей, мы можем вычислить, чему равен  $q$ - $p$ -символ от произведения двух операторов. Ответ дается формулой (26), где функции  $c(\alpha, \beta)$  и  $r(\alpha, \beta)$  — просто скалярные произведения.

Определение  $q$ - $p$ -символа, которое было только что дано, отличается от определения, данного раньше. Это определение применимо к любому оператору, лишь бы интеграл сходился. Если же  $A$  — это дифференциальный оператор, то легко понять, что определение  $q$ - $p$ -символа, которое я сейчас дал с помощью интеграла, соответствует предыдущему: если имеется дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами, то его можно записать как полином от операторов координат  $q^j$  и операторов импульсов  $\hat{p}_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q^j}$ . После этого операторы координат нужно сдвинуть налево, а операторы импульсов — направо, после чего нужно снять шляпочки с операторов. Получится из операторного выражения полиномиальная функция, которую я называл  $q$ - $p$ -символом.

Отмечу, что я считал, что постоянная Планка  $\hbar = 1$ , но иногда удобно ее оставить в формулах.

Перейдя к обычной квантовой механике, мы обнаружим, что формула для  $I_N$  принимает вид:

$$I_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \int \prod_1^{N-1} d\mathbf{q}_\alpha d\mathbf{p}_\alpha \exp(i \sum_1^N \mathbf{p}_\alpha (\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_{\alpha-1}) - \frac{it}{N} \sum_1^N \underline{H}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_{\alpha-1})), \quad (28)$$

где  $\mathbf{p}_N = \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_N = \mathbf{q}$ .

Таким образом, мы получили оператор эволюции как предел конечнократных интегралов.

На этом вполне разумно было бы остановиться и просто изучать это представление, но также можно сказать слова, которые содержат выражение “функциональный интеграл”. Для этого следует обратить внимание на то, что выражение, которое стоит в экспоненте — это в точности интегральная сумма для некоторого интеграла. Этот интеграл хорошо известен физикам — это функционал действия

$$S[\mathbf{p}(\tau), \mathbf{q}(\tau)] = \int_0^t (\mathbf{p}(\tau) \frac{d}{dt} \mathbf{q}(\tau) - \underline{H}(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{q}(\tau))) d\tau.$$

Все уже очень близко к тому, что я хочу. Давайте подойдем еще ближе. То, что было написано — это  $q$ - $p$ -символ для оператора эволюции. Мы уже знаем, что  $q$ - $p$ -символ — это просто Фурье преобразование от матричного элемента. В результате мы можем сказать, что  $q$ - $p$ -символ — это функциональный интеграл от экспоненты

$$e^{iS[\mathbf{p}(\tau), \mathbf{q}(\tau)]},$$

где стоит функционал  $S$  от пары функций  $\mathbf{p}(\tau)$ ,  $\mathbf{q}(\tau)$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}, \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(t) = \mathbf{q},$$

когда  $\tau$  изменяется от 0 до  $t$ . Далее можно перейти к матричным элементам, сделав Фурье — преобразование. В результате получится такой же интеграл, но с другими граничными условиями:  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_2$ .

Чтобы прийти к той формуле, про которую я уже говорил, рассмотрим частный случай, когда символ  $\underline{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  — это сумма квадратичной функции от  $\mathbf{p}$  (кинетической энергии) и некоторой функции  $V(\mathbf{q})$  (потенциальной энергии). Тогда ничего не



стоит проинтегрировать по  $\mathbf{p}$  — это гауссов интеграл. В результате матричный элемент оператора эволюции может быть представлен как функциональный интеграл с подынтегральным выражением вида экспоненты от функционала действия

$$e^{iS[\mathbf{q}(\tau)]} = e^{i(\int_0^t d\tau (T(\dot{\mathbf{q}}(\tau)) - V(\mathbf{q}(\tau)))}.$$

Функционал действия при этом представляет собой интеграл от разности кинетической и потенциальной энергий. По  $\mathbf{p}(\tau)$  интегрирование уже проведено, и остаётся только интеграл по функциям  $\mathbf{q}(\tau)$ , удовлетворяющим условиям  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_2$ .

Таким образом, я вывел функциональный интеграл, с которого я начал и даже в более общем виде. Когда кинетическая энергия квадратична по импульсам, это вычисление всегда работает.

В приведенных рассуждениях допущена определенная недосказанность. На самом деле, в выражении (28) для  $I_N$  должен стоять постоянный множитель, стремящийся к нулю при  $N \rightarrow \infty$  (этот множитель происходит от константы, которую мы выбросили, когда писали выражение для гауссова интеграла). То есть, здесь выброшен нулевой множитель. Это все время делается в функциональных интервалах, потому что на самом деле хороший объект — это частное от деления функциональных интегралов.

Я хочу построить большое количество примеров. Эти примеры обобщают то, что Березин называл ковариантными символами.

Я возьму два банаховых пространства  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$ . Можно взять два сопряженных банаховых пространства, но это не обязательно — важно только чтобы между ними было невырожденное скалярное произведение (спаривание). Поскольку я хочу, чтобы частным случаем было гильбертово пространство, где скалярное произведение  $\langle l, l' \rangle$  линейно по одному аргументу  $l \in \mathcal{L}$  и антилинейно по другому аргументу  $l' \in \mathcal{L}'$ , я и здесь такое потребую.

Итак, у меня есть два банаховых пространства, которые почти двойственны друг другу в том смысле, что между ними есть невырожденное скалярное произведение. После этого я возьму две системы векторов  $e_\alpha \in \mathcal{L}$ , где  $\alpha \in \mathcal{M}$ , и  $e'_\beta \in \mathcal{L}'$ , где  $\beta \in \mathcal{M}'$ , в этих пространствах. Они не должны быть линейно независимы — это не базисы. Это, как говорят, переполненные системы векторов. Мне важно только то, чтобы любой вектор можно было выразить через эти векторы как предел линейных комбинаций. (Примером такой переполненной системы являются пуассоновы векторы.)

Теперь я потребую, чтобы, как говорят физики, можно было вставить единицу. Это означает, что если я хочу рассмотреть скалярное произведение  $\langle l, l' \rangle$ , то нужно взять скалярные произведения  $\langle l, e'_\mu \rangle$  и  $\langle e_\lambda, l' \rangle$  и из этих скалярных произведений с помощью некоторого интегрирования создать общее скалярное произведение. Это всегда можно сделать и даже разными способами. Я буду считать, что такой способ зафиксирован:

$$\langle l, l' \rangle = \int \langle l, e'_\mu \rangle \langle e_\lambda, l' \rangle e^{-r(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu, \quad (29)$$

где  $r(\lambda, \mu)$  — функция на пространстве с мерой  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ .

После этого я хочу определить ковариантный символ  $\underline{A}(\alpha, \beta)$  оператора  $A$ , действующего в  $\mathcal{L}$  (можно рассмотреть  $\mathcal{L}'$  с тем же успехом). Этот символ определяется простой формулой:

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = \frac{\langle Ae_\alpha, e'_\beta \rangle}{\langle e_\alpha, e'_\beta \rangle}.$$

Мое основное условие выполнено — символ единичного оператора равен единице. Легко посчитать символ  $\underline{C}$  произведения операторов  $C = AB$ , воспользовавшись

соотношением:  $\langle ABe_\alpha, e'_\beta \rangle = \langle Be_\alpha, A^*e'_\beta \rangle$ , и формулой (29) для  $\langle l, l' \rangle$ , где  $l = Be_\alpha$ ,  $l' = A^*e'_\beta$ . Введя обозначения  $\langle e_\alpha, e'_\beta \rangle = e^{c(\alpha, \beta)}$ , получаем следующее выражение:

$$\underline{C}(\alpha, \beta) = \int d\lambda d\mu \underline{B}(\alpha, \mu) \underline{A}(\lambda, \beta) \exp(-r(\lambda, \mu) - c(\alpha, \beta) + c(\alpha, \mu) + c(\lambda, \beta));$$

оно совпадает с формулой (26) для символа произведения, которую я постулировал ранее.

Обращаю внимание на то, что моя конструкция невероятно общая. Векторы  $e_\alpha$  и  $e'_\beta$  могли быть выбраны практически произвольным образом, лишь бы их было достаточно много для того, чтобы это была переполненная система.

Таким образом можно построить громадное количество конкретных примеров. Важно лишь, чтобы были достаточно простые выражения для скалярного произведения  $\langle e_\alpha, e'_\beta \rangle$  и для функции  $r(\lambda, \mu)$ .

Если  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$  — гильбертово пространство фоковского представления алгебры Вейля, то можно взять в качестве  $e_\alpha$  пуассоновы векторы  $e_\alpha = e^{\alpha \hat{a}^*} |0\rangle$ , которые мы уже рассматривали. В этом случае  $c(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$ . Это просто вычислить, потому что все интегралы гауссовы.

Замечу, что помимо гильбертова пространства, соответствующего случаю обычной квантовой механики, можно рассматривать и банаховы пространства. Например, взять в качестве  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  двойственные друг к другу пространства  $L^p$  и  $L^q = (L^p)^*$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

## 5.2 L-функционалы и функциональные интегралы

Перейдем теперь к L-функционалам.

Для L-функционала можно дать два определения, потому что для алгебры Вейля было дано два определения. Одно из определений алгебры Вейля состояло в том, что есть операторы  $a_k$  и  $a_k^+$ , которые подчиняются каноническим коммутационным соотношениям, и это была алгебра полиномов этих операторов. В другом определении я рассматривал в качестве основных элементов унитарные операторы, которые выражены как экспоненты линейных выражений.

В этом определении красивые формулы будут получаться, если взять:

в качестве  $\mathcal{L}'$  — алгебру Вейля с операторами  $e'_\alpha = V_\alpha$ , представляющими собой экспоненты линейных выражений;

в качестве  $\mathcal{L}$  — линейные функционалы на алгебре Вейля, а  $e_\beta$  — экспоненты линейных выражений.

Другой вариант определения L-функционала:

$$L_K(\alpha^*, \alpha) = \text{Tr} e^{-\alpha a^+} e^{\alpha^* a} K, \quad (30)$$

где  $\alpha a^+ = \sum \alpha_k a_k^+$  и  $\alpha^* a = \sum \alpha_k^* a_k$ .

В первом определении был след от экспоненты линейного выражения, а здесь — след от произведения экспонент. Эта разница невелика: они отличаются численным множителем, но при таком определении понятие L-функционала я могу сказать, что L-функционал — это просто производящий функционал для корреляционных функций. Можно разложить по  $\alpha$  и  $\alpha^*$ , после чего в пределе  $\alpha = \alpha^* = 0$  будет получен след от произведения некоторого полинома по  $a$  и  $a^+$  на матрицу плотности  $K$ . Это как раз и есть корреляционная функция (по определению).

Что можно еще сделать? Можно считать индекс  $k$  не дискретным, а непрерывным параметром, когда канонические коммутационные соотношения принимают вид:

$$[a(k), a^+(k')] = \hbar \delta(k, k'),$$

$$[a(k), a(k')] = [a^+(k), a^+(k')] = 0,$$

где  $k, k' \in M$ . Для того чтобы объединить дискретный случай с непрерывным в одном выражении, будем считать, что  $M$  — пространство с мерой. В дискретном случае здесь стоят сумма и  $\delta$ -символ Кронекера, а в случае, когда индексы  $k, k'$  непрерывны — интеграл и  $\delta$ -функция. В случае когда  $\alpha$  — это квадратично интегрируемая функция, выражение для  $L_K$  хорошо определено. Если бы была экспонента от линейного выражения (не произведение экспонент, а экспонента от суммы), то тогда все будет конечно, потому что оператор унитарен. Если стоит произведение экспонент, но функция  $\alpha$  интегрируема с квадратом, то будет тоже все хорошо, потому что просто появится дополнительный конечный множитель.

Перейдем к вопросу о действии алгебры Вейля  $\mathcal{A}$  на пространстве L-функционалов  $\mathcal{L}$ . Зададимся вопросом, что такое L-функционал? Это, по существу, положительный линейный функционал на алгебре Вейля. Как я уже говорил, если рассматривать просто произвольный линейный функционал на любой алгебре, то всякий элемент алгебры порождает два оператора на пространстве функционалов. Один из них получается, если аргумент умножить слева на что-то, а другой получится если умножить справа на что-то. Когда множитель ставится слева, берется еще и операция сопряжения. Таким образом, из каждого элемента алгебры получается два оператора на функционалах: первый из них был обозначен тем же символом, как и элемент алгебры, а другой — этим же символом, но с тильдой.

Действие алгебры Вейля  $\mathcal{A}$  на пространстве L-функционалов  $\mathcal{L}$  реализуется операторами  $b$  и  $b^+$ , действие которых на функционалы  $L_K$  сводится к умножению матрицы плотности на операторы  $a^+$  и  $a$  справа:

$$b(k)L_K = L_{Ka^+(k)}, \quad b^+(k)L_K = L_{Ka(k)}.$$

Нетрудно проверить, что эти операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям и могут быть представлены в следующем виде

$$b^+(k) = -\hbar c_2^+(k) + c_1(k), \quad b(k) = -c_2(k),$$

где  $c_i^+(k)$  — операторы умножения на  $\alpha_k^*$  для  $i = 1$  и на  $\alpha_k$  для  $i = 2$ , а  $c_i(k)$  — производные, взятые, соответственно, по  $\alpha_k^*$  и  $\alpha_k$ .

Альтернативное действие  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{L}$  реализуют операторы с тильдой, действие которых на функционалы  $L_K$  сводится к умножению матрицы плотности на операторы  $a$  и  $a^+$  слева:

$$\tilde{b}(k)L_K = L_{a(k)K}, \quad \tilde{b}^+(k)L_K = L_{a^+(k)K}.$$

Эти операторы также удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям. Они могут быть представлены в виде:

$$\tilde{b}^+(k) = \hbar c_1^+(k) - c_2(k), \quad \tilde{b}(k) = c_1(k).$$

Таким образом, на L-функционалах действует два экземпляра алгебры Вейля. Происходит то, что физики называют удвоением полей.

Рассмотрим теперь формальный гамильтониан  $\hat{H}$

$$\hat{H} = \sum_{m,n} \sum_{k_i, l_j} H_{m,n}(k_1, \dots, k_m | l_1, \dots, l_n) a_{k_1}^+ \dots a_{k_m}^+ a_{l_1} \dots a_{l_n}, \quad (31)$$

выраженный через операторы рождения и уничтожения и приведенный к нормальной форме (то есть, все операторы рождения перемещены налево). Напомню, что в теории, которую мы рассматриваем в алгебраическом подходе, формальные гамильтонианы могут не иметь смысла как операторы, но соответствующие уравнения движения могут иметь смысл. Гамильтониану  $\hat{H}$  отвечают два формальных оператора,

действующего на L-функционалах (точнее говоря, на всех линейных функционалах на алгебре Вейля):

$$\hat{H} = \sum_{m,n} \sum_{k_i, l_j} H_{m,n}(k_1, \dots, k_m | l_1, \dots, l_n) b_{k_1}^+ \dots b_{k_m}^+ b_{l_1} \dots b_{l_n}, \quad (32)$$

$$\tilde{H} = \sum_{m,n} \sum_{k_i, l_j} H_{m,n}(k_1, \dots, k_m | l_1, \dots, l_n) \tilde{b}_{k_1}^+ \dots \tilde{b}_{k_m}^+ \tilde{b}_{l_1} \dots \tilde{b}_{l_n}. \quad (33)$$

Один из них обозначен тем же символом, другой — символом с тильдой. И теперь можно записать уравнение движения для L-функционала:  $L(\alpha^*, \alpha)$ :

$$i\hbar \frac{dL}{dt} = HL = \tilde{H}L - \hat{H}L, \quad (34)$$

где введено обозначение  $H = \tilde{H} - \hat{H}$ .

Еще следует заметить, что если рассматривать трансляционно инвариантный гамильтониан, то в импульсном представлении коэффициенты  $H_{m,n}$  будут содержать  $\delta$ -функции  $\delta(k_1 + \dots + k_m - l_1 - \dots - l_n)$ , задающие закон сохранения импульса.

Уравнения для L-функционала имеют то преимущество, что они имеют смысл даже в том случае, когда уравнение движения в фокковском пространстве плохо определено. Дело в том, что в фокковском пространстве обычно все хорошо, когда мы живем в конечном объеме, а когда мы живем в бесконечном объеме, то все плохо. Тот эффект неэквивалентности различных представлений канонических коммутационных соотношений, который обсуждался, всегда проявляется, а для L-функционалов, если нет ультрафиолетовых расходимостей, то все в порядке.

Возвращаясь к выписанным ранее выражениям для  $\hat{H}$  и  $\tilde{H}$ , можно сказать, что мы оказываемся в абсолютно привычной обстановке. Действительно, имеется представление двух алгебр Вейля (можно считать, что это одна алгебра Вейля, только большая). В курсе квантовой теории поля обычно все делается по теории возмущений. Берется оператор эволюции в представлении взаимодействия и выписывается  $T$ -экспонента в качестве оператора эволюции в представлении взаимодействия и из этого выводится диаграммная техника. В случае L-функционалов ничего принципиально не изменилось. Существуют те же самые коммутационные соотношения. Можно применять ровно ту же технику.

Единственное, что изменилось — удвоилось количество полей и не стало гильбертова пространства, но то, что мы жили в гильбертовом пространстве, нигде не использовалось и поэтому в формализме L-функционалов вся стандартная техника из курса квантовой теории поля работает. Та техника функциональных интегралов, о которой я рассказывал, тоже работает. Таким образом, формализм L-функционалов с точки зрения вычисления ничем не хуже, чем обычный. На самом деле, он лучше. Как я объяснял, он уничтожает проблемы с тривиальными объемными расходимостями. Также он существенно лучше, если рассматривать адиабатическое приближение. Сейчас мы в этом убедимся.

Давайте рассмотрим семейство “гамильтонианов”. То, что я говорю, относится не только к L-функционалам, а вообще к любой ситуации в геометрическом подходе к квантовой теории. Например, рассмотрим семейство, отвечающее теории возмущений  $H(g) = H_0 + gV$ . Я утверждаю, что если рассматривать выражение  $\omega(g(t))$ , являющееся стационарным состоянием для “гамильтониана”  $H(g(t))$ , то тогда  $\omega(g(t))$  является решением уравнения движения для нестационарного “гамильтониана”.

Действительно, при рассмотрении адиабатического приближения в случае обычной квантовой механики стационарное состояние оставалось стационарным с течением времени, но поскольку мы жили в гильбертовом пространстве, состояние было

определено только до численного множителя, и на собственном векторе нарастал численный (фазовый) множитель. Здесь же этого нет. Этому есть совершенно тривиальная причина — просто можно пренебречь производной по времени  $\dot{g}(t)$ . Это дает возможность написать следующую формулу:

$$\omega(g) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sigma_\alpha(0, -\infty)\omega(0). \quad (35)$$

Чтобы ее получить я рассматриваю гамильтониан  $H_0 + ge^{-\alpha|t|}V$ , в котором введен адиабатический множитель, исчезающий на бесконечности. Тогда я могу сказать, что если у меня есть какой-то начальный “гамильтониан”  $H_0$  (обычно берется свободный, но это не обязательно) и имеется стационарное состояние для этого “гамильтониана”, то формула (35) описывает стационарное состояние “гамильтониана” с константой  $g$ .

Такая же формула есть в обычной квантовой механике, только там стоит фазовый множитель. В обычной квантовой механике данная формула обычно применяется когда  $\omega(0)$  является основным состоянием и тогда  $\omega(g)$  будет основным состоянием для константы связи  $g$ . В нашем подходе можно применять эту формулу в несравненно более общей ситуации. Например, если гамильтониан трансляционно инвариантен, можно применять эту формулу к любому трансляционно инвариантному стационарному состоянию свободного гамильтониана  $H_0$ , для которого все такие состояния легко вычислить.

В результате мы получаем стационарное трансляционно инвариантное состояние в случае, когда константа связи равна  $g$ . Такой подход очень естественен как в равновесной, так и в неравновесной статистической физике. Можно взять в качестве  $\omega(g)$ , скажем, равновесное состояние для какой-то температуры и, применив этот процесс, получить равновесное состояние, правда, при другой температуре, но с той же энтропией, потому что адиабатический процесс не меняет энтропии. В неравновесной статистической физике есть формализм Келдыша, тесно связанный с формализмом L-функционалов. В нем, по существу, применяется эта же формула, но, может быть, с несколько меньшим основанием.

Наряду с оператором эволюции  $\sigma_\alpha(0, -\infty)$  можно при заданном  $\alpha$  рассматривать оператор эволюции  $\sigma_\alpha(+\infty, -\infty)$ , представляющий собой адиабатическую S-матрицу. Если адиабатический параметр  $\alpha$  стремиться к нулю, в формализме L-функционалов адиабатическая S-матрица, умноженная на некоторые множители (которые я не хочу здесь описывать, но это множители, которые связаны с уровнями энергии) стремится к инклюзивной матрице рассеяния. Инклюзивная матрица рассеяния — это основа для расчета инклюзивного сечения. Этот вопрос мы обсудим позже. Я только хочу сказать, что обычная матрица рассеяния в квантовой механике тоже может быть получена из адиабатического оператора эволюции. Голые частицы при этом превращаются в одетые, происходит перенормировка волновой функции, но не происходит перенормировки константы связи.

Сейчас я хочу объяснить некие вещи, к которым я потом вернусь с другой точки зрения.

Хорошо известно (я буду доказывать это через некоторое время), что матрица рассеяния выражается через функции Грина. Это то, что называется формулой Лемана — Симанчика — Циммермана. Но если я хочу рассмотреть инклюзивную матрицу рассеяния, я должен рассмотреть то, что можно называть обобщенной функцией Грина.

Обычная функция Грина определяется как хронологическое произведение

$$M = T(B_1^*(\mathbf{x}_1, t_1) \dots B_n^*(\mathbf{x}_n, t_n)) = T(B^*).$$

усредненное по какому-то состоянию. В хронологическом произведении все времена

идут в порядке убывания слева направо. Можно точно так же рассмотреть и антихронологическое произведение (времена возрастают)

$$N = T^{opp}(B_1(\mathbf{x}'_1, t'_1) \dots B_n(\mathbf{x}'_n, t'_n)) = T^{opp}(B).$$

В обобщенных функциях Грина берется хронологическое произведение операторов, умножается на антихронологическое произведение операторов и затем берется среднее по какому-то состоянию:

Это обобщенная функция Грина в данном состоянии. Именно эти функции Грина появляются в формализме Келдыша, и, как сейчас будет объяснено, они же появляются в формализме L-функционалов.

Напомню, что в L-функционалах есть операторы без тильды и операторы с тильдой. Справедлива формула

$$(T(\tilde{B}B)\omega)(x) = \omega(T(B^*)xT^{opp}(B)) = \omega(MxN). \quad (36)$$

В левой части здесь стоит обычное хронологическое произведение, однако операторы без тильды действуют, умножая справа. При этом меняется порядок и хронологическое произведение превращается в антихронологическое.

Заметим, что формула (36) справедлива не только для L-функционалов (линейных функционалов на алгебре Вейля), но и для линейных функционалов на любой ассоциативной алгебре с инволюцией.

Если в выписанном выражении положить  $x = 1$ , то в точности получится  $\omega(MN)$ . Здесь  $M$  определено как хронологическое произведение, а  $N$  — как антихронологическое произведение, так что T-произведение на L-функционалах переходит в хронологическое и антихронологическое произведения. Рассматривая эту картинку в L-функционалах, я могу применять для вычисления обобщенных функций Грина технику вычисления обычных функций Грина. Это дает диаграммную технику для обобщенных функций Грина.

## 6 Лекция 6

### 6.1 Солитоны как аналоги частиц

Я собираюсь дать определение квантовых частиц и квазичастиц. Основное утверждение состоит в том, что понятие частицы вторично. Я определяю частицу как элементарное возбуждение основного состояния. Можно также рассматривать элементарное возбуждение любого стационарного трансляционно инвариантного состояния, тогда элементарное возбуждение — это квазичастица.

Прежде всего, я хочу рассказать о классическом аналоге всего этого. Это понятия солитона и обобщенного солитона. Рассмотрим трансляционно инвариантный гамильтониан в бесконечномерном фазовом пространстве, которое состоит из векторнозначных функций  $f(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  — это пространственные координаты. Я считаю, что пространственные трансляции действуют как сдвиги этих координат, а временные определяются гамильтонианом, который коммутирует с пространственными трансляциями. Предположим, что соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af + B(f),$$

где  $A$  — линейный оператор и  $B$  — нелинейная часть. Считаем, что нелинейная часть как минимум квадратична; тогда для малых  $f$  доминирует линейная часть. В частности, мы можем сказать, что  $f \equiv 0$  — это решение, и в его окрестности можно пренебречь нелинейной частью.

Теперь мы определяем солитон как решение, которое имеет вид  $s(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ . Солитон — это такой горбик. Мы можем изображать решение  $f \equiv 0$  как горизонтальную прямую, тогда солитон (уединенная волна) — это решение, где этот горбик движется равномерно без изменения формы. Есть еще понятие обобщенного солитона. Это горбик, который движется, с постоянной средней скоростью но одновременно может пульсировать, менять свою форму. Я не буду говорить об этом понятии подробно.

Я требую, чтобы солитон имел конечную энергию. Для трансляционно инвариантного решения понятие энергии бессмысленно — для него можно говорить о плотности энергии, но я буду считать его энергию равной нулю и отсчитывать энергию солитона от энергии трансляционно инвариантного состояния. То, что энергия конечна, означает, грубо говоря, что солитон более или менее сосредоточен в какой-то конечной области.

Есть гипотеза, которая была высказана в моей работе с Фатеевым и Тюпкиным лет сорок пять тому назад. Она состоит в том, что для очень многих систем и почти для всех начальных условий с конечной энергией при временах стремящихся к плюс или минус бесконечности мы получаем несколько солитонов и еще нечто, что удовлетворяет линейному уравнению, по крайней мере, приблизительно. Это хорошо известно для интегрируемых систем в случае  $d = 1$ ; мы предположили, что это верно без предположения интегрируемости в любой размерности. Не думаю, что нашу работу прочел кто-нибудь из математиков, но эта гипотеза также была высказана в других работах. В работе Соффера это называется “grand conjecture”, в работе Тао — “soliton resolution conjecture”. Тем не менее гипотеза так и остается гипотезой. Пока что это остается вне пределов существующей математики за исключением случая, когда солитоны отсутствуют изначально. В этом случае можно предполагать, что в конце мы асимптотически получим решение линейного уравнения.

Это утверждение можно обосновать следующим образом. Пусть имеются какие-то отличные от нуля начальные условия. В этом случае происходит обычно то, что в старых учебниках квантовой механики называлось распылением волнового пакета.

То есть если начальные данные были где-то сосредоточены, то дальше они расплываются. При этом энергия все-таки сохраняется, поэтому это расплывание приводит к тому, что амплитуда волны уменьшается. Если же она действительно все время уменьшается, то, как я говорил, в случае, малых амплитуд нелинейной частью можно пренебречь и решение нелинейного уравнения приближается к решению линейного.

Конечно, это не происходит, если в теории есть солитон. Амплитуда солитона по определению не меняется. Какой высоты был горбик, таким он и остается, но можно думать, что в конце концов останутся какие-то солитоны или обобщенные солитоны, а также хвостик, который приблизительно удовлетворяет линейному уравнению. Конечно, никаким доказательством эти рассуждения не являются, но это очень вероятная гипотеза. Нет сомнения, что это верно не всегда, но естественно думать, что это верно в очень многих случаях.

Раз есть такая картинка, которую я описал, нужно думать, что есть понятие рассеяния солитонов. Есть на свете точно решаемые модели размерности  $1+1$  (одномерное пространство и время); для таких моделей мое утверждение — это теорема. Что происходит? Сталкиваются два таких горбика, образуется некая каша, а потом снова возникают те же самые солитоны: это специфика интегрируемых случаев. Стандартная ситуация в неинтегрируемых случаях чуточку другая: после столкновения возникают, возможно, другие солитоны и еще, может быть, то, что я назвал словом хвостик. Хвостик — это образование, которое асимптотически стремится к решению линейного уравнения.

Теперь я попытаюсь облечь эти общие рассуждения в некую форму. Обозначим пространство возможных начальных данных буквой  $\mathcal{R}$ , и тогда наложенное условие означает для общего случая, что, задав какие-то начальные условия, в конце мы получим солитоны и хвостик. Солитоны характеризуются какими-то данными, а хвостик — решением линейного уравнения. Формально на математическом языке сформулированная гипотеза означает, что на плотном множестве начальных данных можно определить отображение  $D^+(t) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{as}$  начальных данных в асимптотические данные на плюс бесконечности ( $t \rightarrow +\infty$ ). Я мог бы взять и минус бесконечность:  $D^-(t) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{as}$ . Единственное отличие в том, что уже нельзя будет говорить слово “начальные данные”.

Теперь я предполагаю, что есть и обратное отображение, то есть исходя из асимптотики можно найти начальные условия или, по крайней мере, доказать, что заданная асимптотика получается из каких-то начальных условий. То есть, я хочу рассмотреть обратные операторы  $S(t, +\infty) = (D^+(t))^{-1}$  и  $S(t, -\infty) = (D^-(t))^{-1}$ .

Здесь возникает задача : определить из асимптотических данных решения уравнения и тем самым начальные данные. Это, по-видимому, нетрудно, но никто этого не сделал. Я спросил у Тао, известно ли это? Он сказал, что да, наверное, это нетрудно сделать, но на тему о том, что кто-нибудь это сделал, он мне ничего не написал. Я думаю, что это интересная и не очень трудная задача: по асимптотическим данным построить решение. В квантовом случае решение этой задачи хорошо известно — это то, что называется теорией рассеяния Хаага — Рюэля; я буду рассказывать обобщение этой теории.

Теперь я могу определить то, что следует назвать нелинейной матрицей рассеяния:

$$S = S(0, +\infty)^{-1} S(0, -\infty) : \mathcal{R}_{as} \rightarrow \mathcal{R}_{as}.$$

Грубо говоря, мы задаем начальные условия на минус бесконечности и смотрим асимптотику на плюс бесконечности. Можно надеяться, что есть предельный переход от квантовой матрицы рассеяния к этой нелинейной. Отмечу еще раз, что приведенные рассуждения — это вещи гипотетические.

Еще одно маленькое замечание заключается в том, что если теория лоренц-инвариантна, то можно применить преобразование Лоренца к солитону и снова получится солитон.



Солитоны ходят семействами — солитоны с разными скоростями. То же верно и для преобразований Галилея. Завершая обсуждение, хочу сказать, что классический солитон нужно рассматривать как модель квантовой частицы. В квантовой механике понятие частицы — это асимптотическое понятие: если две частицы сталкиваются, образуется некая каша, которая потом распадается на частицы.

Следующие рассуждения еще сильнее подчеркивают аналогию солитонов с квантовыми частицами в том определении, которое я буду давать. Я рассматривал пространство всех начальных данных  $\mathcal{R}$ . Это симплектическое многообразие. Рассмотрим ситуацию, когда имеются фазовое пространство и гамильтониан, то есть, имеется симплектическое многообразие и оператор эволюции. Также предположим, что есть пространственные трансляции, а временные трансляции описываются трансляционно инвариантным гамильтонианом. Формально математически это означает, что на этом симплектическом многообразии  $\mathcal{M}$  действует коммутативная группа  $\mathcal{T}$  пространственных и временных трансляций. Теперь возьмем стационарную трансляционно инвариантную точку  $m \in \mathcal{M}$  этого симплектического многообразия. В предыдущей картинке такой точкой было решение  $f = 0$ . Это решение трансляционно инвариантно и стационарно.

Определим возбуждение трансляционно инвариантного стационарного состояния как состояние с конечной энергией (напомню, что мы считаем энергию трансляционно инвариантного состояния равной нулю).

Теперь я определю элементарное симплектическое многообразие как такое многообразие, в котором в координатах Дарбу  $\mathbf{p}, \mathbf{x}$  пространственные сдвиги действуют просто как сдвиги  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ , при этом  $\mathbf{p}$  остается неизменным. Мы считаем, что гамильтониан инвариантен относительно этих трансляций. Это означает, что он зависит только от  $\mathbf{p}$ . Обозначим его как  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Тогда временные сдвиги будут просто сдвигами с определенной скоростью  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{p})t$ , где скорость  $\mathbf{v}$  рассчитывается по формуле  $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \nabla \epsilon(\mathbf{p})$ .

Предположим теперь, что  $\mathcal{M}$  представляет собой пространство вектор-функций  $f(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , а пространственные трансляции действуют как сдвиги  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ . Если взять симплектическое вложение элементарного симплектического пространства во множество возбуждений в  $\mathcal{M}$  и потребовать, чтобы вложение коммутировало с пространственно-временными трансляциями, то возникнет семейство солитонов. Это очень просто объяснить. При вложении точка  $(\mathbf{p}, 0)$  переходит в некоторую функцию  $s_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ , зависящую от  $\mathbf{p}$ , а поскольку вложение  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  коммутирует с трансляциями, то точка  $(\mathbf{p}, \mathbf{a})$  будет переходить в сдвинутую функцию  $s_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ . Условие того, что отображение  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  коммутирует с временными сдвигами, как раз и будет означать, что функция  $s_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{p})t)$  удовлетворяет уравнению движения.

## 6.2 Частицы и квазичастицы

Теперь введем понятие частицы и более общее понятие квазичастицы. Отличие только в том, что частица — это возбуждение основного состояния, а квазичастица — это возбуждение любого трансляционно инвариантного стационарного состояния. Для того, чтобы определить понятие частицы, мне нужны понятия пространственных и временных сдвигов.

В обычной квантовой механике если мы рассматриваем эволюцию, нужно иметь понятие временного сдвига  $T_{\tau}$ . Я хочу, чтобы были еще пространственные сдвиги  $T_{\mathbf{a}}$ , которые действовали бы на состояния и коммутировали с временными сдвигами. В геометрическом подходе пространство состояний это основная вещь, но здесь мне удобно рассматривать ненормированные состояния. Напомню, что в алгебраическом подходе состояниями были положительные функционалы, нормированные условием,

что функционал от единицы равен единице. Это условие нормировки я отброшу, и в таком случае получается конус, которые я обозначаю буквой  $\mathcal{C}$ . Состояние теперь определено только с точностью до численного множителя. Я все время буду говорить про этот конус ненормированных состояний. Пространственно-временные трансляции должны действовать на этом конусе.

Обозначим теперь группу пространственно-временных трансляций как  $\mathcal{T}$ . В алгебраическом подходе эта группа должна действовать на самой алгебре  $\mathcal{A}$ . Симметрия в алгебраическом подходе — это автоморфизм алгебры, то есть имеется гомоморфизм группы  $\mathcal{T}$  в группу автоморфизмов алгебры  $\mathcal{A}$ . Группа автоморфизмов алгебры (и, следовательно, группа  $\mathcal{T}$ ) действует на  $\mathcal{C}$  (напомню, что мы всегда считаем, что автоморфизмы согласованы с инволюцией).

Я ввожу стандартное обозначение,  $A(\tau, \mathbf{x}) = T_\tau T_{\mathbf{x}} A$  для элемента  $A \in \mathcal{A}$  сдвинутого по времени и пространству. Трансляционно-инвариантное стационарное состояние  $\omega$  в алгебраическом подходе удовлетворяет условию  $\omega(A(\tau, \mathbf{x})) = \omega(A)$ .

В частности, давайте рассмотрим алгебру Вейля  $\mathcal{A}$  в координатном представлении, когда заданы генераторы  $\hat{a}^*(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})$ . Будем считать, что пространственные сдвиги просто сдвигают аргумент, а временные сдвиги определяются формальным гамильтонианом, который выражен через  $\hat{a}^*(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})$  с какими-то коэффициентными функциями, зависящими только от разностей  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ . Тем самым обеспечена трансляционная инвариантность. Еще я потребую, чтобы коэффициентные функции быстро убывали. Тогда уравнение движения будет иметь смысл.

Я могу сделать преобразование Фурье и перейти к импульсному представлению. Тогда аргументом будет  $\mathbf{k}$  и пространственные сдвиги сведутся к умножению на экспоненты вида  $\exp(\pm i\mathbf{k}\mathbf{a})$ , а временные сдвиги будут опять определяться гамильтонианом. Условие, что функции в координатном представлении зависят от разности, приводит к появлению  $\delta$ -функций, отвечающих сохранению импульса, а требование, чтобы коэффициентные функции быстро убывали, означает, что функции в импульсном представлении будут гладкими (после выделения  $\delta$ -функции).

В общем случае, когда задан конус состояний, я могу определить понятие трансляционно инвариантного стационарного состояния как состояния, которое не меняется ни при пространственных, ни при временных сдвигах. Это будет для меня основной объект. Стандартные примеры такого состояния — основное состояние и равновесное состояние.

Теперь я хочу определить понятие возбуждения трансляционно инвариантного стационарного состояния как аналог введенного ранее понятия состояния с конечной энергией. Когда солитон уходит на бесконечность, мы его перестаем видеть. Говоря формально, если имеется возбуждение  $\sigma$  трансляционно инвариантного состояния  $\omega \in \mathcal{C}$  и к нему применяется пространственный сдвиг, то в пределе  $\mathbf{a} \rightarrow \infty$  остается одно  $\omega \in \mathcal{C}$ :

$$(T_{\mathbf{a}}\sigma)(A) \rightarrow \text{const} \cdot \omega(A).$$

Тут еще написана константа, потому, что состояние в конусе определено только с точностью до численного множителя — там ненормированные состояния. Такое понятие возбуждения — это общее понятие, которое может быть применено как в геометрическом, так и в алгебраическом подходах. В случае солитонов аналогом этого было то, что солитон имеет конечную энергию и тем самым более или менее сосредоточен в конечной области.

В алгебраическом подходе по трансляционно инвариантному стационарному состоянию можно построить с помощью конструкции GNS предгильбертово пространство  $\mathcal{H}$  (я хочу жить в предгильбертовом пространстве). В этом пространстве есть циклический вектор  $\theta$ , соответствующий состоянию  $\omega$ . Напомню, это означает, что  $\omega$

— это положительный функционал

$$\omega(A) = \langle \hat{A}\theta, \theta \rangle,$$

где  $\hat{A}$  — оператор, который отвечает  $A$  в  $\mathcal{H}$ .

Пространственные и временные трансляции  $T_{\mathbf{a}}$  и  $T_{\tau}$  спускаются на предгильбертово пространство  $\mathcal{H}$  как унитарные операторы. Трансляции действуют в самой алгебре как автоморфизмы алгебры, а мы строили предгильбертово пространство факторизуя алгебру неким образом. Это позволяет спустить эти операторы на  $\mathcal{H}$  как унитарные операторы. Далее мы определяем операторы энергии и импульса как операторы инфинитезимальных трансляций по времени и по пространству:

$$T_{\mathbf{a}} = e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{a}}, \quad T_{\tau} = e^{-i\hat{H}\tau}.$$

В алгебраическом подходе элементы предгильбертова пространства  $\mathcal{H}$  можно отождествить с возбуждениями состояния  $\omega$ . Физический смысл GNS – конструкции состоит в том, что она по некоторому трансляционно инвариантному состоянию позволяет построить пространство  $\mathcal{H}$ , в котором живут возбуждения. Это, собственно говоря, объяснение, почему эта конструкция так важна в физике.

То, что я утверждал, не всегда верно. Мне нужно потребовать, чтобы было то, что по-английски называется cluster property, а по-русски — распадение корреляций или кластеризация.

Представим себе ферромагнетик. Если спин имеет какое-то направление в начале координат, то такое же направление спина будет везде, по крайней мере, статистически. Это тот случай, когда нет распада корреляций. В более стандартной ситуации на больших расстояниях спин уже не помнит, каков был спин в начале координат. Вот, это и есть то, что называется кластеризацией.

Формально математически это можно сформулировать следующим образом. Если взять  $\omega(A(\tau, \mathbf{x})B)$ , где  $A, B$  — два элемента алгебры, и один из этих элементов сдвигать по пространству, оставляя время постоянным, то тогда произойдет распадение этого среднего:  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \omega(A(\tau, \mathbf{x})B) = \omega(A)\omega(B)$

Это простейшая форма распада корреляций. Позже я сформулирую это более формально и в более общем виде. Для меня важно в данный момент еще то, что когда есть три оператора  $B', A$  и  $B$  и один из этих операторов сдвигается на бесконечность, то произойдет распадение:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \omega(B'A(\tau, \mathbf{x})B) = \omega(A)\omega(B'B)$$

Эти равенства можно продифференцировать:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \frac{d}{d\tau} \omega(A(\tau, \mathbf{x})B) = \frac{d}{d\tau} (\omega(A))\omega(B).$$

Любой вектор из  $\mathcal{H}$  может быть представлен в виде  $B\theta \in \mathcal{H}$  и тогда для соответствующего этому вектору состояния  $\sigma(A)$  справедлива формула:

$$\sigma(A) = \langle \hat{A}\hat{B}\theta, \hat{B}\theta \rangle = \omega(B^*AB). \quad (37)$$

Теперь я буду сдвигать аргумент у  $A$ . Когда  $A$  будет уходить на бесконечность, произойдет кластеризация, и в пределе  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  получится следующее выражение:

$$(T_{\mathbf{x}}\sigma)(A) = \sigma(A(0, \mathbf{x})) = \omega(B^*A(0, \mathbf{x})B) \rightarrow \omega(A)\omega(B^*B),$$

При этом  $\omega(B^*B)$  можно считать константой, то есть,  $\sigma(A)$  является возбуждением в том смысле, в котором я его определил, и поэтому в алгебраическом подходе

все элементы предгильбертова пространства  $\mathcal{H}$  дают возбуждения. В алгебраическом подходе я только такие возбуждения и буду рассматривать. На самом деле, я мог бы начать с этого момента — определить понятие возбуждения таким образом: взять  $\omega$ , применить конструкцию GNS и взять элементы предгильбертова пространства  $\mathcal{H}$ . Это будут возбуждения в алгебраическом подходе.

Я сейчас определю понятие элементарного возбуждения трансляционно инвариантного состояния. Элементарное возбуждение — это то, что называется частицей в квантовой теории поля, потому что там рассматривается возбуждение основного состояния, а квазичастицы — это элементарные возбуждения любого трансляционно инвариантного состояния. Поскольку я буду рассматривать оба случая, то я буду говорить про элементарные возбуждения, но я могу также употреблять термины “частица” или “квазичастица”.

Как понять, что такое элементарное возбуждение в алгебраическом подходе? В алгебраическом подходе мы живем в гильбертовом пространстве, которое получается с помощью GNS-конструкции. Я хочу понять, что такое частица в этой ситуации. У частицы есть импульс. Бывают и другие квантовые числа — они просто будут появляться как дискретные индексы, которые мне никак не мешают. Я скажу, что у частицы есть состояние с определенным импульсом и обозначу его как  $\Phi(\mathbf{p})$ . Импульс этого состояния равняется  $\mathbf{p}$ :

$$\hat{\mathbf{P}}\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\Phi(\mathbf{p}) \quad (38)$$

а энергия этого состояния — некоторая функция  $\epsilon(\mathbf{p})$ , которая называется законом дисперсии

$$\hat{H}\Phi(\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p})\Phi(\mathbf{p}). \quad (39)$$

Заметим, что (38), (39) можно переписать в виде

$$T_{\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{p}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{p}), \quad (40)$$

$$T_{\tau}\Phi(\mathbf{p}) = e^{-i\epsilon(\mathbf{p})\tau}\Phi(\mathbf{p}) \quad (41)$$

Важно отметить, что  $\Phi(\mathbf{p})$  — это не вектор, а обобщенная векторная функция. При заданном значении импульса состояние является ненормированным, поэтому нужно рассматривать интеграл этой функции с какой-то пробной функцией  $\phi(\mathbf{p})$

$$\Phi(\phi) = \int d\mathbf{p}\phi(\mathbf{p})\Phi(\mathbf{p}), \quad (42)$$

Это будет хорошо определенный вектор. Кроме того, обычно накладывается условие нормировки на  $\delta$ -функцию — я его тоже наложу:

$$\langle \Phi(\mathbf{p}), \Phi(\mathbf{p}') \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (43)$$

Если рассматривать настоящие векторы, где аргументом является пробная функция, то нормировка на  $\delta$ -функцию будет означать, что скалярное произведение векторов равняется скалярному произведению соответствующих пробных функций

$$\langle \Phi(\phi), \Phi(\phi') \rangle = \langle \phi, \phi' \rangle. \quad (44)$$

Теперь я хочу определить понятие элементарного пространства  $\mathfrak{h}$  как пространства пробных функций  $\phi_a(\mathbf{x})$ , принимающих значения в пространстве  $\mathbb{C}^r$ . Действие пространственных трансляций на пробные функции в  $x$ -представлении сводится к простому сдвигу аргумента, а в импульсном представлении — к умножению на экспоненту  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}}$ . Вывести то, как будут вести себя временные сдвиги, можно исходя из

требования, чтобы временной сдвиг коммутировал с пространственным сдвигом. Это будет просто умножение на экспоненту  $e^{-iE(\mathbf{k})\tau}$  от некоторой эрмитовой матрицы  $E(\mathbf{k})$  размерности  $r \times r$ . Я могу диагонализировать эту матрицу, тогда будет просто умножение на скалярные фазовые множители. Это значит, что всегда можно ограничиться случаем  $r = 1$ ,

Элементарное возбуждение трансляционно инвариантного стационарного состояния  $\omega$  можно определить как коммутирующее с пространственными и временными трансляциями изометричное отображение  $\sigma$  элементарного пространства  $\mathfrak{h}$  в пространство возбуждений.

Важно отметить, что для скалярного случая  $r = 1$  не сказано ничего нового. Действительно, элементарные возбуждения были определены как функции  $\Phi(\mathbf{p})$ , являющиеся собственными для импульса и энергии (38, 39). Есть еще условия нормализации (43). Я также говорил, что нужно рассматривать пробные функции  $\phi(\mathbf{p})$ , тогда  $\Phi(\phi)$  — это отображение пространства пробных функций в пространство возбуждений. Изометричность этого отображения вытекает из условия нормализации. А формулы (38, 39) гарантируют, что трансляции вектора  $\Phi(\mathbf{p})$  отвечают трансляциям функции  $\phi(\mathbf{p})$  и по пространству, и по времени. Таким образом, в алгебраическом подходе при  $r = 1$  можно просто положить  $\sigma(\phi) = \Phi(\phi)$ .

В геометрическом подходе я должен рассматривать в качестве пространств состояний конусы — там никакой надежды на линейность быть не может. Если мы исходим из теории в алгебраическом подходе, то функции  $\phi$  из элементарного пространства можно сопоставить состояние

$$(\sigma'(\phi))(A) = \langle A\Phi(\phi), \Phi(\phi) \rangle,$$

и тогда оказывается, что  $\sigma'$  — это квадратичное (точнее, эрмитово) отображение элементарного пространства в конус, которое коммутирует со всеми трансляциями.

Это замечание подсказывает, что в геометрическом подходе нужно определять элементарное возбуждение как коммутирующее с трансляциями отображение элементарного пространства в конус (условие эрмитовости необязательно, но часто удобно).

Если  $\Phi(\phi)$  в алгебраическом подходе принадлежало пространству  $\mathcal{H}$ , а  $\theta$  — циклический вектор в этом пространстве, то  $\Phi(\phi)$  получается применением какого-то элемента из алгебры к циклическому вектору:  $\Phi(\phi) = B(\phi)\theta$ . Тогда можно легко убедиться в справедливости формулы

$$\sigma'(\phi) = L(\phi)\omega, \tag{45}$$

где  $L(\phi) = \tilde{B}(\phi)B(\phi)$ .

Напомню, что в алгебраическом подходе на пространстве функционалов были определены два вида операторов: один отвечает умножению аргумента слева, другой отвечает умножению аргумента справа. На один из них я поставил волну.

Существование оператора  $L(\phi)$ , удовлетворяющего соотношению (45), удобно включить в определение элементарного возбуждения в геометрическом подходе.

Я уже говорил, что при построении теории рассеяния важна только трансляционная инвариантность, но если, скажем, мы имеем дело с лоренц-инвариантной теорией, естественно думать, что, по крайней мере, вакуумный вектор лоренц-инвариантен. Тогда в пространстве возбуждений действует вся группа Пуанкаре, и элементарное пространство будет являться представлением этой группы. Отмечу, что в локальной квантовой теории поля лоренц-инвариантные частицы определяются как неприводимые представления группы Пуанкаре. Здесь тоже нужно требовать, чтобы представление было неприводимо или, по крайней мере, было суммой неприводимых.

Сделаем теперь следующее замечание. Пусть в нерелятивистской квантовой механике задан трансляционно инвариантный гамильтониан. В этом случае нет по-

тенциального поля, гамильтониан инвариантен относительно преобразований Галилея, а энергия элементарного возбуждения задается привычной формулой:  $\epsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + const.$

Если же взять оператор  $\hat{a}^*(\mathbf{p})$  и применить к трансляционно инвариантному фоковскому вакууму  $|0\rangle$ , то получится элементарное возбуждение фоковского вакуума

$$\Phi(\mathbf{p}) = \hat{a}^*(\mathbf{p})|0\rangle.$$

Это частица, но кроме такой частицы есть еще другие частицы, которые тоже удовлетворяют наложенным условиям, например, связанные состояния.

Что такое связанное состояние? Гамильтониан действует на состояния с любым числом частиц. Возьмем  $n$  частиц и отделим движение центра инерции. Если рассмотреть спектр гамильтониана в этом пространстве, то там могут оказаться нормированные состояния. Они называются связанными состояниями.

Говоря формально, если не отделять центр инерции и суммарный импульс равен нулю, в выражении для элементарного возбуждения будет присутствовать  $\delta$ -функция от суммы импульсов:

$$\int d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n \Psi(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \delta(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n) \hat{a}^*(\mathbf{p}_1) \dots \hat{a}^*(\mathbf{p}_n) |0\rangle.$$

Пусть теперь это состояние может двигаться. У него может быть импульс; легко понять, что такое движущееся связанное состояние будет описываться обобщенной функцией

$$\Phi(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n \Psi(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \dots - \mathbf{p}_n) \hat{a}^*(\mathbf{p}_1) \dots \hat{a}^*(\mathbf{p}_n) |0\rangle,$$

которая удовлетворяет всем выписанным условиям. То есть, это элементарное возмущение в моем смысле, и для меня такие связанные состояния ничем не хуже, чем элементарные возбуждения с  $n = 1$ . Кстати говоря, в свое время была такая проблема: как рассматривать рассеяние составных частиц? В общую теорию, которую я буду излагать, это все вполне укладывается.

Обращаю внимание, что в определении элементарного возбуждения — одночастичного состояния  $\Phi(\phi) = B(\phi)\theta$  я использовал только понятие пространственных и временных трансляций. Если же я хочу определить понятие рассеяния, то мне нужно определить двухчастичные состояния, а также многочастичные состояния.

Для того чтобы понять, как разумно определить понятие двухчастичного состояния, я хочу рассмотреть то, как изменяется одночастичное состояние со временем. Я рассматриваю одночастичное состояние и смотрю за динамикой пробной функции из  $\mathfrak{h}$ . Напоминаю, что у меня действие оператора эволюции на пробные функции соответствуют действию оператора эволюции на векторы:

$$T_\tau \Phi(\phi) = \Phi(T_\tau \phi).$$

Таким образом при эволюции одночастичного состояния происходит умножение пробной функции из  $\mathfrak{h}$  на матричную экспоненту

$$(T_\tau \phi)(\mathbf{k}) = e^{-iE(\mathbf{k})\tau} \phi(\mathbf{k}).$$

Если я считаю для простоты, что пробные функции принимают значения в комплексных числах, то пробная функция просто умножается на фазовый множитель:

$$(T_\tau \phi)(\mathbf{k}) = e^{-i\epsilon(\mathbf{k})\tau} \phi(\mathbf{k}).$$

(В более общем случае я просто могу разложить на одномерные собственные пространства — все будет то же самое, так что это — не ограничение.) Переходя от импульсного пространства к координатному, я должен сделать преобразование Фурье. В результате получается, что сдвиг по времени в координатном пространстве дается интегралом

$$(T_\tau\phi)(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{x}\mathbf{k} - i\epsilon(\mathbf{k})\tau} \phi(\mathbf{k}).$$

При больших  $|\tau|$  фазовый множитель велик. Я могу применить метод стационарной фазы, и тогда у меня возникнут уравнения:

$$\frac{\mathbf{x}}{\tau} = \nabla\epsilon(\mathbf{k}) \quad (46)$$

Ясно, что нужно рассматривать только ситуацию, когда  $\phi(\mathbf{k}) \neq 0$ .

Теперь я определю множество  $U$  как окрестность множества точек  $\mathbf{x}$ , где выполнено условие (46) с  $\tau = 1$ . После этого я замечу, что вне множества  $\tau U$  уравнение (46) не имеет решения, поэтому функция  $(T_\tau\phi)(\mathbf{x})$  очень мала при  $\mathbf{x} \notin \tau U$ . Я говорю, что  $\tau U$  — это существенный носитель волновой функции рассматриваемого состояния в координатном представлении для больших  $|\tau|$ . Более аккуратно я расскажу об этом в следующей лекции.

## 7 Лекция 7

### 7.1 Одночастичные и многочастичные состояния

В прошлой лекции мы определили элементарное пространство  $\mathfrak{h}$  как пространство пробных функций  $\phi_a(\mathbf{x})$ , где пространственные перемещения действуют, сдвигая аргумент. Пробные функции принимают значения в  $\mathbb{C}^r$ . Для определенности мы предполагаем, что пробные функции принадлежат пространству  $\mathcal{S}$  гладких быстро убывающих функций.

В импульсном представлении пространственные сдвиги действуют как умножение на  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}}$ , а временные сдвиги как умножение на  $e^{-iE(\mathbf{k})\tau}$ . (Это следует из предположения, что временные сдвиги являются унитарными операторами, коммутирующими с пространственными перемещениями.) Здесь  $E(\mathbf{k})$  обозначает эрмитову  $r \times r$  матрицу. Диагонализуя матрицу  $E(\mathbf{k})$ , мы можем свести общий случай к случаю  $r = 1$ .

Напомню теперь, что такое элементарное возбуждение. Элементарное возбуждение трансляционно инвариантного стационарного состояния  $\omega$  (квазичастица) задается отображением  $\sigma$  из  $\mathfrak{h}$  в пространство возбуждений. Это отображение должно коммутировать с трансляциями (и пространственными, и временными).

Нужно еще сказать, что такое пространство возбуждений. В алгебраическом подходе — это предгильбертово пространство  $\mathcal{H}$ , которое получается с помощью конструкции Гельфанда, Наймарка и Сигала (GNS), где мы исходим из некоторого состояния, являющегося трансляционно инвариантным и по пространственным, и по временным переменным (то есть, из стационарного трансляционно инвариантного состояния). Оно представляется циклическим вектором, обозначенным буквой  $\theta$ .

Обсуждаемое отображение  $\sigma$  дает некоторый вектор  $\sigma(\phi)$ , который в прошлой лекции был обозначен  $\Phi(\phi)$ . Оно является отображением в пространство  $\mathcal{H}$ , и это значит, что существует элемент  $B(\phi)$  из алгебры, применив который к циклическому вектору, получаем наш вектор

$$\sigma(\phi) = B(\phi)\theta. \quad (47)$$

Я предполагаю еще, что отображение  $\sigma$  изометрично.

Хочу подчеркнуть, что оператор  $B(\phi)$  существует, но он отнюдь не единственный, его нужно как-то выбрать. Я буду налагать на него некоторые условия, которые позволят мне развить теорию рассеяния. В частности, я буду требовать, чтобы он был линеен по  $\phi$ . Как я объяснял, каждому вектору в пространстве представления алгебры отвечает состояние. В данном случае это состояние записывается формулой

$$(\sigma'(\phi))(A) = \langle A\sigma(\phi), \sigma(\phi) \rangle.$$

Если вектор представлен в виде (47), справедлива следующая формула:

$$\sigma'(\phi) = L(\phi)\omega, \quad (48)$$

где

$$L(\phi) = \tilde{B}(\phi)B(\phi). \quad (49)$$

Итак, в алгебраическом подходе у меня появилось, некоторое отображение  $\sigma' : \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{C}$ , действующее в соответствии с формулой (48).

В геометрическом подходе нужно забыть про алгебру, но при этом остается конус всех состояний  $\mathcal{C}$ . По определению отображение  $\sigma'$  элементарного пространства  $\mathfrak{h}$  в конус  $\mathcal{C}$  задает элементарное возбуждение если оно коммутирует с пространственными и временными трансляциями.



Мы постулируем, что так же, как и в алгебраическом случае, отображение  $\sigma'(\phi)$  получается в соответствии с (48) действием некоторого оператора  $L(\phi)$  на трансляционно инвариантное стационарное состояние  $\omega$ . Изначально рассматриваемое в алгебраической ситуации отображение  $\sigma(\phi)$  было линейным, а вот отображение  $\sigma'(\phi)$  отнюдь не линейное. Действительно, из формулы (49) следует, что в алгебраическом подходе  $L(\phi)$  — это квадратичное выражение, или, точнее говоря, эрмитово, потому что здесь по одной переменной имеет место линейность, по другой — антилинейность. (Отображение  $f$  называется эрмитовым, если его можно представить в виде  $f(x) = F(x, x^*)$ , где  $F(x, y)$  линейно по первому аргументу и антилинейно по второму.) Естественно потребовать чтобы в геометрическом подходе  $L(\phi)$  удовлетворяло тем же условиям. В дальнейшем я просто буду употреблять слово “квадратичное” вместо “эрмитово”, но следует понимать, что на самом деле оно не совсем квадратичное.

Если кому-то больше нравится работать с линейными отображениями, то это можно сделать с помощью следующей общей алгебраической конструкции. Для каждого линейного комплексного пространства  $E$  в тензорном произведении  $E \otimes \bar{E}$  этого пространства на комплексное сопряженное можно сконструировать конус  $C(E)$  как минимальный конус, содержащий все элементы вида  $e \otimes \bar{e}$ . (Черта здесь обозначает комплексное сопряжение. В дальнейшем мы будем иметь дело только с комплексными пространствами.)

Конус  $C(\mathfrak{h})$  я называю элементарным конусом. Он отвечает элементарному пространству  $\mathfrak{h}$ , при этом  $\sigma'$  можно рассматривать как линейное отображение  $\sigma' : C(\mathfrak{h}) \rightarrow C$  элементарного конуса в конус состояний.

Чтобы упростить обозначения, я сначала рассмотрю случай, когда элементарное пространство состоит из скалярных функций ( $r = 1$ ).

Предположим, что носитель  $\text{supp}(\phi)$  функции  $\phi(\mathbf{p})$  в импульсном пространстве является компактным множеством. В таком случае можно найти ограниченное множество  $U_\phi$  для которого все точки вида  $\nabla \epsilon(\mathbf{p})$ , где  $\mathbf{p}$  принадлежит  $\text{supp}(\phi)$ , являются внутренними точками (функция  $\epsilon(\mathbf{p})$  предполагается гладкой).

Тогда при больших  $|\tau|$  и  $\frac{x}{\tau} \notin U_\phi$  в координатном пространстве для функции

$$(T_\tau \phi)(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\epsilon(\mathbf{k})\tau} \phi(\mathbf{k})$$

справедливо соотношение

$$|(T_\tau \phi)(\mathbf{x})| < C_n (1 + |\mathbf{x}|^2 + \tau^2)^{-n},$$

где  $n$  — некоторое целое число.

Иными словами, с течением времени в координатном пространстве функция  $(T_\tau \phi)(\mathbf{x})$  оказывается мала вне множества  $\tau U_\phi$ , которое я называю существенным носителем функции  $(T_\tau \phi)(\mathbf{x})$ .

Вернемся теперь к общему случаю, когда элементарное пространство  $\mathfrak{h}$  состоит из векторзначных функций. Мы говорим, что множество  $\tau U_\phi$  является существенным носителем функции

$$(T_\tau \phi)(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - iE(\mathbf{k})\tau} \phi(\mathbf{k})$$

если

$$\|(T_\tau \phi)(\mathbf{x})\| < C_n (1 + |\mathbf{x}|^2 + \tau^2)^{-n},$$

при больших  $|\tau|$  и  $\frac{x}{\tau} \notin U_\phi$ .

Мы говорим, что функции  $\phi$  и  $\phi'$  не перекрываются, если расстояние между множествами  $U_\phi$  и  $U_{\phi'}$  положительно; тогда соответствующие существенные носители тоже не перекрываются, более того, при больших  $\tau$  они далеки друг от друга. Мы

говорим, что  $\phi_1, \dots, \phi_n$  — это неперекрывающееся семейство функций если  $\phi_i$  не перекрывается с  $\phi_j$  при  $i \neq j$ . Мы всегда будем предполагать, что неперекрывающихся семейств функций достаточно много (точнее линейные комбинации неперекрывающихся семейств функций всюду плотны в интересующем нас пространстве семейств функций). При  $r = 1$  это выполнено, например, когда функция  $\epsilon(\mathbf{p})$  строго выпукла.

Что нужно назвать двухчастичным состоянием в алгебраическом подходе? Я хочу заметить, что при определении одночастичного пространства, мне были нужны только пространственные и временные сдвиги, а сейчас нужно больше. Раньше я использовал представление в виде (49), чтобы описать одночастичное состояние с волновой функцией  $\phi$ . Когда же есть две частицы,  $B$  нужно применить два раза:  $B(\phi)B(\phi')\theta$ . По крайней мере, когда  $\phi$  и  $\phi'$  имеют носители в координатном пространстве далеко отстоящие друг от друга, можно считать, что этот вектор описывает состояние из двух отдаленных частиц. Нужно потребовать при этом, чтобы  $B(\phi)$  и  $B(\phi')$  почти коммутировали друг с другом (тогда частицы будут бозонными) или почти антикоммутировали (и тогда частицы будут фермионными). Это определение дано в терминах состояний, описываемых векторами, но можно дать определение в терминах состояний, описываемых положительными функционалами. Для этого мы заметим, что состояние, которое отвечает вектору  $B(\phi)B(\phi')\theta$ , можно написать в виде  $L(\phi)L(\phi')\omega$ , где

$$L(\phi) = \tilde{B}(\phi)B(\phi), \quad L(\phi') = \tilde{B}(\phi')B(\phi').$$

При этом  $L(\phi)$  во всех случаях почти коммутирует с  $L(\phi')$ .

В геометрическом подходе двухчастичное состояние записывается как  $L(\phi)L(\phi')\omega$ , где  $L(\phi)$  почти коммутирует с  $L(\phi')$ .

Таким образом, при переходе к геометрическому подходу различие между бозонами и фермионами сглаживается.

В дальнейшем я все время буду говорить о бозонах, но переход к фермионам тривиален: нужно только заменить коммутаторы на антикоммутаторы.

## 7.2 Рассеяние; *in*- и *out*-состояния

Я хотел бы процитировать замечательное высказывание Бертрана Рассела:

*The axiomatic method has many advantages over honest work — Аксиоматический метод имеет много преимуществ перед честной работой.*

Дело в том, что все дальнейшее будет очень просто, но, к сожалению, эта простота достигнута за счет работы исключительно в аксиоматическом методе. Я хочу напомнить, что аксиомы локальной квантовой теории поля были предложены Вайтманом в 50-х годах и до сих пор неизвестно ни одного примера нетривиальной теории, про который доказано, что он удовлетворяет всем аксиомам Вайтмана в нашем трехмерном пространстве. Большой сдвиг произошел, когда в одномерном пространстве было построено множество таких теорий в формализме конформной теории поля, но на сегодняшний день аксиомы Вайтмана в трехмерном пространстве проверены только в рамках теории возмущений. В моем подходе ситуация чуть лучше, но тем не менее проверка нужных аксиом остается большой проблемой. Это будет обсуждаться на следующей лекции. К счастью, по крайней мере в теории возмущений все прекрасно.

Теперь будем рассматривать элементарные возбуждения в обоих подходах. В алгебраическом подходе я требую, чтобы определяющее частицу или квазичастицу отображение элементарного пространства в пространство состояний могло быть записано в форме

$$\sigma(\phi) = B(\phi)\theta. \quad (50)$$

В геометрическом подходе я требую, чтобы было отображение  $L : \mathfrak{h} \rightarrow \text{End}(\mathcal{L})$ , где

$$\sigma'(\phi) = L(\phi)\omega. \quad (51)$$

В обоих подходах я определю состояния, описывающие процесс рассеяния и для этого введу новые операторы.

В алгебраическом подходе возьмем оператор  $B(f)$  (где  $f$  стоит вместо использованного ранее  $\phi$ ) и сначала сдвинем аргумент по времени в обратном направлении, а потом сдвинем получившийся элемент алгебры по времени в прямом направлении. Получим следующий оператор:

$$B(f, \tau) = T_\tau B(T_{-\tau} f) T_{-\tau}$$

(Нужно помнить, что действие сдвига по времени на оператор — это сопряжение с оператором  $T_\tau$ .)

В геометрическом подходе запишем аналогичные формулы:

$$L(f, \tau) = T_\tau L(T_{-\tau} f) T_{-\tau},$$

после чего проведем цепочку выкладок:

$$L(f, \tau)\omega = T_\tau L(T_{-\tau} f)\omega = T_\tau \sigma'(T_{-\tau} f) = \sigma'(f),$$

где последовательно использованы свойство инвариантности  $\omega$  по отношению к сдвигам по времени, формула (51) и свойство  $\sigma'$  коммутировать с временными трансляциями. В результате зависимость от времени пропадает —  $L(f, \tau)\omega$  не зависит от  $\tau$ .

Ровно такими же рассуждениями можно показать, что  $B(f, \tau)\theta$  не зависит от  $\tau$ . Отсюда следуют соотношения:

$$\dot{L}(f, \tau)\omega = 0,$$

$$\dot{B}(f, \tau)\theta = 0,$$

где точкой наверху обозначена производная по  $\tau$ . Это будет мой основной инструмент.

В случае многих частиц по аналогии с тем, как вводилось определение одночастичного состояния, я сначала много раз применяю  $B(f_i, \tau)$  с разными  $f_i$  к  $\theta$ :

$$\Psi(f_1, \dots, f_n | \tau) = B(f_1, \tau) \dots B(f_n, \tau) \theta$$

а потом у полученного выражения беру предел при  $\tau \rightarrow -\infty$ :

$$\Psi(f_1, \dots, f_n | -\infty) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Psi(f_1, \dots, f_n | \tau) \quad (52)$$

Этот предел (который лежит в гильбертовом пространстве  $\bar{\mathcal{H}}$ , пополнении пространства  $\mathcal{H}$ ) я буду называть in-состоянием. Чуть позже я объясню его физический смысл.

В геометрическом подходе все то же самое, только вместо  $B(f, \tau)$  стоит  $L(f, \tau)$ :

$$\Lambda(f_1, \dots, f_n | \tau) = L(f_1, \tau) \dots L(f_n, \tau) \omega \quad (53)$$

$$\Lambda(f_1, \dots, f_n | -\infty) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Lambda(f_1, \dots, f_n | \tau) \quad (54)$$

Получается in-состояние лежащее в  $\mathcal{L}$ . В алгебраическом подходе оно соответствует вектору  $\Psi(f_1, \dots, f_n | -\infty)$ .

Применение оператора  $T_\tau$  к  $L(f, \tau')$  соответствует сдвигу по времени и в функции, и в аргументе:

$$T_\tau(L(f, \tau')) = T_{\tau+\tau'} L(T_{-\tau'} f) T_{-\tau-\tau'} = L(T_\tau f, \tau + \tau'). \quad (55)$$

Это чисто формальное вычисление.

Применяя сдвиг по времени к in-состоянию и воспользовавшись формулой (55), получим, что такое преобразование сводится к действию оператора сдвига по времени на аргументы:

$$T_\tau \Lambda(f_1, \dots, f_n | -\infty) = \Lambda(T_\tau f_1, \dots, T_\tau f_n | -\infty). \quad (56)$$

Из этого соотношения следует, что если существенные носители функций  $T_\tau f_i$  не перекрываются (это происходит если функции не перекрываются), то в пределе  $\tau \rightarrow -\infty$  получается несколько далеких друг от друга частиц. Другими словами, асимптотически по времени эволюция in-состояния  $\Lambda$  описывается просто сдвигами аргументов в функциях, которые далеки друг от друга. Это как раз то, что имеет место в процессе рассеяния.

Обычно рассматривается рассеяние частиц с определенными импульсами. Но с определенными импульсами в моем подходе работать неудобно, потому что в таком случае волновая функция будет ненормированной, поэтому следует рассматривать ситуацию, когда импульс находится в каком-то узком диапазоне, то есть носитель волновой функции — это маленький кусок пространства импульсов. Если рассматривать столкновение частиц с различными импульсами, то тогда множества  $U_\phi$ , которые я рассматриваю, не будут перекрываться. Это та ситуация, в которой я могу жить. Я говорю, что состояние  $T_\tau \Lambda(f_1, \dots, f_n | -\infty)$  описывает столкновение частиц с волновыми функциями  $(f_1, \dots, f_n)$ , если эти функции не перекрываются.

Я предполагаю, что в случае когда функции  $f_1, \dots, f_n$  не перекрываются соответствующие операторы  $L(f_i, \tau)$  будут почти коммутировать, то есть их коммутатор в пределе  $\tau \rightarrow -\infty$  будет равен нулю:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} ||[L(f_i, \tau), L(f_j, \tau)]|| = 0. \quad (57)$$

Почему я это предполагаю? В аксиоматическом подходе я могу предположить все, но желательно, чтобы мои предположения имели физический смысл. Когда  $\tau \rightarrow -\infty$ , то в  $L(f_i, \tau)$  функции  $f_i$  сдвигаются по времени, и тогда существенные носители соответствующих функций будут далеки друг от друга. В этом случае с точки зрения физики естественно думать, что соответствующие операторы почти коммутируют.

Условие (57) можно вывести из требования, чтобы коммутаторы двух операторов  $L$ , зависящих от функций  $\phi_a(\mathbf{x})$  и  $\psi_a(\mathbf{x})$ , удовлетворяли неравенству

$$|[L(\phi), L(\psi)]| \leq \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' D^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') |\phi_a(\mathbf{x})| \cdot |\psi_b(\mathbf{x}')|, \quad (58)$$

где  $D^{ab}(\mathbf{x})$  стремится к нулю быстрее любой степени  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ . При выполнении этих условий, если множества  $U_{f_i}$  для каждой пары функций не перекрываются, то коммутаторы, входящие в формулу (57) близки к нулю, и поэтому я в формуле (53) для in-состояния могу в пределе  $\tau \rightarrow -\infty$  переставлять операторы  $L$ . Отсюда следует, что in-состояния симметричны (не меняются при перестановке аргументов  $f_i$ ).

Докажем теперь, что рассматриваемый предел существует. Для этого наложим дополнительно условие малости коммутатора  $[\dot{L}(f_i, \tau), L(f_j, \tau)]$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ , где в качестве аргументов стоят функции  $f_i, f_j, i \neq j$ . Это — опять же аксиома. Одного стремления к нулю мало — нужно, чтобы выполнялось условие

$$|[\dot{L}(f_i, \tau), L(f_j, \tau)]| \leq c(\tau),$$

где  $c(\tau)$  стремится к нулю настолько быстро, чтобы был конечен интеграл

$$\int |c(\tau)| d\tau < \infty.$$

Можно предположить, например, что  $c(\tau) \sim 1/\tau^a$ , где  $a > 1$ .

Теперь я очень просто докажу, что in-состояние действительно существует (выражение  $\Lambda(\tau) = \Lambda(f_1, \dots, f_n | \tau)$  имеет предел при  $\tau \rightarrow -\infty$ ). Для этого оценим производную от  $\Lambda(\tau)$  по  $\tau$  и заметим, что имеет место равенство

$$\Lambda(\tau_2) - \Lambda(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\Lambda}(\tau) d\tau \quad (59)$$

Я буду доказывать, что  $\dot{\Lambda}(\tau)$  суммируема и, значит, интеграл в правой части стремится к нулю когда  $\tau_1, \tau_2 \rightarrow -\infty$ . Если выражение (59) стремится к нулю, то  $\Lambda(\tau)$  имеет предел. Это следует из полноты пространства, в котором лежит этот вектор.

Теперь нужно доказать, что  $\dot{\Lambda}(\tau)$  мало. Напомню, что при определении  $\Lambda(\tau)$  (формула (53)) я несколько раз применял оператор  $L$  к состоянию  $\omega$ . Продифференцируем это выражение по  $\tau$ , и применим правило Лейбница. В результате получается несколько слагаемых, в каждом из которых продифференцирован один из множителей  $L$ . Теперь будем менять местами  $L$  и  $\dot{L}$  и потребуем, чтобы в пределе  $\tau \rightarrow -\infty$  коммутаторы  $[L, \dot{L}]$  стремились к нулю достаточно быстро. Будем сдвигать  $\dot{L}$  направо, переместив в итоге на самое последнее место. Когда дойду до самого конца, воспользуюсь равенством  $\dot{L}\omega = 0$ . В результате получится, что  $\dot{\Lambda}(\tau)$  будет суммируемой функцией от  $\tau$ , так как коммутаторы  $[\dot{L}(f_i, \tau), L(f_j, \tau)]$  суммируемы.

Таким образом доказано существование пределов. Это очень важная вещь. Это доказывает, что я могу рассматривать рассеяние частиц в моей картинке. Я потребовал очень мало, но мои аксиомы достаточны для того, чтобы доказать существование предела, доказать, что есть понятие рассеяния.

Условия, которые я наложил на  $L$  в случае геометрического подхода — это просто аксиомы, а в случае алгебраического подхода аналогичные условия можно получить как следствия более физических требований (например, из асимптотической коммутативности алгебры  $\mathcal{A}$ ). Но, так или иначе, они выполнены и тут, и там. Все приведенные рассуждения справедливы и в алгебраическом подходе. Напомню, что в алгебраическом подходе  $L(\phi) = \tilde{B}(\phi)B(\phi)$ , поэтому я могу наложить условия

$$|[\dot{B}(f_i, \tau), B(f_j, \tau)]| \leq c(\tau),$$

где  $c(\tau)$  - суммируемая функция. Следовательно, и коммутатор  $[\dot{L}(f_i, \tau), L(f_j, \tau)]$  будет маленьким, и вектор

$$\Psi(\tau) = B(f_1, \tau) \dots B(f_n, \tau) \theta$$

будет иметь предел в гильбертовом пространстве  $\tilde{\mathcal{H}}$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ . (Пространство должно быть полным, чтобы применить условие сходимости.)

Я хочу чуточку усилить сделанное утверждение. Раньше я применял операторы  $B$  к циклическому вектору  $\theta$  в один и тот же момент времени  $\tau$ , а теперь буду применять в разные времена, но все из них стремятся к бесконечности, возможно, по-разному. В таком случае я утверждаю, что для вектора

$$\Psi(f_1, \tau_1, \dots, f_n, \tau_n) = B(f_1, \tau_1) \dots B(f_n, \tau_n) \theta \quad (60)$$

при  $\tau_j \rightarrow -\infty$  все равно существует предел в  $\tilde{\mathcal{H}}$ , обозначаемый как

$$\Psi(f_1, \dots, f_n | -\infty).$$

При этом предполагаются выполненным условие на коммутаторы:

$$|[\dot{B}(\phi), B(\psi)]| \leq \int dx dx' D^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') |\phi_a(\mathbf{x})| \cdot |\psi_b(\mathbf{x}')|,$$

где  $D^{ab}(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  быстрее любой степени, когда  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  (это условие аналогично условию (58)).

Теперь я определю понятие асимптотического бозонного фоковского пространства  $\mathcal{H}_{as}$ , считая, что операторы  $B$  на больших расстояниях коммутируют. (Я могу работать как с коммутаторами, так и с антикоммутаторами, но для определенности я выберу коммутаторы). Я определю асимптотическое бозонное фоковское пространство  $\mathcal{H}_{as}$  как фоковское представление канонических коммутационных соотношений:

$$[b(\rho), b(\rho')] = [b^+(\rho), b^+(\rho')] = 0, \quad [b(\rho), b^+(\rho')] = \langle \rho, \rho' \rangle,$$

где  $\rho, \rho' \in \mathfrak{h}$ .

В случае когда вместо коммутатора стоит антикоммутатор бозонное фоковское пространство нужно заменить на фермионное фоковское пространство. Все будет таким же, только будет иметь место антисимметрия.

Пространственные и временные трансляции естественно действуют в этом фоковском пространстве потому что аргументы  $\rho$  принадлежат элементарному пространству  $\mathfrak{h}$ . В элементарном пространстве есть действие трансляций и оно распространяется на фоковское пространство.

Теперь я определю матрицу Мёллера — половинку S-матрицы. Эта матрица переводит состояние из фоковского пространства  $b^+(f_1)\dots b^+(f_n)|0\rangle$  в in-состояние  $\Psi(f_1, \dots, f_n | -\infty)$ . При этом важно, что in-состояние симметрично. То, что можно переставлять  $f_i$  существенно, потому что иначе это определение не имело бы смысла, так как n-частичное подпространство в фоковском пространстве представляет собой симметрическое тензорное произведение одночастичных пространств.

Матрицы Мёллера коммутируют с трансляциями. Мы на самом деле это доказали, и это я сейчас объясню. Вернемся к формуле (56), из которой следует, что действие временного сдвига на in-состояние отвечает временному сдвигу аргументов. Временной сдвиг аргументов — это то, как действует временной сдвиг в фоковском пространстве, поэтому в формуле (56) написано то, что временной сдвиг в in-пространстве отвечает временному сдвигу в гильбертовом пространстве  $\tilde{\mathcal{H}}$ . (Берется пополненное гильбертова пространства, так как только там лежит in-состояние.) Вот, эта очень важная вещь формально очень просто доказывается. То, что матрицы Мёллера коммутируют с пространственными трансляциями проверяется еще легче.

Матрица Мёллера обычно обозначается как  $S_-$ . На следующей лекции я буду доказывать, что при условии распада корреляций  $S_-$  является изометрическим вложением  $\mathcal{H}_{as}$  в  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Вместо  $S_-$  мы можем точно так же рассмотреть  $S_+$ . Если обе эти матрицы Мёллера не только изометрические, но и унитарные, то есть, они являются сюръективными отображениями на все пространство  $\tilde{\mathcal{H}}$ , тогда мы говорим, что теория имеет интерпретацию в терминах частиц. Это означает, что почти всякое состояние является in-состоянием (множество in-состояний всюду плотно). Другими словами, почти всякое состояние в пределе  $\tau \rightarrow -\infty$  представляется совокупностью удаленных частиц.

Аналогично можно время устремить к плюс бесконечности. Получится картинка, аналогичная той, что была описана в классической теории солитонов при обсуждении так называемой soliton resolution conjecture, когда почти любое начальное состояние распадется на солитоны и почти линейный хвостик. Здесь примерно то же самое: на плотном множестве состояние распадается на множество удаленных друг от друга частиц.

Матрицу рассеяния можно определить формулой

$$S = S_+^{-1} S_-.$$

Похожую формулу я писал в солитонной картинке. Это определение той самой матрицы рассеяния, которая является главным объектом в квантовой теории поля.

Теперь я определю in-операторы  $a_{in}^+$  с помощью предела операторов  $B(f, \tau)$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ :

$$a_{in}^+(f) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} B(f, \tau). \quad (61)$$

Почему это законное определение? Обратимся к формуле (60), где операторы  $B(f_i, \tau_i)$  стоят с разными временами. Это значит, что по одному из аргументов я могу перейти к пределу раньше, чем по другим аргументам. Отсюда получается существование предела в формуле (61) для in-оператора. Можно сказать, что in-оператор хорошо определен именно потому, что есть это свойство. Следует сказать, что in-оператор не всегда определен, но, по крайней мере, если все функции  $f_1, \dots, f_n$  не перекрываются, тогда все хорошо. В нашем определении in-операторы линейно зависят от функций  $f$ . Эти операторы можно рассматривать как обобщенные функции и ввести следующее обозначение:

$$a_{in}^+(f) = \int d\mathbf{p} f^k(\mathbf{p}) a_{in,k}^+(\mathbf{p}),$$

где  $a_{in,k}^+(\mathbf{p})$  - обобщенная функция, а индекс  $k$  определяет тип частиц.

Точно так же определяются out-операторы, но только  $\tau$  нужно стремиться к плюс бесконечности:

$$a_{out}^+(f) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} B(f, \tau).$$

In-операторы связаны с операторами в асимптотическом пространстве с помощью формул:

$$a_{in}^+(\rho) S_- = S_- b^+(\rho), \quad S_- |0\rangle = \theta.$$

Эти формулы можно считать альтернативным определением in-операторов, и тогда точно так же можно определить операторы  $a_{in}$ , связанные с операторами уничтожения в фоковском пространстве:

$$a_{in}(\rho) S_- = S_- b(\rho), \quad a_{out}(\rho) S_+ = S_+ b(\rho).$$

Существует очевидная связь между определениями в геометрическом и алгебраическом подходах. Если геометрический подход строится в рамках алгебраического, то оператор  $L(f, \tau)$  в пространстве состояний соответствует оператору  $B(f, \tau)$  в  $\bar{\mathcal{H}}$  в соответствии с формулой  $L(f, \tau) = \tilde{B}(f, \tau) B(f, \tau)$ , и тогда состояние  $\Lambda(f_1, \dots, f_n | \tau)$  соответствует вектору  $\Psi(f_1, \dots, f_n | \tau)$ , а состояние  $\Lambda(f_1, \dots, f_n | -\infty)$  (in-состояние) соответствует вектору  $\Psi(f_1, \dots, f_n | -\infty)$ .

Аналог матрицы Мёллера в геометрическом подходе обозначается как  $\tilde{S}_-$ . В то время как  $S_-$ -матрица Мёллера — это линейный оператор,  $\tilde{S}_-$  — нелинейный оператор. Для теорий, которые могут быть сформулированы алгебраически  $S_-$  отображает в  $\bar{\mathcal{H}}$  симметричную степень  $\mathfrak{h}$ , рассматриваемую как подпространство пространства Фока. Взяв композицию этого отображения с естественным отображением  $\bar{\mathcal{H}}$  в конус состояний  $\mathcal{C}$  мы получаем  $\tilde{S}_-$ .

Когда  $L$  является квадратичным или эрмитовым, он индуцирует мультилинейное отображение симметричной степени конуса  $\mathcal{C}(\mathfrak{h})$ , соответствующего  $\mathfrak{h}$  в конус  $\mathcal{C}$ .

Матрица рассеяния описывает процесс рассеяния. Связь сечения рассеяния с матрицей рассеяния объясняется в общем курсе квантовой механики. Я объясню связь с инклюзивным сечением, и это проще.

Сначала я должен объяснить, что такое инклюзивное сечение рассеяния. Сечение рассеяния связано с вероятностью перехода, скажем, от пары частиц к  $n$  частицам  $(M, N) \rightarrow (Q_1, \dots, Q_n)$ . Мы же рассмотрим процесс, когда в конце получаются частицы  $(Q_1, \dots, Q_n)$  плюс что-нибудь еще:

$$(M, N) \rightarrow (Q_1, \dots, Q_m, R_1, \dots, R_n)$$

По частицам  $R_1, \dots, R_n$  проводится суммирование или, точнее, интегрирование. Получается инклюзивное сечение рассеяния. Все сказанное годится в теории, когда есть интерпретация в терминах частиц и когда все распадается на частицы, но я могу определить инклюзивное сечение, даже если нет такой интерпретации, когда просто происходит процесс  $(M, N) \rightarrow (Q_1, \dots, Q_n + \text{something})$ . Можно не знать, что представляет собой это “something”, но просуммировать по всему, что есть и получить инклюзивное сечение.

В геометрическом подходе только инклюзивное сечение имеет смысл. В алгебраическом подходе необязательно ограничиваться инклюзивным сечением, но все равно проще работать с инклюзивным сечением.

Я рассматриваю произвольное состояние  $\nu$  и пишу следующую формулу для плотности вероятности:

$$\nu(a_{out, k_1}^+(\mathbf{p}_1)a_{out, k_1}(\mathbf{p}_1) \dots a_{out, k_m}^+(\mathbf{p}_m)a_{out, k_m}(\mathbf{p}_m)) \quad (62)$$

Отмечу, что здесь стоят out-операторы, то есть предел на  $+$  бесконечности. Входящие в формулу выражения вида  $a_{out, k_i}^+(\mathbf{p}_i)a_{out, k_i}(\mathbf{p}_i)$  — это, по сути, числа частиц с импульсом  $\mathbf{p}_i$ , так что формула (62) представляет плотность вероятности в пространстве импульсов нахождения  $m$  исходящих частиц типов  $k_1, \dots, k_m$  с импульсами  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ . При этом на остальные частицы я не смотрю.

До сих пор  $\nu$  было любым состоянием, а теперь в качестве  $\nu$  рассмотрим in-состояние

$$\nu = \Lambda(g_1, \dots, g_n | -\infty) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} L(g_1, \tau) \dots L(g_n, \tau) \omega$$

In-состояние определяется входящими частицами. Например, когда я определял инклюзивное сечение, я сталкивал две частицы, но можно сталкивать несколько. Если в in-состоянии измерять входящее в формулу (62) произведение операторов с индексом out, как раз получается инклюзивное сечение рассеяния по определению. Значит, если посчитать выражение (62), когда  $\nu$  будет in-состоянием, получится инклюзивное сечение. Мы сейчас произведем это вычисление.

Рассмотрим следующее выражение:

$$\langle 1 | L(g'_1, \tau') \dots L(g'_{n'}, \tau') L(g_1, \tau) \dots L(g_n, \tau) | \omega \rangle \quad (63)$$

в предположении, что  $g'_i$  и  $g_j$  не перекрываются, а времена устремляются к бесконечности, причем  $\tau' \rightarrow +\infty, \tau \rightarrow -\infty$ . Полученное при действии операторов  $L$  на состояние  $\omega$  — это линейный функционал на алгебре, поэтому мы можем считать, чему он будет равен на единичном элементе алгебры. Обращаю внимание, что я использовал то, что называется *bra-ket notations*, при этом в скобках слева и справа стоят элементы из сопряженных друг другу пространств. Итак, рассмотрим выражение (63) и обозначим его как  $Q$ . Взяв предел  $\tau \rightarrow -\infty$ , получим

$$Q = \lim_{\tau' \rightarrow +\infty} \langle 1 | L(g'_1, \tau') \dots L(g'_{n'}, \tau') \nu \rangle, \quad (64)$$

где  $\nu = \Lambda(g_1, \dots, g_n | -\infty)$ . Получается формула (64). Так как я предположил, что функции не перекрываются, всякие коммутаторы стремятся к нулю и  $Q$  не меняется при перестановке  $g'_1, \dots, g'_{n'}$ .

Теперь посмотрим на эти формулы в алгебраическом подходе. Тогда  $L(g, \tau) = \tilde{B}(g, \tau)B(g, \tau)$ , а кроме того у меня есть формула  $(\tilde{M}N\nu)(X) = \nu(M^*XN)$ . (Операторы с волной умножают с одной стороны, без волны — с другой стороны.) В формуле (64) эти операторы применены к  $\nu$ . Они просто меняют аргумент у  $\nu$ . Кроме того,  $\langle 1 | \sigma \rangle = \sigma(1)$ . В результате получается выражение

$$Q = \lim_{\tau' \rightarrow +\infty} \nu(B^*(g'_{n'}, \tau') \dots B^*(g'_1, \tau') B(g'_1, \tau') \dots B(g'_{n'}, \tau')).$$



В пределе операторы  $B$  переходят в *in*- и *out*-операторы :

$$\lim_{\tau' \rightarrow +\infty} B(g, \tau') = a_{out}^+(g), \quad \lim_{\tau' \rightarrow +\infty} B^*(g, \tau') = a_{out}(g).$$

Учитывая это, а также условие, что в пределе все операторы коммутируют, получаем следующее выражение для  $Q$ :

$$Q = \nu(a_{out}(g'_{n'}) \dots a_{out}(g'_1) a_{out}^+(g'_1) \dots a_{out}^+(g'_{n'})).$$

Я назову выражение

$$Q = Q(g'_1, \dots, g'_{n'}, g_1, \dots, g_n)$$

инклюзивной матрицей рассеяния. Это выражение квадратично зависит от своих аргументов. Я могу перейти от квадратичных выражений к билинейным — тогда количество аргументов удвоится. Получаемое выражение также будет называться инклюзивной матрицей рассеяния. Из него можно получить инклюзивное сечение. Это не вполне тривиальный процесс. Дело в том, что определении инклюзивной матрицы рассеяния я рассматривал ее как функционал на неперекрывающихся семействах функций. Этот функционал линеен или антилинеен, поэтому его можно рассматривать как обобщенную функцию, но аргументы обобщенной функции (импульсы) следует считать различными. В выражении для инклюзивного сечения импульсы могут совпадать, поэтому необходим предельный переход.

В геометрическом подходе я могу определить инклюзивную матрицу рассеяния, взяв наряду с  $\omega \in \mathcal{L}$  какое-нибудь трансляционно инвариантное состояние  $\alpha \in \mathcal{L}^*$ :

$$\lim_{\tau' \rightarrow +\infty, \tau \rightarrow -\infty} \langle \alpha | L(g_1, \tau') \dots L(g_m, \tau') \times L(f_1, \tau) \dots L(f_n, \tau) | \omega \rangle. \quad (65)$$

Такая формула может быть применена и в алгебраической ситуации. В ней состояния  $\alpha$  и  $\omega$  входят абсолютно симметрично. Можно сформулировать это так: формула (65) дает скалярное произведение *out*-состояния в  $\mathcal{L}^*$  и *in*-состояния в  $\mathcal{L}$ . Иными словами, одна и та же формула будет давать инклюзивную матрицу рассеяния элементарных возбуждений состояния  $\omega$  и инклюзивную матрицу рассеяния элементарных возбуждений состояния  $\alpha$ . Это некая двойственность, на мой взгляд, абсолютно таинственная. В алгебраическом подходе ее тоже можно рассматривать.

## 8 Лекция 8

### 8.1 Связь с локальной квантовой теорией поля

То, что я рассказываю в этом курсе, сильно отличается от того, что обычно рассказывается в учебниках по релятивистской квантовой теории поля — в них рассматриваются локальные теории. Основная идея дальнейшего изложения — подчеркнуть, что локальность абсолютно не по существу в большинстве случаев, да и сами поля несущественны. Я не знаю, что нужно называть полями в том подходе, о котором я говорю, хотя вся квантовая теория поля здесь есть.

Я хочу начать с установления связи того, что я рассказываю с тем, что обычно называется локальной релятивистской квантовой теорией поля.

В аксиоматическом подходе к локальной теории есть разные системы аксиом начиная с аксиом Вайтмана, о которых вкратце можно сказать, что в них в качестве основного объекта рассматриваются поля, являющиеся обобщенными операторными функциями. Это не очень удобно: поля локальны, но это обобщенные функции. Если их проинтегрировать, то получаются обычные операторы. Они уже не локальны, но в каком-то смысле почти локальны. Их можно считать сосредоточенными в какой-то области.

Я буду говорить про систему аксиом, которая принадлежит Араки, Хаагу и Кастлеру. В ней рассматриваются, строго говоря, не локальные поля, а поля, сосредоточенные в каком-то открытом подмножестве пространства Минковского. В этой системе аксиом считается, что такие поля образуют алгебру операторов, действующих в гильбертовом пространстве; эта алгебра замкнута относительно слабой сходимости (что не так существенно). Считается, что в том гильбертовом пространстве  $\mathcal{E}$ , в котором действуют эти операторы, действует унитарное представление группы Пуанкаре  $\mathcal{P}$ .

Предполагается, что каждой ограниченной области (ограниченному открытому подмножеству)  $\mathcal{O}$  пространства Минковского сопоставлена алгебра операторов  $\mathcal{A}(\mathcal{O})$  так, что

- если область становится больше:  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ , то и алгебра становится больше:  $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ ;
- действие группы Пуанкаре  $\mathcal{P}$  на операторах согласованно с действием на областях:  $\mathcal{A}(g\mathcal{O}) = g\mathcal{A}(\mathcal{O})g^{-1}$ , если  $g \in \mathcal{P}$ ;
- если интервал между точками двух областей  $\mathcal{O}_1$  и  $\mathcal{O}_2$  пространственно-подобный, то соответствующие операторы  $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$  и  $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$  коммутируют (грубо говоря, это означает, что если интервал пространственно-подобный, то причинной связи не может быть — все абсолютно независимо);
- основное состояние  $\theta$  оператора энергии инвариантно относительно группы Пуанкаре (имея представление группы Пуанкаре, можно рассмотреть оператор энергии (гамильтониан) и операторы импульса как инфинитезимальные генераторы, соответственно, временных и пространственных трансляций);
- вектор, отвечающий основному состоянию, является циклическим по отношению к объединению  $\mathcal{A}$  всех алгебр  $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ .

Это аксиоматика релятивистской локальной квантовой теории поля.

В этой аксиоматике частица определяется как неприводимое подпредставление представления алгебры Пуанкаре в пространстве  $\mathcal{E}$ .

Вернемся теперь к определению рассеяния в алгебраическом подходе. Прошрое мое рассмотрение базировалось на аксиомах, которые нелегко проверить. Сейчас же я наложу требования, которые много легче проверяются. В частности, будет видно, что они выполнены в релятивистской локальной теории.

Мой исходный пункт, как и раньше — это ассоциативная алгебра  $\mathcal{A}$  с инволюцией. Пространственно-временные трансляции — это автоморфизмы этой алгебры.

У меня есть понятие состояния. Есть и понятие ненормализованного состояния. Такие состояния отвечают положительным линейным функционалам на алгебре  $\mathcal{A}$  и образуют конус  $\mathcal{C}$ . Я буду работать именно с ненормализованными состояниями. Трансляционно-инвариантное стационарное состояние всегда будет обозначаться как  $\omega \in \mathcal{C}$ . Возбуждения состояния  $\omega$  — это элементы предгильбертова пространства  $\mathcal{H}$ , которое построено по  $\omega$  с помощью конструкции GNS.

В ассоциативной алгебре  $\mathcal{A}$ , с которой я начинал, нет никакой нормы, но поскольку она представлена в предгильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  и его пополнении, гильбертовом пространстве  $\bar{\mathcal{H}}$ , можно рассматривать норму соответствующих операторов  $\hat{A}$ . Более того, я могу работать с пополненной по этой норме алгеброй  $\mathcal{A}(\omega)$ , но это не обязательно.

Пусть теперь у меня есть элемент  $A$  алгебры  $\mathcal{A}$  который представлен ограниченным оператором  $\hat{A}$  в гильбертовом пространстве. Я могу этот оператор сдвигать по времени и по пространству. В результате получится некий оператор  $\hat{A}(\mathbf{x}, \tau)$ . Более того, я могу усреднить такой оператор с какой-то гладкой и быстро убывающей функцией:

$$B = \int d\tau d\mathbf{x} \alpha(\mathbf{x}, \tau) \hat{A}(\mathbf{x}, \tau).$$

Можно сдвинуть оператор  $B$  по времени и пространству:

$$B(\mathbf{x}, \tau) = \int d\tau', d\mathbf{x}' \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau - \tau') A(\mathbf{x}', \tau').$$

Под знаком интеграла можно дифференцировать. Поскольку сама функция  $\alpha(\mathbf{x}, \tau)$  предполагается гладкой, можно продифференцировать сколько угодно раз. Я всегда буду работать именно с такими операторами и буду называть их гладкими.

Условие асимптотической коммутативности следует наложить таким способом, чтобы коммутатор сдвинутого оператора с другим оператором становился малым при больших пространственных сдвигах. Формализовать это можно по-разному. Я сделаю это так, чтобы было мгновенно понятно, что в аксиоматике Араки, Хаага и Кастлера мое условие выполнено. Именно я потребую, чтобы норма  $||[B_1(\mathbf{x}, \tau), B_2]||$  коммутатора сдвинутого оператора с другим оператором, отвечающим элементу алгебры  $\mathcal{A}$  убывала быстрее любой степени  $||\mathbf{x}||$ , когда  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ . То же условие я наложу на  $||[\dot{B}_1(\mathbf{x}, \tau), B_2]||$ , где точка обозначает производную по времени. Все операторы, напомню, у меня гладкие.

В аксиоматике Араки, Хаага и Кастлера это всегда выполняется, потому что там при большом пространственном сдвиге пространственно-временной интервал между соответствующими областями, становится пространственно-подобным и поэтому можно сказать, что начиная с некоторого момента рассматриваемый мною коммутатор просто равен нулю (и тем самым убывает быстрее любой степени).

Другим определением асимптотической коммутативности является условие

$$||[B_1(\mathbf{x}, \tau), B_2]|| \leq \frac{C_n(\tau)}{1 + ||\mathbf{x}||^n},$$

где  $C_n(\tau)$  имеет не более чем полиномиальный рост, а  $n$  - произвольно (сильная асимптотическая коммутативность). Это условие в аксиоматике Араки, Хаага и Кастлера выполнено, если спектр масс ограничен снизу положительным числом.

Кроме условия асимптотической коммутативности я хочу наложить условие кластеризации, о которых я говорил в прошлый раз. В простейшей форме это означает, что если один из операторов убегает на бесконечность, то все распадается с точностью до маленького слагаемого  $\rho(\mathbf{x}, t)$ :

$$\omega(A(\mathbf{x}, t)B) = \omega(A)\omega(B) + \rho(\mathbf{x}, t),$$

где  $\omega$  — это функционал на алгебре  $\mathcal{A}$ , то самое состояние, возбуждение которого я рассматриваю. Можно наложить примерно такое же условие, когда операторов много. Это очень удобное условие, но формулируется оно довольно громоздко.

Для формулировки условия кластеризации для многих операторов мне нужно ввести понятие корреляционной функции, являющейся обобщением функции Вайтмана из релятивистской квантовой теории поля. Я беру какие-то операторы  $A_1 \dots A_r \in \mathcal{A}$ , сдвигаю их и по пространству, и по времени. Перемножив их, получаю элемент алгебры и после этого применяю  $\omega$  или, что то же самое, беру среднее по состоянию  $\omega$ . В результате получается:

$$w_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \omega(A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \dots A_n(\mathbf{x}_n, t_n)) = \langle A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \dots A_n(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle.$$

Это корреляционная функция.

Полезно определить понятие усеченной корреляционной функции

$$w_n^T(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \equiv \langle A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \dots A_n(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle^T.$$

Это делается несколько формально с помощью индуктивной формулы, связывающей усеченные корреляционные функции с обычными корреляционными функциями:

$$w_n(\mathbf{x}_1, \tau_1, k_1, \dots, \mathbf{x}_n, \tau_n, k_n) = \sum_{s=1}^n \sum_{\rho \in R_s} w_{\alpha_1}^T(\pi_1) \dots w_{\alpha_s}^T(\pi_s).$$

Здесь  $R_s$  обозначает совокупность всех разбиений множества  $\{1, \dots, n\}$  на подмножества  $s$ , обозначаемые  $\pi_1, \dots, \pi_s$ , количество элементов в подмножестве  $\pi_i$  обозначается через  $\alpha_i$ , а  $w_{\alpha_i}^T(\pi_i)$  обозначает усеченную корреляционную функцию с аргументами  $\mathbf{x}_a, \tau_a, k_a$ , где  $a \in \pi_i$ . Эта формула выражает корреляционные функции через усеченные функции при всевозможных разбиениях множества индексов.

В случае когда есть всего два оператора, усеченная корреляционная функция имеет вид

$$w_2^T(\mathbf{x}_1, \tau_1, k_1, \mathbf{x}_2, \tau_2, k_2) = \omega(A_1(\mathbf{x}_1, t_1)A_2(\mathbf{x}_2, t_2)) - \omega(A_1(\mathbf{x}_1, t_1))\omega(A_2(\mathbf{x}_2, t_2)).$$

Так как  $\omega$  трансляционно инвариантно, как обычная, так и усеченная корреляционные функции зависят только от разностей  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, t_i - t_j$ . Мы говорим, что выполнено условие кластеризации если усеченные корреляционные функции становятся малыми при  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \rightarrow \infty$ . Малость можно понимать в разных смыслах, но я имею в виду самое сильное условие: при фиксированных  $t_i$  они стремятся к нулю быстрее, чем любая степень разности  $d = \min \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ . Точнее говоря, мы предполагаем, что

$$|w_n^T(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n)| \leq \frac{C_s(t)}{d^s},$$

где  $s$  любое натуральное число, а  $C_s(t)$ -полиномиальная функция от времен  $t_i$ .

Можно применить преобразование Фурье, и тогда факт зависимости только от разности будет означать появление  $\delta$ -функции от суммы импульсов. Если эту функцию выделить, то условие кластеризации, означает, что усеченная корреляционная функция представляет собой гладкую функцию, умноженную на  $\delta$ -функцию:

$$\nu_n(\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n, t_1, \dots, t_n) \delta(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n).$$

Напомню, что если функция быстро убывает по  $\mathbf{x}$ , то в импульсном представлении она является гладкой, и это здесь написано.

В релятивистской квантовой теории условие кластеризации выполнено если массы частиц ограничены снизу положительным числом (mass gap).

## 8.2 Функции Грина. Связь с матрицей рассеяния.

Функция Грина отличается от корреляционной функции тем, что операторы, которые стоят под знаком  $\omega$ , считаются упорядоченными по времени в порядке убывания. Это то, что называется хронологическим произведением. Если применить  $\omega$  к хронологическому произведению (или взять среднее по вектору, который отвечает  $\omega$  в конструкции GNS), получится функция

$$G_n = \omega(T(A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \dots A_r(\mathbf{x}_r, t_r))) = \langle \theta | T(\hat{A}_1(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \hat{A}_r(\mathbf{x}_r, t_r)) | \theta \rangle,$$

которая называется функцией Грина, записанной в  $(\mathbf{x}, t)$ -представлении (в координатном представлении).

Как всегда, можно переходить к импульсному представлению, взяв преобразование Фурье по  $\mathbf{x}$ . Это будет то, что называется  $(\mathbf{p}, t)$ -представлением (импульсном и временном). Можно еще взять (обратное) преобразование Фурье по временной переменной и тогда функции Грина будут в  $(\mathbf{p}, \epsilon)$ -представлении, когда основные переменные — это импульсы и энергии. Мне потребуются все эти представления. Отличаются они преобразованиями Фурье, всегда можно переходить от одного к другому.

Благодаря трансляционной инвариантности функция Грина в  $(\mathbf{x}, t)$ -представлении зависят от разностей  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, t_i - t_j$  и, следовательно, в  $(\mathbf{p}, t)$ -представлении выделяется множитель  $\delta(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_r)$ , отвечающий закону сохранения импульса, а в  $(\mathbf{p}, \epsilon)$ -представлении — еще и множитель  $\delta(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_r)$ , отвечающий закону сохранения энергии.

Переходя к вопросу о полюсах функции Грина, нужно заметить, что я всегда не обращаю внимания на  $\delta$ -функции, говоря про полюса. В частности, когда функция Грина включает только два оператора, в  $(\mathbf{p}, \epsilon)$ -представлении мы имеем два импульса, две энергии и две  $\delta$ -функции — одна от импульсов, другая от энергий:

$$G(\mathbf{p}_1, \epsilon_1 | A, A') \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

Остается функция от переменной  $\mathbf{p}_1$  и о переменной  $\epsilon_1$ . Важно отметить, что полюса такой двухточечной функции Грина по энергии при фиксированном импульсе отвечают частицам. Эти полюса зависят от импульса, а соответствующая функция  $\varepsilon(\mathbf{p})$  дает закон дисперсии для частиц (зависимость энергии от импульса). Эти хорошо известные факты легко вывести из рассуждений, которые будут использованы ниже.

Я докажу, что для того, чтобы найти амплитуды рассеяния, нужно рассмотреть асимптотическое поведение функции Грина в  $(\mathbf{p}, t)$ -представлении, когда  $t \rightarrow \pm\infty$ . Это первое и основное замечание. А другое замечание состоит в том, что это асимптотическое поведение в  $(\mathbf{p}, t)$ -представлении управляется полюсами в  $(\mathbf{p}, \epsilon)$ -представлении. Точнее говоря, асимптотика описывается вычетами в этих полюсах. Это называется “on-shell value of Green function”.

Есть хорошо известный математический факт: если асимптотическое поведение какой-либо функции  $\rho(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  имеет вид  $e^{-itE_{\pm}} A_{\pm}$  или, говоря по-другому, существует предел  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itE_{\pm}} \rho(t) = A_{\pm}$ , тогда (обратное) преобразование Фурье  $\rho(\epsilon)$  имеет полюса в точках  $E_{\pm} \pm i0$  с вычетами  $\mp 2\pi i A_{\pm}$ . Иными словами предел отвечает вычетам, а показатели экспоненты отвечают полюсам; при этом полюс оказывается немножко сдвинутым в комплексной плоскости либо вверх, либо вниз. Это чрезвычайно важное замечание.

Можно либо смотреть на полюса в энергетическом представлении, либо смотреть на асимптотику во временном представлении. Это означает, что вычисление амплитуд рассеяния сводится к выяснению асимптотического поведения функций Грина (это мы сделаем). Переходя к энергетическому представлению, мы можем сказать, что амплитуды рассеяния выражаются через on-shell значения функций Грина. Это — формула Лемана, Симанчика и Циммермана (LSZ).

Ниже я докажу формулу LSZ в случае, когда в теории есть интерпретация в терминах частиц. Это означает, что существуют половинки матрицы рассеяния — матрицы Мёллера  $S_{\pm}$ , которые дают унитарную эквивалентность между свободным гамильтонианом в асимптотическом пространстве  $\mathcal{H}_{as}$  и полученным с помощью процедуры GNS гамильтонианом в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Я хочу упростить обозначения, и поэтому я буду обсуждать случай, когда есть только один тип частиц. Напоминаю, что я рассматривал обобщенную функцию  $\Phi(\mathbf{p})$ , отвечающую состоянию частицы с заданным импульсом  $\mathbf{p}$ , и это состояние — собственное как для импульса, так и для оператора энергии. Действие гамильтониана на  $\Phi(\mathbf{p})$  сводится к умножению на функцию  $\varepsilon(\mathbf{p})$  (закон дисперсии):

$$\hat{H}\Phi(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})\Phi(\mathbf{p}), \quad \hat{\mathbf{P}}\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\Phi(\mathbf{p}).$$

Нужно помнить, что на самом деле  $\Phi(\mathbf{p})$  не очень-то существует — это обобщенная функция. Для того, чтобы все это приобрело точный математический смысл, следует проинтегрировать с какой-то пробной функцией.

Теперь я хочу сделать предположение, что одночастичный спектр не перекрывается с многочастичным спектром. Как вычислить спектр гамильтониана  $\hat{H}$ ? У меня есть интерпретация в терминах частиц, и поэтому матрица Мёллера связывает асимптотический гамильтониан с гамильтонианом в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Асимптотический гамильтониан является свободным. У него (а, значит, и у  $\hat{H}$ ) спектр полностью определяется одночастичными функциями  $\varepsilon(\mathbf{p})$ . Энергии многочастичных возбуждений — это просто суммы  $\varepsilon(\mathbf{p}_1) + \dots + \varepsilon(\mathbf{p}_n)$ . Если я хочу сказать, что одночастичный спектр не перекрывается с двухчастичным, а, следовательно, и многочастичным, нужно потребовать выполнения неравенства

$$\varepsilon(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) < \varepsilon(\mathbf{p}_1) + \varepsilon(\mathbf{p}_2).$$

Это означает, что частицы с импульсом  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  не могут распасться на частицы с импульсом  $\mathbf{p}_1$  и импульсом  $\mathbf{p}_2$ . Закон сохранения (в данном случае закон сохранения энергии) запрещает распад.

Теперь я аккуратно сформулирую формулу Лемана, Симанчика и Циммермана. Для этого я зафиксирую какие-то элементы  $A_i \in \mathcal{A}$  той алгебры, из которой я исходил. (Напоминаю, что я работаю с гладкими элементами, но здесь это не так важно.) Также я требую, чтобы применив оператор  $\hat{A}_i$  к вектору  $\theta$  (который в релятивистской квантовой теории интерпретируется как физический вакуум) и осуществив проекцию на пространство, натянутое на одночастичные состояния (одночастичное пространство), я получу в результате отличную от нуля величину. Точнее говоря, я требую, чтобы проекция вектора  $\hat{A}_i\theta$  была одночастичным состоянием вида:

$$\Phi(\phi_i) = \int \phi_i(\mathbf{p})\Phi(\mathbf{p})d\mathbf{p},$$

где  $\phi_i(\mathbf{p})$  — это не обращающаяся нигде в ноль функция. Проекция этого вектора на вектор  $\theta$  должна обращаться в ноль.

Для простоты я еще веду обозначение  $\Lambda_i(\mathbf{p}) = \phi_i(\mathbf{p})^{-1}$ . В этих обозначениях будем рассматривать содержащую как сами операторы  $A_i$ , так и сопряженные им  $A_i^*$

функцию Грина в  $(\mathbf{p}, t)$ -представлении:

$$G_{mn} = \omega(T(A_1^*(\mathbf{x}_1, t_1) \dots A_m^*(\mathbf{x}_m, t_m) A_{m+1}(\mathbf{x}_{m+1}, t_{m+1}) \dots A_{m+n}(\mathbf{x}_{m+n}, t_{m+n}))).$$

Затем перейдем к  $(\mathbf{p}, \epsilon)$ -представлению, но при этом там, где стоят операторы  $A_i^*$  при  $1 \leq i \leq m$  удобно сменить знак у переменных  $\mathbf{p}_i$  и  $\epsilon_i$ . Функцию Грина в новом представлении умножим на выражение:

$$\prod_{1 \leq i \leq m} \overline{\Lambda_i(\mathbf{p}_i)}(\epsilon_i + \varepsilon(\mathbf{p}_i)) \prod_{m < j \leq m+n} \Lambda_j(\mathbf{p}_j)(\epsilon_j - \varepsilon(\mathbf{p}_j)).$$

и перейдем к пределу  $\epsilon_i \rightarrow -\varepsilon(\mathbf{p}_i)$  для  $1 \leq i \leq m$  и  $\epsilon_j \rightarrow \varepsilon(\mathbf{p}_j)$  для  $m < j \leq m+n$ .

Вклад в полученное выражение будут вносить только полюса, потому что введенный множитель стремится к нулю, и вне полюса все полученное выражение обращается в ноль, а в полюсе получается вычет. Иными словами, данная операция сводится к взятию вычета в этом полюсе. Кроме того, я еще умножаю на функции  $\Lambda_i(\mathbf{p})$  и сопряженные к ним. В физике это называется перенормировкой волновой функции. В случае когда эти множители не включены, я буду говорить про on-shell функции Грина, а если включены, я буду говорить, что рассматриваю нормализованные on-shell функции Грина.

Основное высказывание в подходе Лемана, Симанчика и Циммермана состоит в том, что нормализованная on-shell функция Грина дает амплитуду рассеяния. Для его доказательства, прежде всего, я буду рассматривать случай, когда операторы  $\hat{A}_i$  просто дают одночастичные состояния  $\hat{A}_i \theta = \Phi(\phi_i)$  (не нужно проецировать). Будем их называть хорошими операторами. В конце лекции я объясню, что к этому случаю все можно свести.

До сих пор рассматривался случай, когда имеется всего один тип частиц. Давайте рассмотрим случай, когда есть много типов частиц, иными словами, есть много функций  $\Phi_k(\mathbf{p})$ , являющиеся собственными как для импульса, так и для энергии:

$$\mathbf{P}\Phi_k = \mathbf{p}\Phi_k(\mathbf{p}), \quad H\Phi_k(\mathbf{p}) = \varepsilon_k(\mathbf{p})\Phi_k(\mathbf{p}),$$

но с разными законами дисперсии  $\varepsilon_k(\mathbf{p})$ , задающимися гладкими функциями. Как всегда,  $\Phi_k(\mathbf{p})$  — это обобщенные функции, то есть, нужны пробные функции. Я рассматриваю пробные функции из пространства  $\mathcal{S}$  гладких быстро убывающих функций. Чтобы гарантировать, что сдвиги по времени действуют в пространстве  $\mathcal{S}$ , следует предположить, что функции  $\varepsilon_k(\mathbf{p})$  растут не более чем полиномиально.

Как уже было сказано, я буду работать с хорошими операторами  $B_k \in \mathcal{A}$ , являющимися гладкими и переводящими вектор  $\theta$  в одночастичные состояния  $\hat{B}_k \theta = \Phi_k(\phi_k)$ . Теперь я определяю оператор  $\hat{B}_k(f, t)$ , зависящий от функции  $f = f(\mathbf{p})$  следующим образом:

$$\hat{B}_k(f, t) = \int \tilde{f}(\mathbf{x}, t) \hat{B}_k(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

где функция  $\tilde{f}(\mathbf{x}, t)$  получена преобразованием Фурье от функции  $f(\mathbf{p})e^{-i\varepsilon_k(\mathbf{p})t}$  по импульсной переменной.

Аналогичные операторы рассматривались на прошлой лекции. Они обладают тем свойством, что если их применить к  $\theta$ , получится независящее от  $t$  одночастичное состояние

$$\hat{B}_k(f, t)\theta = \Phi_k(f\phi_k). \quad (66)$$

(На прошлой лекции функция  $\phi_k$  равнялась единице). В целом же, все то, что говорилось на прошлой лекции можно повторить и здесь. Тот факт, что полученное состояние не зависит от времени — это результат формального счета. Вычисления

становятся совсем простыми если сделать преобразование Фурье по пространственной переменной

$$\hat{B}_k(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \hat{B}_k(\mathbf{x}, t).$$

В терминах этих операторов получается простое выражение

$$\hat{B}_k(f, t) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) e^{i\varepsilon_k(\mathbf{p})t} \hat{B}_k(\mathbf{p}, t). \quad (67)$$

Если этот оператор применить к  $\theta$ , получится одночастичное состояние, зависимость которого от времени определяется такой же экспонентой, что и стоит под знаком интеграла, только с минусом перед ее показателем. Эти две экспоненты сократятся и зависимость от времени пропадет. Это очень важная для меня вещь. В прошлый раз, я тоже рассматривал аналогичные операторы, и мне очень важно, чтобы я мог продифференцировать по  $t$  и получить ноль, действуя на  $\theta$ .

Теперь я делаю ровно то, что делал в прошлый раз, но обозначения изменились, потому что мне неудобно сейчас говорить про элементарное пространство. Поэтому я явно выписываю индексы. В элементарном пространстве у меня тоже были индексы, но я их мог спрятать, а тут я индексы пишу явно. Я рассматриваю вектор

$$\Psi(k_1, f_1, \dots, k_n, f_n | t_1, \dots, t_n) = \hat{B}_{k_1}(f_1, t_1) \cdots \hat{B}_{k_n}(f_n, t_n) \theta, \quad (68)$$

где предполагается, что функции  $f_1, \dots, f_n$  имеют компактные носители. В прошлой лекции я в основном считал, что все времена, входящие в аналогичное выражение, одинаковы; случай, когда времена разные, но все стремятся к бесконечности немногим сложнее.

Теперь я, как и в прошлый раз, рассматриваю градиенты от энергии  $\mathbf{v}_i(\mathbf{p}) = \nabla \varepsilon_{k_i}(\mathbf{p})$ , которые имеют смысл скорости. Теперь я обозначаю буквой  $U_i$  множество всех возможных скоростей  $\mathbf{v}_i(\mathbf{p})$ , таких что  $f_i(\mathbf{p}) \neq 0$ . Дальше я рассматриваю замыкание  $\bar{U}_i$ . Я требую, чтобы все эти множества не перекрывались, тогда я буду называть эти функции неперекрывающимися. Это означает, что все классические скорости различны, и поэтому волновые пакеты расходятся в разных направлениях, тогда, как я объяснял в прошлый раз, в координатном представлении почти не перекрываются соответствующие волновые функции.

Это то, что уже было сказано, а теперь я буду брать предел  $t_i \rightarrow \infty$ , опять для простоты буду рассматривать случай, когда все времена одинаковы. Я буду доказывать, что у вектора  $\Psi(k_1, f_1, \dots, k_n, f_n | t_1, \dots, t_n)$  есть предел, который обозначим как  $\Psi(k_1, f_1, \dots, k_n, f_n | \pm \infty)$ .

Доказательство повторяет то, что было в прошлый раз. Я снова положу одинаковыми все  $t_i = t$  и продифференцирую по  $t$ . Для того чтобы доказать, что есть предел, мне нужно знать, что производная по  $t$  мала (на самом деле достаточно, чтобы производная была суммируемой функцией). Это условие выполняется. По определению вектор  $\Psi$  является результатом многократного применения к  $\theta$  операторов  $\hat{B}_{k_i}(f_i, t_i)$ . Когда я дифференцирую это выражение по  $t$ , у меня появляется точка над одним из операторов  $\hat{B}$ , который я после этого могу сдвинуть направо, используя условие асимптотической коммутативности (но только если я работаю с неперекрывающимися функциями). Эта производная примененная к  $\theta$  дает ноль, поэтому предел есть.

Поскольку предел существует, я могу определить матрицу Мёллера. Для этого я введу асимптотическое пространство  $\mathcal{H}_{as}$  как фоковское представление операторов  $a_k^+(f)$ ,  $a_k(f)$  и определю матрицы Мёллера  $S_-$  и  $S_+$  как операторы, определенные в  $\mathcal{H}_{as}$  и принимающие значения в  $\bar{\mathcal{H}}$  по формуле:

$$\Psi(k_1, f_1, \dots, k_n, f_n | \pm \infty) = S_{\pm}(a_{k_1}^+(f_1 \phi_{k_1}) \cdots a_{k_n}^+(f_n \phi_{k_n}) | 0), \quad (69)$$



где  $|0\rangle$  — фоковский вакуум. Это та же формула, которая была на прошлой лекции с той лишь разницей, что здесь появились множители  $\phi_{k_i}$ , которые мне нужны для того, чтобы учесть то, что при действии хорошего оператора  $\hat{B}_{k_i}$  на  $\Phi$  мы получаем  $\Phi_{k_i}(\phi_{k_i})$ . Матрицы Мёллера определены на всюду плотном подпространстве асимптотического гильбертова пространства  $\mathcal{H}_{as}$ .

Можно доказать и я сейчас это сделаю, что получилось изометрическое вложение асимптотического пространства в пространство  $\mathcal{H}$ . Физический смысл полученного можно понять из формулы (которая в других обозначениях была на прошлой лекции):

$$e^{-iHt}\Psi(k_1, f_1, \dots, k_n, f_n | \pm \infty) = \Psi(k_1, f_1 e^{-i\varepsilon_{k_1} t}, \dots, k_n, f_n e^{-i\varepsilon_{k_n} t} | \pm \infty).$$

Эта формула означает, что когда мы рассматриваем эволюцию в пространстве  $\mathcal{H}$ , то в пределе  $t \rightarrow \pm\infty$  действию на вектор  $\Psi$  оператора эволюции в асимптотическом пространстве будет отвечать просто эволюция функций  $f_i$ . Все происходит независимо. Иными словами, эволюция вектора  $\Psi$  сводится при больших  $t$  к эволюции системы из  $n$  далеких друг от друга частиц с неперекрывающимися волновыми функциями  $f_1 \phi_1 e^{-i\varepsilon_{k_1} t}, \dots, f_n \phi_n e^{-i\varepsilon_{k_n} t}$ .

Данное нами определение  $S_{\pm}$  может быть неоднозначным. Например, мы можем использовать разные хорошие операторы в построении, и неясно, получим ли мы один и тот же ответ. Однако можно доказать, что ответ не зависит от случайностей построения. Я докажу, что  $S_{\pm}$  — изометрические операторы. Они сохраняют норму и сохраняют скалярное произведение. Такие операторы не могут быть многозначным. Заодно мы увидим, что вектор  $\Psi(k_1, f_1, \dots, k_n, f_n | \pm \infty)$  не меняется, при перестановках аргументов  $(k_i, f_i)$  и  $(k_j, f_j)$ .

Основная линия доказательства состоит в следующем. Чтобы получить матрицу Мёллера в формуле (68) положим для простоты все времена одинаковыми и рассмотрим предел вектора  $\Psi(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Заметим при этом, что согласно (68) такой вектор получается в результате многократного применения операторов  $B$  к основному состоянию. Теперь легко увидеть, что, скалярное произведение двух таких векторов можно выразить через корреляционные функции, определяемые как средние значения произведений рассматриваемых операторов по основному состоянию. Но корреляционные функции выражаются через усеченные корреляционные функции. А в усеченных корреляционных функциях только двухточечные корреляционные функции будут выживать в пределе,  $t \rightarrow \pm\infty$ , если я потребую кластеризацию.

Теперь я могу сказать, что матрица Мёллера — это изометрическое отображение. Изометрическое отображение никак не может быть многозначным, потому что если два вектора совпадают, то расстояние между ними 0. Это условие должно сохраняться, и два совпадающих вектора должны переходить в совпадающие векторы.

После того, как я ввел понятие матрицы Мёллера, я могу ввести понятия out-оператора и in-оператора:

$$\begin{aligned} a_{in}(f)S_- &= S_- a(f), a_{in}^+(f)S_- = S_- a^+(f), \\ a_{out}(f)S_+ &= S_+ a(f), a_{out}^+(f)S_+ = S_+ a^+(f). \end{aligned}$$

Грубо говоря, если  $S_-$  и  $S_+$  унитарны, то это соответствие взаимно однозначно, и я могу все перекидывать из асимптотического пространства в основное пространство. (Здесь я опять не пишу индекс, описывающий тип частиц.)

Справедливы также формулы

$$a_{in}^+(f\phi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{B}(f, t), a_{out}^+(f\phi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{B}(f, t). \quad (70)$$

То, что я рассказываю, немножко отличается от того, что было на прошлой лекции. Во-первых, операторы  $B(f, t)$  в прошлый раз я вводил аксиоматически, а в этот

раз построил с помощью явной формулы, а, во-вторых, мне пришлось заплатить за это появлением буквы  $\phi$ , которая никому не мешает, но тем не менее она присутствует.

Предел в (70) существует на множестве всех векторов вида  $\Psi(k_1, f_1, \dots, k_n, f_n | \pm)$  при условии, что  $f, f_1, \dots, f_n$  — это неперекрывающееся семейство функций. Интересно, что когда размерность пространства  $d \geq 3$ , то при некоторых условиях этот предел существует без условия неперекрывания. (Это для нас несущественно, потому что условие неперекрывания дает предел на всюду плотном множестве, и этого абсолютно достаточно.)

Теперь, на основе сказанного, я могу выписать явно то, как действуют определенные нами операторы

$$\begin{aligned} a_{in}^+(f\phi)\Psi(f_1, \dots, f_n | -\infty) &= \Psi(f, f_1, \dots, f_n | -\infty), \\ a_{out}^+(f\phi)\Psi(f_1, \dots, f_n | \infty) &= \Psi(f, f_1, \dots, f_n | \infty). \\ a_{in}(f)\Psi(\phi^{-1}f, f_1, \dots, f_n | -\infty) &= \Psi(f_1, \dots, f_n | -\infty), \\ a_{out}(f)\Psi(\phi^{-1}f, f_1, \dots, f_n | \infty) &= \Psi(f_1, \dots, f_n | \infty). \end{aligned}$$

Эти формулы можно рассматривать как определения операторов  $a_{in}$  и  $a_{out}$ . Грубо говоря, операторы  $a_{in/out}^+$  добавляют одну функцию к  $\Psi(f_1, \dots, f_n | \mp \infty)$ , а сопряженные к ним операторы уничтожают одну из этих функций.

Если операторы  $S_+$  и  $S_-$  являются унитарными, мы говорим, что теория имеет интерпретацию в терминах частиц. В этом случае (а также в более общем случае, когда образ  $S_-$  совпадает с образом  $S_+$ ), мы можем определить матрицу рассеяния

$$S = S_+^* S_-.$$

как унитарный оператор в асимптотическом пространстве  $\mathcal{H}_{as}$ . Асимптотическое пространство — это фоксовское пространство. У него есть обобщенный базис  $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = \frac{1}{n!} a^+(\mathbf{p}_1) \dots a^+(\mathbf{p}_n) |0\rangle$ .

В этом базисе матричные элементы унитарного оператора  $S$  (амплитуды рассеяния) могут быть выражены в терминах in- и out-операторов. Это те самые матричные элементы, квадраты которых дают эффективные сечения рассеяния. Получается следующая формула:

$$S_{mn}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m | \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \langle a_{in}^+(\mathbf{q}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{q}_n) \theta, a_{out}^+(\mathbf{p}_1) \dots a_{out}^+(\mathbf{p}_m) \theta \rangle \quad (71)$$

Это следует непосредственно из определения in- и out-операторов. В формуле (71) и в последующих я буду опускать числовые коэффициенты  $(m!)^{-1}(n!)^{-1}$ .

Приведенная выше формула доказана только для случая, когда все значения импульсов  $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j$  различны. (Точнее, мы должны предположить, что все векторы  $\mathbf{v}(\mathbf{p}_i) = \nabla \varepsilon(\mathbf{p}_i), \mathbf{v}(\mathbf{q}_j) = \nabla \varepsilon(\mathbf{q}_j)$  различны. В случае когда функция  $\varepsilon(\mathbf{p})$  является строго выпуклой, достаточно предположить, что  $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j$  различны. Это несущественное ограничение, но оно есть.) Формулу (71) следует понимать в смысле обобщенных функций. Это означает, что следует в качестве пробных функций брать множество функций  $f_i(\mathbf{p}_i), g_j(\mathbf{q}_j)$  с неперекрывающимися подмножествами  $\bar{U}(f_i), \bar{U}(g_j)$ .

Распишем теперь формулу (71) подробнее:

$$\begin{aligned} S_{mn}(f_1, \dots, f_m | g_1, \dots, g_n) &= \\ &= \int d^m \mathbf{p} d^n \mathbf{q} \prod f_i(\mathbf{p}_i) \prod g_j(\mathbf{q}_j) S_{mn}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m | \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \\ &= \langle a_{in}^+(g_1) \dots a_{in}^+(g_n) \theta, a_{out}^+(\bar{f}_1) \dots a_{out}^+(\bar{f}_m) \theta \rangle. \end{aligned}$$

Вспомнив, что S-матрица рассеяния определена с помощью пределов при  $t \rightarrow \pm\infty$  и воспользовавшись формулами (70), мы приходим к следующему представлению:

$$S_{mn}(f_1, \dots, f_m | g_1, \dots, g_n) = \lim_{t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow -\infty} \langle \theta | \hat{B}(\bar{f}_m \phi^{-1}, t)^* \dots \hat{B}(\bar{f}_1 \phi^{-1}, t)^* \hat{B}(g_1 \phi^{-1}, \tau) \dots \hat{B}(g_n \phi^{-1}, \tau) | \theta \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow -\infty} \omega(B(\bar{f}_m \bar{\phi}^{-1}, t)^* \dots B(\bar{f}_1 \bar{\phi}^{-1}, t)^* B(g_1 \phi^{-1}, \tau) \dots B(g_n \phi^{-1}, \tau)),$$

где  $B(f, t)^* = \int d\mathbf{x} B^*(\mathbf{x}, t) \overline{f(\mathbf{x}, t)}$ .

Можно записать и более общую формулу

$$S_{mn}(f_1, \dots, f_m | g_1, \dots, g_n) = \lim_{\substack{t_i \rightarrow \infty, \\ \tau_j \rightarrow -\infty}} \omega(B_m(\bar{f}_m \phi_m^{-1}, t_m)^* \dots B_1(\bar{f}_1 \phi_1^{-1}, t_1)^* B_{m+1}(g_1 \phi_{m+1}^{-1}, \tau_1) \dots B_{m+n}(g_n \phi_{m+n}^{-1}, \tau_n)),$$

справедливую, когда все  $B_i$  — разные хорошие операторы и  $B_i \theta = \Phi(\phi_i)$ .

Очень важное замечание состоит в том, что из условия неперекрывания, в пределе  $t_i \rightarrow \infty, \tau_j \rightarrow -\infty$  порядок времен несущественен как в группе со звездочкой, так и в группе без звездочки. Это значит, что на больших временах я могу эти операторы переставлять. В частности, я могу их считать упорядоченными по времени и получу то же, что появлялось у меня при введении функции Грина. Иными словами, я могу считать, что здесь стоит функция Грина. Это конец доказательства.

Чтобы быть совершенно аккуратным, нужно все-таки сказать, какая получится функция Грина? Для того чтобы это установить, выразим согласно (67) операторы  $\hat{B}_k(f, t)$  через  $\hat{B}_k(\mathbf{p}, t)$  и получим в результате:

$$S_{mn}(f_1, \dots, f_m | g_1, \dots, g_n) = \int d^{m+n} \mathbf{p} \lim_{\substack{t_i \rightarrow \infty, \\ \tau_j \rightarrow -\infty}} \langle \theta | f_m \bar{\phi}_m^{-1} e^{i\varepsilon_m(\mathbf{p}_m)t_m} \hat{B}_m(\mathbf{p}_m, t_m)^* \dots f_1 \bar{\phi}_1^{-1} e^{i\varepsilon_1(\mathbf{p}_1)t_1} \hat{B}_1(\mathbf{p}_1, t_1)^* \times g_1 \phi_{m+1}^{-1} e^{-i\varepsilon_{m+1}(\mathbf{p}_{m+1})\tau_1} \hat{B}_{m+1}(\mathbf{p}_{m+1}, \tau_n) \dots g_n \phi_{m+n}^{-1} e^{-i\varepsilon_{m+n}(\mathbf{p}_{m+n})\tau_n} \hat{B}_{m+n}(\mathbf{p}_{m+n}, \tau_n) | \theta \rangle.$$

Для матричных элементов матрицы рассеяния получается следующая формула:

$$S_{mn}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m | \mathbf{p}_{m+1}, \dots, \mathbf{p}_{m+n}) = \lim_{\substack{t_1, \dots, t_m \rightarrow \infty, \\ t_{m+1}, \dots, t_{m+n} \rightarrow -\infty}} \langle \theta | \bar{\phi}_m^{-1} e^{i\varepsilon_m(\mathbf{p}_m)t_m} \hat{B}_m(\mathbf{p}_m, t_m)^* \dots \bar{\phi}_1^{-1} e^{i\varepsilon_1(\mathbf{p}_1)t_1} \hat{B}_1(\mathbf{p}_1, t_1)^* \times \phi_{m+1}^{-1} e^{-i\varepsilon_{m+1}(\mathbf{p}_{m+1})t_{m+1}} \hat{B}_{m+1}(\mathbf{p}_{m+1}, t_{m+1}) \dots \times \phi_{m+n}^{-1} e^{-i\varepsilon_{m+n}(\mathbf{p}_{m+n})t_{m+n}} \hat{B}_{m+n}(\mathbf{p}_{m+n}, t_{m+n}) | \theta \rangle,$$

где у меня стоят операторы  $\hat{B}_m(\mathbf{p}_m, t_m)$  и производится усреднение по состоянию  $\theta$ . Это среднее совпадает с функцией Грина в  $(\mathbf{p}, t)$ -представлении. Эта формула мне говорит, что если я исхожу из хороших операторов, матрица рассеяния выражается через функции Грина в  $(\mathbf{p}, t)$ -представлении, точнее через их асимптотику при  $t_i \rightarrow \infty$  и  $\tau_j \rightarrow -\infty$ . У меня появились множители  $\phi_i^{-1}$ . Это ровно те самые  $\Lambda$ , которые вводились для того, чтобы получить нормированные функции Грина. То, что я рассматриваю асимптотику, означает, что в энергетическом представлении я беру функции Грина on-shell. То, что у меня появились множители  $\phi_i^{-1}$  означает, что я получаю нормированные функции Грина, и это конец истории.

Я дал доказательство формулы для хороших операторов. Из него, как я уже говорил, можно сделать вывод для много более широкого класса операторов. Я объясню это, вернувшись снова к ситуации, когда есть только один тип частиц.

Дело в том, что в подходе Лемана, Симанчика и Циммермана операторы  $A_i$  почти произвольны. Нужно только чтобы проекция вектора  $\hat{A}_i\theta$  на одночастичные состояния была ненулевой, а проекция этого вектора на вектор  $\theta$  обращалась в ноль.

Мне важно то, что в определении on-shell функции Грина эти операторы можно заменить на операторы  $A'_i = \int \alpha(\mathbf{x}, t) A_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$ , которые осуществляют сглаживание. Легко проверить, что при этом не меняются нормированные on-shell функции Грина. Это первое замечание. А второе замечание состоит в том, что  $A'_i$  можно считать хорошими операторами. Дело в том, что я могу взять  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  таким образом, чтобы носитель ее преобразования Фурье  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, \omega)$  не пересекался с многочастичным спектром и не содержал нуля. (Я предполагаю, что одночастичный спектр не пересекается с многочастичным спектром.) При этом я автоматически получу хороший оператор.

Действительно, оператор  $\hat{\alpha}$  осуществляет умножение на  $\alpha$  в  $(\mathbf{p}, \omega)$ -представлении. (Я уже говорил, что переход к сглаженному оператору описывается сверткой. А в  $(\mathbf{p}, \epsilon)$ -представлении свертка превращается в умножение.) Если рассмотреть спектр операторов энергии и импульса, то умножение на функцию в  $(\mathbf{p}, \epsilon)$ -представлении убивает все точки спектра, где эта функция обращается в ноль. Функция, которую я рассматриваю, убивает многочастичный спектр, и у меня получается, хороший оператор.

## 9 Лекция 9

### 9.1 Обобщенные функции Грина

В этой лекции я буду рассматривать обобщенные функции Грина. Эти функции естественно появляются в формализме L-функционалов, в формализме Келдыша, а также и в других формализмах. Я хочу показать как инклюзивная матрица рассеяния выражается через обобщенные функции Грина. Для этого я заново докажу формулу Лемана, Симанчика и Циммермана (LSZ), но доказательство проведу по-другому. Я покажу как через обычные функции Грина выражается обычная матрица рассеяния, но доказательства будут построены так, чтобы было ясно, что их можно повторить и для обобщенных функций Грина.

Мои рассуждения во многом повторяют уже приведенные на прошлых лекциях, но я постараюсь сделать так, чтобы эта лекция не зависела от двух предыдущих лекций.

Я немного изменю обозначения. Временную переменную я буду обозначать буквой  $\tau$  и писать  $B(\tau, \mathbf{x})$  вместо  $B(\mathbf{x}, \tau)$ . Состояние  $\omega$ , как и раньше, будет предполагаться трансляционно инвариантным и стационарным, соответствующий вектор в предгильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  будет обозначаться  $\theta$ .

Обычная функция Грина в состоянии  $\omega$  — это среднее значение произведения операторов  $B_i \in \mathcal{A}$ :

$$N = T(B_1(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots B_n(\tau_n, \mathbf{x}_n)),$$

стоящих в порядке уменьшения времени (хронологического произведения). В обобщенной функции Грина

$$G_{n'n} = \omega(MN)$$

есть как хронологическое произведение  $N$ , в котором времена уменьшаются, так и антихронологическое произведение

$$M = T^{opp}(B_1^*(\tau'_1, \mathbf{x}'_1) \dots B_{n'}^*(\tau'_{n'}, \mathbf{x}'_{n'})),$$

в котором времена увеличиваются. Я докажу, что инклюзивная матрица рассеяния выражается через асимптотическое поведение обобщенных функций Грина в представлении, когда аргументами являются импульс и время. Я объяснял уже, что по общим свойствам преобразования Фурье это означает, что инклюзивная матрица рассеяния выражается через полюса обобщенных функций Грина, где аргументами являются энергия и импульс. Точнее говоря, она совпадает с нормализованной обобщенной функцией Грина on-shell.

### 9.2 Матрица Мёллера

Я ограничиваюсь случаем, когда есть только один тип частиц. Иными словами, рассматривается обобщенная векторная функция  $\Phi(\mathbf{p})$ , являющаяся собственной, как для оператора энергии, так и для оператора импульса:

$$H\Phi(\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p})\Phi(\mathbf{p}), \quad \mathbf{P}\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\Phi(\mathbf{p}). \quad (72)$$

(Здесь можно добавить отвечающий типу частиц индекс, и тогда это будет общий случай.)

Еще одно определение, которое я буду использовать — это определение гладкого оператора. Я говорю, что оператор  $\hat{B}$ , который задается формулой

$$\hat{B} = \int d\tau d\mathbf{x} \alpha(\tau, \mathbf{x}) \hat{A}(\tau, \mathbf{x}), \quad \alpha \in \mathcal{S},$$

это гладкий оператор, если  $\alpha$  принадлежит пространству быстро убывающих гладких функций  $\mathcal{S}$ . Если произвести сдвиг в пространстве и времени,

$$\hat{B}(\tau, \mathbf{x}) = \int d\tau' d\mathbf{x}' \alpha(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{A}(\tau', \mathbf{x}'),$$

получится гладкая функция от  $\tau$  и  $\mathbf{x}$ , так как свертку можно дифференцировать под знаком интеграла. Это важно: мне придется дифференцировать, и поэтому я требую, чтобы все рассматриваемые операторы были гладкими.

Для оператора  $\hat{B}(\tau, \mathbf{x})$  можно взять преобразование Фурье:

$$\hat{B}(\tau, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \hat{B}(\tau, \mathbf{p}).$$

Возникает вопрос о существовании преобразования Фурье, но всегда можно рассматривать  $\hat{B}(\tau, \mathbf{p})$  в смысле обобщенных функций. (Точнее, этот оператор нужно рассматривать как обычную функцию по  $\tau$  и обобщенную по  $\mathbf{p}$ .)

Исходным пунктом теории было трансляционно инвариантное стационарное состояние  $\omega$ , к которому может быть применена конструкция Гельфанда, Наймарка и Сигала (GNS). Эта конструкция дает предгильбертово пространство  $\mathcal{H}$ , в котором лежат одночастичные физические состояния  $\int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \Phi(\mathbf{p})$ . Я потребую, чтобы оператор  $\hat{B}$  переводил состояние  $\theta$  (которое отвечает  $\omega$  в пространстве  $\mathcal{H}$ ) в одночастичное пространство:

$$\hat{B}\theta = \int d\mathbf{p} \phi(\mathbf{p}) \Phi(\mathbf{p}).$$

Я потребую также, чтобы волновая функция частицы  $\phi(\mathbf{p})$  не обращалась в ноль. (Это не обязательно, но для упрощения я хочу это потребовать.) Тогда я буду говорить, что оператор  $\hat{B}$  хороший. (Мне важно, чтобы хороший оператор был гладким, но я уже сказал, что все операторы предполагаю гладкими.)

Как уже было сказано, любой оператор, в том числе и хороший, можно сдвигать по  $\mathbf{x}$  и  $\tau$ . При сдвиге состояния по времени оно умножается на экспоненту от  $-iH\tau$ , а по пространству — на экспоненту от  $i\mathbf{P}\mathbf{x}$ , поэтому, действуя оператором  $\hat{B}(\tau, \mathbf{x})$  на  $\theta$ , мы снова получим одночастичное состояние, только с некоторыми множителями:

$$\hat{B}(\tau, \mathbf{x})\theta = \int d\mathbf{p} e^{-i\epsilon(\mathbf{p})\tau} e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}} \phi(\mathbf{p}) \Phi(\mathbf{p}).$$

Если сделать преобразование Фурье только по  $\mathbf{p}$ , это выражение преобразуется следующим образом:

$$\hat{B}(\tau, \mathbf{p})\theta = e^{-i\epsilon(\mathbf{p})\tau} \phi(\mathbf{p}) \Phi(\mathbf{p}).$$

Удобно ввести обозначение:

$$B(\mathbf{p}, \tau) = e^{i\epsilon(\mathbf{p})\tau} \hat{B}(\tau, \mathbf{p}),$$

где  $\epsilon(\mathbf{p})$  — это закон дисперсии для рассматриваемой частицы. Здесь поменялись местами  $\mathbf{p}$  и  $\tau$ . Если рассматривать действие оператора  $B(\mathbf{p}, \tau)$  на  $\theta$ , экспонента сократится и получится выражение независящее от  $\tau$ :

$$B(\mathbf{p}, \tau)\theta = \phi(\mathbf{p}) \Phi(\mathbf{p}).$$

Теперь все это можно усреднить с какой-то гладкой функцией  $f(\mathbf{p})$ , имеющей компактный носитель:  $B(f) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \hat{B}(0, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{x} \tilde{f}(\mathbf{x}) \hat{B}(0, \mathbf{x})$ . После сдвига по  $\tau$  это выражение преобразуется в следующее:

$$B(f, \tau) = T_\tau B(T_{-\tau} f) T_{-\tau} = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) B(\mathbf{p}, \tau).$$

Очевидно, что  $B(f, \tau)\theta$  не зависит от  $\tau$ . Иными словами, выполняется условие

$$\dot{B}(f, \tau)\theta = 0.$$

Это – то, с чем я буду работать.

Следующие выражения для вектора  $n$ -частичного состояния

$$\Psi(\tau) = \Psi(f_1, \dots, f_n | \tau) = B_1(f_1, \tau) \dots B_n(f_n, \tau)\theta, \quad (73)$$

$$\Psi(f_1, \dots, f_n | \pm \infty) = \lim_{\tau \rightarrow \pm \infty} \Psi(f_1, \dots, f_n | \tau) \quad (74)$$

повторяют то, что было представлено на прошлой лекции, но здесь опущен индекс, описывающий тип частиц, и считается, что все операторы  $B_i$  хорошие. (Как мы увидим, последнее требование можно ослабить.)

Теперь определим понятие in-состояния, устремляя  $\tau \rightarrow -\infty$ , и аналогично определим out-состояние, устремляя  $\tau \rightarrow +\infty$  (предел берется в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ ). Эти пределы описывают процесс рассеяния. Они существуют при некоторых условиях. Самое простое – потребовать, чтобы коммутаторы операторов  $B_k$  и  $\dot{B}_j$  (где точка обозначает дифференцирование по  $\tau$ ) вне зависимости от выбора операторов  $B_1, \dots, B_n$  стремились к нулю достаточно быстро при  $\tau \rightarrow \pm \infty$  :

$$||[\dot{B}_k(f_k, \tau), B_l(f_l, \tau)]|| \leq \frac{C_a}{1 + |\tau|^a}, \quad (75)$$

где  $a > 1$ . (Достаточно потребовать, чтобы интеграл по  $\tau$  от левой части сходил к нулю абсолютно.) Если это условие выполнено, то предел (74) существует.

Вкратце я воспроизведу доказательство, изложенное на прошлой лекции. Достаточно в выражении (73) продифференцировать  $\Psi(\tau)$  по времени, при этом по правилу Лейбница образуется  $n$  слагаемых, каждое из которых содержит производную  $\dot{B}_i$ . Все замечательно в том случае, когда эта производная стоит на самом последнем месте: примененная к  $\theta$  она дает ноль. Если производная стоит не на последнем месте, то благодаря условиям на коммутаторы (75) можно переставить ее на последнее место и получить ноль, но при этом нужно заплатить коммутаторами, которые становятся малыми при  $\tau \rightarrow \infty$ . В таком случае разность  $\Psi(\tau_1) - \Psi(\tau_2)$ , представляемая в виде интеграла от производной от  $\dot{\Psi}(\tau)$ , становится мала при  $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \infty$ ; в силу полноты гильбертова пространства можно применить признак Коши для обоснования существования предела (74).

Данное рассуждение во многом повторяет то, что уже было на прошлой лекции. Оно еще будет применяться неоднократно. Основное в нем – малость коммутатора. Для того чтобы проверить утверждение (75), говорящее, что встречающиеся в выражении (73) операторы почти коммутируют при больших  $\tau$ , нужно, во-первых, предположить асимптотическую коммутативность (о которой я буду говорить немножко позже) и, во-вторых, предположить, что фигурирующие в формуле (75) функции  $f_k(\mathbf{p})$  не перекрываются. Напомню, что когда мы рассматривали поведение волновой функции  $f_k$  в зависимости от  $\tau$ , мы видели, что при эволюции в  $x$ -пространстве важную роль играет множество возможных скоростей  $U_{f_k}$ . (Определяя множество  $U_f$  мы берем градиент от закона дисперсии  $\mathbf{v} = \nabla \epsilon(\mathbf{p})$  в тех точках, где  $f(\mathbf{p}) \neq 0$ .) После этого берем замыкания  $\bar{U}_{f_k}$  и требуем, чтобы эти множества не перекрывались. Грубо говоря, это означает, что частицы движутся в разных направлениях и существенные носители волновых функций в координатном пространстве далеко отстоят друг от друга. Это условие я буду все время накладывать. (Оно выполнено не всегда, но я требую, чтобы оно было выполнено для семейств функций  $f_1, \dots, f_n$ , принадлежащих всюду плотному подмножеству пространства  $\mathcal{S}^n$ .) Если наложить условие асимптотической коммутативности, из него вытекает малость коммутаторов.

Условие асимптотической коммутативности, прежде всего, означает, что коммутатор операторов  $B_k$  при одном и том же времени, но в далеко отстоящих пространственных точках будет мал. Условие малости можно варьировать, но как минимум мне нужно, чтобы этот коммутатор был мал в следующем смысле:

$$\|[\hat{B}_k(\tau, \mathbf{x}), \hat{B}_l(\tau, \mathbf{x}')]\| < \frac{C_a}{1 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^a}, \quad (76)$$

где  $a > 1$ . Это условие должно быть выполнено не только для самих операторов, но и для их производных по времени и по пространству. Данный вариант несколько отличается от приведенного на прошлой лекции — мне так удобнее.

Вспомним теперь, что все операторы  $\hat{B}_k$  гладкие, то есть их можно получать путем сглаживания некоторых операторов  $\hat{B}_k = \int g_k(t, \mathbf{x}) \hat{A}_k(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt$ , где  $g_k \in \mathcal{S}$ . На операторы  $\hat{A}_k$  можно наложить условие сильной асимптотической коммутативности:

$$\|[\hat{A}_k(t, \mathbf{x}), \hat{A}_l(t', \mathbf{x}')]\| < \frac{C_a(t - t')}{1 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^a}. \quad (77)$$

Это значит, что мы требуем, чтобы коммутаторы убывали быстрее любой степени, когда пространственное расстояние стремится к бесконечности. В числителе должна стоять полиномиальная функция  $C_a(t)$ . В таком случае условия на производные накладывать не надо — они выводятся из приведенного условия.

Для того чтобы вывести условие (76) из сильной асимптотической коммутативности, достаточно заметить, что его можно свести к интегралу от выражения, включающего произведение функций  $f_k$  с различными индексами, у которых существенные носители далеки друг от друга. Эти интегралы будут малы потому, что при далеких операторах коммутаторы стремятся к нулю быстрее любой степени. Сделать оценку в этом случае очень просто.

Можно ожидать, что сильная асимптотическая коммутативность имеет место в том случае, когда в спектре гамильтониана есть щель, то есть, спектр принадлежит лучу  $(\epsilon, +\infty)$ , начинающемуся при каком-то положительном значении  $\epsilon > 0$ . В случае релятивистской теории это отвечает случаю, когда все частицы имеют массу. Когда же масса нулевая, сильной асимптотической коммутативности не будет, но более слабые условия ( $a > 1$ ) выполняются в конформных теориях, где все аномальные размерности  $> \frac{1}{2}$ .

Я определю понятие матрицы Мёллера следующим образом. Я введу понятие асимптотического пространства. Асимптотическое пространство  $\mathcal{H}_{as}$  определяется как гильбертово пространство, в котором действует фоковское представление канонических коммутационных соотношений:

$$[a(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] = [a^+(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')] = 0.$$

(Я работаю с импульсными переменными.) Вместо того, чтобы рассматривать операторные обобщенные функции  $a(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')$ , можно рассматривать операторы  $a(f) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}), a^+(f) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) a^+(\mathbf{p})$ , где  $f \in \mathfrak{h}$ . В фоковском пространстве есть операторы сдвига по пространству и сдвига по времени — это очевидно, если вспомнить, что это пространство может быть представлено как пополнение прямой суммы симметрических степеней элементарного пространства  $\mathfrak{h}$ . Матрицы Мёллера определим как отображения  $S_{\pm} : \mathcal{H}_{as} \rightarrow \mathcal{H}$  из асимптотического пространства  $\mathcal{H}_{as}$  в  $\mathcal{H}$  (в пополнение пространства GNS). Здесь нельзя ограничиваться предгильбертовым пространством — нужно рассматривать все гильбертово пространство. Это отображение определяется следующим образом:

$$\Psi(f_1, \dots, f_n | \pm \infty) = S_{\pm}(a^+(g_1) \dots a^+(g_n) | 0). \quad (78)$$



В левой части этой формулы стоит in-состояние — это асимптотическое состояние, зависящее от функций  $f_i$ . Я хочу интерпретировать их как волновые функции частиц, но для этого должно выполняться условие, чтобы одночастичное состояние в асимптотическом пространстве  $\mathcal{H}_{as}$  переходило в одночастичное состояние в пространстве  $\tilde{\mathcal{H}}$  с той же волновой функцией. Чтобы это было выполнено, нужно наложить условие, чтобы функции  $f_i$  и  $g_i$  асимптотически были связаны между собой соотношением  $f_i = g_i \phi_i^{-1}$ , где, напомню,  $\phi_i \neq 0$  ни в одной точке.

Из формулы (78) могут быть выведены различные свойства матрицы Мёллера. Одно из них заключается в том, что матрица Мёллера коммутирует с операторами пространственных и временных сдвигов. Это почти сразу следует из определений. Если рассматривать эволюцию во времени in-состояния, определяемого выражением (74), то ее можно свести к эволюции входящих в это выражение функций  $f_i$ . Это в точности означает, что асимптотическая динамика in-состояния  $\Psi$  сводится к динамике функций  $f_i$ .

Покажем, что формула (78) определяет матрицу Мёллера как изометричное отображение  $S_{\pm} : \mathcal{H}_{as} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ .

Прежде всего докажем, что матрицы Мёллера не зависят от выбора хороших операторов  $B$ . Напомню, что операторы  $B$  в формуле (73) можно взять различными. Изменим один из этих операторов — тот оператор  $B_n$ , который стоит на последнем месте (заменяем его другим хорошим оператором), оставляя функцию  $f_n$  неизменной. Легко видеть, что при этом ничего не изменяется, потому что изменение последнего оператора сводится к изменению одночастичного состояния. То, как меняется одночастичное состояние, должно быть согласованно в асимптотическом пространстве  $\mathcal{H}_{as}$  и в пространстве  $\tilde{\mathcal{H}}$ , поэтому изменение последнего оператора ничего не меняет.

Теперь изменим первый оператор. Поскольку по причине асимптотической коммутативности операторы  $B_i$  имеют исчезающе малые коммутаторы, я могу оператор  $B_1$  переставить на последнее место. За это нужно заплатить коммутаторами, но в пределе это ничего не меняет. После перестановки этого оператора, так же как и любого другого, на последнее место можно применить предыдущие рассуждения. Это доказывает, что матрица Мёллера не зависит от выбора операторов  $B_i$ , использовавшихся в определении (73).

Для того, чтобы матрица Мёллера была хорошо определена, в формуле (78) должна быть симметрия по отношению к переменным  $g_i$ . Эта симметрия присутствует, потому что коммутаторы малы и есть возможность переставлять операторы  $a^+(g_i)$  (если есть сильная асимптотическая коммутативность и мы имеем дело с неперекрывающимися функциями).

Если кроме асимптотической коммутативности наложить требование распада корреляций (кластеризации), то можно доказать, что матрицы Мёллера изометричны. Они, напомню, были определены только для набора неперекрывающихся функций, но, раз они изометричны, то это ограниченные операторы. Их можно распространить на все гильбертово пространство и поэтому операторы  $S_{\pm}$ , представляя собой изометрические вложения асимптотического пространства  $\mathcal{H}_{as}$  в пополненное пространство  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Из изометричности следует, в частности, что матрицы Мёллера не зависят от случайностей построения (изометрический оператор не может быть многозначным).

Все перечисленные доказательства можно провести, не применяя свойства асимптотической коммутативности, а используя только свойство кластеризации, но с асимптотической коммутативностью все выглядит намного более понятно.

### 9.3 Матрица рассеяния. Формула LSZ

Теперь я хочу определить понятие матрицы рассеяния. Это разумно, если в теории есть интерпретация в терминах частиц, что подразумевает, что матрицы Мёллера являются не только изометричными, но и унитарными операторами. В этом случае они определяют изоморфизм асимптотического пространства  $\mathcal{H}_{as}$  и пространства  $\bar{\mathcal{H}}$ . Это означает, грубо говоря, что любое (или почти любое) состояние с течением времени распадается на частицы. (Что-то похожее возникало при обсуждении солитонов.)

Перейдем теперь к вычислению матричных элементов матрицы рассеяния. Пусть имеются какое-то начальное состояние и конечное состояние, которые обозначаются, соответственно, буквами  $i$  и  $f$ . Матрица рассеяния определяется формулой  $S = S_+^* S_-$ . Обращаю внимание на то, что  $S_-$  задает отображение  $\mathcal{H}_{as} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$ , а  $S_+^*$  действует в противоположном направлении, и поэтому матрица рассеяния — это оператор в асимптотическом пространстве. Я должен брать ее матричные элементы между состояниями в асимптотическом пространстве:  $\langle f|S|i\rangle = \langle f|S_+^* S_-|i\rangle$ .

Рассмотрим состояния в асимптотическом пространстве, которые получаются из фоковского вакуума с помощью применения некоторого количества операторов  $a^+$ :

$$|i\rangle = a^+(g_1)\dots a^+(g_n)|0\rangle, \quad |f\rangle = a^+(g'_1)\dots a^+(g'_m)|0\rangle.$$

Выражая матричный элемент через операторы  $B$ , мы приходим к следующей формуле:

$$\langle f|S|i\rangle = \lim_{\substack{\tau'_k \rightarrow +\infty, \\ \tau_j \rightarrow -\infty}} \langle \theta|B_m^*(f'_m, \tau'_m)\dots B_1^*(f'_1, \tau'_1)B_1(f_1, \tau_1)\dots B_n(f_n, \tau_n)|\theta\rangle, \quad (79)$$

где  $f_j = g_j \phi_j^{-1}$ ,  $f'_k = g'_k \phi'_k{}^{-1}$ . Здесь использованы формулы (73), (74) с небольшой поправкой. Раньше при определении in-вектора считалось, что все времена в формуле (73) одинаковы. Этого достаточно для определения матрицы Мёллера, но здесь удобно (хотя и не обязательно) считать, что времена разные, но все стремятся, соответственно, к плюс или минус бесконечности — предел при этом не изменится. Доказательство этого может быть легко получено, но я его проводить не буду.

Очень важное наблюдение заключается в том, что в формуле (79) можно все времена упорядочить в порядке убывания. Ясно, что  $\tau'$  я могу считать большим, чем  $\tau$ , потому что  $\tau' \rightarrow +\infty$ , а  $\tau \rightarrow -\infty$ . Если же брать два времени  $\tau_{i1}, \tau_{i2}$ , то коммутатор соответствующих операторов исчезающе мал, поскольку соответствующие функции  $f_{i1}, f_{i2}$  не перекрываются. В таком случае я могу поставить операторы в порядке убывания времен и считать, что здесь появляется хронологическое произведение или, иными словами, появляется функция Грина.

Для того же, чтобы все было более аккуратно, я перейду к стандартному обобщенному базису  $|i\rangle = |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$ ,  $|f\rangle = |\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_m\rangle$ . Собственно говоря, в физике матричные элементы матрицы рассеяния нужно брать именно в таком базисе, в котором имеются частицы с заданными импульсами. Перепишем теперь формулу (79) в этом базисе. Стоящие в этой формуле операторы могут быть представлены в виде  $B(f, \tau) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p})B(\mathbf{p}, \tau)$ . С другой стороны, напомним, что у оператора  $B(\mathbf{p}, \tau)$  можно поменять местами аргументы, и за это заплатить экспонентой  $B(\mathbf{p}, \tau) = e^{i\epsilon(\mathbf{p})\tau} \hat{B}(\tau, \mathbf{p})$ .

В результате для матричного элемента в импульсном базисе получается следующее выражение:

$$\langle f|S|i\rangle = \lim_{\substack{\tau'_k \rightarrow +\infty, \\ \tau_j \rightarrow -\infty}} \omega\left(\prod e^{-i\epsilon(\mathbf{p}'_k)\tau'_k} (\phi'_k)^{-1} \hat{B}_k^*(\tau'_k, \mathbf{p}'_k) \prod e^{i\epsilon(\mathbf{p}_j)\tau_j} (\phi_j)^{-1} \hat{B}_j(\tau_j, \mathbf{p}_j)\right).$$

Если в этой формуле вынести численные множители за знак (линейного) функционала  $\omega$ , останется только  $\omega(\prod \hat{B}'_k(\tau'_k, \mathbf{p}'_k) \hat{B}_j(\tau_j, \mathbf{p}_j))$  и можно считать, что времена упорядочены, то есть, появляется функция Грина. Это — то, что мне было нужно.

Полученное выражение будет иметь некоторый предел, и это означает, что матрица рассеяния выражена через асимптотику функции Грина в  $(\tau, \mathbf{p})$ -представлении. Как уже объяснялось, асимптотика в  $(\epsilon, \mathbf{p})$ -представлении определяется полюсами по энергетической переменной. Это (для хороших операторов) — в точности то, что есть в формуле LSZ.

Матрицы Мёллера коммутируют со сдвигами по времени и пространству и, следовательно, с операторами энергии и импульса. Если теория имеет интерпретацию в терминах частиц, то в пространстве  $\bar{\mathcal{H}}$  совместный спектр  $\hat{H}$  и  $\hat{\mathbf{P}}$  совпадает со спектром свободного бозона, поскольку должны выполняться соотношения:

$$a_{out}^+(f)S_+ = S_+a^+(f), \quad a_{out}^+(g) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} B(f, \tau),$$

где  $g = f\phi$ ,  $B\theta = \Phi(\phi)$ .

В доказательстве существования предела, определяющего in- (out)-состояние, предположение о том, что  $\hat{B}_j$  являются хорошими операторами, использовалось только для вывода утверждения, что  $\hat{B}_j(f, \tau)\theta = 0$ . Если теория имеет интерпретацию в терминах частиц, можно доказать существование предела для любых гладких операторов  $\hat{B}_j$ .

Будем предполагать, что проекция  $\hat{B}_j\theta$  на одночастичное пространство имеет вид  $\Phi(\phi_j)$ , где функция  $\phi_j$  не обращающаяся в ноль. Асимптотическая коммутативность позволяет переместить множитель с производной по времени вправо. Докажем, что полученное выражение мало для большого  $\tau$  (достаточно доказать, что это — суммируемая функция от  $\tau$ ).

Я не предполагаю, что  $\hat{B}_j\theta$ , лежит в одночастичном пространстве, но мне важно, чтобы при проектировании на одночастичное пространство получалось  $\Phi(\phi_j)$ , где  $\phi_j$  — не обращающиеся в 0 функции. В то время как для хорошего оператора требовалось, чтобы это выражение было равно одночастичному состоянию, здесь требуется только чтобы таковой была проекция. Все будет хорошо, если только выполняется условие  $\hat{B}_j(f, \tau)\theta \rightarrow 0$ . Перейдем теперь к выводу этого условия.

Если есть представление в терминах частиц, любой вектор можно разложить по векторам  $a_{in}^+(\mathbf{p}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{p}_r)\theta$ . (Я мог бы это сделать в асимптотическом пространстве  $\bar{\mathcal{H}}_{\perp} f$ , и тогда у меня не было бы индекса  $in$ .) Само пространство  $\bar{\mathcal{H}}$  изоморфно асимптотическому, если есть интерпретация в терминах частиц. В таком случае имеет место следующее разложение (справедливое для любого вектора):

$$\sum_{r \geq 0} \int d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_r c_r(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r) a_{in}^+(\mathbf{p}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{p}_r) \theta.$$

Если оператор  $\hat{B}_j$  гладкий, то функции  $c_r(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r)$  для  $\hat{B}_j\theta$  также будут гладкими ( $c_r \in \mathcal{S}$ ). Это легко понять, так как гладкость оператора  $\hat{B}_j$  подразумевает усреднение и, соответственно, функция  $c_r$  представляется интегралом, позволяющим доказать гладкость. Для простоты формул предположим, что для среднего значения от гладкого оператора  $\hat{B}_j$  выполняется условие  $\langle \theta | \hat{B}_j | \theta \rangle = 0$ . Тогда мы можем представить  $\hat{B}_j(f, \tau)\theta$  в виде

$$\hat{B}_j(f, \tau)\theta = \int d\mathbf{p} \phi_j(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) a_{in}^+(\mathbf{p}) \theta + \sum_{r \geq 2} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_r e^{-i\tau(\epsilon(\mathbf{p}_1) + \dots + \epsilon(\mathbf{p}_r) - \epsilon(\mathbf{p}))} c_r(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r) f(\mathbf{p}) a_{in}^+(\mathbf{p}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{p}_r) \theta.$$

В этой формуле суммирование должно быть по всем  $r$ , но при  $r = 1$  в экспоненте происходит сокращение, и зависимость от времени исчезает. По этой причине выделено суммирование по  $r \geq 2$ , а случай  $r = 1$  соответствует одночастичному состоянию, для которого ответ известен, и он здесь представлен. Самое важное состоит в том, что при  $\tau \rightarrow \infty$  у слагаемых, для которых  $r \geq 2$  в экспоненте стоит большой показатель, в то время как  $c_r(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r)$  — хорошая гладкая функция.

После дифференцирования по  $\tau$  показатель в экспоненте останется и при этом возникнет некий множитель, который будет подавлен экспонентой, а так как  $c_r$  — хорошая функция и показатель в экспоненте большой, то в пределе  $\tau \rightarrow \infty$  вклад таких слагаемых исчезает.

Таким образом, формула LSZ доказана не только для хороших операторов, но и для всех гладких операторов. (Практически все операторы, что встречается в физике, являются гладкими.) На этом и завершается доказательство формулы LSZ.

## 9.4 Инклюзивная матрица рассеяния

Теперь я хочу применить полученные результаты для того, чтобы выразить инклюзивную матрицу рассеяния в терминах обобщенных функций Грина. Для этого я буду рассматривать in-состояния. Ранее я их рассматривал как векторы в гильбертовом пространстве, но теперь я их буду рассматривать как состояния в смысле алгебраического подхода. Такие состояния — это положительные функционалы на алгебре, и у меня есть связь этих функционалов с векторами. Если я применяю некоторый оператор, например  $B(f, \tau)$  в гильбертовом пространстве, то в пространстве состояний я должен применять оператор вида  $L(g, \tau) = \tilde{B}(f, \tau)B(f, \tau)$ , где  $f = g\phi^{-1}$ . (Напоминаю, что элемент алгебры определяет два оператора на функционалах: я могу либо умножать аргумент справа, либо умножать аргумент слева. В последнем случае берется сопряженный оператор.)

В терминах таких операторов in-состояние, рассматриваемое как положительный функционал, может быть записано в следующем виде:

$$\nu = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} L(g_1, \tau) \dots L(g_n, \tau) \omega.$$

Теперь рассмотрим следующее выражение:

$$\langle 1 | L(g'_1, \tau') \dots L(g'_{n'}, \tau') L(g_1, \tau) \dots L(g_n, \tau) | \omega \rangle.$$

В правой части формулы я, подействовав операторами  $L$ , получил in-состояние при  $\tau \rightarrow -\infty$ , а в левой части вычисляю какие-то значения при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Это как раз то, что делается при рассмотрении инклюзивных матриц рассеяния. Я рассматриваю in-состояние и вычисляю что-то при больших временах. Можно доказать существование предела  $Q$  этого выражения при  $\tau' \rightarrow +\infty, \tau \rightarrow -\infty$  в предположении, что все функции  $g'_i$  и  $g_j$  не перекрываются:

$$Q = \lim_{\tau' \rightarrow +\infty} \langle 1 | L(g'_1, \tau') \dots L(g'_{n'}, \tau') \nu \rangle.$$

(Напомню, что асимптотическая коммутативность у меня всегда предполагается.)

Используя соотношение  $\langle 1 | \sigma \rangle = \sigma(1)$  и формулу  $\lim_{\tau' \rightarrow +\infty} B(f, \tau') = a_{out}^+(g)$ , полученную на одной из предыдущих лекций, мы приходим к следующему выражению:

$$Q = \nu(a_{out}(g'_{n'}) \dots a_{out}(g'_1) a_{out}^+(g_1) \dots a_{out}^+(g_n)).$$

Через определенное таким образом выражение  $Q = Q(g'_1, \dots, g'_{n'}, g_1, \dots, g_n)$  можно вычислить инклюзивные сечения. Я назову это выражение инклюзивной матрицей

рассеяния. Здесь есть проблема, связанная с тем, что это нелинейное выражение по  $g$  и  $g'$  — это квадратичное (точнее, эрмитово) выражение. Всякое квадратичное выражение можно заменить билинейной формой, а эрмитово выражение можно заменить полуторалинейной формой — по одной переменной она будет линейной, по другой — антилинейной.

Для того, чтобы получить выражение, которое будет линейным (или где-то антилинейным), я введу обозначение  $L(\tilde{g}, g, \tau) = \tilde{B}(\tilde{f}, \tau)B(f, \tau)$ . Тут разведены переменные  $f$  и  $\tilde{f}$ , и теперь то, что раньше рассматривалось как эрмитово выражение, будет рассматриваться как полуторалинейное выражение от удвоенного числа переменных:

$$\rho(\tilde{g}'_1, g'_1, \dots, \tilde{g}'_{n'}, g'_{n'}, \tilde{g}_1, g_1, \dots, \tilde{g}_n, g_n) = \lim_{\substack{\tau' \rightarrow +\infty, \\ \tau \rightarrow -\infty}} \langle 1 | L(\tilde{g}'_1, g'_1, \tau') \dots L(\tilde{g}'_{n'}, g'_{n'}, \tau') L(\tilde{g}_1, g_1, \tau) \dots L(\tilde{g}_n, g_n, \tau) | \omega \rangle.$$

Это выражение тоже будет называться инклюзивной матрицей рассеяния и его я буду выражать через обобщенные функции Грина. Расписав его, приходим к формуле

$$\rho(\tilde{g}'_1, g'_1, \dots, \tilde{g}'_{n'}, g'_{n'}, \tilde{g}_1, g_1, \dots, \tilde{g}_n, g_n) = \lim_{\substack{\tau' \rightarrow +\infty, \\ \tau \rightarrow -\infty}} \langle 1 | B(f'_1, \tau') \dots B(f'_{n'}, \tau') \tilde{B}(\tilde{f}'_{n'}, \tau') \tilde{B}(\tilde{f}'_1, \tau') \times B(f_1, \tau) \dots B(f_n, \tau) \tilde{B}(\tilde{f}_n, \tau) \dots \tilde{B}(\tilde{f}_1, \tau) | \omega \rangle.$$

Мне удобнее пользоваться несколько более общей формулой

$$\rho(\tilde{g}'_1, g'_1, \dots, \tilde{g}'_{n'}, g'_{n'}, \tilde{g}_1, g_1, \dots, \tilde{g}_n, g_n) = \lim_{\substack{\tau'_j, \tilde{\tau}'_j \rightarrow +\infty, \\ \tau_i, \tilde{\tau}_i \rightarrow -\infty}} \langle 1 | B(f'_1, \tau'_1) \dots B(f'_{n'}, \tau'_{n'}) \tilde{B}(\tilde{f}'_{n'}, \tilde{\tau}'_{n'}) \tilde{B}(\tilde{f}'_1, \tilde{\tau}'_1) \times B(f_1, \tau_1) \dots B(f_n, \tau_n) \tilde{B}(\tilde{f}_n, \tilde{\tau}_n) \dots \tilde{B}(\tilde{f}_1, \tilde{\tau}_1) | \omega \rangle.$$

Мы можем считать, что в этом выражении времена упорядочены. (Часть времен стремится к  $+\infty$ , другая часть к  $-\infty$ . Внутри каждой группы в силу асимптотической коммутативности мы можем переставлять множители в любом порядке, в частности, в порядке убывания времен.) Применив формулу (36) мы видим, что то, что стоит под знаком предела, можно выразить через обобщенную функцию Грина. Инклюзивная матрица рассеяния выражается через временную асимптотику этой функции. Такие же рассуждения были раньше для обычной матрицы рассеяния, только число аргументов удвоилось.

## 10 Лекция 10

### 10.1 Удаление лишних состояний

В этой лекции я собираюсь рассказать о том, как можно представить квантовую механику как классическую механику, в которой мы имеем возможность измерять только часть наблюдаемых. С точки зрения физики это вполне естественно. Наши приборы позволяют измерять какие-то наблюдаемые, но не исключено, что могут появиться какие-то более совершенные приборы, позволяющие измерять и другие вещи.

Я буду исходить из геометрического подхода к квантовой теории. В геометрическом подходе, описывая физическую теорию, мы начинаем с множества состояний, представляющего собой ограниченное выпуклое множество  $\mathcal{C}_0$ -подмножество топологического векторного пространства  $\mathcal{L}$ . Операторы эволюции должны принадлежать некоторой группе  $\mathcal{V}$ , которая состоит из автоморфизмов пространства состояний  $\mathcal{C}_0$  (либо все автоморфизмы, либо часть их). Оператор эволюции  $\sigma_A(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\sigma_A(t)}{dt} = A\sigma_A(t), \quad (80)$$

где  $A \in \text{Lie}(\mathcal{V})$  — это элемент алгебры Ли группы  $\mathcal{V}$  (“гамильтониан”). Это уравнение должно иметь решение (то есть “гамильтониан” должен порождать однопараметрическую подгруппу  $\sigma_A(t)$  группы  $\mathcal{V}$ ). Хотелось бы сказать, что “гамильтонианы” — это и есть наблюдаемые в геометрическом подходе, но наблюдаемые должны давать какие-то числа, и поэтому я буду говорить, что наблюдаемая — это пара  $(A, a)$ , где  $A \in \text{Lie}(\mathcal{V})$  — это “гамильтониан”, а  $a$  — это линейный функционал, инвариантный относительно группы  $\sigma_A(t)$ , порожденной оператором  $A$  (это означает, что удовлетворяется условие  $a(Az) = 0$ ).

В обычной квантовой механике наблюдаемая определяется самосопряженным оператором  $\hat{A}$ , “гамильтониан” действует на матрицы плотности как коммутатор (с точностью до множителя  $i$ ), функционал  $a$  определяется формулой  $a(K) = \text{Tr} \hat{A} K$ .

Группа  $\mathcal{V}$  естественным образом действует на наблюдаемые:  $A$  преобразуется по присоединенному представлению,  $a$  — как функция на  $\mathcal{L}$ .

Теперь исследуем, нет ли в нашей теории лишних состояний? Когда есть два состояния  $x, y \in \mathcal{C}_0$ , такие, что  $a(x) = a(y)$  для всякой наблюдаемой  $(A, a)$ , то мы говорим, что из этих двух состояний можно оставить только одно. Если отождествить те состояния, которые дают один и тот же ответ для всех наблюдаемых, то в результате будет получена новая теория без лишних состояний эквивалентная, по существу, исходной теории.

### 10.2 Квантовая механика из классической механики

Применим эти соображения к случаю, когда в качестве исходной берется классическая теория. В этой теории чистые состояния — это точки фазового пространства (симплектического многообразия)  $M$ . Смешанные состояния — это распределения вероятностей на  $M$ ; каждое смешанное состояние может быть однозначно представлено как смесь чистых состояний. Физические наблюдаемые — это вещественные функции на  $M$ . Наблюдаемая  $a$  задает векторное поле  $A$  на  $M$  как гамильтоново векторное поле с гамильтонианом  $a$ . (Идентифицируя векторное поле с дифференциальным оператором первого порядка, мы можем выразить  $A$  в терминах скобки Пуассона:  $Af = \{a, f\}$ .) Мы предполагаем, что, интегрируя это векторное поле, получаем однопараметрическую группу  $\sigma_A(t)$  канонических преобразований (симплектоморфиз-

мы) многообразия  $M$ . Эта группа действует также и на смешанные состояния, и на наблюдаемые, описывающие временную эволюцию этих объектов. Уравнение движения для плотности распределения вероятностей (уравнение Лиувилля) имеет вид  $\frac{d\rho}{dt} = -\{a, \rho\}$ , а уравнение движения для наблюдаемых имеет вид  $\frac{df}{dt} = \{a, f\}$ .

Предположим, что наши устройства способны видеть только часть наблюдаемых объектов и что множество  $\Lambda$  “наблюдаемых наблюдаемых” представляет собой линейное пространство, замкнутое относительно скобки Пуассона. Будем индексировать это множество элементами алгебры Ли, обозначаемой  $\mathfrak{g}$ . (Отображение  $\gamma \rightarrow a_\gamma$ , переводящее  $\gamma \in \mathfrak{g}$  в  $a_\gamma \in \Lambda$  является изоморфизмом алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  и  $\Lambda$ .)

Гамильтоновы векторные поля  $A_\gamma$  с гамильтонианами  $a_\gamma$  определяют действие алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  на  $M$ . Предположение о том, что векторные поля  $A_\gamma$  генерируют одномерные подгруппы, означает, что это действие индуцируется действием односвязной группы Ли  $G$ , имеющей  $\mathfrak{g}$  в качестве алгебры Ли.

Приведенные выше соображения могут быть применены также и к бесконечномерным симплектическим многообразиям и к бесконечномерным алгебрам и группам Ли. Однако в бесконечномерном случае эти соображения не являются строгими.

Определим отображение моментов  $\mu$  из  $M$  в  $\mathfrak{g}^\vee$  как отображение  $x \rightarrow \mu_x$ , где  $\mu_x(\gamma) = a_\gamma(x)$ . (Здесь  $x \in M$ ,  $\gamma \in \mathfrak{g}$ , а  $\mathfrak{g}^\vee$  обозначает пространство линейных функционалов на  $\mathfrak{g}$ .) Это отображение является  $G$ -эквивариантным относительно коприсоединенного действия  $G$  на  $\mathfrak{g}^\vee$ . (Иными словами оно коммутирует с преобразованиями из группы  $G$ .) Для каждого состояния классической системы (для каждого распределения вероятностей  $\rho$  на  $M$ ) определим точку  $\nu(\rho) \in \mathfrak{g}^\vee$  как интеграл от  $\mu_x$  по  $x \in M$  с мерой  $\rho$ :

$$\nu(\rho) = \int_{x \in M} \mu_x d\rho.$$

Точка  $\nu(\rho)$  принадлежит выпуклой оболочке  $N$  из  $\mu(M)$ . (Выпуклая оболочка подмножества  $E$  топологического векторного пространства определяется как наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее  $E$ .)

Группа  $G$  естественным образом действует на пространстве классических состояний. Из  $G$ -эквивариантности отображения моментов следует, что отображение  $\nu$  является  $G$ -эквивариантным отображением этого пространства в  $\mathfrak{g}^\vee$  с коприсоединенным действием  $G$ .

Будем говорить, что два классических состояния (два распределения вероятностей  $\rho$  и  $\rho'$ ) эквивалентны, если

$$\int_{x \in M} a_\gamma(x) d\rho = \int_{x \in M} a_\gamma(x) d\rho' \quad (81)$$

для каждого  $\gamma \in \mathfrak{g}$ . Другими словами, мы говорим, что два состояния эквивалентны, если вычисления с этими состояниями дают одинаковые результаты для каждого гамильтониана  $a_\gamma$ . (Наши устройства не могут различать эти два состояния.)

Докажем теперь следующее утверждение: *два состояния  $\rho$  и  $\rho'$  эквивалентны тогда и только тогда, когда  $\nu(\rho) = \nu(\rho')$ .*

Сначала заметим, что для каждого  $\gamma \in \mathfrak{g}$

$$\nu(\rho)(\gamma) = \int_{x \in M} \mu_x(\gamma) d\rho = \int_{x \in M} a_\gamma(x) d\rho$$

и точно так же

$$\nu(\rho')(\gamma) = \int_{x \in M} \mu_x(\gamma) d\rho' = \int_{x \in M} a_\gamma(x) d\rho'.$$

В классической теории где допустимы только гамильтонианы из множества  $\Lambda = \{a_\gamma\}$ , где  $\gamma \in \mathfrak{g}$ , должны быть отождествлены эквивалентные состояния (мы исключаем

избыточные состояния). Отображение  $\nu$  индуцирует биективное отображение пространства классов эквивалентности на множество  $N$ , полученное в виде выпуклой оболочки множества  $\mu(M)$  (“квантовые состояния”).  $G$ -эквивариантность отображения  $\nu$  означает, что эволюция классических состояний согласуется с эволюцией квантовых состояний.

Применим теперь наши конструкции к комплексному проективному пространству  $\mathbb{C}\mathbb{P}$ . Мы определяем это пространство как сферу  $\|x\| = 1$  в комплексном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  с отождествлениями  $x \sim \lambda x$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ . Группа  $U$  унитарных операторов действует транзитивно на  $\mathbb{C}\mathbb{P}$ . Существует единственная (с точностью до постоянного множителя)  $U$ -инвариантная симплектическая структура на этом пространстве; это позволяет рассматривать комплексное проективное пространство как однородное симплектическое многообразие.

Предположим, что мы можем наблюдать только гамильтонианы вида  $a_C(x) = \langle x, Cx \rangle$  где  $C$  — самосопряженный оператор. Множество  $\Lambda$  таких гамильтонианов является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Эта алгебра Ли изоморфна алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  самосопряженных операторов, где операция определяется как коммутатор, умноженный на  $i$ . Однопараметрическая группа из унитарных операторов, соответствующих гамильтониану  $a_C$ , задается формулой  $\sigma(t) = e^{-iCt}$ .

Отображение моментов преобразует точку  $x$  в линейный функционал на пространстве самосопряженных операторов, отображающий оператор  $C$  в  $Tr K_x C$ , где  $K_x$  является проекцией  $\mathcal{H}$  на вектор  $x$ , т.е.  $K_x(z) = \langle z, x \rangle x$ . (Напомню, что в наших обозначениях точки комплексного проективного пространства представлены нормированными векторами.) Выпуклая оболочка образа отображения моментов состоит из положительно определенных самосопряженных операторов с единичным следом (т.е. она состоит из матриц плотности).

Мы видим, что, применяя нашу общую конструкцию к комплексному проективному пространству, мы получаем обычную квантовую механику. В этом случае наши соображения близки к “нелинейной квантовой механике” Вайнберга, предложившего рассматривать классическую теорию на  $\mathbb{C}\mathbb{P}$  как деформацию квантовой механики.

Богатый источник примеров описанной ранее конструкции дают орбиты группы  $G$  в коприсоединенном представлении (в пространстве  $\mathfrak{g}^\vee$  двойственном к алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  группы  $G$ ). Эти орбиты играют важную роль в теории представлений. Они являются однородными симплектическими многообразиями. Квантуя их, можно получать унитарные представления группы  $G$ .

Для того чтобы ввести на орбите структуру симплектического многообразия, нужно заметить, что для функций на  $\mathfrak{g}^\vee$  определена скобка Пуассона. (Элементы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  можно рассматривать как линейные функции на  $\mathfrak{g}^\vee$ ; для них скобка Пуассона определяется как операция в алгебре Ли. Пользуясь свойствами скобки Пуассона, можно определить скобку для произвольных гладких функций.) Пространство  $\mathfrak{g}^\vee$  получает структуру Пуассонова многообразия, но это многообразие не является симплектическим, потому что скобка Пуассона вырождена. Ограничивая скобку Пуассона на орбиту, мы получаем невырожденную скобку, определяющую симплектическую структуру.

Элементы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  определяют семейство  $\Lambda$  функций на орбите; мы применим к нему описанную выше конструкцию. Она сильно упрощается, потому что в рассматриваемом случае отображение моментов — это просто вложение орбиты в  $\mathfrak{g}^\vee$ . Мы видим, что считая в классической теории допустимыми только гамильтонианы из семейства  $\Lambda$  мы получаем теорию, в которой множеством состояний является выпуклая оболочка орбиты. Группу  $\mathcal{V}$  можно считать изоморфной группе  $G$ .

Проиллюстрируем приведенные выше конструкции в случае, когда  $G$  является группой  $U$  унитарных преобразований гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ . В этом случае



мы можем идентифицировать элементы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  с ограниченными самосопряженными операторами. При подходящем выборе топологии в  $\mathfrak{g}$  можно отождествить двойственное пространство  $\mathfrak{g}^\vee$  с линейным пространством самосопряженных операторов имеющих след. Для упрощения обозначений предположим, что гильбертово пространство конечномерно, однако наши соображения могут быть применены и в бесконечномерном случае.

Рассмотрим орбиты  $U$  в пространстве  $\mathfrak{g}^\vee$  (в коприсоединенном представлении).

Если  $\dim \mathcal{H} = n$ , орбита индексируется различными вещественными числами  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  (собственными значениями операторов, принадлежащих орбите) и неотрицательными целыми числами  $k_1, \dots, k_r$  (кратностями собственных значений). (Кратности должны удовлетворять условию  $k_1 + \dots + k_r = n$ .) Стационарная группа  $U(n)$  точки орбиты изоморфна прямому произведению групп  $U(k_i)$ , поэтому орбита гомеоморфна  $U(n)/U(k_1) \times \dots \times U(k_r)$  (многообразию флагов).

Если  $r = 2$ , то орбита гомеоморфна грассманиану. Если  $r = 2, k_1 = n - 1, k_2 = 1$ , мы получаем комплексное проективное пространство. (Грассманиан  $G_k(\mathcal{H})$  определяется как пространство всех  $k$ -мерных подпространств пространства  $\mathcal{H}$ . Его можно рассматривать как симплектическое  $U$ -многообразие. Ортонормированный базис  $k$ -мерного подпространства определен с точностью до преобразования из унитарной группы  $U(k)$ . Это означает, что точки  $G_k(\mathcal{H})$  описываются ортонормированными системами векторов  $\phi_1, \dots, \phi_k$  с идентификацией  $\phi'_i \sim u_i^l \phi_l$ , где  $u_i^l$  — унитарная матрица.)

### Some problems (Mostly mathematical problems related to the material of my lectures)

0. A complex vector space  $E$  is equipped with non-negative scalar product. Prove that we can obtain pre Hilbert space factorizing  $E$  with respect to vectors with  $\langle x, x \rangle = 0$ .

Hint. Check that these vectors constitute a linear subspace of  $E$ .

Density matrices are defined as positive-definite self-adjoint operators having unit trace and acting in complex Hilbert space.

1. Prove that the set of density matrices is convex. Check that extreme points of this set are one-dimensional projectors  $K_\Psi(x) = \langle x, \Psi \rangle \Psi$  where  $\|\Psi\| = 1$  (they are in one-to-one correspondence with non-zero vectors of Hilbert space with identification  $\Psi \sim \lambda \Psi$ ).

2. Prove that the set of density matrices in two-dimensional Hilbert space is a three-dimensional ball and set of its extreme points is a two-dimensional sphere.

The linear envelope  $\mathcal{T}$  of the set of density matrices is the space of all self-adjoint operators belonging to trace class. (A self-adjoint operator belongs to trace class if it has discrete spectrum and the series of its eigenvalues is absolutely convergent.) We consider  $\mathcal{T}$  as a normed space with the norm  $\|T\| = \sum |\lambda_k|$  where  $\lambda_k$  are eigenvalues of  $T$ . By definition an automorphism of the set of density matrices is a bicontinuous linear operator in  $\mathcal{T}$  generating a bicontinuous map of the set density matrices. (One says that a map is bicontinuous if it is continuous and has a continuous inverse.) It is obvious that a unitary operator specifies an automorphism of the set of density matrices by the formula  $T \rightarrow UTU^{-1}$ .

3. Prove that automorphisms of the set of density matrices are in one-to-one correspondence with unitary operators.

I do not know how to solve this problem (this does not mean that it is difficult, I did not try). Maybe this fact is proved somewhere, but I do not know any reference.

In the next problems the term "operator" means "linear operator". It is convenient to define  $e^{tA}$  where  $A$  is an operator as a solution of the equation

$$\frac{dU(t)}{dt} = A \cdot U(t)$$

with initial condition  $U(0) = 1$ . If  $(A_1, \dots, A_n)$  is a family of commuting operators we define  $e^{\sum t_i A_i}$  as a product  $e^{t_1 A_1} \dots e^{t_n A_n}$ .

4. Prove that  $e^{i\mathbf{a}\mathbf{P}} = T_{\mathbf{h}\mathbf{a}}$ , where  $\mathbf{P}$  denotes the momentum operator  $\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla$  and  $T_{\mathbf{a}}$  stands for translation operator transforming the function  $f(\mathbf{x})$  into a function  $f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ .

5. Let us define an operator  $\mathcal{C}_A$  acting in the space of operators by the formula  $\mathcal{C}_A(X) = [A, X]$ . (For definiteness one can assume that  $A$  and  $X$  are bounded operators in Hilbert space, but this assumption is not important.) Prove that

$$e^{t\mathcal{C}_A}(X) = e^{tA} X e^{-tA},$$

or equivalently

$$e^{tA} X e^{-tA} = X + t[A, X] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, X]] + \frac{t^3}{3!}[A, [A, [A, X]]] + \dots$$

Hint. Differentiate these equalities.

6. Let us assume that the commutator of operators  $X$  and  $Y$  is a number  $C$  (or, more generally, an operator  $C$ , commuting with  $X$  and  $Y$ ). Prove that

$$e^X e^Y = e^{X+Y} e^{\frac{1}{2}C},$$

$$e^X e^Y = e^C e^Y e^X.$$

7. Let us assume that for an operator  $A$  acting in Banach space the norms of operators  $e^{tA}$  where  $t \in \mathbb{R}$  are uniformly bounded (i.e.  $\sup_{-\infty < t < +\infty} \|e^{tA}\|$  is finite). Prove that all eigenvalues of  $A$  are purely imaginary.

8. Let  $A$  denote an operator acting in finite-dimensional complex vector space. Assume that the norms of operators  $e^{tA}$  where  $t \in \mathbb{R}$  are uniformly bounded. Prove that the operator  $A$  is diagonalizable (i.e. there exists a basis consisting of eigenvectors of  $A$ ).

Hint. Use Jordan normal form. Prove that all Jordan cells are one-dimensional.

9. Let us consider Grassmann algebra with generators  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ . Calculate

$$\begin{aligned} & (\epsilon_1 + \epsilon_2)(\epsilon_2 + \epsilon_3)(\epsilon_3 + \epsilon_4), \\ & \int (\epsilon_1 + \epsilon_2)(\epsilon_2 + \epsilon_3)(\epsilon_3 + \epsilon_4)(\epsilon_4 + \epsilon_1) d^4\epsilon, \\ & \frac{\partial}{\partial \epsilon_2} (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3), \\ & \cos(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_3 \epsilon_4). \end{aligned}$$

10. Let us consider a unital associative algebra with commuting generators  $x_1, \dots, x_n$  and anticommuting generators  $\xi_1, \dots, \xi_n$  (tensor product of polynomial algebra and Grassmann algebra). Prove that  $d^2 = 0$  and  $\Delta^2 = 0$  where

$$\begin{aligned} d &= \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \Delta &= \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}. \end{aligned}$$

Weyl algebra is defined as unital associative algebra with generators  $a_k^*, a_k$  obeying CCR ( $[a_k, a_l^*] = \delta_{k,l}$ ,  $[a_k, a_l] = [a_k^*, a_l^*] = 0$ ). An involution  $*$  in Weyl algebra transforms  $a_k$  into  $a_k^*$ . Fock representation of Weyl algebra = representation with cyclic vector  $|0\rangle$  obeying  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$ . Scalar product is defined by the condition that  $\hat{a}_k^*$  is adjoint to  $\hat{a}_k$

Fock space= completion of the space of Fock representation.

11. Poisson vector is defined by the formula  $\Psi_\lambda = e^{\lambda \hat{a}^*} |0\rangle$  where  $\lambda \hat{a}^* = \sum \lambda_k \hat{a}_k^*$ .

a) Check that Poisson vector is an eigenvector of the operator  $\hat{a}_k$

b) Find scalar product of two Poisson vectors.

12. Let us consider the Hamiltonian  $\hat{H}(t) = \omega(t) \hat{a}^* \hat{a}$  (harmonic oscillator with time-dependent frequency).

a) Let us suppose that  $\omega(t) = \omega_0 + \omega \exp(-\alpha t)$  for  $t \geq 0$ . (Here  $\alpha$  is a small positive number.) Calculate the evolution of matrix entries of the density matrix in  $\hat{H}$ -representation (i.e. express matrix entries of  $K(t)$  in terms of matrix entries of  $K(0)$ ). Here  $\hat{H} = \hat{H}(0)$ .

b) Assuming that  $\omega$  is a random variable with given mean value and dispersion uniformly distributed on some interval calculate the average of matrix entries of the density matrix  $K(t)$  for  $t = \frac{const}{\alpha}$ .

13. A molecule is placed near a microwave oven. Give a rough estimate of decoherence time for this molecule.

Hint. Decoherence appears if the phase factors entering the expressions for non-diagonal matrix entries of density matrix are changed significantly by the electric field of the oven. You can calculate this change in perturbation theory; the first order contribution comes from dipole momentum. You can find the information about dipole momenta of ground state and excited states on the web; you need only the order of magnitude of these momenta and of electric field.

14. Let us define the  $L$ -functional corresponding to the density matrix  $K$  by the the formula

$$L_K(\alpha) = \text{tr} e^{-\alpha \hat{a}^*} e^{\alpha \hat{a}} K.$$

(We consider the case when there is only one degree of freedom,  $[\hat{a}, \hat{a}^*] = 1$ .)

Calculate the  $L$ -functional corresponding to the coherent state (to the normalized Poisson vector).

Reminder. Every normalized vector  $\Phi$  defines a density matrix  $K_\Phi$  and  $\text{tr} A K_\Phi = \langle A \Phi, \Phi \rangle$ . Coherent state is a normalized eigenvector of  $\hat{a}$ .

15. Let us assume that  $\text{supp}(\phi)$  is a compact set. Then for large  $|\tau|$  we have

$$|(T_\tau \phi)(\mathbf{x})| < C_n (1 + |\mathbf{x}|^2 + \tau^2)^{-n}$$

where  $\frac{\mathbf{x}}{\tau} \notin U_\phi$ , the initial data  $\phi = \phi(\mathbf{x})$  is the Fourier transform of  $\phi(\mathbf{k})$ , and  $n$  is an arbitrary integer.

Here  $\text{supp}(\phi)$  is the closure of the set of points where  $\phi(\mathbf{k}) \neq 0$ ,  $U_\phi$  is a set of all points of the form  $\nabla \epsilon(\mathbf{k})$  where  $\mathbf{k}$  belongs to a neighborhood of  $\text{supp}(\phi)$ ,

$$T_\tau \phi)(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\epsilon(\mathbf{k})\tau} \phi(\mathbf{k}),$$

the function  $\epsilon(\mathbf{k})$  is smooth.

16. A generalized function  $\rho(\epsilon)$  is a sum of of the function  $\frac{A}{\epsilon - E - i0}$  and a square integrable function. Find asymptotic behavior of its Fourier transform  $\rho(t)$ .

17. Let us consider a system with the Hamiltonian  $\hat{H} = \int d\mathbf{p} \epsilon(\mathbf{p}) \hat{a}^*(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p})$  and momentum operator  $\hat{\mathbf{P}} = \int d\mathbf{p} \mathbf{p} \hat{a}^*(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p})$  where  $\hat{a}, \hat{a}^*$  obey CCR.

a) Calculate time and space translations in the formalism of  $L$ -functionals

b) Find the operators  $\hat{a}(\tau, \mathbf{p}), \hat{a}^*(\tau, \mathbf{p})$  and corresponding operators acting on  $L$ -functionals.

c) Prove that the  $L$ -functional  $\omega = \exp(-\int d\mathbf{p} \alpha^*(\mathbf{p}) n(\mathbf{p}) \alpha(\mathbf{p}))$  specifies a stationary translation-invariant state. (Here  $n(\mathbf{p})$  is an arbitrary function.)

d) Calculate two-point Green functions in  $(\tau, \mathbf{p})$ - and  $(\epsilon, \mathbf{p})$ -representations for the state  $\omega$ .

## Список литературы

- [1] Schwarz A. Geometric approach to quantum theory. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2020 Apr 1;16:020.
- [2] Schwarz, A., 2021. Geometric and algebraic approaches to quantum theory. arXiv preprint arXiv:2102.09176.
- [3] Schwarz A. Scattering theory in algebraic approach to quantum theory. Associative algebras, arXiv preprint arXiv:2107.08553, 2021
- [4] Schwarz A. Scattering theory in geometric approach to quantum theory. arXiv preprint arXiv:2107.08557, 2021
- [5] Schwarz A. Scattering theory in algebraic approach to quantum theory. Jordan algebras (in preparation)
- [6] A.S. Shvarts, New formulation of quantum theory, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 173, 793 (1967).
- [7] Schwarz A. Inclusive scattering matrix and scattering of quasiparticles. Nuclear Physics B. 2020 Jan 1;950:114869.