Алгебра и геометрия: конференция, посвященная 70-летию В. С. Куликова

23–27 мая, 2022

Организации

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Математический центр мирового уровня
“Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук”
(МЦМУ МИАН), г. Москва

Конференция проводится при финансовой поддержке
Фонда Саймонса и Минобрнауки России
(грант на создание и развитие МЦМУ МИАН,
соглашение № 075-15-2022-265).

В. А. Алексеев. Модели Куликова поверхностей K3 с инволюцией

Мы описываем вырождения и компактификации пространств модулей поверхностей K3 с антисимплектической инволюцией. Совместная работа с Филиппом Энгелем.

И. А. Антипова. Преобразование Меллина рациональных функций с квазиэллиптическими знаменателями

Фундаментальное свойство преобразования Меллина, по-существу определяющее сферы его применений, это соответствие между асимптотическим поведением функции-оригинала и особенностями преобразованной функции. В многомерном случае пара выпуклых областей $\Theta, U \subset \mathbb{R}^n$ кодирует функциональные пространства M_Θ^U, W_U^Θ, состоящие из голоморфных функций в подходящих областях и переводимые друг в друга прямым и обратным преобразованиями Меллина. Области Θ и U предопределяют асимптотику функций в классах M_Θ^U и W_U^Θ соответственно. В докладе речь пойдёт о свойствах преобразования Меллина рациональных функций с квазиэллиптическими знаменателями, отражающих специфику многомерного фундаментального соответствия.

В. В. Батырев. Минимальные модели невырожденных торических гиперповерхностей

В настоящем докладе рассматривается задача построения минимальных бирациональных моделей в классе произвольных невырожденных гиперповерхностей Z в d-мерном алгебраическом торе T. В докладе предлагается комбинаторный метод для построения минимальной модели, который использует многогранник Ньютона P многочлена Лорана f, определяющего уравнение гиперповерхности Z. Особенно примечательным в этом методе является то, что по исходному целочисленному многограннику P однозначно строится некоторый другой d-мерный, в общем случае рациональный, многогранник $\widetilde{P}$, определяющий проективное торическое многообразие $\widetilde{V}$, в котором замыкание $\widetilde{Z}$ аффинной гиперповерхности Z имеет не более чем канонические особенности и полуобильный канонический класс. Первоначально предлагаемый метод был обнаружен автором 30 лет назад в связи с зеркальной симметрией и минимальными моделями Калаби-Яу в случае, когда P является так называемым “рефлексивным многогранником”.

В. К. Белошапка. Группы бирациональных преобразований в CR-геометрии

В CR-геометрии разработана техника (метод модельной поверхности), позволяющая сводить основные вопросы (классификация, автоморфизмы, инварианты) для гладких или вещественно аналитических многообразий к вопросам для их касательных модельных поверхностей, которые представляют собой графики вещественно полиномиальных отображений. В силу этого ответы на те же самые вопросы для модельных поверхностей представляют особую ценность. В частности, внимательному изучению была подвергнута как группа голоморфных автоморфизмов модельной поверхности, так и соответствующая ей алгебра Ли. Недавно (2021) была доказана теорема о бирациональности этой группы. Для справедливости этой теоремы требуются два условия: голоморфной однородности (транзитивность действия группы автоморфизмов) и невырожденности (это условие равносильно конечномерности группы и включает в себя два требования: голоморфной невырожденности и конечности типа). Нарушение любого из условий делает утверждение о бирациональности неверным. Причем теорема дополнительно, кроме утверждения о бирациональности каждого автоморфизма, содержит утверждение о равномерной (считаем N – размерность объемлющего пространства фиксированной) оценке степени $D(N)$ автоморфизмов. Отметим, что имеющаяся оценка $D(N) \leq N^4\, 2^N\, (N^N)^3$, по-видимому, далека от точной.

Таким образом, группы автоморфизмов всех невырожденных голоморфно однородных модельных поверхностей представляют собой подгруппы группы Кремоны **ограниченной степени**. В работе Д. Зайцева и А. Хаклберри (1995) была предложена алгебро-геометрическая конструкция, описывающая такие группы. Однако эта конструкция работает при некотором предположении, которое, как правило, не выполнено для групп модельных поверхностей. Возникает вопрос об описании подгрупп группы Кремоны ограниченной степени, которое применимо для групп голоморфных автоморфизмов модельных поверхностей.

А. Б. Жеглов. Алгебро-геометрические свойства спектральных многообразий квазиэллиптических колец

Понятие квазиэллиптических колец появилось в результате попытки классификации широкого класса коммутативных колец операторов, встречающихся в теории интегрируемых систем, таких как кольца коммутирующих дифференциальных, разностных, дифференциально-разностных и т.д. операторов. Они содержатся в некотором некоммутативном “универсальном” кольце — чисто алгебраическом аналоге кольца псевдодифференциальных операторов на многообразии и допускают (при некоторых слабых ограничениях) удобное алгебро-геометрическое описание. Это описание является естественным обобщением классификации колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных или разностных операторов, описанной в работах Кричевера, Новикова, Мамфорда, Муласе. Уже в случае размерности два имеются существенные ограничения на геометрию спектральных многообразий, в связи с чем возникает вопрос об их классификации. Я расскажу о недавних результатах в этом направлении, в числе которых — удивительные примеры В. С. Куликова спектральных поверхностей общего типа.

Ф. Л. Зак. Многообразия с абелевой группой монодромии

Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ неособое комплексное алгебраическое многообразие, а $Y \subset X$ его неособое гиперплоское сечение. Из теории Лефшеца известно, что естественное отображение гомологий $\rho_i : H_i(Y, \mathbb{Q}) \to H_i(X, \mathbb{Q})$ является изоморфизмом при $i < n-1$ и эпиморфизмом при $i = n-1$. Исчезающие гомологии $\mathrm{Van} = \mathrm{Ker}\, \rho_{n-1}$ порождаются исчезающими циклами Лефшеца, соответствующими особым точкам общего пучка гиперплоских сечений, включающего Y. На гомологиях $H_*(Y, \mathbb{Q})$ действует группа монодромии Γ, являющаяся представлением фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{P}^{N^*} \setminus X^*)$, где X^* двойственное многообразие, причём это действие тривиально только на $H_i(Y, \mathbb{Q})$ при $i \neq n-1$. Если двойственное многообразие X^* не является гиперповерхностью, то очевидно, что Van и Γ тривиальны. В докладе, основанном на (еще не законченной) совместной работе с С. М. Львовским, исследуются многообразия X, для которых X^* гиперповерхность, а группа Γ абелева или, что эквивалентно, Van порождается единственным циклом Лефшеца. Ответ зависит от чётности n. Если n нечётно, то Van одномерно и $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; так бывает тогда и только тогда, когда двойственная гиперповерхность X^* нормальна. Если же n чётно, то $\mathrm{Van} = 0$ и группа Γ тривиальна; так бывает тогда и только тогда, когда двойственная гиперповерхность X^* не имеет каспов в коразмерности один. Такие многообразия X распадаются на два класса — продолжаемые и непродолжаемые.

Для понимания доклада не требуется знания теории Лефшеца, все необходимое будет рассказано.

Ю. Г. Зархин. Самые неалгебраические комплексные торы — алгебраическая конструкция

Используя теорию Галуа, мы явно строим (в любой комплексной размерности больше 1) простые комплексные торы алгебраической размерности 0 с нулевым числом Пикара. Доклад основан на совместной работе Т. Бандман и докладчика.

А. Д. Медных. Объемы узлов и зацеплений в пространствах постоянной кривизны

Геометрия узлов и зацеплений, как наука, возникла в 70-х годах прошлого века в работах английского математика Роберта Райли и американского математика Уильяма Терстона. Основная идея заключалась в том, чтобы на дополнению к узлу или многокомпонентному зацеплению ввести геометрическую структуру. На удивление, наиболее подходящей геометрией здесь оказалась геометрия Лобачевского. Эта же геометрия охватывает "почти все" трехмерные многообразия. За этот результат У. Терстон в 1983 году получил Филдсовскую премию. Однако, есть еще семь геометрий, описывающих трехмерные многообразия и, в частности, расположенные в них узлы.

Цель доклада — рассказать каким образом на узлах возникает евклидова, сферическая и гиперболическая геометрии. Будут приведены точные аналитические формулы для вычисления объемов возникающих при этом конических многообразий.

В. Л. Попов. Реализация систем и решеток корней в числовых полях

Как известно, система корней типа G_2 реализуется в виде множества целых алгебраических чисел с нормой 1 или 3 в круговом поле, порожденном корнем кубическим из единицы. Развивая это наблюдение, я обсужу возможность естественной реализации систем и решеток корней в числовых полях.

В. В. Пржияловский. Слои моделей Ландау–Гинзбурга над бесконечностью

В 1977 году В. С. Куликов классифицировал вырождения поверхностей типа K3. В зеркальной симметрии они возникают как вырождения слоев моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано к слою над бесконечностью. Монодромия таких вырождений максимально унипотентна, и геометрия слоя над бесконечностью связана с инвариантами исходного многообразия Фано.

В докладе мы обсудим обобщение этого наблюдения на высшие размерности. Мы обсудим и в некоторых случаях проверим некоторые гипотезы о том, как устроен слой над бесконечностью, и их связь с гипотезами Каваматы и Коллара–Ксю.

А. Г. Сергеев. Спинорная геометрия и уравнения Зайберга–Виттена

Уравнения Зайберга–Виттена, найденные в конце прошлого столетия, остаются одним из главных открытий в гладкой топологии и геометрии 4-мерных римановых многообразий. Также, как уравнения Янга–Миллса, они являются предельным случаем более общей суперсимметричной теории Янга–Миллса. Но в отличие от уравнений Янга–Миллса, которые обычно ассоциируются с неабелевыми калибровочными группами, уравнения Зайберга–Виттена абелевы, однако не инвариантны относительно изменения масштаба. Поэтому для того, чтобы извлечь из них полезную информацию, необходимо вводить в них масштабный параметр λ и рассматривать предел $\lambda \to \infty$. Это так называемый адиабатический предел, изучаемый в докладе.

А. С. Тихомиров. Модули пучков ранга два с нечетным детерминантом на проективном пространстве

Мы описываем новые неприводимые компоненты пространства модулей полустабильных пучков ранга два на проективном пространстве, общие точки которых соответствуют пучкам с нульмерными особенностями либо особенностями смешанной размерности. Мы доказываем, что пространства модулей таких пучков с классами Черна $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 2n, 0)$ и $(c_1, c_2, c_3) = (0, 2n, 0)$ всегда содержат по крайней мере одну рациональную неприводимую компоненту. Как приложение, мы доказываем, что число таких компонент неограниченно растет с ростом второго класса Черна. Это совместная работа с Ч. Алмейдой и М. Жардимом.

А. С. Трепалин. Классификация поверхностей дель Пеццо степени 8 без точек

Пусть k — алгебраически незамкнутое поле характеристики 0. В докладе мы опишем бирегулярную и бирациональную классификацию поверхностей дель Пеццо степени 8 без k-точек в терминах группы Брауэра. Кроме того, мы опишем минимальные поверхности, бирационально эквивалентные любой заданной поверхности дель Пеццо степени 8 без k-точек. В частности, будут описаны бирационально жёсткие поверхности дель Пеццо степени 8 без точек.

Н. А. Тюрин. О лагранжевой геометрии алгебраических многообразий

Алгебраическое многообразие по самому своему определению может быть снабжено кэлеровой формой целочисленного типа, которую можно рассматривать как симплектическую форму, относительно которой естественным образом возникает условие лагранжевости для вещественных подмногообразий той же размерности, что и исходное многообразие. Таким образом, возникает задача классификации лагранжевых подмногообразий. Несмотря на естественность этой задачи, не так много полных результатов было получено даже в простейшем случае — проективной плоскости. В докладе представлены два сюжета: первый описывает построение нестандартных лагранжевых торов в торических многообразиях, второй предлагает способ построения большого числа новых примеров на алгебраических многообразиях с торическим действием (необязательно полным).

В. М. Харламов. Новые примеры вещественных исчислительных инвариантов, сохраняющихся при нодальных перестройках

Исчисление вещественных кривых, изобретенное Ж.-П. Вельшанже, инвариантно относительно неособых деформаций объемлющего многообразия, однако весьма чувствительно к изменению топологии вещественной структуры многообразия. Тем не менее, как было обнаружено вскоре, некоторые комбинации чисел Вельшанже, оставаясь нетривиальными, обладают гораздо более сильными свойствами инвариантности, а именно, сохраняются даже при нодальных перестройках вещественной структуры, и, как следствие, оказываются вообще независимыми от выбора вещественной структуры на многообразиях из фиксированного комплексного деформационного класса. Одним из исходных примеров послужил счёт вещественных прямых на кубических поверхностях, в котором прямым приписываются разные знаки в соответствии с принадлежащим Б. Сегре делению прямых на гиперболические и эллиптические. Именно этот пример привел к открытию аналогичного инвариантного подсчета прямых на многомерных гиперповерхностях и полных пересечениях, и в итоге стал одним из импульсов к теперь довольно активному развитию исчисления Шуберта над вещественным полем. В докладе же (основанном на совместных работах с С. Финашиным) будет рассказано, как этот пример с кубическими поверхностями обобщается в несколько ином направлении: с прямых на кубических поверхностях на прямые, и даже кривые произвольной степени,на других поверхностях дель Пеццо. Получающиеся таким образом инварианты обладают и другими замечательными свойствами (кроме инвариатности относительно перестроек), как, например, прямой связью с комплексными инвариантами Громова–Виттена и вычислимостью по удивительно простым явным формулам.

А. К. Цих. Считающая функция в комплексной и тропической алгебраической геометрии

Речь пойдет о гомологических свойствах дополнений комплексных алгебраических множеств, их амеб и их тропических вариантов. В случае гиперповерхностей (множеств коразмерности 1) такие свойства известны. Они описываются с помощью считающей функции Иенсена–Ронкина или логарифмическими вычетами. Идентификация торических гомологических циклов половинной размерности осуществляется целочисленными точками многогранника Ньютона полинома, определяющего гиперповерхность. Этот факт позволяет рассматривать считающую функцию как гомоморфизм 0-мерной группы гомологий дополнения амебы гиперповерхности в 1-мерную группу когомологий объемлющего тора. Доклад посвящен построению считающей функции в высших коразмерностях. Излагаемые результаты получены совместно с М. Ниссом (M. Nisse) и Ф. Соттилом (F. Sottile).

Г. Б. Шабат. О двумерных аналогах пар Белого

Обычные пары Белого представляют собой пары “кривая + функция на ней с минимальным ветвлением”. В докладе будет рассказано о нескольких аналогах этого понятия, в которых кривая заменяется на поверхность.

К. А. Шрамов. Расслоения на коники

Пусть задано расслоение на коники над гладкой неполной кривой C, то есть гладкая поверхность S с собственным морфизмом на C, при котором прямой образ структурного пучка S является структурным пучком C, и антиканкласс S относительно обилен. Я расскажу про критерий, позволяющий понять, когда это расслоение продолжается до расслоения на коники над полной кривой. Доклад основан на совместной работе с В. Вологодским.

Е. И. Шустин. Рафинированная исчислительная геометрия

Рафинированные исчислительные инварианты перечисляют объекты (например, алгебраические кривые) с весами, зависящими от параметра. Эти инварианты обладают рядом замечательных свойств, которые тесно связывают их с комплексной и вещественной алгебраической геометрией. В докладе мы даем обзор исследований в этой области, начиная с работ Гетче–Шенде и Блока–Гетче и включая недавние результаты связанные с тропическими рафинированными инвариантами. Мы также обсуждаем открытые вопросы и перспективные направления исследований.