Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургский государственный университет
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Математический центр мирового уровня МИАН
Тульский государственный университет

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории

Материалы XXI Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения А. А Карацубы.

Тула, 17–21 мая 2022 года

Тула 2022

Проведение конференции поддержано грантом правительства Тульской области, договор № ДС/279 от 25.10.2021. Конференция проводится при финансовой поддержке Фонда Саймонса и Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265)

ББК 22.1
УДК 51
А45

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXI Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения А. А Карацубы. —

Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2022. – 382 с.
ISBN 5–87954–388–9

ББК 22.1
УДК 51

ISBN 5–87954–388–9

Пленарные доклады

УДК 51.091

К столетию создания Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: serd42@mail.ru

To the centenary of the foundation of the Research Institute of Mathematics and Mechanics of Moscow University

S. S. Demidov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: serd42@mail.ru

К концу XX столетия институты, занимающиеся исследованиями в области математических наук, стали явлением распространённым. В начале же XX века таких институтов, насколько мне известно, просто не было. Их появление – результат событий Первой мировой войны, приведших к тектоническим переменам в социально-экономической жизни развитых стран, прежде всего в Европе. Одной из сфер жизни, обнаружившей необходимость создания новых форм организации, стала наука. Важность её результатов, прежде всего достижений научно-технического характера, для всего комплекса вопросов, так или иначе связанных с военно-промышленным комплексом, проявилась со всей очевидностью. Так в 1921 г. в Петрограде был открыт Физико-математический институт Российской академии наук, из которого впоследствии выделился Математический институт им. В.А. Стеклова, в 1928 в Париже был основан Институт Анри Пуанкаре, а в 1928 в Гёттингенском университете – Математический институт. Так что появление в 1922 г. подобного Института в Московском университете может рассматриваться как одно из первых проявлений новой тенденции в развитии научных исследований.

20 октября 1922 г. постановлением Научно-технической секции Государственного учёного совета Наркомата просвещения РСФСР была учреждена Ассоциация научно-исследовательских институтов при физ-мат. факультете 1-го МГУ. Предполагалась организация трёх таких институтов: математического, астрофизического и геофизического.

Первое заседание совета Московского института математических наук – так он именовался поначалу в протоколах заседаний совета Института (Научно-исследовательским ин-ститутом математики и механики его стали называть в протоколах, начиная с заседания 5 мая 1923 г.) – состоялось 18 ноября 1922 г. Присутствовали – Л.К. Лахтин, Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров, И.И. Жегалкин, В.Ф. Каган, С.А. Чаплыгин, В.А. Костицын, Н.Н. Лу-зин, И.И. Привалов, О.Ю. Шмидт. Был заслушан доклад В.А. Костицына о структуре и задачах создаваемого Института – о научной деятельности его сотрудников, о подготовке научных кадров и о популяризации науки в широких кругах. Д.Ф. Егорову была поручена разработка плана научной работы, а также вопроса о студентах, «оставленных при университете для подготовки к профессорскому званию». Было принято решение назначить директором Института Б.К. Млодзеевского. Правда, уже в январе следующего года он скончался и обязанности директора были возложены на Д.Ф. Егорова.

Следующее заседание совета состоялось только 2 декабря. На нём был избран президиум совета, в который кроме директора Б.К. Млодзеевского вошли Д.Ф. Егоров и В.А. Костицын, который был избран учёным секретарём Института. Было принято предложение Госиздата о подготовке Полного собрания сочинений Н.И. Лобачевского. Для начала этой работы была организована комиссия в составе Б.К. Млодзеевского, Д.Ф. Егорова и В.Ф. Кагана. Так было положено начало предприятию, первым результатом которого стал выход в 1946 г. первого тома полного собрания сочинений великого математика.

С переездом в 1918 г. правительства в Москву город стал столицей, которая должна была взять на себя роль культурного центра страны, сосредоточия её научной, в част-ности, математической деятельности. Таким образом созданный в 1922 г. Институт математики и механики фактически превращался в *головную научную организацию СССР в области чистой и прикладной математики* (тем более, что положение застрявших в Петрограде Академии наук и руководимого В.А. Стекловым академического Физико-математического института оставалось в то время неопределённым). Именно в этой перспективе следует рассматривать усилия по возобновлению издания *Математического сборника*, 31 том которого увидел свет после восьмилетнего перерыва в 1924 г. Новый *Математический сборник*, взявший на себя роль общесоюзного математического журнала, стал журналом общеевропейским. Достаточно сказать, что в 1924 – 1935 гг. в нём наряду с ведущими отечественными учёными публиковались такие известные зарубежные математики как Ж. Адамар, Э. Картан, М. Фреше, Э. Нётер, В. Серпинский, Р. Мизес, С. Лефшец, Х. Хопф.

Наконец, Институт вместе с Московским математическим обществом взял на себя инициативу организации и проведения Всероссийского съезда математиков. Прошедший 27 апреля – 4 мая 1927 г. в стенах Московского университета, этот съезд стал по существу всесоюзным, собрав 378 участников из 33 городов СССР, и положил начало регулярной общественной жизни отечественного математического сообщества, нарушенной событиями мировой войны, революций 1917 г. и последовавшей за ними гражданской войны. На этом съезде был организован оргкомитет Первого всесоюзного съезда математиков, собравшегося в июне 1930 г. в Харькове.

Однако основой деятельности института оставались научные исследования, интенсивность и широта диапазона которых на протяжении 20-ых годов неуклонно возрастали, что, конечно, было совершенно естественно для коллектива, объединявшего таких выдающихся учёных как Д.Ф. Егоров, В.Ф. Каган, С.А. Чаплыгин, Л.С. Лейбензон, В.А. Костицын, Н.Н. Лузин, В.В. Степанов, И.И. Привалов, О.Ю. Шмидт, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин, П.С. Александров, Л.А. Люстерник, М.А. Лаврентьев, П.С. Новиков, И.Г. Петровский, А.Н. Колмогоров, Л.Г. Шнирельман, А.О. Гельфонд, А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин.

На 20-е гг. приходится процесс стремительного расширения тематики исследований школы Н.Н. Лузина. Если сам Н.Н. Лузин и его ближайшие на тот период ученики – Л.В. Келдыш, П.С. Новиков – сосредоточились на проблемах теории аналитических множеств, то тематика изысканий представителей школы предыдущих поколений стала чрезвычайно многообразной. Замечательно, что объединяющим началом долгое время оставалась метрическая теория множеств и функций, оказавшаяся превосходной «стартовой площадкой» для начала исследований в самых различных направлениях.

В орбиту интересов лузинских учеников органично вошла теория функций комплексного переменного – начало здесь было положено ещё самим Лузиным, исследования которого продолжили И.И. Привалов, В.В. Голубев, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин, в середине 20-ых гг. к ним присоединился М.А. Лаврентьев.

С работ П.С. Урысона и П.С. Александрова 1921 – 24 гг. ведёт своё начало советская топологическая школа. В 1925 под руководством Александрова начал работать топологический семинар, из которого вышли А.Н. Тихонов и Л.С. Понтрягин.

В 1923 г. А.Я. Хинчин получил первые важные результаты по теории вероятностей. В конце 20-ых – в начале 30-ых гг. этими вопросами стал заниматься А.Н. Колмогоров, в 1933 г. предложивший знаменитую аксиоматику теории вероятностей. Так начиналась знаменитая

Московская школа теории вероятностей.

В 1922 – 23 гг. А.Я. Хинчин приступил к исследованиям по теории чисел, а в 1925/26 учебном году он организовал семинар по теории чисел, в котором участвовали А.О. Гельфонд и Л.Г. Шнирельман.

В конце 20-ых – начале 30-ых гг. Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, эмигрировавший из Германии А.И. Плеснер и А.Н. Колмогоров заложили основы советской школы функционального анализа, из которой уже вскоре вышел И.М. Гельфанд. В области теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, трудились Д.Ф. Егоров и В.В. Степанов. В конце 20-ых к ним присоединились И.Г. Петровский и В.В. Немыцкий. Д.Ф. Егоров и В.А. Костицын продолжали исследования в области теории интегральных уравнений.

И.И. Жегалкин, А.Н. Колмогоров и впоследствии П.С. Новиков занимались проблемами оснований математики и математической логики.

Если к этому добавить такие традиционные для Москвы области исследований как дифференциальная геометрия (Д.Ф. Егоров и его ученики), обогащённая трудами приехавшего из Одессы В.Ф. Кагана, прикладная математика (С.А. Чаплыгин, Л.С. Лейбензон и др.) и завезённая в 20-ые гг. из Киева О.Ю. Шмидтом новая алгебра, а также учесть значимость полученных москвичами результатов во всех перечисленных направлениях, то можно сказать, что Москва к началу 30-ых годов превратилась в один из ведущих математических центров мира, а Институт математики и механики Московского университета – в один из наиболее значимых мировых математических институтов.

Сотрудники Института поддерживали научные связи с ведущими математическими центрами Европы, прежде всего с немецкими – с Гёттингеном и Берлином – и французскими – с Парижем и др. Они активно печатались в европейских математических журналах, издавали книги за рубежом. Так монография Н.Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах и их приложениях» увидела свет по-французски в издательстве Gauthier-Villars в 1930, а книга А.Я. Хинчина «Асимптотические законы теории вероятностей» и уже упомянутые «Основные понятия теории вероятностей» А.Н. Колмогорова в 1933 г. в Берлине по-немецки у Springer'a. Написанная П.С. Александровым совместно с профессором Цюрихского политехнического института Х. Хопфом «Топология» вышла понемецки в 1935 г. всё в том же Берлине у того же Шпрингера.

Представление о живых связях сотрудников Института с ведущими математиками Европы можно составить по данным об их заграничных командировках за 1930 – 31 гг., сохранившимся в архиве Московского университета. Так П.С. Александров с лета 1930 по зиму 1931 читал лекции и вёл семинар по топологии в Гёттингене, после чего переехал в Принстон, где также читал лекции и руководил семинаром. По дороге в Москву он задержался в Цюрихе, где выступил с серией докладов на семинаре в политехническом институте. А.Н. Колмогоров с июня 1930 по март 1931 провёл в Гёттингене, где встречался с Д. Гильбертом, Г. Вейлем, Р. Курантом и др., в Мюнхене, где беседовал с К. Каратеодори, в Берлине, где обсуждал проблемы оснований теории вероятностей с Р. Мизесом, а также во Франции, где работал с М. Фреше, П. Леви и А. Лебегом.

По окончании в 1930 г. аспирантуры в институте в четырёхмесячную командировку в Берлин и Гёттинген был направлен А.О. Гельфонд – автор уже нашумевшего в Европе результата о трансцендентности чисел вида $?^{i\sqrt{q}}$, где α – алгебраическое число, не равное 0 или 1, а $q \geqslant 1$ – целое число. Этот результат был опубликован в 1929 году в Comptes ren-dus Парижской академии наук, а его автор находился тогда на мощном творческом подъёме – он был на пути полного решения седьмой проблемы Гильберта, которое будет им получено в 1934 г. В Гёттингене он обсуждал эту проблематику с Э. Ландау и Ф. Энгелем. Он же познакомил Ландау с полученными недавно результатами Л.Г. Шнирельмана и подарил ему знаменитую его работу по аддитивной теории чисел, только что опубликованную в *Известиях Донского политехнического института* – издании для Гёттингена, прямо скажем, экзотическом. Ландау распорядился перевести её на немецкий и она уже в 1933 г. появилась в *Mathematische Annalen*. И когда в июне – ноябре 1931 г. Шнирельман сам посетил Гёттинген, Франкфурт-на-Майне и Берлин, о его результате знали немецкие коллеги. Берлин и Гёттинген посетил в конце 1930 г. Н.А. Глаголев. Аспирант Института Г.К. Хворостин в июне – декабре знакомился с исследованиями по прикладной математике в Берлине (у Р. Мизеса) и по теории турбулентности в лаборатории Гидродинамического института в Гёттингене (у Л. Прандтля).

Немецкие и французские математики также нередко посещали Москву, выступая с лекциями и докладами. Так зиму 1928/29 гг. в Москве провела Э. Нётер, которая вела здесь семинары и читала лекции по алгебре. «Её деятельность, - писал П.С. Александров, – оказала очень большое влияние на развитие Московской математической школы. В частности, в большой мере под влиянием нётеровских семинаров и лекций в Москве начались общеалгебраические исследования А.Г. Куроша ...».

Значительное развитие получила в Институте аспирантура. О динамике её роста красноречиво свидетельствуют следующие данные: если в 1923/24 учебном году в Институте было 23 аспиранта, в 1924/25 – 38, в 1925/26 – 63, в 1926/27 – 59, в 1927/28 – 66, 1928/29 – 65, то в 1932 году их число возросло до 200. Правда, аспирантура в те годы носила несколько иной, чем привыкли видеть мы, характер. Это были годы, когда научные степени были отменены (они были восстановлены постановлением Совнаркома 13 января 1934 года) и целью аспирантуры было не написание и защита диссертации, а подготовка к научной или к педагогической деятельности.

Говоря о деятельности Института в 20-е – в начале 30-ых годов, следует, конечно, иметь в виду непростую общую обстановку, складывавшуюся в эти годы в связи с общей идеологической ситуацией в стране. И хотя основные задачи, над которыми трудился Институт, относились к математике, её приложениям и механике, то есть, казалось бы, не носили особенной идеологической нагрузки, идеологический фактор вносил серьёзные коррективы в его деятельность, становясь зачастую определяющим. Это касалось и выбора проблематики проводимых Институтом исследований, и политики в области подготовки научных кадров, и идеологических позиций, занимаемых его сотрудниками. Наиболее громкими и во многом определившими общие настроения, царившие в этот период в Институте, стали события, связанные с его директором Д.Ф. Егоровым – развернувшаяся в середине 20-ых его травля, завершившаяся его удалением весной 1930 г. с поста директора Института, арестом в сентябре того же года по сфабрикованному на Лубянке делу Всесоюзной контрреволюционной организации «Истинно-православная церковь» и кончиной в 1931 году в ссылке в Казани. Директором Института был назначен «красный профессор» О.Ю. Шмидт, ознаменовавший начало своей деятельности призывом к сотрудникам Института перестроить работу на марксистской основе и обвинением во вредительстве тех, кто попытается этому препятствовать.

Несмотря на идеологический прессинг, математикам удалось сохранить творческий дух, определивший успешное развитие математических исследований в Институте. Подтверждением этому могут служить две международные конференции, организованные Институтом в 1934 и 1935 годах: Первая международная конференция по тензорной дифференциальной геометрии и её приложениям, прошедшая в мае 1934 г., и Первая международная топологическая конференция, собравшаяся в сентябре 1935 г.

Переезд Стекловки из Ленинграда в Москву и та особенная роль, которую приобретали академические институты в структуре строящегося здания советской науки, подписали смертный приговор московскому институту. Его ведущие сотрудники очень быстро вошли в состав Стекловки, сохранив при этом свои позиции и в университете – теперь уже на новом, учреждённом в 1933 году механико-математическом факультете. А Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета сохранял за собой функции управления аспирантурой.

При этом, конечно, нам не следует забывать, что, передав Стекловке своих ведущих исследователей, Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета фактически стал одним из его соучредителей. И когда мы сегодня говорим об истории Института Стеклова, мы должны рассматривать историю Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета как её неотъемлемую часть. Так что речь идёт не о «смерти» Института, а о новой его жизни, о синтезе идей двух основных российских школ, давшим жизнь Советской математической школе – одной из ведущих математических школ второй половины XX века.

——————————————————————————

УДК 511.3

Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток[1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Analytical continuation of the hyperbolic zeta function of lattices[1]

N. N. Dobrovol'skii (Russsia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

В работах [2] – [4] была решена проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки. В работе [9] эта проблема нашла своё решение для случая гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки.

Уже случай двумерной решётки приближений Дирихле в случае иррационального β не является декартовой решёткой.

Цель настоящей работы — найти удобное функциональное уравнение для двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β.

Мы для простоты восприятия ограничимся только случаем решётки Дирихле, так как уже в этом случае становятся понятны методы и возникающие трудности.

Пусть у нас задано вещественное число $\beta > 0$. Рассмотрим решетку Дирихле диофантовых приближений $\Lambda(\beta)$, заданную равенством

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p))|q, p \in \mathbb{Z}\}$$

с базисом $\vec{\lambda}_1 = (1, \beta)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, -1)$.

Если β — рациональное число, то решётка $\Lambda(\beta)$ — декартова решётка, в противном случае она не является декартовой решёткой. В любом случае она является унимодулярной решёткой.

Множество D всех решеток Дирихле диофантовых приближений $\Lambda(\beta)$, когда β пробегает множество всех положительных чисел, образует ограниченное подмножество метрического всех двумерных решёток.

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а.
[1]This work was prepared under a grant from the RFBR № 19-41-710004 _r_a.

Гиперболическая дзета-функция решётки $\Lambda(\beta)$ задается равенством

$$\zeta_H(\Lambda(\beta)|\alpha) = \sum_{(q,p)\neq(0,0)} \frac{1}{(\overline{q}\overline{q\beta - p})^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1,$$

где $\overline{x} = \max(1, |x|)$ для любого вещественного x.

Непосредственно из определения гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(\beta)$ видно, что в правой полуплоскости $\sigma > 1$ она будет непрерывна на этом пространстве D.

Сначала рассмотрим случай рационального $\beta = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, $b \geqslant 1$. Найдём выражение гиперболической дзета-функции $\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\,\alpha\right)$ решётки $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$ через периодизированную дзета-функцию Гурвица $\zeta^*(\alpha, w)$, которая в правой полуплоскости задается равенством

$$\zeta^*(\alpha, w) = \sum_{n+w>0} (n+w)^{-\alpha} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}, & \text{при } \{w\} = 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n + \{w\})^{-\alpha}, & \text{при } \{w\} > 0 \end{cases}, \ \alpha = \sigma + it,\ \sigma > 1.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\,\alpha\right) = \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))}{b^\alpha} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\zeta^*\left(\alpha, \frac{k}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1-\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha} \cdot$$
$$\cdot\left(\zeta^*\left(\alpha, \frac{ka}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{ak}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha} - \frac{1}{\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right)$$

Доказательство.Действительно, сделаем замену переменных суммирования $q = bn + k$, $k = 0, 1, \ldots, b-1$, $p = an + \left[\frac{ak}{b}\right] - m$, получим

$$\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\,\alpha\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|bn|^\alpha} + \frac{1}{|-bn|^\alpha}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{m}^\alpha} +$$
$$+\sum_{k=1}^{b-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|bn+k|^\alpha}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{m+\left\{\frac{ak}{b}\right\}}^\alpha}\right) = \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))}{b^\alpha} +$$
$$+\sum_{k=1}^{b-1} \frac{\zeta^*\left(\alpha, \frac{k}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1-\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha} \cdot$$
$$\cdot\left(\zeta^*\left(\alpha, \frac{ka}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{ak}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha} - \frac{1}{\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right)$$

и лемма полностью доказана. □

Для получения аналитического продолжения потребуется продолжение периодизированной дзета-функции Гурвица на всю комплексную плоскость (см. [5]).

$$\zeta^*(\alpha;b)=$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}, & \sigma>1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {\scriptstyle \{b\}=0, \atop \sigma>-1},\\ \frac{1}{\{b\}^\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}+(1-\{b\})\left(1-\frac{\alpha\{b\}}{2}\right)-I_2\left(\alpha;1-\{b\},\{b\}\right), & {\scriptstyle \{b\}\neq 0, \atop \sigma>-1},\\ 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}+\cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right), & \sigma<0,\end{cases} \tag{1}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма функция и

$$I_2(\alpha;q,\beta)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int\limits_q^\infty\frac{\{x\}^2-\{x\}}{(x+\beta)^2}dx,\quad q>0,\quad 0<\beta\leqslant 1.$$

В работе [5] показано, что для $\alpha=\sigma+it$, $\sigma<0$ справедливо равенство

$$\zeta^*(\alpha;w)+\zeta^*(\alpha;1-w)=2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha;w),$$

где $M(\alpha)=\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ — множитель Римана,

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^\alpha},\quad(\sigma>1). \tag{2}$$

— дзета-функция Гурвица второго рода.

Кроме этого нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана: $\zeta(\alpha)=M(\alpha)\zeta(1-\alpha)$.

Учитывая всё выше изложенное, получаем новое функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции декартовой решётки $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$.

Теорема 1. *При $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\Big|\,\alpha\right)=\frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)(1+2M(\alpha)\zeta(1-\alpha))}{b^\alpha}+\sum_{k=1}^{b-1}\frac{2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha;\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha}\cdot$$
$$\cdot\left(2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha,\frac{ka}{b}\right)+2-\frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha}-\frac{1}{\left(1-\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right).$$

Доказательство.Действительно, по лемме 1 имеем:

$$\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\Big|\,\alpha\right)=\frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))}{b^\alpha}+\sum_{k=1}^{b-1}\frac{\zeta^*\left(\alpha,\frac{k}{b}\right)+\zeta^*\left(\alpha,1-\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha}\cdot$$
$$\cdot\left(\zeta^*\left(\alpha,\frac{ka}{b}\right)+\zeta^*\left(\alpha,1-\frac{ak}{b}\right)+2-\frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha}-\frac{1}{\left(1-\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right).$$

Подставляя сюда функциональное уравнение для дзета-функции Римана и периодизированной дзета-функции Гурвица, получим:

$$\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\Big|\,\alpha\right) = \frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)(1+2M(\alpha)\zeta(1-\alpha))}{b^\alpha} + \sum_{k=1}^{b-1}\frac{2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha;\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha}\cdot$$
$$\cdot\left(2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha,\frac{ka}{b}\right)+2-\frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha}-\frac{1}{\left(1-\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right)$$

и теорема полностью доказана. □

Найденное функциональное уравнение позволяет ставить вопрос о непрерывности для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β в левой полуплоскости. Изучение этого вопроса будет темой следующих статей по этой теме.

Отметим, что в работе [6] была введена экспоненциальная последовательность простых чисел PE. Дзета-функция моноида $M(PE)$ обладает эйлеровым произведением:

$$\zeta(M(PE)|\alpha) = \sum_{n\in M(PE)}\frac{1}{n^\alpha} = P(M(PE)|\alpha) = \prod_{p\in PE}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \alpha=\sigma+it, \quad \sigma>0.$$

В работе [8] была высказана гипотеза, что дзета-функцию $\zeta(M(PE)|\alpha)$ нельзя продолжить в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$. Другими словами, её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$. В работе [7] эта гипотеза была доказана.

Теорема 2. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Доказанную теорему можно перенести на другой класс моноидов натуральных чисел.

Пусть Q — натуральное число и моноид $M = M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых чисел PE. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q. Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q, то $\mathbb{N} = M_{-Q}\cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$. Последнее равенство верно при $\sigma > 0$.

Теорема 3. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M_{+Q}|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Теорема 4. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M_{-Q}|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Эти теоремы показывают, что предельный переход для последовательности рядов Дирихле может нарушаться при переходе через абсциссу абсолютной сходимости предельного ряда Дирихле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

2. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

3. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.

4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 188–208.

7. Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

8. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

9. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

———————————————————————————

УДК 51

Локальные группы в множествах Делоне: новые гипотезы и результаты

Н. П. Долбилин (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: dolbilin@mi-ras.ru

Local Groups in Delone Sets: New Conjectures and Results

N. P. Dolbilin (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of the RAS
e-mail: dolbilin@mi-ras.ru

The talk is dedicated to recently obtained results which open a new direction in study of Delone sets of quite arbitrary type.

A Delone set is a natural mathematical model of the set of atomic positions of any solid, whether it is crystalline, quasi-crystalline, or amorphous. By definition, a *Delone set* X is a uniformly discrete and relatively dense point set in Euclidean space. This means for $X \subset \mathbb{R}^d$ there are two positive parameters: r is the packing radius and R is the covering radius. The value $2r$ can be interpreted as the minimum distance between points of the X. As for the covering radius R, it is a radius of the biggest 'empty' ball, i.e. the radius of the biggest ball containing no points from the set.

The central concepts of the presentation are the $2R$-*clusters* of points in a Delone set X (i.e. neighborhoods of points from X of radius $2R$) and the *local groups* at points of the X which are defined as groups of $2R$-clusters.

In the talk we discuss few quite new conjectures and theorems on the local groups for Delone sets in Euclidean plane and 3D space. Some of these conjectures and theorems significantly refine and generalize the famous Bravais theorem on the impossibility of 5-order axes in 2D and 3D lattices. In the presentation we outline proofs of the following two results on Delone sets in plane and 3D-space.

First, in a Delone set X in plane, an each cell of the Delone tiling for the X has at least one vertex whose local group is crystallographic. This result implies that, in a Delone set $X \subset \mathbb{R}^2$ with the covering radius R, its crystal kernel X_{cr} is a Delone subset with the covering radius $R_{cr} \leq 2R$. This statement generalizes a theorem on the impossibility of the 5-gonal axis in a two-dimensional lattice.

The second theorem states that, in a Delone set X in 3D-space, the subset $\widetilde{X}$ of all points, at which the local groups contain rotations of order at most 6, is also a Delone set with a certain covering radius $\widetilde{R}$, where $\widetilde{R} < 3R$ and R is the covering radius for X. This theorem plays an important role in the local theory of regular systems. On the other hand, this theorem is an essential step of a proof of the 3D version of the crystal kernel conjecture: the subset of all points of an arbitrary Delone set X whose local groups contain axes of only crystallographic order 2, 3, 4, or 6 is also a Delone. set. This conjecture, if it is true, generalizes the theorem on the absence of the 5-fold axes in a 3D-lattice.

The talk is mainly based on recent joint results of the author and M. I. Shtogrin.

УДК 519.644.7+511.43

Распределение последовательностей Коробова — Главки

А. А. Илларионов (Россия, г. Хабаровск)
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
e-mail: illar_a@list.ru

The distribution of the Korobov–Hlawka sequences

A. A. Illarionov (Russia, Khabarovsk)
Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Khabarovsk division
e-mail: illar_a@list.ru

Let $N \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$. The finite sequences (grids) $K_N(a)$ consisting of the points

$$x^{(k)} = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right), \quad k = 1, \ldots, N$$

are of great interest, both from the practical and the theoretical points of view. Here $\{\alpha\}$ is the fractional part of a real α. Points of this kind were suggested independently by Korobov [1] and Hlawka [2] as nodes of multidimensional quadrature formulae. This idea gave rise to a whole direction on the borders of number theory and computational mathematics.

Recall that the discrepancy $D(X)$ of a finite set $X \subset [0,1)^s$ is defined as

$$D(X) = \sup_{\Pi} \left| \frac{\#(X \cap \Pi)}{\#X} - \operatorname{meas} \Pi \right|,$$

where supremum is taken over all $\Pi = [x_1, x_1') \times \ldots \times [x_s, x_s')$ such that $0 \leqslant x_j < x_j' < 1$, $j = 1, \ldots, s$. Here and below $\#X$ denotes the cardinality of the set X.

From the theoretical and the practical points of view, it is reasonable to construct low-discrepancy sequences. If $s = 1$ and $\gcd(a_1, N) = 1$, then $D(K_N(a_1)) = 1/N$.

The investigation of the quantity $D(K_N(a))$ becomes significently more complicated when $s \geqslant 2$. The well-known upper bound

$$\mathfrak{D}_N^{(s)} \equiv \min_{a \in \mathbb{Z}_N^s} D(K_N(a)) \ll_s \frac{\ln^s N}{N}$$

was proved by Korobov for prime N and by Niederreiter [4] for any integer $N > 1$.

Larcher [5] proved that $\mathfrak{D}_N^{(2)} \ll \ln N \ln\ln N/\phi(N)$. Here and below $\phi(N)$ is Euler's function. The best upper bound was obtained by Bykovskii [6]. This bound is

$$\mathfrak{D}_N^{(s)} \ll_s \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln\ln N.$$

Likely,

$$\mathfrak{D}_N^{(s)} \gg_s \frac{\ln^{s-1} N}{N}.$$

If $s = 2$, then this inequality follows from Schmidt's Theorem [7]. By [8], so that

$$\mathfrak{D}_N^{(s)} \gg_s \frac{(\ln N)^{(s-1)/2+\eta(s)}}{N} \quad \text{for } s \geqslant 3,$$

where $\eta(s)$ is a positive constant depending only on s.

We define

$$H(x) = \prod_{i=1}^{s} \max\{1, |x_i|\} \quad \text{for } x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}^s,$$
$$q_N(a) = \min_x H(x) \quad \text{for } a = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\},$$

where minimum is taken over all non-trivial solutions $x \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\}$ of the congruence

$$a_1x_1 + \ldots + a_sx_s \equiv 0 \pmod N. \tag{1}$$

The parameter $q_N(a)$ was introduced independently by Bakhvalov [9] and Hlawka [2]. It characterizes the irregularity of the sequence $K_N(a)$. For example, the following estimates

$$\frac{1}{q_N(a)} \ll_s D(K(a, N)) \ll_s \frac{\ln^s N}{q_N(a)} \tag{2}$$

hold (see [10, § 5.1]). Hence, it is reasonable to choose the point $a \in \mathbb{Z}^s$ with large $q_N(a)$.

By Minkowski's convex body theorem, so that $q_N(a) \leqslant N/2$ (see [10, § 5.1]). Hence,

$$Q_N^{(s)} \equiv \max_{a \in \mathbb{Z}^s} q_N(a) \leqslant \frac{N}{2}.$$

Take any $a_1 \in \mathbb{Z}$ such that $\gcd(a_1, N) = 1$. Let $a_1/N = [b_0; b_1, \ldots, b_k]$ be a continued fraction expansion. It is well known (see [10, Lemma 5.17]) that

$$q_N(a) \asymp N \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant k} b_i \right)^{-1} \quad \text{for } a = (a_1, 1). \tag{3}$$

Korobov and other experts have repeatedly conjectured that for some absolute constant C and each positive integer N there must exists $a_1 \in \mathbb{Z}$ such that $\gcd(a_1, q) = 1$, $b_j \leqslant C$ for each j. This is well known as Zaremba's conjecture and is not yet proved.

If Zaremba's conjecture is true, then $Q_N^{(2)} \gg N$ by (3). However, the best known lower bound is

$$Q_N^{(s)} \underset{s}{\gg} \frac{N}{\ln^{s-1} N} \quad (s \geqslant 2).$$

This estimate was proved by Bakhvalov [9], Hlawka [2] for prime N, and by Zaremba [11] for any integer $N > 1$.

We prove the following results.

Let $\mathbb{Z}_N$ be a complete residue system and $\mathbb{Z}_N^*$ be a reduced residue system modulo N.

Theorem 1. *Suppose $s \geqslant 3$, $N \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [1, +\infty)$, and $N > 1$, $\ln \lambda \underset{s}{\ll} \ln \ln N$. Then*

$$\frac{1}{\phi^s(N)} \cdot \# \left\{ a \in (\mathbb{Z}_N^*)^s : \ \frac{N}{\lambda \ln^{s-1} N} \leqslant q_N(a) \leqslant \lambda \frac{N}{\ln^{s-1} N} \right\} = 1 + O_s\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4}$$

Corollary 1. *Under the conditions of Theorem 1,*

$$\frac{1}{\phi^s(N)} \cdot \# \left\{ a \in (\mathbb{Z}_N^*)^s : \ D(K_N(a)) \leqslant \frac{\ln^{s-1} N}{\lambda N} \right\} \underset{s}{\ll} \frac{1}{\lambda}.$$

Theorem 2. *For any integer $s \geqslant 3$ there exists a positive constant $C(s)$ depending only on s such that if $N \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [1, +\infty)$, and $N \geqslant 3$, $\ln \lambda \underset{s}{\ll} \ln \ln N$, then*

$$\frac{1}{\phi^s(N)} \cdot \# \left\{ a \in (\mathbb{Z}_N^*)^s : \ D(K_N(a)) \geqslant \lambda C(s) \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln \ln N \right\} \underset{s}{\ll} \frac{1}{\lambda \ln \ln N}. \tag{5}$$

Proofs of Theorems 1, 2 are based on Chebyshev's inequality. Corollary 1 follows from Theorem 1 and bound (2). We also use Bykovskii's estimate for $D(K_N(a))$ (see [6, Theorem 1]) to prove Theorem 2.

By Theorem 2 and Corollary 1,

$$\frac{\ln^{s-1} N}{N \ln \ln N} \underset{s}{\ll} D(K_N(a)) \underset{s}{\ll} \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln \ln N$$

for "almost all" $a \in (\mathbb{Z}_N^*)^s$.

Remark. Let $s = 2$. Then (5) follows from [12]. By (3) and [13, Theorem 1], so that

$$\frac{1}{\phi(N)} \cdot \# \left\{ a \in \mathbb{Z}_N^* : \ q_N(a, 1) \geqslant \lambda \frac{N}{\ln^{s-1} N} \right\} \ll \frac{\ln N}{\lambda} e^{-c\lambda},$$

where c is an absolute positive constant. Besides, from [12] it follows that

$$\frac{1}{\phi(N)} \cdot \# \left\{ a \in \mathbb{Z}_N^* : \ q_N(a, 1) \leqslant \frac{N}{\lambda \ln^{s-1} N} \right\} \ll \frac{1}{\lambda}.$$

REFERENCES

1. Н.М. Коробов. О приближенном вычислении кратных интегралов // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, N 6.
2. E. Hlawka. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatsh. Math. 1962. V. 66, N 2.
3. Н.М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: МЦНМО, 2004/
4. H. Niederreiter. Existence of good lattice points in the sense of Hlawka // Monatsh. Math. 1978. V. 86, N 3.
5. G. Larcher. On the distribution of sequences connected with good lattice points // Monatsh. Math. 1986. V. 101, N 2.
6. В.А. Быковский. Отклонение сеток Коробова // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, N 3.
7. W.M. Schmidt. Irregularities of distribution. VII // Acta Arith. 1972. V. 21. P. 45–50.
8. D. Bilyk, M. Lacey, A. Vagharshakyan. On the small ball inequality in all dimensions // J. Funct. Anal. 2008. V. 254, N 9. P. 2470–2502.
9. Н.С. Бахвалов. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1959, N 4. С. 3–18
10. H. Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, SIAM, Philadelphia, Penn., 1992, CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics, v. 63.
11. S. K. Zaremba. Good lattice points modulo composite numbers // Monatsh. Math. 1974. V. 78. P. 446–460.
12. М. Г. Рукавишникова. Закон больших чисел для суммы неполных частных рационального числа с фиксированным знаменателем // Матем. заметки. 2011. Т. 90, N 3.
13. Н.Г. Мощевитин. О множествах вида $\mathcal{A}+B$ и конечных цепных дробях // Матем. сб. 2007. V. 198, N 4.

———————————————————————————————————————

A problem in comparative order theory

S. V. Konyagin (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: konyagin23@gmail.com

Let p be a prime, and let α be an integer, $(\alpha, p) = 1$. Then we can define $\mathrm{ord}_p(\alpha)$ as the least positive integer k such that
$\alpha^k \equiv 1 (\mathrm{mod} p)$. A pair (α, β) of nonzero integers is said to be order–dominant if $\mathrm{ord}_p \alpha > \mathrm{ord}_p \beta$ holds for infinitely many primes p.

It is easy to see that if α is a power of β then (α, β) is not order–dominant. Assuming the Generalized Riemann Hypothesis, O. Järviniemi (2020) proved the converse: if α is not a power of β

then (α, β) is order–dominant. In our recent joint paper with Paul Pollack we prove unconditionally that (α, β) is order–dominant for a wide class of pairs (α, β).

———————————————————————————————————

УДК 511.32

Метод А. А. Карацубы оценки сумм Клоостермана и его развитие

М. А. Королев (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии наук; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

A. A. Karatsuba's method of estimation of Kloosterman sums and its development

M. A. Korolev (Russsia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences; Lomonosov Moscow State University
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Пусть $q \geqslant 3$ – произвольное целое число, и пусть для целого n, взаимно простого с q, символ $\overline{n}$ обозначает вычет, обратный к n по модулю q, т.е. решение сравнения $n\overline{n} \equiv 1 \pmod{q}$. Тригонометрическая сумма вида

$$S(q;a,b) \;=\; \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} \exp\left(2\pi i\,\frac{a\overline{n}+bn}{q}\right) \tag{1}$$

называется полной суммой Клоостермана по модулю q. Суммы (1) естественным образом возникают при решении ряда задач аналитической теории чисел.

Наряду с (1) рассматриваются суммы вида

$$S(q;a,b;N) \;=\; \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\(n,q)=1}} \exp\left(2\pi i\,\frac{a\overline{n}+bn}{q}\right), \quad 1<N<q, \tag{2}$$

называемые неполными суммами Клоостермана.

Нетривиальные оценки сумм (2), т.е. неравенства $|S(q;a,b;N)| \leqslant N\Delta$, где $0<\Delta<1$, позволяют исследовать распределение величин $a\overline{n}+bn$, $1 \leqslant n \leqslant N$, в кольце вычетов $\mathbb{Z}_q$, разрешимость некоторых сравнений, содержащих величины $\overline{n}$, и т.д.

Классическая оценка А. Вейля вида

$$|S(p;a,b)| \leqslant 2\sqrt{p},$$

справедливая при простом p и $(a,p)=1$, наряду с явными формулами Х. Салье для $S(p^k;a,b)$, $k=2,3,4,\ldots$ и свойством мультипликативности сумм Клоостермана приводят к нетривиальной оценке неполной суммы $S(q;a,b;N)$ при числе слагаемых, незначительно превышающем квадратный корень из модуля: $N \geqslant q^{1/2+\varepsilon}$ (здесь $\varepsilon>0$ - сколь угодно малое фиксированное число, $q \geqslant q_0(\varepsilon)$). Однако при $N \leqslant \sqrt{q}$ в общем случае к оценкам неполных сумм Клоостермана долгое время не было никаких подходов.

В начале 1990-х гг. Анатолий Алексеевич Карацуба открыл принципиально новый метод оценок неполных сумм Клоостермана, который позволил получать их нетривиальные оценки уже при $N \geqslant q^{\varepsilon}$ (а в ряде случаев - и при ещё меньших N). В докладе мы расскажем об идеях, которые лежат в основе метода А.А. Карацубы и о полученных с его помощью результатах.

———————————————————————————————

УДК 512.552, 519.145

Вопросы строения конечных квазиполей и групп коллинеаций полуполевых проективных плоскостей[1]

О. В. Кравцова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru
В. М. Левчук (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru
Н. Д. Подуфалов (Россия, г. Москва)
Российская академия образования
e-mail: londont@yandex.ru

The problems on structure of finite quasifields and collineation groups of semifield projective planes

O. V. Kravtsova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: ol71@bk.ru
V. M. Levchuk (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru
N. D. Podufalov (Russia, Moscow)
Russian Academy of Education
e-mail: londont@yandex.ru

Изучаются известные задачи, связанные с исследованием конечных проективных плоскостей, их групп коллинеаций и координатизирующих алгебраических систем.

Полуполе (квазитело, в терминологии Куроша) — это простое кольцо, в котором ненулевые элементы по умножению образуют лупу. К более общему понятию *квазиполя* приходим, ослабляя двустороннюю дистрибутивность до односторонней. Тесно связанные исследования проективных плоскостей трансляций и координатизирующих квазиполей проводятся уже более века (О. Веблен, Д. Маклаган–Веддерберн, Л. Диксон, подробно в монографии [1] и обзоре [2]).

Следующие структурные вопросы для конечных полуполей и квазиполей исследовались в различных ситуациях уже давно и записаны в [3].

(A) *Перечислить максимальные подполя, найти их число и возможные порядки.*

(B) *Выявить конечные квазиполя Q с неоднопорожденной лупой Q^*.*
Гипотеза: *лупа Q^* всякого конечного полуполя Q однопорождена.*

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

(C) *Выявить, какие возможны спектры лупы Q^* конечного полуполя и квазиполя.*

(D) *Найти порядок группы автоморфизмов.*

В работе представлено решение перечисленных вопросов для конечных почти-полей, всех полуполей порядка 16, а также полуполей порядков 3^4, 5^4, 13^4 с дополнительными условиями. Полностью решены вопросы и для исключительных полуполей Кнута–Руа и Хентзела–Руа — контрпримеров порядков 32 и 64 к гипотезе Венэ [3]. Обсуждается вопрос об ограниченности в совокупности числа максимальных подполей в конечных почти-полях Диксона, а также вопрос существования квазиполей с мультипликативной лупой Муфанг.

Координатизация точек и прямых проективной плоскости устанавливает тесную связь между геометрическими свойствами плоскости и алгебраическими свойствами координатизирующего множества. Эта взаимосвязь делает возможным единый подход при помощи метода регулярного множества к исследованию структурных вопросов для полуполей и к решению проблем строения группы коллинеаций (автоморфизмов) недезарговых полуполевых проективных плоскостей. Так, предлагается подход к изучению известной *проблемы Хьюза* (1959), записанной в [1] и Коуровской тетради (вопрос 11.76, 1990): разрешима ли полная группа коллинеаций конечной проективной плоскости, координатизируемой неассоциативным полуполем? Метод регулярного множества предлагается применять в сочетании с классификационными результатами о конечных простых группах и теоремой Д.Г. Томпсона о минимальных простых группах. Перечисляются бесконечные серии простых групп, которые можно исключить из списка возможных подгрупп коллинеаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes. — New-York: Springer–Verlag Publ., 1973, 324 p.

2. Johnson N.L., Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes. — London New York, Chapman Hall/CRC, 2007, 888 p.

3. Levchuk V.M., Kravtsova O.V. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, no. 4. P. 688–698.

——————————————————————————

УДК 517.927.25+517.589

Вокруг теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках[1]

К. А. Мирзоев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mirzoev.karahan@mail.ru
Т. А. Сафонова (Россия, г. Архангельск)
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: t.Safonova@narfu.ru

Around the Gauss theorem on the values of Euler's digamma function at rational points

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

K A. Mirzoev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: mirzoev.karahan@mail.ru
T. A. Safonova (Russia, Arkhangelsk)
Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov
e-mail: t.Safonova@narfu.ru

I. Нами в работах [1] - [3] предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральное представление сумм некоторых степенных рядов и специальных функций. Приведём формулировку одной из теорем, справедливость которой устанавливается этим методом.

Теорема 1. *При* $-1 < a < 1$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a\cos(a\pi/2)} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x} dx, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2\cos(a\pi/2)} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos(ax) - \cos(a\pi/2)}{\cos x} dx, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{k^2 - a^2} = \frac{1}{a\sin(a\pi)} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2 dx, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} + \frac{1}{a^2\sin(a\pi)} \int\limits_0^{\pi/2} (\sin(2ax) - \sin(a\pi)) \operatorname{tg} x dx. \tag{4}$$

Символом $\psi(a)$ обозначим дигамма-функцию Эйлера - логарифмическую производную Г-функции Эйлера - а символом $G(a)$ - связанную с ней функцию, определяемую равенством

$$G(a) = \psi\left(\frac{1+a}{2}\right) - \psi\left(\frac{a}{2}\right).$$

Для них справедливы формулы

$$\psi(a) = -\gamma + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+a}\right), \qquad G(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+a},$$

где γ - постоянная Эйлера (см., напр., [4, приложения II.2 и II.3]) и следующее следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *При* $0 < a < 1$ *справедливы равенства*

$$\psi(a) = -\gamma - 2\ln 2 - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi) + \frac{1}{\sin(a\pi)} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(a\pi) - \cos(2a-1)x}{\cos x} dx = \tag{5}$$

$$= -\gamma - \ln 2 - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi) + \frac{1}{\sin(a\pi)} \int\limits_0^{\pi/2} (\sin(a\pi) - \sin(2ax)) \operatorname{tg} x dx, \tag{6}$$

$$G(a) = \frac{\pi}{2\sin(a\pi)} - \frac{1}{\sin(a\pi)} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(2a-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2\sin(a\pi)} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{a\sin(a\pi)} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2 dx. \tag{7}$$

Отметим, что формулы (7) известны (см. [5, гл. XII, п. 8, стр. 392] и [4, гл.2, п. 2.5.12, формула 27]), а формулы (5) и (6), по-видимому, являются новыми.

Далее символом

$$ {}_{p+1}F_p(a_1, a_2, \dots, a_{p+1}; b_1, b_2, \dots, b_p; z), $$

обозначим обобщённый гипергеометрический ряд с параметрами числителя $a_1, a_2, \dots, a_{p+1}$ и знаменателя $b_1, b_2, \dots, b_p$ и аргументом z (см., напр., [6, гл.2, формула 2.1.2]).

Из теоремы 1 также можно извлечь справедливость следующего следствия.

Следствие 2. *При $-1 < a < 1$ справедливы равенства*

$$ {}_3F_2\left(\frac{1-a}{2}, \frac{1+a}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 1; 1\right) = \frac{2}{a\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x} dx, $$

$$ {}_4F_3\left(1-\frac{a}{2}, 1+\frac{a}{2}, 1, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2; 1\right) = \frac{2}{a^2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(ax)}{\sin x} dx, $$

$$ {}_3F_2\left(1-a, 1+a, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; 1\right) = \frac{2}{a^2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2 dx, $$

$$ {}_4F_3\left(1-a, 1+a, 1, 1; \frac{3}{2}, 2, 2; 1\right) = \frac{1}{a^2} \int\limits_0^{\pi/2} \left(x - \frac{\sin(2ax)}{2a}\right) \frac{dx}{\sin^2 x}. $$

II. Пусть a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a = p/q$, где $p,\ q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда интегралы, стоящие в правых частях равенств (1) - (7), являются интегралами вида $\int\limits_0^{\pi/(2q)} R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(u, v)$ - дробно-рациональная функция двух переменных, и явно вычисляются в терминах элементарных функций. Вычисление интегралов, стоящих в правых частях равенств (1) - (4), приводит к справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $a = p/q$, где $p,\ q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда, если p и q - нечётные числа, то*

$$ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q} \ln \sin(2k-1)\frac{\pi}{2q}, $$

$$ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\ln\frac{q}{2} - \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \cos\frac{pk\pi}{q} \ln \sin\frac{k\pi}{q}\right), $$

если же p и q - числа разной чётности, то

$$ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q} \ln \mathrm{tg}(2k-1)\frac{\pi}{4q}, $$

$$ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\ln q + \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \cos\frac{pk\pi}{q} \ln \mathrm{ctg}\frac{k\pi}{2q}\right), $$

и, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-a^2}=\frac{q}{2p}+2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{2q},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)}=\left(\frac{q}{p}\right)^2\left(\ln(2q)-\frac{q}{2p}-2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q}\right).$$

Вычисление интегралов из равенства (6) и второй части равенства (7) позволяет получить аналогичные формулы для значений функций $\psi(p/q)$ и $G(p/q)$, в частности, позволяет получить ещё одно доказательство известной теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках, т.е. справедливость равенства

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)=-\gamma-\ln(2q)-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{p\pi}{q}\right)+2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos\frac{2pk\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q}$$

(см., напр., [3, приложения II.2] или [6, теорема 1.2.7, стр. 30]).

Кроме того, используя следствие 2, можно вывести формулы для значений гипергеометрических функций

$${}_3F_2\left(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;1\right),\ {}_3F_2\left(1-a,1+a,\frac{1}{2};\frac{3}{2},2;1\right),$$

$${}_4F_3\left(1-\frac{a}{2},1+\frac{a}{2},1,1;\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;1\right),\quad {}_4F_3\left(1-a,1+a,1,1;\frac{3}{2},2,2;1\right)$$

при рациональных значениях параметра a. В частности, справедливо равенство

$${}_3F_2\left(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;1\right)=\frac{4q}{p\pi}\cos\frac{p\pi}{2q}\sum_{k=1}^{[q/2]}(-1)^k\sin\left(2k-1\right)\frac{p\pi}{2q}\ln\sin\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2q}.$$

Если же положить $a=a_n=(p_n/q_n)\to 0$ при $n\to+\infty$ и перейти к пределу в обеих частях равенств из теоремы 2, можно получить новые аппроксимации для $\ln 2$, постоянных Каталана (G) и Апери ($\zeta(3)$). В частности, полагая $a_n=1/(2n)$, приходим к справедливости следующего следствия из теоремы 2.

Следствие 3. *Справедливы равенства*

$$\ln 2=\lim_{n\to+\infty}\left(n+\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\ln\left(1-\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)\right),$$

$$G=2\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}\ln\operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{8n},$$

$$\zeta(3)=4\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\ln(2n)-2n-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}\ln\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{32}{7}\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\ln(2n)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{2n}\ln\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{4n}\right)=$$

$$=\frac{16}{3}\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\ln 2-n-\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\ln\left(1-\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // ДАН. 2018. Том 3, № 1. С. 329-354.

2. Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Труды ММО. 2019. Том 80, № 2. С. 157-177.

3. Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Интегральное представление сумм некоторых рядов, связанных со специальными функциями // Математические заметки. 2020. Том 108, № 4. С. 632-637.

4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т.1. Элементарные функции. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

5. Bromwich T. J.I'A. An introduction to the theory of infinite series. 2nd Ed. — Ed.: MacMillan&LTD, 1926.

6. Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж. Специальные функции — М.: МЦНМО, 2013.

———————————————————————————

УДК 512.71

Формальный коцикл Ботта и детерминантное центральное расширение

Д. В. Осипов (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
e-mail: d_osipov@mi-ras.ru

Formal Bott cocycle and determinantal central extension

D. V. Osipov (Russsia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russsian Academy of Sciences; National Research University Higher School of Economics; National University of Science and Technology "MISiS"
e-mail: d_osipov@mi-ras.ru

В 1977 году Р. Ботт определил в [1] знаменитый 2-коцикл B на группе $\mathrm{Diff}(S^1)$, которая есть группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности S^1:

$$B(\phi_1, \phi_2) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \log \phi_1' \, d \log \phi_2'(\phi_1)\,,$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — диффеоморфизмы окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, которые можно понимать просто как гладкие биективные функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, которые периодичны с периодом 1.

Коцикл Ботта (или еще его называют коциклом Ботта-Терстона) очень важен в теории представлений и задает центральное расширение группы $\mathrm{Diff}(S^1)$ группой $\mathbb{R}^*$. Для соответствующих алгебр Ли получается центральное расширение алгебры Ли векторных полей на окружности при помощи абелевой алгебры Ли $\mathbb{R}$. Получившаяся алгебра Ли — это знаменитая алгебра Вирасоро, а коцикл на уровне алгебр Ли — это знаменитый коцикл Гельфанда-Фукса.

Я расскажу про формальную версию коцикла Ботта на языке коммутативной алгебры. Рассмотрим произвольное коммутативное кольцо A с единицей. Рассмотрим кольцо рядов Лорана $A((t))$ над кольцом A. Кольцо $A((t))$ становится топологическим кольцом, если за базу окрестностей нуля в кольце $A((t))$ взять A-подмодули $t^nA[[t]] \subset A((t))$, а на самом кольце A рассматривать дискретную топологию.

Пусть $\mathrm{Aut}(A((t)))$ — группа непрерывных A-автоморфизмов кольца $A((t))$. Тогда элемент ϕ из группы $\mathrm{Aut}(A((t)))$ однозначно определяется образом $\phi(t)$ элемента t в кольце $A((t))$. Группа $\mathrm{Aut}(A((t)))$ является алгебраическим аналогом группы $\mathrm{Diff}(S^1)$. На группе $\mathrm{Aut}(A((t)))$ пишется формальный аналог коцикла Ботта: это 2-коцикл со значением в группе A^*. При этом формула для формального коцикла Ботта аналогична формуле, написанной выше для обычного коцикла Ботта, но отображение

$$\exp \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \log(\cdot)\, d\log(\cdot)$$

заменяется на символ Конту-Каррера, который есть отображение

$$A((t))^* \times A((t))^* \longrightarrow A^*$$

и задается в случае $\mathbb{Q}$-алгебры A похожей формулой, см. [2].

Я расскажу про различные свойства и формулы для формального коцикла Ботта, приходящие из описываемого по-другому центрального расширения группы $\mathrm{Aut}(A((t)))$ группой A^*, а именно, детерминантного центрального расширения.

Отмечу также, что символ Конту-Каррера связан с арифметическими вопросами, а формальный коцикл Ботта связан с алгебраическими кривыми и различными инвариантами на них.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bott R., On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms // L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. 2e Série. 1977, Vol. 23, № 3-4, p. 209-220.

2. Горчинский С. О., Осипов Д. В., Итерированные ряды Лорана над кольцами и символ Конту-Каррера // Успехи математических наук. 2020. Том 75, № 6(456), С. 3-84.

———————————————————————————————

УДК 511.32

О распределении произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях по составному модулю

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

On the distribution of products of shifted primes in arithmetic progressions modulo composite

Z. Kh. Rakhmonov (Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

Известно, что в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана имеет место оценка

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|\ll x+x^{\frac12}q(\ln xq)^2, \qquad (1)$$

$$T(x;Q)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|\ll x^{\frac12}Q^2(\ln xQ)^2, \qquad (2)$$

где * означает, что суммирование ведется по всем примитивным характерам по модулю q. При решении ряда задач теории простых чисел достаточно, чтобы для $T(x;Q)$ и $t(x;q)$ имелись оценки, близкие к оценкам (1) и (2).

А.А. Карацуба [1, 2] создал метод решения тернарных мультипликативных задач, с помощью которого оценил самый простой случай величины $t(x;q)$ и сочетании со своей оценкой суммы значений неглавного характера по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел [2, 3, 4] решил задачу о распределении чисел вида $p_1(p_2+a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью в следующей формулировке.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon\in\left(0,\frac14\right]$; $x\geqslant x_0(\varepsilon)$ — достаточно большое положительное число; q — простое число, $q\leqslant x^{ae_0}$, $ae_0=1/(4,6+\varepsilon)$; $(a,q)=1$, $(l,q)=1$, α — произвольное число из интервала*

$$\left[\left(\frac12+\varepsilon\right)\frac{\mathscr{L}}{\ln x},1-4,1\frac{\mathscr{L}}{\ln x}\right],\qquad \mathscr{L}=\ln q;$$

$x_1\geqslant x^{1-\alpha}$, $x_2\geqslant x^{\alpha}$; p_1, p_2 — простые числа; $\pi_2(x_1,x_2,a,l)$ — количество чисел $p_{\leqslant}x_1$, $p_2\leqslant x_2$ таких, что $p_1(p_2+a)\equiv l\pmod q$, $\delta>0$ — сколь угодно малое число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\pi_2(x_1,x_2,a,l)=\frac{\pi(x_1)\pi(x_2)}{\varphi(q)}+O\left((x_1x_2)^{1+\delta}\,q^{-1-\frac{\varepsilon^2}{1024}}\right),$$

где константа в O зависит только от ε.

А.А. Карацуба [1] в этой работе отметил, что

- совершенно так же исследуется вопрос о распределении в арифметических прогрессиях чисел вида $(p_1^n+a)f(p_2)$, где p_1 и p_2 — простые числа, f — многочлен с целыми коэффициентами;
- этим же методом можно решать задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем» и другие задачи.

М.М. Петечук [5] применяя метод решения тернарных мультипликативных задач А.А. Карацубы, и используя оценки коротких сумм характеров, полученные В.Н. Чубариковым [6] доказал асимптотическую формулу для суммы

$$S=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l\pmod q}}\tau_k(n)$$

где $q = p^m$, p — фиксированное простое число, $(l, q) = 1$, $q \leqslant x^{\frac{3}{8}+\varepsilon}$. Затем А.А. Карацуба и М.М. Петечук получили асимптотическую формулу для суммы S в случае, когда q — простое, и $q \leqslant x^{\frac{4}{k}-\varepsilon}$, $k \geqslant k_0 \geqslant 7$ (1979 г., доклад на семинаре аналитической теории чисел в МГУ). Применение оценок коротких сумм характеров по модулю, свободному от кубических делителей, позволило Иванцу и Фридлендеру [7] перенести этот результат на случай бескубических модулей.

В 1989 г. автор [8], опираясь на метод А.А. Карацубы, элементарно доказал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q)x^{\varepsilon}.$$

Этим же методом Пан Чен Донг и Пан Чен Бьяо [9] показали, что

$$T(x;Q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}Q + x^{\frac{1}{2}}Q^2)(\ln xQ)^4.$$

Следствием этой оценки является теорема о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в «среднем», на возможность получения которой было указано в [1].

Г. Монтгомери [10], пользуюсь своей плотностной теоремой о нулях L-рядов Дирихле, доказательство которой опирается на метод большого решета, показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)(\ln xq)^{16},$$
$$T(x;Q) \ll (xQ^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}Q^2)(\ln xQ)^{11}.$$

Этот результат уточнил Р.Вон [11]. Он, с помощью метода большого решета и специального представления логарифмической производной L-функции, доказал, что

$$t(x;q) \ll x(\ln xq)^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}(\ln xq)^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q(\ln xq)^{\frac{7}{2}},$$
$$T(x;Q) \ll x(\ln xQ)^3 + x^{\frac{3}{4}}Q^{\frac{5}{4}}(\ln xQ)^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}Q^2(\ln xQ)^{\frac{7}{2}}.$$

Автор [12, 13, 14, 15, 16] в свою очередь уточнил оценки Р. Вона. Воспользовавшись методом решения тернарных мультипликативных задач А.А. Карацубы в сочетании с новым аналитическим вариантом метода И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами доказал,что

$$t(x;q) \ll x(\ln xq)^3 + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}(\ln xq)^{34} + x^{\frac{1}{2}}q(\ln xq)^{34}m, \tag{3}$$
$$T(x;Q) \ll x(\ln xQ)^3 + x^{\frac{4}{5}}Q(\ln xQ)^{34} + x^{\frac{1}{2}}Q^2(\ln xQ)^{c}, \tag{4}$$

где $c = 34$, если $Q \leqslant x^{\frac{5}{3}}(\ln x)^{-\frac{5}{3}}$, $c = \frac{7}{2}$, если $Q > x^{\frac{5}{6}}(\ln x)^{-\frac{5}{6}}$.

А.А. Карацуба в своей работе [1] также отметил, что в теореме 1 верхняя граница для q, в случае, когда q — простое число, может быть значительно увеличена, но не более, чем до x^{ae_1}, то есть величина

$$\mathrm{ae}_0 = \frac{1}{4,6+\varepsilon}$$

может быть заменена на величину

$$\mathrm{ae}_1 = \frac{1}{2,5+\varepsilon},$$

которая является следствием условной оценки (1).

Автору удалось, воспользовавшись оценкой (3), следствием оценки (4) о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем», нетривиальными оценками коротких сумм значений неглавного характера χ по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел в случае, когда модуль примитивного характера χ_d, порождённого характером

χ, является числом свободным от кубов [17], а также в случае когда q — произвольное составное число [19], доказать теорему А.А. Карацубы о распределении чисел вида $p_1(p_2+a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью при

$$\text{ae}_0 = \frac{1}{2,5+\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & q \text{ — число свободное от кубов;} \\ \frac{5}{6}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ — достаточно большое положительное число; q — натуральное число, $q \leqslant x^{\text{ae}_0}$, ae_0 определяется соотношением (5),*

$$\alpha \in \left[(\theta+\varepsilon)\frac{\mathscr{L}}{\ln x}, 1-2,5\frac{\mathscr{L}}{\ln x}\right], \qquad x_1 \geqslant x^{1-\alpha}, \qquad x_2 \geqslant x^{\alpha},$$

p_1, p_2 — простые числа; $(a,q)=(l,q)=1$, $\pi_2(x_1,x_2,a,l)$ — количество чисел $p_1 \leqslant x_1$, $p_2 \leqslant x_2$ таких, что $p_1(p_2+a) \equiv l \pmod q$. Тогда для произвольного числа $A > 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\pi_2(x_1,x_2,a,l) = \frac{1}{\varphi(q)}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\mathrm{Li}(x_1)\mathrm{Li}(x_2) + O\left(\frac{x_1x_2}{\varphi(q)\ln x_1 \ln x_2 \mathscr{L}^A}\right),$$

где константа в O зависит только от ε.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Том 192.Вып. 4. С. 724–727.

2. Карацуба А.А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // УМН. 2008. Том 63. Вып. 4(382). С. 43–92.

3. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1970. Том 34. С. 299 – 321.

4. Карацуба А.А. О суммах характеров с простыми числами // Доклады АН СССР. 1970. Том 190. № 3. С. 517 – 518.

5. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечетного простого числа // Известия АН СССР. Сер. матем. 1979. Том 43. № 4. С. 892-908.

6. Чубариков В.Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ. 1973. № 2.С. 46—52.

7. Friendlander J.B., Iwaniec H. The divisor problem for arithemetic progressions // Acta Arith. 1985. V. 45,№ 3. P. 273-277.

8. Рахмонов З. Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Том 52, № 1. С. 211-224.

9. Пан Чен Донг, Пан Чен Бьяо Основы аналитической теории чисел (на китайском языке). — Пекин, 1991.

10. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. — М.: изд-во Мир, 1974.

11. Vaughan R. Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. (2). 10(1975), 153-162.

12. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Том 57, № 4. С. 55-71.

13. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской Академии наук. 1993. Том 331. № 3. С. 281-282.

14. Рахмонов З. Х., Нозиров О.О. О средних значениях функций Чебышёва и их приложениях // Чебышевский сборник. 2021. Том 22. № 5(81). С. 198 – 222.

15. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении функций Чебышева //Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1994. Том 58. № 3. С. 1277-139.

16. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении в теории простых чисел // Доклады Российской Академии наук. 1996. Том 349. № 5. С. 606-607.

17. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Тр. МИАН. 2017. Том 299. С. 1 – 27.

18. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН РТ. 2017. Том 60. № 9. С. 378-382.

19. Rakhmonov Z.Kh. Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes. (2018) In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers. pp 187-217. Springer, Cham. First Online 05 July 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-92777-0_10.

———————————————————————————

УДК 511.36

Ограниченная бесконечная линейная независимость значений обобщенных гипергеометрических рядов с полиадическими лиувиллевыми параметрами

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Restricted infinite linear independence of values of generalized hypergeometric series with polyadic Liouvillean parameters

V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Доклад посвящен исследованию арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n...(\alpha_{m-1})_n z^n,$$

где символ Похгаммера $(\gamma)_n$ определяется равенствами $(\gamma)_0 = 1$ и $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)$ при $n \geq 1$. Частные случай этой задачи, относящиеся к рядам

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n, f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n\lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n\lambda^n$$

рассмотрены в работах [1] –[4]. Во всех этих работах существенно использованы аппроксимации Эрмита-Паде из работы Ю.В. Нестеренко [5]. Некоторые ограничения на подмножества простых чисел получены при рассмотрении простых чисел из совокупностей арифметических прогрессий. Этот подход был использован в работах В.В. Зудилина, Т. Маталаахо, А.-М. Эрнвалл-Хитонен, Т. Сеппала [6],[7], относящихся к так называемому ряду Эйлера $\sum_{n=o}^{\infty} n!(-z)^n$.

Дадим необходимые для дальнейшего определения. Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых $p-$ адических чисел по всем простым числам p. Элементы θ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых $p-$ адических чисел обозначаем $\theta^{(p)}$. Бесконечная линейная независимость полиадических чисел $\theta_1, ..., \theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1x_1 + ... + h_mx_m$ с целыми коэффициентами $h_1, ..., h_m$ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле Q_p выполняется неравенство

$$h_1\theta_1^{(p)} + ... + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0.$$

Будем называть полиадическое число θ *полиадическим числом Лиувилля* (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство $|\theta - A|_p < A^{-n}$. Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $p-$ адических чисел [8],[9].

Пусть λ_0- произвольное натуральное число, большее 1. Положим $s_0 = [\exp(\lambda_0)]+1$. Пусть λ_1-произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_0 + \lambda_0$ выполняется неравенство $ord_p\lambda_1 \geq ms_0 \ln s_0$ и пусть $s_1 = [\exp(\lambda_1)] + 1$. При $k \geq 1$ пусть $\lambda_{k+1}-$ произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_k + 2(\lambda_k)^2$ выполняется неравенство $ord_p\lambda_{k+1} \geq ms_k \ln s_k$ и пусть $s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1$. Пусть $\mu_{i,0}, i = 1, ..., m-1-$ натуральные числа. Пусть для любых $i = 1, ..., m-1, k \geq 1$ числа $\mu_{i,k}-$ неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству $\mu_{i,k} \leq \lambda_k$.

Пусть

$$\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty}\mu_{i,l}\lambda_l, i = 1, ..., m-1.$$

Если при $l \geq k+1$ выполняются равенства $\mu_{i,l} = 0$,то α_i- натуральное число. Иначе этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля. Будем рассматривать ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n...(\alpha_{m-1})_nz^n,$$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1+1)_n...(\alpha_i+1)_n(\alpha_{i+1})_n...(\alpha_{m-1})_nz^n, \quad i = 1, ..., m-1.$$

Пусть $M-$ натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по $mod(M)$. Как обычно, число элементов этой системы обозначается $\varphi(M)$, где $\varphi(M)-$ функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны ρ различных элементов $a_1, ..., a_\rho$ этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать $\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{a}_\rho$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_i + Mk, k \in \mathrm{Z}$. Используя стандартное обозначение P для множества простых чисел, будем обозначать $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_\rho)$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{a}_\rho$.

Теорема 1. *Пусть $M, \rho-$ натуральные числа. Пусть $\varphi(M) > m, \rho > \frac{\varphi(M)(m-1)}{m}$. Тогда для любых целых чисел $h_0, h_1, ..., h_{m-1}$, не равных нулю одновременно и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathrm{P}(\boldsymbol{a}_1\ ,..., \boldsymbol{a}_\rho)$ таких, что в поле Q_p выполняется неравенство*

$$|L(\xi)|_p = |h_0 f_0(\xi) + ... + h_{m-1} f_{m-1}(\xi)|_p > 0.$$

Пусть натуральные числа μ_k удовлетворяют при любом k неравенству $\mu_k \le \lambda_k$. Пусть $\Xi = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l \lambda_l$.

Теорема 2. *Пусть $M, \rho-$ натуральные числа. Пусть $\varphi(M) > m, \rho > \frac{\varphi(M)(m-1)}{m}$. Тогда для любых целых чисел $h_0, h_1, ..., h_{m-1}$, не равных нулю одновременно, существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathrm{P}(\boldsymbol{a}_1\ ,..., \boldsymbol{a}_\rho)$ таких, что в поле Q_p выполняется неравенство*

$$|L(\Xi)|_p = |h_0 f_0(\Xi) + ... + h_{m-1} f_{m-1}(\Xi)|_p > 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл. Том 494. С. 69-70.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020. Vol 102, № 2. P.412-413.)

2. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter.//Russ.J.Math.Phys. 2021. Vol.28, № 3, P.294-302.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов с полиадическим лиувиллевым параметром.//Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 3. С. 156-167.

4. Чирский В. Г. Бесконечная линейная независимость с ограничением на подмножество простых чисел значений рядов с полиадическим лиувиллевым параметром.//Чебышевский сборник. 2022. Том 23, № 1. С. 153-167.

5. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций.//Матем.сб. 1994. Том 185, № 3. С. 39-72.(Англий перевод Nesterenko Yu. V.. Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions.// Russ.Acad.Sci.Sb.Math. 1995. Vol. 83. P.189-219)

6. Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T., Seppela L. Euler's divergent series in arithmetic progressions// J.Integer Sequences. 2019. Vol .22. 19.2.2. P. 10.

7. Matala-aho T., Zudilin W., Euler factorial series and global relations, J. Number Theory. 2018. Vol. 186. P. 202-210.

8. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля.// Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 3. С. 245-255.

9. Чирский В. Г. О полиадических числах Лиувилля // Чебышевский сборник. 2021 Том 22, № 5. С. 243-251.

УДК 511.3

О современных проблемах аналитической теории чисел и приложениях

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2020@mail.ru

On modern problems of analytic number theory and applications

V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Настоящая статья посвящена светлой памяти Анатолия Алексеевича Карацубы — выдающегося математика, профессора механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующего Отделом теории чисел Математического института имени В. А. Стеклова.

В своей работе “О некоторых проблемах теории простых чисел, связанных с методом И. М. Виноградова.” *Труды Международной конференции по теории чисел.* Москва, 14–18 сентября 1971 г. А. А. Карацуба так охарактеризовал основные достижения в теории тригонометрических сумм с простыми числами.

“Линейные аддитивные задачи с простыми числами, решенные методом И. М. Виноградова, широко известны благодаря тому факту, что одной из таких задач является проблема Гольдбаха. Однако проблема Гольдбаха может быть выведена из расширенной гипотезы Римана или даже из более слабых теорем, касающихся распределения простых чисел. Но существует целый класс как аддитивных проблем с простыми числами, так и ряд других проблем теории чисел, которые решаются методом И. М. Виноградова и которые не могут быть выведены из самых сильных гипотез относительно распределения простых чисел, в частности из расширенной гипотезы Римана.”

В приведенном выше высказывании А. А. Карацубы в частности идет речь о суммах Г. Вейля. Для однократных сумм Г. Вейля И. М. Виноградов разработал теорию, основу которой составила точная оценка моментов этих сумм. Она получила название *теоремы И. М. Виноградова о среднем*: *Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — вещественные числа. Тогда для интеграла J вида*

$$J = J(P; k, n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha x^n + \cdots + \alpha_1 x)} \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_1$$

справедлива оценка

$$J = J(P; k, n) \leqslant DP^{2k - 0.5n(n+1) + \delta(\tau)},$$

$$\delta = 0,5n(n+1)(1 - 1/n)^{\tau}, \quad D = D(\tau) = (n\tau)^{6n\tau}(2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

В то же время для кратных сумм Г. Вейля ничего не было известно, хотя сама задача была поставлена Виноградовым еще в сороковые годы прошлого столетия. Первые оценки кратных сумм были получены Г. И. Архиповым в 1971 г. и опубликованы им в 1974 г. Инициировал эту работу своих учеников Г. И. Архипова и С. М. Воронина и руководил ею А. А. Карацуба.

Другими словами, была получена правильная оценка сверху по порядку растущих параметров $\bar{P} = (P_1, \ldots, P_r)$, $P_1 = \min(P_1, \ldots, P_r)$ при $P_1 \to \infty$ следующей величины:

$$J = J(\bar{P}; \bar{n}, k) = \int \cdots \int_{\Omega} |S(\Omega)|^{2k} \, d\Omega,$$

где $S(\Omega)$ — кратная тригонометрическая сумма Г. Вейля вида

$$S(\Omega) = \sum_{x_1 \le P_1} \cdots \sum_{x_r \le P_r} \exp 2\pi i F(x_1, \ldots, x_r),$$

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}, \alpha(0, \ldots, 0) = 0,$$

причем Ω — набор вещественных коэффициентов $\alpha(\bar{t}) = \alpha(t_1, \ldots, t_r)$ многочлена $F(x_1, \ldots, x_r)$, $n_1, \ldots n_r \ge 1$, $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_r)$ и $d\Omega = \prod\limits_{t_1=0}^{n_1} \cdots \prod\limits_{\substack{t_r=0 \\ t_1+\cdots+t_r \ge 1}}^{n_r} d\alpha(t_1, \ldots, t_r)$.

В настоящем сообщении нами рассматриваются новые оценки кратных рациональных тригонометрических сумм и изучается вопрос о существовании их моментов. В теории моментов однократных сумм полное решение подобной задачи принадлежит Хуа Л.-к. Более точно, здесь мы оцениваем показатель сходимости особого ряда $\sigma = \sigma(k; n, r)$ в многомерной проблеме Тэрри. Этот ряд возникает в асимптотической формуле при $P \to \infty$ для количества решений диофантовой системы уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \ldots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \leqslant t_1, \ldots, t_r \leqslant n,$$

где $n \geqslant 2, k, r \geqslant 1$ — натуральные числа, $P \geqslant 1$ — вещественный параметр и каждое неизвестное $x_{i,j}$ принимает все целые значения от 1 до P.

Пусть

$$q = \prod_{0 \leqslant t_1, \ldots, t_r \leqslant n} q(t_1, \ldots, t_r), \; q(0, \ldots, 0) = 1, a(0, \ldots, 0) = 0.$$

Тогда особый ряд σ имеет вид

$$\sigma = \sum_{q(n,\ldots,n)=1}^{\infty} \cdots \sum_{q(0,\ldots,1)=1}^{\infty} \sideset{}{'}\sum_{a(n,\ldots,n)=1}^{q(n,\ldots,n)} \cdots \sideset{}{'}\sum_{a(0,\ldots,1)=1}^{q(0,\ldots,1)} \times$$

$$\times \left| q^{-r} \sum_{x_1=1}^{q} \cdots \sum_{x_r=1}^{q} \exp\{2\pi i F(x_1, \ldots, x_r)\} \right|^{2k},$$

где

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \frac{a(t_1, \ldots, t_r)}{q(t_1, \ldots, t_r)} x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}$$

многочлен с рациональными коэффициентами и штрих в суммированиях означает, что $(a(t_1, \ldots, t_r), q(t_1, \ldots, t_r)) = 1$.

Далее мы воспользуемся следующим утверждением

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant 2, r \geqslant 1, Q \geqslant 1$ — натуральные числа,*

$$G(x_1,\dots,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n} b(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}$$

многочлен с целыми коэффициентами в совокупности взаимно простыми с Q, и пусть

$$S(Q)=S(Q;G)=\sum_{x_1=0}^{Q}\cdots\sum_{x_r=0}^{Q}\exp\left\{2\pi i\frac{G(x_1,\dots,x_r)}{Q}\right\}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|S(Q;G)|\leqslant e^{7nr}3^{r\nu(Q)}(\tau(Q))^{r-1}Q^{r-1/n}.$$

Пусть Q — наименьшее общее кратное знаменателей $q(t_1,\dots,t_r),\ 0\leqslant t_1,\dots,t_r\leqslant n$ особого ряда σ, т.е. $Q=[q(n,\dots,n),\dots,q(0,\dots,1)]$.

Тогда особый ряд σ можно записать в виде

$$\sigma=\sum_{Q=1}^{\infty}\sum_{\substack{q(n,\dots,n)=1\\ [q(n,\dots,n),\dots,q(0,\dots,1)]=Q}}^{\infty}\cdots\sum_{q(0,\dots,1)=1}^{\infty}\sigma(Q),$$

где

$$\sigma(Q)=\sideset{}{'}\sum_{a(n,\dots,n)=1}^{q(n,\dots,n)}\cdots\sideset{}{'}\sum_{a(0,\dots,1)=1}^{q(0,\dots,1)}\times$$

$$\times\left|Q^{-r}\sum_{x_1=1}^{Q}\cdots\sum_{x_r=1}^{Q}\exp\left\{2\pi iF(x_1,\dots,x_r)\right\}\right|^{2k},$$

и многочлен $F(x_1,\dots,x_r)$ имеет вид, приведенный выше.

Используя лемму 1, находим

$$\sigma(Q)\ll\varphi(q(n,\dots,n))\dots\varphi(q(0,\dots,1))\left\{3^{r\nu(Q)}(\tau(Q))^{r-1}Q^{-1/n}\right\}^{2k}.$$

Следовательно,

$$\sigma\ll\sum_{Q=1}^{\infty}\left\{3^{r\nu(Q)}(\tau(Q))^{r-1}Q^{-1/n}\right\}^{2k}\sigma_0(Q),$$

где $m=(n+1)^r$,

$$\sigma_0(Q)=\sum_{\substack{q(n,\dots,n)=1\\ [q(n,\dots,n),\dots,q(0,\dots,1)]=Q}}^{\infty}\cdots\sum_{q(0,\dots,1)=1}^{\infty}\varphi(q(n,\dots,n))\dots\varphi(q(0,\dots,1))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{q(n,\dots,n)|Q}\cdots\sum_{q(0,\dots,1)|Q}\varphi(q(n,\dots,n))\dots\varphi(q(0,\dots,1))=Q^{m-1}.$$

Далее, поскольку $\tau(Q)\ll Q^{\varepsilon},\ 3^{\nu(Q)}\ll Q^{\varepsilon},\ \varepsilon>0$ — сколь угодно малая постоянная, особый ряд σ сходится при

$$-\frac{2k}{n}+m-1<-1,\quad 2k>nm.$$

Таким образом справедливо следующее утверждение

Лемма 2. *Особый ряд σ сходится при $2k > nm$.*

Для дальнейшего нам будет необходимо следующее утверждение комбинаторного характера.

Лемма 3. *Пусть $n \geqslant 1, r \geqslant 1$ — натуральные числа. Тогда справедливо следующее тождество*

$$T = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \min(t_1, \ldots, t_r) = \sum_{l=1}^{n} l^r,$$

причем при $n \to \infty$

$$T = \frac{1}{r+1} \sum_{s=1}^{r+1} \binom{r+1}{s} B_{r+1-s} (n+1)^s \sim \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1},$$

где $B_s, s \geqslant 0$ — числа Бернулли.

Оценим показатель сходимости λ снизу. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Особый ряд σ расходится при*

$$2kr \leqslant r \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \min\{t_1, \ldots, t_r\} + 1,$$

т.е. $\lambda \geqslant T$, где $T = \frac{1}{r+1} \sum\limits_{s=1}^{r+1} \binom{r+1}{s} B_{r+1-s}(n+1)^s$.

———————————————————————————————

УДК 51(091)

Двадцатилетний юбилей Чебышевского сборника[1]

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2020@mail.ru
С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: serd42@mail.ru
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта №22-21-00544.

The twentieth anniversary of the Chebyshev sbornik[1]

V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2020@mail.ru
S. S. Demidov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: serd42@mail.ru
N. M. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru
N. N. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru

2021 год оказался непростым для журнала. Своё двадцатилетие журнал встречает на подъёме. Увеличилось количество выпусков, количество авторов. Существенно вырос объем журнала в страницах. Но за последний год ушли из жизни несколько членов редколлегии журнала и авторов, публиковавшихся в различные годы на страницах Чебышевского сборника. Всё это было тяжелой невосполнимой утратой. Тем не менее, журнал продолжает успешно развиваться.

В 1993 году в сентябре месяце в г. Туле на базе Тульского государственного педагогического института имени Л. Н. Толстого прошла 1-ая международная научная конференция "Современные проблемы теории чисел и её приложения" . Она была приурочена к 165 годовщине со дня рождения великого сына Тульской земли — Льва Николаевича Толстого.

Это было непростое время для страны. Тем не менее, конференция прошла успешно и заложила традицию проведения таких конференций в новой России. Успех конференции в значительной степени был обусловлен огромной организационной работой, которую провёл программный комитет под руководством своего председателя — доктора физико-математических наук, профессора Сергея Борисовича Стечкина (6.09.1920–22.11.1995). Сергей Борисович в то время был главным редактором журнала "Математические заметки" и избранные труды конференции были изданы в 1994 году во 2-ом выпуске 55 тома "Математических заметок" .

Вторая конференция прошла в 1995 году в городе Воронеж. Сергей Борисович по состоянию здоровья не смог присутствовать на конференции и его представлял доктор физико-математических наук, будущий академик РАН Сергей Владимирович Конягин. Успех конференции в значительной степени обязан доктору физико-математических наук, профессору Юлию Витальевичу Покорнову (6.02.1940–26.10.2010). Вскоре С. Б. Стечкин скончался и труды конференции не были изданы, только небольшой сборник тезисов.

В 1996 году была снова проведена конференция в городе Туле, теперь уже III международная. Эстафету по руководству программным комитетом взял на себя доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Чубариков, который был в это время заместителем декана механико-математического факультета по науке. Надо отметить, что хотя декан факультета доктор-физико математических наук, профессор, академик РАН Олег Борисович

[1]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 22-21-00544.

Лупанов (2.06.1932–3.05.2006) сам лично не принимал участия в конференциях по теории чисел, но он вникал во все вопросы по организации этих конференций и оказывал существенную помощь. Конференция прошла на хорошем научном и организационном уровне, был издан неплохой сборник тезисов, но сборника трудов конференции не издавали. В кулуарах конференции многие сетовали на отсутствие специализированного журнала по теории чисел в России, в котором, в частности, можно было бы печатать труды конференции.

Наступил 2001 год и снова в г. Туле на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого собралась, теперь уже IV-ая, международная конференция по теории чисел. Во время работы конференции 11 сентября произошёл чудовищный террористический акт в США, который потряс всё человечество, но участники конференции смогли достойно завершить работу конференции и принять очень важное решение об издании трудов конференции. Именно с целью издания трудов IV-ой международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения", посвящённой 180-ой годовщине со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва и 110-ой годовщине со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, и был двадцать лет тому назад организован Чебышёвский сборник.

Название будущего журнала родилось само собой, наверное, потому, что Пафнутий Львович Чебышёв (16.05.1821–8.12.1894) был одним из главных организатором первого в России математического журнала — «Математический сборник».

Двадцать лет тому назад, в 2001 году вышли первые два тома Чебышёвского сборника, в которых были изданы труды конференции. В 2002 году третий том вышел в двух выпусках и была принята сквозная нумерация выпусков. Начиная с 2003 года журнал стал выходить в 4 выпусках в каждом томе. В прошедшем 2021 юбилейном году журнал вышел в 5 выпусках, а начиная с нынешнего года он будет выходить в 6 выпусках. Всего вышло 22 тома в 81 выпусках, а сейчас уже выходит 83 выпуск.

В становлении журнала сыграли важную роль многие отечественные математики: во-первых, это академик О. Б. Лупанов, который своим авторитетом поддержал саму идею издания регулярного журнала по теории чисел. От Бюро Отделения математических наук Российской академии наук на первоначальном этапе становления журнала важную роль сыграл тогдашний ученый секретарь бюро — Игорь Андреевич Лавров. Неоценимую лепту в будущую судьбу журнала внёс Сергей Владимирович Конягин, который по своим научным связям обеспечил реферирование журнала в «Mathematical Reviews» (США, American Mathematical Society), что повлекло включение его в базу данных MathSciNet, а через десяток лет это стало автоматическим фактором внесения журнала в список ВАК.

Для становления журнала определяющей была роль Российского фонда фундаментальных исследований. Дело в том, что первые два тома журнала были изданы из средств гранта РФФИ на проведение конференции, а затем эта финансовая поддержка продолжалась на протяжении всех пятнадцати последующих лет издания журнала. С 2002 года Тульская школа теории чисел постоянно выигрывала исследовательские гранты РФФИ и часть средств из этих грантов выделяла на издание результатов своих исследований. Из этих средств финансировалось издание всех номеров Чебышёвского сборника на протяжении четырнадцати лет. Начиная с 2015 года финансирование журнала взял на себя учредитель — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

Практически сразу ответственный секретарь редколлегии журнала доктор физико-математических наук, профессор Пихтильков Сергей Алексеевич разработал сайт Журнала http://cheb.tsput.ru/, который он поддерживал вплоть до 2009 года, когда он переехал жить и работать в город Оренбург. В 2010 году заработала новая версия сайта Журнала, которая была разработана выпускницей факультета математики, физики и информатики ТГПУ им. Л. Н. Толстого. У Е. В. Зеленцовой это было темой её дипломной работы.

В 2013 году фирмой "Некоммерческое партнерство «Национальный Электронно-Информационный Консорциум» (НП «НЭИКОН»)" разработан новый сайт журнала http://www.chebsbornik.ru/jour в соответствии с международными требованиями. Эта работа была выполнена в связи с предполагаемой в ближайшее время подачей заявки на включение в Scopus. И в 2017 году журнал был включён в международную базу цитирования Scopus. Рейтинг журнала достаточно быстро рос и по результатам Чебышевский сборник уже в 2019-2020 годах стал входить в Q3.

Необходимо отметить, что журнал достаточно хорошо представлен в отечественном Интернете: электронная версия журнала размещена в открытом доступе на Общероссийском портале (http://www.mathnet.ru) и в Научной электронной библиотеке (http://elibrary.ru). Журнал также представлен в научной библиотеке открытого доступа «КИБЕРЛЕНИНКА» http://cyberleninka.ru/.

С самого начала функционирования первого сайта журнала на нём были организованы странички международных конференций по теории чисел, проводимых в ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Это естественная организация работы, так как журнал первоначально организовывался по решению конференции с целью отражения научной жизни в области теории чисел.

Формирование редколлегии в 2001 году взял на себя будущий ответственный секретарь редколлегии Сергей Алексеевич Пихтильков (2.03.1953–24.12.2015). В неё вошли: В. А. Артамонов (2.10.1947–21.06.2021), Г. И. Архипов (12.12.1945–14.03.2013), В. Н. Безверхний, М. М. Глухов (20.11.1930–9.12.2018), Е. С. Голод (21.10.1935–5.07.2018), Н. М. Добровольский, А. М. Зубков, В. И. Иванов, В. Н. Латышев (9.02.1934–13.04.2020), Д. А. Митькин (25.04.1951–9.04.2007), Ю. В. Нестеренко, А. Л. Шмелькин (12.06.1938–22.12.2015). Ответственным редактором первого тома был В. Н. Чубариков. Редактором второго тома был В. Н. Безверхний. Первый том содержал 8 статей по теории чисел, а второй том — 5 по алгебре, одну по теории алгоритмов, три по теории чисел и одну по теории функций.

Первые два тома вышли как "научные труды по математике". Регулярный выпуск Чебышёвского сборника как научного журнала начался уже в 2002 году с выхода третьего тома в двух выпусках. Расширился состав редакционной коллегии. Появились должности — главный редактор (В. Н. Чубариков), заместители главного редактора (Н. М. Добровольский, А. В. Михалёв), ответственный секретарь (С. А. Пихтильков). В члены редколлегии от ТГПУ вошёл профессор А. Р. Есаян (10.11.1937–4.12.2018).

С 2003 года журнал стал выходить регулярно — один том в 4 выпусках.

В 2007 году редколлегия понесла первую тяжёлую утрату. После продолжительной, тяжёлой болезни скончался доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел МПГУ, председатель диссертационного совета Дмитрий Алексеевич Митькин. Он относился к числу активных организаторов науки, принимал активное участие в организации математических конференций, был активным автором Чебышёвского сборника.

В 2010 в редакционной коллегии был добавлен ещё один заместитель главного редактора, представитель МПГУ профессор Нижников А. И., который в то время являлся первым проректором МПГУ. В конце 2012 года была проведена работа по расширению состава редколлегии и 1 выпуск 14 тома вышел с расширенным международным составом. Из России вошли профессора: В. А. Быковский, С. А. Гриценко, В. Г. Дурнев, В. К. Карташов (7.07.1937–14.11.2021), М. А. Королёв, В. Н. Кузнецов, С. П. Мищенко, А. А. Фомин, В. Г. Чирский; из Беларусии — В. И. Берник, из Франции — М. Деза (27.04.1939–23.11.2016), из Украины — П. О. Касьянов, из Литвы — А. Лауринчикас, из Таджикистана — З. Рахмонов. В 2015 году в редколлегию вошли ректор ТГПУ им. Л. Н. Толстого профессор В. А. Панин, из Азербайджана — М. Дж. Марданов. В 2016 году в редколлегию вошёл представитель Израиля А. Я. Белов.

К сожалению, в последние годы редакционная коллегия понесла непоправимые утраты.

14 марта 2013 года не стало Геннадия Ивановича Архипова — доктора физико-математических наук, профессора, ведущего научного сотрудника Математического института РАН им. В. А. Стеклова, который стоял у истоков журнала и внёс неоценимый вклад в организацию традиционных международных конференций по теории чисел в России.

В конце 2015 года в декабре месяце ушли сразу два члена редколлегии: профессора А. Л. Шмелькин и С. А. Пихтильков. А через год трагически погиб в Париже профессор М. Деза. В 2018 году не стало сразу двух членов редколлегии — Е. С. Голода и М. М. Глухова.

В 2020 году не стало Виктора Николаевича Латышева, который стоял у истоков журнала Чебышевский сборник и Тульских международных конференций по алгебре и теории чисел. Таким образом, от первоначального состава редколлегии осталось только пять человек.

Начиная с января 2016 года обязанности ответственного секретаря выполняет Н. Н. Добровольский. В 2016 году была решена непростая задача приведения журнала к международным требованиям. Начиная с 4 выпуска 17 тома всем статьям в журнале стали присваиваться номера DOI. Все выполняемые в 2016 году работы были направлены на то, чтобы подать заявку на включение журнала в Scopus. И эта цель была достигнута. Начиная с 2017 года все выпуски журнала стали индексироваться в Scopus.

Вхождение в базу Scopus привело к дальнейшему росту популярности журнала и увеличения портфеля заявок на публикации. Всё это вызвало необходимость введения ещё одного ответственного секретаря — И. Ю. Ребровой. Был расширен состав редколлегии: вошли профессора С. В. Востоков, А. Е. Гвоздев, Д. В. Георгиевский, С. С. Демидов, М. А. Королёв, Ю. В. Матиясевич, У. М. Пачев, Лю Юнпин (Китай), Х. М. Салиба (Ливан), А. Х. Табари (Таджикистан). Позднее в состав редколлегии вошли: А. И. Боровков, В. И. Горбачёв, А. О. Иванов, А. Л. Семёнов, Л. А. Толоконников, И. Аллаков (Узбекистан) О. Р. Мусин (США), Л. Фукшанский (США), Д. Шяучюнас (Литва).

В 2021 году журнал понёс сразу две невосполнимые утраты: из-за коронавирусной инфекции скончались члены редколлегии В. А. Артамонов и В. К. Карташов.

«Чебышёвский сборник» включен в международные базы данных Американского математического общества MathSciNet (MSN), реферативную базу данных по математике Zentralblatt MATH (zbMATH) FIZ Карлсруэ Института информационной инфраструктуры Лейбница (FIZ Karlsruhe, дистрибьютер – компания Springer), в базу данных Scopus.

Полные тексты статей журнала представлены на Общероссийском математическом портале Math-Net.Ru и в Научной электронной библиотеке eLibrary.ru.

В 2015 году «Чебышёвский сборник» был включен в состав российской коллекции Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science.

Высокие наукометрические показатели журнала в Российском индексе научного цитирования свидетельствуют о его востребованности и авторитетности в научном сообществе. Журнал в 2016 году имел двухлетний импакт-фактор равный 0,238 и занимал 59 место в рейтинге SCIENCE INDEX по тематике «Математика» из 103 изданий, представленных в РИНЦ. В 2020 году эти показатели выросли: двухлетний импакт-фактор стал равен 0,242 и он занял 57 место в рейтинге SCIENCE INDEX по тематике «Математика» из 108 изданий, представленных в РИНЦ. Ещё одним показателем роста популярности журнала стала необходимость перейти на 5 выпусков в 2021 году и на регулярный выпуск 6 номеров в год, начиная с 2022 года.

Анализируя краткую историю создания и развития журнала Чебышёвский сборник, можно констатировать, что журнал стал заметным явлением в математической жизни России. Пройден достаточно непростой путь. Редколлегия с оптимизмом смотрит в будущее и уверена что вместе с корпусом авторов и научных рецензентов сможет и дальше вносить существенный вклад в развитие отечественной и мировой математики.

УДК 511.32

Самоподобие орбит поворотов окружности, сдвигов тора и родственных отображений[1]

А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
e-mail: a1981@mail.ru

Self-similarity of orbits for circle rotations, toric shifts and related maps

A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, RAS
e-mail: a1981@mail.ru

В работе [1] В.Г.Журавлев обнаружил следующее свойство самоподобия орбит поворота окружности $S_\tau : x \to x + \tau^2 \bmod 1$:

Теорема 1. *Пусть* $Orb_\tau = \{S_\tau^k(0)\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{k\tau^2 \bmod 1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *и* $I_m = [1-\tau^{-2m}, 1)$. *Пусть также* $h_m(x) = 1 - \tau^{2m}(1-x)$. *Тогда*

$$Orb_\tau \cap I_m = h_m(Orb_\tau).$$

Здесь $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – золотое сечение. Данный результат позволил получить ряд явных формул для времен первого возвращения и количества попаданий точек из Orb_τ в интервалы I_m, а также показать, что данные интервалы являются множествами ограниченного остатка. Кроме того, с его помощью удалось получить ряд новых нетривиальных соотношений для функции $[n\tau]$.

Общая теории самоподобия произвольных поворотов окружности $S_\alpha : x \to x+\alpha \bmod 1$ для произвольных иррациональных α была построена в [2] с использованием понятия разложения иррациональности в последовательность Штерна-Броко [3].

Теорема 2. *Пусть α – иррационально и* $Orb_\alpha = \{S_\alpha^k(0)\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{k\alpha \bmod 1\}_{k=-\infty}^{\infty}$. *Тогда условие существования интервала I и линейного преобразования $h : [0;1) \to I$ таких, что*

$$Orb_\alpha \cap I = h(Orb_\alpha)$$

эквивалентно периодичности разложения Штерна-Броко для α.

Теорема 1 вытекает отсюда при $\alpha = \tau^2$.

Отметим еще несколько важных замечаний, связанных с теоремой 2.

1. Конструкция требуемого интервала I является эффективной, однако мы не приводим ее здесь в силу громоздкости.

2. Если требуемый интервал I существует, то таких интервалов бесконечно много. В частности, интервалы $h(I), h(h(I)), \ldots$ обладают требуемыми свойствами. Более того, все такие интевалы могут быть получены из некоторого последовательными применениями преобразования h.

3. Все числа с периодическим разложением в последовательность Штерна-Броко являются квадратичными иррациональностями. Кроме того, последовательность Штерна-Броко

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 19-11-00065

для квадратичных иррациональностей с чисто периодическим разложением в цепную дробь периодична.

Естественно спросить об обобщении теоремы 2 на многомерный случай. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – некоторый вектор, координаты которого линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей. Тогда определено отображение

$$S_\alpha : x \to x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^d.$$

Его орбита

$$Orb_\alpha = \{S_\alpha^k(0)\}_{k=-\infty}^{\infty} = (k\alpha_1 \bmod 1, \ldots k\alpha_d \bmod 1)_{k=-\infty}^{\infty}$$

известна как последовательность Кронекера.

На первый взгляд, естественно искать прямоугольники Π и аффинные преобразования h такие, что

$$Orb_\alpha \cap \Pi = h(Orb_\alpha),$$

однако можно показать, что таких прямоугольников существовать не может и требуемое обобщение теоремы 2 оказывается существенно более сложным.

Пусть $\mathcal{T}$ – фундаментальная область некоторой d-мерной решетки L. Тогда существует естественное взаимно-однозначное отображение $equiv : [0;1)^d \to \mathcal{T}$. Оно задается следующим образом: пусть M_L - аффинное преобразование, переводящее $\mathbb{Z}^d$ в L. Тогда $equiv(x)$ единственная точка из $\mathcal{T}$, сравнимая с $M_L(x)$ по модулю решеки L. Отметим, что данное определение не зависит от выбора матрицы M_L. Отображение $S_\alpha : [0;1)^d \to [0;1)^d$ при этом естественным образом порождает отображение $S_\mathcal{T} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$: $S_\mathcal{T}(x) = equiv \circ S_\alpha \circ equiv^{-1}(x)$. Можно показать, что $S_\mathcal{T}$ является кусочным сдвигом, то есть существуют области $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_r$ и векторы $v_1, \ldots, v_r$ такие, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_r$ и $S_\mathcal{T}(x) = x + v_j$, если $x \in \mathcal{T}_j$. Оказывается, что орбиты отображения $S_\mathcal{T}$ в некоторых случаях будут обладать свойствами самоподобия [4].

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_d = 1$. Можно показать [5], что уравнение

$$x^d - a_1 x^{d-1} - \ldots - a_{d-1}x - a_d = 0$$

имеет вещественный корень, больший единицы, причем такой корень только один. Обозначим его через β.

Теорема 3. *Пусть $\alpha = (\beta, \beta^2, \ldots, \beta^{d-1})$. Тогда существует фундаментальная обрасть $\mathcal{T}$ некоторой решетки L (зависящая от β) такая, что для орбиты $Orb_\mathcal{T} = \{S_\mathcal{T}^k(0)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ соответствующего отображения $S_\mathcal{T}$ существуют области $\mathcal{T}_m$ и аффинные преобразования h_m такие, что*

$$Orb_\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_m = h_m(Orb_\mathcal{T}).$$

Отметим, что соответствующие множества $\mathcal{T}$ известны как фракталы Рози (см., например, [6]).

Дальнейшие обобщения теоремы 3 связаны с отказом от рассмотрения сдвигов тора и переходом к более общим отображениям. В частности, в работе [7] был построен некоторый фрактал $\mathcal{T}$, связанный с уравнением

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Для этого фрактала удается естественным способом определить кусочный сдвиг $S_\mathcal{T}$ (с $r = 5$), обладающий свойством самоподобия, аналогичным теоремы 3. Однако этот сдвиг уже не сопряжен никакому сдвигу двумерного тора и не связан с соответствующей последовательностью Кронекера.

Отметим, что переход к кусочным сдвигам позволяет получать новые интересные результаты и в одномерном случае. Опишем только дин результат в данном направении.

Пусть α – иррационально, $b > a > 0$ – взаимно простые целые числа. Определим двойной поворот $S_{\varepsilon,a,b,\alpha}(x) : [0;1) \to [0;1)$ как $x \to x + a\alpha \bmod 1$ при $x < \varepsilon$ и как $x \to x + b\alpha \bmod 1$ при $x \geq \varepsilon$. Определим фазовую диаграму $PD_{a,b,\alpha} \in [0;1)^2$ следующим образом: точка $(x, \varepsilon) \in PD_{a,b,\alpha}$ тогда и только тогда, когда x принадлежит замыканию орбиты нуля относительно отображения $S_{\varepsilon,a,b,\alpha}$.

Теорема 4. *Пусть разложение Штерна-Броко для α – периодично. Тогда существуют прямоугольник Π и аффинное преобразование h такие, что*

$$PD_{a,b,\alpha} \cap \Pi = h(PD_{a,b,\alpha}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Том 71, № 2. С. 89-122.

2. Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Том 314. С. 272–284.

3. Грэхе Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. –– М. Изд-во Мир, 1998. 704 с.

4. Шутов А. В. Обобщённые разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2007. Том 20, № 3. С. 372-389.

5. Frougny C., Solomyak B. Finite beta-expansions // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1992. Vol. 12, № 4. P. 713-–723.

6. Berthe V., Siegel A. Tilings associated with beta-numeration and substitution // Integers: Electronic journal of combinatorial number theory. 2005. Vol. 5, № 3. ♯A02.

7. Akiyama S., Dadahiro T.Akiyama S. Self affine tiling and Pisot numeration system // Acta Math. Info. Univ. Ostraviensis. 1998. Vol. 6. P. 9–26.

––

Секция 1. Группы

УДК 511.32

О разрешимости проблемы вхождения в некотором классе групп Артина[1]

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Российская таможенная академия
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On the solvability of the occurrence problem in a certain class of Artin groups

V.N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Russian Customs Academy
e-mail: vnbezv@rambler.ru
N. B. Bezverkhnyaya (Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп являются проблемы равенства и сопряженности слов, неразрешимость которых в классе конечноопределенных групп была доказана П.С. Новиковым [1].

Поэтому возникла задача изучения основных проблем теории групп в определенных классах групп. При решении этих проблем возникают более общие проблемы, одной из которых является проблема вхождения.

Впервые проблему вхождения рассмотрел и доказал ее разрешимость в классе свободных групп Нильсен. [8].

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой ее конечно порожденной подгруппы $H, H < G$, и любого элемента $g, g \in G$, установить принадлежит ли g подгруппе H.*

Очевидно, что из разрешимости проблемы вхождения в группе G следует разрешимость проблемы равенства слов, а из неразрешимости проблемы равенства слов следует неразрешимость проблемы вхождения.

Целью данной статьи является рассмотрение разрешимости проблемы вхождения в группах Артина.

Группа Артина имеет следующее копредставление:

$$G = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; ; \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}; ; i \neq j; ; i, j \in \overline{1,n} \right\rangle (1)$$

где m_{ij} - элементы симметрической матрицы Кокстера $M, m_{ij} \in M, m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, n, \ldots, \infty\}$, $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}}$ - слово длины m_{ij} состоящее из чередующихся букв $\sigma_i, \sigma_j : \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i \ldots$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 19-41-710002 р-а

Каждой конечноопределенной группе Артина G можно поставить в соответствие конечный граф Γ, между вершинами v_i которого и множеством образующих группы $\sigma_i;;i,j\in\overline{1,n}$ установлено взаимно-однозначное соответствие, то есть каждой вершине v_i графа Γ соответствует образующий σ_i группы G. Причем, если вершины v_i,v_j соединены ребром, то данному ребру соответствует число Коксетера m_{ij}, если вершины v_i,v_j не соединены ребром, то паре (v_i,v_j) соответствует ∞.

Построенный граф называется графом Коксетера группы Артина G, имеющей копредставление (1).

Каждой группе Артина соответствует группа Кокстера, имеющая копредставление:

$$\overline{G}=\left\langle\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n;;\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}}=\langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}},{\sigma_i}^2;;i\neq j;;i,j\in\overline{1,n}\right\rangle\ (2)$$

Если группа $\overline{G}$ конечна, то группа G называется группой Артина конечного типа.

Заметим, что группы Артина конечного типа содержат группы кос.

В классе групп Артина конечного типа в [10] и [11] была доказана неразрешимость проблемы вхождения.

Представляет интерес определить класс групп Артина, в котором разрешима проблема вхождения.

Определение 2. *Группа G называется группой Артина с древесной структурой, если граф Γ, соответствующий G, есть дерево-граф. [5].*

Отметим, что в группах Артина с древесной структурой элементы матрицы Кокстера m_{ij} принимают значения: $m_{ij}\in\{2,3,\ldots,n,\ldots,\infty\}$.

Теорема 1. *[6]. В группе Артина с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Теорема 2. *В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

При доказательстве используются следующие понятия:

Определение 3. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1,H_2 группы G выписать образующие пересечения этих подгрупп.*

Определение 4. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения смежных классов подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1,H_2 группы G и произвольного слова $w\in G$, установить, пусто или не пусто пересечение $wH_1\cap H_2$.*

Из определения группы Артина с древесной структурой следует, что данная группа является древесным произведением двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам, порожденных образующими объединяемых групп.

Основным понятием при решении проблемы вхождения в данном классе групп, является понятие специального множества, определенного в [12] и [14] для свободных конструкций групп и являющееся аналогом нильсеновского множества в свободных группах.

Теорема 3. *[12]. Пусть группа*

$$G=\left\langle\prod_{i=1}^{n}*G_i;;relG_1,relG_2,\ldots,relG_n,\varphi_{ij}\left(U_{ij}\right)=U_{ji},i\in I_1,j\in I_2\right\rangle\ (3)$$

является древесным произведением групп $G_s, s = \overline{1,n}$, объединенных по изоморфным ассоциированным подгруппам $U_{ij} < G_i, U_{ji} < G_j$ с помощью конструктивного изоморфизма $\varphi_{ij} : \varphi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji}$, где $i \in I_1, j \in I_2, |I_1| < \infty, |I_2| < \infty$. Тогда если объединяемые подгруппы $U_{ij}, U_{ji}, i \in I_1, j \in I_2$, обладают свойством максимальности, и в сомножителях G_i разрешимы:

1. *Проблема вхождения;*
2. *Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой U_{ij};*
3. *Проблема пересечения класса смежности любой конечнопорожденной подгруппы $H<G_i$ с объединяемой подгруппой U_{ij},*

то в группе разрешима проблема вхождения.

Теорема 4. *В любой двупорожденной группе Артина*

$$G_{ab} = \langle a, b; ; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle \, (4)$$

где $m_{ab} \in \{2, 3, \ldots n, \ldots, \infty\}$ разрешимы:

1. *Проблема вхождения;*
2. *Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w\rangle < G_{ab}$;*
3. *Проблема пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w\rangle < G_{ab}$.*

При доказательстве данной теоремы 2, используются следующие утверждения:

Лемма 1. *[4], [10]. Группа Артина (4) при $m_{ab} = 2k + 1$изоморфна группе*

$$\left\langle x, y; ; x^{2k+1} = y^2 \right\rangle (5)$$

Доказательство теоремы вхождения в группе с копредставлением (5) следует

Теорема 5. *[14]. В группе$G = F_m *_C F_n$, являющейся свободным произведением конечнопорожденных свободных групп F_m, F_n, с циклическим объединением, алгоритмически разрешима проблема вхождения.*

Лемма 2. *[4], [10]. Группа Артина $G_{ab} = \langle a, b; ; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$ при $m_{ab} = 2k$ изоморфна группе*

$$\left\langle x, t; ; t^{-1}x^k t = t^k \right\rangle (6)$$

Разрешимость проблемы вхождения в группе (6) непосредственно следует из

Теорема 6. *[13].Пусть группа*

$$G^* = \left\langle G, t; ; relG, t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1)\right\rangle (7)$$

есть HNN-расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп U_1, U_{-1} группы G и конструктивного изоморфизма $\varphi : \varphi(U_1) = U_{-1}$; причем U_1, U_{-1} обладают свойством максимальности. Тогда если в группе G разрешимы:

1. *Проблема вхождения;*

2. *Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ с подгруппой $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$;*

3. *Проблема пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ с любой циклической подгруппой $\langle w \rangle < G$.*

тогда в G^* разрешима проблема вхождения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. // Труды МИАН СССР, 1955, 44. С.1-144.

2. Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Ivent. Math. 1983, Vd 72, p. 201-220.

3. Appel K. One Artin groups and Coxeter groups of large type/Contemp. Math. 1984, V.33, P.50-78.

4. Безверхний. В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вузов. сб. науч. тр. Тула, 1986, С. 26-61.

5. Безверхний. В.Н. О группах Артина и Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел. Тезисы V международ. конф. Тула, 2003, С. 33-34.

6. Безверхний В. Н. Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГу. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006, Т.12, Вып.1, С. 67-82.

7. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина. // Фундаментальная и прикладная математика 2019 г. Т. 22, №4, С. 9-27.

8. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М. Мир, 1980.

9. Безверхний. В.Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа. // Фундаментальная и прикладная математика 1999 г. Т. 5, Вып. 1, С. 1-38.

10. Безверхний В.Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. жур. TXXVI. №5, 1985, С. 27-42.

11. Маканина Т.А. Проблема вхождения для групп кос $B(n+1)$ при $n \geqslant 5$. //Мат. заметки, 1981. Т.29, №1. С. 31-33.

12. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением. //Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1986. С. 3-21.

13. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN- групп. //Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1981. С. 20-62.

14. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. //Вопросы теории групп и полугрупп. Тула, ТГПИ. 1972. С. 3-86.

УДК 519.4

О внутреннем автоморфизме свободного произведения свободных групп с циклическим объединением[1]

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Российская таможенная академия
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Е. С. Логачева (Россия, г. Тула)
МБОУ ЦО № 38 — «Химический лицей»
e-mail: Logacheva-es@mail.ru

On the internal automorphism of a free product of free groups with cyclic union

V. N. Bezverkhniy (Russia, г. Moscow)
Russian customs academy
e-mail: vnbezv@rambler.ru
E. S. Logacheva (Russia, г. Tula)
Education center № 38 — Chemical Lyceum
e-mail: Logacheva-es@mail.ru

Уайтхедом было доказано, что существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w, v свободной группы F_m установить, существует ли автоморфизм $\varphi \in Aut(F_m)$, отображающий w в v, то есть $\varphi(w) = v$. Маккул обобщил данное утверждение на любые конечные множества слов свободной группы.

В данной работе рассматривается решение проблемы Уайтхеда в свободном произведении свободных групп с циклическим объединением, а именно, существует ли алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}, i = \overline{1,n}$, и $\{v_i\}, i = \overline{1,n}$, свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением $G = F_m *_C F_n$ установить, являются ли они внутренне автоморфными, то есть, существует ли $\varphi \in IA(G)$ такой, что $\varphi(w_i) = v_i, i = \overline{1,n}$. Данная проблема может быть иначе сформулирована: существует ли $z \in G$ такое, что $zw_iz^{-1} = v_i, i = \overline{1,n}$, иначе, разрешима ли в группе $G = F_m *_C F_n$ обобщенная проблема степенной сопряженности слов.

Пусть $F_m = \langle a_1, a_2, ..., a_m \rangle$, $F_n = \langle b_1, b_2, ..., b_n \rangle$ - свободные группы соответственно рангов m, n. Рассмотрим свободное произведение F_m, F_n, объединенных по изоморфным циклическим подгруппам $C_1 = \langle u^p(a_\nu) \rangle < F_m$, $C_2 = \langle v^q(b_\mu) \rangle < F_n$. Группа $G = F_m *_C F_n$, где C обозначает объединяемые подгруппы, имеет копредставление:

$$G = \langle a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n; u^p(a_\nu) = v^q(a_\mu) \rangle, \tag{1}$$

Слова $u(a_\nu)$ и $v(b_\mu)$ не являются истинными степенями в соответствующих свободных группах, группы F_m, F_n будем называть сомножителями.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-41-710002 р_а

Теорема 1. [1] *В группе* $G = F_m *_C F_n$ *разрешима проблема сопряженности слов.*

Определение 1. *Будем говорить, что в группе* B *разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух множеств слов* $\{w_i\}, i = \overline{1,n}$, $\{v_i\}, i = \overline{1,n}$, *группы* B *определить, существует ли такой элемент* $z \in B$, *что*

$$zw_1z^{-1} = v_1, zw_2z^{-1} = v_2, ..., zw_nz^{-1} = v_n. \tag{2}$$

то есть, существует ли $\varphi \in IA(G)$ *такой, что* $\varphi(w_i) = v_i, i = \overline{1,n}$.

Теорема 2. [2] *Пусть в свободной группе* F *слова* $X, Y \in F$, *удовлетворяют соотношению* $XY = YX$, *тогда существует слово* $f \in F$ *такое, что* $X = f^\alpha, Y = f^\beta$, *где* $\alpha, \beta \in Z$.

Теорема 3. *В свободной группе алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Следствие 1. *В свободной группе централизатор любой конечно порожденной подгруппы есть циклическая подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора данной подгруппы.*

Теорема 4. *Пусть* $X, Y \in G = F_m *_C F_n$, *свободному произведению свободных групп* F_m, F_n, *объединенных по циклической подгруппе* C *и пусть* $XY = YX$. *Тогда если* $X = w^{-1}a_1w$, *где* $a_1 \in F_m(F_n)$, *то* $Y = w^{-1}a_2w$, $a_2 \in F_m(F_n)$ *и существует* $f \in F_m(F_n)$ *такое, что* $a_1 = f^\alpha, a_2 = f^\beta$.

Следующая теорема играет важную роль при решении проблемы внутреннего автоморфизма группы $G = F_m *_C F_n$ и является обобщением теоремы 2.

Теорема 5. *Пусть* $X, Y \in G = F_m *_C F_n$, X, Y *удовлетворяют соотношению* $XY = YX$. *Тогда*

1) Существует $f \in G$, X, Y *не соряжены ни элементу из* $F_m(F_n)$, *ни элементу* $h \in C$, $||f|| > 1$ *такое, что* $X = f^\alpha$, $Y = f^\beta$.

2) $X = whw^{-1}$, $h \in C$, $Y \in w\langle u, v|u^p = v^q\rangle w^{-1}$, *где* $\langle u, v|u^p = v^q\rangle$ *подгруппа группы* G;

3) $X = w^{-1}f^\alpha w$, $Y = w^{-1}f^\beta w$, *где* $w \in G$, $f \in F_m(F_n)$;

4) $X = w^{-1}X_1w$, $Y = w^{-1}Y_1w$, *где* $w \in G$, $X_1, Y_1 \in \langle u, v|u^p = v^q\rangle$, *и существует* $f \in \langle u, v|u^p = v^q\rangle$, *такие что* $X_1 = f^\alpha$, $Y_1 = f^\beta$.

Доказательство теоремы проводится используя метод математической индукции по слоговой длине $||X||$, $||Y||$ слов X, Y применяя схему, предложенную А.Ю. Ольшанским при доказательстве теоремы 4 [2].

При решении проблемы обобщенной сопряженности слов, используя теорему 5, определяются основные группы слов.

Теорема 6. *Пусть* $\{w_i\}, \{v_i\}$, $i = \overline{1,n}$, *два множества слов группы* $G = F_m *_C F_n$, *сопряженные в* G, *то есть существует* $z \in G$, *такое что* $zw_1z^{-1} = v_1, zw_2z^{-1} = v_2, ..., zw_nz^{-1} = v_n$. *Тогда:*

1) Если каждое из w_i, v_i, $i = \overline{1,n}$, *сопряженные в* G *соответственно* h_i, h_i', *принадлежащих объединяемой подгруппе* $C < G$: $w_i = s_i^{-1}h_is_i$, $v_i = t_i^{-1}h_i't_i$, *то* $h_i = h_i'$;

2) Если для всех i, $1 \le i \le n$, $w_i \in F_m$, $v_i \in F_m$ *(либо одновременно принадлежат* F_n*) и не сопряжены с элементами из объединяемой подгруппы, то множества* $\{w_i\}, \{v_i\}$, $i = \overline{1,n}$, *сопряжены в* F_m (F_n).

3) Если для всех i, $1 \le i \le n$, $w_i = s_i^{-1}w_{i0}s_i$, $v_i = t_i^{-1}v_{i0}t_i$, *где* $||w_{i0}|| = ||v_{i0}|| > 1$, w_{i0}, v_{i0} *циклически несократимы, то для всех* i, $1 \le i \le n$, *существует* w_{i0}^* *циклическая перестановка* w_{i0} *такая, что* $h_i^{-1}w_{i0}^*h_i = v_{i0}$, *где* $h_i \in C$, $i = \overline{1,n}$.

Теорема 7. [3] *В группе $G = F_m *_C F_n$ - разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Из теоремы 7 непосредственно следует, что если подгруппы H_1, H_2 порождены соответственно словами $\{w_i\}$, $i = \overline{1,n}$, $\{v_i\}$, $i = \overline{1,n}$, не сопряжены, то и слова w_i, $i = \overline{1,n}$, и v_i, $i = \overline{1,n}$, обобщенно не сопряжены.

Лемма 1. *Пусть слова $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ группы $G = F_m *_C F_n$, $C = \langle u^p \rangle = \langle v^q \rangle$, где $u^p \in F_m, v^q \in F_n$ не сопряжены с элементами из сомножителей. Тогда можно эффективно установить, являются ли они обобщенно сопряженными в группе G.*

Лемма 2. *Существует алгоритм, позволяющий для любых двух множеств слов вида $w_i = s_i h_i s_i^{-1}$, $v_i = t_i h_i' t_i^{-1}$, $i = \overline{1,n}$, группы $G = F_m *_C F_n$, где $C = \langle u^p \rangle = \langle v^q \rangle$, $h_i, h_i' \in C$, установить будут ли они обобщенно сопряжены.*

Лемма 3. *Пусть слова $w_i = s_i a_i s_i^{-1}$, $v_i = t_i a_i' t_i^{-1}$, $i = \overline{1,n}$, $||a_i|| = ||a_i'|| = 1$, a_i, a_i' не сопряжены с элементами из подгрупп $\langle u^p \rangle, \langle v^q \rangle$, и для каждого $i, i = \overline{1,n}$, слова w_i, v_i сопряжены в G. Тогда a_i, a_i' принадлежат одному сомножителю группы G и существует алгоритм, выясняющий, являются ли слова $w_i, v_i, i = \overline{1,n}$, обобщенно сопряженными.*

Чтобы сформулировать основную теорему об обобщенной сопряженности слов, дадим описание структуры централизаторов конечно порожденных подгрупп группы $G = F_m *_C F_n$.

Выделим следующие группы слов:

1. К первой группе отнесем слова $w_i, i = \overline{1,n}$, которые не принадлежат подгруппе $H = \langle u, v; u^p = v^q \rangle$ и не сопряжены с элементами из сомножителей группы G.

2. Ко второй - слова, принадлежащие подгруппе wHw^{-1}, не сопряженные с $u^\alpha, 0 < \alpha < p$, $v^\beta, 0 < \beta < q$.

3. К третьей - слова вида: $s_i h_i s_i^{-1}, h_i \in C$.

4. К четвертой - слова вида $s_i a_i s_i^{-1}$, где $a_i \in F_m(F_n)$ и $a_i \neq u^{\alpha_i}$, $\alpha_i \neq m_i p + k_i$ или $a_i \neq v^{\beta_i}$, $\beta_i \neq m_i' q + k_i'$, где $0 \leq k_i < p$, $0 \leq k'_i < q$.

5. К пятой группе - слова $s_i u^{\alpha_i} s_i^{-1}$, $s_i v^{\beta_i} s_i^{-1}$, где $\alpha_i = m_i p + k_i$, $\beta_i = m_i' q + k_i'$, где $0 < k_i < p$, $0 < k'_i < q$.

Лемма 4. *Централизатор подгруппы $H_1 = \langle w_1, w_2, ...w_n \rangle$, образующие которой $w_i, i = \overline{1,n}$, принадлежат первой группе слов, есть циклическая подгруппа $C_G(H_1) = \langle w_1 \rangle \cap \langle w_2 \rangle \cap ... \langle w_n \rangle$.*

Лемма 5. *Централизатор подгруппы H_2, образующие которой принадлежат ко второй группе слов, есть свободная абелева подгруппа $C_G(H_2) = \langle v_0, wu^p w^{-1} \rangle$, где $\langle v_0 \rangle = \langle w_1 \rangle \cap \langle w_2 \rangle \cap ... \cap \langle w_n \rangle$.*

Лемма 6. *Централизатор подгруппы H_3,порожденной словами, принадлежащими к третьей группе слов: $w_i = s_i h_i s_i^{-1}, i = \overline{1,n}$, причем, $s_0 = s_1 = s_2 = ... = s_n$, есть двупорожденная подгруппа $C_G(H_3) = s_0 \langle u, v; u^p = v^q \rangle s_0^{-1}$.*

Лемма 7. *Централизатор подгруппы H_4,порожденной словами, принадлежащими к четвертой группе слов вида $w_i = s_i a_i s_i^{-1}, i = \overline{1,n}$, причем, $s_0 = s_1 = s_2 = ... = s_n$, есть циклическая, а именно $C_G(H_4) = \langle w_1 \rangle \cap \langle w_2 \rangle \cap ... \langle w_n \rangle$.*

Лемма 8. *Централизатор подгруппы H_5,порожденной словами, принадлежащими к пятой группе слов вида $w_i = s_i u^{\alpha_i} s_i^{-1} (s_i v^{\beta_i} s_i^{-1})$, где $\alpha_i = k_i p + \overline{\alpha_i}$, $0 < \overline{\alpha_i} < p$ ($\beta_i = k_i q + \overline{\beta_i}$, $0 < \overline{\beta_i} < q$),и $s_0 = s_1 = s_2 = ... = s_n$, есть подгруппа $C_G(H_5) = \langle s_0 u s_0^{-1} \rangle (C_G(H_5) = \langle s_0 v s_0^{-1} \rangle)$.*

Лемма 9. [7] *Пусть в группе G слово z_0 является решением системы уравнений $zw_iz^{-1} = v_i, i = \overline{1,n}$. Тогда множество решений данной системы совпадает со смежным классом $z_0C_G(\langle w_1, w_2, ...w_n\rangle)$ и с $C_G(\langle v_1, v_2, ...v_n\rangle)z_0$, где $C_G(\langle w_1, w_2, ...w_n\rangle)$ $(C_G(\langle v_1, v_2, ...v_n\rangle))$ - централизатор подгруппы $\langle w_1, w_2, ...w_n\rangle$ $(\langle v_1, v_2, ...v_n\rangle)$*

Используя леммы 4-9, получаем:

Теорема 8. *Централизатор конечно порожденной подгруппы группы $G = F_m *_C F_n$, $C = \langle u^p\rangle = \langle v^q\rangle$, есть конечно порожденная подгруппа, а именно, либо единичная, либо бесконечная циклическая, либо свободная двупорожденная абелева группа, либо двупорожденная подгруппа, сопряженная подгруппе $\langle u, v; u^p = v^q\rangle$.*

Теорема 9. *Существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора любой конечно порожденной подгруппы групп $G = F_m *_C F_n$.*

Теорема 10. *В группе $G = F_m *_C F_n$ алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Из теорем 9, 10 непосредственно следуют теоремы

Теорема 11. *Для любых двух множеств слов $w_i, v_i, i = \overline{1,n}$, группы $G = F_m *_C F_n$ можно эффективно определить, существует ли внутренний автоморфизм $\varphi \in A(G)$ такой что $\varphi(w_i) = v_i, i = \overline{1,n}$.*

Теорема 12. *Для любого конечного множества слов $\{w_i, v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ группы $G = F_m *_C F_n$ можно эффективно определить существует ли внутренний автоморфизм $\varphi \in A(G)$, действующий инвариантно на данном множестве, то есть $\varphi(w_i) = w_i, i = \overline{1,n}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — Москва: Мир, 1980. 450 с.

2. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — Москва: Наука, 1989. 446 с.

3. Безверхний В. Н.Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II // Современная алгебра. Межвузовский сборник. ЛГПИ. 1977. Вып 6. С.16-32.

4. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах. // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Том 4, № 1. С. 199-222.

5. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением. // Дискретная математика. 2016. Том 28, № 1. С. 3-18.

6. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема степенной сопряженности в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Том 22, № 4. С. 16-23.

7. Маканина Т. А. Проблема вхождения в группах кос B_{n+1}, при $n \geq 5$. // Математические заметки. 1981. Том 29, № 1. С. 31-33.

8. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. 1974. Том 1. С. 16-31.

УДК 512.543

О свободных подгруппах в группах, задаваемых периодическими попарными соотношениями

В. В. Беняш-Кривец (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: benyash@bsu.by
В. Ю. Новикова (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: victoria.novikova256@gmail.com

On free subgroups in groups defined by periodic pared relations

V. V. Beniash-Kryvets (Belarus, Minsk)
Francisk Belarusian State University
e-mail: benyash@bsu.by
V. Yu. Nivikova (Belarus, Minsk)
Francisk Belarusian State University
e-mail: victoria.novikova256@gmail.com

Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями, имеют копредставление

$$\Gamma = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i^{q_i} = 1 (1 \leqslant i \leqslant n), w_{ij}(x_i, x_j)^{q_{ij}=1} (1 \leqslant i < j \leqslant n) \rangle,$$

где $n \geqslant 2$, все $q_i, q_{ij} \in \{2, 3, 4, \dots\} \cup \{\infty\}$, и $w_{ij}(x_i, x_j)$ является циклически редуцированным словом в свободном произведении $\langle x_i \mid x_i^{q_i} \rangle * \langle x_i \mid x_i^{q_i} \rangle$, содержащим оба x_i и x_j.

Этот класс групп ввел Винберг [1]. Он включает в себя обобщенные треугольные группы ($n = 2$), обобщенные тетраэдральные группы ($n = 3$), группы Кокстера (все $q_i = 2$) и обобщенные группы Кокстера ($w_{ij} = x_i^{\alpha_{ij}} x_j^{\beta_{ij}}$).

Говорят, что группа удовлетворяет альтернативе Титса, если она содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса.

В [2] выдвинута гипотеза, что группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями, удовлетворяют альтернативе Титса.

Винберг [1] показал, что если все $q_i, q_{ij} < \infty$ и справедливо неравенство

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{q_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{q_{ij}} < n - 1$$

то Γ имеет подгруппу конечного индекса, которая гомоморфно отображается на свободную группу ранга 2, в частности, Γ удовлетворяет альтернативе Титса.

Дальнейшие результаты в этом направлении получены Вильямсом [2]. Для каждого соотношения $w_{ij}(x_i, x_j)^{q_{ij}}$ определим число l_{ij} следующим образом: если $q_{ij} < \infty$, то l_{ij} равно длине слова $w_{ij}(x_i, x_j)$ в свободном произведении $\langle x_i \mid x_i^{q_i} \rangle * \langle x_i \mid x_i^{q_i} \rangle$; если же $q_{ij} = \infty$, мы полагаем $l_{ij} = \infty$. Вильямс доказал следующий результат. Пусть $n \geqslant 3$ и для всех троек чисел $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{q_{ij} l_{ij}} + \frac{1}{q_{ik} l_{ik}} + \frac{1}{q_{jk} l_{jk}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда группа Γ удовлетворяет альтернативе Титса.

Для пары чисел $1 \leqslant i < j \leqslant n$ рассмотрим группу

$$G_{ij} = \langle x_i, x_j \mid x_i^{q_i} = x_j^{q_j} = w_{ij}(x_i, x_j)^{q_{ij}} = 1 \rangle,$$

которую называют вершинной группой. Существует естественной гомоморфизм $G_{ij} \to \Gamma$, однако этот гомоморфизм не всегда является инъективным. Поэтому если G_{ij} содержит неабелеву свободную подгруппу, мы не можем утверждать, что Γ содержит такую подгруппу. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что для группы Γ существует вершинная группа G_{ij} обладающая свойством: существует гомоморфизм $\rho : G_{ij} \to PSL_2(\mathbb{C})$ такой, что элементы $\rho(x_i), \rho(x_j), \rho(w_{ij})$ имеют порядки q_i, q_j, q_{ij} соответственно (такой гомоморфизм называется специальным) и группа $\rho(G_{ij})$ содержит неабелеву свободную подгруппу. Тогда существует гомоморфизм $\bar{\rho} : \Gamma \to SO_{n+1}(\mathbb{C})$ такой, что $\bar{\rho}(\Gamma)$ (а следовательно и Γ) содержит неабелеву свободную подгруппу. Таким образом, Γ удовлетворяет альтернативе Титса.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винберг Э. Б. Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 9. С. 3–12.

2. Williams G. The Tits alternative for groups defined by periodic pared relations // Communications in Algebra. 2006. V. 34. P. 251–258.

УДК 512.542

Об инъекторах конечных разрешимых произведений групп[1]

А. Ф. Васильев (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: formation56@mail.ru

On injectors of finite soluble products of groups

A. F. Vasil'ev (Belarus, Gomel)
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: formation56@mail.ru

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. Необходимые обозначения, определения и результаты можно найти в [1], [2]. Замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп класс групп $\mathfrak{X}$ называется классом Фиттинга, если в каждой группе имеется единственная максимальная нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа $G_{\mathfrak{X}}$, называемая $\mathfrak{X}$-радикалом группы G. Если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-инъектором группы G, если $H \cap N$ — максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа в N для каждой субнормальной подгруппы N из G. По теореме Гашюца–Фишера –Хартли в любой группе G имеется единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов.

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (задание 1.1.02 подпрограммы 11.1 «Математические модели и методы») при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Пусть $G = AB$ — произведение своих подгрупп A и B. Подгруппа F группы G называется префакторизуемой относительно $G = AB$, если $F = (A \cap F)(B \cap F)$. Префакторизуемая подгруппа F называется факторизуемой, если дополнительно выполняется $A \cap B \subseteq F$.

В [3] Локетт в классе разрешимых групп установил классы Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых в каждой группе $G = MN$ с нормальными подгруппами M и N любой $\mathfrak{F}$-инъектор является префакторизуемым. В [4] Амберг и Хефлинг рассматривали классы Фиттинга, для которых в группах $G = AB$ с нильпотентными подгруппами A и B существуют префакторизуемые (факторизуемые) $\mathfrak{F}$-инъекторы. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. В дальнейшем для краткости всякую группу $G = AB$ будем называть ди-$\mathfrak{F}$-группой, если A и B принадлежат $\mathfrak{F}$.

Задача 1. *Конструктивно описать классы (формации) Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых справедливо утверждение: если $G = AB$ — ди-$\mathfrak{F}$-группа и I — ее $\mathfrak{F}$-инъектор, перестановочный с подгруппами A и B, то I факторизуем относительно $G = AB$.*

В работе [5] нами данная проблема была решена в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп для случая, когда $\mathfrak{F}$ — разрешимая насыщенная формация Фиттинга. В настоящем сообщении мы продолжаем данные исследования и решаем проблему для случая, когда $\mathfrak{F}$ — формация Фишера. Прежде чем сформулировать основной результат, напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Фишера, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия подгрупп вида PN, где P — силовская p-подгруппа и N — нормальная подгруппа группы G. Формация $\mathfrak{F}$, одновременно являющаяся классом Фишера, называется формацией Фишера.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация Фишера. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Если $G = AB$ — ди-$\mathfrak{F}$-группа и I — ее $\mathfrak{F}$-инъектор, перестановочный с подгруппами A и B, то I факторизуем в $G = AB$.*

(2) *Если $G = AB$ — ди-$\mathfrak{F}$-группа и I — ее $\mathfrak{F}$-инъектор, перестановочный с подгруппами A и B, то $A \cap B \subseteq I$.*

(3) *Любая разрешимая $\mathfrak{F}$-критическая группа или является группой Шмидта, или имеет простой порядок.*

(4) *$\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией и имеет такое полное локальное задание f, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(p)}$ для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \oslash$ для остальных простых p.*

Следствие 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ — формация всех π-нильпотентных групп, $G = AB$ — ди-π-нильпотентная группа. Если H — π-нильпотентный инъектор группы G, перестановочный с подгруппами A и B, то $A \cap B \subseteq H$, но $A \cap B$ не обязательно содержится в $G_{\mathfrak{F}}$.*

Обозначим через $\mathfrak{H}$ класс всех групп, у которых любая группа Шмидта сверхразрешима. Согласно [6] $\mathfrak{H}$ является наследственной формацией Фиттинга, а значит, формацией Фишера.

Следствие 2. *Пусть $G = AB$ — ди-$\mathfrak{H}$-группа, R — ее $\mathfrak{H}$-инъектор, перестановочный с подгруппами A и B. Тогда $R = (A \cap R)(B \cap R)$ и $A \cap B \subseteq R$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Amberg B., Franciosi S., Giovanni F. Products of Groups. — Oxford, 1992. 220 p.

2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

3. Lockett P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups. — Ph.D. thesis, University of Warwick, 1971. 32 p.

4. Amberg B., B. Höfling B. On finite products of nilpotent groups // Arch. Math. 1994. Vol. 63. P. 1–8.

5. Васильев А. Ф. О факторизуемых инъекторах конечных разрешимых групп // Весн. Вiцебскага дзярж. ун-та. 2005. № 4 (38). С. 108–111.

6. Монахов В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Матем. заметки. 1995. Том 58, № 5. С. 717–722.

———————————————————————————————

УДК 512.542

О конечных группах с заданными свойствами силовских нормализаторов[1]

Т. И. Васильева (Беларусь, г. Гомель)
Белорусский государственный университете транспорта
e-mail: tivasilyeva@mail.ru
А. Г. Коранчук (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: melchenkonastya@mail.ru

On finite groups with given properties of Sylow normalizers

T. I. Vasilyeva (Belarus, Gomel)
Belarusian State University of Transport
e-mail: tivasilyeva@mail.ru
A. G. Koranchuk (Belarus, Gomel)
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: melchenkonastya@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Свойства нормализаторов силовских подгрупп (или силовских нормализаторов) группы связаны со строением всей группы. Например, примарность силовских нормализаторов группы G влечет примарность всей группы G [1]. В [2] было установлено, что если в группе G все силовские нормализаторы нильпотентны, то и G нильпотентна. В ряде работ (см., например, [3]–[6]) для насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ были рассмотрены группы с силовскими нормализаторами из $\mathfrak{F}$. Согласно [7], подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп от H до G с простыми индексами. В [8] была доказана сверхразрешимость группы с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими нормализаторами. В [9] исследовались группы с формационно субнормальными силовскими нормализаторами.

Полученные нами результаты относятся к отмеченному выше направлению исследования групп.

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (задание 1.1.02 подпрограммы 11.1 «Математические модели и методы») при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, лежащая между формациями всех нильпотентных и всех сверхразрешимых групп, и G — группа. Тогда и только тогда G принадлежит $\mathfrak{F}$, когда любой силовский нормализатор из G принадлежит $\mathfrak{F}$ и его нильпотентный корадикал субнормален в G.*

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, лежащая между формациями всех нильпотентных и всех сверхразрешимых групп, и G — группа. Тогда и только тогда G принадлежит $\mathfrak{F}$, когда любой силовский нормализатор из G принадлежит $\mathfrak{F}$ и его коммутант субнормален в G.*

Если $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех сверхразрешимых групп, то из теоремы 1 получаются следующие результаты.

Следствие 2. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал субнормален в G.*

Следствие 3. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G любой силовский нормализатор сверхразрешим и G метанильпотентна.*

Следствие 4. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его коммутант субнормален в G.*

Следствие 5. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G любой силовский нормализатор сверхразрешим и G имеет нильпотентный коммутант.*

Напомним, что подгруппа группы называется субмодулярной, если ее можно соединить с группой цепью подгрупп, каждая из которых модулярна в следующей. Здесь под модулярной подгруппой понимается подгруппа, которая является модулярным элементом в решетке всех подгрупп группы. Согласно [10] группа называется сильно сверхразрешимой, если она сверхразрешима и любая силовская подгруппа субмодулярна в ней. Класс всех сильно сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией [10], при этом он содержит все нильпотентные группы и не совпадает с формацией всех сверхразрешимых групп.

Следствие 6. *Группа G сильно сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G любой силовский нормализатор сильно сверхразрешим и его нильпотентный корадикал субнормален в G.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glauberman G. Prime-power factor groups of finite groups II // Math. Z. 1970. Vol. 117. P. 46–51.

2. Bianchi M., Gillio Berta Mauri. A., Hauck P. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers // Arch. Math. 1986. Vol. 47, № 3. P. 193–197.

3. Fedri V., Serena L. Finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers // Arch. Math. 1988. Vol. 50, № 1. P. 11–18.

4. Баллестер-Болинше А., Шеметков Л. А. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 1999. Том. 40, № 1. С. 3–5.

5. D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G. Saturated formations and Sylow normalizers // Bull. Austral. Math. Soc. 2004. Vol. 69, № 1. P. 25–33.

6. Kazarin L., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D. On Sylow normalizers of finite groups // J. Algebra Appl. 2014. Vol. 13, № 3. P. 1350116–1–20.

7. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Том. 51, № 6. С. 1270–1281.

8. Kniahina V. N., Monakhov V. S. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Internal. J. of Group Theory. 2013. Vol. 2, № 4. P. 21–29.

9. Васильев А. Ф. Васильева Т. И., Коранчук А. Г. О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп // Мат. заметки. 2020. Том. 108, № 5. С. 679–691.

10. Васильев В. А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами // Сиб. мат. журн. 2015. Том. 56, № 6. С. 1277–1288.

2020. Т. 108, № 5. С. 679–691.

УДК 512.542

О максимальных подформациях $\bar{\omega}$-веерных формаций конечных групп

А. А. Горепекина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: nastya3296@mail.ru
М. М. Сорокина (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

On maximal subformations of $\bar{\omega}$-fibered formations of finite groups

A. A. Gorepekina (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky
e-mail: nastya3296@mail.ru
M. M. Sorokina (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. В теории классов групп одно из центральных мест занимают локальные формации (см., например, [1]), известным обобщением которых являются ω-локальные формации, где ω — непустое множество простых чисел [2]. В работе [3] построена серия ω-веерных формаций, включающая ω-локальные формации как один из видов. А.Н. Скиба для произвольного разбиения σ множества всех простых чисел разработал σ-теорию конечных групп (см., например, [4]–[6]) и применил ее методы к построению σ-локальных формаций [7]. Используя методы данной теории, в работе [8] были построены $\bar{\omega}$-веерные формации, где $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω, являющиеся обобщением ω-веерных формаций. В приведенных ниже результатах изучаются условия, при которых $\bar{\omega}$-веерная формация обладает единственной максимальной $\bar{\omega}$-веерной подформацией.

Используется терминология, принятая в [1]. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений; класс Фиттинга — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп, принадлежащих данному классу. Для непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; $\varnothing \subset \pi \subseteq \mathbb{P}$; $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$; $\mathfrak{G}_\pi$ ($\mathfrak{N}_\pi$) — класс всех (нильпотентных) π-групп; $\mathfrak{G}_{c\pi}$ ($\mathfrak{G}_{c\pi d}$) — класс всех групп, у которых каждый главный π-фактор (πd-фактор) централен.

Пусть ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$. Следуя [4], полагаем $\bar{\omega} = \{\omega_i \mid i \in I\}$ — произвольное разбиение множества ω, т.е. $\omega = \cup_{i\in I}\omega_i$, $\omega_i \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, и $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Функция вида $f : \bar{\omega} \cup \{0\} \to \{$формации групп$\}$, где $f(0) \neq \varnothing$, называется *$\bar{\omega}F$-функцией*; функция вида $\gamma : \bar{\omega} \to \{$непустые формации Фиттинга групп$\}$, удовлетворяющая условию $\mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, называется *$\bar{\omega}FR$-функцией*. Для любой группы G полагаем $\bar{\omega} \cap \pi(G) = \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$, где $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G. Класс групп

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)\}$$

является формацией (здесь $O_\omega(G)$ и $G_{\gamma(\omega_i)}$ — $\mathfrak{G}_\omega$-радикал и $\gamma(\omega_i)$-радикал группы G соответственно), которая называется *$\bar{\omega}$-веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$-спутником f* [8]. Направление γ $\bar{\omega}$-веерной формации называется *p-направлением*, если $\gamma(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}\gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. В соответствии с терминологией [3], через $\bar{\omega}F(G, \gamma)$ обозначается $\bar{\omega}$-веерная формация с направлением γ, порожденная группой G, т.е. пересечение всех $\bar{\omega}$-веерных формаций с направлением γ, содержащих группу G.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(G, \gamma)$, где γ — p-направление, удовлетворяющее условию $\mathfrak{N}_{\omega_j} \subseteq \gamma(\omega_j) \subseteq \mathfrak{G}_{c\omega_j}$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega}$, $G = P \rtimes H$ — монолитическая группа с монолитом P, где $P = C_G(P)$ — ω_k-группа для некоторого $\omega_k \in \bar{\omega}$. Если формация $formH$ обладает единственной максимальной подформацией $\mathfrak{M}$, то $\bar{\omega}$-веерная формация $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной $\bar{\omega}$-веерной подформацией с направлением γ и $\bar{\omega}$-спутником h, имеющим следующее строение*:

$h(0) = form(G/O_\omega(G))$;

$h(\omega_k) = \mathfrak{M}$;

$h(\omega_i) = form(G/G_{\gamma(\omega_i)})$ *для всех* $\omega_i \in (\bar{\omega} \cap \pi(G))\backslash\{\omega_k\}$;

$h(\omega_i) = \varnothing$, *если* $\omega_i \in \bar{\omega}\backslash(\bar{\omega} \cap \pi(G))$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(G, \gamma)$, где γ — p-направление, удовлетворяющее условию $\gamma(\omega_j) \subseteq \mathfrak{G}_{c\omega_j d}$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega}$, G — монолитическая группа с неабелевым монолитом P таким, что $\bar{\omega}\cap\pi(P) \neq \varnothing$. Тогда $\bar{\omega}$-веерная формация $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной $\bar{\omega}$-веерной подформацией с направлением γ и $\bar{\omega}$-спутником h, имеющим следующее строение*:

$h(0) = form(G/O_\omega(G))$;

$h(\omega_i) = form(G/P)$, *если* $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(P)$;

$h(\omega_i) = form(G/G_{\gamma(\omega_i)})$ *для всех* $\omega_i \in (\bar{\omega} \cap \pi(G))\backslash(\bar{\omega} \cap \pi(P))$;

$h(\omega_i) = \varnothing$, *если* $\omega_i \in \bar{\omega}\backslash(\bar{\omega} \cap \pi(G))$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скиба А. Н. Алгебра формаций. — Минск: Изд-во Беларуская навука, 1997. 240 с.

2. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Том 2, № 2. С. 114-147.

3. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Том 71, № 1. С. 43-60.

4. Skiba A. N. On σ-properties of finite groups I // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 4(21). P. 89-96.

5. Skiba A. N. On σ-properties of finite groups II // Проблемы физики, математики и техники. 2015. № 3(24). P. 70-83.

6. Skiba A. N. On σ-properties of finite groups III // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 1(26). P. 52-62.

7. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Проблемы физики, математики и техники. 2018. Том 1, № 34. С. 79-82.

8. Сорокина М. М., Горепекина А. А. $\bar{\omega}$-Веерные формации конечных групп // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 3(79). С. 233-246.

———————————————————————————

УДК 512.548

Об автотопиях и антиавтотопиях квазигрупп смешанного типа первого (второго) рода[1]

А. А. Давлатбеков (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский государственный педагогический университет им. Садриддина Айни
e-mail: akimbekd@mail.ru

On autotopies and anti-autotopies of a quasigroup of mixed type of the first (second) kind

A. A. Davlatbekov (Tajikistan, c. Dushanbe)
Tajik State Pedagogical University named after S. Ayni
e-mail: akimbekd@mail.ru

В статье найдены связь квазигруппы смешанного типа I (II) рода с известными тождествами элемент Бола. Изучены морфизмы (автотопия и антиавтотопия) этих классов квазигрупп.

В. Д. Белоусов ввел линейные квазигруппы (над групами) в середине 1960-х годов [1]. В 1970-х годов, интенсивно изучали линейные квазигруппы над абелевыми группами (T-квазигруппы) и некоторые другие классы обобщенные линейные квазигруппы Т. Кепка, П. Немес, Я. Джезек, В. Д. Белоусов и другие математики [2-3]. Ясно, что понятие обобщенной линейной квазигруппы распространяется на n-арной случай. Квазигрупповая школа В. Д. Белоусова (Г. Б. Белявская и ее ученики, П. Н. Сырбу, А. Х. Табаров, В. А. Дудек и. др) приступили к более активным исследованием обобщенных линейных квазигрупп, а именно: полулинейные, алинейные, смешанные типы линейности квазигрупп.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется смешанного типа линейности I (II) рода над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид $x\cdot y=\varphi x+c+\bar{\psi}y$ $(x\cdot y=\bar{\varphi}x+c+\psi y)$, где $\varphi(\psi)\in Aut(Q,+)$, $\bar{\psi}(\bar{\varphi})$ - антиавтоморфизмы группы $(Q,+)$, c - фиксированный элемент из множества Q [4].

Автотопия (антиавтотопия) квазигруппы $(Q,\cdot)$ - это упорядоченная тройка подстановок $T=(\alpha,\beta,\gamma)$, такая, что

$$\gamma(x\cdot y)=\alpha x\cdot\beta y\ \ (\gamma\,(x\cdot y)=\alpha y\cdot\beta x)\,.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке...

Определение 1. *Элемент $a \in Q$ произвольной квазигруппы $(Q, \cdot)$ называется левым элементом Бола, если имеет место тождество*

$$a(x \cdot (a \cdot y)) = R_{e_a}^{-1} \cdot (a \cdot (x \cdot a)), \forall x, y \in Q, \tag{1}$$

где $a \cdot e_a = a$.

Определение 2. *Элемент $a \in Q$ произвольной квазигруппы $(Q, \cdot)$ называется правым элементом Бола, если имеет место тождество*

$$((x \cdot b) \cdot y) \cdot b = x \cdot L_{f_b}^{-1} \cdot (b \cdot (y \cdot b)), \forall x, y \in Q, \tag{2}$$

где $f_b \cdot b = b$.

Определение 3. *Элемент $a \in Q$ произвольной квазигруппы $(Q, \cdot)$ называется элементом Бола, если имеет место тождество (1) и (2).*

Теорема 1. *В квазигруппе смешанного типа линейности II - рода : $x \cdot y = \bar{\varphi}x + \psi y$, элемент $a \in Q$ является левым элементом Бола, тогда и только тогда, если выполняется следующее условие $\psi^2 = e$.*

Теорема 2. *Квазигруппой смешанного типа линейности II - рода $(Q, \cdot)$: $x \cdot y = \bar{\varphi}x + \psi y$, с условием $\psi^2 = e$ является левый элемент Бола, если существует подстановка $\sigma = \tilde{R}_{\psi e_a}^{-1} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a} \tilde{R}_{\bar{\varphi}a} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}^{-1}$ множества Q такая, что*

$$P = (\tilde{R}_{\psi e_a}^{-1} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a} \tilde{R}_{\bar{\varphi}a} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}^{-1} \tilde{L}_a \theta \tilde{R}_{\psi e_a} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}^{-1} \tilde{R}_{\bar{\varphi}a}^{-1} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}, \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}^{-1} \tilde{R}_{\bar{\varphi}b} \theta \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \theta),$$

автотопия квазигруппа $(Q, \cdot)$ и

$$\bar{P} = (\tilde{R}_{\psi e_a} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}^{-1} \tilde{R}_{\bar{\varphi}a}^{-1} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a} \tilde{L}_a \bar{\theta} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}^{-1}, \tilde{L}_{\bar{\varphi}a} \tilde{R}_b \bar{\theta} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a} \tilde{R}_{\bar{\varphi}a} \tilde{L}_{\bar{\varphi}a}^{-1} \tilde{R}_{\psi e_a}, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \bar{\theta}),$$

антиавтотопия квазигруппа $(Q, \cdot)$, где $\varphi, \theta \in Aut(Q, +)$, $\bar{\psi}, \bar{\theta}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q, +)$, $\tilde{L}_a x = a + x$, $\tilde{R}_b x = x + b$ левая и правая трансляции группы $(Q, +)$.

Следствие 1. *В квазигруппе смещенного типа линейности I - рода $(Q, \cdot)$: $x \cdot y = \varphi x + \bar{\psi} y$, элемент $a \in Q$ является правым элементом Бола, тогда и только тогда, если выполняется следующие условие $\varphi^2 = e$.*

Следствие 2. *Квазигруппой смешанного типа линейности I - рода $(Q, \cdot)$: $x \cdot y = \bar{\varphi}x + \psi y$, с условием $\varphi^2 = e$ является левый элемент Бола, если существует подстановка $\tau = \tilde{L}_{\varphi f_b}^{-1} \tilde{R}_{\bar{\psi}b} \tilde{L}_{\bar{\psi}b} \tilde{R}_{\bar{\psi}b}^{-1}$ множества Q такая, что*

$$P = (\tilde{R}_{\bar{\psi}b}^{-1} \tilde{L}_a \theta \tilde{R}_{\bar{\psi}b}, \tilde{L}_{\varphi f_b}^{-1} \tilde{R}_{\bar{\psi}b} \tilde{L}_{\bar{\psi}b} \tilde{R}_{\bar{\psi}b}^{-1} \tilde{R}_b \theta \tilde{L}_{\varphi f_b} \tilde{R}_{\bar{\psi}b}^{-1} \tilde{L}_{\bar{\psi}b}^{-1} \tilde{R}_{\bar{\psi}b}, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \theta),$$

автотопия квазигруппы $(Q, \cdot)$ и

$$P = (\tilde{R}_{\bar{\psi}b} \tilde{L}_a \bar{\theta} \tilde{L}_{\varphi f_b}^{-1} \tilde{R}_{\bar{\psi}b} \tilde{L}_{\bar{\psi}b} \tilde{R}_{\bar{\psi}b}^{-1}, \tilde{L}_{\varphi f_b} \tilde{R}_{\bar{\psi}b}^{-1} \tilde{L}_{\bar{\psi}b}^{-1} \tilde{R}_{\bar{\psi}b} \tilde{R}_b \theta \tilde{R}_b \bar{\theta}, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \bar{\theta}),$$

антиавтотопия квазигруппы $(Q, \cdot)$, где $\varphi, \theta \in Aut(Q, +)$, $\bar{\psi}, \bar{\theta}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q, +)$, $\tilde{L}_a x = a + x$, $\tilde{R}_b x = x + b$ левая и правая трансляции группы $(Q, +)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов В. Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах // Мат. сборник. 1966. 70(112): 1, С. 55-97.
2. Kepka T., and Nemec P. T-quasigroups. I // Acta univ. Carolin. Math. Phis. 1971. vol 12, № 1. Pp. 31-39.
3. Белоусов В. Д. О группе, ассоциированной квазигруппе // - Мат. исслед. Кишинев. 1969. Том 4, № 3. С. 21-39.
4. Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп // Дискретная математика. РАН. 1992. Том 4, № 2. С. 142-147.

———————————————————————————————

УДК 512.54

Об изоляторах конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой[1]

И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
А. С. Угаров (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarovas@tsput.ru

On insulators of finitely generated subgroups in Coxeter groups with a tree structure

I. V. Dobrynina (Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
A. S. Ugarov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarovas@tsput.ru

Пусть G – конечно порожденная группа Кокстера, заданная копредставлением $G = \langle a_1, \dots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i,j = \overline{1,n}\rangle$, где m_{ij} — элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i,j \in \overline{1,n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$.

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером в 1934 году. Понятие группы Кокстера возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей.

В алгебраическом аспекте данные группы стали изучаться с работ Ж. Титса (1962-1964).

В 1983 году К. Аппелем и П. Шуппом [1] определены классы групп Кокстера большого $(m_{ij} \geq 3, i \neq j)$ и экстрабольшого $(m_{ij} > 3, i \neq j)$ типов.

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Г такой, что вершинам графа Г соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1,n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 19-41-710002 р_а

a_i и a_j, соответствует соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, то мы имеем группу Кокстера с древесной структурой [2].

Данный класс групп введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [3].

Группу Кокстера G с древесной структурой можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$ и $G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Определение 1. *Под проблемой вхождения будем понимать проблему нахождения алгоритма, позволяющего для всякой конечно порожденной подгруппы H конечно определенной группы G определить, принадлежит ли произвольно выбранный элемент группы G подгруппе H или нет.*

П. Шуппом показана неразрешимость проблемы вхождения в классе групп Кокстера.

Будем говорить, что группа G удовлетворяет условию максимальности, если всякая возрастающая последовательность ее подгрупп $H_1 \leq H_2 \leq \ldots$ стабилизируется, то есть существует такое натуральное число N, что для любого n, $n > N$, $H_n = H_{n+1} = \ldots$.

Теорема 1. *[4] Пусть группа $G = \langle \prod_{s=1}^{n} *G_s; relG_1, \ldots, relG_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle$ есть древесное произведение групп, объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i$ и $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\{\varphi_{ji}\} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы:*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$,

то в группе G разрешима проблема вхождения.

Группа Кокстера с древесной структурой, рассматриваемая как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам, удовлетворяет условиям данной теоремы, поэтому для данного класса групп справедливо следующее следствие.

Следствие 1. *[4]. В группах Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Теорема 2. *[2] Пересечение двух конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.*

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп, если для любых конечно порожденных подгрупп $H_1, \ldots, H_s$ группы G и любых слов $w_1, \ldots, w_s \in G$ существует алгоритм, позволяющий установить, пусто или нет пересечение $w_1 H_1 \cap \ldots \cap w_s H_s$.

Теорема 3. *[5] В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп.*

Понятия изолированной подгруппы и изолятора определим, следуя работе П. Г. Конторовича [6].

Определение 2. *[6] Подгруппа A группы G называется изолированной в группе G, если для любого элемента g из G из того, что g^k принадлежит A, $g^k \neq 1$, следует, что g принадлежит A.*

Определение 3. *[6] Подгруппа, равная пересечению всех изолированных в группе G подгрупп, содержащих подгруппу A, называется изолятором или корневым замыканием подгруппы A в G.*

Т. Макдоноу показал, что в классе конечно порожденных свободных групп изолятор конечно порожденной подгруппы конечно порожден и указал алгоритм построения такой подгруппы.

В. Н. Безверхний, В. А. Гринблат доказали, что если $G = A_1 * A_2$ — свободное произведение подгрупп A_1, A_2, обладающих свойством: изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден, то для любой конечно порожденной подгруппы A из G изолятор $J(A)$ конечно порожден [7].

Теорема 4. *[8] Пусть $G = A_1 *_H A_2$ — свободное произведение подгрупп A_1 и A_2 с объединением по изолированной подгруппе H, обладающей свойством максимальности. Если A_1 и A_2 обладают свойством: изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден, то для любой конечно порожденной подгруппы A из G изолятор $J(A)$ конечно порожден.*

Теорема 5. *В группах Кокстера с древесной структурой изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден.*

Теорема 6. *Существует алгоритм, выписывающий образующие изолятора конечно порожденной подгруппы группы Кокстера с древесной структурой.*

Доказательство теорем 5, 6 проводится по индукции.

Рассматривается конечно порожденная группа Кокстера G с древесной структурой, представленная в виде свободного произведения двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам:

$$G =< \prod_{s=1}^{n} *G_s; relG_1, \ldots, relG_s, a_j = a_j' > .$$

В этом случае группе Кокстера G соответствует дерево - граф $\overline{\Gamma}$: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ соответствуют группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$ и $G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическая подгруппа $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Рассматривается база индукции.

Опираясь на результат И. С. Безверхней, строится изолятор конечно порожденной подгруппы в группе

$$\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2=1>} G_{jk},$$

являющейся свободным произведением двупорожденных групп Кокстера

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$$

и

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >,$$

объединенных по циклической подгруппе $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Далее рассматривается древесное произведение $n-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-1}, \overline{\Gamma}_{n-1} \subset \overline{\Gamma}$. Группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-1}$, обозначим через $\overline{G}_{n-1}$. Пусть n-ый сомножитель, подгруппа G_{xy}, соответствует вершине дерева-графа $\overline{\Gamma}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-1}$ ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа второго порядка $< a_x; a_x^2 = 1 >$. Таким образом, группа G представляется как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-1}$ и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе порядка два $< a_x; a_x^2 = 1 >$, то есть

$$G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_x;\ a_x^2=1>} G_{xy}.$$

Используя предположение индукции для группы $\overline{G}_{n-1}$, доказывается справедливость теорем 5, 6 для группы G.

Заметим, что В. Н. Безверхним результат теоремы 4 перенесен на HNN-расширения групп [9].

В дальнейшем предполагается изучение π-изоляторов конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой на основе работы В. Н. Безверхнего [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Appel, P. Schupp, Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. № 72. С. 201-220.

2. Безверхний В. Н., Инчено О. В. Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой //Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. № 2. С. 16–31.

3. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов международной конференции — Тула, 2003. С. 33-34.

4. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во ТГПИ, 1986. С. 3-22.

5. Инчено О. В. О проблеме пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп в группе Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. Т. 17, № 2. С. 146-161.

6. Конторович П. Г. Группы с базисом расщепления. III // Математический сборник.1948. Т. 21, № 1. С. 79-100.

7. Безверхний В. Н., Гринблат В. А. О корневом замыкании в свободном произведении групп // Алгебраические действия и упорядоченность. — Л.: Изд-во РГПИ, 1983. С. 3-20.

8. Безверхняя И. С. О конечной порожденности изолятора подгруппы в свободном произведении групп с объединением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во ТГПИ, 1983. С. 81-112.

9. Безверхний В. Н. О корневом замыкании в HNN-группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во ТГПИ, 1990. С. 14-42.

10. Безверхний В. Н. О π-изоляторах в HNN-группах // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 1996. Т. 2. С. 7-44.

———————————————————————————————————————

УДК 512.54, 512.74

О подгруппах, богатых трансвекциями[1]

В. А. Койбаев (Россия, г. Владикавказ)
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова; Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

About subgroups rich in transvections

V. A. Koibaev (Russia, Vladikavkaz)
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov; Southern Mathematical Institute VSC RAS
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $G = GL(n, R)$ порядка n над кольцом R богата трансвекциями, если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ на всех позициях (i, j), $i \neq j$ (для некоторых $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$,) [1]. В [1] получено описание подгрупп полной линейной группы $GL(n, K)$ (над полем K) богатых трансвекциями и содержащих группу диагональных матриц $D(n, k)$ над подполем k поля K. В [2]-[3] доказано, что надгруппа нерасщепимого максимального тора, содержащая одномерное преобразование, богата трансвекциями.

В настоящей заметке мы рассматриваем подгруппу $H = \langle t_{ij}(\alpha), (\pi)\rangle$ полной линейной группы $G = GL(n, R)$ порядка n над коммутативной областью R с 1, порожденную матрицей-перестановкой (π), соответствующей циклу $\pi \in S_n$ длины n, и элементарной трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$ позиции (i, j).

Пусть R – коммутативная область с 1, в которой существует обратимый элемент θ такой, что элемент $\theta - 1$ также обратим, $H \leq GL(n, R)$.

Теорема 1. *Пусть $\pi = (i_1\ i_2\ \dots i_n) \in S_n$ – цикл длины n. Для того, чтобы подгруппа $\langle t_{ij}(\alpha), (\pi)\rangle$ полной линейной группы $G = GL(n, R)$, порожденная матрицей-перестановкой (π) и трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$, была богата трансвекциями необходимо и достаточно, чтобы число $\omega(i) - \omega(j)$ было взаимно просто с n, где через ω обозначается перестановка, первая строка которой – $(i_1\ i_2\ \dots i_n)$, а вторая строка – $(1\ 2\ \dots n)$.*

Теорема 2. *Пусть $\pi = (1\ 2\ .\ .\ .\ n) \in S_n$ – цикл длины n. Для того, чтобы подгруппа $\langle t_{ij}(\alpha), (\pi)\rangle$ полной линейной группы $G = GL(n, R)$, порожденная матрицей-перестановкой (π) и трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$, была богата трансвекциями необходимо и достаточно, чтобы число $i - j$ было взаимно просто с n.*

Следствие 1. *В условиях теоремы 1, если $n = p$ – простое число, $\langle t_{ij}(\alpha), (\pi)\rangle \subseteq H$, то подгруппа H богата трансвекциями.*

Следствие 2. *В условиях теоремы 2, если $\langle t_{ij}(\alpha), (\pi)\rangle \subseteq H$ и НОД $(i - j, n)$=1, то подгруппа H богата трансвекциями.*

Следствие 3. *В условиях теоремы 2, если $t_{21}(\xi) \in H$, (или $t_{n\,1}(\xi) \in H$) и $(\pi) \in H$, то подгруппа H богата трансвекциями.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение 075-02-2022-890

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревич З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1978. Том 75. С. 22–31.

2. Койбаев В. А. Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый тор // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21, № 5. С. 70–86.

3. В. А. Койбаев В. А., Шилов А. В. Трансвекции в надгруппах нерасщепимого тора // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11, № 4. С. 22–31.

УДК 512.542

Конечные группы с формационными ограничениями на 2-максимальные подгруппы

М. Н. Коновалова (Россия, г. Брянск)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: msafe83@mail.ru
И. Л. Сохор (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Finite groups with formational restrictions on 2-maximal subgroups

M. N. Konovalova (Russia, Bryansk)
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: msafe83@mail.ru
I. L. Sokhor (Belarus, Gomel)
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Запись $H \leq G$ ($H < G$, $H \lessdot G$) означает, что H — подгруппа (соответственно собственная подгруппа, максимальная подгруппа) группы G.

Пусть $H \leq G$. Если существует максимальная в G подгруппа M такая, что $H \leqslant M$ и $H \lessdot M$, то H называется 2-максимальной подгруппой группы G. Подгруппу U группы G называют строго 2-максимальной подгруппой в G, если U является 2-максимальной подгруппой в G и U не является 2-максимальной подгруппой ни в какой собственной подгруппе группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \lessdot H_1 \lessdot \ldots \lessdot H_{n-1} \lessdot H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_{i-1}$ для всех i [1, II.8].

В случае, когда $H \lessdot G$ и H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, говорят, что H $\mathfrak{F}$-нормальна в G. В любой группе $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа субнормальна ($\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп), а в разрешимых группах верно и обратное утверждение: субнормальная подгруппа разрешимой группы $\mathfrak{N}$-субнормальна [1], [2, лемма 1.11].

Формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной, если в любой группе множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. Решеточные формации описаны в работе [3].

В ненильпотентной группе с субнормальными 2-максимальными подгруппами все собственные подгруппы абелевы [4]. Этот результат остается верным, если субнормальными являются строго 2-максимальные подгруппы [5]. Группы с формационно субнормальными подгруппами исследовались в [7]–[12]. Для произвольной наследственной формации $\mathfrak{F}$ группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными 2-максимальными подгруппами изучались в [9].

В настоящей работе мы рассматриваем группы с формационно субнормальными строго 2-максимальными подгруппами в случае, когда формация является решеточной. В этой ситуации требование $\mathfrak{F}$-субнормальности всех строго 2-максимальных подгрупп совпадает с требованием субнормальности всех 2-максимальных подгрупп.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа G содержит максимальную ненормальную подгруппу M и каждая максимальная в M подгруппа субнормальна в G.*

(2) *Каждая 2-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G.*

(3) *Каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G.*

(4) *Группа G содержит максимальную не $\mathfrak{F}$-нормальную подгруппу H и каждая максимальная в H подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

(5) *Каждая 2-максимальная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

(6) *Каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

(7) *Все собственные подгруппы в группе G абелевы.*

Отметим, что частными случаями данной теоремы являются результаты работ [4], [5], [6] и [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. 271 с.
2. Монахов В. С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.
3. Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: сб. науч. ст. — Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1993. С. 27–54.
4. Луценко Ю. В., Скиба А. Н. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами // Математические заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 730–740.
5. Горбатова Ю. В., Коновалова М. Н. Конечные группы с субнормальными строго 2- или 3-максимальными подгруппами // Вестник Омского университета. 2019. Т. 24, № 3. С. 4–12.
6. Коновалова М. Н., Монахов В. С. Конечные группы с некоторыми субнормальными 2-максимальными подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2020. № 2 (43). С. 75–79.

7. Kovaleva V. A., Skiba A. N. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal // J. Group Theory. 2014. Vol. 17, № 2. P. 273–290.
8. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ricerche Mat. 2013. Vol. 62. P. 307–322.
9. Монахов В. С. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 269–277.
10. Konovalova M. N. Finite groups with $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // Mathematical Notes. 2020. Vol. 108, № 2. P. 201–208.
11. Sokhor I. L. Continuation of the theory of $E_{\mathfrak{F}}$-groups // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2021. Vol. 27, № 1. P. 268–272.
12. Monakhov V. S., Konovalova M. N. On groups with formational subnormal strictly 2-maximal subgroups // Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. Jan. 2021. Vol. 73, № 1. P. 107–116.
13. Коновалова М. Н., Сохор И. Л. Конечные группы с некоторыми формационно субнормальными подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2019. № 4 (41). С. 51–54.

УДК 512

Об унитарной ниль K_1-группе

В. И. Копейко (Россия, г. Санкт-Петербург)
e-mail: kopeiko52@mail.ru

On unitary nil K_1-group

V. I. Kopeiko (Russia, Sankt-Petersburg)
e-mail: kopeiko52@mail.ru

Напомним основные определения и обозначения унитарной K-теории [1], [2], [3]. Пусть (R, λ, Λ) - унитарное кольцо, где R - ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x \to \bar{x}$, λ - центральный элемент кольца R такой, что $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$, Λ - аддитивная подгруппа R, удовлетворяющая некоторым условиям. В литературе унитарное кольцо (R, λ, Λ) называют также форменным кольцом Бака с системой параметров Λ и симметрией λ. Отметим, что множество $\bar{\Lambda} = \{\bar{x}, x \in \Lambda\}$ также является системой параметров в R. Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$, положив $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.

Определение 1. *Матрица $a = (a_{ij})(\in M_r(R))$ называется Λ-эрмитовой, если $a = -\lambda a^*$ и все диагональные элементы матрицы a содержатся в Λ.*

Определение 2. *Для натурального r положим $I_r^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & e_r \\ \lambda e_r & 0 \end{pmatrix}$, где e_r - единичная матрица порядка r. Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in M_r(R)$ называется Λ-унитарной, если $\alpha^* I_r^\lambda \alpha = I_r^\lambda$ и все диагональные элементы матриц ab^*, cd^* содержатся в Λ.*

Множество $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ всех Λ-унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) Λ-унитарной группой. Подгруппа $EU_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ группы $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$, порожденная матрицами вида $H(a) = diag(a, (a^*)^{-1})$, $\begin{pmatrix} e_r & b \\ 0 & e_r \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e_r & 0 \\ c & e_r \end{pmatrix}$, где $a \in E_r(R)$, b - $\bar{\Lambda}$-эрмитова, c - Λ-эрмитова, называется элементарной Λ-унитарной группой.

Определим стабильные группы $U^\lambda(R,\Lambda) = \cup U^\lambda_{2r}(R,\Lambda)$, $EU^\lambda(R,\Lambda) = \cup EU^\lambda_{2r}(R,\Lambda)$. В силу унитарного аналога леммы Уайтхеда [1], группа $EU^\lambda(R,\Lambda)$ совпадает с коммутантом группы $U^\lambda(R,\Lambda)$ и, в частности, корректно определена (абелева) группа $K_1U^\lambda(R,\Lambda) = U^\lambda(R,\Lambda)/EU^\lambda(R,\Lambda)$.

Продолжив инволюцию на кольцо многочленов $R[X]$, положив $\overline{X} = X$, получаем унитарное кольцо $(R[X],\lambda,\Lambda[X])$. В [3] автором была введена следующая группа и начато ее изучение.

Определение 3. *Ядро (расщепляющегося) эпиморфизма групп $K_1U^\lambda(R[X],\Lambda[X]) \to K_1U^\lambda(R,\Lambda)$, индуцированного унитарной сюръекцией унитарных колец $(R[X],\Lambda[X]) \to (R,\Lambda) : X \to 0$, обозначается через $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ и называется унитарной нильпотентной по Бассу K_1-группой унитарного кольца R.*

Множество представителей элементов группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ описывается в следующем утверждении.

Предложение 1. *(см. [3], теорема 1). Любой элемент группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет представитель вида:*

$$\begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX^n & e_r + a^*X + \cdots + (a^*)^nX^n \end{pmatrix} (\in U^\lambda_{2r}(R[X],\Lambda[X]))$$

при некоторых натуральных r,n и матрицах $a,b,c(\in M_r(R))$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) матрицы b и ab являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми, причем $ab = ba^*$;

2) матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми, причем $ca = a^*c$;

3) $bc = a^{n+1}$, $cb = (a^*)^{n+1}$.

Нетрудно показать (см., например, [3]), что условия 1)-3) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы выписанная матрица являлась $\Lambda[X]$-унитарной.

Хорошо известно (см., например, следствие 5.3 из главы 12 в [4]), что для ассоциативного кольца R с 1 любой элемент нильпотентной по Бассу K_1-группы $NK_1(R)$ имеет унипотентный представитель вида $e_r - aX$ при некотором натуральном r, где $a(\in M_r(R))$ - нильпотентная матрица. Для унитарной нильпотентной по Бассу K_1-группы $NKU^\lambda_1(R,\Lambda)$ аналогичный результат вообще говоря не имеет места. Более точно, имеет место следующий результат.

Предложение 2. *(см. [3], теорема 2). Пусть матрицы $a,b,c \in M_r(R)$ удовлетворяют условиям 1)-3) из предложения 1 при некоторых натуральных r,n. Тогда*

1) при $n = 1$ матрица

$$\begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX & e_r + a^*X \end{pmatrix} = e_{2r} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix} X (\in U^\lambda_{2r}(R[X],\Lambda[X]))$$

является унипотентной, причем матрица $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$ имеет степень нильпотентности 2;

2) при $n \geq 2$ матрица

$$\begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX^n & e_r + a^*X + \cdots + (a^*)^nX^n \end{pmatrix} (\in U^\lambda_{2r}(R[X],\Lambda[X]))$$

является унипотентной тогда и только тогда, когда матрица $e_r - aX$ - унипотентна и в этом случае класс данной матрицы в группе $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ совпадает с классом гиперболической матрицы $H(e_r - aX)$.

Одним из основных результатом доклада является следующее утверждение, показывающее, что предложение 2 дает полное описание элементов группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, имеющих унипотентный представитель.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in M_{2r}(R)$. Если $e_{2r} - \alpha X \in U_{2r}^\lambda(R[X],\Lambda[X])$, то α является нильпотентной матрицей степени нильпотентности 2 и в этом случае матрица α имеет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$, где матрицы $a, b, c \in M_r(R)$ удовлетворяют условиям 1)-3) из предложения 1 при $n = 1$.*

Обозначим через $UnipK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ подгруппу $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, порожденную всеми элементами, имеющими представитель вида $e_{2r} - \alpha X$ при некотором r, где $\alpha(\in M_{2r}(R))$ является нильпотентной матрицей степени нильпотентности 2. Как показывают следующие следствия, введенная группа обладает свойствами, аналогичными хорошо известным свойствам нильпотентной по Бассу K_1-группы $NK_1(R)$ кольца R алгебраической K-теории (см., например, [5]).

Следствие 1. *Пусть натуральное число n такое, что $n = n \cdot 1 = 0$ в кольце R, где 1 обозначает единичный элемент кольца R. Тогда любой элемент группы $UnipK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет конечный порядок, делящий число n.*

Следствие 2. *Пусть натуральное число n такое, что $nR = R$. Тогда группа $UnipK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является однозначно n-делимой и, в частности, выделяется прямым слагаемым в группах $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ и $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$.*

Последнее утверждение есть следствие общего результата из теории абелевых групп о том, что произвольная делимая подгруппа абелевой группы выделяется прямым слагаемым (см., например, [6], гл.3). Отметим, что в [6] делимая группа называется полной.

Следствие 3. *Если R является $\mathbf{Q}$-алгеброй, где $\mathbf{Q}$ обозначает поле рациональных чисел, то $UnipK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является $\mathbf{Q}$-векторным пространством.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bak A. K-theory of forms. — Annals of math. studies. vol. 98. Princeton: Princeton university press. 1981. 268 p.

2. Bass H. Unitary algebraic K-theory // Lecture Notes Math. 1973. V. 343. P. 57-265.

3. Копейко В. И. Нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа унитарного кольца // Записки научных семинаров ПОМИ. 2017.Том 460. С. 134-157.

4. Басс Х. Алгебраическая K-теория. — Москва: Изд-во Мир, 1973. 592 с.

5. Weibel C. Meyer-Vietoris sequences and module structures on NK_*. // Lecture Notes Math. 1981. V. 845. P. 466-493.

6. Каргаполов М И., Мерзляков Ю И. Основы теории групп. — 3-е изд., Москва: Наука, 1982. 240 с.

УДК 519.145

Группа диэдра порядка 8 в группе автотопизмов полуполевой проективной плоскости нечетного порядка[1]

О. В. Кравцова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru

Dihedral group of order 8 in an autotopism group of a semifield projective plane of odd order

O. V. Kravtsova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: ol71@bk.ru

Изучение конечных полуполей и полуполевых проективных плоскостей началось более века назад с первых примеров, построенных Л. Диксоном в 1906 г. Полуполем (semifield, название с 1965 г.) называют неассоциативное кольцо $Q = (Q, +, \cdot)$ с единицей, в котором однозначно разрешимы уравнения $ax = b$ и $ya = b$ для любых $a, b \in Q \setminus \{0\}$. Отсутствие ассоциативного закона в полуполе приводит к ряду аномальных свойств, в сравнении с полем, телом и даже почти-полем. Координатизация точек и прямых конечной проективной плоскости элементами полуполя обеспечивает далее ряд особенных геометрических свойств.

К середине 1950-х годов были построены несколько классов конечных полуполевых плоскостей, все они обладали общим свойством разрешимости группы коллинеаций (автоморфизмов). Это позволило Д. Хьюзу в 1959 г. в своем докладе предположить, что каждая конечная проективная плоскость, координатизируемая неассоциативным полуполем, имеет разрешимую группу коллинеаций. Эта гипотеза записана в монографии [1], показано также, что достаточно проверить разрешимость группы автотопизмов, то есть коллинеаций, фиксирующих треугольник. Проблема Д. Хьюза привлекла интерес широкого ряда исследователей, доказавших разрешимость группы коллинеаций для обширного списка полуполевых плоскостей при наличии определенных ограничений. Тем не менее общий подход к решению задачи выработан не был, в 1990 г. проблема была записана Н.Д. Подуфаловым в Коуровской тетеради (вопрос 11.76). Многие поздние работы реализуют подход с использованием методов компьютерной алгебры: разрешимость группы автотопизмов является результатом, сопутствующим построению полуполей и полуполевых плоскостей фиксированных порядков.

Предлагается подход к изучению проблемы Хьюза, основанный на классификации конечных простых групп и теореме Д.Г. Томпсона о минимальных простых группах. Метод регулярного множества позволяет выявлять условия существования полуполевой плоскости, обладающей заданной подгруппой автотопизмов, а также строить примеры, в том числе с использованием вычислительной техники. Исключая из числа возможных подгрупп автотопизмов определенные простые неабелевы группы, мы будем получать существенное продвижение в решении поставленной проблемы. Ранее автором показано [2], что недезаргова полуполевая плоскость нечетного порядка не допускает группу автотопизмов, изоморфную знакопеременной группе A_5, а вместе с ней и бесконечную серию простых групп.

Матричное представление автотопизмов порядка 4, вместе с уточнением их геометрического смысла [3], позволило доказать отсутствие диэдральной группы порядка 8 в группе

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

автотопизмов полуполевой плоскости с ограничением на порядок. Естественное требование отсутствия гомологий несущественно при исследовании проблемы Д. Хьюза.

Теорема 1. *Недезаргова полуполевая плоскость π порядка p^N, где p – простое, $p-1$ делится на 4, не допускает подгруппы автотопизмов, изоморфной диэдральной группе порядка 8 и не содержащей гомологий.*

Отметим, что диэдральная группа D_8 содержится почти в каждой конечной простой неабелевой группе. Результаты Д. Голдшмидта о сильно замкнутых подгруппах ([4], см. также Д. Горенстейн [5, теорема 4.128]), перечисляют исключения.

Теорема 2. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N, где p – простое, $p-1$ делится на 4. Тогда ее группа автотопизмов Λ не содержит простых неабелевых подгрупп, за исключением, возможно, следующих: $PSL(2,2^n)$, $n \geq 2$, $PSU(3,2^n)$, $n \geq 2$, $Sz(2^n)$, n нечетно, $n>1$, $PSL(2,q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, J_1 или ${}^2G_2(3^n)$, n нечетно, $n>1$.*

Обращаясь к списку Д.Г. Томпсона минимальных простых неабелевых групп, уточняем также, что группа автотопизмов Λ при указанном условии на порядок плоскости не содержит $PSL(2,3^n)$, n нечетное простое, $PSL(2,n)$, $n \equiv \pm 1 \pmod 8$ – простое, $PSL(3,3)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes. — New-York: Springer–Verlag Publ., 1973, 324 p.
2. Kravtsova O. V. On alternating subgroup A_5 in autotopism group of finite semifield plane // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 47-50.
3. Кравцова О. В. 2-элементы в группе автотопизмов полуполевой проективной плоскости // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2022. Том 39. С. 96-110.
4. Goldschmidth D. M. 2-fusion in finite groups // Ann. Math. 1974. Vol. 99, № 1. P. 70-117.
5. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. — Москва: Изд-во Мир, 1985. 352 с.

УДК 512.547.23

О форме деревьев Брауэра конечных симплектических и унитарных групп[1]

А. В. Кухарев (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: kukharev.av@mail.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-71-10007)

On the shape of Brauer trees of finite symplectic and unitary groups

A. V. Kukharev (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: kukharev.av@mail.ru

Пусть G — конечная группа с нетривиальной циклической силовской p-подгруппой. Тогда для главного p-блока группы G однозначно определен граф Браэура, являющийся деревом. В работе [1] была поставлена проблема описания конечных групп, у которых дерево Брауэра главного p-блока является звездой, то есть деревом диаметра не более 2. В терминах подъема характеров это означает, что каждый p-модулярный неприводимый характер главного блока поднимается до обыкновенного неприводимого характера, однако такое поднятие не обязательно единственно.

Обозначим через $\mathcal{X}_p$ класс групп с нетривиальной циклической силовской p-подгруппой, для которых дерево Брауэра главного p-блока является звездой. Известным фактом является то, что каждая p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой лежит в $\mathcal{X}_p$. Однако класс $\mathcal{X}_p$ не ограничивается только p-разрешимыми группами. Например, легко проверить, что $A_5 \in \mathcal{X}_3$.

Проблема описания класса $\mathcal{X}_p$ тесно связана с проблемой классификации конечных групп, групповые кольца которых являются полуцепными. А именно, если групповое кольцо FG, где F — поле характеристики p, является полуцепным, то $G \in \mathcal{X}_p$.

Среди классических конечных групп наиболее хорошо изучены деревья Брауэра линейных групп. В частности, известно, что деревья брауэра p-блоков полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(q)$ с циклической дефектной группой являются открытым полигоном [2]. В работе [3] построены деревья Брауэра для групп $\mathrm{PSL}_2(q)$. Также для линейных групп $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$ и $\mathrm{PSL}_n(q)$ с циклической силовской p-подгруппой известно, в каких случаях дерево Браура главного p-блока является звездой [4]. В настоящей работе этот вопрос изучается для унитарных и симплектических групп.

Поскольку для групп $\mathrm{Sp}_2(q) \cong \mathrm{SU}_2(q^2) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ и $\mathrm{PSp}_2(q) \cong \mathrm{PSU}_2(q^2) \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ ответ уже известен (см. по ссылкам выше), то эти группы исключим из дальнейшего рассмотрения. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G – одна из групп $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ или $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где $n \geq 2$, и пусть p — простое число, делящее порядок группы G. Тогда $G \notin \mathfrak{X}_p$.*

Теорема 2. *Пусть G – одна из групп $\mathrm{PSU}_n(q^2)$ или $\mathrm{SU}_n(q^2)$, где $n \geq 3$, и p — простое число, делящее порядок группы G. Тогда $G \in \mathfrak{X}_p$, если и только если $n = 3$, $p > 2$ и p делит $q - 1$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blau H.I. On Brauer stars // J. Algebra. 1984. Vol. 90. P. 169-188.
2. Fong P., Srinivasan B. Brauer trees in classical groups // J. Algebra. 1990. Vol. 131. P. 179-225.
3. Burkhardt R. Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $\mathrm{PSL}(2, p^f)$ // J. Algebra. 1976. Vol. 40. P. 75-96.
4. Кухарев А. В. Конечные линейные группы, деревья Брауэра которых имеют форму звезды // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем : тезисы международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова (Нальчик, 29 июня - 3 июля 2019 года.) — Нальчик, 2019. С. 71.

УДК 512.542

О Бэра-σ-локальных формациях конечных групп с заданной структурой подформаций[1]

И. П. Лось (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: LosIP@bsu.by
В. Г. Сафонов (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: vgsafonov@bsu.by

On Baer-σ-local formations of finite groups with a given structure of subformations

I. P. Los (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: LosIP@bsu.by
V. G. Safonov (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: vgsafonov@bsu.by

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Мы используем терминологию и обозначения, принятые в работах [1]–[5].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Активное развитие в последние годы предложенного А.Н.Скибой [1, 2] метода изучения групп в зависимости от разбиения σ, обусловило необходимость разработки новых обобщенно локальных методов в теории классов групп. Начало теории обобщенно Бэра-локальных формаций положено в работах [3, 4], где введено в рассмотрение понятие Бэра-σ-локальной или, иначе, σ-композиционной формации и получен ряд основополагающих результатов.

Напомним некоторые понятия теории σ-свойств группы [1, 2] и теории Бэра-σ-локальных формаций [3, 4].

Пусть G — группа. Тогда символом $\sigma(G)$ обозначают множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$. Группу G называют: σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого $i = i(G)$; σ-разрешимой, если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор G является σ-примарным. Символом $R_\sigma(G)$ обозначают произведение всех нормальных σ-разрешимых подгрупп группы G. Главный фактор H/K группы G называют: σ-центральным (в G), если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; σ_i-фактором, если H/K является σ_i-группой. Говорят, что группа G является: σ-нильпотентной, если каждый главный фактор из G является σ-центральным; $\{\sigma_i\}$-нильпотентной, если каждый главный фактор H/K из G с $\sigma(H/K) \cap \sigma_i \neq \emptyset$ является σ-центральным; обобщенно $\{\sigma_i\}$-нильпотентной, если каждый главный σ_i-фактор из G является σ-центральным. Символом $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ обозначают произведение всех нормальных обобщенно $\{\sigma_i\}$-нильпотентных подгрупп группы G.

Всякую функцию f [3, 4] вида $f : \sigma \cup \{\emptyset\} \to \{\text{формации групп}\}$, где $f(\emptyset) \neq \emptyset$, называют обобщенной формационной σ-функцией и полагают,

$$BLF_\sigma(f) = (G \mid G/R_\sigma(G) \in f(\emptyset) \text{ и } G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma^+(G)),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ грант Ф20Р-291

где $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G$ имеет главный фактор H/K такой, что $\sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$.

Если для некоторой формации $\mathfrak{F}$ и обобщенной формационной σ-функции f выполняется равенство $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является Бэра-σ-локальной (σ-композиционной), а f — обобщенное σ-локальное (σ-композиционное) определение формации $\mathfrak{F}$. Совокупность всех Бэра-σ-локальных формаций будем обозначать через c_σ. Формации из c_σ будем называть c_σ-формациями.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, Бэра-$\sigma$-локальные формации в точности совпадают с Бэра-локальными (композиционными) формациями. Множество всех композиционных формаций будем обозначать через $\mathcal{C}$.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{M}$ через $c_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{M})$ будем обозначать Бэра-σ-локальную (или, иначе, σ-композиционную) формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{M}$, т.е. пересечение всех c_σ-формаций, содержащих $\mathfrak{M}$. В случае, когда $\mathfrak{M} = \{G\}$ формацию $c_\sigma\mathrm{form}(\{G\})$ будем называть однопорожденной Бэра-σ-локальной (σ-композиционной) формацией и обозначать через $c_\sigma\mathrm{form}(G)$. Для любых Бэра-σ-локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ положим $\mathfrak{M} \vee_{c_\sigma} \mathfrak{H} = c_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый класс групп. Следуя [5, 6] Бэра-σ-локальную формацию $\mathfrak{F}$ будем называть *минимальной Бэра-σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}_{c_\sigma}$-критической формацией*, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные Бэра-σ-локальные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

В случае, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\sigma$ — формация всех σ-разрешимых групп, то минимальную Бэра-σ-локальную не $\mathfrak{H}$-формацию будем называть *минимальной Бэра-σ-локальной не $\mathfrak{S}_\sigma$-формацией* (*минимальной Бэра-σ-локальной не σ-разрешимой формацией* или, иначе, *$(\mathfrak{S}_\sigma)_{c_\sigma}$-критической формацией*).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Бэра-σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной Бэра-σ-локальной не $\mathfrak{S}_\sigma$-формацией, когда $\mathfrak{F} = c_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что P — не σ-примарная группа и группа G/P — σ-разрешима.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1$ из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной композиционной неразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathcal{C}\mathrm{form}(G)$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{S}}$, что P — неабелева группа и группа G/P — разрешима.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Бэра-σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_\sigma$. Тогда в $\mathfrak{F}$ найдется по меньшей мере одна минимальная Бэра-σ-локальная не σ-разрешимая формация.*

В частности, из теоремы 2 имеем

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ найдется по меньшей мере одна минимальная композиционная неразрешимая формация.*

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ — Бэра-σ-локальные формации, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Следуя [5], через $\mathfrak{F}/_{c_\sigma}\mathfrak{M}$ обозначим решетку Бэра-σ-локальных формаций $\mathfrak{X}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Длину решетки $\mathfrak{F}/_{c_\sigma}\mathfrak{M}$ будем обозначать через $|\mathfrak{F} : \mathfrak{M}|_{c_\sigma}$. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — произвольные c_σ-формации. Тогда если решетка $\mathfrak{F}/_{c_\sigma}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ имеет конечную длину k, то мы говорим, что *$\mathfrak{H}_{c_\sigma}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ конечен и равен k*. Если же длина $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_{c_\sigma}$ решетки $\mathfrak{F}/_{c_\sigma}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ бесконечна, то будем писать $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_{c_\sigma} = \infty$ и говорить, что *$\mathfrak{H}_{c_\sigma}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ бесконечен.*

В частности, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\sigma$, то $\mathfrak{H}_{c_\sigma}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ будем называть её *$(\mathfrak{S}_\sigma)_{c_\sigma}$-дефектом* или *$\sigma$-разрешимым c_σ-дефектом.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Бэра-σ-локальная формация. Тогда в том и только в том случае σ-разрешимый c_σ-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{c_\sigma} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — σ-разрешимая Бэра-σ-локальная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная Бэра-σ-локальная не σ-разрешимая формация, при этом: 1) всякая σ-разрешимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_{c_\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S}_\sigma)$; 2) всякая не σ-разрешимая Бэра-σ-локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ формации $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_{c_\sigma} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{S}_\sigma)$.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1$ из теоремы 3 получаем

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Бэра-локальная формация. Тогда в том и только в том случае разрешимый $\mathcal{C}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\mathcal{C}} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — разрешимая Бэра-локальная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная Бэра-локальная неразрешимая формация, при этом: 1) всякая разрешимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_{\mathcal{C}} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S})$; 2) всякая неразрешимая Бэра-локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ формации $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_{\mathcal{C}} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{S})$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skiba A. N. On σ-properties of finite groups I // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 4(21). С. 89–96.

2. Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16.

3. Сафонов В. Г., Сафонова И. Н., Скиба А. Н. Об одном обобщении σ-локальных и Бэра-локальных формаций // Проблемы физики, математики и техники. 2019. № 4(41). С. 65–69.

4. Safonov V. G., Safonova I. N., Skiba A. N. On Baer-σ-local formations of finite groups // Communications in Algebra. 2020. Vol. 48, № 9. P. 4002–4012.

5. Скиба А. Н. Алгебра формаций. — Минск: Беларусская навука, 1997. 240 с.

6. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский мат. журнал. 2000. Том 6, № 52. С. 783–797.

УДК 511.32

Группы с z-достижимыми подгруппами[1]

В. С. Монахов (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com
И. Л. Сохор (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований (грант Ф20Р-291)

Groups with z-reachable subgroups

V. S. Monakhov (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: victor.monakhov@gmail.com
I. L. Sokhor (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1].

Примарной называется группа, порядок которой есть степень простого числа. Если A и B — подгруппы группы G и $G = AB$, то подгруппа B называется добавлением к подгруппе A в группе G. Группа, в которой каждая силовская подгруппа циклическая, называется z-*группой*. Согласно теореме Цассенхауза [1, IV.2.11] коммутант z-группы является циклической холловой подгруппой и фактор-группа по коммутанту тоже циклическая.

Согласно теореме Хупперта [1, VI.9.5] группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс. Поэтому в сверхразрешимой группе каждая максимальная подгруппа имеет примарное циклическое добавление. Заметим, что в симметрической группе S_4 степени 4 каждая максимальная подгруппа обладает примарным циклическим добавлением, но S_4 не сверхразрешима.

Бейдлеман и Робинсон [2] исследовали группу G, в которой для каждой собственной подгруппы H существует элемент $g \in G \setminus H$ такой, что $H\langle g\rangle = \langle g\rangle H$. Согласно [2, Theorem A] такая группа G разрешима, ее главные факторы имеют простые порядки или 4 и G индуцирует полную группу автоморфизмов на главных факторах порядка 4. Баллестер-Болинше и Эстебан-Ромеро [3] показали, что обращение этой теоремы неверно.

Баллестер-Болинше, Косси и Цяо [4, Theorem 4] детально описали группы, в которых каждая максимальная подгруппа обладает циклическим добавлением.

Введем следующие понятия.

Подгруппа H группы G называется c-*добавляемой* (z-*добавляемой*) в G, если существует подгруппа K такая, что $G = HK$ и K является циклической подгруппой (z-подгруппой соответственно). Ясно, что каждая c-добавляемая подгруппа является z-добавляемой.

Подгруппа H в группе G называется c-*достижимой* (z-*достижимой*) в G, если существует цепочка подгрупп

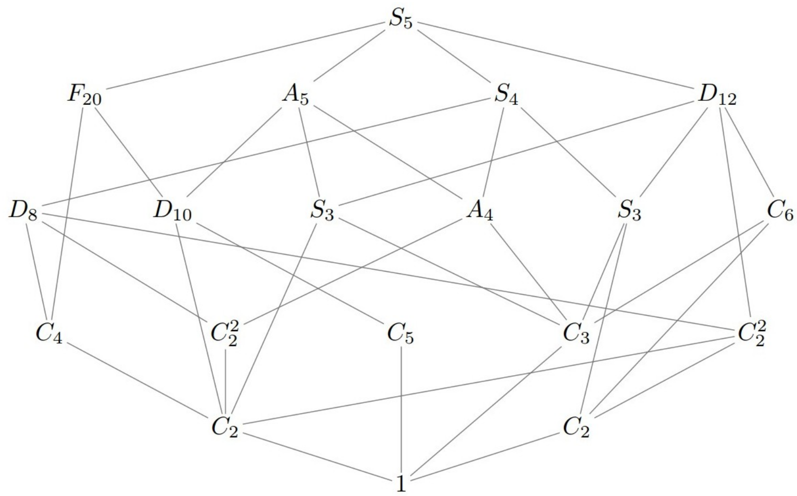
$$H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_i \leqslant H_{i+1} \ldots \leqslant H_{n-1} \leqslant H_n = G \qquad (1)$$

такая, что H_i c-добавляема (z-добавляема соответственно) в H_{i+1} для каждого i.

В сверхразрешимых группах, в симметрической группе S_4 и в группах, изученных Бейдлеманом и Робинсоном [2], каждая подгруппа c-достижима. В группах, изученных Баллестер-Болинше, Косси и Цяо [4, Theorem 4], каждая максимальная подгруппа c-достижима.

Пример 1. В симметрической группе S_5 [5, SmallGroup(120,34)] максимальные подгруппы изоморфны группам F_{20}, A_5, S_4 и D_{12}. Здесь $F_{20} = C_5 \rtimes C_4$ — группа Фробениуса порядка 20, A_5 — знакопеременная группа степени 5, D_{12} — диэдральная группа порядка 12, C_m — циклическая группа порядка m. Запись $F_{20} = C_5 \rtimes C_4$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой C_5.

На рисунке изображен граф, вершинами которого являются представители классов сопряженных подгрупп группы S_5, причем две вершины X и Y соединены ребром тогда и только тогда, когда Y — максимальная подгруппа в X.



Так как

$$S_5 = F_{20}\langle(1\,2)(3\,4\,5)\rangle = A_5\langle(1\,2)\rangle = S_4\langle(1\,2\,3\,4\,5)\rangle = D_{12}F_{20},$$

то в S_5 максимальные подгруппы F_{20}, A_5 и S_4 c-достижимы, а максимальная подгруппа D_{12} z-достижима, но не c-достижима. Все подгруппы из F_{20} и S_4 будут c-достижимыми в S_5, а все подгруппы из D_{12} z-достижимы в S_5. Поскольку каждая 2-максимальная подгруппа в S_5 сопряжена с подгруппой из F_{20}, S_4 или D_{12}, то в S_5 все подгруппы z-достижимы.

Ясно, что каждая c-достижимая подгруппа является z-достижимой. Для разрешимых групп верно и обратное утверждение.

Теорема 1. *Пусть H — подгруппа разрешимой группы G. Подгруппа H z-достижима тогда и только тогда, когда существует цепочка подгрупп*

$$H = M_0 \leqslant M_1 \leqslant \ldots \leqslant M_i \leqslant M_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant M_{n-1} \leqslant M_n = G \qquad (2)$$

такая, что либо $|M_{i+1} : M_i| = 4$ и $M_{i+1}/(M_i)_{M_{i+1}} \cong S_4$, либо $|M_{i+1} : M_i| \in \mathbb{P}$ для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Здесь $M_{i+1}/(M_i)_{M_{i+1}}$ — ядро подгруппы $(M_i)_{M_{i+1}}$ в группе M_{i+1}, т. е. наибольшая нормальная в M_{i+1} подгруппа, содержащая в M_i.

Следствие 1. *В разрешимой группе подгруппа z-достижима тогда и только тогда, когда она c-достижима.*

Мы предлагаем следующие две задачи.

Задача 2. *Перечислить композиционные факторы неразрешимой группы, у которой все (максимальные) подгруппы z-достижимы.*

Задача 3. *Перечислить композиционные факторы неразрешимой группы, у которой каждая z-достижимая подгруппа c-достижима.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. 793 p.

2. Beidleman J. C., Robinson D. J. S. On finite groups satisfying the permutizer condition // J. Algebra. 1997. Vol. 191. P. 686–703.

3. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R. On a question of Beidleman and Robinson // Commun. Algebra 2002. Vol. 30 (12). P. 5757-5770.

4. Ballester-Bolinches A., Cossey J., Qiao S. A note on finite groups with the maximal permutiser condition // RACSAM. 2016. Vol. 110. P. 247–250.

5. The GAP Group: GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.11.1 released on 02-03-2021 [Электронный ресурс], Режим доступа: http://www.gap-system.org.

УДК 512.542

Некоторые примеры использования системы компьютерной алгебры GAP при решении открытых вопросов теории групп

В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: mvimath@yandex.by

Some examples of using the computer algebra system GAP in solving open questions of the group theory

V. I. Murashka (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: mvimath@yandex.by

В докладе будет обсуждаться использование системы компьютерной алгебры GAP при решении открытых вопросов теории групп. Ниже приведем ряд таких вопросов.

Напомним [1], что подгруппа H группы G называется сопряженно-перестановочной, если $HH^x = H^xH$ для каждого $x \in G$. Группа называется ECP-группой [2] (соответственно CCP-группой [3]), если каждая ее (соответственно циклическая) подгруппа сопряженно-перестановочна. Довольно интересен класс всех ECP-групп. Он включает классы групп, все подгруппы которых 2-субнормальны и все подгруппы которых перестановочны. В [2] было доказано, что конечная группа G является ECP-группой тогда и только тогда, когда G нильпотентна и каждая силовская p-подгруппа в G является ECP-группой. Этот результат сводит изучение ECP-групп к изучению ECP-p-групп. В таком случае Минъяо Сюй и Циньхай Чжан задали следующие вопросы:

Задача 4 ([2, Вопрос 3.9]). *Всякая ли конечная группа экспоненты 3 является ECP-группой?*

Задача 5 ([2, Вопрос 3.13]). *Образует ли класс всех конечных ECP-групп многообразие или формацию?*

Задача 6 ([2, Вопрос 3.12]). *При $p = 3$ всякая ли конечная ECP-p-группа регулярна?*

Прямой проверкой можно убедиться, что ответ на задачу 4 положительный.

Теорема 1 ([4]). *Всякая группы экспоненты 3 является ECP-группой.*

С помощью пакета компьютерной алгебры GAP был построен пример, дающий отрицательный ответ на вопрос задачи 5. Пусть

$$G = \langle a, b, c, d \mid a^{27} = c^{27} = b^9 = d^9 = [a, c] = [a, d] = [b, c] = [b, d] = a^b a^{-4} = c^d c^{-4} = 1 \rangle.$$

Здесь группа G является прямым произведением ECP-подгрупп $H_1 = \langle a, b\rangle$ и $H_2 = \langle c, d\rangle$. Пусть $K = \langle a^3 b^2 c^3 d\rangle$ и $x = abcd$. Тогда $KK^x \neq K^x K$. Т.е. G не является ни ECP-группой, ни CCP-группой.

Теорема 2 ([4]). *Классы всех конечных CCP-групп и ECP-групп не замкнуты относительно взятия прямых произведений. Следовательно, они не являются ни формациями, ни многобразиями.*

Напомним, что конечная p-группа G называется регулярной, если для любых $x, y \in G$ выполняется $(xy)^p = x^p y^p \prod_i d_i^p$, где все d_i принадлежат коммутанту группы, порожденной x и y. Аналогичным образом, с помощью пакета компьютерной алгебры GAP был построен пример, дающий отрицательный ответ на вопрос задачи 6.

Пуст $G = \langle a, b\rangle$, где

$$\begin{aligned} a =&(1, 2, 6, 5, 9, 18, 15, 24, 37)(3, 20, 70, 12, 41, 79, 29, 62, 53)\\ &(4, 23, 57, 14, 44, 17, 31, 8, 36)(7, 33, 66, 21, 54, 27, 42, 71, 48)\\ &(10, 58, 78, 26, 73, 51, 47, 80, 68)(11, 61, 16, 28, 75, 34, 49, 40, 55)\\ &(13, 63, 56, 30, 22, 72, 50, 43, 35)(19, 67, 25, 39, 77, 46, 60, 81, 65)\\ &(32, 64, 38, 52, 76, 59, 69, 45, 74),\\ b =&(1, 3, 10, 15, 29, 47, 5, 12, 26)(2, 7, 19, 24, 42, 60, 9, 21, 39)\\ &(4, 11, 25, 31, 49, 65, 14, 28, 46)(6, 16, 32, 37, 55, 69, 18, 34, 52)\\ &(8, 20, 38, 44, 62, 74, 23, 41, 59)(13, 27, 45, 50, 66, 76, 30, 48, 64)\\ &(17, 33, 51, 57, 71, 78, 36, 54, 68)(22, 40, 58, 63, 75, 80, 43, 61, 73)\\ &(35, 53, 67, 72, 79, 81, 56, 70, 77). \end{aligned}$$

Тогда G является ECP-группой. Заметим, что экспонента G' равна 3. Следовательно, если G 3-регулярна, то $(ab)^3 a^{-3} b^{-3} = ()$. Но

$$\begin{aligned} (ab)^3 a^{-3} b^{-3} =&(1, 5, 15)(2, 9, 24)(3, 12, 29)(4, 14, 31)(6, 18, 37)(7, 21, 42)(8, 23, 44)(10, 26, 47)\\ &(11, 28, 49)(13, 30, 50)(16, 34, 55)(17, 36, 57)(19, 39, 60)(20, 41, 62)(22, 43, 63)\\ &(25, 46, 65)(27, 48, 66)(32, 52, 69)(33, 54, 71)(35, 56, 72)(38, 59, 74)(40, 61, 75)\\ &(45, 64, 76)(51, 68, 78)(53, 70, 79)(58, 73, 80)(67, 77, 81) \end{aligned}$$

Теорема 3 ([4]). *Существуют конечные нерегулярные ECP-3-группы.*

В ходе поиска примеров и контрпримеров использовались следующие алгоритмы:

```
IsECPGroup:=function(G)
local S,b,a;
  S:=ConjugacyClassesSubgroups(G);
  for a in S do
    for b in ConjugateSubgroups(G,a[1]) do
      if (not ArePermutableSubgroups(b,a[1])) then
        return false;
      fi;
```

```
    od;
  od;
  return true;
end;;
```

Приведенный алгоритм проверяет, является ли группа ECP-группой. Если в нем заменить строку

“`S:=ConjugacyClassesSubgroups(G);`”

на строку

“`S:=Filtered(ConjugacyClassesSubgroups(G),x->IsCyclic(x[1]));`”,

то мы получим алгоритм, проверяющий, является ли группа CCP-группой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Foguel T. Conjugate-permutable subgroups // J. Algebra. 1997. № 191. P. 235–239.

2. Xu M., Zhang Q. On conjugate-permutable subgroups of a finite group // Algebra Colloquium. 2005. Vol. 12. P. 669–676.

3. Foguel T. Groups with all cyclic subgroups conjugate-permutable groups // J. Group Theory. 1999. Vol. 2. P. 47–51.

4. Murashka V.I. On groups with conjugate-permutable subgroups // Asian-European J. Math. (online ready). https://doi.org/10.1142/S179355712250108X.

УДК 512.542

О некоторых свойствах решетки Бэра-σ-локальных формаций конечных групп[1]

В. Г. Сафонов (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: vgsafonov@bsu.by

On some properties of the lattice of Baer-σ-local formations of finite groups

V. G. Safonov (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: vgsafonov@bsu.by

Все рассматриваемые в данном сообщении группы конечны.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. В последние годы усилиями многочисленных исследователей интенсивно развивается предложенный А.Н.Скибой [1] метод изучения групп

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ грант Ф20Р-291

в зависимости от разбиения σ. Основной целью данного подхода является изучение σ-свойств группы, т.е. таких свойств группы, которые не зависят от выборы разбиения σ.

Как известно формационные методы играют важную роль в современных исследованиях по теории групп и их классов. Наиболее востребованными в таких исследованиях являются локальные, а также композиционные или Бэра-локальные формации. Развитие теории σ-свойств группы вызвало необходимость разработки обобщенно локальных методов в теории классов групп. В работах [2, 3] введено в рассмотрение понятие Бэра-σ-локальной или, иначе, σ-композиционной формации.

Напомним некоторые понятия теории σ-свойств группы [1] и теории Бэра-σ-локальных формаций [2, 3].

Если G — группа, то $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$. Группу G называют: σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого $i = i(G)$; σ-разрешимой, если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор G является σ-примарным. Символом $R_\sigma(G)$ обозначают произведение всех нормальных σ-разрешимых подгрупп группы G.

Главный фактор H/K группы G называют: σ-центральным (в G), если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; σ_i-фактором, если H/K является σ_i-группой. Говорят, что группа G является: σ-нильпотентной, если каждый главный фактор из G является σ-центральным; $\{\sigma_i\}$-нильпотентной, если каждый главный фактор H/K из G с $\sigma(H/K) \cap \sigma_i \neq \emptyset$ является σ-центральным; обобщенно $\{\sigma_i\}$-нильпотентной, если каждый главный σ_i-фактор из G является σ-центральным. Символом $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ обозначают произведение всех нормальных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных подгрупп группы G.

Всякую функцию f [2, 3] вида $f : \sigma \cup \{\emptyset\} \to \{\text{формации групп}\}$, где $f(\emptyset) \neq \emptyset$, называют обобщенной формационной σ-функцией и полагают,

$$BLF_\sigma(f) = (G \mid G/R_\sigma(G) \in f(\emptyset) \ \text{ и } \ G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \ \sigma_i \in \sigma^+(G)),$$

где $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G \text{ имеет главный фактор } H/K \text{ такой, что } \sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$.

Если для некоторой обобщенной формационной σ-функции f и класса групп $\mathfrak{F}$ имеет место равенство $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, то говорят, что класс $\mathfrak{F}$ является Бэра-σ-локальным (σ-композиционным), а f — обобщенное σ-локальное (σ-композиционное) определение $\mathfrak{F}$.

Совокупность всех Бэра-σ-локальных формаций будем обозначать через c_σ. Формации из c_σ будем называть c_σ-формациями.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, Бэра-$\sigma$-локальные формации в точности совпадают с Бэра-локальными (композиционными) формациями. Множество всех композиционных формаций будем обозначать через $\mathcal{C}$.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{M}$ через $c_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{M})$ будем обозначать Бэра-σ-локальную (или, иначе, σ-композиционную) формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{M}$, т.е. пересечение всех c_σ-формаций, содержащих $\mathfrak{M}$. В случае, когда $\mathfrak{M} = \{G\}$ формацию $c_\sigma\mathrm{form}(\{G\})$ будем называть однопорожденной Бэра-σ-локальной (σ-композиционной) формацией и обозначать через $c_\sigma\mathrm{form}(G)$.

Для любой совокупности $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ формаций из c_σ положим $\vee_{c_\sigma}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$. В частности, для любых Бэра-σ-локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ положим $\mathfrak{M} \vee_{c_\sigma} \mathfrak{H} = c_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Напомним, что непустая система формаций θ называется полной решеткой формаций [4], если пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ и во множестве θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \theta$.

Теорема 1. *Совокупность c_σ всех Бэра-σ-локальных формаций частично упорядочена относительно включения и образует полную алгебраическую модулярную решетку формаций. При этом, если $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq c_\sigma$, то $\cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ является точной нижней гранью и*

$c_\sigma\mathrm{form}(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$ *— точной верхней гранью* $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ *в* c_σ*, а всякая однопорожденная Бэра-*σ*-локальная формация является компактным элементом решетки* c_σ*.*

Как известно, совокупность $\mathcal{C}$ всех композиционных формаций частично упорядочена относительно включения и образует полную решетку формаций.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\dots\}$ из теоремы 1 получаем следующий известный результат.

Следствие 1. (Скиба, Шеметков [5]). *Решетка* $\mathcal{C}$ *всех композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

Пусть θ — полная решетка формаций. Тогда через θ^{c_σ} обозначим совокупность всех Бэра-σ-локальных формаций, у которых имеется такое обобщенное σ-локальное определение, все непустые значения которого принадлежат θ (обобщенное θ-значное σ-локальное определение). Будем считать, что по определению класс всех единичных групп (1) принадлежит θ^{c_σ}.

Утверждение 1. *Частично упорядоченное по включению множество* θ^{c_σ} *образует полную решетку формаций.*

Если m и h являются обобщенными θ-значными формационными σ-функциями, то через $m \vee_\theta h$ будем обозначать обобщенную θ-значную формационную σ-функцию такую, что

$$(m \vee_\theta h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \vee_\theta h(\sigma_i) = \theta\mathrm{form}(m(\sigma_i) \cup h(\sigma_i))$$

для всех i; мы также используем $m \cap h$ для обозначения обобщенной θ-значной формационной σ-функции, такой что

$$(m \cap h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \cap h(\sigma_i)$$

для всех i.

Следуя А.Н.Скибе [4] решетку θ^{c_σ} будем называть *σ-индуктивной*, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ формаций из θ^{c_σ} и для всякого набора $\{f_j \mid j \in J\}$, где f_j — внутреннее обобщенное θ-значное σ-локальное определение $\mathfrak{F}_j$, имеет место

$$\theta^{c_\sigma}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_j \mid j \in j) = \vee_{\theta^{c_\sigma}}(\mathfrak{F}_j \mid j \in j) = BLF_\sigma(\vee_\theta(f_j \mid j \in J)).$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Решетка* c_σ *является* σ*-индуктивной.*

В частности, в случае когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\dots\}$ из теоремы 2 получаем следующий результат.

Следствие 2. (Воробъев, Царев [6]). *Решетка* $\mathcal{C}$ *является индуктивной.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полную решетку формаций θ называют $\mathfrak{X}$-отделимой [4], если для любого терма $\omega(x_1,\dots,x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\theta\}$, любых θ-формаций $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \omega(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1,\dots,A_m$, что $A \in \omega(\theta\mathrm{form}A_1,\dots,\theta\mathrm{form}A_m)$.

Теорема 3. *Решетка* c_σ *является* $\mathfrak{G}$*-отделимой.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1$, из теоремы 3 в качестве следствия получаем следующий известный результат.

Следствие 3. (Воробъев, Скиба, Царев [7]). *Решетка* $\mathcal{C}$ *является* $\mathfrak{G}$*-отделимой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16.

2. Сафонов В. Г., Сафонова И. Н., Скиба А. Н. Об одном обобщении σ-локальных и Бэра-локальных формаций // Проблемы физики, математики и техники. 2019. № 4(41). С. 65–69.

3. Safonov V. G., Safonova I. N., Skiba A. N. On Baer-σ-local formations of finite groups // Communications in Algebra. 2020. Vol. 48, № 9. P. 4002–4012.

4. Скиба А. Н. Алгебра формаций. — Минск: Беларусская навука, 1997. 240 с.

5. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский мат. журнал. 2000. Том 6, № 52. С. 783–797.

6. Воробьев Н. Н., Царев А. А. О модулярности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций // Украинский математический журнал. 2010. Том 62, № 4. С. 453–463.

7. Воробьев Н. Н., Скиба А. Н., Царев А. А. Тождества решеток частично композиционных формаций // Сибирский математический журнал. 2011. Том 22, № 5. С. 1011–1024.

УДК 512.542

О кратной σ-локальности τ-замкнутых формаций конечных групп[1]

И. Н. Сафонова (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: safonova@bsu.by

On multiple σ-locality of τ-closed formations of finite groups

I. N. Safonova (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: safonova@bsu.by

Рассматриваются только конечные группы. Мы используем терминологию и обозначения, принятые в работах [1]–[4].

Пусть σ — некоторое разбиение множества простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Если n целое число, то символ $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \bigcap \pi(n) \neq \emptyset\}$; если G — группа и $\mathfrak{F}$ — класс групп, то $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если: 1) $G/N \in \mathfrak{F}$ когда $G \in \mathfrak{F}$, и 2) $G/N \bigcap R \in \mathfrak{F}$ когда $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/R \in \mathfrak{F}$.

---

[1]Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований “Конвергенция- 2025” при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328).

Символом $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ обозначают формацию всех σ_i-групп.

Всякая функция f вида $f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}$ называется формационной σ-функцией [2]. Для формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ либо } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место равенство $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то класс $\mathfrak{F}$ называют σ-локальным, а f называют σ-локальным определением $\mathfrak{F}$. Каждая формация называется 0-кратно σ-локальной [3]. При $n > 0$, формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно σ-локальной, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ — класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ является $(n-1)$-кратно σ-локальной формацией для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Если f является формационной σ-функцией, то символ $\mathrm{Supp}(f)$ обозначает носитель f, то есть, множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Формационную σ-функцию f называют: внутренней, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i; полной, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i.

Напомним введенное А.Н. Скибой [5, с. 16] понятие подгруппового функтора. Пусть G — группа, $\tau(G)$ — некоторая система ее подгрупп. Говорят, что τ — подгрупповой функтор, если для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ групп A и B выполнены включения

$$(\tau(A))^\varphi \subseteq \tau(B), \qquad (\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A),$$

и, кроме того, для любой группы G имеет место $G \in \tau(G)$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$. Совокупность всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций будем обозначать через $l^\tau_{\sigma_n}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая совокупность групп. Через $l^\tau_{\sigma_n}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначим пересечение всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций содержащих $\mathfrak{X}$ и назовем τ-замкнутой n-кратно σ-локальной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F} = l^\tau_{\sigma_n}\mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G, то $\mathfrak{F}$ будем называть однопорожденной τ-замкнутой n-кратно σ-локальной формацией.

Следуя [5, с. 31] для любого целого неотрицательного n определим класс групп

$$\mathfrak{X}^\tau_{\sigma_n}(\sigma_i) = \begin{cases} l^\tau_{\sigma_n}\mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}); \\ \emptyset, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

В частности, если $n = 0$, то

$$\mathfrak{X}^\tau_{\sigma_0}(\sigma_i) = \mathfrak{X}^\tau(\sigma_i) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}); \\ \emptyset, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Наконец, через $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^\tau_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i)$ мы обозначаем класс всех групп, являющихся расширением некоторой σ_i-группы с помощью группы из $\mathfrak{F}^\tau_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i)$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация, $n \geqslant 1$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно σ-локальна, когда для любого $\sigma_i \in \sigma$ имеет место включение*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^\tau_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Пусть $n = 1$. Тогда из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ σ-локальна, когда для любого $\sigma_i \in \sigma$ имеет место включение*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^\tau(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной (нормально наследственной), если из того, что $G \in \mathfrak{F}$ и H — подгруппа (соответственно, нормальная подгруппа) группы G, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\tau = \mathrm{S}$ — единичный подгрупповой функтор [5], т. е. $\tau(G) = \mathrm{S}(G)$ — множество всех подгрупп группы G для любой группы G. Тогда из теоремы 1 получаем следующее

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, $n \geqslant 1$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно σ-локальна, когда для любого $\sigma_i \in \sigma$ имеет место включение*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^{\mathrm{S}}_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Пусть теперь $\tau = \mathrm{S}_n$ [5], т. е. $\tau(G) = \mathrm{S}_n(G)$ — множество всех нормальных подгрупп группы G для любой группы G. Тогда из теоремы 1 получаем следующее

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая нормально наследственная формация, $m \geqslant 1$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ m-кратно σ-локальна, когда для любого $\sigma_i \in \sigma$ имеет место включение*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^{\mathrm{S}_n}_{\sigma_{m-1}}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Пусть τ — тривиальный подгрупповой функтор, т.е. $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G. Теперь в качестве следствия теоремы 1 получаем следующий результат

Следствие 4. [7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $n \geqslant 1$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно σ-локальна, когда для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ имеет место включение*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^{\sigma}_{n-1}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Установленные в теореме 1 необходимые и достаточные условия n-кратной σ-локальности непустой τ-замкнутой формации, с учетом теоремы 1.1 работы [6], позволяют получить следующее описание $l^{\tau}_{\sigma_n}$-формации, порожденной некоторой заданной совокупностью групп.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая непустая совокупность групп, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$l^{\tau}_{\sigma_n}\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = \mathrm{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{X}^{\tau}_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i)).$$

В частности, для всякой τ-замкнутой σ-локальной формации имеет место

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая τ-замкнутая σ-локальная формация. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^{\tau}(\sigma_i)).$$

Если $\tau = \mathrm{S}$ — единичный подгрупповой функтор, то из теоремы 2 получаем

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая непустая совокупность групп, $n \geqslant 1$. Тогда для наследственной n-кратно σ-локальной формации $\mathfrak{F}$, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$, имеем*

$$\mathfrak{F} = l^{\mathrm{S}}_{\sigma_n}\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = \mathrm{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{X}^{\mathrm{S}}_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i)).$$

В случае, когда τ — тривиальный подгрупповой функтор в качестве следствия теоремы 2 получаем следующий результат

Следствие 7. [7]. *Для любой непустой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и всякого натурального n справедливо равенство*

$$l^{\sigma}_{n}\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = \mathrm{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{X}^{\sigma}_{n-1}(\sigma_i)).$$

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, в качестве следствия теоремы 2 получаем следующий известный результат

Следствие 8. [5, с. 33]. *Для любой непустой совокупности групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство*

$$l_n^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{X}) = \mathrm{form}(\bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathfrak{N}_p \mathfrak{X}_{n-1}^\tau(p)).$$

Как известно (см., например, [8, Раздел 2]), всякая n-кратно σ-локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственное полное внутреннее σ-локальное определение F, которое называют каноническим σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$. С учетом теоремы 1.1 работы [6] имеет место равенство $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^\tau_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Ввиду данного обстоятельства и теоремы 2 всякая τ-замкнутая n-кратно σ-локальная формация порождается совокупностью непустых значений ее канонического σ-локального определения, т.е. имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно σ-локальная формация, $n \geqslant 1$, F — каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} F(\sigma_i)).$$

В частности, если $\tau = \mathrm{S}$ — единичный подгрупповой функтор, то из теоремы 3 получаем

Следствие 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная n-кратно σ-локальная формация, $n \geqslant 1$, F — каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} F(\sigma_i)).$$

В случае, когда τ — тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 3 получаем

Следствие 10. [7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно σ-локальная формация, $n \geqslant 1$, F — каноническое σ-локальное определение $\mathfrak{F}$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} F(\sigma_i)).$$

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1$ из теоремы 3 получаем

Следствие 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно локальная формация, $n \geqslant 1$, F — канонический экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\bigcup_{p \in \pi(\mathfrak{F})} F(p)).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16.

2. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 1(34). C. 79–82.

3. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2(34). С. 85–88.

4. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On n-multiply σ-local formations of finite groups // Comm. Algebra. 2019. Vol. 47, № 3. P. 957–968.

5. Skiba A. N. Алгебра формаций. — Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.

6. Safonova I. N. Some properties of n-multiply σ-local formations of finite groups // Asian-European Journal of Mathematics, 2250138, https://doi.org/10.1142/S1793557122501388.

7. Safonova I. N. A criterion for σ-locality of a non-empty formation // Comm. Algebra. 2021. https://doi.org/10.1080/00927872.2021.2006210.

8. Chi Z., Skiba A. N. On Σ_t^σ-closed classes of finite groups // Ukranian Math. J. 2019. Vol. 70, № 2. P. 1707–1716.

———————————————————————————

УДК 511.32

Нормальные подгруппы итерированного сплетения симметрических групп подстановок

Р. В. Скуратовский (Украина, г. Киев)
Киевский политехнический университет имени Игоря Сикорского
e-mail: ruslan@imath.kiev.ua, ruslcomp@gmail.com

Normal subgroups of a iterated wreath product of symmetric groups

R. V. Skuratovskii (Ukraine, Kiev)
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
e-mail: ruslan@imath.kiev.ua, ruslcomp@gmail.com

The investigation of invariant subgroups of wreath product have many relations in particular with dynamic systems [1]. Normal subgroups [2, 3] and their properties for finite iterated wreath products $S_{n_1} \wr \ldots \wr S_{n_m}$, where $n, m \in \mathbb{N}$ are founded. All classes of normal subgroups and their orders are investigated by us. Special classes of normal subgroups that have not been researched before [6] are investigated, and their generators [5] are found and presented in the form of Kaloujnine tables.

Theorem 1. *There are exactly 7* normal subgroups, *where 5 are proper normal, in the wreath product $W = A_n \wr S_n$ (active is left) where $n,\ m \geqslant 3, n, m \neq 4$.*

Theorem 2. *There are exactly 10* normal subgroups *in the wreath product $W = S_n \wr S_m$, where $n,\ m \geqslant 3, n, m \neq 4$. All of these groups are splittable groups [2, 4].*

Statement 1. *The full list of normal subgroups of $S_n \wr S_m \wr S_l$, where $n,\ m,\ l \geqslant 3$ and $n, m, l \neq 4$ consists of 50 normal subgroups.*

Also it was established that $A_n \wr A_m \lhd S_n \wr A_m$.

Let $W_k = \underset{i=1}{\overset{k}{\wr}} S_{n_i}$. The projective limit $PW_\infty(X)$ of the inverse system:

$$I = \langle \rho_{n,m},\ W_{k+1} \rangle$$

is found.

Утверждение 1. *An isometry group [2] of Baire space is isomorphic to $PW_\infty(X)$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ryan Gopp.* Normal Subgroups of Wreath Product 3-Groups. The University of Akron, Spring 2017, P. 519.

2. *Suschansky V.I.* Normal structure of the isometry group of the metric space of p-adic integers. // Algebraic structures and their application. Kyiv: KSU, 1988. pp. 113-121.

3. *Skuratovskii R.V.* Normal subgroups of iterated wreath products of symmetric alternating groups // Modern problems in mathematics and its applications. International (53rd National) Youth School-Conference, 2022, Yekaterinburg, 2022 from January 31 to February 4 section Group theory, pp. 1-2. https://sopromat.imm.uran.ru.

4. L. G. Kovas, Wreath decomposition of finite permutation groups. // Bull. Austral. Math. Soc., (1989), 40, pp. 255-279.

5. *Drozd, Y.A., Skuratovskii R.V.,* Generators and relations for wreath products of groups. // *Ukr. Math. J.* (2008), *60*, pp. 1168–1171.

6. *Ruslan V. Skuratovskii.* On commutator subgroups of Sylow 2-subgroups of the alternating group, and the commutator width in wreath products. / Ruslan V. Skuratovskii // European Journal of Mathematics. – 2021. – vol. 7, no. 1. – P. 353-373.

УДК 511.32

Группы с абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальными 3-максимальными подгруппами[1]

И. Л. Сохор (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Groups with absolutely $\mathfrak{F}$-subnormal 3-maximal subgroups

I. L. Sokhor (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1].

Напомним, собственная подгруппа M группы G называется максимальной подгруппой в G ($M \lessdot G$), если из условия $M \le H \le G$ следует, что $M = H$ или $H = G$. Подгруппа M называется n-максимальной подгруппой группы G, если существует цепочка подгрупп

$$M = M_n \lessdot M_{n-1} \lessdot \ldots \lessdot M_1 \lessdot M_0 = G$$

Строение группы во многом определяется способ вложения ее максимальных подгрупп. Хупперт [2] установил сверхразрешимость группы, все 2-максимальные подгруппы которой

[1]Работа поддержана Министерством образования Республики Беларусь (проект 20211467)

нормальны, и разрешимость группы, все 3-максимальные подгруппы которой нормальны. Янко [3] описал группы с нормальными 4-максимальными подгруппами. Манн [4] исследовал группы, в которых все n-максимальные подгруппы субнормальны.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если $G = H$ или существует такая цепочка подгрупп

$$H = H_0 \lessdot\ H_1 \lessdot\ \ldots \lessdot H_n = G,$$

что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i. Следуя [5], подгруппу H группы G будем называть абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если любая содержащая ее подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Для наследственной формации $\mathfrak{F}$ каждая подгруппа группы G, содержащая ее $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, будет абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной. Понятно, что каждая $\mathfrak{F}$-субнормальная максимальная подгруппа абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна.

Группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными n-максимальными подгруппами для различных n при некоторых ограничений для формации $\mathfrak{F}$ исследовались в работах многих авторов [6, 7, 8, 9]. В частности, для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ установлено [10, Lemma 4], что группа, все максимальные подгруппы которой $\mathfrak{F}$-субнормальны, принадлежит $\mathfrak{F}$. В случае, когда каждая 2-максимальная подгруппа абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна, группа также принадлежит $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. В группе $G \notin \mathfrak{F}$ каждая 3-максимальная подгруппа абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна тогда и только тогда, когда G — ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой примарны.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. 793 p.

2. Huppert B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. 1954. Vol. 60. P. 409–434.

3. Janko Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups. Math. Z. 1963. Vol. 82. P. 82–89.

4. Mann A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal. Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132. P. 395–409.

5. Васильев А. Ф., Мельченко А. Г. Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физ., матем. и техн. 2019. № 4 (41). С. 44–50.

6. Ковалева В. А., Скиба А. Н. Конечные разрешимые группы, у которых все n-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны // Сиб. матем. ж. 2013. Т. 54, № 1. Р. 86–97.

7. Kovaleva V. A., Skiba A. N. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups F-subnormal // J. Group Theory. 2014. Vol. 17. P. 273–290.

8. Kovaleva V. A., Yi X. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups $\mathfrak{U}$-subnormal // Acta Math. Hung. 2015. Vol. 146, № 1. P. 47–55.

9. Konovalova M. N., Monakhov V. S., Sokhor I. L. Finite groups with formational subnormal strictly 2-maximal subgroups // Comm. Algebra. 2022. Vol. 50, № 4. P. 1606–1612.

10. Sokhor I. L. Continuation of the theory of $E_{\mathfrak{F}}$-groups // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 268–272.

УДК 512.542

Конечные группы, факторизуемые проперестановочными сверхразрешимыми подгруппами[1]

А. А. Трофимук (Беларусь, г. Брест)
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Finite groups factorized by propermutable supersoluble subgroups

A. A. Trofimuk (Belarus, Brest)
Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1].

Напомним, что подгруппа A называется *полуперестановочной* (semipermutable) [2] в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B.

Группы с полуперестановочными подгруппами исследовались в работах многих авторов, см., например, литературу в [3]. Кроме того в работе [3] исследовалась группа $G = AB$ с полуперестановочными сверхразрешимыми подгруппами A и B. Доказана ее сверхразрешимость при условии, что B нильпотентна, теорема 2.1, и в случае, когда коммутант G' нильпотентен, теорема 2.2. Для таких групп также установлено, что $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$, теорема 2.3. Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ — формации всех сверхразрешимых и нильпотентных групп, а $H^{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{X}$-корадикал группы H.

В работе [4] А.Н. Скиба и И. Сяолян ввели следующее понятие:

подгруппа A называется *проперестановочной* (propermutable) в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B.

Группы с проперестановочными подгруппами исследовались также в работах [5, 6].

Очевидно, что каждая полуперестановочная подгруппа является проперестановочной, однако, обратное не всегда выполняется. Например, в группе $G = Z_3 \times S_3$ подгруппа $A \simeq Z_2$ проперестановочна, поскольку $N_G(A) = Z_6$, но A не является полуперестановочной.

В настоящей работе установлены условия, при которых формация сверхразрешимых групп замкнута относительно произведения проперестановочных подгрупп, а также получено строение сверхразрешимого корадикала группы, факторизуемой проперестановочными сверхразрешимыми подгруппами.

Теорема 1. *Пусть A и B — проперестановочные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если A нильпотентна, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.*

(2) *если A и B сверхразрешимы и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

(3) *если A и B сверхразрешимы, то $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$.*

Согласно [7] подгруппы A и B группы G называются взаимно перестановочными, если $UB = BU$ и $AV = VA$ для всех $U \leqslant A$ и $V \leqslant B$.

Поскольку каждая нормальная подгруппа и каждая максимальная подгруппа простого индекса является полуперестановочной в группе, а произведение двух взаимно перестановочных подгрупп является произведением двух полуперестановочных подгрупп, то справедливо

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция — 2025» (задание 1.1.02 подпрограммы 11.1 «Математические модели и методы») при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Следствие 1. *Пусть A и B — сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$.*

1. *Предположим, что A нильпотентна. Тогда группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1.1) *A и B взаимно перестановочны,* [7, теорема 3.2]*;*

(1.2) *A и B полуперестановочны в G,* [3, теорема 2.1]*;*

(1.3) *индексы подгрупп A и B в группе G — простые числа,* [8, теорема A]*;*

2. *Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(2.1) *A и B нормальны в G,* [9]*;*

(2.2) *A и B взаимно перестановочны,* [7, теорема 3.8]*;*

(2.3) *индексы подгрупп A и B в группе G — простые числа,* [8, следствие 3.6]*;*

(2.4) *A и B полуперестановочны в G,* [3, теорема 2.2].

3. *$G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$ в каждом из следующих случаев:*

(3.1) *A и B взаимно перестановочны,* [10, теорема 2.1]*;*

(3.2) *индексы подгрупп A и B в группе G — простые числа,* [8, теорема C]*;*

(3.3) *A и B полуперестановочны в G, то* [3, теорема 2.3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.
2. Guo W. Structure theory for canonical classes of finite groups. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 2015.
3. Монахов В. С., Трофимук А. А. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сибирский математический журнал. 2020. Том 61, № 1. С. 148-159.
4. Yi X., Skiba A. N. On S-propermutable subgroups of finite groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2). 2015. Vol. 38, № 2. P. 605-616.
5. Yi X., Skiba A. N. Some new characterizations of PST-groups // J. Algebra. 2014. Vol. 399. P. 39-54.
6. Al-Sharo K. A., Finite groups with given systems of weakly S-propermutable subgroups // J. Group Theory. 2016. Vol. 19. P. 871-887.
7. Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318-326.
8. Monakhov V. S., Trofimuk A. A. Finite groups with two supersoluble subgroups // Journal of Group Theory. 2019. Vol. 22. P. 297-312.
9. Baer R.. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. № 1. P. 115-187.
10. Monakhov V. S. On the supersoluble residual of mutually permutable products // ПФМТ. 2018. Т. 34, № 1. С. 69–70.

УДК 512.542

О конечных группах с тремя или четырьмя несопряженными формационными максимальными подгруппами[1]

А. К. Фурс (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: andreyfurss@gmail.com

On finite groups with three or four nonconjugate formational maximal subgroups

A. K. Furs (Belarus, Gomel)
Scorina Gomel State University
e-mail: andreyfurss@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. В основе работы лежат стандартные определения и обозначения из монографий [1]. Максимальные подгруппы занимают центральное место при изучении влияния свойств заданной системы подгрупп на строение группы. В [2] В.А.Белоноговым был получен замечательный результат: если группа G имеет 3 попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы, то G нильпотентна. Отметим, что Б. Хефлинг для данного натурального числа $n \geq 3$ привел пример [3, Example 2.4] несверхразрешимой группы, которая имеет n классов попарно несопряженных сверхразрешимых максимальных подгрупп. С другой стороны, А.Ф. Васильевым в [4] было доказано, что если разрешимая группа содержит три попарно несопряженные ненормальные сверхразрешимые максимальные подгруппы, то она сверхразрешима. В настоящей работе нами получено следующее обобщение этого результата.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, состоящая из групп с нильпотентным коммутантом. Если разрешимая группа G имеет 3 попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, принадлежащие $\mathfrak{F}$, то G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Из теоремы 1 можно извлечь новые, ранее неизвестные следствия для конкретных формаций. Приведем некоторые из них. Напомним [5], что подгруппа H группы G называется модулярной в G, если: 1) $\langle X, H \cap V\rangle = \langle X, H\rangle \cap V$ для всех $X \leq G, V \leq G$ таких, что $X \leq V$; 2) $\langle H, W \cap V\rangle = \langle H, W\rangle \cap V$ для всех $W \leq G, V \leq G$ таких, что $H \leq V$. Подгруппа R группы G называется субмодулярной в G [6], если R можно соединить с G рядом подгрупп $R = R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_{t-1} \leq R_t = G$ таких, что R_{i-1} — модулярна в R_i для $i = 1, \ldots, t$.

Сверхразрешимая группа называется сильно сверхразрешимой [7], если ее любая силовская подгруппа субмодулярна в ней. Согласно [7] класс $s\mathfrak{U}$ всех сильно сверхразрешимых групп образует S-замкнутую насыщенную формации.

Следствие 1. *Если в разрешимой группе G имеется по крайней мере 3 попарно несопряженные ненормальные сильно сверхразрешимые максимальные подгруппы, то сама G сильно сверхразрешима.*

Следствие 2. *Если в разрешимой группе G имеется по крайней мере 3 попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, то сама G имеет нильпотентный коммутант.*

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (задание 1.1.02 подпрограммы 11.1 «Математические модели и методы») при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Для формулировки следующей теоремы 2 приведем необходимые сведения из работы [8].

Подгруппа R группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $R = G$, либо $R = G$ можно соединить с G цепью подгрупп $R = R_0 < R_1 < \cdots < R_{k-1} < R_k = G$ такой, что $|R_{j+1} : R_j|$ — простое число для любого $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Группа G называется w-сверхразрешимой [8], если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G. Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех w-сверхразрешимых групп образует S-замкнутую насыщенную формацию.

Теорема 2. *Если группа G имеет 3 попарно несопряженные* w*-сверхразрешимые максимальные подгруппы и ее обобщенный коммутант $G^{\mathcal{A}}$ нильпотентен, то группа G является* w*-сверхразрешимой.*

Исходным результатом заключительной теоремы 3 нашей работы служит следующая теорема, полученная А.Ф.Васильевым в заметке [9]: Если группа G содержит 4 попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы, из которых 2 нормальны, а 2 ненормальны в G, то G сверхразрешима.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, составленная из метанильпотентных групп. Если группа G имеет 4 попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие $\mathfrak{F}$, из которых 2 нормальны, а 2 ненормальны в G, то G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Следствие 3. *Если группа G имеет 4 попарно несопряженные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, причем 2 из них нормальны, а 2 ненормальны в G, то G имеет нильпотентный коммутант.*

Следствие 4. *Если группа G имеет 4 попарно несопряженные метанильпотентные максимальные подгруппы, из которых 2 нормальны, а 2 ненормальны в G, то G метанильпотентна.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

2. Белоногов В. А. Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп // Докл. Акад. наук СССР. 1965. Том. 161, № 6. С. 1255–1256.

3. Höfling B. On the number of conjugacy classes of maximal subgroups in a finite soluble group // Arch. Math. 1999. Vol. 72. P. 1–8.

4. Васильев А. Ф. О некоторых свойствах локальных формаций // Вопросы алгебры. Минск: Университетское, 1985. Вып. 1. С. 4–9.

5. Schmidt R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen // J. Ill. Math. 1969. Vol. 13. P. 358–377.

6. Zimmermann I. Submodular Subgroups in Finite Groups // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545–557.

7. Васильев В. А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами // Сиб. мат. журн. 2015. Том. 56, № 6. С. 1277–1288.

8. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Том. 51, № 6. С. 1270–1281.

9. Васильев А. Ф. О конечных группах с заданной системой сверхразрешимых максимальных подгрупп // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2005. № 5 (32). С. 154–155.

Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 512.57

О классах частично упорядоченных группоидов отношений с конъюнктивными операциями

Д. А. Бредихин (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный технический университет
e-mail: bredikhin@mail.ru

On classes of partially ordered groupoids of relations with conjunctive operations

D. A. Bredikhin (Russia, Saratov)
Saratov State Technical University
e-mail: bredikhin@mail.ru

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую *алгеброй отношений*. Всякую алгебру отношений можно рассматривать как частично упорядоченную отношением теоретико-множественного включения. При изучении различных классов алгебр отношений естественным образом возникают и решаются следующие проблемы (см., например, [1]–[5]):

1. *Найти аксиоматическую характеристику исследуемого класса.*

2. *Выяснить, является ли этот класс квазимногообразием.*

3. *Найти базис квазитождеств квазимногообразия, порожденного этим классом.*

4. *Выяснить, является ли это квазимногообразие многообразием.*

5. *Найти базис тождеств многообразия, порожденного этим классом.*

Мы будем рассматривать частично упорядоченные алгебры отношений с одной бинарной операцией, т. е. группоиды отношений. Подробную мотивацию рассмотрения классов группоидов отношений можно найти в [5]. Дополнительным стимулом для таких исследований является возможность использования группоидов в криптографии [6].

Обозначим через $Rel(U)$ множество всех бинарных отношений на множестве U. Как правило, операции на $Rel(U)$ задаются логическими формулами. Такие операции называются *логическими*. Логические операции можно классифицировать по определяющим их формулам. Операция над отношениями называется *примитивно-позитивной* [7], если она может быть определена примитивно-позитивной формулой, т. е. формулой первого порядка, содержащей в своей предварённой нормальной форме только кванторы существования и конъюнкцию. Частным случаем примитивно-позитиыных операций являются операции, определяемые бескванторными формулами, т. е. формулами, представляющими конъюнкцию атомов. Эти операции естественно назвать *конъюнктивными*.

Говорят, что примитивно-позитивная операция F имеет *ранг* k, если она может быть определена формулой, содержащей k конъюнктивных членов, и не может быть определена формулами с меньшим их числом. Операция $F^d(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$ называется *двойственным* к операции F. Абстрактные свойства этих операций двойственны друг другу. По этой причине мы можем рассмотреть только одну из этих операций. Операция $F^c(\rho_1, \rho_2) = (F(\rho_2^{-1}, \rho_1^{-1}))^{-1}$, где $^{-1}$ — операция обращения отношений, называемая *сопряженной* к операции F. Заметим, что отображение $f(\rho) = \rho^{-1}$ является антиизоморфизмом частично упорядоченных группоидов $(Rel(X), F, \subseteq)$ и $(Rel(X), F^c, \subseteq)$, поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только одной из этих операций.

Так как имеется только восемь атомов от двух предикатных символов и двух индивидуальных переменных, легко заметить, что общее число бинарных конъюнктивных операций равно двумстам двадцати трем. Путем рутинной проверки можно установить, что число конъюнктивных операций второго ранга с точностью до двойственных и сопряженных равно шести. Эти операции определяются следующим образом:

$$F_0(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U \times U : (u, v) \in \rho_1 \wedge (u, v) \in \rho_2\};$$

$$F_1(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U \times U : (v, u) \in \rho_1 \wedge (v, u) \in \rho_2\};$$

$$F_2(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U \times U : (u, u) \in \rho_1 \wedge (u, v) \in \rho_2\};$$

$$F_3(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U \times U : (u, v) \in \rho_1 \wedge (v, u) \in \rho_2\};$$

$$F_4(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U \times U : (u, u) \in \rho_1 \wedge (v, u) \in \rho_2\};$$

$$F_5(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U \times U : (u, u) \in \rho_1 \wedge (v, v) \in \rho_2\}.$$

Заметим, что теоретико-множественное включение может быть выражено через операции F_0 и F_1, поэтому мы ограничимся рассмотрением результатов, касающихся операций F_2 – F_5. Формулируемые ниже результаты дают решение упомянутых выше проблем для частично упорядоченных группоидов отношений с указанными операциями.

Под *группоидом* мы понимаем алгебру $(A, \cdot)$ с одной бинарной операцией. *Частично упорядоченный группоид* — это алгебраическая система $(A, \cdot, \leq)$, где $(A, \cdot)$ — группоид, а $\leq$ — отношение частичного порядка на A согласованное с операцией группоида, т. е. $x \leq y$ влечёт $xz \leq yz$ и $zx \leq zy$ для всякого $z \in A$. Элемент $o \in A$ называется *нулевым элементом* частично упорядоченного группоида, если $ox = xo = o$ и $o \leq x$ для всех $x \in A$.

Обозначим через $R\{F, \subseteq\}$ класс всех частично упорядоченных группоидов, изоморфных частично упорядоченным отношением теоретико-множественного включения группоидам бинарных отношений с операцией F и через $Q\{F, \subseteq\}$ (соответственно $V\{F, \subseteq\}$) квазимногообразие (многообразие), порожденное классом $R\{F, \subseteq\}$ в классе всех частично упорядоченных группоидов.

Теорема 1. [8] *Класс $R\{F_2, \subseteq\}$ образует квазимногообразие и не является многообразием. Частично упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит классу $R\{F_2, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующей системе тождеств и квазитождеств*

$$x^2y = xy, \tag{1}$$

$$(xy)z = x(yz), \tag{2}$$

$$xyz = yxz, \tag{3}$$

$$xy \leq y, \tag{4}$$

$$x \leq yz \Rightarrow x \leq xz. \tag{5}$$

Частично упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $V\{F_2, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (4).

Теорема 2. [9] *Класс $R\{F_3, \subseteq\}$ образует квазимногообразие и не является многообразием. Частично упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит классу $R\{F_3, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующей системе тождеств и квазитождеств*

$$(xy)y = xy, \tag{6}$$
$$x(yx) = xy, \tag{7}$$
$$(xy)z = (xz)y, \tag{8}$$
$$x(yz) = z(yx), \tag{9}$$
$$(x(yz))t = x(t(zy)), \tag{10}$$
$$xy \leq x, \tag{11}$$
$$x \leq yz \to x \leq xz. \tag{12}$$

Частично упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $V\{F_3, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (6) – (11).

Теорема 3. [10] *Класс $R\{F_4, \subseteq\}$ образует квазимногообразие и не является многообразием. Частично упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит классу $R\{F_4, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующей системе тождеств и квазитождеств*

$$x^2y = xy, \tag{13}$$
$$(xy)z = (yx)z, \tag{14}$$
$$((xy)z)t = (x(yz))t, \tag{15}$$
$$x(y(zt)) = z(y(xt)), \tag{16}$$
$$x(y(x(yz))) = x(yz), \tag{17}$$
$$x(y((uv)z)) = (xu)(y(vz)), \tag{18}$$
$$x(yz) \leq z, \tag{19}$$
$$(xy)z \leq xz, \tag{20}$$
$$x \leq y(zt) \Rightarrow x \leq y(zx), \tag{21}$$
$$(x \leq yz \wedge x \leq uv) \Rightarrow x \leq (yu)z. \tag{22}$$

Частично упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $V\{F_4, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (13) – (20).

Теорема 4. *Класс $R\{F_5, \subseteq\}$ не образует квазимногообразие. Частично упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит классу $R\{F_5, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетво-*

ряет следующей системе аксиом

$$x^2y = xy, \tag{23}$$
$$xy^2 = xy, \tag{24}$$
$$(xy)z = (yx)z, \tag{25}$$
$$x(yz) = x(zy), \tag{26}$$
$$((xy)z)t = (x(yz))t, \tag{27}$$
$$x((yz)t) = x(y(zt)), \tag{28}$$
$$(xy)z \le xz, \tag{29}$$
$$x(yz) \le xz. \tag{30}$$
$$xy \le uv \Rightarrow yx \le vu, \tag{31}$$
$$(x \le yz \wedge x \le uv) \Rightarrow x \le (yu)(zv), \tag{32}$$
$$xy = o \Rightarrow (x^2 = o \vee y^2 = o), \tag{33}$$
$$xy \le uv \Rightarrow (x^2 \le u^2 \vee xy = o). \tag{34}$$

Квазимногообразие $Q\{F_5, \subseteq\}$ *не является многообразием. Частично упорядоченный группоид* $(A, \cdot, \le)$ *принадлежит квазимногообразию* $Q\{F_3, \subseteq\}$ *тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам* (23) – (30) *и квазитождествам (31)-(32). Частично упорядоченный группоид* $(A, \cdot, \le)$ *принадлежит многообразию* $V\{F_3, \subseteq\}$ *тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам* (23) – (30).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tarski A. Contributions to the theory of models, III // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wet. 1955. V. 58. P. 56–64.

2. Lyndon R. C. The representation of relation algebras, II // Ann. Math. 1956. V. 63. P. 294-307.

3. Jónsson B. Representation of modular lattices and of relation algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 92. P. 449–464.

4. Andréka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations // Algebra Universalis. 1995. V. 33. P. 516–532.

5. Bredikhin D.A. On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // Algebra Universalis. 1915. V. 73. P. 43-52.

6. Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika. 2016. V. 4. P. 99-123.

7. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebra. 1991. V. 7. P. 50-70.

8. Bredikhin D.A On semigroups of relations with primitive-positive operations of rank two // Математика. Механика. Издательство Саратовского государственного университета. 2019. Том 21. С. 10-11.

9. Bredikhin D.A. On generalized subreducts of Tarski's algebras of relations with the operation of bi-directional intersection // Algebra Universalis. 1918. V. 79. P. 77-92.

10. Bredikhin D.A. On Algebras of Binary Relations with Conjunctive Operations // Algebra Universalis. 2021. V. 82. Article number 39.

———————————————————————————

УДК 512.548

Идемпотенты в полиадических группах специального вида

А. М. Гальмак (Беларусь, г. Могилёв)
Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий
e-mail:halm54@mail.ru
И. В. Юрченко (Беларусь, г. Могилёв)
Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий
e-mail:yurchenko-irina@mail.ru

Idempotents in polyadic groupoids of special form

A. Gal'mak (Belarus, Mogilev)
Belarusian State University of Food and Chemical Technologies
e-mail:halm54@mail.ru
I. Yurchanka (Belarus, Mogilev)
Belarusian State University of Food and Chemical Technologies
e-mail:yurchenko-irina@mail.ru

Полиадическая операция специального вида $\eta_{s,\sigma,k}$ арности l, где

$$s \geqslant 1, n \geqslant 2, l = s(n-1)+1, k \geqslant 2, \sigma \in \mathbf{S}_k,$$

определяется на k-ой декартовой степени A^k n-арной группы $\langle A, \eta\rangle$ следующим образом [1]:

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) = (y_1, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}), j = 1, \ldots, k.$$

В [1] доказано, что в случае тождественности подстановки σ^{l-1} l-арный группоид $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k}\rangle$ является l-арной группой. Его называют полиадической группой специального вида.

Частными случаями полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, изучению которой посвящена книга [2] и две полиадические операции Э. Поста [3], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, а вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Если η – бинарная операция ($n = 2$), то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s+1$, совпадает с $(s+1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$.

Множество всех идемпотентов полиадического группоида $\langle A, \eta\rangle$ будем обозначать символом $\mathbf{I}(A, \eta)$.

Теорема 1. *Если* $\langle A, \eta\rangle$ – *n-арная группа,* $j \in \{1, \dots, l-1\}$, *то*

$$\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,(12\dots l-1),l-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_{l-1} \in A,$$
$$\varepsilon_j = (\varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_{l-1}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{j-1})^{-1}\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,(12\dots l-1),l-1})| = r^{l-2}$.

Полагая в теореме $s = 1$ (в этом случае $l = n$), получим

Следствие 1. *Если* $\langle A, \eta\rangle$ – *n-арная группа* $(n \geqslant 3)$,$j \in \{1, \dots, n-1\}$, *то*

$$\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{1,(12\dots n-1),n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_{n-1} \in A,$$
$$\varepsilon_j = (\varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{j-1})^{-1}\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{1,(12\dots n-1),n-1})| = r^{n-2}$.

Полагая в теореме $j = 1$ и $j = l - 1$, получим

Следствие 2. *Если* $\langle A, \eta\rangle$ – *n-арная группа, то*

$$\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,(12\dots l-1),l-1}) =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{l-1}) | \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{l-1} \in A, \varepsilon_1 = (\varepsilon_2\varepsilon_3 \dots \varepsilon_{l-1})^{-1}\} =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-2}, \varepsilon_{l-1}) || \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-2} \in A, \varepsilon_{l-1} = (\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{l-2})^{-1}\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,(12\dots l-1),l-1})| = r^{l-2}$.

Полагая в следствии 2 $l = n$, получим

Следствие 3. *Если* $\langle A, \eta\rangle$ – *n-арная группа* $(n \geqslant 3)$, *то*

$$\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{1,(12\dots n-1),n-1}) =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} \in A, \varepsilon_1 = (\varepsilon_2\varepsilon_3 \dots \varepsilon_{n-1})^{-1}\} =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A, \varepsilon_{n-1} = (\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-2})^{-1}\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{1,(12\dots n-1),n-1})| = r^{n-2}$.

Так как для любого элемента a тернарной группы $\langle A, \eta\rangle$ обратный элемент a^{-1} совпадает с косым элементом $\bar{a}$, то полагая в следствии 1 или в следствии 3 $n = 3$, получим

Следствие 4. *Если* $\langle A, \eta\rangle$ – *тернарная группа, то*

$$\mathbf{I}(A^2, \eta_{1,(12),2}) = \{(\bar{a}, a) | a \in A\} = \{(a, \bar{a}) | a \in A\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^2, \eta_{1,(12),2})| = r$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальмак А. М. О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ // Веснік МДУ ім. А. А. Куляшова. 2018. № 1(51). С. 4-10.

2. Гальмак А. М. Многоместные операции на декартовых степенях. — Минск: Изд. центр БГУ, 2009. 265 с.

3. E. L. Post, Polyadic groups. Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1940). P. 208-350.

––

УДК 511.32

Уравнения и неравенства в свободных полугруппах[1]

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
А. И. Зеткина (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова; Воронежский государственный университет
e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Equations and inequalities in free semigroups

V. G. Durnev (Russia, Yaroslavl)
P. G. Demidov Yaroslavl' University
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
A. I. Zetkina (Russia, Yaroslavl)
P. G. Demidov Yaroslavl' University; Voronezh State University
e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Через S_m будем обозначать свободную полугруппу (с пустым словом в качестве нейтрального элемента – свободный моноид M_m или без него) ранга m со свободными образующими $a_1, \ldots, a_m$, а через F_m – свободную группу с теми же образующими. Вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно.

Системой уравнений с неизвестными $x_1,\ldots, x_n$ в свободной полугруппе S_m называется выражение вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) = u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m), \tag{1}$$

где $w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$ и $u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$ – слова в алфавите

$$\{\, x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_m \,\}.$$

Набор $\langle g_1,\ldots,g_n\rangle$ элементов полугруппы S_m называется *решением* системы 1, если при любом i $(i = 1,\ldots,k)$ в полугруппе S_m выполняется равенство

$$w_i(g_1,\ldots,g_n,a_1,\ldots,a_m) = u_i(g_1,\ldots,g_n,a_1,\ldots,a_m).$$

Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. Заметим, что при $m \geqslant 2$ система уравнений $\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i$ равносильна одному уравнению

$$w_1a_1w_2a_1\ldots a_1w_k\, w_1a_2w_2a_2\ldots a_2w_k = u_1a_1u_2a_1\ldots a_1u_k\, u_1a_2u_2a_2\ldots a_2u_k.$$

Системы уравнений в свободных полугруппах называются также системами уравнений в словах. Их изучение было начато в 60-ые годы прошлого века А.А. Марковым, в качестве одного из подходов к отрицательному решению 10-ой проблемы Д. Гильберта. Первые результаты

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 19-52-26006

в исследовании систем уравнений в словах были получены А.А. Марковым (не опубликовано) и Ю.И. Хмелевским [1] в конце 60-ых годов.

В эти же годы было начато изучение систем уравнений в словах и длинах, т.е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j|,$$

где через $|x| = |y|$ обозначен предикат " *длины слов x и y равны*". Первые результаты в исследовании систем уравнений в словах и длинах были получены в начале 70-ых годов в работах Ю.В. Матиясевича [2] и Н.К. Косовского [3, 4, 5].

Аналогичным образом определяются понятия *система уравнений в свободной группе F_m и ее решение.*

Для слова w в алфавите Σ и буквы a этого алфавита через $|w|_a$ будем обозначать число вхождений буквы a в слово w.

В 1972–73 годах первый из авторов стал рассматривать системы уравнений в словах и длинах с дополнительным предикатом $|x|_a = |y|_a$ – " *проекции слов x и y на выделенную букву a равны*". В работе [6], вышедшей из печати в 1974 году, он, в частности, доказал, что

можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений в свободной полугруппе S_2,

$$w\,(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = v\,(x, x_1, \dots, x_n, a, b) \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} (|x_i| = |x_j| \,\&\, |x_i|_a = |x_j|_a)$$

с неизвестными $x_1, \dots, x_n$, с константами a и b и с параметром x, где A – некоторое подмножество множества $\{\{t, s\} \mid 1 \le t, s \le n\}$, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа k определить, имеет ли решение система уравнений

$$w\,(a^k, x_1, \dots, x_n, a, b) = v\,(a^k, x_1, \dots, x_n, a, b) \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} (|x_i| = |x_j| \,\&\, |x_i|_a = |x_j|_a).$$

В этой же работе отмечалось, что аналогичный результат остается верным, если предикат $|x| = |y| \,\&\, |x|_a = |y|_a$ заменить предикатом $|x|_b = |y|_b \,\&\, |x|_a = |y|_a$.

Аналогичный результат содержался в опубликованной в 1988 году работе J.R. Buchi и S. Senger [7].

В 1976 году Г.С. Маканин получил в теории уравнений в словах фундаментальный результат, который был опубликован в 1977 году в работе [8], – он построил *алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной полугруппе M_m определить, имеет ли она решение.* Несколько позже Г.С. Маканин построил *алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение.*

После фундаментальных результатов Г.С. Маканина особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных моноидах, полугруппах и группах с различными "не слишком сложными" и "достаточно естественными" ограничениями на решения.

В работах [9] и [10] была доказана алгоритмическая неразрешимость позитивной $\exists\forall\exists^3$-теории любой конечно порожденной нециклической свободной полугруппы. Вопрос о разрешимости позитивной теории свободной полугруппы счетного ранга в кандидатской диссертации первого автора был легко сведен к следующей проблеме *существует ли алгоритм, позволяющий для произвольного уравнения*

$$w\,(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = u\,(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$$

в свободной полугруппе счетного ранга определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \dots, g_n$, что

$$g_1 \in M_{m_1},\ g_2 \in M_{m_2}, \dots, g_n \in M_{m_n},$$

где $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$, M_{m_i} *- свободная полугруппа с образующими* $a_1, \ldots, a_{m_i}$. Ю.М. Важенин и Б.В. Розенблат [11] используя результат Г.С. Маканина доказали, что для решения последней задачи алгоритм существует, это позволило им установить *разрешимость позитивной теории свободной полугруппы счетного ранга.*

Вопрос о разрешимости позитивной теории свободной группы был сведен Ю.И. Мерзляковым [12] к следующей проблеме

существует ли алгоритм, позволяющий для произвольного уравнения

$$w\,(\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a_1,\,\ldots\,,\,a_m\,)\,=\,1$$

в свободной группе счетного ранга определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \ldots, g_n$, *что*

$$g_1 \in F_{m_1},\; g_2 \in F_{m_2},\; \ldots\;,\; g_n \in F_{m_n}\,,$$

где $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$, F_{m_i} *- свободная группа с образующими* $a_1, \ldots, a_{m_i}$.

Г.С. Маканин [13] построил искомый алгоритм и тем самым доказал *разрешимость позитивной теории свободной группы.*

Обобщая эти ситуации Г.С. Маканин поставил в "Коуровской тетради" [14] следующую проблему для уравнений в свободных группах

9.25. *Указать алгоритм, который по уравнению*

$$w\,(\,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m\,)\,=\,1$$

в свободной группе F_m *и списку конечно порожденных подгрупп* $H_1,\ldots, H_n$ *группы* F_m *позволял бы узнать, существует ли решение этого уравнения с условием*

$$x_1 \in H_1,\ldots,x_n \in H_n.$$

Первые положительные результаты в направлении решения этой проблемы получил А. Ш. Малхасян [15].

К. Шульц [16] рассмотрел аналогичную проблему для уравнений в свободных полугруппах с регулярными ограничениями на решения и доказал, что *существует алгоритм, который по уравнению*

$$w\,(\,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m\,)\,=\,u\,(\,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m\,)$$

в свободной полугруппе S_m *и списку регулярных подмножеств (языков)* $H_1,\ldots, H_n$ *полугруппы* S_m *позволяет узнать, существует ли решение этого уравнения с условием*

$$x_1 \in H_1,\ldots,x_n \in H_n.$$

Так как каждая конечно порожденная подполугруппа свободной полугруппы S_m является регулярным подмножеством (языком), то решенная К. Шульцем проблема для уравнений с ограничениями на решения в свободных полугруппах является естественным аналогом проблемы Г.С. Маканина.

V. Diekert [17, 18] построил *алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению*

$$w\,(\,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m\,)\,=\,1$$

в свободной группе F_m *и списку регулярных подмножеств (языков)* $H_1,\ldots, H_n$ *группы* F_m *определить, существует ли решение этого уравнения с условием*

$$x_1 \in H_1,\ldots,x_n \in H_n.$$

Тем самым решена и проблема Г.С. Маканина.

В литературе по формальным языкам и грамматикам достаточно часто встречается рекурсивный язык L_1 в алфавите $\{a, b\}$, который состоит из всех слов w в алфавите $\{a, b\}$, для которых $|w|_a = |w|_b$. Пользуясь известным критерием свободности для подполугрупп свободной полугруппы, легко доказать, что L_1 – *свободная подполугруппа счетного ранга.* Конечно, рекурсивный язык L_1 не является регулярным, однако с точки зрения сложности разрешимости для него алгоритмических проблем он скорее "ближе" к регулярным языкам, чем к произвольным рекурсивным.

Поэтому представляют интерес, на наш взгляд, следующие теоремы.

Теорема 1. *Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе* S_2,

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \,\&\, |x_1|_b = |x_2|_b$$

с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, *с константами* a *и* b *и с параметром* x, *где* A – *некоторое подмножество множества* $\{\{t, s\} \,|\, 1 \le t, s \le n\}$, *что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа* k *определить, имеет ли решение уравнение с ограничениями на решения*

$$w(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \,\&\, |x_1|_b = |x_2|_b$$

Теорема 2. *Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе* S_2,

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \,\&\, x_1 \in L_1$$

с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, *с константами* a *и* b *и с параметром* x, *где* A – *некоторое подмножество множества* $\{\{t, s\} \,|\, 1 \le t, s \le n\}$, *что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа* k *определить, имеет ли решение уравнение с ограничениями на решения*

$$w(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \,\&\, x_1 \in L_1$$

V. Diekert предложил (устное сообщение Ю.В. Матиясевича) изучать в свободных полугруппах (моноидах) системы вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \le u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m), \tag{2}$$

где для слов w и u в алфавите образующих свободной полугруппы запись $w \le u$ означает, что *последовательность букв* w *является подпоследовательностью букв* u, т.е. существуют такое число $n \le |w|$ и такие слова $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$, что

$$w = w_1 \ldots w_k \quad u = u_1 w_1 u_2 \ldots u_k w_k u_{k+1},$$

рассматривая их как обобщение систем уравнений (1), так как

$w = u$ тогда и только тогда, когда $w \le u \,\&\, u \le w$.

Отношение $w \le u$ является отношением частичного порядка на моноиде M_m, т.е. оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Это еще один довод для обоснования естественности рассмотрения систем неравенств вида (2).

Вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем неравенств (2) в настоящее время открыт. Но если к отношению $w \le u$ добавить предикат равенства длин, то получим алгоритмически неразрешимую задачу.

В дальнейшем равенство $w = u$ будет использоваться как сокращенная запись конъюнкции неравенств $w \le u \,\&\, u \le w$.

Теорема 3. *Невозможен алгоритм, позволяющий для произвольной системы неравенств вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \dots, x_n, a, b) \le u_i(x_1, \dots, x_n, a, b) \,\&\, |x_1| = |x_2|$$

в свободной полугруппе S_2 определить, имеет ли она решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хмелевский Ю.И. Уравнения в свободной полугруппе. М.: Наука. 1971. (Тр. МИАН.) Том 107).

2. Матиясевич Ю.В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-ой проблемой Гильберта // Исследования по конструктивной математике и математической логике. Записки научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та. АН СССР. Л. 1968. Том 8. С. 132-143.

3. Косовский Н.К. Некоторые свойства решений уравнений в свободной полугруппе // Записки научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та. АН СССР. Л. 1972. Том 32. С. 21-28.

4. Косовский Н.К. О множествах, представимых в виде решений уравнений в словах и длинах // Вторая всесоюзная конфер. по матем. логике. Тезисы кратких сообщений. М. 1972. С. 23.

5. Косовский Н.К. О решении систем, состоящих одновременно из уравнений в словах и неравенств в длинах слов// Записки научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та. АН СССР. Л. 1973. Том 33. С. 24-29.

6. Дурнев В.Г. Об уравнениях на свободных полугруппах и группах// Матем. заметки. 1974. Том 16, № 5. С. 717-724.

7. Buchi J. R., Senger S. Definability in the existential theory of concatenation // Z. math. Log. und Grundl. Math. 1988. Vol. 34, № 4. P. 337-342.

8. Маканин Г.С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе// Матем. сбор. 1977. Том 103(145), 2(6). С. 147-236.

9. Дурнев В.Г. Позитивная теория свободной полугруппы// ДАН СССР. 1973. Том 211, № 4. С. 772-774.

10. Дурнев В.Г. О позитивных формулах на свободных полугруппах// Сиб. матем. журн. 1974. Том 25, № 5. С. 1131-1137.

11. Важенин Ю.М., Розенблат Б.В. Разрешимость позитивной теории свободной счетнопорожденной полугруппы // Матем. сборник. 1981. Том 116, № 1. С. 120-127.

12. Мерзляков Ю.И. Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Том 5, № 4. С. 25-42.

13. Маканин Г.С. Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы // Изв. АН СССР. Серия матем. 1984. Том 48, № 4. С. 735-749.

14. Коуровская тетрадь. 11-е изд., доп. Новосибирск. 1990.

15. Малхасян А.Ш. О разрешимости в подгруппах уравнений в свободной группе // Сб. Прикладная математика. 1986. Вып. 2. С. 42-47.

16. Schulz K.U. Makanin's Algprithm for Word Equations - Two Improvements and a Generalization // Lecture Notes in Computer Science. 1990. Vol. 572. P. 85-150.

17. Diekert V., Gutierrez C., Hagenah C. The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete. In A. Ferreira and H Reichel, editors, Proc. 18-th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'01), Dresden (Germany), 2000, number 2010 in Leture Notes in Computer Science. P. 170-182. Springer-Verlag, 2001.

18. Diekert V., Gutierrez C., Hagenah C. The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete // Informatiion and Computation. 2005. Vol. 202. P. 105 - 140.

УДК 512.534.3

Копроизведение кохопфовых полигонов[1]

И. Б. Кожухов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет "МИЭТ"; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
К. А. Колесникова (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет "МИЭТ"; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ksenya.koless@gmail.com

Coproduct of co-hopfian acts

I. B. Kozhukhov (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology, Lomonosov Moscow State University
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
K. A. Kolesnikova (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology, Lomonosov Moscow State University
e-mail: ksenya.koless@gmail.com

Полигоном над полугруппой S (см. [1], [2]) называется множество X с заданным отображением $X \times S \to X$ таким, что $(xs)t = x(st)$ (для любых $x \in X$ и $s, t \in S$). Полигон является алгебраической моделью автомата без выхода. Его можно рассматривать также как унарную алгебру, т.е. алгебру, у которой все операции унарны: в качестве операций выступают умножения на элементы полугруппы S. Полигон X называется унитарным, если полугруппа S содержит единицу и $x \cdot 1 = x$ для всех $x \in X$. Копроизведение $\coprod_{i \in I} A_i$ алгебр A_i одной сигнатуры – это понятие, двойственное понятию прямого произведения $\prod_{i \in I} A_i$. В случае полигонов копроизведение – это дизъюнктное объединение полигонов (или их изоморфных копий, если не все попарные произведения пусты).

Условием конечности называют любое условие, которому удовлетворяют все конечные алгебры. Наиболее известными из условий конечности являются *артиновость* и *нётеровость*. Однако, определение этих и некоторых других условий может быть осуществлено с двух различных точек зрения: рассмотрения подалгебр и рассмотрения конгруэнций. Для некоторых

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 22-11-00052

алгебр, например, для модулей над кольцами, эти две точки зрения совпадают: действительно, решётка подмодулей модуля изоморфна решётке его конгруэнций. Однако, для многих алгебраических систем две точки зрения различаются; например, это имеет место для полигонов над полугруппами. *Артиновость в смысле конгруэнций*, т.е условие обрыва убывающих цепей $\rho_1 \supset \rho_2 \supset \ldots$ конгруэнций, для полигонов сильнее, чем *артиновость в смысле подполигонов*, а именно, отсутствие бесконечных убывающих последовательностей $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ подполигонов. То же верно для нётеровости.

Универсальная алгебра A называется *хопфовой*, если любой её сюръективный эндоморфизм является автоморфизмом, и *кохопфовой*, если любой инъективный эндоморфизм является автоморфизмом. Очевидно, хопфовость алгебры A эквивалентна тому, что алгебра A не изоморфна никакой своей нетривиальной фактор-алгебре, а кохопфовость – тому, что A не изоморфна никакой своей собственной подалгебре. Из определений немедленно следует, что для любой универсальной алгебры нётеровость в смысле конгруэнций влечёт её хопфовость, а кохопфовость является следствием артиновости в смысле подалгебр.

Свойства хопфовости и кохопфовости интенсивно изучались в теории групп. Для унитарных полигонов над группами необходимые и достаточные условия хопфовости и кохопфовости были найдены в [3]. Что касается неунитарных полигонов над группами, то необходимые и достаточные условия хопфовости полигона удалось получить лишь в случае, когда наибольший унитарный подполигон этого полигона циклический (см. [4]). В работе [5] В. К. Карташов доказал, что любой конечно порождённый коммутативный полигон является хопфовым.

Интересно спросить, сохраняется ли свойство хопфовости или кохопфовости при взятии подполигона, фактор-полигона, прямого произведения полигонов и копроизведения полигонов. Авторами доказана

Теорема 1. *Пусть A, B — кохопфовы полигоны над полугруппой S. Тогда $A \sqcup B$ — кохопфов полигон.*

В таблице ниже представлены известные авторам ответы на поставленные выше вопросы. Теорема 1 позволила заполнить одну клеточку таблицы.

	$B \subseteq A$	A/ρ	$A \times B$	$A \sqcup B$
хопфовость	Да	Нет	Нет	?
кохопфовость	Нет	Нет	Нет	*Да*

Один вопрос из представленных в таблице пока остаётся открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. — Berlin, N. Y.: W. de Gruyter, 2000. xvii + 529 p.

2. Кожухов И. Б., Михалёв А.В. Полигоны над полугруппами // Фундаментальная и прикладная математика. 2020-2021. Том 23, № 3. С. 141-200.

3. Кожухов И. Б., Колесникова К. А. О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами // Фундаментальная и прикладная математика. 2020-2021. Том 23, № 3. С. 131-139.

4. Кожухов И. Б., Колесникова К. А. Хопфовость унитарных и неунитарных полигонов над группами // Материалы конференции // XIX Международная конференция «Проблемы теоретич. кибернетики»: тезисы докладов международной конференции (Казань, 28 сентября – 1 октября 2021 г.) — Казань, 2021. С. 64-66.

5. Карташов В. К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр // Дискретная математика. 2008. Том 20. Вып. 4. С. 79-84.

УДК 519.68:007.5

О некоторых конечных коммутативных группоидах, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распространения сигнала[1]

А. В. Литаврин (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: anm11@rambler.ru

On some finite commutative groupoids associated with multilayer neural networks of direct signal propagation

A. V. Litavrin (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: anm11@rambler.ru

В работе [1] были введены конечные коммутативные группоиды с нейтральным элементом $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, связанные с многослойной нейронной сетью $\mathcal{N}$ прямого распространения сигнала (далее просто нейронная сеть). Данные группоиды получили название *аддитивные группоиды подсетей*. Аддитивный группоид подсетей в общем случае является неассоциативным группоидом. Группоид $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ является ассоциативным группоидом с нейтральным элементом (т.е. моноидом) тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}$ – двухслойная нейронная сеть (см. утверждение 2 из работы [1]). В данных исследованиях мы исходим из того, что количество слоев $n(\mathcal{N})$ учитывает входной и выходной слой (среди авторов разных работ по нейронным сетям есть разночтения по этому поводу).

В работе [1] изучались эндоморфизмы группоидов $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ были построены некоторые эндоморфизмы этих группоидов, но исчерпывающего поэлементного описания множества всех эндоморфизмов группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ получено не было. Кроме того, в [1] были получены некоторые результаты относительно подгруппоидов группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Так, каждая подсеть $\mathcal{N}'$ (в смысле определения 4 из [1]) нейронной сети $\mathcal{N}'$ будет определять некоторый подгруппоид группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ (см. теорему 1 в работе [1]).

В работе [2] было получено поэлементное описание моноида $\mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}))$ при $n(\mathcal{N}) = 2$. По-прежнему не решена

Задача 7. *Привести поэлементное описание моноида* $\mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}))$ *при* $n(\mathcal{N}) > 2$.

Данная работа направлена на введение группоида $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$, связанного с нейронной сетью $\mathcal{N}$ (см. определение 4 в данной работе). Прежде чем ввести данный группоид, приведем необходимые сведения о нейронных сетях и необходимые определения из [1].

Стандартные математические модели многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала можно найти в [3] и [4] и др.. Данные модели представляют собой набор математических объектов, которые связаны между собой некоторым образом. Приведем основные сведенья об архитектуре (или внутреннем устройстве) нейронной сети.

---

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым МинобрнаукиРФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Стандартное описание архитектуры многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала. В рассматриваемых сетях нейроны группируются на попарно не пересекающиеся классы, называемые в дальнейшем *слоями*, каждый нейрон i-го слоя соединяется со всеми нейронами из соседних слоев. Нейроны i-го слоя не соединяются между собой и не соединяются с нейронами j-го слоя, когда $j > i+1$ или $j < i-1$. Соединение между нейронами называют *синоптической связью* (или коротко *связью*) и каждой синоптической связи ставится в соответствие некоторое действительное число – *вес* связи. Каждому нейрону нейронной сети ставится в соответствие функция $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которую принято называть *функцией активации*, и число – *пороговое значение* нейрона.

В данной работе мы отождествляем нейронную сеть с ее архитектурой, а вопрос о том, как она работает в качестве вычислительной функции, рассматриваем отдельно. По заданной архитектуре нейронной сети всегда можно определить ее работу как функции, используя различные модели искусственного нейрона. Для того чтобы с нейронной сетью можно было работать как с математическим объектом, в работе [1] вводится кортеж специального вида $\mathcal{N}$ такой, что его задание определяет нейронную сеть (т.е. ее архитектуру) и наоборот (т.е. задавая архитектуру нейронной сети с помощью стандартной математической модели, мы определяем кортеж специального вида).

Как обычно, $\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел. Через $F(\mathbb{R})$ обозначим множество всех функций $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (здесь понимается, что область определения функции h совпадает с множеством $\mathbb{R}$). Ниже приведем определение 3 из [1].

Определение 1. *Пусть заданы следующие объекты:*

1) кортеж $(M_1, ..., M_n)$ длины $n > 1$ конечных непустых множеств, где при $i \neq j$ справедливо $M_i \cap M_j = \varnothing$;

2) множество $S := (M_1 \times M_2) \cup (M_2 \times M_3) \cup ... \cup (M_{n-1} \times M_n)$;

3) отображение $f: S \to \mathbb{R}$, которое каждой паре из S ставит в соответствие действительное число;

4) множество $A := M_1 \cup ... \cup M_n$;

5) отображение $g : A \to F(\mathbb{R})$, которое каждому элементу из A ставит в соответствие функцию из $F(\mathbb{R})$;

6) отображение $l : A \to \mathbb{R}$, которое каждому элементу из A ставит в соответствие некоторое число из $\mathbb{R}$.

Тогда кортеж $\mathcal{N} = (M_1, ..., M_n, f, g, l)$ будем называть многослойной нейронной сетью прямого распределения (в рамках данной работы просто нейронной сетью).

Кортеж $(M_1, ..., M_n)$ интерпретируется как основной кортеж нейронов нейросети $\mathcal{N}$, S интерпретируется как совокупность синоптических связей. Функция f задает веса синоптических связей, а функция g определяет функции активации у каждого нейрона. Функция l определяет пороговые значения нейронов. Входным слоем будем называть совокупность нейронов M_1, а выходным слоем совокупность M_n. Работу нейронной сети как функции можно найти в [3]. В [1] работа нейронной сети описывается в терминах из приведенного выше определения 1.

Подсети нейронной сети. В данной работе множества будут обозначаться большими латинскими буквами, а кортежи, составленные из множеств, большими латинскими буквами с чертой. Кортеж из пустых множеств будем обозначать символом $\overline{\varnothing} := (\varnothing, ..., \varnothing)$ (длина такого кортежа всегда будет понятна из контекста).

Если $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ и $\overline{M} = (M_1, ..., M_n)$ – два кортежа, компонентами которых являются множества, то будем говорить, что выполняется условие $\overline{X} \subseteq \overline{M}$, если выполняются все включения $X_1 \subseteq M_1, ..., X_n \subseteq M_n$ (покомпонентное включение).

Пусть $(X_1, ..., X_n)$ – некоторый кортеж, составленный из конечных множеств, будем говорить, что кортеж *непрерывный*, если для любых различных $i, j \in \{1, ..., n\}$ выполняется следующая импликация: если $X_i \neq \varnothing$ и $X_j \neq \varnothing$ и $i < j$, то для любого $s \in \{i, ..., j\}$ выполняется неравенство $X_s \neq \varnothing$. Кортеж $\overline{\varnothing}$ считаем непрерывным по определению. Чтобы кортеж множеств был непрерывным, в нем не должно быть чередования непустого множества с интервалом из пустых множеств, а потом опять с непустым множеством.

Приведем определение 4 из [1].

Определение 2. *Пусть определена нейросеть $\mathcal{N} = (M_1, ..., M_n, f, g, l)$ и задан непрерывный кортеж $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ такой, что в нем имеется более одной компоненты, отличной от пустого множества, и $(X_1, ..., X_n) \subseteq (M_1, ..., M_n)$.*

Полагаем, что $\overline{Y} = (Y_1, ..., Y_m)$ – кортеж, полученный из кортежа $\overline{X}$ вычеркиванием компонент, равных пустому множеству, где $m \leqslant n$.

Если f' – ограничение функции f на множестве $S' := (Y_1 \times Y_2) \cup (Y_2 \times Y_3) \cup ... \cup (Y_{m-1} \times Y_m)$ и g', l' – ограничение функций g и l на множестве $A' := Y_1 \cup ... \cup Y_m$, то объект

$$\mathcal{N}' := (Y_1, ..., Y_m, f', g', l')$$

будем называть подсетью сети $\mathcal{N}$. Будем говорить, что кортеж $\overline{X}$ индуцирует подсеть $\mathcal{N}'$. Кортеж $\overline{Y}$ является основным кортежем нейронов подсети $\mathcal{N}'$. В общем случае кортежи $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ могут быть различны.

Таким образом, подсеть нейронной сети (в смысле определения 2) сама является нейронной сетью в смысле приведенного определения 1. Такие подсети получены путем выбрасывания (или выключения) некоторых нейронов из исходной нейронной сети.

Пусть заданы два кортежа $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ и $\overline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ конечных непустых множеств. Тогда через $\overline{X} \cup \overline{Y}$ и $\overline{X} \cap \overline{Y}$ будем обозначать покомпонентное объединение и пересечение $\overline{X} \cup \overline{Y} := (X_1 \cup Y_1, ..., X_n \cup Y_n)$, $\overline{X} \cap \overline{Y} := (X_1 \cap Y_1, ..., X_n \cap Y_n)$.

Приведем определение 1 из [1].

Определение 3. *Пусть определена нейросеть $\mathcal{N}$ с основным кортежем нейронов $\overline{M}$. Множество всевозможных непрерывных кортежей $\overline{X} \subseteq \overline{M}$ будем обозначать символом* $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$.

Полагаем, что $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ – два произвольных элемента из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Определим бинарную алгебраическую операцию $(+)$:

$$\overline{X} + \overline{Y} := \begin{cases} \overline{X} \cup \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \cup \overline{Y} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N}) \\ \overline{\varnothing}, & \text{если } \overline{X} \cup \overline{Y} \notin \mathrm{AGS}(\mathcal{N}). \end{cases}$$

Тогда группоид $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}) := (\mathrm{AGS}(\mathcal{N}), +)$ будем называть аддитивным группоидом подсетей нейронной сети $\mathcal{N}$.

Введем теперь группоид $\mathrm{MGS}(\mathcal{N})$.

Определение 4. *Пусть определена нейросеть $\mathcal{N}$ с основным кортежем нейронов $\overline{M}$. Полагаем, что $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ – два произвольных элемента из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Определим бинарную алгебраическую операцию $(\cdot)$:*

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} := \begin{cases} \overline{X} \cap \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \cap \overline{Y} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N}) \\ \overline{\varnothing}, & \text{если } \overline{X} \cap \overline{Y} \notin \mathrm{AGS}(\mathcal{N}). \end{cases}$$

Тогда группоид $\mathrm{MGS}(\mathcal{N}) := (\mathrm{AGS}(\mathcal{N}), \cdot)$ будем называть мультипликативным группоидом подсетей нейронной сети $\mathcal{N}$.

Множество носитель у группоидов AGS($\mathcal{N}$) и MGS($\mathcal{N}$) одинаковое. Нужно обратить внимание на то, что подсеть нейронной сети по определению 2 строится над непрерывным кортежем, имеющим более одной непустой компоненты (это логично с точки зрения нейросетей). При этом множество AGS($\mathcal{N}$) содержит непрерывные кортежи с одной непустой компонентой и содержит кортеж, составленный из пустых множеств. Наличие таких кортежей в множестве AGS($\mathcal{N}$) удобно по следующим соображениям:

1. непрерывные кортежи с одной непустой компонентой дают удобную систему порождающих элементов аддитивного группоида подсетей AGS($\mathcal{N}$), что упрощает алгебраические исследования этого группоида;

2. непрерывные кортежи с одной непустой компонентой легко отделяются из множества всех непрерывных кортежей AGS($\mathcal{N}$);

3. кортеж пустых множеств является удобным индикатором того, что из подсетей индуцированных кортежами $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ нельзя получить новую подсеть с помощью объединения или пересечения этих кортежей, если $\overline{X}+\overline{Y}=\overline{\varnothing}$ и $\overline{X}\cdot\overline{Y}=\overline{\varnothing}$;

4. кортеж пустых множеств является нейтральным элементом аддитивного группоида подсетей AGS($\mathcal{N}$) и обладает мультипликативным свойством нуля в группоиде MGS($\mathcal{N}$) (т.е. $\overline{X}\cdot\overline{\varnothing}=\overline{\varnothing}\cdot\overline{X}=\overline{\varnothing}$ для любого $\overline{X}$).

Пусть $d(\overline{X})$ – число непустых компонентов в кортеже $\overline{X}$. Полагаем, что $\overline{X},\overline{Y},\overline{U},\overline{V}$ – некоторые кортежи из множества AGS($\mathcal{N}$). Если выполняются условия $d(\overline{X}+\overline{Y})>1$, $d(\overline{U}\cdot\overline{V})>1$, то кортежи $\overline{X}+\overline{Y}$ и $\overline{X}\cdot\overline{Y}$ индуцируют подсети нейронной сети $\mathcal{N}$ путем объединения и пересечения кортежей нейронов.

Группоиды MGS($\mathcal{N}$) и AGS($\mathcal{N}$) коммутативны. Но в общем случае не ассоциативны (для группоида AGS($\mathcal{N}$) см. утверждение 2 из работы [1]). Для группоида MGS($\mathcal{N}$) справедливо

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{N}$ – нейронная сеть такая, что $n(\mathcal{N})>2$ и ее второй слой M_2 содержит более одного элемента. Тогда группоид* MGS($\mathcal{N}$) *не обладает ассоциативностью.*

В самом деле, пусть $b,m\in M_2$, $b\neq m$ и в AGS($\mathcal{N}$) определим три кортежа

$$\overline{X}=(\{a\},\{b\},\{c\},\varnothing,\varnothing,...,\varnothing),\quad \overline{Y}=(\{a\},\{m\},\{c\},\varnothing,\varnothing,...,\varnothing),\quad \overline{Z}=(\varnothing,\varnothing,\{c\},\varnothing,\varnothing,...,\varnothing).$$

Тогда справедливы равенства

$$(\overline{X}\cdot\overline{Y})\cdot\overline{Z}=\overline{\varnothing}\cdot\overline{Z}=\overline{\varnothing};\quad \overline{X}\cdot(\overline{Y}\cdot\overline{Z})=\overline{X}\cdot\overline{Z}=\overline{Z},$$

которые показывают справедливость утверждения 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литаврин А. В. Эндоморфизмы конечных коммутативных группоидов, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распределения // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Том 27, № 1. 130–145. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-130-145

2. Литаврин А. В. Об эндоморфизмах аддитивного моноида подсетей двухслойной нейронной сети // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Том 39. С. 111–126. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.111

3. Головко В. А., Краснопрошин В. В. Нейросетевые технологии обработки данных. – Минск: БГУ, Классическое университетское издание, 2017. 263 с.

4. Горбань А. Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сиб. журн. вычисл. матем. 1998. Том 1, № 1. С. 11–24.

———————————————————————————————

УДК 512.548.2

Эндоморфизмы и антиэндоморфизмы некоторых группоидов

А. В. Литаврин (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: anm11@rambler.ru
С. Г. Захаржевская (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: zvt-zhrj@yandex.ru

Endomorphisms and anti-endomorphisms of some groupoids

A. V. Litavrin (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: anm11@rambler.ru
S. G. Zakhorzhevskaya (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: zvt-zhrj@yandex.ru

В работе [1] были введены группоиды $\mathfrak{S}(k,q)$ порядка $k+k^2$ и порождающим множеством из k элементов. Там же изучались автоморфизмы этих группоидов. В частности, было установлено, что всякая конечная группа G будет изоморфна некоторой подгруппе группы всех автоморфизмов подходящего группоида $\mathfrak{S}(|G|,q)$. В [2] исследовались эндоморфизмы группоидов $\mathfrak{S}(k,q)$. Было получено поэлементное описание множества всех эндоморфизмов $\mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q))$, установлены некоторые структурные свойства моноида $\mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q))$ и показано, что всякий конечный моноид может быть изоморфно вложен в моноид $\mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q))$ для подходящего группоида $\mathfrak{S}(k,q)$.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{A}=(A,*)$ – некоторый группоид. Тогда антиэндоморфизмом группоида $\mathfrak{A}$ называем отображение $\phi: A\to A$, если для любых $x,y\in A$ выполняется равенство*

$$(x*y)^{\phi}=y^{\phi}*x^{\phi}. \tag{1}$$

Если антиэндоморфизм ϕ является биекцией множества A на множество A, то ϕ называют антиавтоморфизмом группоида $\mathfrak{A}$.

Множество всех антиэндоморфизмов группоида $\mathfrak{A}$ в данной работе будем обозначать символом $\mathrm{Aend}(\mathfrak{A})$. Множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{A})$ не обязано быть замкнутым относительно композиции отображений.

Антиэндоморфизмы группоидов $\mathfrak{S}(k,q)$ изучались в работе [3]. Было установлено поэлементное описание антиэндоморфизмов. Множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ достаточно сложно устроено. Некоторые антиэндоморфизмы данного группоида являются эндоморфизмами. При этом группоид $\mathfrak{S}(k,q)$ можно выбрать так, что множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ будет содержать антиэндоморфизм, который не является эндоморфизмом. Можно построить группоид $\mathfrak{S}(k,q)$ такой, что множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ будет замкнутым относительно композиции отображений и состоять из эндоморфизмов этого группоида (см. пример 3.3 из [3]).

Данная работа направлена на изучение эндоморфизмов и антиэндоморфизмов группоидов $\mathfrak{S}(X,l,r)$ (будут введены ниже), которые обобщают группоиды $\mathfrak{S}(k,q)$.

Прежде чем ввести группоиды $\mathfrak{S}(X,l,r)$, для удобства читателя, приведем определение группоида $\mathfrak{S}(k,q)$. Как обычно, S_k – симметрическая группа перестановок множества $\{1,...,k\}$.

Определение 2. *Пусть определены следующие объекты:*

1. k – некоторое натуральное число;

2. попарно различные символы $a_1, ..., a_k$ и b_{ij} $(i, j = 1, ..., k)$;

3. множества

$$M := \{a_1, ..., a_k\},\ V := M \cup \{b_{ij} \mid i, j \in \{1, ..., k\}\},\ S_k^m := \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) \mid \varepsilon_i \in S_k,\ i = 1, ..., m\};$$

4. кортеж $q = (\beta_1, ..., \beta_k, \beta'_1, ..., \beta'_k) \in S_k^{2k}$;

5. бинарная алгебраическая операция $(*)$ на множестве V такая, что для любых $m, v, s, i, j \in \{1, ..., k\}$ справедливы равенства:

$$a_i * a_j = b_{ij},\ a_s * b_{ij} = b_{\beta_s(i),\beta_s(j)},\ b_{ij} * a_s = b_{\beta'_s(i),\beta'_s(j)},\ b_{mv} * b_{ij} = b_{mj}.$$

Тогда через $\mathfrak{S}(k, q) = (V, *)$ обозначим группоид с множеством носителем V и бинарной алгебраической операцией $(*)$.

Пусть X – некоторое непустое множество. Тогда через $S(X)$ обозначим симметрическую группу перестановок множества X. Если $w : X \to S(X)$ некоторое отображение из X в $S(X)$ и $x, y \in X$, то через $(w(x))(y)$ будем обозначать образ элемента $y \in X$ под действием отображения $w(x) \in S(X)$. Сформулируем теперь определение группоида $\mathfrak{S}(X, l, r)$.

Определение 3. *Пусть X – произвольное непустое множество и $X \times X$ – декартов квадрат множества X. Полагаем, что заданы два отображения $l:\ X \to S(X)$ и $r:\ X \to S(X)$, которые всякому элементу множества X ставят в соответствие некоторое отображение из $S(x)$. Тогда введем обозначение $V := X \cup (X \times X)$. На множестве V введем бинарную алгебраическую операцию $(*)$ такую, что для любых $x, y, u, v \in X$ выполняются равенства*

$$x * y = (x, y), \quad (x, y) * (u, v) = (x, v), \quad x * (u, v) = ((l(x))(u), (l(x))(v)),$$

$$(u, v) * x = ((r(x))(u), (r(x))(v)).$$

Группоид $(V, *)$ будем обозначать символами $\mathfrak{S}(X, l, r) := (V, *)$ и называть (l, r)–группоидом.

Пусть $X = \{1, ..., k\}$. Тогда группоид $\mathfrak{S}(X, l, r)$ изоморфен группоиду $\mathfrak{S}(k, q)$ такому, что кортеж q удовлетворяет равенству $q = (l(1), l(2), ..., l(k), r(1), r(2), ..., r(k))$. Изоморфизм будет осуществлять отображение α, заданное правилом

$$\alpha:\ x \to a_x\ \ (x \in X);\ \ (x, y) \to b_{xy}\ \ (x, y \in X).$$

В общем случае группоид $\mathfrak{S}(X, l, r)$ может строиться над любым непустым множеством X. Поэтому группоиды $\mathfrak{S}(X, l, r)$ можно считать обобщением группоидов $\mathfrak{S}(k, q)$.

Нужно отметить, что в определение группоидов $\mathfrak{S}(k, q)$ существенным является условие, что кортеж q составлен из перестановок из S_k. В работах [1],[2] и [3] это условие используется для получения всех основных результатов. Если бы кортеж q был составлен из произвольных преобразований из симметрической полугруппы, то изучаемые множества всех автоморфизмов, эндоморфизмов и антиэндоморфизмов были бы устроены по-другому (очевидно, гораздо сложнее).

Эндоморфизмы группоида $\mathfrak{S}(X, l, r)$. Через $I(X)$ будем обозначать симметрическую полугруппу преобразований множества X.

В симметрической полугруппе перестановок $I(X)$ выделим множество $A(l, r)$ отображений α таких, что для любых $x, y \in X$ выполняются равенства

$$\alpha((l(x))(y)) = (l(\alpha(x)))(\alpha(y)), \quad \alpha((r(x))(y)) = (r(\alpha(x)))(\alpha(y)).$$

Введем обозначение $A_{aut}(l,r) := A(l,r) \cap S(X)$.

Выделим в симметрической полугруппе перестановок $I(X)$ множество $A'(l,r)$ отображений α таких, что для любых $x, y \in X$ выполняются равенства

$$\alpha((l(x))(y)) = (r(\alpha(x)))(\alpha(y)), \quad \alpha((r(x))(y)) = (l(\alpha(x)))(\alpha(y)).$$

Можно доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $\alpha \in A(l,r)$. Тогда отображение ϕ_α, заданное правилом*

$$\phi_\alpha : \ x \to \alpha(x) \ \ (x \in X); \ \ (x,y) \to (\alpha(x), \alpha(y)) \ \ (x, y \in X)$$

является эндоморфизмом группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$. Кроме того, если $\alpha \in A_{aut}(l,r)$, то ϕ_α является автоморфизмом группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$.

Утверждение 2. *Пусть $\alpha \in A'(l,r)$. Тогда отображение ϕ'_α, заданное правилом*

$$\phi'_\alpha : \ x \to \alpha(x) \ \ (x \in X); \ \ (x,y) \to (\alpha(y), \alpha(x)) \ \ (x, y \in X)$$

является антиэндоморфизмом группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$.

Утверждение 3. *Для каждого элемента $(x,y) \in X \times X$ отображение $\zeta_{(x,y)}$, заданное правилом*

$$\zeta_{(x,y)} : \ x \to (x,y) \ \ (x \in X); \ \ (u,v) \to (x,y) \ \ (u, v \in X)$$

является эндоморфизмом группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$. Кроме того, отображение $\zeta_{(x,y)}$ является антиэндоморфизмом группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$.

Утверждение 4. *Пусть $s \in X$ такой, что $(l(s))(s) = (r(s))(s) = s$ и X' – произвольное непустое подмножество множества X, отличное от X. Тогда отображение $\rho[s, X']$ действующее по правилу*

$$\rho[s, X'] : \ x \to s \ (x \in X'); \ \ y \to (s,s) \ (y \in X \setminus X'); \ (u,v) \to (s,s) \ (u, v \in X)$$

является эндоморфизмом группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$. Кроме того, отображение $\rho[s, X']$ является антиэндоморфизмом группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$.

Эндоморфизмы ϕ_α и $\zeta_{(x,y)}$ существуют для каждого группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$, а эндоморфизм $\rho[s, X']$ нет. У данных эндоморфизмов существуют аналоги для случая $\mathfrak{S}(k,q)$ (см. [2] эндоморфизмы (2.3),(2.4) и (2.5)). Антиэндоморфизмы ϕ'_α, $\zeta_{(x,y)}$ и $\rho[s, X']$ имеют свои аналоги для случая $\mathfrak{S}(k,q)$ (см. [3] теорему 2.1).

Можно доказать утверждение

Утверждение 5. *Всякий моноид можно изоморфно вложить в моноид* $\mathrm{End}(\mathfrak{S}(X,l,r))$ *всех эндоморфизмов подходящего группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$.*

Учитывая сходства группоидов $\mathfrak{S}(X,l,r)$ и $\mathfrak{S}(k,q)$, а также теорему 1 из [2] и теорему 2.1 из [3], можно сформулировать следующие гипотезы.

Гипотеза 1. *Множество всех эндоморфизмов группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$ состоит из всевозможных эндоморфизмов ϕ_α, $\zeta_{(x,y)}$ и $\rho[s, X']$, и только из них.*

Гипотеза 2. *Множество всех антиэндоморфизмов группоида $\mathfrak{S}(X,l,r)$ состоит из всевозможных антиэндоморфизмов ϕ'_α, $\zeta_{(x,y)}$ и $\rho[s, X']$, и только из них.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литаврин А. В. Автоморфизмы некоторых магм порядка $k + k^2$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2018. Т. 26. С. 47–61. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.47
2. Litavrin A. V. Endomorphisms of Some Groupoids of Order $k+k^2$ // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 32. pp. 64-78. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.64
3. Литаврин А. В. Эндоморфизмы и антиэндоморфизмы некоторых конечных группоидов // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 76–95. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.76-95

———————————————————————

УДК 512.579

Об определимости псевдомногообразий унаров

А. Л. Расстригин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

On characterization of pseudovarieties of monounary algebras

A. L. Rasstrigin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Псевдомногообразием называется класс конечных алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов, подалгебр и конечных (с конечным числом множителей) прямых произведений [1]. Примером псевдомногообразия будет являться класс всех конечных алгебр из некоторого многообразия. Но не каждое псевдомногообразие может быть представлено таким образом, т. е. определено с помощью некоторого множества тождеств. В то же время известно, что для произвольного псевдомногообразия всегда существует такая бесконечная последовательность тождеств, что алгебра принадлежит этому псевдомногообразию лишь когда на ней выполнены почти все (за исключением конечного числа) эти тождества [2]. Кроме этого, псевдомногообразие может быть определено с помощью псевдотождеств [3].

Псевдотождеством на классе C называется формальное равенство двух неявных операций. *Неявная n-арная операция* π на классе C ставит каждому $X \in C$ в соответствие функцию $\pi_X\colon X^n \to X$ так, что для любого гомоморфизма $\phi\colon A \to B$ алгебр $A, B \in C$ имеет место $\phi(\pi_A(x_1, \ldots, x_n)) = \pi_B(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in A$.

Отличие тождеств от псевдотождеств в том, что для псевдомногообразий можно говорить о базисах псевдотождеств аналогично тому, как говорят о базисах тождеств для многообразий [4].

Алгебра называется *унарной*, если все ее основные операции являются унарными. Унарные алгебры с одной операцией называются *унарами*.

Теорема 1 ([5]). *Любое многообразие унаров определяется одним тождеством.*

Псевдомногообразия унаров описываются [3] в качестве примера применения теории. Небольшим замечанием к этому результату мы отметим то, что базис псевдотождеств может состоять из одного элемента.

Теорема 2. *Любое псевдомногообразие унаров определяется одним псевдотождеством.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eilenberg S. Automata, languages, and machines. Vol. B. Academic Press, New York, 1976.
2. Ash C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // Journal of Algebra. 1985. Vol. 92, no. 1. P. 104–115.
3. Reiterman J. The Birkhoff theorem for finite algebras // Algebra Universalis. 1982. Vol. 14, no. 1. P. 1–10.
4. Almeida J. Equations for pseudovarieties // Lecture Notes in Computer Science. 1989. Vol. 386. P. 148–164.
5. Jacobs E., Schwabauer R. The lattice of equational classes of algebras with one unary operation // The American Mathematical Monthly. 1964. Vol. 71, no. 2. P. 151–155.

УДК 519.766

Палиндромы Штурма и одномерная фактординамика

И. А. Решетников (Россия, г. Москва)
Московский физико-технический институт
e-mail: reshetnikov.ivan@phystech.edu

Sturmian palindroms and one-dimentional factordynamics

I. A. Reshetnikov (Russia, Moscow)
Moscow Institute of Physics and Technology
e-mail: reshetnikov.ivan@phystech.edu

1. Введение

Двусторонне-бесконечное слово w — это отображение $\mathbb{Z} \to A$, где A — алфавит слова w. Будем обозначать $w(n)$ через w_n.

Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U), где M — окружность; U — дуга угловой меры α (α иррациональное); R_α — функция эволюции, поворот на α относительно центра окружности (угловую меру всей окружности считаем единицей); x_0 — начальная точка, начало дуги α. Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w — эволюцию точки x_0. Такие слова называются механическими.

Двусторонне-бесконечное слово w называется *палиндромом*, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем $w_n = w_{-n}$ (палиндром, симметричный относительно буквы) или $w_n = w_{1-n}$ (палиндром, симметричный относительно середины слова).

Правосторонне-бесконечное слово w над алфавитом A называется *чисто подстановочным*, если оно представляется в виде $w = \varphi^\infty(a)$, где $a \in A$ — буква, а φ — подстановка, такая, что $\varphi(a) = aU$, где $U \in A^*$ непустое.

Слово w называется подстановочным, если получается из чисто подстановочного слова w' подстановкой h, примененной к слову w': $w = h(w')$. Тогда $\varphi(\varphi(a)) = aU\varphi(U)$, $\varphi(\varphi(\varphi(a))) = aU\varphi((U\varphi(U))$ и т.д. Предельным переходом получаем $w = \varphi^\infty(a)$.

Понятия *подстановочности и чистой подстановочности слов, бесконечных в обе стороны*, вводятся аналогично с той лишь разницей, что для двусторонне-бесконечного подстановочного слова подстановка должна обладать свойством $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$. Тогда двусторонне-бесконечное слово w является конкатенацией левосторонне-бесконечного подстановочного слова (позиции от $-\infty$ до 0 включительно)и правосторонне-бесконечного подстановочного слова (позиции большие нуля) и представимо в виде $w = \varphi^{\infty}(a|b)$.

Интерес предствляет вопрос, будет ли фактор-динамика подстановочной системы подстановочна. Мы решаем этот вопрос для размерности 1 (мотивировки задач и подробности — см. [1–3]).

2. Индукция Рози

Метод индукции Рози [4] позволяет перейти от изучения некоторых механических слов к изучению цепных дробей. Его можно сформулировать следующим образом.

Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U), где M — окружность, U — дуга угловой меры α (α иррациональное), R_α — поворот на α относительно центра окружности (угловую меру всей окружности считаем единицей), или функция эволюции, x_0 — начальная точка, начало дуги α. Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w — эволюцию точки x_0.

Требование иррациональности числа α продиктовано периодичностью сдвигов на рациональный угол, тривиальный случай мы не разбираем.

Метод индукции Рози состоит в следующем. Мы преобразуем символическую динамику (M, R_α, x_0, U) в символическую динамику $(\tilde{M}, \tilde{R_\alpha}, \tilde{x_0}, \tilde{U})$ по следующим правилам.

1. Если $\alpha < \dfrac{1}{2}$, то в слове w после a всегда следует b. Поэтому слово w получается из слова $\tilde{w}$ заменой $a \to ab; b \to b$. Возьмем $\tilde{M}$ — окружность длиной $1 - \alpha$. Более наглядно: мы вырезаем из окружности M дугу длиной α (следующую за выделенной дугой U). Тогда слово $\tilde{w}$ будет порождаться символической динамикой $(\tilde{M}, \tilde{R_\alpha} = R_\alpha, \tilde{x_0} = x_0, U = \tilde{U})$.

2. Если же $\alpha > \dfrac{1}{2}$, то заменим a на b и наоборот. Для этого следует положить $\tilde{U} = M \backslash U$.

Можно заметить, что описанный алгоритм аналогичен алгоритму разложения α в цепную дробь. Таким образом, если α — квадратичная иррациональность (ее цепная дробь периодична), то в какой-то момент мы получим символическую динамику, эквивалентную уже встречавшейся, а значит, можем записать подстановку, с помощью которой можно получить слово w. Обозначим через φ композицию подстановок, образующих период, а через ψ комозицию подстановок, образующих предпериод. Слово w представимо в виде $w = \psi \circ \varphi^{\infty}(a)$, т.е. подстановочно. Если же предпериод отсутствует, то слово w чисто подстановочное.

Если же α — не квадратичная иррациональность, то процесс не зациклится, но в любом случае можно будет изучать свойства цепной дроби α и соотносить их со свойствами слова w.

3. Критерий подстановочности палиндромных слов Штурма

Есть всего три двусторонне-бесконечных палиндрома, являющихся механическими словами параметра α. Это слова, отвечающие серединам дуг, и слово, получающееся из точки, которая при первом повороте переходит в точку, симметричную ей относительно оси симметрии динамической системы. Палиндромы, получающиеся из середин дуг, симметричны относительно своей буквы, а третий палиндром симметричен относительно междубуквия.

3.1. Аналог индукции Рози для палиндромов. Докажем следующий критерий подстановочности палиндромов Штурма. Полагаем алфавит $A = \{0, 1\}$.

Теорема 1. *Критерий подстановочности палиндромов Штурма. Символическая динамика (M, R_α, x_m, U), где x_m — середина дуги U длиной α на окружности M длиной 1 порождает подстановочный двусторонне-бесконечный палиндром p тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность.*

Так как наше преобразование окружности обратимо, то можно говорить и о двусторонне-бесконечных словах, порождаемых символической динамикой, в частности о словах-палиндромах. Доказательство будет основано на сходстве некоторого алгоритма с индукцией Рози.

Доказательство. Необходимость: если слово p является подстановочным, то α — квадратичная иррациональность. Пусть подстановка φ порождает слово p. Пусть при действии порождающей подстановки φ 0 переходит в слово с a нулями и b единицами, а 1 переходит в слово с c нулями и d единицами. Тогда, так как p — неподвижная точка подстановки φ, а α — доля числа единиц, получаем квадратичное относительно α уравнение

$$\alpha = \frac{b(1-\alpha) + d\alpha}{(a+b)(1-\alpha) + (c+d)\alpha},$$

значит, α — квадратичная иррациональность.

Достаточность: если α — квадратичная иррациональность, то слово p подстановочно. Пусть есть бесконечное слово Штурма p — палиндром над алфавитом $\{0, 1\}$. Пусть в нем доля единиц равна α. Если нулей меньше, чем единиц, то сделаем подстановку $E : 0 \leftrightarrow 1$. Остается расписать действия алгоритма при $\alpha < \frac{1}{2}$. Так как p является словом Штурма и $\alpha < \frac{1}{2}$, то в нем не могут встретиться две единицы подряд. Возможно несколько случаев.

1. Слово p симметрично относительно 1. Будем относить 1 к левой половине слова p. Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то перед каждой единицей идет нуль. Значит, слово p получается подстановкой $G : 1 \to 01; 0 \to 0$ из некоторого слова p', причем подстановка подобрана так, что левая и правая части слова p получаются из левой и правой частей слова p'. Так как количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, а больше ничего не произошло, то слово p' также является палиндромом, симметричным относительно 1.

2. Слово p симметрично относительно 0. Будем относить 0 к левой половине слова p. Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то после каждой единицы идет нуль. Значит, слово p получается подстановкой $\tilde{G} : 1 \to 10; 0 \to 0$ из некоторого слова p'. Левая и правая части слова p получаются соответственно из левой и правой частей слова p'. Количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, поэтому слово p' также является палиндромом, но на этот раз симметричным относительно середины слова.

3. Слово p симметрично относительно середины слова. Тогда буквы w_0 и w_1 должны быть нулями; слово p получается подстановкой G из некоторого слова p', при этом слово p' симметрично относительно нуля.

В нашем случае α — квадратичная иррациональность. При действии приведенного алгоритма α претерпевает такие же изменения, как и в индукции Рози, а значит, так как α — квадратичная иррациональность, то доля единиц α начиная с некоторого момента будет изменяться периодически. Для каждого α возможны лишь три варианта симметричности, три различных палиндрома. Поэтому возможно лишь конечное число пар (α, j), где j — номер варианта симметричности. Для каждой пары однозначно определен переход согласно алгоритму к некоторой другой паре. Поэтому процесс и в общем случае также цикличен. Из цикличности процесса следует, что палиндром p подстановочен, как и в случае с обычной индукцией Рози. Критерий доказан.

4. Чистая подстановочность двусторонне-бесконечного палиндрома Фибоначчи — Штурма

Если мы предъявим подстановку φ, оставляющую на месте слово w, такую, что $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$ для каких-то непустых слов U и W, то двусторонне-бесконечное слово w будет являться чисто подстановочным.

Теорема 2. *Если подстановка $\varphi:\ 0 \to 00101, 1 \to 001$ оставляет на месте палиндром w и обладает свойствами $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$, то двусторонне-бесконечный палиндром w, симметричный относительно 1 для $\alpha = \phi$ (здесь ϕ — золотое сечение), получается при помощи этой подстановки, т.е. $w = \varphi^{\infty}(1|0)$.*

5. Фактор-динамика прыжков по окружности

Пусть есть динамическая система (M, R_α, x_0, U). Фактор-динамика получается отождествлением точек, различающихся на $\frac{m}{n}$, где n фиксировано, а $m \in \mathbb{N}$. Такая обобщенная точка будет правильным n-угольником. Тогда попаданий в выделенную дугу может быть либо

$$k = \left[\frac{\alpha}{1/n}\right] = [n\alpha],$$

либо на 1 больше для каждой обобщенной точки. Будем писать a, если их $k+1$, и b иначе. Обозначим эту фактор-динамику через $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$.

Теорема 3. *Если слово w, порожденное символической динамикой (M, R_α, x_0, U), подстановочное, то и слово w', порожденное символической фактор-динамикой $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$, подстановочное.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belov A.Ya., Kondakov G.V., Mitrofanov I. Inverse problems of symbolic dynamics // Algebraic methods in dynamical systems. Dedicated to Michael Singer on his 60th birthday. Bedlewo, Poland, May 16–22, 2010. Vol. 94. Warszawa: Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Banach Center Publ., 2011, 43–60.

2. Mitrofanov I. On uniform recurrence of HD0l systems // arXiv:1111.1999

3. Мучник Ан. А., Притыкин Ю. Л., Семенов А. Л. Последовательности, близкие к периодическим // Успехи матем. наук. 2009.**64**, №5 (389) 21–96.

4. Rauzy G. Échanges d'intervalles et transformations induites // Acta Arithm. 1979.**34**, 315–328.

УДК 512.579

Конечные полиномиально полные алгебры в одном классе алгебр с оператором и основной операцией большинства

В. Л. Усольцев (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

Finite polynomially complete algebras in one class of algebras with an operator and the main majority operation

V. L. Usoltsev (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: usl2004@mail.ru

Обозначим через $O^n(A)$ совокупность всех n-арных операций на непустом множестве A. Положим $O(A) = \{O^n(A) \mid n \geqslant 0\}$. Если $f \in O^n(A)$ и $g_1, \dots g_n \in O^m(A)$, то определим композицию $f(g_1, \dots g_n) \in O^m(A)$ по правилу

$$[f(g_1, \dots g_n)](x_1, \dots x_m) = f(g_1(x_1, \dots x_m), \dots g_n(x_1, \dots x_m))$$

для всех $x_1, \dots x_m \in A$.

Клоном операций на множестве A называется система конечноместных операций на A, замкнутая относительно композиций и содержащая проекции $p_{in}(x_1, \dots x_n) = x_i$.

Пусть A — универсальная алгебра сигнатуры Ω и $\mathrm{T}(A)$ — наименьший клон операций на A, содержащий Ω. Операции из $\mathrm{T}(A)$ называются термальными (главными производными).

Операция f арности n на A называется полиномиальной (производной), если существует такая $(n+m)$-арная термальная операция g сигнатуры Ω и такие элементы $a_1, \dots, a_m \in A$, что для всех $x_1, \dots, x_n \in A$ выполнено $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$.

Клон $\mathrm{Pol}(A)$ полиномиальных операций на алгебре A сигнатуры Ω есть минимальный клон, содержащий Ω и все нульарные операции на A.

Неодноэлементная алгебра A называется полиномиально полной (функционально полной), если клон полиномиальных операций $\mathrm{Pol}(A)$ совпадает с клоном $O(A)$ всех операций на A.

В [1] дается обзор результатов по полиномиально полным алгебрам. Полиномиальная полнота является полезным свойством при построении перспективных криптосистем (см. [2]).

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Унарные операции из Ω_2 называются операторами.

Через C_h^t, где $h \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, обозначается унар $\langle A, f\rangle$ с порождающим элементом a, заданный определяющим соотношением $f^t(a) = f^{t+h}(a)$. Унар C_n^0 называется циклом длины n. Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их суммой.

Тернарная операция $d(x,y,z)$ называется операцией большинства (см., напр., [3]), если она удовлетворяет тождествам $d(x,x,y) = d(y,x,x) = d(x,y,x) = x$. Операция большинства является тернарным вариантом операции почти единогласия, то есть операции φ, для которой выполняются тождества $\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \ldots = \varphi(y, x, \dots, x) = x$. В [4] рассматриваются полиномиально полные алгебры в многообразиях, имеющих полиномиальную операцию большинства.

В [5] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так задать мальцевскую операцию $p(x,y,z)$, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. В [6] полностью описаны полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, p, f\rangle$.

На основе подхода, предложенного в [5], на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задается операция большинства $m(x,y,z)$, перестановочная с f (см. [7], [8]). Эта операция определяется следующим образом. Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x,y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x,y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$m(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $\langle A, m, f\rangle$ — конечная неодноэлементная алгебра с оператором f и тернарной операцией m, заданной по правилу (1). Алгебра $\langle A, m, f\rangle$ является полиномиально полной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) $\langle A, f\rangle$ изоморфен конечной сумме циклов;

(ii) $|A| \geqslant 3$, $\langle A, f\rangle$ конечно порожден и содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов В. А. Полиномиально полные алгебры // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 23–29.

2. Галатенко А. В., Панкратьев А. Е., Родин С. Б. Полиномиальная полнота конечных квазигрупп // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. Т. 23. Вып. 1. С. 81-87.

3. Szendrei A. Clones in universal algebra. — Montréal: Les presses de l'Université de Montréal, 1986. 166 p.

4. Chajda I. A note on functionally complete algebras // Archivum Mathematicum. 1981. V. 17, No. 3. P. 139–140.

5. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Международный семинар «Универсальная алгебра и ее приложения», посвященный памяти профессора Л. А. Скорнякова: тезисы докладов (Волгоград, 6-11 сентября 1999 г.). — Волгоград, 1999. С. 31–32.

6. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.

7. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 4(60). С. 157–166.

8. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.

———————————————————————————

УДК 512. 548

Преобразования слов с помощью n-квазигрупповых операций

Н. А. Щучкин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Word transformations using n-quasigroup operations

N. A. Shchuchkin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Известно применение квазигрупп (латинских квадратов) для преобразования слов в заданном алфавите (см., например, [1], [2], [3]). Мы будем применять n-квазигруппы ([4], стр. 6) для преобразования слов, где $n \geq 3$.

Напомним, n-квазигрупповой операцией на множестве Q называют n-арную операцию f на этом множестве, которая является биективным отображением по каждому из n аргументов при фиксации любых остальных $n-1$ аргументов [5]. Большое количество n-квазигрупповых операций на заданном конечном множестве позволяет использовать эти операции для шифрования слов в выбранном алфавите. В работе [6] для шифрования слов использовались квазигрупповые операции. По аналогии рассмотрим использование n-квазигрупповых операций для $n \geq 3$.

Выбираем конечную n-квазигруппу $\langle Q, f\rangle$, где $Q = \{a_1, \dots, a_k\}$. Этой n-квазигруппе соответствует n-мерная матрица k-го порядка $B = (b_{j_1 j_2 \dots j_n} | j_1, j_2, \dots, j_n = 1, 2, \dots, k)$ ([7], стр. 5), где $b_{j_1 j_2 \dots j_n} = f(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$ (в работе [5] эту матрицу называют латинским гиперкубом), причем, в силу однозначной разрешимости уравнения

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = a_i \tag{1}$$

для любого индекса $i = 1, \dots, n$, в строках направления (i) стоят разные элементы из Q. Указанное соответствие будет взаимно однозначным. При $n = 2$ квазигруппе $\langle Q, \cdot\rangle$ соответствует латинский квадрат k-го порядка. С помощью любого латинского квадрата можно задать различные латинские гиперкубы, используя следующий факт.

Теорема 1. *На любой конечной квазигруппе $\langle Q, \cdot\rangle$ для выбранных перестановок $\theta_1, \dots, \theta_n$ на множестве Q задается n-квазигруппа $\langle Q, f\rangle$, где n-арная операция f действует по правилу*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \theta_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \theta_n(x_n)$$

Обозначим через $Q^+ = \{x_1 \dots x_m | x_i \in Q, m \geq 1\}$ множество всех слов в алфавите $Q = \{a_1, \dots, a_k\}$. На множестве Q^+ в работах [8], [9] уже рассматривались преобразования слов с помощью n-квазигрупп. Здесь мы рассмотрим другие преобразования строк, также используя n-квазигруппы. Для фиксированного набора элементов $\alpha = (a_1, \dots, a_{n-1})$ из Q на множестве Q^+ определим отображение

$$F_\alpha(x_1 \dots x_m) = y_1 \dots y_m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_i = f(a_1, \dots, a_{r-1}, x_i, a_r, \dots, a_{n-1}), & \text{если } i \text{ при делении на } n \text{ дает в остатке } r \neq 0; \\ y_i = f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_i), & \text{если } i \text{ делится на } n. \end{cases} \tag{2}$$

Если $F_\alpha(x_1 \dots x_m) = F_\alpha(x'_1 \dots x'_m) = y_1 \dots y_m$ для некоторых слов $x_1 \dots x_m, x'_1 \dots x'_m$, то $y_i = f(a_1, \dots, a_{r-1}, x_i, a_r, \dots, a_{n-1}) = f(a_1, \dots, a_{r-1}, x'_i, a_r, \dots, a_{n-1})$, если i при делении на n дает в остатке $r \neq 0$, и $y_i = f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_i) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, x'_i)$, если i делится на n, а значит, в силу однозначности решения уравнения (1), получим $x_1 \dots x_m = x'_1 \dots x'_m$, т.е. отображение F_α инъективно. Далее, для любого слова $y_1 \dots y_m$ из Q^+ обозначим x_i (i=1,...,m) решение уравнения $f(a_1, \dots, a_{r-1}, x, a_r, \dots, a_{n-1}) = y_i$, если i при делении на n дает в остатке $r \neq 0$, и $f(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = y_i$, если i делится на n. Тогда $F_\alpha(x_1 \dots x_m) = y_1 \dots y_m$, т.е. отображение F_α сюръективно. Итак, F_α — биективное отображение.

Найдем обратное отображение для F_α. В силу однозначной разрешимости уравнений (1), на множестве Q определим еще n n-арных операций g_j по правилу

$$g_j(b_1, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_n) = c \Leftrightarrow f(b_1, \dots, b_{j-1}, c, b_{j+1}, \dots, b_n) = b_j.$$

Операции f и $g_1, \dots, g_n$ связаны тождествами

$$g_j(x_1, \dots, x_{j-1}, f(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n) =$$

$$= y = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, g_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n), x_{j+1}, \ldots, x_n), \tag{3}$$

Для набора элементов α на множестве Q^+ определим отображение

$$G_\alpha(y_1 \ldots y_m) = x_1 \ldots x_m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_i = g_r(a_1, \ldots, a_{r-1}, y_i, a_r, \ldots, a_{n-1}), & \text{если } i \text{ при делении на } n \text{ дает в остатке } r \neq 0; \\ x_i = g_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, y_i), & \text{если } i \text{ делится на } n. \end{cases} \tag{4}$$

которое также будет биективным. Согласно (3) имеем равенства

$$G_\alpha(F_\alpha(\beta)) = \beta = F_\alpha(G_\alpha(\beta)) \tag{5}$$

для любого слова $\beta \in Q^+$, т.е. отображение G_α является обратным для отображения F_α.

Далее рассмотрим композицию s отображений вида (2). Выбираем n-квазигрупповые операции $f_1, f_2, \ldots, f_s$ на множестве Q и для заданных наборов элементов $\alpha_j = (a_{1j}, \ldots, a_{n-1j})$ из Q, $j = 1, 2, \ldots, s$, на множестве Q^+ определяем соответственно отображения $F^{(1)}_{\alpha_1}, F^{(2)}_{\alpha_2}, \ldots, F^{(s)}_{\alpha_s}$ по правилу (2), затем строим композицию $F_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1} = F^{(s)}_{\alpha_s} \circ F^{(s-1)}_{\alpha_{s-1}} \circ \ldots \circ F^{(1)}_{\alpha_1}$. Обратным отображением для отображения $F_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1}$ будет композиция $G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = G^{(1)}_{\alpha_1} \circ G^{(2)}_{\alpha_2} \circ \ldots \circ G^{(s)}_{\alpha_s}$, где отображения $G^{(j)}_{\alpha_j}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, построены в соответствии с отображениями $F^{(j)}_{\alpha_j}$ также, как G_α построено по отображению F_α. Отображение $F_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1}$ можно использовать для шифрования текстов в алфавите Q. Ключом при таком шифровании будет набор n-квазигрупповых операций $f_1, f_2, \ldots, f_s$.

Теорема 2. *Пусть $b_1 \ldots b_m$ – слово в алфавите $Q = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Для любых n-квазигрупповых операций $f_1, f_2, \ldots, f_s$ на множестве Q и для любых наборов элементов $\alpha_j = (a_{1j}, \ldots, a_{n-1j})$ из Q, $j = 1, 2, \ldots, s$, найдется единственное слово $d_1 \ldots d_m$ в алфавите Q такое, что верно равенство*

$$F_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1}(d_1 \ldots d_m) = b_1 \ldots b_m. \tag{6}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии // ПДМ. - 2008. - №2. - С. 28-32.

2. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S. K. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts // Quasigroups and Related Systems. - 2013. - Vol. 21, No. 2. - P. 117–130.

3. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterization of Polyno- mially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations // Discrete Applied Mathematics. - 2016. - P. 5–17.

4. Белоусов В.Д. n-Арные квазигруппы. Кишинев. Штиинца, 1972. 228 с.

5. Малышев Ф.М. Теорема Поста–Глускина–Хоссу для конечных n-квазигрупп и самоинвариантные семейства подстановок, Матем. сб., 2016, том 207, номер 2, С. 81–92

6. Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. of Maked. Academ. of Sci. and Arts for Math. And Tect. Sci. XX. - 1999 - 1-2. - P. 157-162.

7. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев. Наукова думка, 1972. 175 с.

8. Щучкин Н.А. Преобразования строк с помощью n-квазигрупп // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 117-119.

9. Щучкин Н.А. Преобразования слов в заданном алфавите // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции. Тула, 2021. С. 126-128.

––

Секция 3. Кольца и модули

УДК 511.32

Градуированные алгебры над градуированными полями[1]

И. Н. Балаба (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@mail.ru
А. В. Михалёв (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: aamikhalev@mail.ru

Graded algebras over graded field

I. N. Balaba (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ibalaba@mail.ru
A V. Mikhalev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: aamikhalev@mail.ru

В теории градуированных колец значительную роль играют градуированные тела, т. е. градуированные кольца, каждый ненулевой однородный элемент которых обратим. Несмотря на то, что градуированные тела не являются телами в обычном смысле, они сами и градуированные модули над ними обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам тел и линейных пространств над телами (см., например [1]). В частности, любой градуированный модуль над градуированным телом обладает базисом, состоящим из однородных элементов.

Пусть далее G – мультипликативная группа, F – G-градуированное поле, т. е. коммутативное градуированное тело. Ясно, что носитель $H = \{g \in G \mid F_g \neq 0\}$ поля F является абелевой подгруппой группы G.

Градуированная алгебра A над полем F – это G-градуированное кольцо, являющееся градуированным F-модулем.

Известно, что кольцо эндоморфизмов $\mathrm{END}_D(V)$ конечно порожденного градуированного модуля V над градуированным телом D изоморфно кольцу матриц $M_n(D)(g_1, \dots, g_n)$ с градуировкой

$$M_n(D)_h(g_1, \dots, g_n) = \begin{pmatrix} D_{g_1^{-1}hg_1} & D_{g_1^{-1}hg_2} & \dots & D_{g_1^{-1}hg_n} \\ D_{g_2^{-1}hg_1} & D_{g_2^{-1}hg_2} & \dots & D_{g_2^{-1}hg_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{g_n^{-1}hg_1} & D_{g_n^{-1}hg_2} & \dots & D_{g_n^{-1}hg_n} \end{pmatrix}$$

для некоторых $g_1, \dots, g_n \in G$. Такие градуировки на матричных алгебрах называются *хорошими* (или *элементарными*).

Пусть D – градуированное тело, и Z – его градуированный центр, т.е. максимальное градуированное подкольцо центра кольца D. Ясно, что Z является градуированным полем, а D можно рассматривать как градуированную алгебру с делением над Z.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-41-710004_р_а

Теорема 1. *Пусть D – градуированное тело, Z – его градуированный центр, F – максимальное градуированное подполе в D. Тогда $D \bigotimes_Z F$ является gr-плотным кольцом в градуированном кольце эндоморфизмов $\mathrm{END}_F(D)$.*

Если D конечномерно над Z, то $D \bigotimes_Z F \approx M_n(F)(g_1, \ldots, g_n)$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$.

Градуированную F-алгебру A назовем *центральной*, если все ее центральные однородные элементы лежат в F. Градуированные центральные простые алгебры и их свойства рассматривались в [2] для случая градуировки абелевой группой без кручения, и в [3] для произвольной абелевой градуировки. В работах [4, 5] дана полная классификация с точностью до эквивалентности конечномерных градуированных алгебр с делением над полем действительных чисел, градуированных конечной абелевой группой. В [6] рассматривались градуированные алгебры с делением над произвольным полем с тривиальной градуировкой.

Теорема 2. *Пусть A – градуированная конечномерная центральная gr-простая алгебра над градуированным полем F. Тогда существует градуированное тело D, являющееся конечномерной центральной градуированной F-алгеброй, такое что алгебра A изоморфна алгебре матриц $M_n(D)(g_1, \ldots, g_n)$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$.*

Следуя [6], можно определить градуированную группу Брауэра $\mathrm{Br}_G(F)$ как множество всех классов эквивалентности градуированных конечномерных центральных простых алгебр над градуированным полем F. Будем говорить, что две такие алгебры A и B *эквивалентны*, если существуют такое градуированное тело D, являющееся конечномерной центральной градуированной F-алгеброй, и градуированные правые D-модули V и W, такие, что $A \approx \mathrm{END}_D(V)$ а $B \approx \mathrm{END}_D(W)$. Умножение в группе $\mathrm{Br}_G(F)$ индуцируется градуированным тензорным произведением: $[A]_G[B]_G = [A \bigotimes_F B]_G$ (здесь через $[A]_G$ определяется класс эквивалентности алгебры A).

Следующая теорема является градуированным аналогом теоремы Нётер-Сколема.

Теорема 3. *Пусть A – конечномерная центральная gr-простая алгебра над градуированным полем F и B – gr-простая подалгебра алгебры A. Если φ – гомоморфизм алгебры B в A, то существует ненулевой однородный элемент $a \in A_g$ (g принадлежит центру группы G), такой, что $\varphi(y) = a^{-1}ya$ для всех $y \in B$.*

Следствие 1. *Пусть A gr-простая центральная алгебра, конечномерная над своим градуированным центром, тогда любой автоморфизм алгебры A, сохраняющий градуировку и оставляющий неподвижными элементы центра, является внутренним.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balaba I.N., Mikhalev A.V. Graded division rings // Sarajevo Journal of Mathematics. – 2018. Vol. 14, no 2. – P. 167-–174.

2. Hwang Y.-S., Wadsworth A.R.Correspondences between valued division algebras and graded division algebras // J. Algebra. 1999. V. 220. P. 73–114.

3. Hazrat R., Millar J. R. On graded simple algebras // arXiv:1003.4538 [math.KT]

4. Bahturin Y., Zaicev M. Simple graded division algebras over the field of real numbers // Linear Algebra and its Applications. 2016. Том 490. P. 102–123.

5. Rodrigo-Escudero A. Classificftion of division gradings on finite-dimentional simple real algebras // Linear Algebra and its Applications. 2016. Том 493. P. 164–182.

6. Elduque A. and Kochetov M. Graded-division algebras and Galois extensions // J. Pure Appl. Algebra. 2021. V. 225, no. 12, 106773, 34 pp.

УДК 512.55

Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием

Е. М. Вечтомов (Россия, г. Киров)
Вятский государственный университет
e-mail: vecht@mail.ru
А. А. Петров (Россия, г. Киров)
Вятский государственный университет
e-mail:apetrov43@mail.ru

Multiplicatively idempotent semirings with annihilation property

E. M. Vechtomov (Russia, Kirov)
Vyatka State University
e-mail: vecht@mail.ru
A. A. Petrov (Russia, Kirov)
Vyatka State University
e-mail: apetrov43@mail.ru

Рассматриваются мультипликативно идемпотентные полукольца, в которых любые два различных элемента имеют различные аннуляторы. Ассоциативные кольца и дистрибутивные решетки с аннуляторными свойствами изучались в [1]. Теории мультипликативно идемпотентных полуколец посвящены работы [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10].

Исходные понятия. Напомним необходимые понятия теории полуколец.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такая, что: $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо с тождеством $xx = x$ будем называть *мультипликативно идемпотентным*. Мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + x = x$ называется *идемпотентным*. Мультипликативно идемпотентные кольца — это *булевы кольца*.

Если S — полукольцо с нулем 0 и $a \in S$, то положим $\operatorname{Ann} a = \{s \in S : \ as = sa = 0\}$ — (*двусторонний*) *аннулятор* элемента a. В мультипликативно идемпотентных полукольцах S с 0 имеем $\operatorname{Ann} a = \{s \in S : \ sa = 0\} = \{s \in S : \ as = 0\}$.

Назовем полукольцо S с 0 *полукольцом с аннуляторным условием*, если $\operatorname{Ann} a = \operatorname{Ann} b$ влечет $a = b$ для любых элементов $a, b \in S$.

Отметим, что в классе (ассоциативных) колец аннуляторному условию удовлетворяют в точности булевы кольца [1, теорема 1]. Аннуляторным свойством обладают также обобщенные булевы решетки.

Напомним, что дистрибутивная решетка с нулем называется *обобщенной булевой решеткой*, если она является решеткой с относительными дополнениями. *Булевы решетки* — это обобщенные булевы решетки с ненулевой единицей.

Полукольцо S с нулем 0 назовем:

• *антикольцом*, если S удовлетворяет квазитождеству $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$;

• *полукольцом с дополнениями*, если S — полукольцо с ненулевой единицей 1, каждый элемент a которого имеет дополнение $b \in S$: $a + b = 1$ и $ab = 0$;

• *полукольцом с псевдодополнениями*, если для каждого $a \in S$ существует такой элемент $b \in S$, что $\operatorname{Ann} a = bS$.

Для любого полукольца S множество $2S = \{s + s : s \in S\}$ является его идеалом. Для полукольца S с нулем 0 положим $r(S) = \{s \in S : \exists t \in S\ s + t = 0\}$. Очевидно, $r(S)$ будет идеалом в S и кольцом. Для любого мультипликативно идемпотентного полукольца S с нулем $r(S)$ — булево кольцо и $2S$ — идемпотентное полукольцо с нулем.

Основные результаты. Перечислим структурные свойства мультипликативно идемпотентных полуколец с аннуляторным условием.

На любом коммутативном мультипликативно идемпотентном полукольце S естественным образом вводится отношение порядка $\leqslant$: $a \leqslant b \Leftrightarrow ab = a$; получаем *нижнюю полурешетку* — упорядоченное множество $\langle S, \leqslant \rangle$ с $\inf\{a, b\} = ab$ для всех $a, b \in S$. Если полукольцо S имеет нуль 0 (единицу 1), то 0 (1) будет наименьшим (наибольшим) элементом полурешетки $\langle S, \leqslant \rangle$.

Предложение 1. *Любое мультипликативно идемпотентное полукольцо S с аннуляторным условием обладает следующими свойствами:*

(1) *S коммутативно;*

(2) *S удовлетворяет тождеству $x + 2xy = x$;*

(3) *$\langle S, \vee, \cdot \rangle$ — дистрибутивная решетка, где $a \vee b = a + ab + b$ для любых элементов $a, b \in S$;*

(4) *S — полукольцо Безу, то есть любой его конечнопорожденный идеал является главным идеалом;*

(5) *любой идеал I в S будет мультипликативно идемпотентным полукольцом с аннуляторным условием;*

(6) *если S — антикольцо, то S — дистрибутивная решетка;*

(7) *в полукольце S идеал $r(S) + 2S$ есть прямая сумма булева кольца $r(S)$ и дистрибутивной решетки $2S$ с аннуляторным условием.*

Предложение 2. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо S с нулем удовлетворяет аннуляторному условию тогда и только тогда, когда S коммутативно и $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} a) = aS$ для всех $a \in S$.*

Предложение 3. *Пусть S — мультипликативно идемпотентное полукольцо с аннуляторным свойством и кольцо $r(S)$ обладает единицей. Тогда $S = r(S) \oplus 2S$ есть прямая сумма булева кольца с единицей и дистрибутивной решетки с аннуляторным свойством.*

Следствие 1. *Для того, чтобы мультипликативно идемпотентное полукольцо S с единицей и с аннуляторным условием было изоморфно прямому произведению булева кольца и дистрибутивной решетки, необходимо и достаточно, чтобы кольцо $r(S)$ обладало единицей.*

Предложение 4. *Для любого неодноэлементного мультипликативно идемпотентного полукольцо S эквивалентны следующие утверждения:*

1) *S удовлетворяет аннуляторному условию и является полукольцом с псевдодополнениями;*

2) *S — полукольцо с дополнениями;*

3) *S изоморфно прямому произведению булева кольца с ненулевой единицей и булевой решетки (возможно отсутствие одного из сомножителей).*

Следствие 2. *Конечное полукольцо будет мультипликативно идемпотентным полукольцом с аннуляторным условием тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению булева кольца с единицей и булевой решетки.*

Предложение 5. *Класс всевозможных мультипликативно идемпотентных полуколец с аннуляторным условием замкнут относительно взятия произвольных прямых произведений, идеалов и предела прямых спектров с инъективными гомоморфизмами. Но он не замкнут относительно подполуколец и гомоморфных образов, стало быть, не образует квазимногообразие.*

Пусть дано мультипликативно идемпотентное полукольцо S с нулем 0 и единицей $1 \neq 0$, удовлетворяющее аннуляторному условию. Возможен ровно один из следующих случаев:

1) $1+1=0$, тогда $S=r(S)$ — булево кольцо с ненулевой единицей;

2) $1+1=1$, тогда $S=2S$ — ограниченная дистрибутивная решетка с аннуляторным условием;

3) элемент $1+1$ отличен от 0 и 1 и $1 \in r(S)\oplus 2S$, тогда $S=r(S)\oplus 2S$ есть прямая сумма неодноэлементных булева кольца с единицей и ограниченной дистрибутивной решетки с аннуляторным условием;

4) элемент $1+1$ отличен от 0 и 1 и $1 \notin r(S)\oplus 2S$.

Первоначально выдвигалась гипотеза о том, что мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием исчерпываются, с точностью до изоморфизма, прямыми произведениями булева кольца и дистрибутивной решетки с аннуляторным условием. Оказывается, случай 4) также возможен. Следующее предложение показывает путь построения соответствующего примера, носящего общий характер.

Предложение 6. *Пусть S — мультипликативно идемпотентное полукольцо с единицей $1 \neq 0$ с аннуляторным условием, элемент $2=1+1$ не равен 0 и 1 и $1 \notin r(S)\oplus 2S$. Тогда $S^*=(r(S)\oplus 2S)\cup(r(S)+1)$ будет подполукольцом в S, являющимся мультипликативно идемпотентным полукольцом с единицей и с аннуляторным условием.*

Предложение 7. *Существует мультипликативно идемпотентное полукольцо с единицей с аннуляторным условием, не изоморфное прямому произведению булева кольца и дистрибутивной решетки.*

Предложение 8. *Каждое мультипликативно идемпотентное полукольцо с аннуляторным условием изоморфно вкладывается в мультипликативно идемпотентное полукольцо с единицей с аннуляторным условием.*

Замечания. Сделаем несколько дополнений.

Замечание 1. В многообразии $\mathfrak{CM}$ всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец эквивалентны условия (2) и (3) предложения 1. Поэтому полукольца $S \in \mathfrak{CM}$ с тождеством $x+2xy=x$ образуют специфический подкласс (положительных) *решеточно упорядоченных полуколец* $\langle S,+,\cdot,\leqslant\rangle$, для которых по определению: $\langle S,+,\cdot\rangle$ — полукольцо, $\langle S,\leqslant\rangle$ — решетка, для любых $a,b,c \in S$ неравенство $a \leqslant b$ влечет неравенства $a+c \leqslant b+c, ac \leqslant bc, ca \leqslant cb$. Ясно также, что произвольное полукольцо $\langle S,+,\cdot\rangle$ из многообразия $\mathfrak{CM}$ с тождеством $x+2xy=x$ удовлетворяет аннуляторному условию тогда и только тогда, когда аннуляторному условию удовлетворяет дистрибутивная решетка $\langle S,\vee,\cdot\rangle$.

Замечание 2. Пусть S — произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо с аннуляторным условием (вообще говоря, без единицы). Полукольцо S является теоретико-множественным объединением всех своих главных идеалов $aS, a \in S$. Воспользуемся свойствами (1)–(5) предложения 1. Упорядоченное множество $\langle S,\leqslant\rangle$ — направленное. Для любых $a,b \in S$ положим: $S_a=aS$ и π_{ab} — изоморфное вложение $S_a \subseteq S_b$ при $a \leqslant b$. Система $(S_a,\pi_{ab})_S$ будет прямым спектром полуколец S_a. При этом само полукольцо S будет пределом прямого спектра $(S_a,\pi_{ab})_S$ мультипликативно идемпотентных полуколец S_a с аннуляторным условием с единицами a.

Замечание 3. В полукольцевых исследованиях может быть применен метод функциональных (пучковых) представлений. На основании [9, теорема 2.4.4] всякое, необходимо коммутативное, мультипликативно идемпотентное полукольцо S с аннуляторным условием, обладающее единицей 1, изоморфно полукольцу $\Gamma(\Pi)$ всех глобальных сечений пучка Π полуколец-слоев S/Θ_P над простым спектром $\operatorname{Spec} S$ полукольца S. Для любого простого идеала $P \in \operatorname{Spec} S$ и любых $a, b \in S$ получаем конгруэнцию Θ_P на S: $a\Theta_P b$ означает, что $ac = bc$ для некоторого $c \in S \setminus P$. Соответствующие пучок Π и изоморфное представление $\hat{}\colon S \to \Gamma(\Pi)$ называются ламбековскими. Отметим, что все полукольца S/Θ_P принадлежат многообразию $\mathfrak{CM}$ и удовлетворяют тождеству $x + 2xy = x$, но, в общем случае, не обязаны удовлетворять аннуляторному условию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М. Аннуляторные характеризации булевых колец и булевых решеток // Математические заметки. 1993. Том 53, вып. 2. С. 15–24.

2. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Мультипликативно идемпотентные полукольца // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Том 18, вып. 4. С. 41–70.

3. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Многообразие полуколец, порожденное двухэлементными полукольцами с коммутативным идемпотентным умножением // Чебышевский сборник. 2014. Том XV, вып. 3. С. 12–30.

4. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Полукольца с идемпотентным умножением. — Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. 144 с.

5. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Псевдодополнения в решетке многообразий мультипликативно идемпотентных полуколец // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Том 21, вып. 3. С. 107–120.

6. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Конечные мультипликативно идемпотентные полукольца // «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории»: материалы XX Международной конференции, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова. — Тула, 2021. С. 56–59.

7. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Простые идеалы в мультипликативно идемпотентных полукольцах // Математические заметки. 2022. Том 111, вып. 4. С. 494–505.

8. Петров А. А. Полукольца с условиями идемпотентности // Чебышевский сборник. 2012. Том XIII, вып. 1. С. 118–129.

9. Чермных В. В. Функциональные представления полуколец // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, вып. 3. С. 111–227.

10. Chaida I., Länger H., Švrček F. Multiplicatively idempotent semirings // Mathematica Bohemica. 2015. V. 140, № 1. P. 35-42.

УДК 512.64

О состоящих из матриц линейных пространствах, у которых все крестовые матрицы образуют базис[1]

И. Б. Кожухов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
А. В. Решетников (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»
e-mail: a_reshetnikov@hush.com
Д. Ю. Манилов (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»
e-mail: thdi@ro.ru

On the Linear Spaces of Matrices for which All Cross Matrices Form a Basis

I. B. Kozhukhov (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology; Lomonosov Moscow State University
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
A. V. Reshetnikov (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology
e-mail: a_reshetnikov@hush.com
D. Yu. Manilov (Russia, Moscow)
National Research University of Electronic Technology
e-mail: thdi@ro.ru

Пусть F – поле, $\operatorname{char} F$ – его характеристика. Множество всех матриц над F фиксированного размера $m \times n$ представляет собой линейное пространство (относительно операций сложения матриц и умножения их на элементы из поля F). Обозначим его через $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$. Матрицы $\mathbf{T}_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, у которых все элементы i-ой строки и все элементы j-ого столбца равны 1, а остальные элементы равны 0, мы называем *крестовыми* [1].

Теорема 1. *Пусть $m, n \geqslant 2$. В пространстве $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ множество всех крестовых матриц $\mathbf{T}_{ij}$ является базисом в том и только том случае, если либо $\operatorname{char} F = 0$, либо ни одно из чисел $m+n-1$, $m-1$, $n-1$ не делится на $\operatorname{char} F$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Манилов Д. Ю., Решетников А. В. Об одной задаче, связанной с двоичными матрицами // Материалы VI Международной научно-технической конференции «Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях» (СИТОНИ-2019). Под общей редакцией В. Н. Павлыша. — Донецк, 2019. С. 95-97.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 22-11-00052

УДК 512.541

Кольца на факторно делимых абелевых группах

Е. И. Компанцева (Россия, г. Москва)
Финансовый университет при Правительстве РФ; Московский педагогический государственный университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru
Т. К. Ч. Нгуен (Вьетнам, г. Ханой)
FPT Университет
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Rings on quotient divisible abelian groups

E. I. Kompantseva (Russia, Moscow)
Financial University under the Government of the RF; Moscow Pedagogical State University
e-mail: kompantseva@yandex.ru
T. Q. T. Nguyen (Vietnam, Hanoi)
FPT University
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu: \ G \otimes G \to G$. Множество всех умножений на абелевой группе G само является абелевой группой относительно сложения и обозначается $Mult\ G$. Умножение $\mu : G \otimes G \to G$ на группе G часто обозначается через $\times$, то есть $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ называется кольцом на G, которое обозначается $(G, \times)$.

Проблема изучения кольцевых структур на абелевых группах весьма многогранна. В [1] введено понятие TI-группы (от «transitive ideal»). Абелева группа называется TI-группой, если любое ассоциативное кольцо на ней филиально. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если в нём отношение «быть идеалом» транзитивно. Филиальные кольца были введены в [2] и TI-группы изучались в [1, 3, 4, 5].

Настоящая работа посвящена изучению колец на факторно делимых абелевых группах. Понятие факторно делимой группы было введено Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в [6] для описания групп, допускающих кольцевую структуру, которая вкладывается в полупростую сепарабельную алгебру. В работе [7], это понятие распространено на случай смешанных групп, в той же работе показано, что смешанные факторно делимые группы двойственны абелевым группам без кручения конечного ранга. Группа G называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую что G/F – делимая периодическая группа. Базисом и рангом факторно делимой группы G будем называть всякий базис и ранг свободной группы F.

Для элемента g из абелевой группы G и простого числа p определим m_p как наименьшее целое неотрицательное число, такое что элемент $p^{m_p}g$ делится на любую степень p в группе G. Если такого числа не существует, полагаем $m_p = \infty$. Последовательность $(m_{p_1}, m_{p_2}, \cdots, m_{p_n}, \cdots)$ называется кохарактеристикой элемента g в группе G и обозначается $cochar(g)$. Для факторно делимой абелевой группы G ранга 1 будем называть кохарактеристику любого её базисного элемента кохарактеристикой группы G и обозначать $cochar(G)$. В работе описаны группы умножений редуцированных факторно делимых абелевых групп ранга 1. Это позволило изучить свойства колец на таких группах, в частности, описать TI-группы в данном классе.

Теорема 1. *Пусть G – факторно делимая абелева группа ранга 1 с базисом $\{e\}$.*

1. Для любого $g \in G$ существует единственное кольцо $(G, \times)$, в котором $e \times e = g$.

2. Кольца $(G, \times)$ и $(G, \circ)$ изоморфны, если и только если $\chi(e \times e) = \chi(e \circ e)$.

Следствие 1. *Если G – факторно делимая абелева группа ранга 1, то $Mult\ G \equiv G$.*

Теорема 2. *Редуцированная факторно делимая группа G ранга 1 является TI-группой, если и только если $cochar(G)$ не содержит натуральных чисел, которое больше 1.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33–41.

2. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983-1984. Vol. 42. P. 185-194.

3. Kompantseva E. I., Nguyen T. Q. T. Algebraically compact abelian TI-groups // Chebyshevskii Sb. 2019. Vol. 20. №1. P. 202—211. (*Russian*)

4. Kompantseva E. I., Nguyen T. Q. T., Gazaryan V. A. Filial rings on direct sums and direct products of torsion-free abelian groups // Chebyshevskii Sb. 2021. Vol. 22. №1. P. 200—212. (*Russian*)

5. Kompantseva E. I., Tuganbaev A. A. Rings on Abelian Torsion-Free Groups of Finite Rank // Beiträge zur Algebra und Geometrie (Springer). 2021. 1–19.

6. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math. 5 (1961). P. 61–98.

7. Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126. №1. P. 45–52.

———————————————————————————

УДК 512.552

Инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей

И. А. Кульгускин (Россия, г. Москва)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
e-mail: ivan-kull@rambler.ru
М. Е. Чанга (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет геодезии и картографии (МИИГАиК)
e-mail: maris_changa@mail.ru

Involutions in the algebra of upper triangular matrices over the ring of algebraic integers of quadratic fields

I. A. Kulguskin (Russia, Moscow)
Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: ivan-kull@rambler.ru
M. E. Changa (Russia, Moscow)
Moscow State University of Geodesy and Cartography
e-mail: maris_changa@mail.ru

Инволюции в алгебрах инцидентности были изучены в последнее время в работах [3]–[6]. В статье [7] была получена классификация с точностью до эквивалентсности инволюций в алгебре верхнетреугольных матриц $UT_n(P)$, где P – произвольное поле, характеристики отличной от 2. Существенно расширяя область исследования, совсем недавно в работе [1] были описаны инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц, в случае полей характеристики два и коммутативных колец R, у которых фактор-кольцо $R/2R$ булево.

Естественным продолжением работы [1] служит изучение проблемы классификации инволюций в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей. В ходе описания инволюций в вышеупомянутой алгебре были найдены эквивалентные формулировки условий в рамках теории уравнений Пелля [2].

Пусть R – коммутативное кольцо. Две инволюции γ, δ алгебры $UT_n(R)$ эквивалентны, если $(UT_n(R), \gamma)$ и $(UT_n(R), \delta)$ изоморфны как алгебры с инволюцией. Для каждой матрицы $A \in UT_n(R)$ положим $A^* = JA^TJ^{-1}$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(R).$$

Инволюция $A \to A^*$ называется *ортогональной.* В случае когда $n = 2m$, определим матрицу D как $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix} \in UT_n(R)$. Тогда отображение $A \mapsto DA^*D^{-1}$ тоже будет инволюцией, которую мы будем называть *симплектической.* В работе [7] было показано, что всякая инволюция в $UT_n(P)$, где P – произвольное поле, характеристики отличной от 2, эквивалентна либо ортогональной инволюции, либо симплектической инволюции.

Следующие утверждения дают полное описание инволюций в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{Z}$ – бесквадратное целое и R – кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Теорема 1. Пусть $d \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$. Тогда при $n = 2k+1$ – нечетном в алгебре $UT_{2k+1}(R)$ имеется ровно $k+1$ классов эквивалентности инволюций и при $n = 2k$ – четном:

1. если уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где x – четное, y – нечетное, не разрешимо в целых числах, то в алгебре $UT_{2k}(R)$ имеется ровно $3k^2+2$ классов эквивалентности инволюций;

2. если уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где x – четное, y – нечетное, разрешимо в целых числах, то в алгебре $UT_{2k}(R)$ имеется ровно k^2+k+2 классов эквивалентности инволюций.

Теорема 2. Пусть $d \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$. Тогда при $n = 2k+1$ – нечетном в алгебре $UT_{2k+1}(R)$ имеется ровно $k+1$ классов эквивалентности инволюций и при $n = 2k$ – четном:

1. если уравнение $x^2 - dy^2 = -1$, где x, y – нечетные, не разрешимо в целых числах, то в алгебре $UT_{2k}(R)$ имеется ровно $3k^2+2$ классов эквивалентности инволюций;

2. если уравнение $x^2 - dy^2 = -1$, где x, y – нечетные, разрешимо в целых числах, то в алгебре $UT_{2k}(R)$ имеется ровно k^2+k+2 классов эквивалентности инволюций.

Теорема 3. Пусть $d = 4t+1, t \in \mathbb{Z}$. Тогда при $n = 2k+1$ – нечетном в алгебре $UT_{2k+1}(R)$ все инволюции попарно эквивалентны и при $n = 2k$ – четном:

1. если t – четное, то в алгебре $UT_{2k}(R)$ имеется ровно $(k+1)^2$ классов эквивалентности инволюций;

2. если t – нечетное и уравнение $x^2 - dy^2 = \pm 4$, где x, y – нечетные, не разрешимо в целых числах, то в алгебре $UT_{2k}(R)$ имеется ровно $3k+2$ классов эквивалентности инволюций;

3. если t – нечетное и уравнение $x^2 - dy^2 = \pm 4$, где x, y – нечетные, разрешимо в целых числах, то в алгебре $UT_{2k}(R)$ имеется ровно $(k+1)^2 + 1$ классов эквивалентности инволюций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кульгускин, И.А., Тапкин, Д.Т., *Инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц*

2. Чанга, М.Е., *Элементарная теория уравнений Пелля* // Учебное пособие. – Москва: МПГУ, 2019. – 36 с.

3. Spiegel E. *Involutions in incidence algebras* // Linear Algebra Appl. – 2005. – Vol. 405. – P. 155–162.

4. Brusamarello R., Fornaroli E. Z., Santulo Jr. E. A. *Classication of involutions on incidence algebras* // Comm. Alg. – 2011. – Vol. 39. – P. 1941–1955.

5. Brusamarello R., Lewis D.W. *Automorphisms and involutions on incidence algebras* // Linear and Multilinear Algebra. – 2011. –Vol. 59. – №11. – P. 1247–1267.

6. Brusamarello R., Fornaroli E. Z., Santulo Jr. E. A. *Anti-automorphisms and involutions on (finitary) incidence algebras* // Linear Multilinear Algebra. 2012. – Vol. 60. – P. 181–188.

7. Di Vincenzo O. M., Koshlukov P., La Scala R. *Involutions for upper triangular matrix algebras* // Adv. Appl. Math. – 2006. – Vol. 37. – P. 541–568.

––

УДК 512.541

Центрально существенные полугрупповые алгебры[1]

О. В. Любимцев (Россия, г. Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru
А. А. Туганбаев (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

Centrally Essential Semigroup Algebras

O. V. Lyubimtsev (Russia, Nizhny Novgorod)
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod
e-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru
A. A. Tuganbaev (Russia, Moscow)
National Research University "MPEI"; Lomonosov Moscow State University
e-mail: tuganbaev@gmail.com

[1]Исследование А. А. Туганбаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10013П). Работа О.В. Любимцева выполнена по теме государственного задания (№ 0729-2020-0055).

Мы рассматриваем только ассоциативные, не обязательно унитальные кольца. Ассоциативное кольцо R называется **центрально существенным**, если R либо коммутативно, либо для каждого нецентрального элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что $ax = y$. Если кольцо R с центром $Z(R)$ имеет ненулевую единицу, то R центрально существенно в точности тогда, когда модуль $R_{Z(R)}$ является существенным расширением модуля $Z(R)_{Z(R)}$. Ясно, что любое коммутативное кольцо является центрально существенным. Каждое полупервичное или несингулярное справа центрально существенное кольцо коммутативно; см. [5, Theorem 1.5]. В [5, Proposition 2.4] доказано, что в центрально существенном кольце все идемпотенты центральны. Центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны; см. [4, Remark 1.2]. Однако центрально существенное кольцо может быть некоммутативным. Например, существуют конечные некоммутативные центрально существенные групповые алгебры над полями простой характеристики; см. [4]. Кроме того, существуют такие абелевы группы без кручения, что их кольца эндоморфизмов являются некоммутативными центрально существенными кольцами; см. [2]. В работе [3, Theorem 1] доказано, что групповая алгебра является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом. В данной работе изучаются центрально существенные полугрупповые алгебры. Всюду далее F означает поле, S – полугруппу, FS – полугрупповую алгебру полугруппы S над полем F.

Полугруппа S называется **полугруппой с левым сокращением**, если для любых $a, b, c \in S$ из $ca = cb$ следует $a = b$. Двойственно определяется **полугруппа с правым сокращением**. Полугруппа с левым и правым сокращением называется **полугруппой с сокращением**. Хорошо известно, что периодическая полугруппа с сокращением является группой; см., например, [1]. Полугруппа с сокращением вкладывается в группу правых частных в точности тогда, когда непусто пересечение любых двух главных правых идеалов полугруппы S, т.е. $sS \cap tS \neq \emptyset$ для всех $s, t \in S$ (правое условие Оре). Если S удовлетворяет и левому условию Оре, определяемом симметрично, то группа $G_S = SS^{-1} = S^{-1}S$ называется **группой частных** полугруппы S. Любой элемент группы G_S записывается как в виде $a^{-1}b$, так и в виде cd^{-1}; $a, b, c, d \in S$.

Если G – группа, то обозначим, как принято,

$$\Delta(G) = \{x \in G \,|\, |x^G| < \infty\} = \{x \in G \,|\, |G : C_G(x)| < \infty\}.$$

$\Delta(G)$ является характеристической подгруппой группы G. В работе [4, Lemma 2.1] доказано, что если групповое кольцо RG центрально существенно, то группа G является FC-группой, т.е. $G = \Delta(G)$. Пусть S – полугруппа с сокращением и $s \in S$. Если для некоторого $x \in S$ существует такой $t \in S$, что $xs = tx$, то элемент t определен однозначно и обозначается s^x. Тогда $\Delta(S)$ – множество элементов $s \in S$, для которых элементы s^x определены для всех $x \in S$ и множество $\{s^x \,|\, x \in S\}$ конечно; см. [7].

Предложение 1. *Пусть S – полугруппа с сокращением. Если полугрупповая алгебра FS является центрально существенным кольцом, то $S = \Delta(S)$.*

Следствие 1. *Если FS – центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то S имеет группу частных G_S.*

Следствие 2. *Пусть F – поле и char $F = 0$. Тогда любая центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением над F коммутативна.*

Теорема 1. ***а.*** *Пусть S – полугруппа с сокращением и F – поле. Полугрупповая алгебра FS над полем F является центрально существенной тогда и только тогда, когда существует группа частных G_S полугруппы S и групповая алгебра FG_S группы G_S является центрально существенной групповой алгеброй.*

b. *Существуют некоммутативные центрально существенные полугрупповые алгебры над полями нулевой характеристики (при этом известно, что центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики* 0 *коммутативны).*

Элемент r кольца R называется регулярным справа или левым неделителем нуля, если из $rx = 0$ следует $x = 0$ для любого $x \in R$. Заметим, что в центрально существенном кольце односторонние делители нуля являются двусторонними; см. [6, Lemma 2.2]. Кольцо R имеет правое (соотв., левое) классическое кольцо частных $Q_{\mathrm{cl}}(R_r)$ (соотв., $Q_{\mathrm{cl}}(R_l)$) в точности тогда, когда для любых элементов $a, b \in R$, где b регулярен, существуют такие элементы $c, d \in R$, где d регулярен, что $bc = ad$ (соотв., $cb = da$). Если кольца $Q_{\mathrm{cl}}(R_r)$ и $Q_{\mathrm{cl}}(R_l)$ существуют, то они изоморфны над R. В этом случае говорят о существовании двустороннего классического кольца частных $Q_{\mathrm{cl}}(R)$. Хорошо известно, что каждое коммутативное кольцо обладает коммутативным классическим кольцом частных.

Теорема 2. *Полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – Москва: Изд-во МИР, 1972.

2. Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A. Centrally essential endomorphism rings of abelian groups // Comm. Algebra. 2020. Vol. 48, № 3. P. 1249–1256.

3. Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A. Centrally essential group algebras and classical rings of fractions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, №. 12. P. 2890–2894.

4. Markov V. T., Tuganbaev A. A. Centrally essential group algebras // J. Algebra. 2018. Vol. 512, № 15. P. 109–118.

5. Markov V. T., Tuganbaev A. A. Rings essential over their centers // Comm. Algebra. 2019. Vol. 47, № 4. P. 1642–1649.

6. Markov V. T., Tuganbaev A. A. Uniserial Noetherian Centrally Essential Rings // Comm. Algebra. 2020. Vol. 48, № 1. P. 149–153.

7. Okninski J., Semigroup Algebras. – Dekker, New York and Basel, 1991.

———————————————————

УДК 512.554.1

Описание алгебр длины 1

О. В. Маркова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ov_markova@mail.ru

Description of algebras of length 1

O. V. Markova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: ov_markova@mail.ru

Представленные в данном сообщении результаты получены коллективом авторов: К. Мартинес (Овьедо, Испания), Р. Родригес (Сан-Паулу, Бразилия), О. В. Маркова (Москва). Доклад основан на работе [1].

Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная, не обязательно ассоциативная, алгебра с единицей над полем $\mathbb{F}$, $\mathcal{S} = \{a_1, \dots, a_k\}$ — её конечное порождающее множество. Каждое произведение конечного числа элементов $\mathcal{S}$ назовем *словом* в алфавите $\mathcal{S}$. *Длиной* слова назовем число букв соответствующего произведения. Единицу 1 алгебры будем считать словом *нулевой длины* в алфавите $\mathcal{S}$. Заметим, что в общем случае неассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ различные расстановки скобок в слове задают различные слова.

Множество всех слов в алфавите $\mathcal{S}$ длины не более i обозначим через $\mathcal{S}^i$, $i \geqslant 0$. Через $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$ обозначим линейную оболочку множества $\mathcal{S}^i$ над полем $\mathbb{F}$.

Обозначим за $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ алгебру, порождённую множеством $\mathcal{S}$ и заметим, что множество $\mathcal{S}$ является порождающим для $\mathcal{A}$ в том и только том случае, если $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Определение 1. Длиной порождающего множества $\mathcal{S}$ *конечномерной алгебры* $\mathcal{A}$ *называется* $l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Определение 2. Длина алгебры $\mathcal{A}$ — *это максимум длин всех её порождающих множеств:* $l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Длина является важной числовой характеристикой алгебры, трудность вычисления которой даже для классических алгебр обусловлена необходимостью рассмотрения всех систем образующих в данной алгебре. Например, задача вычисления длины полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ как функции размера матриц n была поставлена А. Пазом в работе [2] и до сих пор является открытой проблемой. Общая задача исследования функции длины ассоциативной алгебры была впервые поставлена К. Паппаченой в [3]. В недавней работе [4] А.Э. Гутерманом и Д.К. Кудрявцевым впервые введена и исследована длина неассоциативных алгебр. В работе [5] найдена точная верхняя граница длины произвольной неассоциативной алгебры и изучены некоторые её свойства.

Вопрос оценки длины является не только важной открытой задачей относящейся к чистой алгебре, но и актуален для целого ряда прикладных вопросов, см, например, [6]. Обычно функция длины служит мерой сложности проверки тех или иных алгебраических условий. Поэтому алгебры минимальной возможной длины представляют отдельный интерес. Очевидно, что минимальное нетривиальное значение функции длины есть единица.

Ранее в работе [7] автором были описаны с точностью до сопряжения матричные подалгебры длины 1 над произвольными полями. Затем, основываясь на этих результатах, в работе [8] получено следующее описание ассоциативных алгебр длины 1 с точностью до изоморфизма:

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле и* $\mathcal{A}$ *— конечномерная ассоциативная* $\mathbb{F}$*-алгебра с единицей. Тогда* $l(\mathcal{A}) = 1$ *в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих условий:*

1. $\mathcal{A} \cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$;

2. $\mathcal{A}$ *— поле,* $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} = 2$;

3. *$\mathbb{F}$ — поле из 2-х элементов, $\mathcal{A} \cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$;*

4. *$\dim \mathcal{A}/J(\mathcal{A}) = 1$, $J(\mathcal{A}) \neq 0$, $J(\mathcal{A})^2 = 0$, где $J(\mathcal{A})$ обозначает радикал Джекобсона алгебры $\mathcal{A}$;*

5. *найдутся элементы $e, f \in \mathcal{A}$ такие, что*

$$e^2 = e, f^2 = f,\ ef = fe = 0,\ e + f = 1,$$

$$\dim e\mathcal{A}e = \dim f\mathcal{A}f = 1,$$

$$f\mathcal{A}e = 0,\ e\mathcal{A}f \neq 0.$$

Алгебры разных типов не изоморфны. Две алгебры $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ типа 4 или 5 изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{C}$.

В общем случае в работе [1] описание алгебр длины 1 удалось получить в терминах существования базиса с известной таблицей умножения.

Основной результат данного сообщения — следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики отличной от 2 и $\mathcal{A}$ — конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра с единицей. Тогда $l(\mathcal{A}) = 1$ в том и только в том случае, когда у алгебры $\mathcal{A}$ есть такой базис $\mathcal{B} = \{1_{\mathcal{A}}, a_2, \ldots, a_n\}$, что $a_i^2 = \mu_i 1_{\mathcal{A}}$ для некоторых $\mu_i \in \mathbb{F}$, $2 \leq i \leq n$, и*

$$a_i a_j = \alpha_{ij} 1_{\mathcal{A}} + \beta_j a_i - \beta_i a_j$$

$\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{F}$, для всех $2 \leq i \neq j \leq n$.

Как следствие этого результата удаётся получить описание Йордановых и гибких алгебр длины 1, а также определять, является ли алгебра ассоциативной.

Над полями характеристики 2 приведём описание для алгебр размерности не менее 4. В случае размерности 3 описание различается для поля из 2-х элементов и его расширений. В следующем утверждении для произвольных элементов a, b алгебры $\mathcal{A}$ обозначение $a \equiv b$ означает, что $a - b \in \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики 2 и $\mathcal{A}$ — конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра с единицей размерности $\dim\, \mathcal{A} \geq 4$. Тогда $l(\mathcal{A}) = 1$ в том и только в том случае, когда у алгебры $\mathcal{A}$ есть такой базис $\mathcal{B}^* = \{a_1^* = 1_{\mathcal{A}}, a_2^*, \ldots, a_n^*\}$, таблица умножения которого удовлетворяет одному из следующих условий:*

(I) *$a_i^{*2} \equiv 0$, для $i = 2, \ldots, n$, $a_i^* a_j^* \equiv a_j^* a_i^* \equiv \beta_{ij} a_i^* + \beta_{ji} a_j^*$,*

(II) *$a_i^{*2} \equiv a_i^*$, для $i = 2, \ldots, n$, $a_i^* a_j^* \equiv \beta_{ij} a_i^* + (1 + \beta_{ji}) a_j^*$,*

$\beta_{ij} \in \mathbb{F}$, для всех $2 \leq i \neq j \leq n$. Заметим, что во втором случае $a_i^* a_j^* + a_j^* a_i^* \equiv a_i^* + a_j^*$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Markova O. V., Martinez C., Rodrigues R. L. Algebras of length one// J. Pure Appl. Algebra. 2022. Vol. 226. no. 7. P. 106993.

2. Paz A. An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables// J. Algebra. 1984. V. 15. P. 161–170.

3. Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra// J. Algebra. 1997. V. 197. P. 535–545.

4. Гутерман А. Э., Кудрявцев Д. К. Длина алгебр кватернионов и октонионов// Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Том 453. С. 22–32.

5. Guterman A. E., Kudryavtsev D. K. Upper bounds for the length of non-associative algebras// J. Algebra. 2020. V. 544. P. 483–497.

6. Альпин Ю. А., Икрамов Х. Д. Об унитарном подобии матричных семейств// Матем. заметки. 2003. Том 74. № 6. С. 815–826.

7. Маркова О. В. Классификация матричных подалгебр длины 1// Фундамент. и прикл. матем. 2012. Том 17. № 1. С. 169–188.

8. Маркова О. В. Описание алгебр длины 1// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 2013. Том 1. С. 54–56.

УДК 512.554.7

Многообразия йордановых алгебр и лиевских S-пар

А. В. Попов (Россия, г. Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
e-mail: klever176@rambler.ru

Varieties of Jordan algebras and Lie S-pairs

A. V. Popov (Russia, Ulyanovsk)
Ulyanovsk state university
e-mail: klever176@rambler.ru

На протяжении всей работы будем предполагать, что основное поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику.

Как известно, йордановы алгебры и алгебры Ли достаточно тесно взаимосвязаны. Одним из примеров такой связи является конструкция Кантора, позволяющая из произвольной супералгебры Пуассона строить йорданову супералгебру [1]. В работе [2] был рассмотрен производный вариант данного соответствия, сопоставляющий произвольной алгебре Ли L йорданову алгебру $J(L)$, удовлетворяющую паре дополнительных тождеств

$$x^4 \equiv 0,$$

$$(x_1y_1)(x_2y_2)(x_3y_3) \equiv 0.$$

Обозначим через $\mathcal{V}_J$ многообразие йордановых алгебр, определенное данной парой тождеств. В [2] было показано, что тождества алгебры $J(L)$ полностью определяются тождествами алгебры L (В частности, если L — свободная алгебра Ли, то алгебра $J(L)$ порождает многообразие $\mathcal{V}_J$). Данный факт позволяет “поднять” соответствие J между алгебрами Ли и йордановыми алгебрами до соответствия $\mathcal{J}$ между многообразиями алгебр Ли и подмногообразиями $\mathcal{V}_J$. А именно, для произвольного многообразия алгебр Ли $\mathcal{V}$ положим

$$\mathcal{J}(\mathcal{V}) = \operatorname{var}(J(\mathbb{F}_{\mathcal{V}}[X])),$$

где $\mathbb{F}_{\mathcal{V}}[X]$ — свободная алгебра многообразия $\mathcal{V}$ со счетным множеством порождающих X.

Утверждение 1 ([2]). *Отображение $\mathcal{J}$ является мономорфизмом из решетки многообразий алгебр Ли в решетку подмногообразий многообразия $\mathcal{V}_J$.*

Интересным следствием утверждения 1 является то, что положительное решение проблемы Шпехта [3, гл. 5] в многообразии $\mathcal{V}_J$ автоматически даст положительное решение данной проблемы и для многообразия алгебр Ли.

Заметим, что более общий вопрос, — проблема Шпехта для многообразий разрешимых йордановых алгебр, был поставлен А.М. Слинько в днестровской тетради [4, задача 1.129].

В дальнейшем в работе [5] было показано, что многообразие $\mathcal{V}_J$ также обладает другим свойством, важным с точки зрения изучения структуры свободной йордановой алгебры $\mathbb{F}_{\mathcal{J}ord}[X]$. А именно, для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множества идеалов

$$M_n = \left\{ I \lhd \mathbb{F}_{\mathcal{J}ord}[X] | \, I \subset \mathbb{F}_{\mathcal{J}ord}[X]^{(n)} \right\}.$$

Утверждение 2 ([5]). *Для любого $n \in \mathbb{N}$ множество M_n имеет наибольший элемент D_n. Более того, D_n является идеалом тождеств некоторого многообразия.*

Теорема 1 ([5]). *Идеал D_2 совпадает с идеалом тождеств многообразия $\mathcal{V}_J$.*

Теорема 1 позволяет свести многие вопросы об устройстве произвольного многообразия разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ к изучению его подмногообразия $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_J$. В частности, на этом пути было доказано, что известный результат Е.И. Зельманова о нильпотентности энгелевых алгебр Ли [6] равносилен следующей теореме:

Теорема 2 ([5]). *Йорданова алгебра A нильпотентна тогда и только тогда, когда для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$ алгебра A удовлетворяет ниль-тождеству $x^n \equiv 0$ и стандартному тождеству $\sum\limits_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma yx_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} \equiv 0$.*

Попытки более детального изучения структуры подмногообразий многообразия $\mathcal{V}_J$ приводят к необходимости рассмотрения следующего объекта:

Определение 1. *S-парой (A, I) будем называть пару из алгебры A и ее идеала I такого, что $A^2 \subseteq I$.*

Для S-пар естественным образом вводятся понятия S-подпар, гомоморфизмов S-пар, произведений S-пар:

- S-пара (A_1, I_1) называется подпарой S-пары (A, I), если $A_1 \subset A$, $I_1 \subset I$;
- Гомоморфизмом S-пар $\varphi : (A, I) \to (A', I')$ называется гомоморфизм алгебр $\varphi : A \to A'$ такой, что $\varphi(I) \subset I'$;
- Произведение S-пар определяется как

$$\prod_{\alpha \in M} (A, I)_\alpha := \left(\prod_{\alpha \in M} A_\alpha, \prod_{\alpha \in M} I_\alpha \right),$$

  где $(A, I)_\alpha = (A_\alpha, I_\alpha)$.

С помощью теорему Биркгофа введем понятие многообразия S-пар:

Определение 2. *Многообразием S-пар ${}^S\mathcal{V}$ называется класс S-пар, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, подпар и произведений.*

Определение 3. *Свободной S-парой многообразия S-пар ${}^S\mathcal{V}$ называется S-пара*

$$\left(\mathbb{F}_{\mathcal{V}}\left[Y\cup Z\right],\mathbb{F}_{\mathcal{V}}\left[Y\cup Z\right]^2\oplus\mathbb{F}Z\right),$$

где многообразие $\mathcal{V}$ состоит из алгебр S-пар ${}^S\mathcal{V}$.

- *Тождеством S-пары (A, I) называется многочлен $f\left(y_1,\ldots,y_k,z_1,\ldots,z_m\right)\in\mathbb{F}\left[Y\cup Z\right]$ такой, что для любых элементов $a_1,\ldots,a_k\in A$, $b_1,\ldots,b_m\in I$ верно равенство $f\left(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m\right)=0$.*
- *Эндоморфизмом свободной пары называется эндоморфизм $\varphi\in End\left(\mathbb{F}_{\mathcal{V}}\left[Y\cup Z\right]\right)$ такой, что $\varphi\left(z_i\right)\in\mathbb{F}_{\mathcal{V}}\left[Y\cup Z\right]^2\oplus\mathbb{F}Z$. Такой эндоморфизм алгебры $\mathbb{F}_{\mathcal{V}}\left[Y\cup Z\right]$ называется S-эндоморфизмом свободной алгебры.*
- *Идеал $I\subset\mathbb{F}_{\mathcal{V}}\left[Y\cup Z\right]$ называется S-идеалом алгебры, если он устойчив относительно всех S-эндоморфизмов.*

Замечание 1. *Множество всех тождеств S-пары (A, I) образуют S-идеал.*

Пусть (L, I) — лиевская S-пара, т.е. L — алгебра Ли, G — алгебра Грассмана счетного ранга. Определим алгебру $J\left(L,I\right)=\left(I\otimes G_0\right)\oplus\left(L\otimes G_1\right)\oplus G_1$ с операцией умножения $\circ$, заданной следующими правилами

$$\begin{aligned}(a\otimes g)\circ h=h\circ(a\otimes g)=a\otimes gh,\quad&\text{если }(a\otimes g)\in\left(L\otimes G_0\right),\ \ h\in G_1,\\ (a\otimes g)\circ(b\otimes h)=[a,b]\otimes gh,\quad&\text{если }(a\otimes g),\ (b\otimes h)\in L\otimes G_1.\end{aligned}$$

Остальные произведения нулевые.

Утверждение 3. *Для любой лиевской S-пары (L, I) алгебра $J\left(L,I\right)\in\mathcal{V}_J$.*

Замечание 2. *Конструкция алгебры $J\left(L\right)$ может быть получена, если положить $I=L$, т.е. $J\left(L\right)=J\left(L,L\right)$.*

Тождества алгебры $J\left(L,I\right)$ также полностью определяются тождествами, выполненными в S-паре (L, I). Поэтому отображение $\mathcal{J}$ можно распространить на многообразия лиевских S-пар: для произвольного многообразия лиевских S-пар ${}^S\mathcal{V}$ положим

$$\mathcal{J}\left({}^S\mathcal{V}\right)=\operatorname{var}\left(J\left(\mathbb{F}_{{}^S\mathcal{V}}\left[X\right]\right)\right),$$

где $\mathbb{F}_{{}^S\mathcal{V}}\left[X\right]$ — свободная S-пара многообразия ${}^S\mathcal{V}$.

Утверждение 1 оказывается частным случаем следующей теоремы.

Теорема 3. *Отображение $\mathcal{J}$ является мономорфизмом из решетки многообразий лиевских S-пар в решетку подмногообразий многообразия $\mathcal{V}_J$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кантор И. Я. Йорданова и лиева супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // II Сибирская Школа (Томск) “Алгебра и Анализ” // Деп. ВИНИТИ №30 — 1990. С. 89–125.
2. Попов А. В. Йордановы алгебры лиева типа // Матем. тр. 2019. Т. 22, №1. С. 127–177.
3. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

4. Филипов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. 4-е издание — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1993.

5. Попов А. В. Нильпотентность альтернативных и йордановых алгебр // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62 № 1. С. 185–197.

6. Зельманов Е. И. Об энгелевых алгебрах Ли // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, N 5. С. 112–117.

——

Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика

УДК 519.716

О замкнутых классах в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами

Н. Ф. Алексиадис (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

On closed classes in a functional system of polynomials with real coefficients

N. Ph. Aleksiadis (Russia, Moscow)
National Research University "MPEI"
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Этот доклад можно считать продолжением цикла моих работ [1]-[3] и трех моих докладов на международных конференциях [4]-[6] о проблеме полноты для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций.

При изложении материала в основном используется терминология книг [7] и [8].

Несмотря на то, что при изложении материала мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия дискретной математики (в частности, теории функциональных систем), с целью корректного понимания изложенного все-таки следует уточнить некоторые моменты.

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных чисел,

R — множества всех действительных чисел,

c_0 — мощность счетного множества,

$c = 2^{c_0}$ — мощность континуум.

2^c — мощность гиперконтинуум.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах – это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).

Функциональные системы обладают определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при их исследовании с позиции математической кибернетики, математической логики и алгебры. Так, с позиции математической кибернетики функциональные системы рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетических систем; с позиции математической логики – как модели логик, т.е. системы предложений с логическими операциями над ними; с позиции алгебры – как универсальные алгебры.

В качестве обобщений реальных функциональных систем могут, в принципе, рассматриваться и универсальные алгебры, однако, в этом случае теряются основные достоинства реальных систем и, прежде всего, такие, как конструктивность множества и операций.

Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем, с одной стороны, определяет серию существенных требований, которые накладываются на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

Проблематика функциональных систем обширна. К числу основных задач для функциональных систем относятся проблемы полноты и выразимости, о синтезе и анализе, о базисах и другие.

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: 2-значная логика (Пост), 3-значная логика (Яблонский), 4-значная логика (Мальцев), k-значная логика (Розенберг). В этих ф.с. решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных подалгебр). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных.

При исследовании проблемы полноты одной из основных задач является изучение структур замкнутых классов (в том числе максимальных замкнутых (предполных) классов). В настоящей работе решается эта задача для функциональной системы полиномиальных функций с действительными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций, в вычислительной математике и технике. Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа полиномиальных функций с действительными коэффициентами, так и в вычленении позитивных результатов, а также в отсечении негативных ситуаций.

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ — это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F — множество функций, а O множество операций над функциями из F, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Для произвольного подмножества A множества F обозначим через $[A]$ множество всех функций из F, которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O. Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A.

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$.

Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом.*

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой.*

Основной проблемой теории функциональных систем (ф.с.) является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с.* $\mathbf{F} = (F, O)$.

Определим функциональную систему полиномов с действительными коэффициентами.

Полиномы с действительными коэффициентами будем называть также *pr-функциями* [1].

Обозначим через F_{PR} множество всех полиномов с действительными коэффициентами.

Функциональная система полиномов с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$ – это пара $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$, где F_{PR} – множество всех полиномов с действительными коэффициентами, а O – множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя:

- *перестановку переменных*;

[1] p – первая буква слова polynomial, r – первая буква слова real

- *переименования переменных (без отождествления)*;
- *отождествления переменных*;
- *введение фиктивной переменной*;
- *удаление фиктивной переменной*;
- *подстановку одной функции в другую.*

Следует отметить, что это определение функциональной системы полиномов с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция pr-функций из F_{PR} является опять pr-функцией из F_{PR}.

Следующие две теоремы дают исчерпывающий ответ о структуре и числе конечных замкнутых классов в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$.

Теорема 1. *В ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$ существуют только следующие конечные замкнутые классы:*
i) C, где C - произвольное конечное подмножество множества Q;
ii) $I_1 = \{x\}, I_2 = \{x; -x\}$;
iii) $C \cup I_1, \{\pm c_1, \cdots, \pm c_k\} \cup I_2$, где $\pm c_1, \cdots, \pm c_k \in Q$, а C, I_1 и I_2 определяются соответственно в предыдущих пунктах.

Теорема 2. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$*
i) число всех конечных замкнутых классов равно c;
ii) число всех бесконечных замкнутых классов равно 2^c;
iii) число всех замкнутых классов равно 2^c;

А следующие две теоремы о базисах замкнутых классов в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$.

Теорема 3. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$*
i) существует замкнутый класс, имеющий конечный базис;
ii) существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис;
iii) существует замкнутый класс, не имеющий базиса.

Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры соответствующих замкнутых классов.

Пример 2. *Базисом замкнутого класса $A = \{2x, 4x, 8x, ..., 2^n x, ...\}$ является конечная система $B = \{2x\}$.*

Пример 3. *Базисом замкнутого класса $A = \{x, 2x, 3x, 4x, ..., mx, ...\}$, где $m \in N$, является бесконечная система $B = \{x, 2x, 3x, 5x, ..., px, ...\}$, где p – любое простое число.*

Пример 4. *Замкнутый класс $A = [T]$, где $T = \{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, ...\}$ не имеет базиса.*

Теорема 4. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$*
i) число замкнутых классов, имеющих конечный базис, равно c;
ii) число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, равно 2^c;
iii) число всех замкнутых классов, не имеющих базиса, равно 2^c.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. Функциональная система полиномов с натуральными коэффициентами // Вестник МЭИ. 2013. № 6. С. 125-140.

2. Алексиадис Н. Ф. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для полиномов с целыми коэффициентами // Вестник МЭИ. 2015. № 3. С. 110-117.

3. Алексиадис Н. Ф. О функциональной системе полиномов с рациональными коэффициентами, // Интеллектуальные системы. Теория и приложения 2019. Том 23, выпуск 4, 93–114.

4. Алексиадис Н. Ф. О рациональных A-функциях с рациональными коэффициентами // XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева.: Материалы XIX Международной конференции, посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва.: Материалы XIX Международной конференции, посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва (Тула, 18–22 мая 2021 г.) — Тула, 2021. С. 97-101.

   [Электронный ресурс], Режим доступа:

   http://poivs.tsput.ru/conf/international/XIX/files/Conference2021.pdf

5. Алексиадис Н. Ф. О базисах рациональных функций с рациональными коэффициентами // XX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 130-летию академика И. М. Виноградова.: Материалы XX Международной конференции, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова (Тула, 21–24 сетября 2021 г.) — Тула, 2021. С. 77-80.

   [Электронный ресурс], Режим доступа:

   http://poivs.tsput.ru/conf/international/XX/files/Conference2021S.pdf

6. Алексиадис Н. Ф. О проблеме полноты рациональных функций с рациональными коэффициентами // Международная конференция Мальцевские чтения.: Международная конференция Мальцевские чтения (Новосибирск, 20–24 сетября 2021 г.) — Новосибирск, 2021. С. 77-80.

   [Электронный ресурс], Режим доступа:

   http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/21/maltsev21.pdf

7. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — Изд–во МГУ. 1982. 157 с.

8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — Изд–во Наука. 1986. 384 с.

УДК 511.32

Аппаратная реализация стандарта постквантовой криптографии HQC

С. К. Воробьев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: verabei@inbox.ru

Hardware implementation of the HQC post-quantum cryptography standard

S. K. Vorobev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: verabei@inbox.ru

в 1994 году Питер Шор предложил[1] алгоритмы факторизации и дискретного логарифмирования, позволяющие с помощью универсального квантового компьютера с достаточно большим числом логических кубитов разложить число или вычислить дискретный логарифм за полиномиальное время. В связи с этим появилась новая задача разработки алгоритмов, устойчивых к квантовым атакам — постквантовых алгоритмов. В 2016 году Национальный институт стандартов и технологий США (NIST) объявил о начале программы по стандартизации постквантовых криптосистем, реализующих распределение ключей и электронную подпись.

В данной работе рассматривается **Hamming Quasi-Cycle** (далее HQC) — стандарт, основанный на задаче декодирования по синдрому квази-циклического кода с проверкой на чётность и принятый на рассмотрение в программе NIST как возможный кандидат для будущей стандартизации. Он включает в себя криптосистему с открытым ключом HQC.PKE и механизм инкапсуляции ключей и данных HQC.KEM.

Задача 8. *Получить аппаратную реализацию криптосистемы HQC в виде логической схемы: представить общую архитектуру и идеологию системы, привести описания используемых алгоритмов, описать реализованные в процессоре операции и исполняемые на процессоре программы, на высоком уровне представив их функционирование.*

В рамках данной работы рассматривается базис, состоящий из всех элементов, реализующих бинарные булевые функции с двумя значимыми переменными.

Определение 1. *Глубина схемы* **D** *— максимальное число базисных элементов в схеме, проходимое сигналом в пути.*

Определение 2. *Сложность схемы* **S** *— общее число базисных элементов в схеме.*

Определение 3. *Требуемое число тактов* **T** *— число тактов процессора (промежутков между синхронизирующими выполнение операций процессора сигналов), необходимое для корректного получения конечного результата программы.*

В данной работе рассматривается аппаратная реализация алгоритма в виде двухуровневой логической схемы конструкции, предложенной Болотовым А. А. и Гринчуком М. И.: описаны, какие программы должен будет выполнять управляющий модуль; описан процессор из вычислительных модулей, выполняющий необходимые при генерации ключей, шифровании и инкапсуляции операции, а также получены оценки глубины, сложности и числа тактов.

Результат работы получен конструктивно:

Теорема 1. *Существует реализация схемы, выполняющей генерацию ключей криптографической системы HQC, шифрование HQC.PKE и инкапсуляцию HQC.KEM при параметрах hqc-128-1 со следующими глубиной и сложностью и за следующее число тактов:*

$$\mathbf{D} = 70;\ \mathbf{S} = 2126633;\ \mathbf{T} = 134918$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shor P. W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. // SIAM Journal on Computing. 1997. Том 26, №5. С. 1484–1509.

———————————————————————————

УДК 511

Числовые рекуррентные последовательности: теоретические основы и практические приложения

Е. И. Деза (Россия, г. Москва),
Московский педагогический государственный университет
e-mail: elena.deza@gmail.com
Л. В. Котова (Россия, г. Москва),
Московский педагогический государственный университет
e-mail: kolv@inbox.ru

Numerical recurring sequences: theoretical foundations and practical applications

E. I. Deza (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: elena.deza@gmail.com
L. V. Kotova (Russia, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: kolv@inbox.ru

Теория рекуррентных соотношений являются важной составной частью современной математической науки. Множество числовых последовательностей имеют рекуррентную природу [6]. Часто они естественным образом связаны с теорией чисел (числа Фибоначчи, фигурные числа, числа Мерсенна и Ферма и др.) или имеют комбинаторные "корни" (элементы треугольника Паскаля, числа Стирлинга, числа Белла, чисал Каталана и др.). Применяемые для исследования рекуррентных последовательностей производящие функции подробно изучаются в математическом анализе, предоставляя широкий спектр практико-ориентированных примеров использования классических аналитических построений. Рекурсивные функции играют важную роль в теории алгоритмов [1, 3].

Приложения теории рекуррентных соотношений крайне востребованы в криптографии (генерация псевдослучайных последовательностей над конечными полями), цифровой обработке сигналов (моделирование обратной связи в системе, где выходные данные одновременно становятся входными для будущего времени), экономике (модели различных секторов экономики – финансового, товарного и др., в которых текущие значения ключевых переменных (процентная ставка, реальный ВВП и т.д.) анализируются с точки зрения прошлых и текущих значений других переменных), биологии (например, модели динамики роста той или иной популяции; вспомним числа Фибоначчи) и др. [4, 5].

Мы рассматриваем несколько аспектов указанной тематики, в том числе:

- историю вопроса, место числовых рекуррентных последовательностей в развитии математической науки и математического образования [1, 2, 4];

- примеры использования рекуррентного подхода при построении различных классов (и подклассов) специальных чисел (фигурных чисел, пар дружественных чисел, пифагоровых троек и др.) [2, 3];
- теоретические аспекты использования последовательностей больших периодов над конечными полями в радиолокации и методы генерации псевдослучайных последовательностей для обеспечения криптографической защиты информации, передаваемой на большие расстояния [4, 5].

В частности, в работе представлена рекуррентная схема построения так называемых *центрированных k-пирамидальных чисел* $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, ...$, которые представляют собой конфигурации точек, образующих k-угольную пирамиду, в основании которой лежит *центрированное k-угольное число* $CS_k(n)$.

Исходя из определения, мы получаем для последовательности $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, ...$, рекуррентную формулу

$$CS_k^3(n+1) = CS_k^3(n) + CS_k(n+1),\ CS_k^3(1) = 1.$$

Учитывая, что $CS_k(n+1) = \frac{kn^2+kn+2}{2}$ и пользуясь стандартными подходами [3], мы доказываем, что производящая функция $f(x)$ последовательности $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, ...$, имеет вид

$$f(x) = \frac{x(1+(k-2)x+x^2)}{(1-x)^2},\ |x| < 1,$$

в то время как явная формула для $CS_k^3(n)$ имеет вид

$$CS_k^3(n) = \frac{kn^3 + n(6-k)}{6}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. - М.: РиполКлассик, 2013.
2. Деза Е.И. Специальные числа натурального ряда. - М.: URSS, 2010.
3. Деза Е.И. Фигурные числа. - М.: МЦНМО, 2016.
4. Деза Е.И., Котова Л.В. Введение в криптографию. - М.: URSS, 2018.
5. Нечаев В.И. Основы защиты информации. - М.: МГУ, 1999.
6. Sloane N.J.A., Plouffe S. The Encyclopedia of Integer Sequences. San Diego: Academic Press, 1995.

УДК 512.548.7

О числе n-квазигрупп, порождаемых правильным семейством функций[1]

А. В. Галатенко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: agalat@msu.ru
В. А. Носов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vnosov40@mail.ru
А. Е. Панкратьев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
С. С. Чаплыгина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: svetlana.chaplygina@math.msu.ru

The number of n-quasigroups generated by a proper family of functions

A. V. Galatenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: agalat@msu.ru
V. A. Nosov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vnosov40@mail.ru
A. E. Pankratiev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
S. S. Chaplygina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: svetlana.chaplygina@math.msu.ru

В работе оценивается мощность множества n-квазигрупп, порождаемых правильным семейством порядка m в k-значной логике. Показывается, что эта мощность однозначно определяется мощностью образа правильного семейства.

Введение

В последние годы возник интерес к использованию конечных квазигрупп и конечных n-квазигрупп при построении различных криптографических примитивов (см., например, [1, 2]). Для ряда криптографических конструкций актуальна задача порождения больших семейств квазигрупп или n-квазигрупп большого порядка ([3, 4]). Одно из возможных решений этой задачи основано на правильных семействах функций, введенных В. А. Носовым в работе [5]. Оказалось, что правильные семейства могут быть использованы для задания параметрических классов квазигрупп и n-квазигрупп [6, 7]. Параметризация осуществляется за счет выбора

[1]Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект”

внутренних функций, подставляемых в функции семейства, при этом, вообще говоря, различным значениям параметров могут соответствовать равные квазигруппы или n-квазигруппы. Возникает задача оценки мощности класса n-квазигрупп, порождаемого заданным правильным семейством. Основным результатом нашей работы является теорема 2, в которой показывается, что правильное семейство порядка m в k-значной логике порождает ровно M^{k^n} попарно различных n-квазигрупп, а также доказывается, что функция Шеннона, то есть максимум по всем правильным семействам заданного порядка, равна $\left(k^{k^n}\right)^{(m-1)}$.

Правильные семейства функций и n-квазигруппы

Пусть $k, m \in \mathbb{N}$. Множество $\{0, \ldots, k-1\}$ обозначим через E_k, множество всех функций из E_k^m в E_k — через P_k^m.

Определение 1. *Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Семейство функций $(g_1, \ldots, g_m)$, $g_i \in P_k^m$, $i = 1, \ldots, m$, называется правильным, если для любых $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ из E_k^m найдется индекс j, такой что $\alpha_i \neq \beta_i$, но $g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = g_i(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.*

Известными примерами правильных семейств являются треугольные и ортогональные семейства. Напомним, что семейство называется треугольным, если для каждой из функций g_i переменные $x_i, \ldots, x_n$ являются фиктивными. Ортогональные семейства были предложены для $k = 2$; требуется, чтобы для каждой из функций g_i переменная x_i была фиктивна, и для любой пары (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant m$, выполнялось тождество $g_i \cdot g_j \equiv 0$.

Определение 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Q — конечное непустое множество, $f\colon Q^n \to Q$ обратима по каждой переменной. Тогда пара (Q, f) называется конечной n-квазигруппой. В случае $n = 2$ также используется термин конечная квазигруппа.*

В дальнейшем все структуры будут полагаться конечными, поэтому слово "конечный" будет опускаться.

Пусть $Q = E_k^m$ для некоторых $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Тогда элементы Q могут быть естественным образом закодированы наборами длины k с элементами из E_k, а операция f может быть записана в виде вектор-функции $(f_1, \ldots, f_k)$, где $f_i\colon E_k^{mn} \to E_k$ являются функциями k-значной логики арности mn. Известно, что для задания больших семейств n-квазигрупп могут быть использованы правильные семейства функций.

Теорема 1 ([7]). *Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k, m \geqslant 2$, $(E_k, h_1), \ldots, (E_k, h_m)$ — $(n+1)$-квазигруппы, $g_1, \ldots, g_m \in P_k^m$, $\pi_1, \ldots, \pi_m \in P_k^n$,*

$$f_i\left(x_1^1, \ldots, x_m^1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_m^n\right) = \\ = h_i\left(x_i^1, \ldots, x_i^n, g_i\left(\pi_1\left(x_1^1, \ldots, x_1^n\right), \ldots, \pi_m\left(x_m^1, \ldots, x_m^n\right)\right)\right), \quad (1)$$

$i = 1, \ldots. m$. Тогда $(E_k^m, (f_1, \ldots, f_m))$ является n-квазигруппой для произвольного выбора внутренних функций $\pi_1, \ldots, \pi_m$ если и только если семейство $(g_1, \ldots, g_m)$ правильное.

Очевидным примером $(n + 1)$-квазигрупповой операции является сложение $n + 1$ числа по модулю k, но для обеспечения более высокой стойкости могут использоваться и другие варианты.

Число n-квазигрупп, порожденных правильным семейством

Из соотношений (1) вытекает, что с помощью одного правильного семейства порядка m k-значной логики вариацией внутренних функций можно задать $\left(k^{k^n}\right)^m$ n-квазигрупп порядка k^m, однако некоторые их этих n-квазигрупп (или даже все, если правильное семейство состоит только из констант) могут совпадать. Покажем, что число попарно различных n-квазигрупп полностью определяется мощностью образа правильного семейства и не превосходит $\left(k^{k^n}\right)^{(m-1)}$, причем эта оценка достигается.

Несложно убедиться в верности следующих вспомогательных утверждений. Зафиксируем $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geqslant 2$, и правильное семейство $G = (g_1, \ldots, g_m)$, $g_i \in P_k^m$, $i = 1, \ldots, m$. Заметим, что G можно рассматривать как функцию из E_k^m в E_k^m.

Лемма 1. *Функция G принимает не больше, чем k^{m-1} значений.*

Введем отношене эквивалентности $\sim$ на множестве E_k^m. Наборы $\alpha, \beta \in E_k^m$ эквивалентны, если $G(\alpha) = G(\beta)$. По лемме 1 мощность множества классов эквивалентности не превосходит k^{m-1}. Продолжим введенное отношение на множество наборов $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$, $\pi_i \in P_k^n$, $i = 1, \ldots, m$. Пара наборов $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ и $(\pi'_1, \ldots, \pi'_m)$ эквивалентна, если для любого $\alpha \in E_k^n$ выполнено $\pi_i(\alpha) \sim \pi'_i(\alpha)$, $i = 1, \ldots, m$.

Лемма 2. *Пусть функция G принимает M значений. Тогда мощность множества классов экивалентности наборов $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ равна M^{k^n}.*

Лемма 3. *n-квазигруппы, полученные из правильного семейства G подстановками внутренних функций $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ и $(\pi'_1, \ldots, \pi'_m)$, совпадают тогда и только тогда, когда $(\pi_1, \ldots, \pi_m) \sim (\pi'_1, \ldots, \pi'_m)$.*

Лемма 4. *Треугольное правильное семейство* $(\mathrm{const}, x_1, \ldots, x_{m-1})$ *порождает* $\left(k^{k^n}\right)^{(m-1)}$ *попарно различных n-квазигрупп.*

Из лемм 1–4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция G принимает M значений. Тогда правильное семейство $(g_1, \ldots, g_m)$ порождает ровно M^{k^n} попарно различных n-квазигрупп. Число n-квазигрупп, порождаемых правильным семейством, не превосходит $\left(k^{k^n}\right)^{(m-1)}$, причем эта оценка достигается.*

Замечание 1. *Число n-квазигрупп, порождаемых ортогональным правильным семейством, оказывается существенно меньше, чем $\left(2^{2^n}\right)^{(m-1)}$. Действительно, так как на каждом наборе не более, чем одна функция g_i может быть отличной от нуля, функция G может принимать не более $m+1$ значения, и по теореме 2 число уникальных n-квазигрупп не превосходит $(m+1)^{2^n}$.*

Заключение

В работе получена оценка числа n-квазигрупп, порождаемых правильным семейством функций. Направления дальнейших исследований включают уточнение оценок на число n-квазигрупп, порождаемых правильными семействами заданного порядка при фиксированных внешних операциях $h_1, \ldots, h_m$, а также рассмотрения случая, когда операции $h_1, \ldots, h_m$ выбираются произвольным образом из некоторого множества.

Авторы благодарят К. Д. Царегородцева за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shcherbacov V. A. Quasigroups in cryptology // Computer Science Journal of Moldova. 2009. Vol. 17, № 2(50). P. 193–228.

2. Chauhan D., Gupta I., Verma R. Quasigroups and their applications in cryptography // Cryptologia. 2021. Vol. 45, № 3. P. 227–265.

3. Чередник И. В. Об использовании бинарных операций при построении кратно транзитивного множества блочных преобразований // Дискретная математика. 2020. Том 32, № 2. С. 85–111.

4. Gligoroski D., Markovski S., Knapskog S. J. Public key block cipher based on multivariate quadratic quasigroups // Cryptology ePrint Archive, Report 2008/320, 2008. 22 p.

5. Носов В. А. Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом // Интеллектуальные системы. 1998. Том 3, № 3–4. С. 269–280.

6. Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E. Latin sqyares over quasigroups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, № 2. P. 194–203.

7. Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E. Functional specification of quasigroup operations // Материалы XIX международной конференции “Проблемы теоретической кибернетики” (Казань, 28 сентября – 1 октября 2021 г.) — Казань, 2021. С. 35–37.

УДК 512.12

Использование кватернионов при решении некоторых многопараметрических задач в псевдоевклидовых пространствах

И. Х. Еникеев (Россия, г. Москва)
Московский политехнический университет
e-mail: enickeev.ix@yandex.ru
С. А. Муханов (Россия, г. Москва)
Московский политехнический университет
e-mail: s_a_mukhanov@mail.ru

The use of quaternions in solvinq some multi-parameter problems in psevdo-Euclidean spaces

Enikeev I.H. (Russia, Moscow)
Moscow Polytechnic University
e-mail: enickeev.ix@yandex.ru
Mukhanov S.A. (Russia, Moscow)
Moscow Polytechnic University
e-mail: s_a_mukhanov@mail.ru

1. Алгебра кватернионов

Определение 1. *Кватернионом называется выражение вида:* $\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$, *где* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ *– компоненты кватерниона, а* i_0, i_1, i_2, i_3 *– кватернионные единицы, удовлетворяющие правилам умножения кватернионных единиц [1, 2, 3]. Тогда умножение кватернионов с ненулевой скалярной и векторной частью* $\Lambda = \lambda_0 + \overrightarrow{\lambda}$ *и* $M = M_0 + \overrightarrow{M}$ *осуществляется по формуле:*

$$\Lambda \circ M = \left(\lambda_0 + \overrightarrow{\lambda}\right) \circ \left(M_0 + \overrightarrow{M}\right) = \lambda_0 M_0 - \left(\overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{M}\right) + \lambda_0 \overrightarrow{M} + M_0 \overrightarrow{\lambda} + \left[\overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{M}\right].$$

Таким образом, кватернион можно представить в виде вектора в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве с метрическим тензором, имеющим вид:

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Вращение векторов

а) Поворот на малый угол. Пусть вектор $\overrightarrow{x}$ поворачивается вокруг оси, заданной единичным вектором $\overrightarrow{n}$, на малый угол $d\varphi$ (рис. 1). Тогда $\left|\overrightarrow{dx}\right| = |\overrightarrow{x}| \sin\alpha d\varphi \Rightarrow \overrightarrow{dx} = [\overrightarrow{n} d\varphi, \overrightarrow{x}]$. Новый вектор

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{dx} = \overrightarrow{x} + d\varphi [\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}] \tag{1}$$

Рассмотрим $\Lambda = 1 + \frac{d\varphi}{2}\overrightarrow{n}$ и найдем значение выражения:

$$\Lambda \overrightarrow{x} \overline{\Lambda} = \left(1 + \frac{d\varphi}{2}\overrightarrow{n}\right) \overrightarrow{x} \left(1 - \frac{d\varphi}{2}\overrightarrow{n}\right) = \left(\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}) \frac{d\varphi}{2} + [\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}] \frac{d\varphi}{2}\right) \left(1 - \frac{d\varphi}{2}\overrightarrow{n}\right) =$$
$$= \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}) \frac{d\varphi}{2} + [\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}] \frac{d\varphi}{2} + (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}) \frac{d\varphi}{2} + [\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}] \frac{d\varphi}{2} + O(d\varphi) = \overrightarrow{x} + [\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}] \, d\varphi. \tag{2}$$

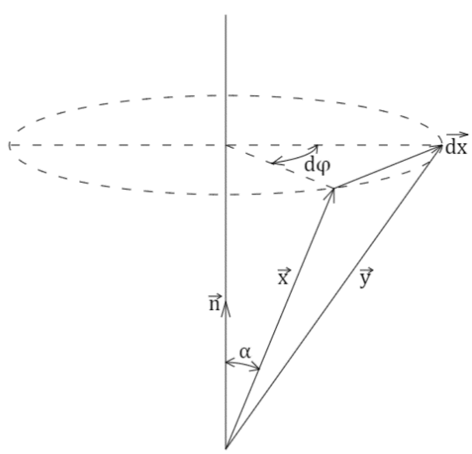


Рис. 1: Поворот на малый угол

Из (1,2) $\Rightarrow$ поворот вектора $\overrightarrow{x}$ вокруг единичного $\overrightarrow{n}$ на малый угол $d\varphi$ может быть записано в виде: $\overrightarrow{y} = \Lambda \overrightarrow{x} \overline{\Lambda}$, где $\Lambda = 1 + \frac{\overrightarrow{n}}{2} d\varphi$ – кватернион поворота на угол $d\varphi$, а $\overrightarrow{n}$ единичный вектор оси поворота. Пусть $M = 1 + \frac{\vec{n}}{2} d\varphi$ – кватернион поворота на угол $d\varphi$, а $\overrightarrow{n}$ – единичный вектор оси поворота.

Тогда:

$$\overrightarrow{Z} = M\overrightarrow{y}\overline{M} = M\Lambda\overrightarrow{x}\overline{\Lambda M} = (M\Lambda)\,\overrightarrow{x}\,\left(\overline{M\Lambda}\right) = N\overrightarrow{x}\overline{N}, \tag{3}$$

где $N = M\Lambda$. Из (3) следует, что применение нескольких поворотов вектора $\overrightarrow{x}$ относительно разных осей эквивалентно применению одного поворота, кватернион которого равен произведению кватернионов соответствующих поворотов.

b) Поворот на конечные углы. Рассмотрим кватернион поворота вектора $\overrightarrow{x}$ на угол φ вкруг оси с единичным вектором $\overrightarrow{n}$ в виде: $M = M(\varphi)$. Тогда, чтобы повернуть $\overrightarrow{x}$ на угол $\varphi + d\varphi$ можно сначала повернуть на угол φ (применить кватернион поворота $M(\varphi)$), а затем полученный вектор повернуть на угол $d\varphi$, т.е. применить кватернион поворота $\Lambda = 1 + \frac{d\varphi}{2}\overrightarrow{n}$. Тогда:

$$M(\varphi + d\varphi) = \left(1 + \frac{d\varphi}{2}\overrightarrow{n}\right) M(\varphi) \Leftrightarrow dM(\varphi) = \frac{d\varphi}{2}\overrightarrow{n} M(\varphi). \tag{4}$$

Будем считать, что $M(0) = 1$ [4, 5], тогда запишем (4) в виде: $M'(\varphi) = \frac{dM(\varphi)}{d\varphi} = \overrightarrow{n}\frac{M(\varphi)}{2} \Rightarrow$ $M'(0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{n}M(0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{n}$, $M''(\varphi) = \frac{1}{2}\overrightarrow{n}M'(0) = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{n}\right)^2 \Rightarrow$

$$M(\varphi) = 1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{n}\varphi + \frac{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{n}\varphi\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{n}\varphi\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{n}\varphi\right)^4}{24} + \ldots.$$

Так как $\overrightarrow{n}^2 = -|\overrightarrow{n}|^2 = -1$, $\overrightarrow{n}^3 = -\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n}^4 = 1$ и т.д., то:

$$M(\varphi) = \left(1 - \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4}{24} + \ldots\right) + \overrightarrow{n}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^5}{120} + \ldots\right) = \cos\frac{\varphi}{2} + \overrightarrow{n}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Таким образом, кватернион поворота на угол φ вектора $\overrightarrow{x}$ вокруг оси с единичным вектором $\overrightarrow{n}$ будет иметь вид:

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{n}\sin\frac{\varphi}{2} \tag{5}$$

Рассмотрим задачу о нахождении псевдометрики пространства кватернионов, у которых координаты осей поворотов, являются функциями двух переменных. Пусть кватернионы Λ и M имеют вид $\Lambda = \lambda_0\overrightarrow{i}_0 + \lambda_1\overrightarrow{i}_1 + \lambda_2\overrightarrow{i}_2 + \lambda_3\overrightarrow{i}_3$, $M = \mu_0\overrightarrow{i}_0 + \mu_1\overrightarrow{i}_1 + \mu_2\overrightarrow{i}_2 + \mu_3\overrightarrow{i}_3$, где $\lambda_i = \lambda_i(a, x)$, $\mu_i = \mu_i(a, x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, a – параметр, x – вещественная переменная. Из (4,5) следует, что при малых отклонениях осей поворота метрикой пространства поворотов будет псевдометрика, определяемая соотношением:

$$\rho(R_1, R_2) \cong 2\,|\Lambda - M| \tag{6}$$

Будем считать, что компоненты λ_i и μ_i подобраны таким образом,что

$$|\Lambda - M| = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{a - |x|}\right)^2 + \arcsin\left(\sin\left(a - |x|\right)\right)\right] \tag{7}$$

Из (6,7) следует, что

$$\rho(R_1, R_2) = \left(\sqrt{a - |x|}\right)^2 + \arcsin\left(\sin\left(a - |x|\right)\right) \tag{8}$$

Определим, при каких значениях параметра a множество точек на координатной плоскости xOy, для которых координата y является метрикой пространства поворотов и определяется соотношением:

$$\rho\left(R_1, R_2\right) \leqslant \left(\sqrt{a-|x|}\right)^2 + \arcsin\left(\sin\left(a-|x|\right)\right) \tag{9}$$

является восьмиугольником.

Обозначим через $y=\rho\left(R_1, R_2\right)$, $z=a-|x| \geqslant 0$. Тогда (9) равносильно

$$\left\{\begin{array}{l} y \leqslant z+\arcsin(\sin z); \\ z \geqslant 0; \\ y \geqslant 0. \end{array}\right. \tag{10}$$

Построим границу множества (10) в переменных (z, y) (рис. 2)

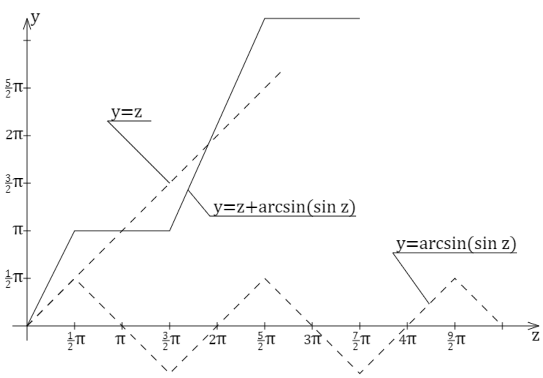


Рис. 2: Граница множества в переменных (z, y)

Из (10) следует, что метрика $\rho\left(R_1, R_2\right)$ симметрична относительно оси ординат, поэтому достаточно построить фигуру при $x \leqslant 0$. Поскольку $z=a-|x| \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} z=a-x; \\ x \in [0, a]\,; \\ a \in [0,+\infty) \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} z=a+x; \\ x \in [-a, 0]\,; \\ a \in [0,+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=a-z; \\ x \in [0, a]\,; \\ a \in [0,+\infty) \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x=z-a; \\ x \in [-a, 0]\,; \\ a \in [0,+\infty) \end{array}\right. \tag{11}$$

Из (11) следует, что при переходе от системы координат (z, y) к координатной системе (x, y) происходит перемещение графика на рис.2 влево на a единиц вдоль оси Oz или, что тоже самое, перемещение оси y вправо на такое же количество единиц. Из рис. 2 сследует чтобы получить восьмиугольник, необходимо условие: $a \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$. Для $a=\frac{7\pi}{2}$ получим:

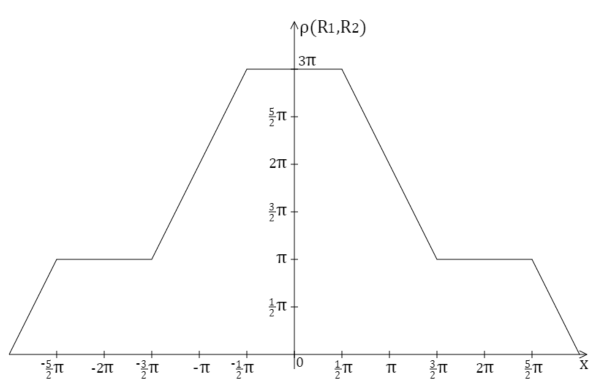


Рис. 3: Полученный восьмиугольник

3. Заключение (выводы)

Использование соотношения (6) для псевдометрики пространства поворотов для случая малых поворотов позволяет решать такой класс задач, как определение по заданным компонентам соответствующих кватернионов, границ множеств, в каждой точке которых значение рассогласования поворотов осей не превосходит заданной величины.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: МЦНМО, 2002. – 40 с.

2. Ефремов А. П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физическая теория //Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, №1, 2004, с. 111-127.

3. Голубев Ю. Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твёрдого тела // Препринты ИПР им. М. В. Келдыша, 2013, №39 - 23 с.

4. Побегайло А. П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике, - Минск, БГУ, 2010. – 216 с.

5. Цисарие В. В., Марусик Р. И. Математические методы компьютерной графики. – Киев, ФАКТ, 2004. – 464 с.

УДК 512.548

О допустимости диассоциативных квазигрупп 9-го порядка[1]

О. О. Комилов (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail:okil.komilov@yandex.ru

On the admissibility of diassociative quasigroups of order 9

O. O. Komilov (Tajikistan, c. Dushanbe)
Tajik national university
e-mail:okil.komilov@yandex.ru

За последние десятилетия теория квазигрупп получила развитие в работах различных математиков и в настоящее время она представляет собой быстроразвивающийся и самостоятельный раздел общей алгебры со своими задачами и проблемами. Достаточно полную информацию об этом можно получить из монографий В.Д.Белоусова [1] и Р.Брака [2].

Напомним, что группоид $(Q, \cdot)$ называется квазигруппой, если для любых $a, b \in Q$ уравнения

$$a \cdot x = b, y \cdot a = b \tag{1}$$

всегда разрешимы, причём однозначно. Разрешимость в квазигруппах проверяется при помощи таблицы Кэли группоида $(Q, \cdot)$, где все элементы в каждой строке и в каждом столбце различны. В левом углу таблицы указывают знак операции. Так как внутренняя часть таблицы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке...

Кэли является латинским квадратом, то важно охарактеризовать требуемые алгебраические свойства квазигрупп из их латинских квадратов [3]. Часто для удобств вместо латинских букв в таблице используются цифры.

Известно, что подстановка θ множества Q для квазигруппы $(Q,\cdot)$ называется полной, если отображение θ'

$$\theta' x = x \cdot \theta x, \forall x \in Q \tag{2}$$

также является подстановкой множества Q. И квазигруппа, обладающая хотя бы одной полной подстановкой, называется допустимой [1]. Допустимыми являются квазигруппы из класса так называемых идемпотентных квазигрупп:$x \cdot x = x$, $\forall x \in Q$. Алгебраический эквивалент полной подстановки это трансверсаль латинского квадрата.

Ниже приводим определение, которое было введено А. Табаровым, в связи с исследованием порядка элементов и обобщением идемпотентных элементов в линейные квазигруппы [4].

Определение 1. *Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется диассоциативной степени $k(l)$, если в ней выполняются одновременно следующие тождества:*

$$[x, y^k] = ((...(x\underbrace{y)y)...)y}_{k-\text{раз}} = x, \tag{3}$$

$$\{y^l, x\} = \underbrace{y(...(y(y}_{l-\text{раз}}x)...)) = x. \tag{4}$$

В работе [5] авторами было доказано предложение о существовании допустимости диассоциативных квазигрупп 5-го порядков, и также были найдены все идемпотентные и унипотентные диассоциативные квазигруппы 5-го порядка степени 4 (табл.1).

Таблица 1. Диассоциативные квазигруппы 5-го порядка

Классы	Обозначение	Количество	Пример
Идемпотентные	x^2	36	1 3 4 5 2 4 2 5 1 3 5 1 3 2 4 3 5 2 4 1 2 4 1 3 5
Унипотентные	$x^2 = y^2$	90	3 2 4 5 1 1 3 5 2 4 5 4 3 1 2 4 1 2 3 5 2 5 1 4 3

В данной работе найдены примеры диассоциативных квазигрупп 9-го порядка степени 4, которые являются допустимыми. Для этих квазигрупп найдены полные подстановки, которые приводят к допустимости этих квазигрупп. Также эти квазигруппы классифицированы по основным тождествам [6], которые характерны тем, что в них участвует всего одна операция, которая обозначена, как обычное умножение. С этой целью разработаны алгоритм и программа, с помощью которых классифицируются квазигруппы 9-го порядка.

Пример 5. *Пусть $(Q,\cdot)$ - квазигруппа 9 - го порядка со следующей таблицей умножения:*

Таблица 2. Квазигруппа 9 - го порядка

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	4	7	3	8	5	2	9	6
2	8	2	5	6	1	9	4	3	7
3	6	9	3	7	4	2	8	5	1
4	5	3	9	4	7	1	6	2	8
5	7	6	1	2	5	8	9	4	3
6	2	8	4	9	3	6	1	7	5
7	9	5	2	8	6	3	7	1	4
8	3	7	6	1	9	4	5	8	2
9	4	1	8	5	2	7	3	6	9

Тогда $(Q,\cdot)$ диассоциативная степени $k(l) = 4$, также идемпотентная, то есть в $(Q,\cdot)$ выполняются тождества:

1. $(((xy)y)y)y = x = y(y(y(yx)))$;

2. $xx = x$.

Тождества диассоциативность и идемпотентность легко проверяются по заданной таблице Кэли квазигруппы $(Q,\cdot)$ (табл.2), где $Q = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Для диассоциативной квазигруппы $(Q,\cdot)$ из табл.2 тождественная подстановка

$$\theta = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 123456789 \end{pmatrix}$$

будет полной. Здесь

$$\theta' = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 123456789 \end{pmatrix}.$$

Следствие 1. *Так как любая идемпотентная квазигруппа допустима, тогда данная идемпотентная диассоциативная квазигруппа 9-го порядка степени $k, l = 4$ допустима.*

Пример 6. *Пусть $(Q,\cdot)$ - квазигруппа 9 - го порядка и пусть таблица Кэли для этой квазигруппы имеет следующий вид (табл.4):*

Таблица 4. Квазигруппа 9-го порядка

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	4	7	1	8	5	2	9	6
2	6	2	5	8	1	9	4	3	7
3	7	9	3	6	4	2	8	5	1
4	4	3	9	5	7	1	6	2	8
5	2	6	1	7	5	8	9	4	3
6	9	8	4	2	3	6	1	7	5
7	8	5	2	9	6	3	7	1	4
8	1	7	6	3	9	4	5	8	2
9	5	1	8	4	2	7	3	6	9

Очевидно, что квазигруппа $(Q,\cdot)$ диассоциативная степени 4, а также допустимая квазигруппа. То есть, в $(Q,\cdot)$ выполняются тождества:

1. $(((xy)y)y)y = x = y(y(y(yx)))$;

2. $\eta : \eta x = x \cdot \theta(x), x \in Q$.

Также можно для этой квазигруппы $(Q,\cdot)$ определить полную подстановку, где

$$\theta = \binom{123456789}{156482739}, \theta' = \binom{123456789}{312548769}.$$

Следствие 2. *Существуют допустимые диассоциативные квазигруппы 9 - го порядков степени* $k(l) = 4$.

В.Д.Белоусовым в системах $Q(\Sigma)$, где Σ состоит из бинарных операций, определённых на множестве Q, определены общие тождества. Ниже приведены основные из них, которые встречаются часто в алгебраических системах в примере групп и квазигрупп:

1. $xy \cdot z = x \cdot yz$ – ассоциативность;

2. $yx \cdot zx = yz$ – транзитивность;

3. $x \cdot yz = xy \cdot xz$ – левая дистрибутивность;

4. $x \cdot xy = xx \cdot y$ – левая альтернативность;

5. $xy \cdot x = x \cdot yx$ – элластичность;

6. $xx = x$ – идемпотентность;

7. $xx = yy$ – унипотентность;

8. $x \cdot xy = yx$ – тождество Стейна.

На основе этих тождеств разработан алгоритм классификации квазигрупп 9-го порядка, и также разработана программа на языке C#. С помощью этой программы проведена идентификация диассоциативных квазигрупп 9-го порядка по вышеназванных тождествам (рис. 1).

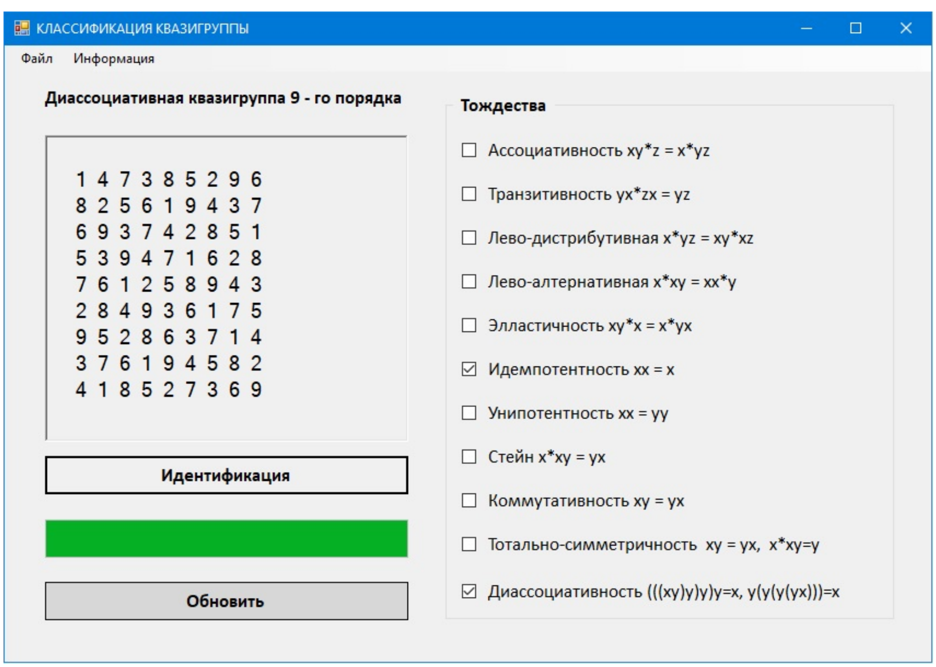


Рис. 1: Классификация диассоциативной квазигруппы 9-го порядка

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — Москва: Изд-во Наука, 1967. 223 с.
2. Bruck R. H. A Survey of binary systems. — Berlin: Springer Verlag, 1958. P. 185.
3. Артамонов В. А. Квазигруппы и их приложения // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 111 – 122.
4. Табаров А. Х., Каримов Ф. Линейные квазигруппы с дополнительными тождествами. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2011. № 2. С. 3 – 7.
5. Табари А. Х., Комилов О. О. О допустимости диассоциативной квазигруппы // Международная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича.: тезисы докладов международной конференции (Душанбе, 25–26 декабря 2020 г.) — Душанбе, С.321 – 322.
6. Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами.// УМН. 1965. Том 20, Вып. 1(121). С. 75 – 146.

УДК 519.142

Изоморфизмы известных 5-конфигураций

М. М. Комягин (Россия, г. Москва)
ООО "Центр сертификационных исследований"
e-mail: komyagin.maks@mail.ru
Ф. М. Малышев (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Isomorphisms of known 5-configurations

M. M. Komyagin (Russia, Moscow)
LLC "Certification Research Center"
e-mail: komyagin.maks@mail.ru
F. M. Malyshev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Понятие k-конфигурации возникло в связи с производственной необходимостью в разреженных матрицах L над полем $GF(2)$ с равномерным распределением числа единиц по строкам и столбцам матрицы, причём это свойство должно выполняться и для обратной матрицы. Матрицы с таким свойством используются в алгоритмах шифрования ARIA, CRYPTON, SEED, SM4 [1] – [5].

Определение 1. *Матрицу $L \in GL(v, 2)$ (рассматриваемую с точностью до независимых перестановок строк и столбцов) называем k-матрицей, если у неё и у матрицы L^{-1} в каждой строке и в каждом столбце k единиц и $v - k$ нулей. Соответствующее семейство из v подмножеств мощности k в множестве $X = \{1, \dots, v\}$ с такой матрицей инциденций называем k-конфигурацией.*

Когда важен размер v матрицы L, говорим о (v, k)-матрицах. Подстановочные матрицы являются 1-матрицами. При чётном v инвертирование элементов k-матрицы предоставляет $(v, v - k)$-матрицу. Операция сложения подмножеств $A, B \subseteq X$ по правилу $A + B = (A \cup B) \diagdown (A \cap B)$ позволяет сформулировать эквивалентное определению 1

Определение 2. *Совокупность $\mathcal{X} \subset 2^X$ из v подмножеств мощности k в множестве X, $|X| = v$, называем k-конфигурацией, если:*

i) каждый элемент $x \in X$ принадлежит ровно k подмножествам из $\mathcal{X}$,

ii) каждый элемент $x \in X$ является суммой (как подмножество $\{x\}$) ровно k подмножеств из $\mathcal{X}$, причём каждое подмножество из $\mathcal{X}$ участвует в качестве слагаемого ровно в k таких суммах.

Называем k-конфигурацию неразложимой, если образованный ею гиперграф связен. Результаты многих авторов о строении неразложимых k-конфигураций представлены в обзоре [6], где, в частности, доказывается

Теорема 1. *При любых чётном v и нечётном k, $0 < k < v$, существует неразложимая (v, k)-конфигурация. Если при нечётных v и k существует (v, k)-конфигурация, то $v \geqslant k + (1 + \sqrt{4k - 3})/2$. Для $k \leqslant 17$ и всех $v \geqslant k + (1 + \sqrt{4k - 3})/2$ существует (v, k)-конфигурация за исключением при $k = 3$ значения $v = 7$, когда её не существует.*

В [6] доказывается также теорема о том, что неразложимые $(v, 3)$-конфигурации (за единственным исключением) существуют только при чётном v. При каждом $v = 2w$, $w \geqslant 2$, 3-конфигурация состоит из подмножеств в группе вычетов $\mathbb{Z}_v$ вида $\{2i, 2i + 1, 2i + 2\}$, $\{2i, 2i + 1, 2i + 3\}$, $i = 0, 1, \dots, w - 1$. Исключение представляет $(5, 3)$-матрица с двумя нулями в строках и столбцах. Класс 5-конфигураций оказался существенно богаче. В известных примерах 5-конфигураций задействован весь спектр средств, привлекавшихся ранее для построения k-конфигураций, включая правильные многогранники, регулярные и симметрические графы, квадратичные вычеты по простому модулю, конечные группы, (v, k, λ)-конфигурации, включая конфигурации, которые отвечают совершенным разностным множествам, конечным проективным плоскостям и матрицам Адамара. При таком разнообразии возможностей не исключена изоморфность (перестановками строк и столбцов матриц) различно представленных (v, k)-конфигураций. В настоящем докладе показывается, что за исключением небольшого числа известные к настоящему времени 5-конфигурации изоморфны 5-конфигурациям приводимых ниже трёх бесконечных серий, частный вид которых предлагался в [7], [9]–[12].

Под 2-графом Γ будем понимать связный ориентированный граф на конечном множестве вершин V без петель и параллельных дуг с двумя входящими и двумя выходящими дугами для каждой вершины. Граф Γ в виде ориентированного цикла естественно считать 1-графом. Концы дуг, выходящих из вершины $v \in V$ 2-графа Γ, обозначаем v_0 и v_1, а для 1-графа – v_0. В этих обозначениях неразложимые 3-конфигурации $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$ строятся по 1-графу Γ на множестве $X = V \times \{0, 1\}$ с 3-подмножествами X_x, $x = (v, \varepsilon) \in V \times \{0, 1\}$, $X_x = \{(v, \varepsilon), (v_0, 0), (v_0, 1)\}$. Серии 5-конфигураций приводим в порядке $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Серия $\mathcal{C}$. Пусть Γ – 1-граф с множеством вершин V. Полагаем $X = V \times \{0, 1, 2\}$, $X_x = \{(v, 0), (v, 1), (v, 2), (v_0, \nu), \, \nu \in \{0, 1, 2\} \diagdown \{\varepsilon\}\}$, $x = (v, \varepsilon) \in V \times \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$.

Серия $\mathcal{A}$. Пусть Γ – 2-граф с множеством вершин V. Полагаем $X = V \times \{0, 1\}$, $X_x = \{(v, \varepsilon), (v_0, 0), (v_0, 1), (v_1, 0), (v_1, 1)\}$, $x = (v, \varepsilon) \in V \times \{0, 1\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$.

Серия $\mathcal{B}$. Пусть Γ – 2-граф с множеством вершин V, у которого дуги помечены либо 0 либо 1 так, что как входящие, так и выходящие дуги каждой вершины $v \in V$ помечены различно. Через v_ε обозначаем конец дуги, выходящей из вершины $v \in V$, помеченной как $\varepsilon \in \{0,1\}$. Для каждой вершины $v \in V$ из v_0 и v_1 выходит пара дуг с общим концом. Полагаем $X = V \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, $X_x = \{(v,\varepsilon,\nu),(v_0,0,\nu),(v_0,1,\nu),(v_1,\varepsilon,0),(v_1,\varepsilon,1)\}$, $x = (v,\varepsilon,\nu) \in V \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, $\mathcal{X} = \{X_x | \, x \in X\}$.

Выполнение равенств $\{x\} = \sum_{y \in X_x} X_y$, $x \in X$, для серий $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и равенств $\{x\} = \sum_{y \in X:\, x \in X_y} X_y$, $x \in X$, для серии $\mathcal{C}$ упрощает проверку требований определения 2.

Теорема 2. *Любые две 5-конфигурации, принадлежащие различным сериям $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, не изоморфны друг другу.*

Для доказательства этой теоремы достаточно рассматривать для каждого $y \in X$ спецификации частот встречаемости различных элементов из объединения $Y_y = \cup_{x \in X:\, y \in X_x} X_x$. Для 5-конфигураций серии $\mathcal{C}$ это $2^6 4^2 5^1$. Пять раз (из-за невырожденности матрицы инциденций) встретится только $y = (v,\varepsilon)$, $\varepsilon \in \{0,1,2\}$, содержащаяся во всех 5 подмножествах, а по четыре раза встретится пара (v,ν), $\nu \in \{0,1,2\} \diagdown \{\varepsilon\}$. Для 5-конфигураций серии $\mathcal{A}$ частота 4 имеет место для нечётного числа точек. Действительно, если встречающаяся 5 раз точка $y = (v,\varepsilon)$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, то точка (v,ν), $\nu \in \{0,1\}$, $\nu \neq \varepsilon$, встретится 4 раза среди 5-подмножеств $X_{(u_0,0)}$, $X_{(u_0,1)}$, $X_{(u_1,0)}$, $X_{(u_1,1)}$, где u_0, u_1 – вершины графа Γ, из которых есть дуги в вершину v. Если точка (w,α), $w \in V \diagdown \{v\}$, $\alpha \in \{0,1\}$, тоже встретится 4 раза, то точка (w,β), $\beta \in \{0,1\}$, $\beta \neq \alpha$, тоже встретится 4 раза, причём среди этих же 5-множеств $X_{(u_0,0)}$, $X_{(u_0,1)}$, $X_{(u_1,0)}$, $X_{(u_1,1)}$. Отдельного рассмотрения требует случай, когда $w \in \{u_0,u_1\}$ (для определённости $w = u_1$) и в графе Γ есть дуги (v,w), (u_0,w). Тогда также точка (w,β) встретится в подмножествах объединения для $Y_y = \cup_{x \in X:\, y \in X_x} X_x$ четыре раза. Точки (w,β) не окажется в $X_{(u_1,\alpha)}$, зато она будет в X_y. Для 5-конфигураций серии $\mathcal{B}$ частота 4 невозможна. Действительно, пусть встречающаяся 5 раз $y = (v,\varepsilon,\nu)$ и u_0, u_1 – вершины графа Γ, из которых есть дуги в вершину v, помеченные соответственно как 0 и 1. Тогда $y \in X_y$ содержится ещё в следующих четырёх 5-подмножествах $X_{(u_0,0,\nu)}$, $X_{(u_0,1,\nu)}$, $X_{(u_1,\varepsilon,0)}$, $X_{(u_1,\varepsilon,1)}$. В этих множествах точки $(v,\bar{\varepsilon},\nu)$, $(v,\varepsilon,\bar{\nu})$ встречаются по два раза, а точки $(v,\bar{\varepsilon},\bar{\nu})$ совсем нет. Здесь $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\nu} \in \{0,1\}$, $\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon$, $\bar{\nu} \neq \nu$. Если в данных четырёх 5-подмножествах некоторая точка $(w,\alpha,\beta) \in X$, $w \in V \diagdown \{v\}$, встретилась бы 4 раза, то в графе Γ были бы дуги (u_0,w), (u_1,w), помеченные соответственно как $1 \neq 0$ и $0 \neq 1$. Согласно последним неравенствам все четыре точки (w,i,j), i, $j \in \{0,1\}$, встретятся среди этой четвёрки 5-подмножеств только по 2 раза. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Две 5-конфигурации серии $\mathcal{A}$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие им 2-графы.*

Теорема 3 будет доказана, если по 5-конфигурации серии $\mathcal{A}$ сможем однозначно восстановить соответствующий 2-граф. Для этого достаточно восстановить разбиение множества точек X на пары вида $\{(v,0),\,(v,1)\}$, $v \in V$. Как и в предыдущем доказательстве, для каждого $y \in X$ рассмотрим спецификации частот встречаемости различных элементов из объединения $Y_y = \cup_{x \in X:\, y \in X_x} X_x$. Пусть $y = (v,\varepsilon)$, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Тогда y встретится в объединение 5 раз. Точка $(v,\bar{\varepsilon})$ встретится 4 раза, конкретно, (в обозначениях предыдущего доказательства) только в множествах $X_{(u_0,0)}$, $X_{(u_0,1)}$, $X_{(u_1,0)}$, $X_{(u_1,1)}$, так как $(v,\bar{\varepsilon}) \notin X_{(v,\varepsilon)}$. Для $z \in X$ величину $\iota(z,y) = |\{x \in X |\, y \in X_x \text{ и } z \in X_x\}|$ назовём кратностью точки z по отношению к y. Если кратность 4 окажется только у одной точки из Y_y, то точка $(v,\bar{\varepsilon})$ будет определена. По предыдущему доказательству кратность 4 может быть ещё у двух или четырёх точек из Y_y, то есть (кроме $(v,\bar{\varepsilon})$) ещё у одной пары точек $\{(w,0),(w,1)\}$, или ещё у двух пар точек $\{(w',0),(w',1)\}$, $\{(w'',0),(w'',1)\}$. В случае трёх дополнительных пар точек кратности 4 имели бы противоречие $(3 \cdot 2 + 1) \times 4 + 1 \times 5 = 33 > 25 = 5 \times 5$. Для двух дополнительных пар точек кратности 4 имеем $(2\cdot 2+1)\times 4+1\times 5=25$, поэтому $Y_y=\{v,u_0,u_1\}\times\{0,1\}$ и в графе Γ кроме (u_0,v), (u_1,v) должны быть дуги (v,u_0), (v,u_1), (u_0,u_1), (u_1,u_0). Тогда граф Γ будет единственно возможным 2-графом на трёх вершинах v, u_0, u_1, отвечающим единственно возможной $(6,5)$-конфигурации. Осталось для $y=(v,\varepsilon)$ кратности $5=\iota(y,y)$ рассмотреть возможность трёх точек $y_1,y_2,y_3\in X$ кратности 4, обозначенных выше как $(v,\bar\varepsilon)$, $(w,0)$, $(w,1)$. В этом случае рассмотрим Y_{y_1}, Y_{y_2}, Y_{y_3}. У нас $Y_{(v,\bar\varepsilon)}=Y_y$, кратность точки y относительно $(v,\bar\varepsilon)$ равна 4, а кратности любой точки из $Y_y\diagdown\{(v,0),(v,1)\}$ относительно y и $(v,\bar\varepsilon)$ одинаковы. Поэтому, если либо возникнет нарушение равенств $Y_{y_1}=Y_{y_2}=Y_{y_3}=Y_y$, либо кратность одной из точек y,y_1,y_2,y_3 окажется меньше 4, либо хотя бы одна кратность $\iota(z,y_i)$, $i=1,2,3$, хотя бы одной точки $z\in Y_y\diagdown\{y,y_1,y_2,y_3\}$ будет отлична от $\iota(z,y)$, то это позволит в тройке $\{y_1,y_2,y_3\}$ выделить пару $\{(w,0),(w,1)\}$. Пусть далее $Y_{y_1}=Y_{y_2}=Y_{y_3}=Y_y$, $y_0=y$, $\iota(y_i,y_j)\geqslant 5$, $\iota(z,y_i)=\iota(z,y_j)$, $i,j=0,1,2,3$, $z\in Y_y\diagdown\{y,y_1,y_2,y_3\}$. Такое возможно либо при отсутствии в графе Γ дуг (v,w) и (w,v), либо при наличии их обеих. При их наличии в Γ будут вершины u', u'' и дуги (u',v), (u',w), (v,u''), (w,u''). При отсутствии дуг (v,w), (w,v) должны быть вершины u_0', u_1', u_0'', u_1'' и дуги (u_0',v), (u_1',v), (u_0',w), (u_1',w), (v,u_0''), (v,u_1''), (w,u_0''), (w,u_1''), причём возможны равенства $u_0'=u_0''$, $u_1'=u_1''$. Если этих равенств нет, или имеет место только одно из них, как и при наличии дуг (v,w), (w,v), как бы не разбивали четвёрку точек $\{y,y_1,y_2,y_3\}$ на пары, будем получать изоморфные 2-графы и одну и ту же 5-конфигурацию. Если $u_0'=u_0''$ и $u_1'=u_1''$, то в 2-графе Γ будет только 4 вершины. Таких 2-графов только два, как и 5-конфигураций на 8 вершинах только две, получающиеся инвертированием элементов матриц инциденций разложимой и не разложимой $(8,3)$-конфигурации. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Имеется ровно 22 попарно не изоморфных 2-графа с множеством вершин мощности 6.*

Следствие 1. *Имеется по крайней мере 31 попарно не изоморфных $(12,5)$-конфигураций.*

Требуемые $(12,5)$-конфигурации, кроме 22 конфигураций теорем 3 и 4, предоставляются теоремой 2 и серией $\mathcal{C}$, семью исключительными $(12,5)$-конфигурациями на элементах циклической группы 12 порядка [8] и $(12,5)$-конфигурацией пятёрок вершин икосаэдра, смежных одной из его вершин.

Поскольку $(6,5)$- и $(8,5)$-матрицы получаются соответственно инвертированием элементов подстановочных и $(8,3)$-матриц, а $(7,5)$-матриц не существует по теореме 1, значение $v=9$ является минимальным, для которого задача классификации $(v,5)$-конфигураций не тривиальна.

Теорема 5. *Любая $(9,5)$-конфигурация изоморфна конфигурации серии $\mathcal{C}$.*

Эта теорема была доказана с помощью компьютерных вычислений. При составлении алгоритма предварительно определялись возможные тройки первых трёх столбцов двоичной матрицы размера 9×9 с 4 нулями в каждом столбце. С точностью до перестановки строк и этих 3 столбцов их оказалось 20. Для каждого из 20 вариантов троек столбцов достраивались строки матрицы.

На множестве из 5 вершин имеется 5 попарно не изоморфных 2-графов, которые по теореме 3 вместе с $(10,5)$-конфигурацией на циклической группе порядка 10 [8] предоставляют по крайней мере 6 попарно не изоморфных $(10,5)$-конфигураций. При $v=11$ имеется две $(11,5)$-конфигурации на циклической группе [8] и одна $(11,5)$-конфигурация строится по матрице Адамара 12 порядка [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панасенко, С. П. Алгоритмы шифрования. Специальный справочник. СПб: БХВ-Петербург. 2009 г, 578 с.

2. Park, J. Security analysis of mcrypton to low–cost ubiquitous computing devices and applications. Int. J. Commun. Syst. **22**:8 (2009), 659–669.

3. Kwon, D. New block cipher: ARIA / D. Kwon, J. Kim, S. Park, S.H. Sung, Y. Sohn, J.H. Song, Y. Yeom, E-J. Yoon, S, Lee, J. Lee, S. Chee, D. Han, and J. Hong //ICISC, 2003, LNCS 2971, pp. 432-445, 2004.

4. Lim, C. H. A Revisited Version of Crypton. Fast Software Encryption – FSE'99, p. 31, Springer Verlag, Rome, Italy, March 1999.

5. Daemen, J., Knudsen, L., Rijmen, V. The block cipher Square. FSE'97, LNCS 1267, p. 149–165.

6. Малышев, Ф.М. k-конфигурации // Труды МИАН, **316**, 2022.

7. *Малышев, Ф.М.* Три семейства 5-конфигураций // Мат. вопросы криптографии, **4**:3 (2013), 83–97.

8. Тришин, А.Е. Примеры (v, k)-матриц / А.Е. Тришин – Вестник ИКСИ (серия К), специальный выпуск, посвящённый 100-летию академика А. Н. Колмогорова – М., 2003, с. 179-185.

9. Малышев, Ф.М. О (v, k)-конфигурациях / Ф.М. Малышев, В.Е. Тараканов– Мат. сборник, 2001, Т.192, № 9, С. 85-108.

10. Малышев, Ф.М. Классификация $(v, 3)$-конфигураций / Ф.М. Малышев, А.А. Фролов //Математические заметки. Т. 91, вып. 5, 2012 г., стр. 741-749.

11. Фролов, А.А. Классификация неразложимых абелевых $(v, 5)$-групп / А.А. Фролов //Дискретная математика. Том 20, № 1, 2008 г., стр. 94-108.

12. *Малышев, Ф.М.* Четыре бесконечные серии k-конфигураций / Мат. вопросы криптографии, **4**:4 (2013), 65–75.

УДК 519.7

Об одной автоматной модели безопасного функционирования

В. А. Кузовихина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: pletnyova_va@mail.ru

Automata-based model of secure functioning

V. A. Kuzovikhina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pletnyova_va@mail.ru

В работе [1] рассмотрена автоматная модель, предложенная В.Б. Кудрявцевым, часть состояний которой является безопасной. В рамках данной модели достаточно естественно представляется факт наличия небезопасных состояний и оперативность реагирования на нарушение безопасности системы. В работе [1] исследуются безопасные языки, не выводящие автомат из множества безопасных состояний. Формально, пусть $V = (A, Q, \varphi, q_0)$ — конечный автомат, где A — конечное множество входных символов, $Q = S \sqcup I$ — конечное множество состояний, S — безопасные, I — небезопасные, $\varphi : A \times Q \to Q$ — функция переходов, $q_0 \in Q$ — начальное состояние (безопасное). Слово $\alpha \in A^*$ называется безопасным, если состояния, в которые переходит автомат по буквам этого слова, безопасны, то есть последовательность $\varphi(\alpha, q_0) \in S^*$. Язык, состоящий из всех безопасных слов, называется безопасным. Получились следующие утверждения о безопасных языках.

Утверждение 1 ([1]). *Если L является безопасным языком, то он регулярен.*

В работе [1] также получено характеристическое свойство таких языков.

Утверждение 2 ([1]). *Язык L является безопасным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *L непуст;*
2. *L регулярен;*
3. *$[L] \subseteq L$, где $[L]$ — множество всех начал слов, принадлежащих L.*

В работе [2] исследовалась задача восстановления параметров системы с помощью кратных условных экспериментов. Доказано, что восстановление подмножества безопасных состояний возможно с помощью эксперимента квадратичного объема.

В работе [1] также описывается модель с достаточно короткими нарушениями безопасности (ε–безопасные языки), то есть рассмотрена возможность выхода из множества безопасных состояний на долю, не превыщающую заданную константу $\varepsilon > 0$. Однако, сложность модели значительно выросла. Во-первых, при такой формулировке не выполняется свойство регулярности. При этом если в качестве ε рассматривать иррациональные числа, то такие языки даже не являются вычислимыми, так как получается континуум попарно различных языков. Во-вторых, в соответствии с работой [2], задача восстановления параметра ε с помощью конечного эксперимента для широкого класса ε не решается. То есть, даже при известных остальных параметрах и неизвестном ε, конечного эксперимента недостаточно для восстановления ε.

В силу наличия скрытых каналов и ошибок в программном обеспечении, формальные модели безопасности не всегда работают при переходе к реальной жизни. Важно уметь моделировать кратковременные выходы за пределы множества безопасных состояний. В данной работе рассматриваются k–безопасные языки, допускающие выход из множества безопасных состояний так, что максимальная длина последовательности небезопасных состояний не превосходит заданное число $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При $k = 0$ получаем безопасные языки, рассмотренные в работе [1].

В случае $k > 0$, k–безопасный язык также является регулярным.

Лемма 1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $L \subseteq A^*$ является k-безопасным языком, заданным автоматом V. Тогда язык L регулярен.*

На самом деле, k–безопасный язык является k'–безопасным для любого целого неотрицательного $k' < k$.

Теорема 1. *Пусть $k, k' \in \mathbb{N}$, $k' < k$, $L \subseteq A^*$ является k-безопасным языком, заданным автоматом V. Тогда существует автомат V', такой что $L = L(V', k')$.*

Заметим, что обратный переход в общем случае невозможен.

В случае k–языков задача восстановления параметра k является простой.

Пусть задан $V = (A, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0)$ и неизвестен параметр k. Требуется восстановить его значение с помощью условного эксперимента. Кратность эксперимента (число поданных на вход слов) будем обозначать M, а объем (общее число поданных на вход букв) Vol.

Оказывается, что для решения задачи достаточно рассматривать простые условные эксперименты, то есть M тождественно равна 1.

Определим функцию Шеннона объема эксперимента. $Vol(V, k)$ — минимальная длина эксперимента, достаточного для восстановления параметра k автомата V. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Через $K(n)$ обозначим класс всех автоматов, имеющих не более n состояний. Положим

$$Vol(n, k) = \sup_{V \in K(n)} Vol(V, k).$$

Теорема 2. *Задача восстановления параметра k решается с помощью простого условного эксперимента. При этом в случае, если все непрерывные пути по множеству небезопасных состояний в диаграмме Мура автомата V ограничены некоторой константой, то $Vol(V, k) \leqslant |Q| - 1$, в противном случае $Vol(V, k) \leqslant |Q| + k - 1$, и обе оценки достигаются.*

Рассмотрим задачу восстановления разбиения множества состояний на безопасные и небезопасные (известно все, кроме разбиения $Q = S \sqcup I$). Будем считать, что $k \in \mathbb{N}$, так как случай $k = 0$ рассмотрен в работе [2]. Аналогично введем функции $M(V, k)$ и $Vol(V, k)$ и рассмотрим соответствующие функции Шеннона

$$\begin{aligned}
M(n, k) &= \sup_{V \in K(n)} M(V, k), \\
Vol(n, k) &= \sup_{V \in K(n)} Vol(V, k), \\
M(m, n, k) &= \sup_{V \in K(m,n)} M(V, k), \\
Vol(m, n, k) &= \sup_{V \in K(m,n)} Vol(V, k)
\end{aligned}$$

$K(m, n)$ — подмножество $K(n)$, состоящее из автоматов с m-элементным входным алфавитом.

Для данной задачи получены следующие асимптотические ограничения.

Теорема 3. *$M(n, k) = \Omega(n^{k+1})$, $n \to \infty$, $Vol(n, k) = \Omega(n^{k+1})$, $n \to \infty$.*

В случае фиксированного размера входного алфавита в худшем случае достаточно линейного по n числа слов и квадратичного числа поданных букв.

Теорема 4. *Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Тогда $M(m, n, k) = \Theta(n)$, $Vol(m, n, k) = \Theta\left(n^2\right)$, $n \to \infty$.*

Таким образом, получено обобщение модели из работы [1], показано, что при таком обобщении языки остаются регулярными, исследована взаимосвязь k–языков, оценены сложностные характеристики кратных условных экспериментов для восстановления неизвестных параметров системы.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — кандидату физико–математических наук Алексею Владимировичу Галатенко за постановку задачи и всестороннюю поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галатенко А.В.. Автоматные модели защищенных компьютерных систем // Интеллектуальные системы. 2007. 11 №1–4. 403–418.

2. Галатенко А.В.. О восстановлении разбиения безопасности // Интеллектуальные системы. 2010. 14 №1–4. 123–136.

УДК 511.32

О применении риск-ориентированного подхода в криптографических исследованиях

А. Б. Лось (Россия, г. Москва)
Высшая школа экономики
e-mail: alos@hse.ru
А. Ю. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Высшая школа экономики
e-mail: anesterenko@hse.ru
Т. А. Курмашева (Россия, г. Москва)
Высшая школа экономики
e-mail: takurmasheva@miem.hse.ru

On the application of a risk-based approach in cryptographic research

A. B. Los (Russia, Moscow)
HSE University
e-mail: alos@hse.ru
A. Yu. Nesterenko (Russia, Moscow)
HSE University
e-mail: anesterenko@hse.ru
T. A. Kurmasheva (Russia, Moscow)
HSE University
e-mail: takurmasheva@miem.hse.ru

В работе рассматриваются вопросы применения подхода к исследованию криптографических алгоритмов, основанного на оценке рисков.

В настоящее время риск-ориентированный подход широко применяется для оценки уровня защищенности информационных систем (ИС) и для разработки политики безопасности организации. Данный подход закреплен в многочисленных стандартах по информационной безопасности, как отечественных, так и зарубежных, хотя в последней версии международного стандарта [1] отсутствует количественная характеристика риска и примеры его вычисления.

Основой данного похода является вычисление функции рисков:

$$R = \sum_{i=1}^{n} p\left(y_i\right) \cdot u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\{y_i\}$ множество актуальных угроз ИС, $p\left(y_i\right)$ – вероятность реализации злоумышленником угрозы y_i, u_i – величина ущерба от успешного осуществления данной угрозы.

Далее определяется граница допустимых потерь R_0 и, в случае выполнения условия:

$$R \leq R_0 \tag{2}$$

информационная система считается защищенной.

В работе рассматривается возможность применения данного подхода к оценке стойкости криптографических алгоритмов относительно методов определения неизвестного ключа шифрования, что обеспечивает свойство конфиденциальности передаваемой информации. Методика применения данного подхода к другим задачам криптографического анализа, в том числе к задачам применения криптографических алгоритмов для обеспечения целостности информации и подтверждения подлинности сообщений, в целом, аналогична рассматриваемой далее методике.

Учитывая сказанное выше, основной угрозой при применении криптографического алгоритма является угроза определения атакующим истинного ключа, на котором произведено шифрование данного сообщения, и, следовательно, угроза раскрытия всего передаваемого сообщения или его части.

В этом случае функция риска (1) принимает вид:

$$R = P_{\text{кл}} \cdot U, \tag{3}$$

где $P_{\text{кл}}$ – вероятность определения ключа шифрования атакующим, U – ущерб от компрометации ключа, а условие стойкости криптографического алгоритма имеет вид:

$$P_{\text{кл}} \cdot U < R_0 \cdot \pi_0, \tag{4}$$

где π_0 – коэффициент, определяющий долю дешифрованной информации, при которой атака считается успешной.

Рассмотрим вопрос о величине ущерба от успешной реализации данной угрозы – компрометации ключа ([2]). Очевидно, что величина U будет существенно зависеть от условий применения данного криптографического алгоритма и, соответственно, ценности шифруемой информации. При этом стойкость алгоритма становится зависимой от этих условий, что приведет к необходимости ее определения для каждого случая его применения. Еще большей проблемой становится задача, как определения стоимости шифруемой информации, так и значения максимального уровня потерь. В настоящее время, авторам неизвестно о каких-либо исследованиях в этой области и обоснованных решениях. Однако если такая задача возникнет, и у криптоаналитика будут обоснованные данные о ценности шифруемой информации и уровне максимально возможных потерь, то можно воспользоваться функцией риска (1).

В криптографической практике, разработчики алгоритмов шифрования придерживаются обоснованного мнения, что стойкость алгоритмов должна быть некоторой объективной величиной и не должна зависеть от условий эксплуатации. Тогда, для защиты каналов связи с более важной информацией необходимо просто использовать более стойкие алгоритмы.

Если в рассматриваемом риск – ориентированном подходе отойти от потерь при успешной реализации атаки, то, следует считать, что потери U при условии определения истинного ключа численно равны максимально допустимому значению ущерба R_0 и условие стойкости алгоритма имеет вид:

$$P_{\text{кл}} < \pi_0. \tag{5}$$

Поскольку стойкость алгоритма определяется в классе известных методов, то алгоритм будет стойким, если наиболее эффективный метод определения ключа удовлетворяет условию (5).

Для решения данной проблемы можно ввести зависимость вероятности определения истинного ключа $P_{\text{кл}}$ от времени t:

$$P_{\text{кл}} = P_{\text{кл}}\left(t\right). \tag{6}$$

Очевидно, что $P_{\text{кл}}\left(t\right)$ является неубывающей функцией t, поскольку реализация алгоритма определения ключа, а для многих известных алгоритмов наиболее эффективными являются именно переборные методы или их вариации, осуществляется на современных вычислительных комплексах, производительность которых монотонно возрастает с течением времени и, следовательно, вероятность определения истинного ключа возрастает с течением времени.

Решая уравнение

$$P_{\text{кл}}\left(t\right) = \pi_0 \tag{7}$$

относительно неизвестного параметра t можно получить прогнозное значение промежутка времени или его оценку, в течение которого алгоритм будет обеспечивать необходимый уровень стойкости. Понятно, что чем больше временной промежуток, в котором выполняется соотношение (5), тем выше криптографическая стойкость алгоритма.

В работе рассматриваются типовые криптографические ситуации и для них вычислены значения риска и время сохранения криптографической стойкости.

Пусть криптографический алгоритм имеет в общей сложности K ключей и атакующий не располагает информацией о вероятности появления конкретного ключа сообщения, то есть, предполагаем, что все ключи равновероятны, а исходной информации достаточно для однозначного определения истинного ключа [2].

Тогда, очевидно, выбор ключей для опробования осуществляется по урновой схеме без возвращения из общего множества ключей. Предполагаем далее, что опробование ключа осуществляется за одну элементарную операцию и обозначим Q_0 – количество элементарных операций, совершаемых вычислительной системой в единицу времени (секунду).

Вначале рассмотрим более простую ситуацию, когда производительность вычислительной системы не изменяется с течением времени. Тогда вероятность $p(T)$ определения истинного ключа за время T имеет вид:

$$p\left(T\right) = \sum_{k=1}^{N(T)} \frac{1}{K} = \frac{1}{K} \cdot N(T), \tag{8}$$

где $N(T) = T \cdot Q_0$ – количество ключей, которое может опробовать вычислительная система за время T.

Из (8) следует, что

$$p\left(T\right) = \frac{Q_0 \cdot T}{K}.$$

Тогда, с учетом (7) получаем условие для определения времени T, в течение которого криптоалгоритм будет стойкий по отношению к методу полного перебора:

$$\frac{Q_0 \cdot T}{K} = \pi_0.$$

Из последнего соотношения получаем значение времени T, в течение которого обеспечивается стойкость алгоритма относительно метода полного опробования:

$$T = \frac{K \cdot \pi_0}{Q_0}$$

В работе рассматривается возможность учета средств развития вычислительной техники путем построения прогнозной функции на основе статьи [3].

В этом случае условие для определения времени T (в годах), в течение которого метод полного перебора не будет эффективен:

$$\frac{1}{K} \cdot \gamma \cdot T \cdot \beta \cdot (30+T)^2 \cdot 10^{12} = \pi_0,$$

где $\gamma = 3,1 \cdot 10^7$ – количество секунд в одном году. В таблице 1 приведены расчеты времени обеспечения стойкости для значения $\pi_0 = 10^{-5}$ и производительности вычислителя на 2021 год $Q_0 = 1,2 \cdot 10^{18}$ оп/сек [4].

Таблица 1: Время сохранения стойкости относительно метода перебора.

№	Длина ключа (бит)	Общее число ключей	Время в годах
1	128	$2^{128} \sim 10^{38}$	10^7
2	256	$2^{256} \sim 10^{77}$	10^{45}
3	512	$2^{512} \sim 10^{153}$	10^{122}

В работе исследована возможность применения риск – ориентированного подхода к оценке стойкости криптографических алгоритмов. Рассмотрены общие вопросы применения указанного подхода и предложена методика оценки стойкости криптографических алгоритмов с учетом увеличения с течением времени производительности вычислительных средств, применяемых для осуществления атак на криптоалгоритмы. Проведенные исследования показывают, что риск – ориентированный подход позволяет оценить время, в течение которого исследуемый криптографический алгоритм остается стойким, что позволяет определить условия его применения для надежной защиты информации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р ИСО/МЭК 27000-2021 "Информационные технологии. Методы и средства обеспечения безопасности. Системы менеджмента информационной безопасности. Общий обзор и терминология."(ISO/IEC 27000:2018 "Information technology. Security techniques. Information security management systems. Overview and vocabulary.").

2. Лось А.Б., Нестеренко А.Ю., Рожков М.И. Криптографические методы защиты информации для изучающих компьютерную безопасность. — Москва: Изд-во Юрайт, 2021. 473 с.

3. Ермакова А.Ю. Разработка методов прогнозирования на примере анализа средств вычислительной техники // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. №1. С. 28 - 34.

4. Электронный ресурс, Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/FLOPS.

———————————————————————————————————

УДК 511.32

Об одном походе к разработке пороговой схемы электронной подписи ГОСТ Р 34.10 и ее расширений

А. Ю. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова
e-mail: nesterenko_a_y@mail.ru

Р. Г. Астраханцев (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова
e-mail: rgastrakhantsev@edu.hse.ru

The development of GOST 34.10 digital signature scheme with secret sharing and its extensions

A. Yu. Nesterenko (Russia, Moscow)
Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics
e-mail: nesterenko_a_y@mail.ru
R. G. Astrakhantsev (Russia, Moscow)
Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics
e-mail: rgastrakhantsev@edu.hse.ru

Активные попытки внедрения автоматизированных систем формирования, управления и предоставления информации о владении какой-либо собственностью или активом (систем управления смарт-контрактами) привели к очередному всплеску интереса к технологиям совместной выработки несколькими не доверяющими друг другу участниками пороговой электронной подписи.

Одним из обязательных требований, предъявляемых к смарт-контрактам для приданиям им юридической силы, является использование криптографически стойких схем электронной подписи, обязательных для применения в сертифицируемых средствах защиты информации. В Российской Федерации такой схемой является схема усиленной квалифицированной подписи, регламентируемая стандартом ГОСТ Р 34.10-2012 [1].

Однако, указанная схема не является пороговой и не предназначена для совместной выработки электронной подписи несколькими не доверяющими друг другу участниками, что не позволяет без дополнительных модификаций применять ГОСТ Р 34.10-2012 в автоматизированных системах. В настоящем докладе авторами решаются следующие задачи.

- Формулируется общее определение пороговой схемы электронной подписи и приводится модель не доверяющих друг другу участников взаимодействия, которые должны совместно выработать электронную подпись под документом, известным всем участникам взаимодействия. Вводится понятие «дилера» и описывается его роль в организации взаимодействия и контроле вырабатываемых значений.

- Приводится описание механизмов, использующих интерполяционные многочлены Лагранжа для разделения секрета между несколькими участниками (аналогично схеме Шамира [2]), а также описания протоколов, позволяющих реализовать схему электронной подписи ГОСТ Р 34.10-2012.

- Приводятся предложения по расширению механизмов разделения секретного ключа, использующие представления одного класса иррациональных чисел в виде быстросходящихся рядов [3], а также модификации описанных ранее протоколов для выработки пороговой схемы электронной подписи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 34.10-2012. Информационная технология. Криптографическая защита информации. Процессы формирования и проверки электронной цифровой подписи. М.: Стандартинформ. 2018. 29 с.

2. Shamir A. How to share a secret // Comm. of the ACM. 1979. Vol. 22. N. 11. P. 612-613.

3. Нестеренко А.Ю. Об одном подходе к разложению иррациональных чисел // Математические вопросы криптографии. 2018. Том. 9. Вып. 1. С. 89-106.

УДК 512.548.7, 519.716.39

О свойствах конечных квазигрупп на выходе алгоритма Т. Кепки

С. С. Чаплыгина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: svetlana.chaplygina@math.msu.ru

On the properties of finite quasigroups at the output of T. Kepka's algorithm

S. S. Chaplygina (Russian Federation, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: svetlana.chaplygina@math.msu.ru

В работе рассматривается алгоритм преобразования квазигруппы, полученный из статьи Т. Кепки. Показывается, что результат применения алгоритма обладает рядом полезных свойств: полиномиальной полнотой, неаффинностью, не содержит собственных подквазигрупп и не сохраняет нетривиальные отношения эквивалентности.

Введение

Идея использования различных несимметричных и неассоциативных алгебраических структур в криптографии находит множество применений. Одна из таких идей — использование квазигрупп. На основе квазигрупп, например, построены такие алгоритмы, как хэш-функция EDON-$\mathcal{R}$ [1] или преобразования типа “All-Or-Nothing Transformation”, которые повышают стойкость блочных шифров с постоянной длиной блоков. Одним из классических результатов является работа Клода Шеннона о совершенной секретности шифра Вернама, основанном на латинских квадратах [2]. Обзор различных криптоалгоритмов, использующих в своей структуре квазигруппы, был приведен в публикациях М.М. Глухова [3] и В.А. Щербакова [4].

Для эффективного применения квазигрупп в построении криптосистем может пригодиться наличие особых свойств у таких структур. Примерами таких полезных свойств являются неаффинность, полиномиальная полнота, отсутствие подквазигрупп или несохранение нетривиальных отношений эквивалентности (простота).

Полиномиальная полнота обеспечивает NP-полноту задачи проверки разрешимости уравнений [5]. Содержательно это означает защищенность криптоалгоритмов на основе полиномиально полных квазигрупп от атак методом решения систем уравнений на биты ключа. Также известно [6], что полиномиальная полнота эквивалентна одновременной простоте и неаффинности.

Отсутствие собственных подквазигрупп важно для предотвращения “вырождения” преобразований на подквазигруппу, при котором метод прямого перебора может потребовать принципиально меньшего времени.

В работе Томаса Кепки [7] приводится доказательство того, что каждая не более чем счетная квазигруппа, имеющая по крайней мере три элемента, изотопна квазигруппе, не имеющей собственных подквазигрупп. Настоящая работа является алгоритмизацией доказательства из статьи Т. Кепки, а также исследованием свойств полученной квазигруппы. Порядок приведенного алгоритма — квадратичный.

Часть результатов, приведенных в данной работе, были анонсированы в работе[8] автора.

Автор выражает искреннюю благодарность к.ф.-м.н., с.н.с. Галатенко Алексею Владимировичу за постановку задачи и поддержку в работе.

Основные понятия и результаты

Определение 1. *Конечной квазигруппой порядка* $k \in \mathbb{N}$ *называется такое множество* $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ *с бинарной операцией* $\cdot \colon Q \times Q \to Q$, *что для любых* $a, b \in Q$ *уравнения* $x \cdot a = b$ *и* $a \cdot y = b$ *однозначно разрешимы.*

Все квазигруппы предполагаются конечными, поэтому в дальнейшем слово “конечный” будет опускаться.

Замечание 1. *Таблицы Кэли квазигрупп являются латинскими квадратами, и наоборот, любой латинский квадрат является таблицей Кэли квазигруппы.*

Определение 2. *Собственной подквазигруппой квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *называется пара* $(Q', \cdot')$, *где* Q' — *собственное подмножество* Q, *замкнутое относительно квазигрупповой операции* $\cdot$, *а операция* $\cdot'$ *является сужением* $\cdot$ *на* $Q' \times Q'$.

В дальнейшем для краткости будем отождествлять собственные подквазигруппы с множеством Q'.

Без ограничения общности можно считать, что $Q = \{0, \ldots, k-1\}$, а операция $\cdot$ есть функция k-значной логики от двух переменных.

Определение 3. *Квазигруппы* $Q(\cdot)$ *и* $Q(\circ)$ *будем называть изотопными, если существуют перестановки* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *на* Q, *для которых выполнено тождество*

$$x \cdot y = \sigma_3^{-1}(\sigma_1(x) \circ \sigma_2(y)).$$

Обратим внимание на следующие свойства квазигрупп:

Определение 4. *Квазигруппу* $(Q, \cdot)$ *будем называть полиномиально полной, если* $\left[\{\cdot\} \cup P_k^0\right] = P_k$, *где* P_k^0 — *множество всех констант.*

Определение 5. *Квазигрупповая операция* $\cdot$ *сохраняет отношение эквивалентности* $\sim$, *если для любых элементов* a_1, a_2, b_1, b_2 *таких, что* $a_1 \sim a_2$ *и* $b_1 \sim b_2$ *верно* $a_1 \cdot b_1 \sim a_2 \cdot b_2$.

Определение 6. *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *называется простой (или в терминах работы [7], 1-простой), если операция* $\cdot$ *не сохраняет ни одного нетривиального отношения эквивалентности.*

Определение 7. *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *называется аффинной, если существует абелева группа* $(Q, +)$, *автоморфизмы* α *и* β *этой группы и константа* $c \in Q$, *для которых выполнено тождество* $x \cdot y \equiv \alpha(x) + \beta(y) + c$.

В работе [7] использовались следующие понятия:

Определение 8. *Квазигруппа* $(Q, \circ)$ *называется 2-простой, если она не содержит собственных подквазигрупп, и 3-простой, если она не содержит собственных подквазигрупп порядка* ≥ 2.

Обозначим через S_k множество всех разнозначных функций из P_k, зависящих от одной переменной.

Утверждение 1 ([9]). *Система $S_k \cup \{f(\tilde{x})\}$ полна в P_k (при $k \geq 5$) тогда и только тогда, когда функция $f(\tilde{x})$ имеет хотя бы две существенные переменные и принимает все значения.*

Сужением на конечный случай доказательства утверждений из работы Томаса Кепки можно получить следующий алгоритм:

- На вход алгоритму подается квазигруппа, заданная таблицей Кэли.
- Перестановкой строк и столбцов преобразуем квазигруппу к фиксированному виду, при котором первые элементы строк и столбцов отсортированы по возрастанию.
- Делаем циклическийый сдвиг строк $2, 3, \ldots, k$, первая строка остается на месте. То есть, новый порядок строк $1, 3, 4, \ldots, k, 2$.
- В завершение меняем местами первый и второй столбец.

Из статьи Томаса Кепки следует 2-простота полученной квазигруппы:

Теорема 1. *Выходом алгоритма является 2-простая квазигруппа, изотопная входной квазигруппе. Временная сложность алгоритма есть $O(k^2)$ при $k \to \infty$.*

Были доказаны следующие утверждения:

Теорема 2. *Выходом алгоритма является 1-простая квазигруппа, изотопная входной квазигруппе.*

Доказательство теоремы строиться на использовании “фиксированных” первой строки и второго столбца таблицы Кэли полученной квазигруппы.

Теорема 3. *Если порядок квазигруппы $k \geq 4$, то выходом алгоритма является полиномиально полная квазигруппа, изотопная входной квазигруппе.*

Доказательство теоремы при $k \geq 5$ основано на использовании критерия Саломаа. Несложно заметить, что квазигрупповая операция существенно зависит от обеих переменных и принимает все значения, а перестановки, задаваемые первой строкой и вторым столбцом таблицы Кэли выходной квазигруппы, порождают все перестановки. Случай $k = 4$ проверяется непосредственно.

Теорема 4. *Если порядок квазигруппы $n \geq 4$, то выходом алгоритма является неаффинная квазигруппа, изотопная входной квазигруппе.*

Так как все квазигруппы порядка 3 аффинны, в случае $k = 3$ на выходе алгоритма могут возникать только аффинные квазигруппы, то есть квазигруппы, не являющиеся полиномиально полными.

Заключение

В работе был представлен квадратичный алгоритм изотопного преобразования заданной квазигруппы к 1-2-простой, неаффинной и полиномиально полной квазигруппе.

В дальнейшем планируется доработать алгоритм, чтобы результирующая квазигруппа имела “менее фиксированный” вид. Также интересно обобщить алгоритм на n-квазигруппы, то есть объекты с n-арной, обратимой по каждому аргументу, операцией. Предварительные результаты говорят о том, что уже при $n = 3$ происходят критичные расхождения со случаем $n = 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gligoroski D., Ødegård R. S., Mihova M., Knapskog S. J., Drapal A., Klima V., Amundsen J., El-Hadedy M. Cryptographic hash function EDON-R' // Proceedings of the 1st International Workshop on Security and Communication Networks. 2009. P. 1–9.

2. Shannon C. Communication theory of secrecy systems Bell System // Technical Journal. 1949. Vol. 28, no. 4. P. 656–715.

3. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. 2008. № 2(2). С. 28–32.

4. Shcherbacov V. A. Quasigroups in cryptology // Computer Science Journal of Moldova. 2009. Vol. 17, № 2(50). P. 193–228.

5. Horváth G., Nehaniv C. L., Szabó Cs., An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness // Theoretical Computer Science. 2008. Vol. 407. P. 591–595.

6. Hagemann J. and Herrmann C., Arithmetical locally equational classes and representation of partial functions // Universal Algebra. 1982. Vol. 29. P. 345–360.

7. Kepka T., A note on simple quasigroups // Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica. 1978. Vol. 19, № 2. P. 59–60.

8. Чаплыгина С. С. Построение 1,2-простых квазигрупп, изотопных заданным // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2021. Том 25, № 4. С. 217–220

9. Salomaa A., Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain. II // Annales Universitatis Turkuensis. Series AI. 1963. Vol. 63. P. 1–19.

Секция 5. Аналитическая теория чисел

УДК 511.325

Проблема Варинга для девяти почти пропорциональных кубов

А. А. Азамов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: asliddinkhon@mail.ru

Waring's problem for nine almost proportional cubes

A. A. Azamov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan
e-mail: asliddinkhon@mail.ru

Аддитивные задач и с почти пропорциональными слагаемыми сформулировал и впервые изучил английский математик Мейтленд Райт в тридцатые годы прошлого века. К аддитивным задачам, которые он исследовал с почти пропорциональными слагаемыми, относятся теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом [1] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нем базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированную величину $G(n)$, называемую порядком базиса последователь-ности $\{x^n\}$, или функцией Харди. Мейтленд Райт [2,3,4] исследуя проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми, в частности доказал:

- если γ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 — произвольные положительные числа, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$, $N = 2^{\xi} N_1$, N_1 — нечётное целое число, $N_1 > N_0 = N_0(\gamma, \mu_1, \ldots, \mu_4)$, и выполняется условие
$$|x_i^2 - \mu_i N| \leqslant \gamma \mu_i N, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$
тогда число N представимо в виде
$$N = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2;$$

- пусть $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — фиксированные положительные числа, $\mu_1 + \ldots + \mu_r = 1$, $r \geqslant r_0$,
$$0 < \beta < \alpha = \min\left(\frac{r-4}{4(r-3)},\ \frac{r-2}{2(r-1)}\right), \qquad \gamma = \frac{r}{k} - 1 - (r-1)\beta,$$
$I(N)$ — число решений уравнения (1) относительно $x_1, \ldots, x_r$ с условием $|x_i^n - \mu_i N| \leqslant A_i N^{1-\beta}$, тогда справедлива асимптотическая формула
$$I(N) = \frac{c\left(\prod \mu_i\right)^{\alpha-1}}{n^r \Gamma(r)} \mathfrak{S}(N) N^{\gamma} + O\left(N^{\gamma-d}\right),$$
где $c = c(A_1, \ldots, A_s)$ — абсолютная постоянная, $d = d(r, \beta) > 0$.

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, так как при $\mu_1 = \ldots = \mu_r$ аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональ-ными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant P$, $P < Q$ через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Для произвольного фиксированного n поведения коротких тригонометри-ческих сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах было исследовано З.Х.Рахмоновым и его учениками в работах [5,6,7,8]. Воспользовавшись результатами этих работ, были решены следующие аддитивные задачи с почти равными слагаемыми:

- проблема Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены [8,9], асимптотические формулы для количество решений диофантова уравнения (5), с условиями

  $$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n+1} \right)^{\frac{1}{n}} \right| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n+1, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$

  где

  $$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- обобщение [5,6,10] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слага-емыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

  $$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

  при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

  $$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\theta(n)} \mathfrak{L}^{c_n},$$

  соответственно при

  $$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

В этой работе доказывается асимптотическая формула в проблеме Варинга для девяти почти пропорциональных кубов.

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $\mu_1, \ldots, \mu_9$ — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*

$$\mu_1 + \ldots + \mu_9 = 1,$$

$I(N,H)$ — число представлений N суммою девяти кубов чисел x_i, $i=\overline{1,9}$ с условиями

$$|x_i-(\mu_i N)^{\frac{1}{3}}|\leqslant H, \qquad i=\overline{1,9},$$

Тогда при $H\geqslant N^{\frac{3}{10}+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H)=\mathfrak{B}(N)\mathfrak{S}(N)\frac{H^8}{N^{\frac{2}{3}}}+O\left(\frac{H^8}{N^{\frac{2}{3}}\mathfrak{L}^8}\right),$$

где $\mathfrak{B}(N)$ – абсолютная постоянная являющиеся значением особого интеграла, $Si(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходить некоторое число $c(N)>0$.

Далее воспользуемся следующими обозначениями:

$$\gamma_n(\lambda;x,y)=\int_{-0,5}^{0,5}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}+yu\right)^n\right)du, \qquad S_n(a,q)=\sum_{m=1}^{q}e\left(\frac{am^n}{q}\right).$$

Теорема 1 доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова, используя

- асимптотическую формулу для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha;x,y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 1 леммы 1);
- нетривиальную оценку для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha;x,y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 2 леммы 1);
- обобщение теорема Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha;x,y)$, а именно правильные по порядку оценки интегралов по периоду от восьмой степени модуля этих сумм (лемма 2).
- нетривиальную оценку для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha;x,y)$ в малых дугах (лемма 3);

Лемма 1. [5]. *Пусть $\tau\geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda\geqslant 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\}\leqslant\frac{1}{2q}$, имеет место формула*

$$T_n(\alpha,x,y)=\frac{S_n(a,q)}{q}T_n(\lambda;x,y)+O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\}>\frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T_n(\alpha,x,y)|\ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q+\min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(yq^{-\frac{1}{n}},\lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Следствие 1. *Пусть $\tau\geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda|\leqslant\frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T_n(\alpha,x,y)=\frac{y}{q}S_n(a,q)\gamma_n\left(\lambda;x,y\right)+O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Следствие 2. *Пусть $\tau\geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}}<|\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка*

$$T_n(\alpha;x,y)\ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q+\min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(yq^{-\frac{1}{n}},x^{1-\frac{1}{k}}q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}}\right).$$

Лемма 2. *При $x\geq x_0>0$, $\sqrt{x}<y\leq 0,01x$ имеет место оценка*

$$\int_0^1|T_3(\alpha;x,y)|^8d\alpha\ll y^{5+\varepsilon}.$$

Лемма 3. *Пусть $x\geqslant x_0>0$, α — вещественное число, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, тогда при $\sqrt{x}<y\leqslant 0,01x$ имеет место оценка*

$$T_3(\alpha;x,y)\leqslant 6y^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{q}+\frac{q}{y^3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Waring E.M. Meditationes algebraicae // Cambridge. 1770.
2. Wright E.M. The representation of a number as a sum of four 'almost proportional' squares // The Quarterly Journal of Mathematics. 1936. v. os–7. Is. 1. P. 230-240.
3. Wright E.M. Proportionality conditions in Waring's 7problem // Mathematische Zeitschrift. 1934. v. 38. P. 730-746.
4. Wright E.M. An extension of Waring's problem // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A 232 1-26 (1933), Zbl 0006.39602.
5. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Том 74, № 4. С. 564-572.
6. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Том 95, № 3. С. 445-456.
7. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки. 2012 г. № 6, Часть 2. С. 194–203.
8. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, № 1(53). С. 232-247.
9. Азамов А.З., Рахмонов З.Х. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. 2011. Том 54, № 3. С. 165-172.
10. Рахимов А.О., Рахмонов Ф.З. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми. – Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Изд.: Саратовский НИГУ им. Н.Г. Чернышевского, ISSN: 1810—4134, 2016. № 8. С. 87-89.

УДК 511.216

О представлении натурального числа суммой пяти квадратов простых чисел

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: iallakov@mail.ru
Н. С. Музропова (Узбекистан, г. Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: muzrapova-n@mail.ru

The presentation of numbers by the sum of the fifth squares of prime numbers

I. Allakov (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail: iallakov@mail.ru
N. S. Muzrapova (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail:muzrapova-n@mail.ru

Пусть $p_1, ..., p_5-$ простые числа, $a_1, ..., a_5, b-$ целые числа, $B = \max\{2, |a_1|, ..., |a_5|\}$. В работе [1] Ming – Chit Liu и Kai – Man Tsang доказали, что если все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_5$ положительные, то существует абсолютная постоянная $A > 0$ такая, что уравнение

$$a_1 p_1^2 + ... + a_5 p_5^2 = b. \tag{1}$$

разрешимо в простых числах $p_1, ..., p_5$, при $b \geq B^A$.

В настоящей работе оценивается количество решений уравнения (1) в простых числах. Пусть $R(b)$ количество решений уравнения (1) в простых числах $p_i < X^{\frac{1}{2}}$ и $\frac{X}{2} \leq b < X$, где $X-$ достаточно большое действительное число. Положим

$$Q = X^\delta, T = Q^{\frac{1}{\delta}}, L = XB^{-1}, B \leq Q^\delta. \tag{2}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если $X-$ достаточно большое число и $\frac{X}{2} \leq b < X$, тогда для достаточно малого $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$R(b) \gg X^{3-\frac{\delta}{5}} \left(\frac{X^{\frac{\delta}{130}}}{B^{23}} - 1 \right) ln^M X,$$

где $M > 0$ некоторое эффективно вычисляемое положительное постоянное, $\gg -$ символ Виноградова.

Доказательство. Для действительного числа y и натурального числа q обозначим: $e(y) = e^{2\pi i y}$ и $e_q(y) = e(\frac{y}{q})$. Также положим:

$$\begin{cases} S(y) = \sum\limits_{L<n\leq X} \Lambda(n) e(n^2 y), \ S_\chi(y) = \sum\limits_{L<n\leq X} \Lambda(n)\chi(n) e(n^2 y), \\ I(y) = \int\limits_L^X e(x^2 y) dx, \ \tilde{I}(y) = \int\limits_L^X x^{\tilde{\beta}-1} e(x^2 y) dx, \\ I_\chi(y) = \sum\limits_{|\gamma|\leq T}{}' \int\limits_L^N x^{\rho-1} e(x^2 y) dx, \end{cases} \tag{3}$$

где $\Lambda(n)$ функция Мангольдта, $\chi(n)-$ характер Дирихле по модулю q и $\sum'_{|\gamma|\leq T}$ означает суммирование по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$, $L-$ функции Дирихле $L(s, \chi)$, лежащим в области $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - c_1(lnT)^{-1}$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$). Для $1 \leq h \leq q \leq Q$, $(h, q) = 1$ полагая, что

$$\tau = T^{1/4} X^{-2}, \tag{4}$$

интервал $[\tau, 1+\tau]$ делим на основные M и дополнительные M' подынтервалы (более подробно см [1], стр. 150). Далее положим

$$I(b) = \int_{\tau}^{1+\tau} e(-bx) \prod_{j=1}^{5} S(a_j x) dx. \tag{5}$$

Ясно, что

$$I(b) = \sum_{\substack{L<n_1,\dots,n_5\le X \\ a_1 n_1^2+\dots+a_5 n_5^2=b}} \Lambda(n_1)\dots\Lambda(n_5) \tag{6}$$

и интеграл $I(b)$ можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$I(b) = \int_{\tau}^{1+\tau} e(-bx) \prod_{j=1}^{5} S(a_j x) dx = \left(\int_M + \int_{M'}\right) e(-bx) \prod_{j=1}^{5} S(a_j x) dx = I_1(b) + I_2(b) \tag{7}$$

Рассмотрим интеграл $I_2(b)$. Для того, чтобы оценить $I_2(b)$ сначала докажем лемму.

□

Лемма 1. *Для любого $x \in M'$ при $X > X_1(c_2, \delta)$ справедлива оценка $S(a_j x) \ll XQ^{\frac{-1}{5}}$.*

Доказательство. Пусть $x \in M'$. Согласно теореме Дирихле о диофантовой аппроксимации существуют целые числа h и q, удовлетворяющие условиям:

$$1 \le q \le \frac{1}{\tau},\ (h,q) = 1,\ \left|a_j x - hq^{-1}\right| < \tau q^{-1}. \tag{8}$$

Деля обе части неравенства (8) на $|a_j|$, получим

$$\left|x - \frac{x'}{q'}\right| < \frac{\tau}{q'}, \tag{9}$$

где q' - положительный множитель $a_j q$ и $(h', q') = 1$. Не трудно видеть , что $q' > Q$. Из этого вытекает, что если $q' \le Q$, тогда согласно (9) и $x \in [\tau, 1+\tau]$, имеем $1 \le h' \le q'$ и следовательно, $x \in M$, а это противоречит нашему предположению $x \in M'$. Таким образом

$$Q|a_j|^{-1} < q \le \tau^{-1}. \tag{10}$$

Далее, для оценки суммы $S(a_j x)$ будем применять теорему 2 работы [2] (см.также [3]), согласно которой имеем: если y действительное и h, $q-$ целые числа с условием $(h,q) = 1$ и $\left|y - \frac{h}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, тогда для некоторого подходящего c_2 и $X \ge N_1(c_2)$ справедлива оценка

$$\sum_{n\le X} \Lambda(n) e(n^2 y) \ll X^{1+\frac{c_2}{lnlnx}} \left(q^{-1} + X^{\frac{-1}{2}} + qX^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Следовательно, из (3)-(10) находим

$$S(a_j x) \ll XQ^{\frac{-1}{5}}.$$

□

Лемма 2. *Существует постоянная c_3 такая, что при $X \geq X_1(c_2, \delta)$ справедлива оценка*

$$I_2(b) \ll X^3 Q^{\frac{-1}{5}} ln^{c_3} X.$$

Доказательство. Применяя лемму 1, при $j = 5$ и (7) находим

$$I_2(b) \ll XQ^{\frac{-1}{5}} \int\limits_{\tau}^{1+\tau} \prod_{j=1}^{4} |S(a_j x)| dx \leq XQ^{\frac{-1}{5}} \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{0}^{1} |S(a_j x)|^4 dx, \tag{11}$$

где τ определеятся равенством (4).

Оценим интеграл в правой части неравенства (11) :

$$\int\limits_{0}^{1} |S(a_j x)|^4 dx \leq (ln^4 X) \sum_{\substack{n_j \leq X \\ n_1^2 + n_2^2 = n_3^2 + n_4^2}} 1 = ln^4 X \int\limits_{0}^{1} \left| \sum_{n \leq X} e(n^2 x) \right|^4 dx. \tag{12}$$

Согласно лемме Хуа (см.теорема 4 работы [4]) существует положительное c_3 такое, что

$$\int\limits_{0}^{1} \left| \sum_{n \leq X} e(n^2 x) \right|^4 dx \ll X^2 ln^{c_3 - 4} X. \tag{13}$$

Теперь из (11), (12) и (13) получим

$$I_2(b) \ll X^3 Q^{\frac{-1}{5}} ln^{c_3} X.$$

В силу (5), (6) интеграл $I(b)$ равен $\sum \Lambda(n_1)...\Lambda(n_5)$, где суммирование по всем $n_1, n_2, \ldots, n_5$, которые удовлетворяют условиям

$$L < n_j \leq X \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{5} a_j n_j^2 = b.$$

Подставив вклад в эту сумму тех членов для некоторого n_j, например n_5, которые не являются простыми числами не более чем

$$\ll ln^2 X \sum_{k \geq 2} \sum_{p \leq X^{1/k}} \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_4 \leq X \\ a_1 n_1^2 + \ldots + a_4 n_4^2 = b - a_5 p^{2k}}} 1. \tag{14}$$

В силу (13) внутренняя сумма по $n_1, n_2, \ldots, n_4$ в (14) равна

$$\int\limits_{0}^{1} e\Big((a_5 p^{2k} - b)x\Big) \prod_{j=1}^{4} \left(\sum_{n \leq X} e(a_j n^2 x) \right) dx \ll$$

$$\ll \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{0}^{1} \left| \sum_{n \leq X} e(a_j n^2 x) \right|^4 dx \ll X^2 ln^{c_3 - 4} X.$$

Следовательно, для кратной суммы в (14) справедлива оценка :

$$\ll ln^2 X \left(X^2 ln^{c_3 - 4} X \right) \sum_{k \geq 2} \sum_{p \leq X^{1/k}} 1 \ll X^{\frac{5}{2}} ln^{c_3} X.$$

Теперь I(b) можем представить в виде

$$I(b) = I_1(b) + I_2(b) \ll R(b)ln^5X + O(X^{\frac{5}{2}}ln^{c_3}X),$$

отсюда

$$R(b) \gg \frac{I_1(b)}{ln^5X} + O(X^3Q^{\frac{-1}{5}}ln^{c_3}X) \tag{15}$$

В работе [1] доказано, что (см.стр 168, [1])

$$I_1(b) \gg X^3Q^{\frac{-5}{26}}B^{-23}(lnQ)^{-5}. \tag{16}$$

Из (15) следует утверждение теоремы,если учесть обозначение (2).

Отметим, что для $(1, X)$ интервала, разбивая подынтервалы $\frac{X}{2^{k+1}} \le b < \frac{X}{2^k}$ (их количество $\ll lnX$) и применяя к каждому интервалу доказанную теорему, можно судить о количестве решений уравнения (1) для всех $1 < b \le X$.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ming-Chit Liu and Kai-Man Tsang. Small prime Solutions of additive equations.— Mh. Math. 1991, 111, 147-169.
2. Ghosh A. The distribution of modulo 1. — Proc. London Math. 1981, 3042,p/252-269.
3. Аллаков И., Исраилов М.И. Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел в арифметической прогрессии // Изв. АН РУЗ. Ташкент, 1990, №5,стр.3-10.
4. Хуа- Ло– Ген. — Матем. инс. Им. В.А.Стеклова 1947, 22, стр.3-179.

———————————————————————————

УДК 511.174

Об оценке сумм Сельберга в проблеме нулей функции Дэвенпорта — Хейльбронна

А. С. Аминов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: aminov.as@bk.ru

On the estimation of the Selberg sums in the problem of zeros of the Davenport–Heilbronn function

A. S. Aminov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan
e-mail: aminov.as@bk.ru

Пусть $\chi(n)$ – комплексный характер Дирихле по модулю 5 и такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}, \qquad r(n) = \frac{1 - iæ}{2}\chi(n) + \frac{1 + iæ}{2}\bar{\chi}(n).$$

Определение 1. *Функцией Дэвенпорта-Хейльбронна называется функция*

$$f(s) = \frac{1 - i\ae}{2} L(s, \chi_1) + \frac{1 + i\ae}{2} L(s, \bar{\chi}_1), \qquad L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Функция $f(s)$ введена и исследована в [1]. Она удовлетворяет уравнению римановского типа:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s).$$

Однако для $f(s)$ гипотеза Римана (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Res = \frac{1}{2}$) не выполняется. Более того, число нулей $f(s)$ в области $Res > 1$, $0 < Ims \le T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная. В 1980 г. С.М.Воронин [2,3] доказал, что, тем не менее, прямая $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$. Пусть $N_0(T)$ — число нулей нечетного порядка $f(s)$ на промежутке $Res = \frac{1}{2}$, $0 < Ims \le T$. С.М.Воронин доказал, что

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\log\log\log\log T}\right), \qquad c > 0 \text{ - постояннная.}$$

В 1990 г. А.А.Карацуба [4] доказал, что *если ε и ε_1 — произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* 0.01, *то при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, $T \ge T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ выполняется соотношение*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geqslant H(\log T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{1}$$

В работе [5] этот результат уточняется и доказывается: *пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* 0.00001, *тогда соотношение (1) выполняется при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$.*

Работа посвящена уточнению асимптотической формуле для суммы $S(Y)$, которого вёл А.Сельберг. Для определения суммы $S(Y)$ при Res>1 вводится числа $\alpha(\nu)$ и $\beta(\nu)$ соотношениями

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p \equiv \pm 1 (mod 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)(1 - \frac{\log \nu}{\log \lambda}), & 1 \le \nu < X; \\ 0, & \nu \ge X. \end{cases}$$

Из этого определения следует мультипликативность $\alpha(\nu)$, а также равенство

$$\beta(\nu)\chi_1(\nu) = \beta(\nu)\bar{\chi}_1(\nu) = h(\nu).$$

Пусть далее

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2} = \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda \\ \nu_1, \nu_2 < X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},$$

где λ – положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит $X = T^{0.01\varepsilon_1}$.

Определение. *Суммами А. Сельберга вида $W(\theta)$ и вида $S(Y)$ называются соответственно суммы*

$$S(Y) = \sum_{\lambda \le Y} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}, \qquad W(\theta) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$

Теорема 1. *Пусть* $T^{0,1} \leqslant Y \leq T$, $\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, *тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y) = \frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} W(0) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2 \right) W(1-2\theta) + O\left(Y^{-2\theta} X^2 \ln^2 X \right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros certain Dirichlet series I, II // J. London Math. Soc. 1936. V. 11. P. 181–185 and 307–312.
2. Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1980. Т. 44. № 1. С. 63–91.
3. Воронин С.М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Тр. МИАН. 1984. Т. 163. С. 74–77.
4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 303–315.
5. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А., Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2019. Т. 17. № 4 (72). С.271-293.

УДК 511.32

О пересечении двух однородных последовательностей Битти

А. В. Бегунц (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru
Д. В. Горяшин (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

On the intersection of two homogeneous Beatty sequences

A. V. Begunts (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru
D. V. Goryashin (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Последовательностями Битти называют последовательности вида $a_n = [\alpha n + \beta]$, где α — положительное иррациональное число, $\beta \in \mathbb{R}$. Если $\beta = 0$, то последовательность Битти называется однородной. В случае $\alpha > 1$ такая последовательность строго возрастает.

Хорошо известно (см. [1]), что если $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то однородные последовательности Битти $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ не пересекаются и дают в объединении всё множество натуральных чисел.

В 1957 г. Т. Сколем показал, что если числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то последовательности $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ имеют бесконечно много общих членов (см. [2], теоремы 5, 6). Т. Банг [3] усилил этот результат следующим образом. Обозначим через $S_{\alpha,\beta}(N)$ количество натуральных чисел k, $1 \leqslant k \leqslant N$, принадлежащих одновременно двум последовательностям Битти $[\alpha n]$ и $[\beta m]$. Тогда если $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то $S_{\alpha,\beta}(N) \sim \frac{N}{\alpha\beta}$ при $N \to \infty$.

В докладе будет доказано дальнейшее уточнение этого результата для случая иррациональных алгебраических чисел.

Теорема 1. *Пусть $\alpha, \beta > 1$ — такие иррациональные алгебраические числа, что числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{N}{\alpha\beta} + O\big(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beatty S. Problem 3173 // American Mathematical Monthly, **33** (3), 1926, p. 159.
2. Skolem Th. On certain distributions of integers in pairs with given differences // Math. Scand. 5 (1957), 57–68.
3. Bang T. On the sequence $[n\alpha]$, $n = 1, 2, 3\ldots$. Supplementary note to the preceding paper by Th. Skolem // Math. Scand. 5 (1957), 69–76.

УДК 511.3+511.41

О количестве цепных дробей первого типа, знаменатель которых ограничен N[1]

Д. А. Долгов (Россия, г. Казань)
Казанский федеральный университет
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

On the number of continued fractions of the first type whose denominator bounded by N

D. A. Dolgov (Russia, Kazan)
Kazan Federal University
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

[1]Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

1. Введение

Цепные дроби с рациональными неполными частными с правым сдвигом естественным образом возникают в ходе применения к отношению натуральных чисел a, b обобщенного k-арного алгоритма Соренсона с правым сдвигом вычисления наибольшего общего делителя (см. [1]). Применение этого алгоритма дает возможность получать разные виды таких дробей. Рассмотрим дроби первого типа следующего вида:

$$\frac{y_0}{x_0}+\cfrac{k_0}{\left(\frac{y_1 x_0}{x_1}+\cfrac{k_1}{\left(\ddots+\cfrac{k_{n-1}}{\cfrac{y_n \prod\limits_{\substack{0\leqslant i<n,\\ i\not\equiv n \mod 2}} x_i}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n,\\ j\equiv n \mod 2}} x_j}}\right)}\right)}. \tag{1}$$

Обозначим дроби первого типа как $[g_0; g_1, ..., g_n]_1$, где g_i – вектор, равный $(y_i, x_i, k_i, \gamma_i, \beta_i)$ для любого $i < n$, а при $i = n$ g_i равен $(y_n, x_n, \gamma_n, \beta_n)$. Число y_0 – целое, x_0, x_i, y_i – ненулевые целые.

С цепными дробями с рациональными неполными частным с правым сдвигом связаны особые формы континуантов, то есть многочленов, с помощью которых можно выразить числитель и знаменатель подходящей дроби. Континуант первого типа – определитель матрицы

$$\langle g_0, g_1, ..., g_n\rangle_1 = \det\begin{pmatrix} y_0 & k_0 & 0 & 0 & 0\cdots0 & 0\\ -x_1 & y_1 & k_1 & 0 & 0\cdots0 & 0\\ 0 & -x_2 & y_2 & k_2 & 0\cdots0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0\cdots0 & 0 & 0 & 0 & -x_n & y_n\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где x_i, y_i, k_i – элементы соответствующей цепной дроби первого типа. Приведем начальные соотношения для данного континуанта: $\langle\ \rangle_1 = 1$, $\langle g_0\rangle_1 = y_0$, $\langle g_0, g_1\rangle_1 = y_0 y_1 + k_0 x_1$.

Лемма 1. *Пусть $[g_0; g_1, g_2, ..., g_n]_1$ – разложение числа a/b в дробь первого типа, число $n \geqslant 3$, тогда справедливы формулы*

1. $\langle g_0, g_1, ..., g_n\rangle_1 = y_n \langle g_0, ..., g_{n-1}\rangle_1 + k_{n-1}x_n \langle g_0, ..., g_{n-2}\rangle_1$;

2. $\langle g_0, g_1, ...g_n\rangle_1 = y_0 \langle g_1, ..., g_n\rangle_1 + k_0 x_1 \langle g_2, ..., g_n\rangle_1$;

3. $\langle g_0, ..., g_n\rangle_1 = \langle g_0, ..., g_j\rangle_1 \langle g_{j+1}, ..., g_n\rangle_1 + k_j x_{j+1} \langle g_0, ..., g_{j-1}\rangle_1 \times$
$\times \langle g_{j+2}, ..., g_n\rangle_1$, *где j – произвольное число с условием $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Кроме того, справедливо равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{\langle g_0, g_1, g_2, ..., g_n\rangle_1}{x_0 \langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle_1}.$$

Здесь и далее все возможные $k_i = k$.

2. Обобщенная дзета функция Гуда

Зафиксируем алфавит $\mathbb{A}$ вида

$$\{-m, -m+1, ..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ..., m-1, m\}, \tag{3}$$

где величина $m = \lceil \sqrt{k} \rceil$.

Определим множество "слов" длины t из алфавита $\mathbb{A}$:

$$V_{\mathbb{A}}(t) = \{(g_0, g_1, ..., g_t) | 1 \leqslant |x_i|, |y_i| \leqslant \lceil \sqrt{k} \rceil\} \tag{4}$$

Пусть $D \in V_{\mathbb{A}}(t)$ – слово длины t, а $\langle D \rangle_1$ – континуант первого типа. Для каждого $s > 0$ рассмотрим сумму

$$\zeta_t(s, \mathbb{A}) = \sum_{D \in V_{\mathbb{A}}(t)} (\langle D \rangle_1)^{-s}.$$

Обобщенная дзета функция Гуда:

$$\zeta(s, \mathbb{A}) = \sum_{t=1}^{+\infty} \zeta_t(s, \mathbb{A}) = \sum_{t=1}^{+\infty} \sum_{D \in V_{\mathbb{A}}(t)} (\langle D \rangle_1)^{-s}. \tag{5}$$

Эта функция сходится или расходится в зависимости от величины s. Точная нижняя грань тех значений, при которых функция (5) сходится, называется абсциссой сходимости этого ряда.

В докладе будет рассмотрено примение модифицированного метода Хенсли [2], [3], задействующего обобщенную дзета функцию Гуда, для решения задачи оценки количества дробей, знаменатель которых ограничен N. Схожая к этой задача возникает при оценки средней длины цепной дроби первого типа [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долгов Д. А. О континуантах цепных дробей с рациональными неполными частными // Дискретная математика (готовится к печати). 2022.

2. Hensley D. The distribution of badly approximable numbers and continuants with bounded digits. // Theorie des nombres (Quebec, PQ, 1987). 1989. C. 371–385.

3. Frolenkov D. A., Kan I. D. A reinforcement of the Bourgain-Kontorovich's theorem by elementary methods // https://arxiv.org/abs/1207.4546

4. Долгов Д. А. Об аналогах теоремы Хейльбронна // Математические заметки (готовится к печати). 2022.

УДК 511

О некоторых арифметических свойствах циклических подгрупп в симметрической группе

Р. А. Дохов (Россия, г. Ставрополь)
Северо-Кавказский центр математических исследований; Северо-Кавказский Федеральный университет
e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru
У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик); Северо-Кавказский центр математических исследований; Северо-Кавказский Федеральный университет (г. Ставрополь)
e-mail: urusbi@rambler.ru

On some arithmetic properties of cyclic subgroups in symmetric groups

R. A. Dokhov (Russia, Stavropol)
North Caucasus Center of Mathematical Research; North Caucasian Federal University
e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru
U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University (Nalchik); North Caucasus Center of Mathematical Research; North Caucasian Federal University (Stavropol)
e-mail: urusbi@rambler.ru

В теории чисел известны применения теоретико-групповых методов (см. напр [1]). Но и некоторые теоретико-числовые факты тоже можно использовать в теории конечных групп. Одним из таких примеров применения теоретико-числовых результатов к теории групп является известный постулат Бертрана о простых числах (между n и $2n$ при $n > 1$ содержится хотя бы одно простое число), из которого следует, что симметрическая группа S_n не имеет подгрупп, индекс которых i, $2 < i < n$, $n > 4$ (см. [2]). Ещё один арифметический метод изученния подгрупп в симметрической группе даётся в [3].

Опираясь на известное правило вычисления порядка подстановка из S_n, разложенной в произведение независимых циклов и, используя оценку снизу для произведения простых чисел (см. [4, 5]), получаем следующие результаты.

Теорема 1. *В симметрической группе S_n существует циклическая подгруппа $\langle\tau\rangle$, порождённая подстановкой $\tau \in S_n$, порядок которого удовлетворяет неравенству*

$$|\langle\tau\rangle| > 2^{s\cdot\ln s},$$

где

$$s = \left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right].$$

Следующий результат относится к количеству простых делителей порядка циклической подгруппы в S_n.

Теорема 2. *В симметрической группе S_n существуют циклические подгруппы, для которых*

$$\eta(|\langle\tau\rangle|) \geqslant \pi\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]\right),$$

где $\pi(x)$ — количество простых чисел $\leqslant x$; η — функция количества простых делителей натурального числа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. — М., 1985.
2. Товбин А. В. Обобщение теоремы Бертрана из теории групп подстановок // Мат. сборник. 1942. Т. 10, № 1-2. С. 7–10.
3. Пачев У. М., Шокуев В. Н. О применении теории сравнений к изучению подгрупп в симметрических группах // Изв. КБЦН РАН. 2001. № 1 (6). С. 68–69.
4. Rosser B. The n-th Prime is greater than $n \log n$ // Proc. London mat. Soc. 1938. 45, 21–44.
5. Трост Э. Простые числа. — М.: Изд-во физматлит, 1959.

———————————————————————————

УДК 511.31

О двух соотношениях, характеризующих золотое сечение

А. А. Жукова (Россия, г. Владимир)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: georg967@mail.ru
А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

On two relations characterizing the golden ratio

A. A. Zhukova (Russia, Vladimir)
Russian Presidental Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: georg967@mail.ru
A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs
e-mail: a1981@mail.ru

Пусть τ — золотое сечение, т.е. $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В.Г. Журавлев в работе [1] получил два интересных соотношения, связанных с золотым сечением.

Теорема 1. *Для любого целого i справедливо равенство*

$$[([i\tau]+1)\tau] = [i\tau^2]+1. \tag{1}$$

Кроме того, для любого целого $i \neq 0$ справедливо равенство

$$[[i\tau]\tau]+1 = [i\tau^2]. \tag{2}$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть числа.

Доказательство соотношений (1) и (2) в работе [1] было основано на глубокой теории, связанной с иррациональным поворотом окружности $x \to x + \tau \bmod 1$. Некоторые аналоги данных соотношений для произвольных иррациональностей обсуждаются в [2].

Можно дать существенно более простое доказательство теоремы 1, а также рассмотреть обратную задачу, то есть описать, в какой степени данные соотношения характеризуют золотое сечение.

Рассмотрим аналоги соотношений (1) и (2) с заменой τ на произвольное α:

$$[([i\alpha] + 1)\alpha] = [i\alpha^2] + 1; \tag{3}$$

$$[[i\alpha]\alpha] + 1 = [i\alpha^2]. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть для некоторого α соотношение (3) выполняется для всех целых i, а соотношение (4) выполняется для всех целых $i \neq 0$. Тогда $\alpha = \tau$.*

Таким образом, данные соотношения однозначно характеризуют золотое сечение.

Теорема 2 немедленно вытекает из следующего более сильного результата.

Теорема 3. *Пусть для некоторого α соотношения (3) и (4) выполняются в случае, когда i равно любому из чисел Фибоначчи и, кроме того, соотношение (3) выполняется для $i = 0$. Тогда $\alpha = \tau$.*

Заметим, что из теорем 3 и 1 вытекает, что если соотношения (3) и (4) выполняются для всех чисел Фибоначчи, то они автоматически выполняются для всех i.

Кроме того, можно рассмотреть выполнимость соотношений (3) и (4) для конечных множеств чисел. Оказывается, что данные соотношения обладают свойством форсинга: выполнимость соотношений для некоторых множеств i обеспечивает их выполнимость для больших значений i. Количественно явление описывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть для некоторого α соотношение (3) выполняется для $i = 0, 1, 2, \ldots, F_n$ и соотношение (4) выполняется для $i = 1, 2, \ldots, F_n$. Тогда соотношения (3) и (4) также выполняются для $i = F_n + 1, \ldots, F_{n+1} - 1$.*

Здесь F_n означает n-ое число Фибоначчи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для $n > 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Известия РАН. Серия математическая. 2007. Том 72, № 2. С. 89-122.

2. Шутов А. В. Перенормировки вращений окружности // Чебышевский сборник. 2004. Том 5, № 4. С. 125-143.

——————————————————————————

УДК 511.3

Базис гильбертова пространства и восьмая проблема Гильберта

К. В. Капитонец (Россия, г. Москва)
e-mail: kkapitonets@live.com

The Hilbert space basis and Hilbert's eighth problem

K. V. Kapitonets (Russia, Moscow)
e-mail: kkapitonets@live.com

1. Основные предпосылки работы

В 1859 году, когда Риман заложил своим докладом в Берлинской академии наук [1] фундамент аналитической теории чисел, математика в ее современном виде только начинала формироваться.

В 1854 году Чебышев пишет работу про механизмы, которые в своей работе в наименьшей степени уклоняются от прямой [2], в которой развивает теорию ортогональных полиномов для аппроксимации выражения функций, описывающих кинематику таких механизмов.

Теперь полиномы Чебышева являются одним из видов классических ортогональных полиномов, которые аппроксимируют функции вещественной переменной на заданном промежутке $(a, b) \in \mathbb{R}$.

Важно заметить, что теорема о нулях ортогональных полиномов [3], которая утверждает, что эти нули простые и вещественные, верна только для вещественных полиномов.

Пожалуй, самым важным событием математики в XX веке является работа Гильберта[4], в которой он в 1912 году закладывает основы линейных функциональных пространств, которые теперь носят его имя - гильбертовы пространства.

Основным результатом здесь является утверждение о сепарабельности гильбертова пространства, которое позволяет утверждать, что с помощью обобщенных рядов Фурье в гильбертовом пространстве можно представить любую функцию этого пространства и такой ряд будет рядом Фурье этой аналитической функции.

В работе рассматривается сепарабельное гильбертово пространство $\hat{H}_r$ вещественных функций суммируемых с квадратом $L^2(a,b)_r$ на любом промежутке $\{(a,b)_r\}_{r=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$.

Таким образом, в $\hat{H}_r$ определена норма [5]

$$||f(x)|| = \Big(\int_a^b f(x)^2 dx\Big)^{1/2} < \infty \tag{1}$$

и скалярное произведение

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx < \infty \tag{2}$$

Если $\hat{H}_r$ сепарабельно, то в нем существует полный универсальный ортогональный базис $\{\phi(x)_n\}_{n=1}^{\infty}$, который можно представить общим рядом Фурье

$$\phi(x)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x^{m-1} \tag{3}$$

где

$$a_{nm} = \int_a^b \phi(x)_n x^{m-1} dx \tag{4}$$

коэффициенты Фурье $\phi(x)_n$.

Следовательно, для любой $\phi(x)_n$ будет выполняться следующее неравенство

$$\left| \phi(x)_n - \sum_{m=1}^{M} a_{nm} x^{m-1} \right| < \epsilon \tag{5}$$

Очевидно, что $\sum_{m=1}^{M} a_{nm} x^{m-1}$ является полиномом в отличии от ряда фурье (3).

В работе использовано это свойство гильбертова пространства, чтобы доказать утверждение о нулях базиса гильбертова пространства $\hat{H}_r$, основываясь на теореме о нулях [3] вещественных ортогональных полиномов.

2. Основные результаты работы

Утверждение 1. *Пусть $\{f(x)_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольный полный ортогональный базис $\hat{H}_r$ на любом промежутке $\{(a,b)_r\}_{r=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ отличный от полного универсального ортогонального базиса $\{\phi(x)_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Тогда если функция $f(x) \in \{f(x)_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет нули, то эти нули простые и вещественные.

Утверждение 2. *В гильбертовом пространстве $\hat{H}_r$ на любом промежутке*

$$\{(a,b)_r\}_{r=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$$

существует полный базис $\{Z(\lambda_k, t\}_{k=1}^{\infty}$ где $\lambda_k \in \mathbb{Q}$, такой что функция

$$Z(1/2, t) \in \{Z(\lambda_k, t\}_{k=1}^{\infty},$$

которая определяет $|\zeta(s)|$ на критической прямой, имеет все простые и вещественные нули.

Очевидно, что

$$Z(1/2, t) = \zeta(1/2 + it) e^{i\theta(t)} \tag{6}$$

функция Харди, которую Зигель вернул из небытия в 1932 году, а Карацуба ее так назвал [6].

Произведение (6) можно представить в тригонометрическом виде непосредственно из ряда Дирихле.

$$\zeta(s) e^{i\theta(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \cos(\theta(t) - t\log n) + i \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \sin(\theta(t) - t\log n) \tag{7}$$

При $\sigma = 1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \sin(\theta(t) - t\log n) \equiv 0 \tag{8}$$

Тогда

$$\zeta(1/2 + it) e^{i\theta(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \cos(\theta(t) - t\log n) \tag{9}$$

Промежуточное преобразование (7) можно рассматривать двумя относительными способами:

1) поворот вектора $\zeta(s)$ на угол $\theta(t)$;

2) поворот комплексной плоскости на угол $-\theta(t)$.

Тогда во втором случае вещественная часть выражения (7) будет обозначать проекцию вектора $\zeta(s)$ на направление единичного вектора $e^{i\theta(t)}$, а мнимая часть - на перпендикулярное направление, т.е. на направление единичного вектора $ie^{i\theta(t)}$.

Очевидно, что каждую проекцию вектора $\zeta(s)$ можно рассматривать как отдельную вещественную функцию.

Следовательно, мы можем обобщить функцию Харди на всю комплексную плоскость.

Определение 1. *Обозначим вещественную часть произведения $\zeta(s)e^{i\theta(t)}$ при фиксированном значении σ знаком $Z(\sigma,t)$ и будем называть эту вещественную функцию - обобщенная функция Харди.*

Тогда

$$Z(\sigma,t)=\Re\zeta(\sigma+it)e^{i\theta(t)}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\sigma}\cos(\theta(t)-t\log n) \tag{10}$$

Очевидно, что функция Харди принадлежит множеству обобщенных функций Харди при $\sigma=1/2$.

$$Z(t)=Z(1/2,t) \tag{11}$$

Утверждение 3. *В гильбертовом пространстве $\hat{H}_r$ на любом промежутке*

$$\{(a,b)_r\}_{r=1}^{\infty}\in\mathbb{R}$$

существует полный базис $\{Z(\lambda_k,t\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k\in\mathbb{Q}$, такой что функция

$$Z(1/2,t)\in\{Z(\lambda_k,t\}_{k=1}^{\infty}.$$

Утверждение 4. *Процедура ортогонализации Грама-Шмидта не оказывает влияния на функцию, принадлежащую базису гильбертова пространства, иметь простые и вещественные нули.*

3. Основные выводы работы

В работе показано, что на любом промежутке $\{(a,b)_r\}_{r=1}^{\infty}\in\mathbb{R}$ вещественные полиномы в гильбертовом пространстве $\hat{H}_r$ непрерывно аппроксимируют вещественные функции этого гильбертова пространства

$$\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}b_{nk}\sum_{m=1}^{M}a_{nm}x^{m-1}\right|<\epsilon \tag{12}$$

при $N\to\infty, M\to\infty$

Следовательно, сначала свойства ортогональных вещественных функций передаются вещественным полиномам, которые тоже непрерывно становятся ортогональными, т.е. если мы возьмем любые две функции $f_1,f_2\in\{f(x)_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{f(x)_k\}_{k=1}^{\infty}$ простой (т.е. не ортогональный) базис гильбертова пространства $\hat{H}_r$, то, используя процедуру Грама-Шмидта мы можем найти функцию g_2 ортогональную функции f_1

$$g_2=f_2-PROJ(f_2,f_1) \tag{13}$$

где $PROJ(f_2,f_1)$ - проекция вектора f_2 на вектор f_1

тогда

$$(p_1,p_2)\to\int_a^b f_1g_2dx=0, N\to\infty, M\to\infty \tag{14}$$

где p_1 и p_2 ортогональные вещественные полиномы

$$p_1 = \sum_{n=1}^{N} b_{n1} \sum_{m=1}^{M} a_{nm} x^{m-1}, p_2 = \sum_{n=1}^{N} b_{n2} \sum_{m=1}^{M} a_{nm} x^{m-1} \tag{15}$$

такие, что

$$|f_1 - p_1| < \epsilon, |g_2 - p_2| < \epsilon \tag{16}$$

Затем ортогональные вещественные полиномы передают свое свойство иметь простые и вещественные нули ортогональным вещественным функциям, которые составляют базис гильбертова пространства $\hat{H}_r$

$$\beta_k \to \alpha_k, N \to \infty, M \to \infty \tag{17}$$

где $\{\beta_k\}$ нули оттогонального полинома p_1, а $\{\alpha_k\}$ нули функции f_1, тогда мы можем заключить, что, если такие функции вещественной переменной на любом промежутке $\{(a,b)_r\}_{r=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ имеют нули, то эти нули простые и вещественные.

Утверждение, которые было немыслимо в 1859 году, очевидно, стало возможно только благодаря качественному изменению математики, которое было достигнуто благодаря аксиоматическому подходу (странно, почему это не было сделано раньше).

Следствие 1. *Если $Z(1/2,t)$ принадлежит базису $\{Z(\lambda_k,t\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k \in \mathbb{Q}$ гильбертова пространства $\hat{H}_r$, то мы можем выбрать любую функцию $Z(\lambda_k,t), \lambda_k \neq 1/2$ принадлежащую этому базису и найти функцию ортогональную $Z(1/2,t)$ на любом промежутке $\{(a,b)_r\}_{r=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$*

$$G(\lambda_k,t) = Z(\lambda_k,t) - PROJ(Z(\lambda_k,t), Z(1/2,t)) \tag{18}$$

Тогда мы получим два ортогональных полинома

$$p_1 = \sum_{n=1}^{N} b_{n1} \sum_{m=1}^{M} a_{nm} x^{m-1}, p_2 = \sum_{n=1}^{N} b_{n2} \sum_{m=1}^{M} a_{nm} x^{m-1} \tag{19}$$

Следоательно, можем утверждать, что $Z(1/2,t)$ и любая функция $Z(\lambda_k,t))$[1]*, $\lambda_k \neq 1/2$, которая принадлежит базису $\{Z(\lambda_k,t\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k \in \mathbb{Q}$ гильбертова пространства $\hat{H}_r$, если имеет нули на любом промежутке $\{(a,b)_r\}_{r=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$, то эти нули простые и вещественные.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величини. Сочинения. М.:ОГИЗ, 1948, с.216-224.

2. П. Л. Чебышев, Теория механизмов, известных под названием параллелограммов, УМН, 1:2(12) (1946), 12–37

3. Gabor, Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1939

4. Hilbert D. Grundzuege einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Teubner, 1912)

[1]Вместо $Z(1/2,t)$ мы можем подставить на первое место любую функцию $Z(\lambda_k,t)$, поэтому мы говорим не про ортогональную функцию $G(\lambda_k,t)$, а про любую функцию $Z(\lambda_k,t)$.

5. Садовничий В. А. Теория операторов, Учебник для вузов с углубленным изучением математики. — 5-е издание, стереотипное. — М.: Дрофа, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (МГУ), 2004 — ISBN 5-7107-8699-3

6. Воронин С.М., Карацуба А.А., Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994

УДК 511.325

О коротких тригонометрических суммах Г. Вейля

Н. Н. Назрублоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: nasrullo_86@bk.ru

On short exponential G.Weyl sums

N. N. Nazrubloev (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: nasrullo_86@bk.ru

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\text{æ}, 1-\text{æ}]$, $\text{æ}\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q)=1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant P$, $P < Q$ через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

После создания метода тригонометрических сумм и метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова решения классических аддитивных проблем как тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга, проблема Гольдбаха-Варинга, проблема Эстермана, а также другие аддитивные задачи сводятся к двум следующим задачам:

- изучение в большие дуги $\mathfrak{M}(P)$ поведения тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$S_k(\alpha, N) = \sum_{m \leqslant N} \Lambda(m) e(\alpha m^k), \qquad\qquad T_n(\alpha, N) = \sum_{x \leqslant N} e(\alpha x^n);$$

- получение нетривиальных оценок этих сумм в малые дуги $\mathfrak{m}(P)$.

Решение вышеназванных классических проблем становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти равны, так как вместо обычных тригонометрических сумм Г. Вейля $S_k(\alpha, N)$ и $T_n(\alpha, N)$ возникают короткие тригонометрические суммы Г. Вейля вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), \qquad\qquad T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n).$$

Более конкретно решения классических аддитивных проблем с почти равными слагаемыми сводятся к трём следующим задачам:

- изучение поведения коротких тригонометрических сумм $S_k(\alpha; x, y)$ и $T_n(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(P)$;

- получение нетривиальных оценок этих коротких сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ за исключением малой окрестности их центров;
- нахождение нетривиальных оценок этих сумм в малые дуги $\mathfrak{m}(P)$.

Поведение $T_n(\alpha; x, y)$ и $S_k(\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ изучены соответственно в работах [1, 2]. В работе [3] была доказана, что *если* $x \geqslant x_0 > 0$, $y_0 < y \leqslant 0,01x$, $\tau(h)$ *— функция делителей,* α *– вещественное число,* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, *то справедлива оценка*

$$|T_k(\alpha; x, y)| \leqslant 2y \left(4k! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q\ln q}{y^k}\right) \max_{h<y^{k-1}} \tau(h)\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}},$$

которая нетривиальна при $q \gg 2^{2k-1}4k!\tau(y^{k-1})$, то есть в $\mathfrak{m}\,(y^\varepsilon)$.

В этой работе получена новая оценка суммы $T_k(\alpha; x, y)$, которая будет нетривиальной при $\mathfrak{m}\,(\ln y)^A$, A — абсолютная положительная постоянная.

Теорема 1. *Пусть* $x \geqslant x_0 > 0$, $y_0 < y \leqslant 0,01x$, α *— вещественное число,* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, *тогда справедлива оценка*

$$|T_k(\alpha; x, y)| \leqslant 2y \left(2^{2k}6kk! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q\ln q}{y^k}\right) \ln y\right)^{2^{-k}}.$$

Пусть Δ_j означает j — применение разностного оператора, так что для многочлена $f(u)$ степени n

$$\begin{gathered}\Delta_1(f(u); t) = f(u+t) - f(u),\\ \Delta_{j+1}(f(u); t_1, \ldots, t_{j+1}) = \Delta_1(\Delta_j(f(u); t_1, \ldots, t_j); t_{j+1}).\end{gathered} \tag{1}$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$\Delta_j(u^k; t_1, \ldots, t_j) = t_1 \ldots t_j p_j(u; t_1, \ldots, t_j),$$

где p_j — многочлен от u степени $k - j$ со старшим коэффициентом $k!/(k-j)!$. При доказательстве теоремы воспользуемся следующей леммой, которая доказана в работе [3].

Лемма 1. *Пусть*

$$T(f(u); x, y) = \sum_{x-y<u\leqslant x} e(f(u)),$$

где $f(u)$ *– произвольный многочлен степени* n*. Тогда при* $j = 1, \ldots, n-1$ *имеет место*

$$|T(f(u); x, y)|^{2^j} \leq (2y)^{2^j-j-1} \sum_{|h_1|<y} \ldots \sum_{|h_j|<y} T_j, \qquad T_j = \left|\sum_{u\in I_j} e(\Delta_j(f(u); h_1, \ldots, h_j))\right|,$$

где интервалы $I_j = I_j(x, y; h_1, \ldots, h_j)$ *удовлетворяют соотношениям:*

$$\begin{aligned}&I_1 = I_1(x, y; h_1) = (x-y, x] \cap (x-y-h_1, x-h_1],\\ &I_j = I_j(x, y; h_1, \ldots, h_j) = I_{j-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{j-1}) \cap I_{j-1}(x-h_j, y; h_1, \ldots, h_{j-1}),\end{aligned}$$

то есть интервал $I_{j-1}(x-h_j, y; h_1, \ldots, h_{j-1})$ *получается из интервала* $I_{j-1} = I_{j-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{j-1})$ *сдвигом на* $-h_j$ *всех интервалов, пересечением которых он является.*

Доказательство.По лемме 1 при $j = k - 1$ имеем

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^{k-1}} \leq (2y)^{2^{k-1}-k} \sum_{|h_1|<y} \dots \sum_{|h_{k-1}|<y} \left| \sum_{u \in I_{k-1}} e(\Delta_{k-1}(\alpha u^k; h_1, \dots, h_{k-1})) \right|,$$

$$\Delta_{k-1}(\alpha u^k; h_1, \dots, h_{k-1}) = \alpha k! h_1 h_2 \dots h_{k-1} \left(u + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_2 \dots + \frac{1}{2}h_{k-1} \right),$$

где интервал $I_{k-1} = I_{k-1}(x, y; h_1, \dots, h_{k-1})$ удовлетворяет соотношениям

$$I_1 = I_1(x, y; h_1) = (x - y, x] \cap (x - y - h_1, x - h_1],$$
$$I_{k-1}(x, y; h_1, \dots, h_{k-1}) = I_{k-2}(x, y; h_1, \dots, h_{k-2}) \cap I_{k-2}(x - h_j, y; h_1, \dots, h_{k-2}).$$

Таким образом,

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^{k-1}} \leq (2y)^{2^{k-1}-k} \sum_{|h_1|<y} \dots \sum_{|h_{k-1}|<y} \left| \sum_{u \in I_{k-1}} e(\alpha k! h_1 h_2 \dots h_{k-1} u) \right|.$$

В последней сумме члены с $h_1 \cdots h_{k-1} = 0$ дают вклад не более $(k-1)y(2y)^{k-2}$. Поэтому

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^{k-1}} \leqslant (2y)^{2^{k-1}-k} \left(2^{k-1} S_k(\alpha; x, y) + (k-1)y(2y)^{k-2} \right), \tag{2}$$

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{1 \leqslant h_1 < y} \dots \sum_{1 \leqslant h_{k-1} < y} \left| \sum_{u \in I_{k-1}} e(\alpha k! h_1 h_2 \dots h_{k-1} u) \right| =$$

$$= \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \tau'(h) \left| \sum_{u \in I_{k-1}} e(\alpha k! h u) \right|, \quad \tau'(h) = \sum_{\substack{h = h_1 \dots h_{k-1} \\ 1 \leqslant h_1, \dots, h_{k-1} < y,}} 1 \leqslant \tau(h).$$

Применим к внутренней сумме в $S_k(\alpha; x, y)$ лемму 4 из [4], имея в виду, что она является линейной, сплошной, длина которой не превосходит y:

$$S_k(\alpha; x, y) \leqslant \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \tau(h) \min\left(y, \frac{1}{2\|\alpha k! h\|} \right).$$

Далее воспользуемся неравенством Коши. Имеем

$$S_k^2(\alpha; x, y) \leqslant \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \tau^2(h) \sum_{h=1}^{y^{k-1}} \min\left(y, \frac{1}{2\|\alpha k! h\|} \right)^2 \leqslant k y^k \ln y \sum_{h=1}^{k! y^{k-1}} \min\left(y, \frac{1}{\|\alpha h\|} \right).$$

Далее, воспользовавшись леммой 5 из [4], стр. 94, найдем

$$S_k^2(\alpha; x, y) \leqslant 6 k y^k \ln y \left(\frac{k! y^{k-1}}{q} + 1 \right) (y + q \ln q) \leqslant 6 k k! y^{2k} \ln y \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^{k-1}} + \frac{q \ln q}{y^k} \right).$$

Подставляя эту оценку в 2, получим

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^k} \leqslant 2^{2k} (2y)^{2^k} \left(3 k k! \ln y \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^{k-1}} + \frac{q \ln q}{y^k} \right) + \frac{(k-1)^2}{8y^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant (2y)^{2^k} 2^{2k} 6 k k! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^k} \right) \ln y.$$

Извлекая корень степени 2^{k-1}, получим утверждение теоремы.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., РахимовА.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232-247.

2. Рахмонов З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 5 (81). С. 176-200.

3. Рахмонов З. Х., Азамов А.З., Нарзублоев Н.Н. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. № 7-8. С. 609 – 614.

4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. — 2-ое изд, М.: Наука, 1983.

УДК 511.325

Оценки линейных тригонометрических сумм с простыми числами на основе средних значений функций Чебышева

О. О. Нозиров (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: nozirov92@inbox.ru

Estimates of linear trigonometric sums with primes based on average values of Chebyshev functions

O. O. Nozirov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: nozirov92@inbox.ru

В 1937 г. И.М.Виноградов [1] обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путем только сложения и вычитания из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм, не имеющих какого-либо отношения к теории L-рядов Дирихле. В частности, такой суммой оказалась сумма

$$S(\alpha, x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha n),$$

где α — вещественное число и при условии $|\alpha - \frac{a}{q}| \le \frac{1}{q^2}$, $q \leqslant x$, $(a, q) = 1$ была найдена оценка:

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})x^{\varepsilon}, \tag{1}$$

доказательство которой проводится элементарным методам.

В последующие годы появились работы [2, 3, 4, 5], посвященные оценкам сумм $S(\alpha, x)$, в которых аналитическим методом, то есть методом Римана-Адамара, с помощью L-рядов Дирихле, контурного интегрирования и плотностных теорем о нулях L-рядов Дирихле получен ряд нетривиальных оценок $S(\alpha, x)$.

Впервые сумму $S(\alpha, x)$ аналитическим методом оценил Ю.В.Линник [2, 3]. Он с помощью идей Харди-Литтлвуда [6], применявшимися ранее в проблеме Гольдбаха, и теоремы о густоте нулей L-рядов Дирихле дал новый вариант нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами в следующей формулировке: *пусть* α- *вещественное число,* $N \geq N_0 > 0$, $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda$, *где* $(a,q) = 1$, $1 < q \leqslant \tau = (\ln x)^{1000}$, $\tau^{1000}x^{-1} \leqslant |\lambda| \leqslant (q\tau)^{-1}$, *тогда справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \exp\left(-\frac{n}{N}\right) e(\alpha n)\right| < N(\ln N)^{-1000}.$$

Г.Монтгомери [7], пользуясь своей оценкой средних значений функций Чебышева:

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)\mathscr{L}^{17},$$

доказал, что

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) \ll \left(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{3}{14}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}^{17}. \quad (2)$$

Он также доказал, что если $\eta \leqslant x^{\frac{1}{4}}$, $\eta \leqslant a \leqslant x\eta^{-1}$, $|\alpha - \frac{a}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$, то

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{17}. \quad (3)$$

Р.Вон [8], применяя свою оценку для средних значений функций Чебышева:

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{\frac{7}{2}},$$

уточнил результат Г.Монтгомери. Он доказал, что

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{7}{8}}q^{-\frac{1}{8}} + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^4. \quad (4)$$

и, если $\eta \leqslant x^{\frac{1}{3}}$, $\eta \leqslant a \leqslant x\eta^{-1}$, $|\alpha - \frac{a}{q}| \leqslant \eta(xq)^{-1}$, $(a,q) = 1$, то

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4. \quad (5)$$

Отметим, что оценки (2), (3), (4) и (5), полученные аналитическим методом, слабее оценки (1), полученной И.М.Виноградовым элементарным методом.

З.Х.Рахмонов [9, 10, 11, 12] получил более точную оценку средних значений функций Чебышева вида

$$t(x;q) \ll \left(x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q\right)\mathscr{L}^{34}, \quad (6)$$

чем оценка Р.Вона, и воспользовавшись этой оценкой он вывел оценку $S(\alpha, x)$, где множитель x^{ε} в (1) заменяется на конечную степень логарифма от xq, то есть:

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^{35}. \quad (7)$$

Нам [13] удалось уточнить в оценке (6) степени логарифмов в слагаемых и доказать при $x \geqslant 2$ и $q \geqslant 1$ следующую оценку:

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}. \quad (8)$$

В этой работе воспользовавшись этой оценкой докажем новую оценку суммы $S(a,x)$, в котором в (7) уточняются степени логарифмов в слагаемых.

Теорема 1. *Пусть* $(a,q) = 1$. *Тогда справедлива оценка:*

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) \ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Следствие 1. *Пусть* $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, *тогда имеет место оценка:*

$$S(\alpha,x)\ll xq^{-\frac12}\mathscr{L}^{33}+x^{\frac45}\mathscr{L}^{32}+x^{\frac12}q^{\frac12}\mathscr{L}^{33}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\eta\leqslant x^{\frac25}$, $\eta\leqslant a\leqslant x\eta^{-1}$, $|\alpha-\frac{a}{q}|\leqslant q^{-2}$, $(a,q)=1$ *тогда справедлива оценка:*

$$S(\alpha,x)\ll x\eta^{-\frac12}\mathscr{L}^{33}.$$

Доказательство.

Пользуясь свойством ортогональности характеров, имеем:

$$S\left(\frac{a}{q},\chi\right)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\chi(a)\tau(\bar\chi)\varphi(x,\chi)+O(\mathscr{L}^2),$$

где $\tau(\chi)$ — сумма Гаусса, которая определяется соотношением

$$\tau(\chi)=\sum_{l=1}^{q}\chi(l)e\left(\frac{l}{q}\right).$$

Переходя к оценкам, а затем пользуясь известными оценками $|\tau(\chi)|\leq q^{\frac12}$ и $n\ll\varphi(n)\ln n$, получим

$$S\left(\frac{a}{q},x\right)\leqslant\frac{\sqrt{q}}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\leqslant x}|\varphi(y,\chi)|+O(\mathscr{L}^2)\ll\frac{\ln\mathscr{L}}{\sqrt{q}}t(x;q)+O(\mathscr{L}^2)\ll$$
$$\ll xq^{-\frac12}\mathscr{L}^{28}\ln\mathscr{L}+x^{\frac45}\mathscr{L}^{31}\ln\mathscr{L}+x^{\frac12}q^{\frac12}\mathscr{L}^{32}\ln\mathscr{L}.$$

Отсюда и из соотношения $\ln\mathscr{L}\ll\mathscr{L}$ получим утверждение теоремы.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов М.М. Избранные труды //М.:Изд-во АН СССР, 1952.

2. Линник Ю.В. Избранные труды // Л.:Наука, 1980.

3. Линник Ю.В. О густоте нулей L-рядов // Известия АН СССР, сер.матем. 1946. Том 30, № 1. С. 35-46

4. Чудаков Н.Г. On Goldbach-Vinogradov‘s theorem // Acta Math (2), 1947. v. 48(3), pp. 515-545.

5. Чудаков Н.Г. Введение в теорию L-функций Дирихле // М.-Л. 1947. гос. изд-во технико-теоретической литературы.

6. Hardy G.H., Littlwood I.E. Some problems of partitio numerorum III.On the expression of number as a sum of primes // Acta Math, Том 40, С. 1-70.

7. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел // М., 1974.

8. Vaughan R.O. Mean value theorems in prime number theory // J.London Math. Soc. 1975. v. s2-10, is. 2, PP. 153-162.

9. Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди — Литлвуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР, сер. матем. 1989. Том 52, № 1. С. 211-224.

10. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН, сер. матем. 1993. Том 57(4), С. 55-71.

11. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской академии наук. 1993. Том 331(3), С. 281-282.

12. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении функций Чебышева // Известия Российской академии наук, серия математическая. 1993. Том 58, № 3. С. 127-139.

13. Нозиров О.О. О среднем значений функций Чебышева // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2019. Том 62, № 11 – 12. С. 613-618.

УДК 511

Эргодические теоремы для потоков целых вектор-матриц второго порядка

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик); Северо-Кавказский центр математических исследований; Северо-Кавказский Федеральный университет (г. Ставрополь)
e-mail: urusbi@rambler.ru
М. Т. Шакова (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
e-mail: milka_shakova@icloud.com

Ergodic theorems for flows of integer second-order vector matrices

U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University (Nalchik); North Caucasus Center of Mathematical Research; North Caucasian Federal University (Stavropol)
e-mail: urusbi@rambler.ru
M. T. Shakova (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University
e-mail: milka_shakova@icloud.com

В аналитической арифметике тернарных квадратичных форм наиболее актуальным является вопрос о получении остаточных членов в асимптотических формулах для числа представлений целых чисел указанными формами. В рассматриваемом нами случае неопределённых тернарных квадратичных форм используются определения и предложения из арифметики матриц второго (см. [1]).

Следуя программе [2] применения дискретного эргодического метода (далее ДЭМ) Ю. В. Линника (см. [3]), мы уточняем соответствующие формулировки эргодических теорем, в которых даются асимптотические формулы с остаточными членами.

С целью упрощения схемы применения ДЭМ к арифметике тернарных квадратичных форм и к распределению целых точек на гиперболоидах мы рассматриваем предварительную эргодическую теорему для вектор-матриц второго порядка, имеющую и самостоятельный интерес.

Отличительной особенностью ДЭМ по сравнению с другими аналитическими методами теории чисел является построение потока целых точек $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ в случае сферы или вектор-матриц $\begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$ в случае гиперболоидов и его использование при выводе эргодических теорем для этих потоков.

Построим на множестве $\widetilde{M}_m$ целых примитивных приведённых вектор-матриц

$$L = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$$

нормы (определителя) $m = N\,(L)$ поток:

$$L = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k2}^{(1)} & -x_{k1}^{(1)} \\ x_{k3}^{(1)} & x_{k2}^{(1)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{k2}^{(2)} & -x_{k1}^{(2)} \\ x_{k3}^{(2)} & x_{k2}^{(2)} \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} x_{k2}^{(s)} & -x_{k1}^{(s)} \\ x_{k3}^{(s)} & x_{k2}^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

заданной длины $s \gg \log|m|$, где L пробегает множество $\widetilde{M}_m$ вектор-матриц второго порядка нормы m, при этом

$$\#\widetilde{M}_m = r\,(m) = h\,(-m) + h'\,(-m)\,;$$

здесь через $h(-m)$ и $h'(-m)$ соответственно обозначены числа классов собственно примитивных и несобственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m.

Поток (1) строится с помощью преобразования подобия матриц $L' = Q^{-1}\,L\,Q$, где Q — некоторая невырожденная целая матрица второго порядка. Поток, составленный из $r(m)$ цепочек вида (1), зависящий от нечётного числа $q > 1$, обозначим через $H_s = H_s(m,\,q)$.

Применяя построенный поток вектор-матриц второго порядка нормы m, мы приходим к следующим результатам.

Теорема 1 (Эргодическая теорема для вектор-матриц). *Пусть* $L_0 = \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix}$ *— целая вектор-матрица с условием* $N(L) \equiv m \pmod g$*;* Q *— целая матрица нормы* q*;* НОД$\,(g,\,q) = 1$*; пусть* $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{s_1} \leqslant s_1$ *— фиксированное подмножество индексов* $j = 1,\ \ldots,\ s$*, причём*

$$q^s \leqslant r(m); \quad s_1 \gg \frac{\log|m|}{\delta(m)\,\tau(m)},$$

$$\delta(m) = \left[\frac{\rho \log \eta(m)}{\log q}\right],$$

где $\tau(m)$ *— неубывающая функция* m*,*

$$\eta(m) = c\sqrt{\log|m|}\log\log|m|, \quad c > 0 \text{ — некоторая постоянная};$$

пусть

$$j_{v+1} - v_j \geqslant \delta(m) \quad (v = 1,\,\ldots,\,s_1 - 1)\,.$$

Рассмотрим часть потока (1) $H'_s \subset H_s$ *количестве*

$$r' \gg \frac{r(m)}{\log^2|m|}.$$

Тогда цепочки потока H'_s *можно разбить на две категории:*

а) «хорошие» цепочки, для которых

$$\#\left\{j = j_v \mid v = 1, \ldots, s_1,\ Q \setminus \left(l + L_k^{(j)}\right); L_k^{(j)} \in \Lambda_m,\ L_k^{(j)} \equiv L_0 \pmod g\right\} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\rho(g,\, m)} \cdot \frac{1}{\delta_0(q)}\, s_1(1 + O(\tau(m) \cdot \gamma(m)));$$

здесь

$$\gamma(m) = \frac{g\sqrt{\log\,(g+1)}}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{\log \eta(m)}{\eta(m)}};$$

б) «плохие» цепочки, количество которых

$$k \ll \frac{1}{\log^2 |m|} \cdot r',$$

при этом $\rho(g,\, m)$ — число решений сравнения $N(L) \equiv m \pmod g$;

$$\sigma_0(q) = q \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

— число неассоциированных примитивных матриц нормы q; Λ_m — ограниченная квадратичная область на соответствующей гиперболической поверхности; $\lambda(\Lambda_m)$ — гиперболическая мера области Λ_m; $\lambda_0 = \frac{2\pi}{9}$.

Из теоремы 1 выводится следующий интересный результат, связанный с делимостью матриц слева и справа.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 1 имеется разложение $Q = Q' \cdot Q''$, где Q' и Q'' — целые матрицы второго порядка. Тогда цепочки потока H_s' разбиваются на две категории:*

а) «хорошие» цепочки, для которых

$$\#\left\{j = j_v \mid v = 1, \ldots, s_1,\ \left(l + L_k^j\right)/Q',\ Q''\setminus\left(l + L_k^j\right),\ L_k^{(j)} \in \Lambda_m,\ L_k^{(j)} \equiv L_0 \pmod g\right\} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\rho(g,\, m)} \cdot \frac{1}{\delta_0(q)}\, s_1(1 + O(\tau(m) \cdot \gamma(m))),$$

где $q = \det Q$;

б) «плохие» цепочки, общее число которых

$$\ll \frac{1}{\log^2 |m|} \cdot r'.$$

Замечание 1. *Полученные результаты в дальнейшем можно уточнить в предположении справедливости некоторых гипотез о нулях L — функции Дирихле.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980, Т. 93, С. 41–86.

2. Малышев А. В. О применении дискретного эргодического метода в аналитической арифметике неопределённых тернарных квадратичных форм // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980, Т. 93, С. 5–24.

3. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. — Л.: Из-во Ленингр. ун-та, 1967, 208 с.

УДК 511

Об одном свойстве подобия неопределённых анизотропных кватернионных векторов заданной нормы

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик); Северо-Кавказский центр математических исследований; Северо-Кавказский Федеральный университет (г. Ставрополь)
e-mail: urusbi@rambler.ru
Т. А. Шакова (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
e-mail: ashik.sk.16@gmail.ru

On a similarity property of indefinite anisotropic quaternion vectors of a given norm

U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University (Nalchik); North Caucasus Center of Mathematical Research; North Caucasian Federal University (Stavropol)
e-mail: urusbi@rambler.ru
T. A. Shakova (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University
e-mail: ashik.sk.16@gmail.ru

Дискретный эргодический метод Ю. В. Линника [1], основанный на теории поворотов кватернионов и матриц, позволяет изучать распределение целых точек на поверхностях второго порядка.

Свойство, которое мы рассматриваем, относится к поворотам для вещественных неопределённых анизотропных кватернионных векторов и связан со следующим понятием.

Определим «максимум» $\|A\|$, указанного вида кватерниона $A = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел равенством

$$\|A\| = \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|\},$$

где $a_i \in \mathbb{R}$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть L и L' — вещественные неопределённые анизотропные кватернионные векторы нормы $m > 0$. Пусть $L' = U L U^{-1}$, где U — вещественный неопределённый анизотропный кватернион нормы $u > 0$ из алгебры U_f, $f = x_1^2 - b x_2^2 - c x_3^2$ — тернарная квадратичная форма с целыми коэффициентами b, $c > 0$, причём число c не является нормой из расширения $\mathbb{Q}\left(\sqrt{b}\right)$. Тогда, если при $m \to \infty$ для некоторых постоянных $\theta > 0$, $\varkappa > 0$ выполняются неравенства*

$$\|L\| < \varkappa m^{\frac{1}{2}+\theta}, \quad \left\|L'\right\| < \varkappa m^{\frac{1}{2}+\theta}$$

то

$$\|U\| < \varkappa u^{\frac{1}{2}} m^{\theta}$$

Доказательство проводится рассмотрением каждого из случаев, когда каждый один из элементов матрицы $U = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ будет наибольшим по модулю по сравнению с остальными элементами.

Аналогичный результат в более простых случаях ранее были получены Ю. В. Линником [1] (см. также [2]) и У. М. Пачевым [3].

В дальнейшем полученный результат может быть использован в доказательстве так называемой ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц указанного вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. — Л.: Из-во Ленингр. ун-та, 1967, 208 с.
2. Линник Ю. В. Асимптотическое распределение приведённых бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского // Вестн. Ленингр. ун-та. 1955. № 2. С. 3–23.
3. Пачев У. М. О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперболоидах // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1980. Т. 93, № 6. С. 87–141.

УДК 511.216

Оценка исключительного множества суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии

А. Ш. Сафаров (Узбекистан, г. Термез)
Термеский государственный университет
e-mail: asafarov1977@mail.ru

Estimate of the exceptional set sums of two prime numbers from arithmetic progression

A. Sh. Safarov (Uzbekistan, Termez)
Termez state of university
e-mail: asafarov1977@mail.ru

Пусть a и q,$(a, q) = 1-$ целые положительные числа и X достаточно большое, а $\alpha, (0 < \alpha < 1)$ произвольные действительные числа, p_1, p_2- простые числа, χ_q- характер Дирихле по модулю q. $\bar{\chi}_q-$ характер Дирихле по модулю q сопряжены с χ_q.

Положим $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}, \alpha = \frac{a}{q} + \eta, d = (q, D), N = \frac{gq}{d}(modq)$, (т.е. через N обозначен наименьший положительный вычет числа $\frac{gq}{d}$ по модулю q), здесь g определяется из сравнения $gqd^{-1} \equiv 1(modd); H(q) = 1$, если $(qd^{-1}; D) = 1$; противном случае $H(q) = 0$ (см. [1,2]). Для удобства записи также обозначим

$$S_i = S_i(X; \alpha) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_p(l_i) \sum_{P<p\leq X} \chi_D(p_i)(lnp_i)e(p_i\alpha), \quad i = 1, 2 \qquad (1)$$

$$g_u^{(i)} = g_u^{(i)}(X; \alpha) = \sum_{\substack{P<n_i\leq X \\ n_i\equiv l(modD)}} n_i^{u-1}e(n_i\alpha), \quad i = 1, 2 \qquad (2)$$

где P достаточна большое действительное число зависающие от X .

При этих обозначениях, используя свойство характеров Дирихле [3,4], имеем

$$S = S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{P<p_1,p_2\le X} lnp_1 lnp_2((p_1+p_2)\alpha) \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_1)\chi_D(p_1) \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_2)\chi_D(p_2) =$$

$$= \sum_{\substack{P<p_1,p_2\le X \\ p_1\equiv l_l, p_2\equiv l_2 (modD)}} lnp_1 lnp_2((p_1+p_2)\alpha) = \sum_{P<n\le 2X} R(n,D,X)e(n\alpha), \tag{3}$$

где

$$R(n,D,X) = \sum_{\substack{n=p_1+p_2 \\ P<p_1,p_2\le X \\ p_1\equiv l_1, p_2\equiv l_2 (modD)}} \ln p_1 \ln p_2. \tag{4}$$

Если $\frac{1}{2} \le u \le 1$, то используя суммирование по частям (см. лемма 3.5 работы [5]), получим

$$g_u^{(i)}(X;\alpha) \ll min\left(\alpha^{-u}, \left(\frac{X}{D}\right)^u\right), \tag{5}$$

где $\|\alpha\|-$ означает расстояние от α до ближайшего целого числа, т.е.

$$\|\alpha\| = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad 0 \le \alpha \le \frac{1}{2}, \\ 1-\alpha, & \text{если} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Полагая

$$P = X^{6\delta} \quad \text{и} \quad Q = XP^{-1}, \tag{6}$$

делим интервал $[0,1]$ на основные и дополнительные подинтервалы. Для $1 \le a \le q \le P$, $(a,q)=1$ через $M(q,a)$ обозначим основной интервал $[\frac{a}{q}-\frac{1}{qQ}, \frac{a}{q}+\frac{1}{qQ}]$. Ясно, что основные интервалы не пересекаются, так как

$$\left|\frac{a}{q}-\frac{a'}{q'}\right| \ge \frac{1}{qq'} > \frac{2P}{qq'Q} \ge \frac{q+q'}{qq'Q} = \frac{1}{qQ}+\frac{1}{q'Q}.$$

Объединение основных интервалов обозначим через N . Далее, пусть $T-$ множество тех α, для которых $Q^{-1} < \alpha < 1+Q^{-1}, \alpha \notin N$ Таким образом, $T-$ объединение дополнительных интервалов. Теперь $R(n,D,X)$ можно представить в виде

$$R(n,D,X) = R_1(n,D,X) + R_2(n,D,X), \tag{7}$$

где

$$R_1(n,D,X) = \int_N S_1(\alpha)S_2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha, \quad R_2(n,D,X) = \int_T S_1(\alpha)S_2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha.$$

Пусть $E(D,X)-$ количество $n \le X$, которых непредставимы в виде $n = p_1+p_2$. Используя эти обозначение доказано:

Теорема. При достаточно большом X и достаточно малое действительное числа $\delta > 0$, при $D < X^{\delta_1}$, $(10\delta_1 < \delta)$ справедливы оценки:

$$E(D,X) \le c_8 \frac{X^{1-\delta_1}}{\varphi(D)} \tag{8}$$

и для $n \notin M(D,X), n \le X$

$$R(n,D,X) \ge c_9 \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D) ln^2 n}\left(n^{\frac{\delta}{8}}-1\right). \tag{9}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков И. О представление чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. “Математика”. 2000. Т 54, С.3-15.

2. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова //Вестник ЛГУ. 1961.С.11-27.

3. Davenport Harold. Multiplicative Number Theory //Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997. , C.178.

4. Montgomery H.L. and Vaughan R.C. Multiplicative number theory.// I. Classical theory.: Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York 2006. 552 p.

5. Allakov I., Safarov A.Sh. Exceptional set of the sum of a prime number and a fixed degree of a prime number.// Russian Mathematics. (2020).64, C.8-21

УДК 511.1 + 517.22

Формула Фаа ди Бруно для производных высших порядков от сложной функции векторного аргумента[1]

П. Н. Сорокин (Россия, г. Москва)
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

The Faa di Bruno formula of higher order derivatives of a complex function of a vector argument

P. N. Sorokin (Russia, Moscow)
Scientific Research Institute for System Analyze of the Russian Academy of Science
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Мы будем рассматривать обобщение известной формулы Фаа ди Бруно для вычисления производных высших порядков сложной функции. Вариант формулировки и доказательства этой классической формулы приведен в [1]:

Теорема 1. *Пусть функции $F(u)$ и $u(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-ой производной сложной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место формула:*

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\ldots=n} F^{(k_1+k_2+k_3+\ldots)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+k_3+\ldots},$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+\ldots} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots} \left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \left(\frac{u^{(3)}(x)}{3!}\right)^{k_3} \ldots,$$

[1]Публикация выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления» (FNEF-2022-0007).

где сумирование берется по всем целым неотрицательным числам $k_1, k_2, k_3, ...$, которые удовлетворяют диофантову уравнению $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... = n$, а $F^{(m)}$, $u^{(m)}$ — производные m-го порядка для функций $F(u)$, $u(x)$.

Некоторые обобщения и приложения формулы Фаа ди Бруно для сложных функций вида $F(u(x), v(x))$, $F(u(x, y))$ можно найти в работах [2], [3].

Рассмотрим обобщение формулы Фаа ди Бруно на случай сложной функции $F(\overline{u}(x))$, где $\overline{u}(x) = (u_1(x), ..., u_s(x))$ [4]:

Теорема 2. *Пусть $G(x) = F(\overline{u}(x))$, $\overline{u}(x) = (u_1(x), ..., u_s(x))$ — сложная функция и существуют все её частные производные до n-го порядка, а функции $u_1(x)$, ..., $u_s(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-го дифференциала сложной функции $G(x)$ имеет место формула:*

$$d^n G(x) = \sum_{n} \sum_{k_1} \sum_{k_2} ... \sum_{k_n} \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (i!)^{k_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{s} a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F(\overline{u})}{\partial u_1^{p_1}\, \partial u_2^{p_2}\, ...\, \partial u_s^{p_s}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}} ... \left(u_s^{(i)}\right)^{a_{is}}, \tag{1}$$

где суммирование ведется по целочисленным решениям следующих диофантовых уравнений:

$$\sum_{n} : \; k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n,$$

$$\sum_{k_1} : \; a_{11} + a_{12} + ... + a_{1s} = k_1,$$

$$\sum_{k_2} : \; a_{21} + a_{22} + ... + a_{2s} = k_2,$$

$$...$$

$$\sum_{k_n} : \; a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{ns} = k_n,$$

где $d = \partial/\partial x$ — дифференциальный оператор, k — порядок промежуточной производной, p_j — порядок частной производной по u_j. Параметры k, k_j, p_j, a_{ij} связаны соотношениями:

$$p_j = a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj}, \quad j = \overline{1, s},$$

$$k = p_1 + p_2 + ... + p_s = k_1 + k_2 + ... + k_n.$$

Пример 7. *Используя (1), вычислим $F^{(3)}$ для $F(u_1(x), u_2(x)) = e^{u_1(x) u_2(x)}$. Имеем:*

$$F^{(3)}(u_1, u_2) = \sum_{3} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{6}{\prod\limits_{i=1}^{3} (i!)^{k_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{3} \prod\limits_{j=1}^{2} a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F}{\partial u_1^{p_1}\, \partial u_2^{p_2}} \prod_{i=1}^{3} \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}},$$

$$\sum_{3} : k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3, \; \sum_{k_1} : a_{11} + a_{12} = k_1, \; \sum_{k_2} : a_{21} + a_{22} = k_2, \; \sum_{k_3} : a_{31} + a_{32} = k_3,$$

$$p_1 = a_{11} + a_{21} + a_{31}, \; p_2 = a_{12} + a_{22} + a_{32}, \; p_1 + p_2 = k = k_1 + k_2 + k_3.$$

Диофантово уравнение $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3$ имеет 3 целочисленных решения:

1) (3, 0, 0):

	$\sum_{k_i}$, *i=1, 2, 3*	*1*	*2*	*3*	*4*
$k_1+2k_2+3k_3=3$	$\sum_{k_1}: a_{11}+a_{12}=3$	$(3,0)$	$(2,1)$	$(1,2)$	*(0, 3)*
$k_1=3, k_2=0, k_3=0$	$\sum_{k_2}: a_{21}+a_{22}=0$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	*(0, 0)*
$k_1+k_2+k_3=k=3$	$\sum_{k_3}: a_{31}+a_{32}=0$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	*(0, 0)*
	$k=p_1+p_2=3$	$(3,0)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(0,3)$

2) (1, 1, 0):

	$\sum_{k_i}$, *i=1, 2, 3*	*1*	*2*	*3*	*4*
$k_1+2k_2+3k_3=3$	$\sum_{k_1}: a_{11}+a_{12}=1$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	*(0, 1)*
$k_1=1, k_2=1, k_3=0$	$\sum_{k_2}: a_{21}+a_{22}=1$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	*(0, 1)*
$k_1+k_2+k_3=k=2$	$\sum_{k_3}: a_{31}+a_{32}=0$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	*(0, 0)*
	$k=p_1+p_2=2$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(0,2)$

3) (0, 0, 1):

	$\sum_{k_i}$, *i=1, 2, 3*	*1*	*2*
$k_1+2k_2+3k_3=3$	$\sum_{k_1}: a_{11}+a_{12}=0$	$(0,0)$	$(0,0)$
$k_1=0, k_2=0, k_3=1$	$\sum_{k_2}: a_{21}+a_{22}=0$	$(0,0)$	$(0,0)$
$k_1+k_2+k_3=k=1$	$\sum_{k_3}: a_{31}+a_{32}=1$	$(1,0)$	$(0,1)$
	$k=p_1+p_2=1$	$(1,0)$	$(0,1)$

Таким образом, мы получаем 10 слагаемых в нашей сумме:

$$F^{(3)}(u_1,u_2)=\frac{3!}{(1!)^3\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot 3!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial u_1^3}\cdot\left(u_1^{(1)}\right)^3+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^3\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial u_1^2\cdot\partial u_2}\cdot\left(u_1^{(1)}\right)^2\cdot u_2^{(1)}+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^3\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial u_1\cdot\partial u_2^2}\cdot u_1^{(1)}\cdot\left(u_2^{(1)}\right)^2+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^3\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 3!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial u_2^3}\cdot\left(u_2^{(1)}\right)^3+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^1\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}\cdot u_1^{(1)}\cdot u_1^{(2)}+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^1\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\cdot\partial u_2}\cdot u_1^{(1)}\cdot u_2^{(2)}+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^1\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\cdot\partial u_2}\cdot u_1^{(2)}\cdot u_2^{(1)}+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^1\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2}\cdot u_2^{(1)}\cdot u_2^{(2)}+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^0\cdot(2!)^0\cdot(3!)^1\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_1}\cdot u_1^{(3)}+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^0\cdot(2!)^0\cdot(3!)^1\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_2}\cdot u_2^{(3)}=$$

$$= \frac{\partial^3 F}{\partial u_1^3}\left(u_1^{(1)}\right)^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial u_1^2 \partial u_2}\left(u_1^{(1)}\right)^2 u_2^{(1)} + 3\frac{\partial^3 F}{\partial u_1 \partial u_2^2} u_1^{(1)}\left(u_2^{(1)}\right)^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial u_2^3}\left(u_2^{(1)}\right)^3 +$$

$$+3\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} u_1^{(1)} u_1^{(2)} + 3\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} u_1^{(1)} u_2^{(2)} + 3\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} u_1^{(2)} u_2^{(1)} + 3\frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} u_2^{(1)} u_2^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u_1} u_1^{(3)} + \frac{\partial F}{\partial u_2} u_2^{(3)}.$$

Итак получаем:

$$F^{(3)}(u_1, u_2) = e^{u_1 u_2} \cdot [u_2^3\left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3\left(2u_2 + u_1 u_2^2\right)\left(u_1^{(1)}\right)^2 u_2^{(1)} + 3\left(2u_1 + u_1^2 u_2\right) u_1^{(1)}\left(u_2^{(1)}\right)^2 +$$

$$+u_1^3\left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3u_2^2 u_1^{(1)} u_1^{(2)} + 3(1 + u_1 u_2)(u_1^{(1)} u_2^{(2)} + u_1^{(2)} u_2^{(1)}) + u_2 u_1^{(3)} + u_1 u_2^{(3)}].$$

Рассмотренная формула (1) представляет собой явный вид n-ой производной сложной функции векторного аргумента с любым числом компонент. Классическая формула Фаа ди Бруно может быть получена из (1) при $s = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003, 640 с.
2. Шабат А. Б, Эфендиев М. Х. О приложениях формулы Фаа-Ди-Бруно // Уфимский математический журнал, том 9, № 3 (2017), с. 132–137.
3. Roman S. The formula of Faa di Bruno // Amer. Math. Monthly. 87 (1980), no. 10. P. 805–809.
4. Mishkov R. Generalization of the formula of Faa di Bruno for a composite function with vector argument // Internat. J.Math. 2000. 24(7). P. 481–491.

УДК 511.331

О равномерных по параметрам оценках специальных тригонометрических сумм

Ш. А. Хайруллоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: shamsullo@rambler.ru

On estimates of special trigonometric sums uniform in parameters

Sh. A. Khayrulloev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik National University
e-mail: shamsullo@rambler.ru

При изучении нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой основным моментом является оценка тригонометрических сумм вида

$$W = W(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{a(\lambda_1) d(\lambda_1) \overline{a}(\lambda_2) \overline{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где

$$P=\sqrt{\frac{5T}{2\pi}},\quad T\geqslant T_0(\varepsilon)>0,\quad 0<\varepsilon<0,01,\quad 0<H<T^{\frac{1}{3}},\quad X=T^{0,01\varepsilon},$$

$$a(\lambda)=\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},\quad d(\lambda)=\int\limits_{-h_1}^{h_1}e^{-(\frac{u}{h})^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du,\quad 0<h<h_1<1,$$

$$r(n)=\frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n)+\frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n),\quad h(\nu)=\beta(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)\bar{\chi}(\nu).$$

Эти суммы и близкие к ним суммы ранее изучал А.А. Карацуба [1]–[2]. Он доказал, что *при $H=T^{27/82+\varepsilon}$, $0<\varepsilon<1$, для суммы $W(T)$ спарведлива следующая оценка $W(T)\ll h^2T^{-\varepsilon}$.*

В настоящей работе, применяя метод экспоненциальных пар [3], следуя работам [4]–[6], получим новую равномерную по параметрам оценку специальных тригонометрических сумм $W(T)$, которая улучшает оценки А.А.Карацубы в случае, когда промежуток $(T,T+H)$ имеет более короткую длину.

Определение 1. *Если $B\geq 1$, $0<h\leq B$, $F(u)\in C^\infty(B,2B)$, $A\geq 1$,*

$$AB^{1-r}\ll|F^{(r)}(u)|\ll AB^{1-r},\ r=1,2,3,\dots,$$

где постоянные под знаком $\ll$ зависит только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B\leq n\leq B+h}e(F(n))\ll A^\kappa B^\lambda,\quad 0\leq\kappa\leq 0,5\quad 0,5\leq\lambda\leq 1,$$

то пара $(\kappa;\lambda)$ называется экспоненциальной парой.

Справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара, ε — произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее $0,01$, $\mathscr{L}=\ln P$,*

$$\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},\quad \sigma(\kappa)=\frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Тогда при $H=T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varepsilon+\sigma(\kappa)}$ справедлива оценка

$$W(T)\ll h^2T^{-0,98\varepsilon}.$$

Отметим, что показатель

$$\theta(\kappa;\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$$

в теореме 1 также рассматривался в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2+y^2\leqslant R$, то есть,

$$K(R)=\#\left\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant R,\ x,y\in Z\right\}=\pi R+O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda)+\varepsilon}\right),$$

кроме того, при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy\leqslant N$, $x>0$, $y>0$. Наилучшую для $\theta(\kappa;\lambda)$ оценку сверху на данный момент получили J. Bourgain and N. Watt [7]. Они доказали, что

$$\theta_0=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\theta(\kappa,\lambda)=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}\leqslant\frac{1515}{4816}=\frac{1}{3}-\frac{271}{3\cdot 4816}\approx 0.314576,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Из теоремы 1 вытекает следующие

Следствие 1. *Пусть ε произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее* $0,01$. *Тогда при* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$ *справедлива оценка:*

$$W(T) \ll h^2 T^{-0,98\varepsilon}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т.40. № 5 (245). С. 19-70.
2. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5. С. 3 – 14.
3. Graham S. W., Kolesnik G. Van Der Corput's Method of Exponential Sums // Cambridge University Press: Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney. 1991. 119 p.
4. Рахмонов З. Х, Хайруллоев Ш. А., Аминов А. С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 4(72). С. 271–293.
5. Хайруллоев Ш. А. О вещественных нулях производной функции Харди // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 5 (81). С. 234–240.
6. Хайруллоев Ш. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2018. № 4(173). С. 7–25.
7. Bourgain J. and Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0,5+it)|$ // http://arxiv.org/abs/1505.04161v1 [math.NT], 15 May 2015.

———————————————————————————

УДК 511.325

О нетривиальной оценке короткой двойной суммы значений характера Дирихле по составному модулю

Д. Дж. Хокиев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: khdj.91@mail.ru

On a nontrivial estimate for a short double sum of values of the Dirichlet character modulo composite

D. Dj. Khokiev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik national University
e-mail: khdj.91@mail.ru

При изучении закона распределения значений χ_q в последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида

$$S_y(x,l) = \sum_{\substack{x-y<n\leqslant x\\ (n,q)=1,}} \chi(n-l), \quad (l,q)=1;$$

то есть *сумм значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел*, исследованных в первой главе, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм вида
$$W=\sum_{M<m\leqslant 2M}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1,\,mn\equiv l(\mathrm{mod}\ \nu)}}b_n\chi_q(mn-l),\quad (l,q)=1,$$
где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\leqslant\tau^c(m)$ и $|b_n|\leqslant\tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма W называется *двойной суммой значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел*, а при $x<q$ – *короткой суммой.*

И.М. Виноградов, впервые изучая сумму W, для простого q получил её нетривиальную оценку при $x\geqslant q^{1+\varepsilon}$ а затем нетривиальную оценку короткой суммы W при $x\geqslant q^{0{,}75+\varepsilon}$ [1,2]. Наилучшая нетривиальная оценка для простого q при $x\geqslant q^{0{,}5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы [3].

З.Х. Рахмонов изучил сумму W для составного q и получил нетривиальную оценку при $x\geqslant q^{1+\varepsilon}$ [4, 5]. Нетривиальную оценку короткой суммы W для составного q при $x\geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский [6]. З.Х. Рахмонов для составного q доказал нетривиальную оценку W при $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ [7, 8]. Хокиев Д.Дж [9, 10, 11] изучил сумму W для составного модулю q и получил нетривиальную оценку короткой сумм значений характеров Дирихле по составном модулю на последовательности сдвинутых простых чисел, для возможно короткой суммы.

Во этой работе получены новые оценки коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле по модулю q от сдвинутых произведений двух чисел лежащих в арифметических прогрессиях, следствиями которых является нетривиальные оценки этих сумм если длина суммы превосходит величину $q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

Теорема. *Пусть M, N, U — целые числа, $N\leqslant U<2N\leqslant q^{\frac{1}{6}}$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что*
$$\sum_{M<m\leqslant 2M}|a_m|^\alpha\ll M\ln c^{c\alpha},\quad \alpha=1,2;\qquad |b_n|\ll B.$$
Тогда справедлива оценка
$$W=\sum_{M<m\leqslant 2M}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1,\,mn\equiv l(\mathrm{mod}\ \nu)}}b_n\chi_q(mn-l)\ll BM^{\frac{5}{6}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta}\ln c^{\frac{4c_1+c_2+1}{6}}.$$

Следует утверждение теоремы.

Следствие *Пусть M, N, U — целые числа, $N\leqslant U<2N$, $q^\theta\leqslant N\leqslant q^{\frac{1}{6}}$, $D^{\frac{1}{2}}\leqslant q\leqslant D$, $\nu\leqslant\exp\sqrt{2\ln c}$, a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\leqslant\tau_5(m)$, $|b_n|\leqslant 1$. Тогда при $x\geqslant q^{1-2\theta+1{,}1\delta}$ справедлива оценка*
$$W=\sum_{M<m\leqslant 2M}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1,\,mn\equiv l(\mathrm{mod}\ \nu)}}b_n\chi_q(mn-l)\ll\frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\ln c}\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. С. 17 – 34..

2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм // М.: Наука. 1976.
3. Карацуба А. А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // Успехи математических наук. 2008, том 63, вы- пуск 4(382). С. 43 — 92.
4. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами. – ДАН Тадж ССР, 1986, т. 29, № 1, с. 16–20.
5. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения. – Труды Математического института РАН, 1994, т. 207, с. 286–296.
6. Фридландер Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах. – Матем. заметки, 2010, т. 88, в. 4, с. 605–619.
7. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 1. С. 5 – 9.
8. Рахмонов З.Х .Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. Вып. 4(2). С. 113–117.
9. Хокиев Д. Дж. Оценка коротких сумм значений характеров от специальной последовательности натуралтных чисел // ДАН Республики Таджикистан. 2015.Т. 58. № 12. С. 1065-1071.
10. Хокиев Д.Дж. Оценка короткой суммы значений характеров Дирихле по составном модулю на последовательности сдвинутых чисел //ДАН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. № 1-2. С. 5-11.
11. Рахмонов З. Х., Хокиев Д.Дж. Об оценке суммы характеров с простыми числамы // ДАН Республики Таджикистан. 2018.Т.61.№1.С.5-11.

———————————————————————————

УДК 511.174

Асимптотическое разложение для сумм произведений мультипликативных функций по числам, простые делители которых лежат в заданных интервалах

У. Чариев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни
e-mail: umidchoriyev@mail.ru

Asimptotic decomposition for amounts product multiplications function on number to simple divisors which lies in given interval

U. Chariev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik State Pedagogical University named after S. Ayni
e-mail: umidchoriyev@mail.ru

Пусть $f_\nu(n), (\nu = \overline{1,k})$ мультипликативные функции и удовлетворяют следующие условии

$$\sum_{\substack{p^r \leq X \\ p \leq Y}} \frac{\lambda_{f_\nu}(p^r)}{p^r} = \tau_\nu \ln \min(X,Y) + B_\nu + O(p_\nu(\min(X,Y))), \tag{1}$$

$$\prod_{Y<p\le X}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f_\nu(p^r)|}{p^r}\right)=O\left(\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{A_\nu}\right), \tag{2}$$

где τ_ν, B_ν, A_ν комплексные числа, $\rho_\nu(X)\to 0$ при $X\to\infty$, для $\nu=\overline{1,k}$, а $\lambda_f(n)$ – обобщенная функция Мангольдта, определяемая соотношением

$$f_\nu(n)\ln n=\sum_{d|n}\Lambda_{f_\nu}\left(\frac{n}{d}\right)f_\nu(d).$$

Рассмотрим сумму

$$m_f(X,Y)=\sum_{n_1\ldots n_k\le X}\frac{f_1(n_1)\ldots f_k(n_k)}{n_1\ldots n_k} \tag{3}$$

и

$$M_f(X,Y_1,...,Y_{k-1})=\sum_{\substack{n_1\cdots n_k\le X\\ p/n_\nu\to Y_{\nu-1}<p\le Y_\nu,(\nu=\overline{1,k})}}f_1(n_1)\cdots f_k(n_k), \tag{4}$$

где

$$p/n_\nu\Rightarrow X^{\frac{1}{t_{\nu-1}}}<p\le X^{\frac{1}{t_0}},\quad Y_0=X^{\frac{1}{t_0}},\quad t_\nu=\frac{\ln X}{\ln Y},\quad \nu=\overline{1,k},$$
$$t_k=1,\quad t_1>\ldots>t_{k-1}>t_k=1$$

и $1=Y_0<Y_1<\ldots<Y_{k-1}<Y_k=X$.

В настоящей работе воспользовавшись [1] для суммы (3) и (4) найдена асимптотическая формула, т.е. доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f_\nu(n)$ мультипликативны и выполнены условие (1) и (2), причем $\rho_\nu(X)=O(\ln^{-M}X)$, τ_1 – целое неотрицательное, $M>0$, тогда*

$$M_f(X,Y)=\sum_{\nu=0}^{\tau_1}\frac{a_\nu Z_{k-1}^{(\nu)}(t_1,\ldots,t_{k-1})}{t_1^{\tau_1}}(\ln X)^{\tau_1-\nu}+\frac{1}{\tau_1!}\sum_{\mu=0}^{N-1}\frac{d_\mu Z_{k-1}^{(\tau_1+\mu+1)}(t_1,\ldots,t_{k-1})}{t_1^{\tau_1}(\ln X)^{\mu+1}}+$$
$$+O(\rho_1(X))+O\left(\frac{\rho(Y_1)}{t_{k-1}}\cdot t_1^{r-\tau_2}(\ln Y_1)^{A_1-1}\ln^\delta t_1\sup_{0\le s\le 1}\left|Z_{k-1}^{(\tau_1+1)}(st_1,\ldots,st_{k-1})\right|\right)+$$
$$+O\left(\frac{1}{t_1^{\tau_1}}\cdot\frac{1}{(\ln X)^{N+1}\cdot\varepsilon^M}\cdot\max_{0\le\mu\le N-1}\cdot\sup_{0\le s\le 1}\left|Z_{k-1}^{(\tau_1+\mu+1)}(st_1,\ldots,st_{k-1})\right|\right),$$

где $Z_{k-1}(t_1,\ldots,t_{k-1})$ – непрерывное решение уравнение

$$t_1 Z_{k-1}^{(\tau_1+\mu+1)}(t_1,\ldots,t_{k-1})-\int_0^{t_1}Z_{k-1}\left(u,\frac{ut_2}{t_1},\ldots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du-$$
$$-\sum_{\nu=1}^{k}\tau_\nu\int_{t_1\left(1-\frac{1}{t_\nu}\right)}^{t_1\left(1-\frac{1}{t_{\nu-1}}\right)}Z_{k-1}\left(u,\frac{ut_2}{t_1},\ldots,\frac{ut_{k-1}}{t_1}\right)du=0 \tag{5}$$

с начальными условиями $Z_{k-1}(t_1,\ldots,t_{k-1})=Z_{k-2}(t_1,\ldots,t_{k-2})$ при $t_{k-1}<1$ и $Z_{k-1}(t_1,\ldots,t_{k-1})=t_1^{\tau_1}$ при $0<t_1\le 1$.

$$Z_{k-1}^{(\nu)}(t_1,\ldots,t_{k-1})=\frac{d^\nu}{du^\nu}Z_{k-1}(ut_1,\ldots,ut_{k-1})\Big|_{u=1},$$
$$N\le M-1,\quad d_\mu=\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\int_2^\infty\frac{R_1(u)\ln^\mu u}{u}du,$$

ε – таково, что $Z_{k-1}^{(\tau_1+N+1)}(ut_1,\ldots,ut_{k-1})$ непрерывна по u и при $1-\varepsilon<u<1$.

Теорема 2. *Пусть* $f_\nu(n)$, $(\nu=\overline{1,k})$ *– мультипликативные функции удовлетворяющие условиям (1) и (2), причем* $\rho_\nu(X)=O\left((\ln X)^{-M}\right)$ *для любого* $M>0$. *Тогда, если* τ_1 *– целое неотрицательное, то справедлива асимптотическая разложения*

$$M_f(X,Y_1,\ldots,Y_{k-1})=\sum_{\substack{n=n_1\ldots n_k\le X\\ p/n_\nu\to Y_{\nu-1}<p\le Y_\nu,(\nu=\overline{1,k})}} f_1(n_1)\ldots f_k(n_k)=$$

$$=X\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{\tau_1}\frac{c_\nu(\ln X)^{\tau_1-\nu}Z_{k-1}^{(\nu)}(t_1,\ldots,t_{k-1})}{t_1^{\tau_1}}+\frac{1}{\tau_1!}\cdot\sum_{\mu=0}^{N-1}\frac{Z_{k-1}^{(\tau_1+\mu+1)}(t_1,\ldots,t_{k-1})}{t_1^{\tau_1}(\ln X)^{\mu+1}}\cdot d_\mu\right\}+$$

$$+O\Big(\frac{X}{t_1^{\tau_1}(\ln X)^{N+1}\cdot\varepsilon^M}\cdot\max_{0\le\mu\le N+1}\cdot\sup_{0\le\theta\le1}\left|Z_{k-1}^{(\tau_1+\mu+1)}(\theta t_1,\ldots,\theta t_{k-1})\right|+$$

$$+X\rho(Y_1)t_1^{r-\tau_1}\cdot(\ln Y_1)^{A_1-1}\cdot\ln^{\hat\delta}t_1\cdot\sup_{0\le\theta\le1}\left|Z_{k-1}^{(\tau_1+\mu+1)}(\theta t_1,\ldots,\theta t_{k-1})\right|,$$

где $Z_{k-1}(t_1,\ldots,t_{k-1})$ *– непрерывное решение уравнение (5) с начальными условиями* $Z_{k-1}(t_1,\ldots,t_{k-1})=Z_{k-2}(t_1,\ldots,t_{k-2})$ *при* $t_{k-1}<1$ *и* $Z_{k-1}(t_1,\ldots,t_{k-1})=t_1^{\tau_1}$ *при* $0<t_1\le1$.

$$Z_{k-1}^{(\nu)}(t_1,\ldots,t_{k-1})=\frac{d^\nu}{du^\nu}Z_{k-1}(ut_1,\ldots,ut_{k-1})\Big|_{u=1},$$

$$N=M-1,\qquad d_\mu=\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\int_2^\infty\frac{R_1(u)\cdot\ln^\mu u}{u}du,$$

ε *– таково, что* $Z_{k-1}^{(\tau_1+\mu+1)}(ut_1,\ldots,ut_{k-1})$ *непрерывна по* u *при* $1-\varepsilon<u<1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чариев У. Обобщенная задача о числах с малыми и большими простыми делителям // Изв. АН ТаджССР. Отд.физ.-мат. и геол. – хим. наук. 1979. № 1(71). С. 13-20.

———————————————————————————

УДК 511.3

Формула Лейбница и ее приложения

В. И. Усков (Россия, г. Воронеж)
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова
e-mail: vum1@yandex.ru

Leibniz's formula and its applications

V. I. Uskov (Russia, Voronezh)
Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov
e-mail: vum1@yandex.ru

1. Введение

Целью настоящей работы является обобщение формулы Лейбница на случай произведения p функций и ее применение к дифференцированию определитель-функции, то есть функции, записанной с помощью определителя с элементами-функциями.

В случае $p = 2$ она применялась в работе [1] при построении уравнения ветвления для исследования жесткости динамической системы.

Случай $p = 3$ апробировался на конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (см. [2]). Случай $p = 4$ — на Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (см. [3]).

2. Формула Лейбница

Введем мультиномиальный коэффициент

$$P(i_1, i_2, \ldots, i_p) = \frac{(i_1 + i_2 + \ldots + i_p)!}{(i_1)!(i_2)!\ldots(i_p)!}.$$

Справедливо следующее тождество.

Лемма 1.

$$P(i_1 - 1, i_2, \ldots, i_p) + P(i_1, i_2 - 1, \ldots, i_p) + \ldots + P(i_1, i_2, \ldots, i_p - 1) = P(i_1, i_2, \ldots, i_p).$$

Оно проверяется непосредственно.

Далее, пусть $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, — достаточно гладкие функции. Имеет место следующая формула Лейбница для дифференцирования произведения нескольких функций.

Теорема 1.

$$(f_1(x) f_2(x) \ldots f_p(x))^{(n)} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_p \geqslant 0 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_p = n}} P(i_1, i_2, \ldots, i_p) f_1^{(i_1)}(x) f_2^{(i_2)}(x) \ldots f_p^{(i_p)}(x).$$

Доказательство.

Применим метод математической индукции по n. Справедливость утверждения при $n = 1$ (база индукции) устанавливается непосредственно. Шаг индукции осуществляется с применением свойства линейности производной и формулы Лейбница для производной произведения двух функций. Чтобы после раскрытия скобок получился «одночлен» $f_1^{(i_1)} f_2^{(i_2)} \ldots f_p^{(i_p)}$, нужно выбрать те i_1 членов, из которых берется $f_1^{(i_1)}$, i_2 членов, из которых берется $f_2^{(i_2)}$ и так далее, i_p членов, из которых берется $f_p^{(i_p)}$. В слагаемом коэффициент после приведения подобных членов равен числу способов, которыми можно осуществить выбор этого слагаемого, то есть соответствующему мультиномиальному коэффициенту в силу леммы 1. Теорема доказана.

$\square$

Далее, пусть $f_{ij}(x)$ — достаточно гладкие функции, $i, j = 1, 2, \ldots, p$. С помощью них строятся определитель-функции

$$F(x) = \det\begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1p}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \ldots & f_{2p}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{p1}(x) & f_{p2}(x) & \ldots & f_{pp}(x) \end{pmatrix}, F^{i_1, i_2, \ldots, i_p}(x) = \det\begin{pmatrix} f_{11}^{(i_1)}(x) & f_{12}^{(i_1)}(x) & \ldots & f_{1p}^{(i_1)}(x) \\ f_{21}^{(i_2)}(x) & f_{22}^{(i_2)}(x) & \ldots & f_{2p}^{(i_2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{p1}^{(i_p)}(x) & f_{p2}^{(i_p)}(x) & \ldots & f_{pp}^{(i_p)}(x) \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 1 вытекает формула дифференцирования определитель-функции.

Следствие 1.

$$F^{(n)}(x) = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_p \geqslant 0 \\ i_1+i_2+\ldots+i_p=n}} P(i_1,i_2,\ldots,i_p) F^{i_1,i_2,\ldots,i_p}(x).$$

Как приложение этого следствия, рассмотрим определитель функцию $\rho(X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$:

$$\rho(X) = \det \begin{pmatrix} g_{11}(X) & g_{12}(X) & \ldots & g_{1p}(X) \\ g_{21}(X) & g_{22}(X) & \ldots & g_{2p}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(X) & g_{p2}(X) & \ldots & g_{pp}(X), \end{pmatrix}$$

где

$$g_{ij}(X) = \sum_{r_1,r_2,\ldots,r_q=0}^{\infty} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_q^{r_q} d_{ij}^{r_1 r_2 \ldots r_q}$$

являются многочленами с постоянными коэффициентами $d_{ij}^{r_1 r_2 \ldots r_q}$.

Предположим, что смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Тогда справедлива формула разложения функции $\rho(X)$ в ряд Маклорена:

$$\rho(X) = \sum_{r_1,r_2,\ldots,r_q=0}^{\infty} (x_1)^{r_1} (x_2)^{r_2} \ldots (x_q)^{r_q} \Omega^{r_1 r_2 \ldots r_q}$$

в обозначении

$$\Omega^{r_1 r_2 \ldots r_q} = \sum_{\substack{i_1^{(s)},\ldots,i_p^{(s)} \geqslant 0 \\ i_1^{(s)}+\ldots+i_p^{(s)}=r_s, \\ s=1,2,\ldots,q}} \det \begin{pmatrix} d_{11}^{i_1^{(1)} i_1^{(2)} \ldots i_1^{(q)}} & d_{12}^{i_1^{(1)} i_1^{(2)} \ldots i_1^{(q)}} & \ldots & d_{1p}^{i_1^{(1)} i_1^{(2)} \ldots i_1^{(q)}} \\ d_{21}^{i_2^{(1)} i_2^{(2)} \ldots i_2^{(q)}} & d_{22}^{i_2^{(1)} i_2^{(2)} \ldots i_2^{(q)}} & \ldots & d_{2p}^{i_2^{(1)} i_2^{(2)} \ldots i_2^{(q)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1}^{i_p^{(1)} i_p^{(2)} \ldots i_p^{(q)}} & d_{p2}^{i_p^{(1)} i_p^{(2)} \ldots i_p^{(q)}} & \ldots & d_{pp}^{i_p^{(1)} i_p^{(2)} \ldots i_p^{(q)}} \end{pmatrix}.$$

В обозначении $\Omega^{r_1 r_2 \ldots r_q}$ подразумевается повторное суммирование.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усков В. И. Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Том 26, № 134. С. 172–181

2. Усков В. И. Формула производной определитель-функции // Материалы XVIII Международной научной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 236.

3. Усков В. И. Обобщение формулы Лейбница и ее приложения // Сборник трудов Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань: КФУ, Изд-во АН РТ, 2021. Том 60. С. 306–308.

УДК 511.32

Проблема делителей Карацубы и родственные задачи *(по совместной работе с С. В. Конягиным и М. Р. Габдуллиным)*

В. В. Юделевич (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им М. В. Ломоносова
e-mail: vitaliiyudelevich@mail.ru

Karatsuba divisor problem and related problems

V. V. Iudelevich (Russia, Moscow)
Lomonsov Moscow State University
e-mail: vitaliiyudelevich@mail.ru

Рассмотрим сумму

$$\Phi(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)}, \tag{1}$$

где $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ – функция делителей, а суммирование ведётся по последовательным простым числам. В 2004 году А. А. Карацуба на семинаре «Аналитическая теория чисел и приложения» в качестве задачи предложил найти асимптотику для величины $\Phi(x)$ при $x \to +\infty$. Данная задача родственна следующим двум теоретико-числовым проблемам.

Первая, так называемая проблема делителей Титчмарша, заключается в нахождении асимптотической формулы для суммы

$$D(x) = \sum_{p \leqslant x} \tau(p-1).$$

Как известно (см. [2], [3], [4]), при $x \to +\infty$ справедливо

$$D(x) \sim \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\, x,$$

где $\zeta(s)$ обозначает дзета-функцию Римана. Вторая проблема состоит в нахождении асимптотической формулы для суммы

$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n)}.$$

Данная задача была решена С. Рамануджаном в [1]. Асимптотическая формула для $T(x)$ имеет вид

$$T(x) = c_0 \frac{x}{\sqrt{\log x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)\right),$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{p^2 - p}\, \ln \frac{p}{p-1} = 0.5486\ldots$$

Сумма $\Phi(x)$ изучалась ранее. В работе [6] была получена оценка

$$\Phi(x) \leqslant 4K\frac{x}{(\log x)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{x\log\log x}{(\log x)^{\frac{5}{2}}}\right),$$

где

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p \sqrt{\frac{p}{p-1}}\left(p\ln\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right) = 0.2532\ldots$$

Отметим, что оценку вида $\Phi(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{3/2}}$ можно также получить из следствия 1.2 работы [5]. Мы предполагаем, что при $x \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(x) \sim K\frac{x}{(\log x)^{\frac{3}{2}}},$$

однако доказать это, по-видимому, трудно.

В настоящей работе мы находим нижнюю оценку для суммы $\Phi(x)$, именно, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\Phi(x) \gg \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

Тем самым, для $\Phi(x)$ установлен правильный порядок порядок роста:

$$\Phi(x) \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}},$$

что в первом приближении решает задачу, поставленную Карацубой. Наряду с $\Phi(x)$ мы рассматриваем сумму

$$F(x) = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n^2+1)}. \tag{2}$$

Применительно к $F(x)$ мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Имеет место оценка*

$$F(x) \asymp \frac{x}{\sqrt{\log x}}.$$

Кратко опишем идею работы. В сумме $\Phi(x)$ для каждого простого $p \leqslant x$ мы записываем $p-1 = mn$, где m состоит из простых делителей, меньших z, а n соответственно из простых делителей, больших z, при этом $z = x^{\varepsilon}$ и $\varepsilon > 0$ – фиксировано. В таком случае сумма $\Phi(x)$ превращается в двойную

$$\Phi(x) = \sum_{\substack{m\leqslant x\\ p|m\Rightarrow p\leqslant z}}\frac{1}{\tau(m)}\sum_{\substack{n\leqslant\frac{x}{m}\\ p|n\Rightarrow p>z\\ n\cdot m+1-\text{простое}}}\frac{1}{\tau(n)},$$

и так как $\tau(n) = O_{\varepsilon}(1)$ получаем

$$\Phi(x) \gg_{\varepsilon} \sum_{m\leqslant x^{\varepsilon}}\frac{1}{\tau(m)}\sum_{\substack{n\leqslant\frac{x}{m}\\ p|n\Rightarrow p>x^{\varepsilon}\\ n\cdot m+1-\text{простое}}} 1. \tag{3}$$

Внутренняя сумма с помощью решета Бруна-Хооли оценивается снизу величиной порядка $\frac{x}{m(\log x)^2}$. Отсюда получаем требуемый результат:

$$\Phi(x) \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^2} \sum_{m \leqslant x^\varepsilon} \frac{1}{m\tau(m)} \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Заметим, что при оценке сверху, приведённые выше рассуждения не дают результата, поскольку внутреннюю сумму в (3) не удается достаточно хорошо оценить при $m \leqslant x$.

Совершенно также получается нижняя оценка суммы $F(x)$. Верхняя оценка для $F(x)$ получается из неравенства $\tau(n) \geqslant 2^{\omega(n)}$ (здесь $\omega(n)$ – число простых делителей n без учёта кратности) и оценки на количество чисел $n \leqslant x$ с заданным значением $\omega(n^2+1)$.

Отметим, что методы, используемые в данной работе, можно применять и к другим функциям, родственным $\frac{1}{\tau(n)}$. Так, если $\tau_k(n)$ означает обобщённую функцию делителей:

$$\tau_k(n) = \sum_{n=d_1 d_2 \ldots d_k} 1,$$

то можно доказать порядковое равенство

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau_k(p-1)} \asymp_k x(\log x)^{\frac{1}{k}-2}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Ramanujan, *Some formulae in the analytic theory of numbers.// The Mess. Math.* (1916) **45**, pp. 81-84.

2. E. C. Titchmarsh, *A divisor problem.// Rend. Palermo.*(1930) **54**, pp. 414-429.

3. E. Bombieri, J. B. Friedlander, H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progressions to large moduli.* Acta Math. 357 (1985), pp. 51-76.

4. Ю. В. Линник, *Новые варианты и применения дисперсионного метода в бинарных аддитивных задачах*// Докл. АН СССР, **137**:6 (1961), с. 1299–1302.

5. P. Pollack, *Nonnegative multiplicative functions on sifted sets, and the squre roots of* -1 *modulo shifted primes.// Glasgow Math. J.* (2020) **62**, pp. 187-199.

6. В. В. Юделевич, *О проблеме делителей Карацубы.// Изв. РАН* (2022), **86**, в печати.

————————————————————————————————————

Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.42

Связь меры Хаара цилиндров в поле p-адических чисел и мер множеств малых значений целочисленных полиномов[1]

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
И. А. Корлюкова (Беларусь, г. Гродно)
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
e-mail: korlyukova_ia@grsu.by
Н. В. Шамукова (Беларусь, г. Минск)
Военная академия Республики Беларусь
e-mail: shamukova_n@mail.ru

Relationship between the Haar's measure of cylinders in the field of p-adic numbers and measures of sets of small values of integer polynomials

V. I. Bernik (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
I. A. Korlyukova (Belarus, Grodno)
Yanka Kupala State University of Grodno
e-mail: korlyukova_ia@grsu.by
N. V. Shamukova (Belarus, Minsk)
Military Academy of the Republic of Belarus
e-mail: shamukova_n@mail.ru

Нетрудно получить точную связь меры множеств малых значений полиномов $P(x)$ степени n с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, высоты H и меры Лебега интервалов $|x - \alpha_1| < \varepsilon_1$, в которых α_1 - ближайший к x корень $P(x)$, а ε_1 зависит от величины $|P(x)|$. Все остальные корни $P(x)$ можно упорядочить следующим образом

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \ldots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|.$$

Для $\varepsilon_2 > 0$ и целого $T = [\varepsilon_2^{-1}] + 1$ введем следующие характеристики при целых l_i

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_i| &= H(\alpha_1)^{-\rho_i}, \\ (l_i - 1)T^{-1} &\leq p_i < l_i, \\ p_j &= \sum_{s=j+1}^{n-1} l_s. \end{aligned} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР «Распределение корней целочисленных многочленов в кругах комплексной плоскости, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты, и их приложения в задачах математической физики».

Оказывается, количество различных векторов $\bar{l} = (l_2, \dots, l_n)$ зависит только от ε_2, n и не зависит от H [1], [2]. Будем рассматривать только целочисленные полиномы с фиксированным вектором $\bar{l}$. В работе [3] первым из авторов статьи была решена проблема Бейкера-Шмидта и найдено точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных чисел x, для которых при $\omega > n$ неравенство $|P(x)| < H^{-\omega}$ имеет бесконечное количество решений в $P(x) \in Z[x]$. Основу доказательства составила следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - два полинома высоты $H(P_i) \le Q$ без общих корней, которые принимают на интервале I длины $|I| = Q^{-\eta}$ значения $max_{x\in I}(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \tau > 0$. Тогда при любых $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство*

$$\tau + 1 + 2\sum_{k=1}^{n} max(\tau + 1 - k\eta, 0) < 2n + \delta. \tag{2}$$

Неравенство (2) можно рассматривать как обобщение неравенства Гельфонда с трансцендентной точки x на интервал I. Оказывается, величина $\tau + 1 - k\eta$ быстро уменьшается с ростом k, что затрудняет её применение при оценке количества многочленов с заданными дискриминантами [4].

Приводим более сильный вариант леммы 1 в поле p-адических чисел и аналогами неравенств (1) в Q_p.

Лемма 2. *Пусть полиномы $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$ без общих корней в алгебраическом замыкании поля p-адических чисел Q_p принимают на цилиндре K, $\mu K = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$ значения*

$$max_{\omega\in K}(|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p) < Q^{-\tau}, \tau > 0.$$

Тогда при любых $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 2\sum_{j=2}^{n} max(p_j, 0) < 2n + \delta.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. 181 с.

2. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine approximation on manifolds. — Cambridge: CUP, 1999. 172 p.

3. Берник В. И. О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arithmetica. 1989. Том 53. С. 17-28.

4. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Mathematics. 2016. Том 298. С. 393-412.

УДК 511.42

Меры Хаара множеств малых значений целочисленных многочленов, реализующих теорему Дирихле в поле p-адических чисел

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
А. В. Титова (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: anastasia.titova111@gmail.com

Haar measures of sets containing small values of integer polynomials that implement the Dirichlet theorem in the field of p-adic numbers

V. I. Bernik (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
A. V. Titova (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: anastasia.titova111@gmail.com

Теория диофантовых приближений в поле p-адических чисел развивается параллельно с диофантовыми приближениями в полях действительных и комплексных чисел. Пусть Q_p - поле p-адических чисел, μA - мера Хаара измеримого множества А из алгебраического замыкания $\bar{Q_p}$. Исопльзуя прицип ящиков Дирихле, нетрудно доказать следующую теорему. [1,2]

Для любого натурального числа $Q > 1$ и $\omega \in Q_p$ существует целочисленный многочлен $P(\omega)$, $degP \leq n$, высоты $H(P) \leq Q$, такой, что

$$|P(\omega)|_p < pQ^{-n-1}. \tag{1}$$

Если $\alpha \in Q_p$ корень $P(\omega)$ и α - ближайший к ω корень, то нетрудно получить, что

$$|\omega - \alpha|_p \leq |P(\omega)|_p |P'(\alpha)|_p^{-1} \tag{2}$$

и ω принадлежит цилиндру K, $\mu K < |P(\omega)|_p |P'(\alpha_1)|_p^{-1}$. Если $|P'(\alpha_1)|_p > c_1(n)$, то $\mu K \leq c_1^{-1} pQ^{-n-1}$. Это означает, что существуют цилиндры с мерой μK порядка Q^{-n-1}, внутри которых выполняется (1).Существуют ли цилиндры с большей мерой? Ответ положительный и основан на следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть $B_1 \in Q_p$ и для всех $\omega \in B_1$ выполняется система неравенств*

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{v_0} < |P(\omega)|_p < c_0 Q^{-v_0}, |\omega|_p \leq 1, 0 \leq v_1 < 1, \\ \delta_0 Q^{v_1} < |P'(\omega)|_p < c_0 Q^{-v_1}, v_0 + v_1 = n-1, v_0 > 2v_1. \end{cases}$$

Тогда существуют (δ_0, c_0) такие, что $\mu B_1 > \frac{3}{4}$.

Теорема позволяет строить цилиндры К с мерой Q^{-n-1+v}, $0 < v < 1$. Теорема является p-адическим аналогом действительного случая работы [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Мн.: Наука и Техника. 1967. 184 с.

2. Bernik V., Dodson M. Metric Diophantine approximation on manifolds // Cambridge Tracts in Mathematics. 1999. Vol. 137. P. 172–184.

3. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298. P. 393–412.

———————————————————————————

УДК 511.14

Аппроксимация вещественных чисел отношениями нулей функций Бесселя

В. В. Волчков (ДНР, г. Донецк)
Донецкий национальный университет
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com
Вит. В. Волчков (ДНР, г. Донецк)
Донецкий национальный университет
e-mail: volna936@gmail.com

Approximation of real numbers by ratios of zeros of Bessel functions

V. V. Volchkov (DPR, Donetsk)
Donetsk National University
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com
Vit. V. Volchkov (DPR, Donetsk)
Donetsk National University
e-mail: volna936@gmail.com

Согласно классической теореме Лиувилля, алгебраические иррациональности не допускают быструю аппроксимацию рациональными дробями. В данной работе изучается подобное явление для чисел, приближаемых с определенной скоростью отношениями нулей бесселевых функций.

Пусть J_ν – функция Бесселя первого рода порядка $\nu > -1$, $Z_\nu = \{t > 0 : J_\nu(t) = 0\}$. Пусть также f – положительная функция на $(0, +\infty)$, такая что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^2} = +\infty.$$

Обозначим через A_ν множество чисел $\gamma > 0$, для которых условие

$$0 < \left|\gamma - \frac{\alpha}{\beta}\right| < \frac{1}{f(\beta)}$$

выполнено для бесконечного множества пар $\alpha, \beta \in Z_\nu$.

Теорема 1. *Пусть $\nu > -1$ – рационально. Тогда:*
1) всякое число $\gamma \in A_\nu$ иррационально и не является квадратичной иррациональностью;
2) множество A_ν имеет мощность континуума.

Отметим, что множества чисел, быстро приближаемых отношениями нулей бесселевых функций играют важную роль в проблемах интегральной геометрии, связанных с локальными теоремами о двух радиусах (см. [1, часть 2]), а также [2], [3].)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 p.
2. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. — London: Springer-Verlag, 2009. 671 p.
3. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. — Basel: Birkhäuser, 2013. 592 p.

УДК 511.42

Точные оценки мер комплексных чисел с малыми модулями целочисленных многочленов

Е. В. Засимович (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
Д. В. Васильев (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
Н. В. Сакович (Беларусь, г. Могилев)
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
e-mail: sakovichnv@tut.by

Exact estimates for measures of complex numbers with small modules of integer polynomials

E. V. Zasimovich (Belarus, Minsk)
Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
D. V. Vasilyev (Belarus, Minsk)
Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
N. V. Sakovich (Belarus, Mogilev)
Mogilev State University
e-mail: sakovichnv@tut.by

Задача о мере множеств действительных или комплексных точек x, для которых разрешимы неравенства

$$|P(x)| < \varepsilon, \varepsilon = Q^{-w}, w > 0, Q > 1, \quad (1)$$

в целочисленных полиномах $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ограниченной степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i| \leqslant Q$ является классической задачей теории диофантовых приближений, восходящей к Дирихле [1] и Лиувиллю [2]. В решение этой проблемы большой вклад внесли многие крупные математики.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(Q)$ множество решений (1), μ — мера Лебега (μ_1 — на множестве действительных чисел, μ_2 — на множестве комплексных чисел). Бударина [3] доказала, что $\mu\mathcal{L}_n(Q,w) \ll Q^{-\frac{w-n}{n}}$. Мы же улучшили данный результат, получив следующие теоремы.

Пусть полиномы имеют специальный вид

$$P(x) = (ax+b)^n. \tag{2}$$

Будем рассматривать множество $\mathcal{L}_n(w)$ таких x, что разрешимо неравенство

$$|P_1(x)| < Q^{-w}, \quad w > n. \tag{3}$$

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_n(w) \asymp Q^{-\frac{w-1}{n}}. \tag{4}$$

Для получения оценки снизу в (4) используются многочлены вида (2). Для оценки сверху применяем метода В.Г. Спринджука [4] и В.И. Берника [5], использованные при доказательстве гипотез К. Малера и А. Бейкера.

В комплексном случае многочлены вида (2) заменяются на целочисленные многочлены комплексной переменной z вида

$$P_2(z) = (a_2 z^2 + a_1 z + a_0)^{\frac{n}{2}}. \tag{5}$$

Будем рассматривать $\mathcal{L}_n(Q,w)$ — множество таких z из круга $K(z) \subset C(0,1)$ комплексной плоскости, для которых неравенство

$$|P(z)| < Q^{-w}, \quad w > \frac{n-1}{2} \tag{6}$$

разрешимо хотя бы для одного многочлена вида (5) степени n и высоты Q.

Теорема 2. *В описанных выше условиях верны неравенства:*

$$\mu\mathcal{L}_n(Q,w) \ll Q^{-\frac{4w-2}{n}},$$

$$\mu\mathcal{L}_n(Q,w) \gg Q^{-\frac{4w+2}{n}}.$$

Рассмотрим полином $S(z)$, $\deg S = n$, $H(S) \leqslant Q$. Пусть он имеет вид

$$S(z) = T(z)P(z),$$

где $P(z) = (a_2 z^2 + a_1 z + a_0)^m$, $1 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}$. $T(z)$ — произвольный полином степени $n - 2m$. Обозначим $R(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$.

Определим $\mathcal{L}_2(Q^{\frac{\lambda}{m}}, w)$ — множество таких $z \in K(z)$, для которых неравенство

$$|S(z)| < Q^{-w}, \quad w > \frac{n-1}{2},$$

разрешимо хотя бы для одного многочлена вида $R(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ степени 2 и высоты $Q^{\frac{\lambda}{m}}$.

Теорема 3. *В описанных выше условиях верны неравенства*

$$Q^{-\frac{2w+2-\lambda}{m}} \ll \mu\mathcal{L}_2(Q^{\frac{\lambda}{m}}, w) \ll Q^{-\frac{2w+2-3\lambda}{m}},$$

$$\mu\mathcal{L}_n^*(Q,w) \asymp Q^{-\frac{2w+2-\lambda}{m} + (1-\lambda)(n-2m+1)}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirichlet, L.G.P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // Werke I. 1842. P. 633–638.
2. Liouville, J. Sur des classes tres etendues de quantites dont la valeur n'est ni algebrique, ni meme reductible It des irrationnelles algebriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1844. Vol. 18. P. 883–885.
3. Budarina, N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers // Math. Z. 2019. Vol. 293. P. 809–824.
4. Спринджук, В.Г. Проблема Малера с метрической теории чисел // Наука и техника 1967.
5. Bernik, V. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // Acta Arith. 1989. Vol. 53. no. 1. P. 17—28.

———————————————————————————————

УДК 511.42

Количество целых точек вблизи поверхностей дискриминантного типа

Н. И. Калоша (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
А. С. Кудин (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: knxd@yandex.ru
М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)
Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
e-mail: lammv@mail.ru

Number of integer points near surfaces of discriminant type

N. I. Kalosha (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: kalosha@im.bas-net.by
A. S. Kudin (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: knxd@yandex.ru
M. V. Lamchanouskaya (Belarus, Minsk)
Institute of Information Technologies, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: lammv@mail.ru

В метрической теории диофантовых приближений важное значение имеют задачи о распределении дискриминантов и результантов целочисленных многочленов. Так Б. Фолькман [1] использовал оценки для количества целочисленных многочленов с малыми дискриминантами Х. Давенпорта [2] для доказательства кубического случая гипотезы К. Малера [3].

В данной работе мы получаем аналоги указанных теорем для $R_n(Q)$ – количества пар целочисленных полиномов фиксированной степени n и высоты, не превосходящей Q с заданными результантами. Оценки снизу в этой задаче найдены В. Бересневичем, В. Берником и Ф. Гётце [4].

Теорема 1. *Обозначим через $L_n(Q)$ количество пар (P_1, P_2) целочисленных полиномов степени n и высоты $H(P) \leqslant Q$ без общих корней, для результантов $R(P_1, P_2)$ которых справедливо неравенство $0 \neq |R(P_1, P_2)| < Q^{2n-2v}$. Тогда при $0 < v < \frac{1}{2}$ верно неравенство*

$$\#L_n(Q) < c(n)\, Q^{2n+2-2v}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится с использованием обобщения теорем из теории трансцендентных чисел. Вводится дополнительный параметр – длина отрезка I, меры $Q^{-\eta},\ \eta > 0$, на котором целочисленные многочлены $P_1(x), P_2(x),\ \deg P_i \leqslant n,\ i = 1, 2$, высоты $H(P_i) \leqslant Q$ и $\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau},\ \tau > 0$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *При $\delta > 0$ и $Q > Q(\delta)$ справедливо неравенство*

$$\tau + 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \max(\tau + 1 - k\eta, 0) < 2n + \delta.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Volkmann B. The real cubic case of Mahler's conjecture. Mathematika. 1961; 8(1):pp. 55–57.
2. Davenport H. A note on binary cubic forms. Mathematika. 1961; 8(1): pp. 58–62.
3. Koleda D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers. Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 2017; 29(1): pp. 179–200.
4. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants Advances in Mathematics. 2016; 298: – pp. 393–412.

УДК 511.36

Некоторый прогресс в проблеме гипотезы Зарембы

И. Д. Кан (Россия, г. Москва)
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
e-mail: igor.kan@list.ru

Some progress in the problem of the Zaremba hypothesis

I. D. Kan (Russia, Moscow)
Moscow Aviation Institute (National Research University)
e-mail: igor.kan@list.ru

Для натуральных чисел $d_1, d_2, \ldots, d_k$ через $[d_1, d_2, \ldots, d_k]$ обозначается конечная *цепная* дробь

$$[d_1, d_2, \ldots, d_k] = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \ddots + \cfrac{1}{d_k}}} \tag{1}$$

с *неполными частными* $d_1, d_2, \ldots, d_k$, или *элементами* цепной дроби (1).

Числа

$$\langle\varnothing\rangle = 1, \ \ \langle d_1\rangle = d_1, \ \ \langle d_1, d_2\rangle = d_1 d_2 + 1, \ \ \ldots,$$
$$\langle d_1, d_2, \ldots, d_k\rangle = d_k \langle d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}\rangle + \langle d_1, d_2, \ldots, d_{k-2}\rangle,$$

определяемые индуктивно по натуральному параметру k, называются *континуантами* конечных последовательностей $\varnothing$, $\{d_1\}, \{d_1, d_2\}, \ldots, \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$.

Гипотеза Зарембы:

каждое натуральное число представимо в виде континуанта (знаменателя цепной дроби) от элементов, не превосходящих числа 5.

Пусть $\mathbf{A}$ — некоторое конечное подмножество натуральных чисел (алфавит).

Положим

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{A}} = \left\{ \frac{y}{Y} \;\middle|\; \begin{array}{c} y, Y \in \mathbb{N}, \ y/Y = [d_1, d_2, \ldots, d_k], \ \gcd(y, Y) = 1, \ y \leqslant Y, \\ d_j \in \mathbf{A} \text{ для } j = 1, 2, \ldots, k \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} = \left\{ d \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists\, b \in \mathbb{N} : \ \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathbf{A}} \right\}.$$

Через $\Delta_{\mathbf{A}}$ обозначим *хаусдорфову размерность* множества действительных чисел, представимых бесконечными цепными дробями с неполными частными из алфавита $\mathbf{A}$. Ж. Бургейн и А. Конторович в 2011 году доказали следующую теорему [1, 2]:

для каждого алфавита $\mathbf{A}$, удовлетворяющего условию

$$\Delta_{\mathbf{A}} > \frac{307}{312} = 0.9839\ldots, \tag{2}$$

справедливо неравенство

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \geqslant N(1 - o(1)). \tag{3}$$

Далее метод Бургейна — Конторовича распространяется на случаи более слабых по сравнению с (2) ограничений на величину $\Delta_{\mathbf{A}}$. Можно доказать следующие три теоремы.

Теорема 1. *Если алфавит* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условию*

$$\Delta_{\mathbf{A}} > \frac{\sqrt{40} - 4}{3} = 0.7748\ldots, \tag{4}$$

то выполнена формула

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \geqslant N(1 - o(1)).$$

Теорема 2. *Пусть для алфавита* $\mathbf{A}$, *величина* $\Delta_{\mathbf{A}}$ *которого удовлетворяет условию*

$$\Delta_{\mathbf{A}} > 3 - \sqrt{5} = 0.7639\ldots, \tag{5}$$

можно методом Бургейна — Конторовича при любом $\varepsilon > 0$ *доказать неравенство*

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \gg_{\varepsilon} N^{1-\varepsilon}.$$

Тогда выполнена формула

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \geqslant N(1 - o(1)).$$

Теорема 3. *Пусть некоторый алфавит* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{2} < \Delta_{\mathbf{A}} < \frac{\sqrt{40} - 4}{3} = 0.7748\ldots.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \gg N^{\Delta_{\mathbf{A}} + (2\Delta_{\mathbf{A}} - 1)\frac{\Delta_{\mathbf{A}} + 2}{\Delta_{\mathbf{A}} + 6}}. \tag{6}$$

Здесь все константы в знаках “$\ll$” и “$\gg$” зависят только от алфавита $\mathbf{A}$.

Замечание 1. *Согласно Бургейну и Конторовичу, условие (2) выполнено для алфавита* $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. *Дальнейший прогресс в этих вопросах заключается в том, что неравенство (4) выполнено, например, для алфавита* $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, *а неравенство (5) — для алфавита* $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 5\}$.

Методы доказательства результатов

Для каждого действительного числа Θ определим тригонометрическую сумму равенством

$$S^{(N)}(\Theta) = \sum_{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}:\ d \leqslant N} e^{2\pi i \Theta d}, \tag{7}$$

где Θ — число из интервала $(0; 1)$,
γ — матрица, отвечающая последовательности неполных частных $d_1, d_2, \ldots, d_{2k}$,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_{2k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{8}$$

Идейно метод Бургейна — Конторовича восходит к И. М. Виноградову: получение верхней оценки модуля тригонометрической суммы (0.8)

начинается с возведения этой суммы в некоторую степень, в данном случае — в квадрат, затем, после ряда преобразований, сводится к оценке числа решений системы, состоящей из неравенств и сравнений по некоторым модулям. Результаты этой последней оценки сводятся к верхним и нижним ограничениям на параметр M_1, отвечающий за норму исследуемых квадратных матриц второго порядка:

при нарушении нижних из этих ограничений применение метода будет недостаточно эффективным,

а при нарушении верхних из них — невозможным совсем.

По мере уменьшения величины $\Delta_{\mathbf{A}}$ эти верхние ограничения на M_1 также уменьшаются, а нижние — увеличиваются, так что для выбора M_1 остается все меньше возможностей.

Наконец, при некотором еще меньшем значении $\Delta_{\mathbf{A}}$ интервал выбора M_1 стягивается в точку — это значение $\Delta_{\mathbf{A}}$ и есть минимально возможное.

Одна из важных идей здесь состоит в том, чтобы действительные числа из интервала $(0, 1)$ приблизить рациональными с некоторой точностью, после чего представить результаты всевозможных таких приближений в виде объединения специальных конечных множеств Z, напоминающих параллелепипеды с “длиной” $\mathcal{Q}$, “шириной” $\mathcal{A}$ и “высотой” $\mathcal{L}$ (в том числе, $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{A}$ — соответственно, количества знаменателей q и числителей a некоторого множества рациональных дробей, приближающих числа из $(0, 1)$, а величина $\mathcal{L}$ отвечает за количество таких приближений. Область изменения величин $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{A}$ в дальнейшем делится на несколько подмножеств, для каждого из которых ограничения на параметр M_1 выводятся индивидуально.

Поэтому выбор M_1 теперь зависит от $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{A}$. В итоге в каждом из этих подмножеств интервал выбора M_1 при постепенном уменьшении $\Delta_{\mathbf{A}}$ стягивается в точку при меньших, чем прежде, значениях $\Delta_{\mathbf{A}}$, что приводит к усилению предыдущих результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bourgain J., Kontorovich A. On Zaremba's conjecture. / Preprint available at arXiv: :1107.3776v1 [math.NT] 19 Jul. 2011.

2. Bourgain J., Kontorovich A. On Zaremba's conjecture. // Annals of Math., 180: pp. 137 — 196. 2014.

3. Кан И. Д. Усиление метода Бургейна — Конторовича: три новых теоремы. // Математический сборник. Том 212, № 7, стр. 39 — 83. 2021.

4. Кан И. Д. Усиление теоремы Бургейна — Конторовича о малых значениях хаусдорфовой размерности. // Функциональный анализ и его приложения, том 56, выпуск 1. С. 66-80. 2022.

———————————————————————————————

УДК 511.42

Совместные диофантовы приближения в $\mathbb{Q}_p^2$

О. Н. Кемеш (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный аграрный технический университет
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
И. М. Морозова (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный аграрный технический университет
e-mail: inna.morozova@tut.by
Ж. И. Пантелеева (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: janna-85@list.ru

Joint Diophantine approximation in $\mathbb{Q}_p^2$

O. N. Kemesh (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
I. M. Morozova (Belarus, Minsk)
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: inna.morozova@tut.by
Zh. I. Panteleeva (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: janna-85@list.ru

Систематические исследования по диофантовым приближениям в $\mathbb{Q}_p$ начались с середины прошлого века [1, 2]. Пусть K - некоторый цилиндр в $\mathbb{Q}_p$ меры Хаара μK. Применяя принцип ящиков Дирихле [1, 2], нетрудно доказать, что для любого ω существует многочлен $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$, такой что

$$|P(\omega)|_p < pQ^{-n-1}, \tag{1}$$

где $\mathcal{P}_n(Q)$ — множество целочисленных многочленов степени n и с высотой, не превосходящей Q, $|\omega|_p$ — p-адическая норма числа

$$\omega = a_0 + a_1 p + ... + a_{l+1} p^{l+1} + ..., \quad 0 \leqslant a_j \leqslant p-1,$$

равная p^{-k}, где $k = \min s$ при $a_s \neq 0$.

В данной статье мы приводим эффективную метрическую версию неравенства (1).

Обозначим через B_1 множество $(\omega, \xi) \in K_1 \times K_2$, для которых при некотором $\delta_0 = \delta_0(n)$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-w_1} < |P(\omega)|_p < Q^{-w_1}, & \delta_0 < |P'(\omega)|_p \leqslant 1, \\ \delta_0 Q^{-w_2} < |P(\xi)|_p < Q^{-w_2}, & \delta_0 < |P'(\xi)|_p \leqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Существует $\delta_0 = \delta_0(n)$, при котором*

$$\mu B_1 \geqslant \frac{3}{4}\mu(K_1 \times K_2). \tag{3}$$

Теорема 2. *Для любых цилиндров K_1, K_2 найдется величина $c = c(n)$ такая, что для количества векторов $\overline{u} = (\gamma, \kappa)$ с алгебраическими $\gamma \in K_1 \subset \mathbb{Q}_p$, $\kappa \in K_2 \subset \mathbb{Q}_p$, которые являются корнями полинома $P(\omega) \in \mathcal{P}_n(Q)$ и $P(\xi) \in \mathcal{P}_n(Q)$ соответственно, справедлива оценка снизу*

$$\#\overline{u} \geqslant cQ^{n+1}\mu(K_1 \times K_2). \tag{4}$$

Действительные версии теорем 1 и 2 получены в [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Минск: Изд-во Наука и техника, 1967. 184 с.

2. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine approximation on manifolds. // Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

3. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Adv. Math. Vol. 298. 2016. P. 393–412.

Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 511

Целочисленная аппроксимация отрезка

М. М. Галламов (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
gallamovj@gmail.com

Integer approximation of a segment

M. M. Gallamov (Russia, Moscow)
Mathematical Institute V. A. Steklov of the RAS
gallamovj@gmail.com

1. Немного о геометрии цепных дробей

В равенстве $\alpha = \mathtt{sgn}\alpha\,[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ число α вещественно, $\mathtt{sgn}\,\alpha$ — его знак, а $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ — разложение модуля $|\alpha|$ в цепную дробь с элементами $a_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, которая при рациональном α конечна, а иррациональном бесконечна. Пусть $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ — подходящую дробь порядка n цепной дроби α., При рационального α будет $\frac{p_N}{q_N} = \alpha$ для $N \in \mathbb{N}_0$. p_n и p_n взаимно простые числа и

$$p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2} = (-1)^{n-1},\ n \in \widehat{\mathbb{N}}_{0,0}, \tag{1}$$

которое с геометрической точки зрения говорит о том, что если на векторах $\overline{e}_{n+2} = \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}$ и $\overline{e}_{n+3} = \overline{(q_n; p_n)}$, приложенных к произвольной целой точке, построить параллелограмм, то его целыми точки служат только его вершин. Это следует из указанной выше взаимной простоты и формулы Пика. Числитель p_{n-1} и знаменатель q_{n-1} задают ординату и абсциссу вектора в дератовой системе координат OXY, определяемого *алгоритмом “вытягивания носов”*:

$$\begin{aligned}\overline{e}_{n+2}(0;0) = \overline{e}_n(0;0) + a_{n-1}\overline{e}_{n+1}(0;0) = q_{n-1}\overline{e}_1(0;0) + p_{n-1}\overline{e}_2(0;0) = \\ \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}_{(0;0)},\ \overline{e}_1 = \overline{(1;0)},\ \overline{e}_2 = \overline{(0;1)},\ n \in \widehat{\mathbb{N}}_1.\end{aligned} \tag{2}$$

Если у вектора не указана точка приложения, то считается, что он приложен к $(0;0)$. Пусть прямая $l_\alpha : y = \alpha x$, $\alpha \geq 1$. Тогда с увеличением порядка $n-1$ подходящей дроби вектор $\overline{e}_{n+2}$ становятся длиннее и его конец ближе к прямой l_α, при этом l_α всегда лежит между двумя соседними векторами последовательности $\{\overline{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Вектор $\overline{e}_{N+3} = \overline{(q_N; p_N)} \in l_\alpha$, а остальные $\overline{e}_{2m-1} = \overline{(q_{2m-4}; p_{2m-4})}$ находится под l_α и принадлежит треугольнику $\Delta_{q_{2m-4}} = OB_{q_{2m-4}}B_{X,q_{2m-4}}$, $B_{X,q_{2m-4}} = (q_{2m-4}; 0)$, $B_{q_{2m-4}} = (q_{2m-4}; \alpha p_{2m-4})$, а его конец $B^+_{q_{2m-4}} = (q_{2m-4}; p_{2m-4}) \in B_{q_{2m-4}}B_{X,q_{2m-4}}$ и целая часть $\lfloor \alpha q_{2m-4} \rfloor = p_{2m-4}$. Вектор $\overline{e}_{2m} = \overline{(q_{2m-3}; p_{2m-3})} \notin \Delta_{q_{2m-3}}$ и лежит над l_α.

Если $k\overline{e}_{2m}$ приложить к концу $B^+_{q_{2m-4}}$ вектора $\overline{e}_{2m-1}$, то ломанная $L(O, M_k^+) = \overline{e}_{2m-1} \cup k\overline{e}_{2m}(q_{2m-4}; p_{2m-4}) \in \Delta_{q_{2m-4}+kq_{2m-3}}$ для $k = 1, 2, ..., a_{2m-2}$. Из (1) и $p_{2m-3} > 0$ следует, что $\lfloor \alpha(q_{2m-4} + kq_{2m-3}) \rfloor = p_{2m-4} + kp_{2m-3}$, $L(O, M_k^+)$ лежит под прямой $l_{OM_k^+}$, проходящей через O и M_k^+, и внутри многоугольника $OM_kM_k^+L(O, M_k^+)$ нет целых точек, где $M_k = l_\alpha \cap \{x = q_{2m-4} + kq_{2m-3}\}$; $L(O, M_k^+)$ состоит из двух звеньев и на ней находятся $k+2$ целых точек. С ростом k конец вектора $k\overline{e}_{2m}q_{2m-4}; p_{2m-4})$ приближается к l_α. Минимум достигается при $k = a_{2m-2}$ и при этом оставаясь в $\Delta_{q_{2m-4}+a_{2m-2}q_{2m-3}}$.

2. Аппроксимации отрезка. Количество внутренних точек в треугольнике

Пусть Pr_X, Pr_Y — ортогональные проекции соответственно на OX и OY, AB — отрезок такой, что $Pr_X AB$, $Pr_Y AB$ — нецелые точки, l_{AB} — прямая, определяемая A и B, а $P_{AB}^{\mp}$ — замкнутые полуплоскости, лежащие соответственно слева и справа от l_{AB} при движении от A к B. *Клетчатая область* — множество единичных квадратов из OXY с целыми вершинами. Если $\mathfrak{M}$ — множество в OXY с непустой внутренностью, то *его клетчатой областью* назовем максимальную клетчатую область $\mathbb{M} \subset \mathfrak{M}$. *Клетчатой областью отрезка* AB назовем минимальную клетчатую область $\mathbb{S}_{AB} \supset AB$, $\mathbb{S}_{AB}^{\pm} = \mathbb{S}_{AB} \cap P_{AB}^{\pm}$ — *его правой и левой областью отрезка* AB. Целые точки области $\mathbb{S}_{AB}$ лежат только на её границе $\mathtt{S}_{AB}$. Обозначим через $\mathtt{S}_{AB}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ ломанную, полученную из ломанной $\mathtt{S}_{AB} \cap P_{AB}^{\pm}$ удалением крайних звеньев в случае, если они содержат нецелые вершины, где $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$ — концы ломанной $\mathtt{S}_{AB}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$, причем $A^{\pm}$ ближайшая к A , а $B^{\pm}$ — к B. $\mathtt{S}_{AB}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ назовем соответственно *правой и левой ступенчатыми (целочисленными) аппроксимациями отрезка* AB. Ломанные $\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ из $\mathbb{S}_{AB}^{\pm}$ с концами $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$ и целыми вершинами называются — *правой и левой (целочисленными) аппроксимациями отрезка* AB. Если $Pr_X AB$ ($Pr_Y AB$) — целая точка, то полагаем $\mathbb{S}_{AB} = \varnothing$ и тогда *аппроксимация отрезка* AB назовем *минимальный отрезок с целыми концами, содержащий* AB.

Пусть $Pr_X \mathbb{S}_{AB} = [q^b, q^e]$ и $Pr_Y \mathbb{S}_{AB} = [p^b, p^e]$, тогда $\mathbb{R}_{AB} = Pr_X^{-1}([q^b, q^e]) \cap Pr_Y^{-1}([p^b, p^e])$ назовем *клетчатым прямоугольником отрезка* AB. Многоугольники $\mathbb{R}_{\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})} (\supset P_{AB}^{\pm})$, отсекаемый от $\mathbb{R}_{AB}$ аппроксимацией $\mathtt{L}\ ^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ — соответственно *правым и левым клетчатым треугольниками отрезка* AB. Если $\mathtt{L}^{\pm}$ — аппроксимация отрезка AB, причем движение от A к B сонаправлен с OX? без вертикальных звеньев и $L_i^{\pm} = (q_i^{\pm}; p_i^{\pm})$, $i = 0, 1, ...k^{\pm} + 1$, — её (целые) вершины, то число внутренних целых точек $I_{\mathtt{L}^{\pm}}$ из $\mathbb{R}_{\mathtt{L}^{\pm}}$ определяется соответствующим уравнением

$$\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{k^+} |\frac{p_i^+ + p_{i+1}^+}{2} - p^b||q_{i+1}^+ - q_i^+| = I_{\mathtt{L}^+} + \frac{k^+ + |p_0^+ - p_{k^+ + 1}^+| + |q_0^+ - q_{k^+ + 1}^+| - 1}{2}, \\ \sum_{i=0}^{k^-} |p^e - \frac{p_i^- + p_{i+1}^-}{2}||q_{i+1}^- - q_i^-| = I_{\mathtt{L}^-} + \frac{k^- + |p_0^- - p_{k^- + 1}^-| + |q_0^- - q_{k^- + 1}^-| - 1}{2}, \end{array} \tag{3}$$

где левая и правая части есть площади соответственно $\mathbb{R}_{\mathtt{L}^+}$ и $\mathbb{R}_{\mathtt{L}^-}$ — каждая левая равна сумме площадей трапеций, образующих соответствующий из них, а правая вычислена согласно формуле Пика. Из построений $\mathbb{R}_{\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})}$ следует

Предложение 1. *Если AB — такой отрезок, что $Pr_X AB$, $Pr_Y AB$ — нецелые точки, а AC^+BC^-, прямоугольник с вертикальными и горизонтальными сторонами и диагональю AB, то количество целых внутренних точек $I_{ABC^{\pm}}$ треугольников $ABC^{\pm}$ равно числу $I_{\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})}$ таких же точек клетчатого треугольника $\mathbb{R}_{\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})}$, определяемый произвольной аппроксимации $\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ отрезка AB без вертикальных звеньев.*

Расположение произвольно фиксированного треугольника ABC в минимальном прямоугольнике $\mathtt{V}_{ABC}$ с вертикальными и горизонтальными сторонами, содержащем ABC, возможно следующее: 1) Две стороны ABC есть сторона $\mathtt{V}_{ABC}$. 2) Одна сторона ABC — сторона $\mathtt{V}_{ABC}$ или — диагональ $\mathtt{V}_{ABC}$, а оставшееся вершина принадлежит внутренности одной из сторон $\mathtt{V}_{ABC}$. 3) Одна из вершин ABC совпадает с вершиной $\mathtt{V}_{ABC}$, а оставшиеся вершины лежат внутри смежных сторон $\mathtt{V}_{ABC}$. 4) Сторона ABC есть диагональ $\mathtt{V}_{ABC}$, а оставшееся вершина лежит внутри $\mathtt{V}_{ABC}$. Эти расположения сгруппированы по следующему признаку: в 1) —3) дополнение $(ABC)_i^c$ к внутренности из ABC в $\mathtt{V}_{ABC}$ состоит соответственно из одного, двух и трех прямоугольных треугольников с вертикальными и горизонтальными катетами. В случае 4) вначале из вершины, лежащей внутри $\mathtt{V}_{ABC}$, опустим перпендикуляры на стороны $\mathbb{V}_{ABC}$

таким образом, что они не пересекали ABC. Вследствие чего $(ABC)^c_4$ будет состоять на трех прямоугольных треугольника и одного прямоугольника. Отсюда и предложения 1 получаем

Теорема 1. *Пусть ABC — треугольник в OXY, $\mathtt{V}_{ABC}$ — минимальный прямоугольник с вертикальными и горизонтальными сторонами, содержащий ABC, $\partial \mathtt{V}_{ABC}$ — граница $\mathtt{V}_{ABC}$, $(ABC)^c$ — дополнение к ABC в $\mathtt{V}_{ABC}$, $I_{\mathtt{V}_{ABC}}$ и $I_{(ABC)^c}$ — количества внушенных целых точек соответственно из $\mathtt{V}_{ABC}$ и $(ABC)^c$, а $I_{\partial ABC}$ — число целых точек на границе ∂ABC треугольника ABC без учета его целых вершин, принадлежащих $\partial \mathtt{V}_{ABC}$. Тогда количество I_{ABC} целых внутренних точек из ABC определяется равенством: $I_{ABC} = I_{\mathtt{V}_{ABC}} - I_{(ABC)^c} - I_{\partial ABC}$*

Для нахождения внутренних целых точек $I_{\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm},B^{\pm})}$ клетчатого треугольника $\mathbb{R}_{\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm},B^{\pm})}$ отрезка AB, определяемого $\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm},B^{\pm})$ достаточно уметь строить $\mathtt{L}^{\pm}(A^{\pm},B^{\pm})$ без вертикальных звеньев. Такое построение основано на алгоритме (2).

Лемма 1. *Пусть $B = (x; y)$ — произвольно фиксированная точка прямой $l_\alpha : y = \alpha x$ такая, что $x \geq q_2$, а $B^+ = (\lceil x \rceil; \lfloor y \rfloor)$ и $B^- = (\lceil x \rceil; \lfloor y \rfloor + 1)$. Тогда найдутся правая $\mathtt{L}^+(O, B^+)$ и левая $\mathtt{L}^-(O, B^-)$ аппроксимации отрезка OB без вертикальных звеньев.*

Доказательство леммы основано на представление алгоритма“вытягивания носов” (2) при $n = 2m-1$ и $n = 2m'$,а также сложения векторов по правилу треугольника в виде:

$$\begin{aligned}\overline{e}_{2m+1}(l_1;l_2) = \overline{e}_{2m-1}(l_1;l_2) + a_{2m-2}\overline{e}_{2m}(l_1+q_{2m-4};l_2+p_{2m-4}) =\\ \overline{e}_{2m-1}(l_1;l_2) + \textstyle\sum_{k=0}^{a_{2m-2}-1}\overline{e}_{2m}(l_1+q_{2m-4}+kq_{2m-3};l_2+p\to q),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\overline{e}_{2m'+2}(l_1';l_2') = a_{2m'-1}\overline{e}_{2m'+1}(l_1';l_2') + \overline{e}_{2m'}(l_1'+a_{2m'-1}q_{2m'-2};l_2'+p\to q) =\\ \textstyle\sum_{k'=0}^{a_{2m'-1}-1}\overline{e}_{2m'+1}(l_1'+k'q_{2m'-2};l_2'+k'p_{2m'-2}) + \overline{e}_{2m'}(l_1'+a_{2m'-1}q_{2m'-2};l_2'+p\to q),\end{aligned} \tag{5}$$

где $(\cdot + f(q_{i_1},...,q_{i_k}); \cdot + f(p_{i_1},...,p_{i_k})) = (\cdot + f(q_{i_1},...,q_{i_k}); \cdot + p \to q)$, $i_1,...,i_k \in \mathbb{N}_0$. Дальнейшее разложение осуществим следующим образом. В крайних частях (4) и (5) заменим m на $m-1$, а также положим $m' = m-1$ и $(l_1';l_2') = (l_1+q_{2m-4}+kq_{2m-3};l_2+p\to q)$, $k \in \sigma_{2m-2}$. Правые части вновь полученных равенств подставим в правую часть второго равенства (4), тогда получим новое представление $\overline{e}_{2m+1}(l_1;l_2)$ через векторы с меньшими индексами: $2m-3$, $2m-2$ и $2m-1$, в котором нет слагаемых в виде произведения элемента цепной на вектор с одним из указанных индексов, что является результатом второго шага процесса представления $\overline{e}_{2m+1}(l_1;l_2)$ через векторы с меньшими индексами, чем на первом шаге. Результатом первого шага является равенство, образованное крайними частями в (4). Отсутствие описанных произведений важно, ибо оно дает отсутствие целых точек внутри любого многоугольников $\mathbb{M}_k^+$, образованного вектором $\overline{e}_{2m+1}(l_1;l_2)$ и каждой из ломанных $\mathtt{L}_k^+((l_1;l_2),(l_1+q_{2m-2};l_2+p_{2m-2}))$, составленной из векторов-слагаемых с точками их приложения, взятых в естественном порядке из правой крайней части любого вновь полученного представления вектора $\overline{e}_{2m+1}(l_1;l_2)$ на k-ом шаге, в силу (1), взаимной простоты p_n и q_n при произвольном допустимом n и теоремы Пика. После любого шага каждый вектор-слагаемое из предыдущего представления разлагается в сумму векторов с индексами на одну и две единицы меньше, чем разлагаемый вектор, посредством (4) и (5) при соответствующей замене точек приложения. Этот процесс завершится на K-ом шаге, в результате которого получается представление $\overline{e}_{2m+1}(l_1;l_2)$ в виде суммы векторов с индексами 1 и 2, приложенных к соответствующим точкам. Вершины многоугольника $\mathbb{M}_k^+$ при любом $k = 1,2,...,K$ целые и $\mathbb{M}_{k=1}^+ \subset \mathbb{M}_k^+$, $\mathbb{M}_0^+ = \varnothing$. Ломанная $\mathtt{L}_K^+((l_1;l_2),(l_1+q_{2m-2};l_2+p_{2m-2}))$ состоит только из вертикальных и горизонтальных звеньев, любая её пара соседних звеньев образует угол, 90° или 270°, определяемый внутренностью $\mathbb{M}_K^+$. В результате такого разложения мы получаем все меньшие векторы-слагаемые, при помощи которых получаются звенья нужной аппроксимации $\mathtt{L}^+(O,B^+)$ подобно тому, как это делалось при построениях после (2). $\mathtt{L}^+(O,B^+)$ строится конструктивно в результате чего устанавливаются координаты всех целых её вершин, что датет ключ к

Аналогично строится процесс представления $\overline{e}_{2m+2}(l_1'; l_2')$ через векторы с меньшими индексами и без слагаемых в виде произведения элемента цепной дроби на вектор с помощью (4) и (5) при подходящем выборе точек приложения соответствующих векторов. В итоге получим множество многоугольников $\mathbb{M}_k^-$ и ломанных $\mathtt{L}_k^-((l_1'; l_2'), (l_1' + q_{2m-1}; l_2' + p_{2m-1}))$, $k = 1, 2, ..., K$, с такими же свойствами, что при построении первого процесса.

Пусть $(l_1; l_2) = (l_1'; l_2') = (0; 0)$ и $m = m'$, тогда первые равенства из (4) и (5) представляют собой *алгоритмом'вытягивания носов"*. Ломанная $\mathtt{L}_K^+(O, B_{2m-2}^+)$ принадлежит $\Delta_{q_{2m-2}}$ и лежит под l_α, а $\mathtt{L}_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ — над l_α, предполагается, что $\overline{e}_{2m+1}(0;0), \overline{e}_{2m+2}(0;0) \notin l_\alpha$. Внутри многоугольника $O\mathtt{L}_k^+(O, B_{2m-2}^+)B_{2m-2}^+B_{2m-1}^-\mathtt{L}_k^-(O, B_{2m-1}^-)$ нет целых точек по тем же причинам, что и выше. На последнем K-ом шаге многоугольник $\mathbb{S}_{OB} = O\mathtt{L}_K^+(O, B_{2m-2}^+)B_{2m-2}^+B_{2m-2}^-$ $\mathtt{L}_K^-(O, B_{2m-2}^-)$ является клетчатой областью отрезка OB, где $B_{2m-2}^- = (q_{2m-2}; p_{2m-2} + 1)$ и $B = l_\alpha \cap B_{2m+2}^+ B_{2m-2}^-$, а $\mathtt{L}_K^+(O, B_{2m-2}^+)$ и $\mathtt{L}_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ — правая и левая ступенчатые аппроксимации отрезка OB.

Метод построения $\mathtt{L}^{\pm}(O, B^+)$ конструктивен в результате чего устанавливаются координаты всех целых их вершин, что необходимо знать для нахождения внутренних тоекк в (3).

3. Прямые, $f_t : y = -\alpha \cdot x + t$, $t > 0$ и шахматная раскраска

Пусть единичные квадраты целочисленной решетки из OXY раскрашены в шахматном порядке, $f_t : y = -\alpha \cdot x + t$, $t > 0$ — семейство прямых и $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Теорема 2. *Если $\boldsymbol{U}(t)$ множество раскрашенных квадратов, принадлежащих $OA(t)B_(t)$, $A(t) = OX \cap f_t$, $B(t) = OY \cap f_t$, то разность между белыми и черными клетками из $\boldsymbol{U}(t)$ для каждого положительного иррационального α ни снизу, ни сверху, когда $t \to \infty$.*

Данная теорема представляет собой задачу, поставленную в [1].

Метод построения аппроксимации отрезка из леммы 1 дает возможность значительно расширить множество тех α, при которых справедлива теорема 2, по сравнению с результатами анонсированными в [2] – [4]. Так как такой метод аппроксимация отрезка $A(t)B_(t)$ позволяет явно определять $u(t)$ при $t = q_n$ при произвольном $n \in \mathbb{N}_0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khovanova T., Konyagin S. 2011 *Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors.* arXiv:1104.0441v1 [math.CO] (4 Apr 2011), pp.1–20.

2. Галламов М. М. *Прямые $y = -e \cdot x + t$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула, 13–18 мая 2019 г. С. 247–250.

3. Галламов М. М. *Прямые $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + s$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVII Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Наума Ильича Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров Аскольда Ивановича Виноградова, Александра Васильевича Малышева и Бориса Фаддеевича Скубенко. Тула, 23–29 сентябрь 2019 г.

4. Галламов М. М. *Прямые $y = -[a_0^{\pm}; a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, ...] \cdot x + t$ с четными a_n^+ и нечетными $a_n^- = a(\neq 1)$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные

проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVIII Международной конференции, посвященная столетию со дня рождения профессоров Бориса Максимовича Бредихина, Василия Ильича Нечаева и Сергея Борисовича Стечкина. Тула, 23–26 сентября 2020 г. С. 261–265.

———————————————————————————————

УДК 511.32

О замощениях плоскости, связанных с минимальными системами трехмерных решеток[1]

О. А. Горкуша (Россия, г. Хабаровск)
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
e-mail: 684bmts@rambler.ru

On the plane tessellations associated with minimal 3-D lattice systems

O. A. Gorkusha (Russia, г. Khabarovsk)
Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Khabarovsk division
e-mail: 684bmts@rambler.ru

В докладе речь пойдет о геометрическом приложении трехмерных цепных дробей Вороного — Минковского — одном из обобщений классических цепных дробей.

В 1896 г. Г. Вороной и Г. Минковский независимо друг от друга построили геометрическую теорию классических цепных дробей, в которой цепная дробь $\alpha = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots] \in \mathbf{R}$ ассоциируется с двумерной примитивной решеткой

$$\Lambda = \Lambda(\alpha) = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

построенной на векторах $(1, 0)$, $(-\alpha, 1)$. Если $\alpha \leqslant 1/2$, то подходящие дроби этого числа описываются множеством $\mathfrak{M}(\Lambda)$ локальных минимумов решетки:

$$\mathfrak{M}(\Lambda) = \{(P_i - \alpha Q_i, Q_i) | i \geqslant 0\},$$

где P_i, Q_i — числитель и знаменатель подходящей дроби с номером i числа α. Заметим, что каждая пара узлов $(P_i - \alpha Q_i, Q_i), (P_{.i+1} - \alpha Q_{i+1}, Q_{i+1})$ является базисом решетки и обладает свойством минимальности — внутри прямоугольника с центром в точке $(0, 0)$ и с вершинами $\pm(P_i - \alpha Q_i, Q_{i+1})$ нет ненулевых узлов решетки. Таким образом, цепной дроби соответствуют границы выпуклых оболочек точек решетки в конусах, порожденных прямыми $x = 0$, $y = 0$.

Обобщая цепные дроби на случай большей размерности (n), Г. Вороной и Г. Минковский рассматривали границы выпуклых оболочек в $(n+1)$–конусах. Развитию этого направления посвящено много работ — подробный обзор исследований до 1981 года отражен в книге [1]. Поздние результаты описаны в [2], [3]. Так, в случае $n = 3$ ([3, 4]) трехмерная цепная дробь $\mathcal{P}(\Lambda)$, ассоциированная с решеткой Λ — граница множества

$$\{(|x|, |y|, |z|) + r \big| (x, y, z) \in \Lambda \setminus \{0\},\ r \in \mathbf{R}^3_{\geqslant 0}\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке...

Для описания $\mathcal{P}(\Lambda)$ используются канонические диаграммы Вороного [2, 3, 4]. Авторы работ интерпретировали множество минимальных систем трехмерной решетки как граф на плоскости, ребрами которого являются отрезки трех направлений. Грани графа — минимальные узлы решетки, вершины — минимальные системы (такие графы сохраняют информацию о взаимном расположении минимальных систем решетки).

В нашем исследовании мы рассматриваем решетчатые замощения (назовем их $\mathcal{T}$-замощения) плоскости многоугольниками специального вида с целью установить связь таких замощений и трехмерных неприводимых максимальных решеток, повторяющихся умножением.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. J. Brentjes Multi-dimensional Continued Fraction Algorithms. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1981. 183 p.

2. O. Karpenkov Geometry of continued fractions, Algorithms and Computations in Mathematics, vol. 26. — Berlin: Heidelberg Springer, 2013, 405 p.

3. O. Karpenkov, A. Ustinov Geometry and combinatoric of Minkowski–Voronoi 3-dimensional continued fractions, https://arxiv.org/abs/1407.0135

4. А. В. Устинов Трехмерные цепные дроби и суммы Клостермана // УМН. 2015. Том 70, № 3(423). С. 107–180.

УДК 511.32

Алгоритм для вычисления квадратичной формы области Вороного второй совершенной формы от пяти переменных

О. Х. Гуломов (г. Ташкент, Узбекистан)
Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан
e-mail: otabek10@mail.ru

Algorithm for the Quadratic Form of the Voronoy Domain of the Second Perfect Form from Five Discussions

O. Kh. Gulomov (Tashkent, Uzbekistan)
Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
e-mail: otabek10@mail.ru

Задача о наименее плотных решетчатых покрытиях состоит в отыскании для каждой размерности n такой решетки Γ_n, которая дает наименьшее значение плотности $\theta_n\,(\Gamma)$ решетчатого покрытия евклидова пространстве E^n. Из однозначности соответствия между решеткой Γ_n и совершенной квадратичной формой, эта проблема сводиться к изучения совершенных форм.

Вороной получил для совершенных форм три результата. Во-первых, он доказал, что форма, отвечающая плотнейшей упаковке, является совершенной. Во-вторых, он установил, что совершенных форм от данного числа переменных конечное число. И самое главное, в-третьих, Вороной предложил метод нахождения всех совершенных форм. Этот метод опирается на так называемый совершенный полиэдр, весьма сложный многомерный многогранник, введенный Вороным. В принципе, найдя методом Вороного все совершенные формы, можно вычислить плотности для конечного числа соответствующих упаковок и выделить те, которые отвечают максимальному значению.

Классическая задача Вороного отыскания совершенных форм тесно связанна с известной проблемой Эрмита об арифметических минимумах положительных квадратичных форм. Они появились и в работах С. Л. Соболева и Х. М. Шадиметова в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул.

Здесь уместно сказать, что эти проблемы в многомерных пространствах имеют не только чисто математический интерес, но и важные приложения, например в теории кодирования.

В настоящей работы вычисляется все неэквивалентные квадратичные формы соответствующие области Вороного от пяти переменных с помощью усовершенствованного алгоритма Вороного.

В работах Вороного доказывается, что квадратичные формы, соответствующие $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ -мерным граням $\Psi_k = \Psi_k\left(\varphi_1^n\right)$ области $V^{\frac{n(n+1)}{2}}$ совершенной формы

$$\varphi_1^n = \varphi_1^n\left(x_1, ..., x_n\right) = x_1^2 + ... + x_n^2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n \qquad (3)$$

имеют вид: $-x_1x_3$ (4) $x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - ... - \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$. (5)

Следовательно, чтобы найти совершенной формы, смежные с совершенной формой ϕ_1^n, необходимо выделить среди форм $\delta_{34}x_3x_4 + ... + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$ (6) не эквивалентные относительно группы $G\left(\varphi_1^n\right)$ — целочисленных автоморфизмов формы φ_1^n где δ_{ij} равно 0 или 1 при

$$3 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Число форм достаточно большое, и равно $2^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$ (7)

А затем с помощью формулы Вороного строятся совершенные формы, смежные с совершенной формой φ_1^n.

В связи с этим предлагается следующий алгоритм. Обозначим через q число членов формы (6) так, что $q \leqslant \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Каждой переменной $x_i \quad (i = 3, ..., n)$ ставим в соответствие натуральное число l_i равное фактическому количеству переменной x_i в сумме (6), то есть сколько раз переменная x_i фактически участвует в сумме.

Будем говорить, что два натуральных числа l_i, l_j соединены (этот факт будем обозначать через $\overrightarrow{l_il_j}$), если в сумме (6) есть произведение x_ix_j.

Тогда форму (6) можно интерпретировать как представление числа $2q$ в виде суммы чисел l_i при условии, что каждое число данного представления имеет возможность для соединения с другими оставшимися числами. Такое ограничение представления числа $2q$ следует из самой природы формы $\delta_{34}x_3x_4 + ... + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$. Число натуральных чисел, участвующих в сумме представления число $2q$ не меньше 2 и не больше $n-2$.

В данной работе с помощью этого алгоритма, доказывается следующее предложение.

Теорема 1. *Число 14-мерных граней области Вороного V15$\left(\phi_1^5\right)$ совершенной формы ϕ_1^5, неэквивалентных относительно группы S3 перестановок переменных x3, x4, x5, равно 5. 1) x1x2, 2) x1x2 - x3x4, 3) x1x2 - x3x4 - x3x5, 4) x1x2 - x3x4 - x3x5 - x4x5. Каждая из этих форм вместе с $-x_1x_3$, в силу теории Вороного, определяет 14-мерную грань области Вороного V15$\left(\phi_1^5\right)$ совершенной формы ϕ_1^5.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.F. Voronoi. Some properties of positive quadratic forms. Own. cit., Vol. 2. Publishing house of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Kiev-1952, p. 171-238.

2. Kh. M. Shadimetov. Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces. /T: "Fan wa technology 2019. - 224 p.

3. Gulomov O.Kh., Shodiev S.Yu. Calculation of perfect forms in four variables using the advanced Voronoi algorithm. // Chebyshev collection, Math-Net.Ru. 2012.-13:2, p. 59-63

4. Gulomov O., Shodiyev S. On an Algorithm for Finding Integer Points on Perfect Ellipsoids. AIP Conference Proceedings 2365, 050001(2021). 050001-1-050001-6.

УДК 514.13

Об обобщениях формулы Хаццидакиса

А. В. Костин (Россия, г. Елабуга)
Елабужский институт Казанского федерального университета
e-mail:kostin_andrei@mail.ru

On generalizations of the Hazzidakis formula

A. V. Kostin (Russia, Elabuga)
Elabuga Institute of Kazan Federal University
e-mail:kostin_andrei@mail.ru

Асимптотические сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны в трёхмерном евклидовом пространстве являются чебышёвскими. Для сетевых четырёхугольников на таких сетях Хаццидакисом в работе [1], вышедшей следом за работой Чебышёва [2], найдены формулы, выражающие площадь четырёхугольника либо через знакочередующуюся сумму значений сетевых углов в вершинах четырёхугольника, либо через избыток. Аналогичные формулы имеют место и для сетевых четырёхугольников асимптотических сетей на поверхностях постоянной кривизны с индефинитной метрикой в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве [3]. Если кривизна такой поверхности равна единице, то в асимптотических координатах её элемент площади приводится к виду $sinh(z)dxdy$, а площадь сетевого четырёхугольника

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_1), A_3(x_2, y_2), A_4(x_1, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2 \tag{1}$$

через значения сетевых углов z, являющиеся решениями гиперболического уравнения с частными производными, выражается по формуле

$$S = z(A_1) - z(A_2) + z(A_3) - z(A_4). \tag{2}$$

Эта формула может быть обобщена на произвольные сетевые многоугольники. В частности, если многоугольник P получен из односвязного сетевого $2n$-угольника с вершинами A_k вырезанием находящегося внутри него односвязного $2m$-угольника с вершинами B_j, то площадь многоугольника P будет равна

$$S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{(k+1)} z(A_k) - \sum_{j=1}^{2m} (-1)^{(j+1)} z(B_j). \tag{3}$$

Если в в формуле (2) сетевые углы заменить внутренними углами сетевого четырёхугольника, то получим другое выражение для площади сетевого четырёхугольника:

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi i.$$

Здесь

$$\alpha_1 = z(A_1), \alpha_3 = z(A_3), \alpha_2 = \pi i - z(A_2), \alpha_4 = \pi i - z(A_4).$$

Комбинируя метрику Лобачевского и метрику де Ситтера, можно распространить формулы для вычисления площадей сетевых многоугольников чебышёвских сетей за ребро возврата псевдосферических поверхностей. На псевдосфере и ее псевдоевклидовых аналогах площади таких многоугольников можно выразить через значения функции Гудермана и обратной к ней функции [4], или, иначе, через значения угла параллельности, где аргументом вместо длины геодезического перпендикуляра берётся длина дуги асимптотической линии.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hazzidakis J. N. Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmasz // Crelles J. 1880. Vol. 88. s. 68-73.
2. Tchebychev P. L. Sur la coupe de vêtements// Association francaise pour l'avancement de sciences., Congres de Paris . 1878 . pp. 154-155.
3. Костин А. В. Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях // Владикавк. матем. журн. 2019. Том 21, № 1. С. 16-26.
4. Костин А. В. Асимптотические линии на псевдосферах и угол параллельности // Изв. вузов. Матем. 2021. № 6. С. 25-34.

УДК 514.13

Об одном аналоге теоремы Кези на плоскости Лобачевского

А. В. Костин (Россия, г. Елабуга)
Елабужский институт Казанского федерального университета
e-mail:kostin_andrei@mail.ru
Н. Н. Костина (Россия, г. Елабуга)
Елабужский институт Казанского федерального университета
e-mail:natnikost@mail.ru

On an analogue of the Casey theorem on the Lobachevsky plane

A. V. Kostin (Russia, Elabuga)
Elabuga Institute of Kazan Federal University
e-mail:kostin_andrei@mail.ru
N. N. Kostina (Russia, Elabuga)
Elabuga Institute of Kazan Federal University
e-mail:natnikost@mail.ru

В теореме Птолемея на евклидовой плоскости длины сторон и диагоналей вписанного четырёхугольника связаны однородным соотношением: произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон. В гиперболической геометрии аналогичную теорему доказали независимо Т.Кубота [4] и П.А.Широков [2]. Вместо длин отрезков в гиперболической версии фигурируют гиперболические синусы этих длин, поделенных на удвоенный радиус кривизны. Дж. Кези (в русскоязычной литературе такая транслитерация употребляется наряду с Кейси) [3] доказал обобщение теоремы Птолемея для плоскости Евклида. В этом обобщении вершины четырёхугольника, вписанного в некоторую окружность ω, заменяются на окружности, касающиеся этой окружности. Длины сторон и диагоналей четырёхугольника заменяются на длины отрезков касательных. При этом если две окружности касаются окружности ω одинаково – либо обе внешним образом, либо обе внутренним,– то берутся внешние касательные, если по-разному, то берутся внутренние касательные к окружностям. Гиперболическая версия теоремы Кези доказана Н.В.Абросимовым и Л.В.Микайыловой в работе [4]. В этом версии, как и в версии теоремы Птолемея для плоскости Лобачевского, также фигурируют гиперболические синусы половин длин отрезков (кривизна плоскости Лобачевского в работе берётся равной -1). "Точечные" интерпретации теоремы Кези и её гиперболического аналога приведены в работе [5]. Но в гиперболической геометрии можно привести и другой аналог теоремы Кези, в котором будут фигурировать уже не гиперболические функции длин, а сами длины, только не отрезков прямых, а дуг орициклов. При этом кроме окружностей можно рассматривать и циклы другого типа – эквидистанты и орициклы. Для выбора касательной дуги орицикла можно либо снабдить циклы ориентацией, либо рассматривать циклы двух цветов. Длины дуг касательных орициклов в таком аналоге будут связаны тем же однородным соотношением, что и длины отрезков касательных в евклидовой теореме Кези.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kubota T. On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry // Science reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, astronomy. 1912. Vol. 2. pp. 131-156.

2. Широков П. А. Этюды по геометрии Лобачевского// Изв.ф.-м.об-ва при КГУ. Серия 2. 1924. т.XXIV, вып. 1. с.26-32

3. Casey J. A sequel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples. 5th. ed., Hodges, Figgis and Co., Dublin, 1886.

4. Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A. Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т 12. С. 354–360.

5. Костин А. В. Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Том 13. С. 242–251.

———————————————————————————

УДК 514.17

Пара многогранных торов с одним и тем же остовом, у которых нет ни одной общей грани

С. А. Лавренченко (Россия, г. Москва)
Российский государственный университет туризма и сервиса
e-mail: lawrencenko@hotmail.com

A pair of polyhedral tori with the same skeleton that do not have a single face in common

S. Lawrencenko (Russia, Moscow)
Russian State University of Tourism and Service
e-mail: lawrencenko@hotmail.com

Вы должны быть готовы к неожиданностям.
—Эммануэль Шарпантье,
нобелевский лауреат по химии 2020 года

1. Введение

Геометрическая реализация абстрактной триангуляции T замкнутого d-мерного многообразия — это (геометрический) многогранник (все грани которого представлены геометрическими симплексами) в евклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant d+1$) такой, что смежности в многограннике соответствуют смежностям в триангуляции T.

Задача нахождения геометрической реализации данной абстрактной триангуляции не всегда проста, поскольку требуется, чтобы реализующий многогранник не содержал самопересечений, или, другими словами, реализующий многогранник должен представлять собой геометрическое вложение T в $\mathbb{R}^n$.

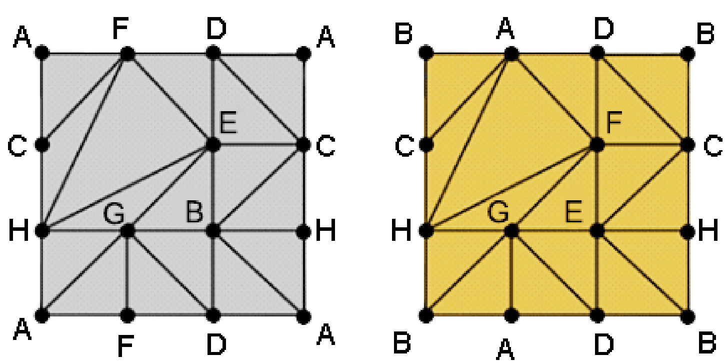


Рис. 1: Абстрактная триангуляция тора (слева) и дополнительная к ней триангуляция (справа).

К настоящему времени получены некоторые результаты в случае $d = 2$. В частности, известно, что всякая триангуляция сферы [8] или (2-мерного) тора [1] геометрически реализуема в $\mathbb{R}^3$. Настоящая работа посвящена геометрической реализации конкретной абстрактной триангуляции — правильной триангуляции тора с 8 вершинами, в которой степень каждой вершины равна 6, показанной на рис. 1 (слева); отождествите стороны фундаментального четырёхугольника попарно, как предписано метками вершин, чтобы получить тор.

Триангуляции на рис. 1 (слева) уже была ранее геометрически реализована [5] как тороидальная многогранная подвеска в $\mathbb{R}^3$, а также как 2-мерный благородный многогранник в $\mathbb{R}^4$, т.е. многогранник, являющийся *изоэдральным* (т.е. все грани подобны) и *изогональным* (т. е. все вершины подобны), свойства которого подробно изучены в [7].

Важность и значимость триангуляций тора, показанных на рис. 1, основаны на том, что их граф изоморфен полному четырехдольному графу $K_{2,2,2,2}$, являющемуся 1-мерным остовом гипероктаэдра, одного из шести правильных выпуклых 4-мерных политопов в $\mathbb{R}^4$. Триангуляция на рис. 1 найдены в 2-мерном остове гипероктаэдра в $\mathbb{R}^4$. Это соображение приводит нас к новым многогранным торам, найденным в диаграмме Шлегеля этого 4-мерного политопа. Диаграмма Шлегеля получается центральной проекцией этого политопа на одну из его фасет и является 3-мерным политопом.

Известно, что тор [4, 3, 6] допускает ровно 12 попарно различных абстрактных триангуляций с вершинно-помеченным графом $K_{2,2,2,2}$. Две из них показаны на рис. 1. (Две триангуляции считаются различными, если различны их множества граней; например, триангуляции на рис. 1 различны и, более того, не имеют ни одной общей грани.) Интересно отметить [2, 6], что эти 12 триангуляций разбиваются на 6 пар взаимодополнительных триангуляций. Две триангуляции T_1 и T_2 одной и той же поверхности с одним и тем же вершинно-помеченным графом G называются *взаимодополнительными*, если каждый цикл из трех ребер графа G ограничивает грань в T_1 тогда и только тогда, когда он не ограничивает грань в T_2, и наоборот. Пересечение множеств граней взаимодополнительных триангуляций T_1 и T_2 пусто; сверьтесь с рис. 1, на котором представлена пара взаимодополнительных триангуляций тора с вершинно-помеченным графом $K_{2,2,2,2}$. Следует подчеркнуть, что мы реализуем геометрически *все* 12 триангуляций тора, используя в качестве 1-мерного остова одну и ту же геометрическую реализацию графа $K_{2,2,2,2}$, найденную в $\mathbb{R}^3$. Эта конструкция дает пример двух 2-мерных многогранных торов в 3-мерном пространстве (оба без самопересечений), имеющих общий 1-мерный остов, но не имеющих ни одной общей грани; этот пример оправдывает эпиграф к этой работе.

2. Новый тороидальный многогранник

В этом разделе мы строим многогранник, который является новой геометрической реализацией (в $\mathbb{R}^3$) абстрактной триангуляции тора, показанной на рис. 1 (слева), что дает новые тороидальные многогранники в $\mathbb{R}^3$. Мы используем 4-мерный гипероктаэдр в $\mathbb{R}^3$, который фактически содержит в своем 2-мерном остове все 12 геометрических триангуляций с вершинно-помеченным графом $K_{2,2,2,2}$, являющимся 1-мерным остовом гипероктаэдра; в частности, гипероктаэдр содержит пару взаимодополнительных триангуляций, изображенных на рис. 1. Нам нужно только спроецировать эти 12 триангуляций из $\mathbb{R}^4$ в одну из трехмерных граней (граничных тетраэдров) гипероктаэдра или, другими словами, нам нужно реализовать 12 триангуляций геометрически в диаграмме Шлегеля гипероктаэдра.

Диаграмма Шлегеля — это центральная проекция 4-мерного политопа из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^3$. Конкретно для гипероктаэдра, построение происходит следующим образом. Зафиксируем правильный тетраэдр $ABCD$ (внешний тетраэдр) в $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 2), центр описанной сферы которого находится в точке $(0, 0, 0)$. Также зафиксируем его гомотетичный образ $EFGH$ (внутренний тетраэдр) относительно $(0, 0, 0)$ с отрицательным коэффициентом $-1/k$ ($k > 1$), выбранным так, чтобы $EFGH$ лежал строго внутри $ABCD$. Затем соединим два тетраэдра всеми возможными ребрами, кроме AE, BF, CG и DH. Граф, полученный таким образом, представляет собой $K_{2,2,2,2}$. Наконец, мы добавляем 16 граней триангуляции из рис. 1 (слева). В следующих двух абзацах мы назначаем координаты 8-ми вершинам в $\mathbb{R}^3$ и определяем диапазон k.

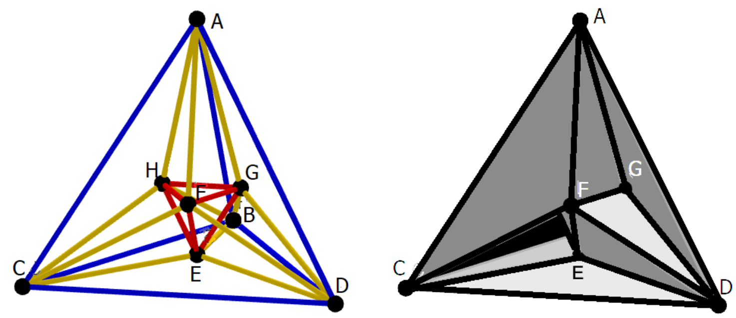


Рис. 2: Геометрическая реализация 1-мерного остова (слева) и вид многогранника с удаленной внутренностью грани ACD (справа).

Координаты вершин можно задать следующим образом (этот выбор не единственен):

$$A=(0,0,3), B=(\sqrt{8},0,-1), C=(-\sqrt{2},\sqrt{6},-1), D=(-\sqrt{2},-\sqrt{6},-1),$$
$$E=(0,0,-3/k), F=(-\sqrt{8}/k,0,1/k), G=(\sqrt{2}/k,-\sqrt{6}/k,1/k), H=(\sqrt{2}/k,\sqrt{6}/k,1/k). \quad (1)$$

Теперь определим диапазон значений параметра k, при которых вершины внутреннего тетраэдра лежат на сфере, вписанной во внешний тетраэдр. Радиус сферы, описанной вокруг внешнего тетраэдра, равен 3, а радиус сферы, описанной вокруг внутреннего тетраэдра, равен $3/k$. Теперь определим диапазон значений параметра k, при которых вершины внутреннего тетраэдра лежат на сфере, вписанной во внешний тетраэдр. Радиус сферы, описанной вокруг внешнего тетраэдра, равен 3, а радиус сферы, описанной вокруг внутреннего тетраэдра, равен $3/k$. Чтобы найти такое значение k, чтобы последняя сфера оказалась вписанной во внешний тетраэдр, заметим сначала, что сторона внешнего тетраэдра имеет длину $2\sqrt{6}$, поэтому радиус сферы, вписанной во внешний тетраэдр, равен 1. Чтобы последняя сфера была вписана во внешний тетраэдр, ее радиус должен быть равен 1, так что $3/k=1$, и, следовательно, $k=3$. Таким образом, k должно быть больше 3, если мы хотим, чтобы внутренний тетраэдр полностью лежал строго внутри внешнего тетраэдра.

Таким образом, восемь вершин A, B, C, D, E, F, G, H определяют диаграмму Шлегеля гипероктаэдра в $\mathbb{R}^3$ с координатами, указанными в (1), и поэтому 2-мерный остов гипероктаэдра целиком реализуется в $\mathbb{R}^3$ геометрически. Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Каждая из двенадцати триангуляций 2-мерного тора с полным четырехдольным вершинно-помеченным графом $K_{2,2,2,2}$ реализуется геометрически с одним и тем же 1-мерным остовом в 3-мерном пространстве с координатами восьми вершин, заданными в (1).* □

Мы реализовали конструкцию с помощью GeoGebra, взяв $k=4$. В частности, на рис. 3 представлены 3D модели новых тороидальных многогранников, которые являются геометрическими реализациями абстрактных триангуляций на рис. 1 соответственно. Мы добавляли грани по одной, проверяя, чтобы каждая вновь добавленная грань не имела пересечений с уже добавленными гранями, что сделало GeoGebra своеобразным инструментом экспериментальной математики. Итак, на рис. 3 представлены два многогранных (2-мерных) тора (оба без самопересечений) с одним и тем же 1-мерным остовом в 3-мерном пространстве, с тем интересным свойством, что их пересечение (как множеств точек) — лишь их общий 1-мерный остов.

Следствие 1. *Существуют тороидальные многогранники с одним и тем же 1-мерным остовом в 3-мерном пространстве, не имеющие ни одной общей грани.* □

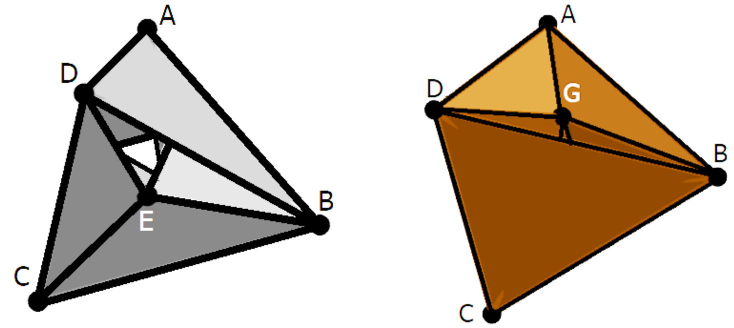


Рис. 3: Слева: геометрическая реализация абстрактной триангуляции на рис. 1 (слева). Справа: геометрическая реализация абстрактной триангуляции на рис. 1 (справа), $k = 4$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Archdeacon D., Bonnington P., Ellis-Monaghan J. How to exhibit toroidal maps in space // Discrete & Computational Geometry. 2007. Vol. 38, P. 573-594.

2. Lavrenchenko S. A. All self-complementary simplicial 2-complexes homeomorphic to the torus or the projective plane // Baku International Topological Conference: Abstracts. Part II (Baku, 3-9 October 1987) — Baku, 1987. P. 159.

3. Лавренченко С. А. Перечисление в явном виде всех автоморфизмов неприводимых триангуляций тора и всех укладок на тор помеченных графов этих триангуляций / Харьковский институт радиоэлектроники им. акад. М.К. Янгеля. Харьков, 1987. Деп. в УкрНИИНТИ 01.10.1987, № 2779-Ук87. 57 с.

4. Lavrenchenko S. A. The number of triangular packings of a vertically labeled graph on a torus // Journal of Soviet Mathematics. 1991. Vol. 54, P. 719-728.

5. Lawrencenko S. Polyhedral suspensions of arbitrary genus // Graphs and Combinatorics. 2010. Vol. 26, P. 537-548.

6. Lawrencenko S., Magomedov A. M. Generating the triangulations of the torus with the vertex-labeled complete 4-partite graph $K_{2,2,2,2}$ // Symmetry. 2021. Vol. 13(8), 1418.

7. Маслова Ю. В., Петров М. В. Многогранник Лавренченко рода один // Герценовские чтения «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»: сборник трудов конференции (Санкт-Петербург, 09-13 апреля 2018 г.) — Санкт-Петербург: 2018. С. 162-168.

8. Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen, in Enzykl. Math. Wiss. Part 3AB12 (Geometrie). 1922. P 1-139.

УДК 514.172.45

О характеристических уравнениях для RR-многогранников второго типа

В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова
e-mail: geometry@mail.ru

On characteristic equations for RR-polyhedra of the second type

V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)
Platov South-Russian State Polytechnic University
e-mail:geometry@mail.ru

В настоящем докладе получены уравнения, названные *характеристическими*, которые применены для доказательства существования *несоставных* RR-многогранников в E^3 второго типа.

Ранее с помощью характеристического уравнения было доказано существование RR-многогранника с правильными гранями одного типа, связанного с икосаэдром, [1].

К RR-многогранникам второго типа отнесены такие многогранники в E^3, правильные грани которых являются многоугольниками различного типа, а к несоставным — такие RR-многогранники второго типа, которые нельзя разбить плоскостями на части, представляющие собой ромбические пирамиды и выпуклые многогранники с правильными гранями.

В докладе найдены все несоставные RR-многогранники второго типа в E^3, не имеющие условных (фиктивных) рёбер. В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует несоставной RR-многогранник с тридцатью одной гранью и одной ромбической вершиной (тупоугольной), принадлежащий ко второму типу.*

Доказательство основано на выводе характеристического уравнения:

$$\frac{1+4\cos\lambda-4\cos^2\lambda}{2}=\cos^2\sigma+\sin^2\sigma\cos\left(\arccos\left(\frac{4\cos\gamma-1}{3}\right)-2\arccos\left(\frac{1-\cos\sigma}{\sqrt{3}\sin\sigma}\right)\right), \quad (1)$$

где λ,γ,σ являются функциями тупого угла α ромбов ромбической вершины многогранника. Компьютерное решение этого уравнения даёт единственный корень $\alpha=112,17^\circ\ldots$.

Теорема 2. *Существует несоставной RR-многогранник с двадцатью пятью гранями и с одной 4-ромбической вершиной, принадлежащий ко второму типу.*

Характеристическое уравнение для этого многогранника имеет вид:

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\beta}{2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta\, cos\left(2\arccos\left(\frac{1}{3}\frac{(1+2\sin\frac{\beta}{2})\sqrt{3}}{\sqrt{3+4\sin\frac{\beta}{2}-4\sin^2\frac{\beta}{2}}}\right)-2\arccos\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}+\right.\\ \left.+\arccos\frac{-1+4\sin\frac{\beta}{2}-4\sin^2\frac{\beta}{2}}{3+4\sin\frac{\beta}{2}-4\sin^2\frac{\beta}{2}}\right),\end{aligned} \quad (2)$$

где:

$$\cos\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\beta}{2} - 1}{\sqrt{3}\cos\frac{\beta}{2}} + \arccos\frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\sqrt{3}}\right). \qquad (3)$$

В уравнениях (2) и (3) угол β может быть выражен через острый угол α ромбов ромбической вершины. С помощью компьютерного вычисления получаем единственный корень: $\beta = 114,75^\circ\ldots$, и острый угол $\alpha = 73,10^\circ\ldots$.

Замечание 1. *Отметим, что ранее автором доказана полнота перечня из двадцати трёх RR-многогранников с правильными гранями одного типа, (см., например, [2]); а в работе [3] были найдены все пятьдесят четыре составных RR-многогранника второго типа.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин В. И. О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром //Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 4(80). С. 252–263.

2. Субботин В. И. Существование и полнота перечисления трёхмерных RR-многогранников // III Международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике», посвященная памяти профессора М.Т.Терёхина: тезисы докладов международной конференции (Рязань, 26-30 апреля 2021 г.) — Рязань, 2021. С. 15.

3. Субботин В. И. О составных *RR*-многогранниках второго типа //Владикавказский математический журнал. 2022 . Том 24. Выпуск 1. С. 100–108.

———————————————————————————————

Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и теория приближений

УДК 511.482

О вычислительных аспектах использования теоретико-числовых сеток в задачах интегрирования[1]

Ю. А. Басалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
А. Н. Басалова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: joy_of_life@mail.ru

On computational aspects of using number-theoretic grids in integration problems

Yu. A. Basalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
A. N. Basalova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: joy_of_life@mail.ru

Н. М. Коробовым была предложена [2] следующая квадратурная формула

$$\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(x_1,\dots,x_s)dx_1\dots dx_s = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k}{p},\left\{\frac{ka_2}{p}\right\},\dots\left\{\frac{ka_s}{p}\right\}\right) + \Delta(s,r,p,a_2,\dots,a_s),$$

где $\Delta(s,r,p,a_2,\dots,a_s)$ – погрешность квадратурной формулы, которая зависит от размерности s подынтегральной функции, параметра класса функций E_s^r, количества p точек сетки, и оптимальных коэффициентов $a_2,\dots,a_s$.

При прочих равных условиях, наибольшее значение погрешности достигается на следующих крайних функциях из классов E_s^r [5]:

- при $r=2$: $H(x_1,\dots,x_s)=\prod\limits_{j=1}^{s}3(1-2x_j)^2$,
- при $r=4$: $B_4(x_1,\dots,x_s)=\prod\limits_{j=1}^{s}\left[1+\frac{\pi^4}{45}-\frac{2\pi^4}{3}x_j^2(1-x_j)^2\right]$,
- при $r=6$: $B_6(x_1,\dots,x_s)=\prod\limits_{j=1}^{s}\left[1+\frac{(2\pi)^6}{6!}\left(\frac{1}{42}-\frac{1}{2}x_j^2+\frac{5}{2}x_j^4-3x_j^5+x_j^6\right)\right]$,
- при $r=8$: $B_8(x_1,\dots,x_s)=\prod\limits_{j=1}^{s}\left[1+\frac{(2\pi)^8}{8!}\left(\frac{1}{30}-\frac{2}{3}x_j^2+\frac{7}{3}x_j^4-\frac{14}{3}x_j^6+4x_j^7-x_j^6\right)\right]$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 22-21-00544

- при $r = 10$: $B_{10}(x_1, \ldots, x_s) = \prod_{j=1}^{s} \left[1 + \frac{(2\pi)^{10}}{10!} \left(\frac{5}{66} - \frac{3}{2}x_j^2 + 5x_j^4 - 7x_j^6 + \frac{15}{2}x_j^8 - 5x_j^9 + x_j^{10}\right)\right]$,

Одной из первых опубликованных работ, в которой можно найти таблицы оптимальных коэффициентов, является работа 1963 года [4]. В этой работе представлены результаты вычисления погрешности только для H-функции. Нами были проведены численные эксперименты с использованием чисел большой точности, также для полиномов $B_4, ..., B_{10}$. Их результаты приведены в таблице ниже (для размерности $s = 4$).

p	a_2, a_3, a_4	H	B_4	B_6	B_8	B_10
307	$42, 229, 101$	9.06e-02	3.04e-03	5.29e-05	1.27e-06	3.37e-08
523	$178, 304, 243$	4.12e-02	8.26e-04	8.98e-06	1.26e-07	1.90e-09
701	$82, 415, 382$	2.81e-02	3.06e-04	1.42e-06	7.98e-09	4.82e-11
1069	$71, 765, 865$	1.50e-02	7.65e-05	1.57e-07	3.83e-10	1.00e-12
1543	$128, 954, 215$	8.37e-03	2.43e-05	2.61e-08	3.44e-11	4.99e-14
2129	$766, 1281, 1906$	5.00e-03	7.02e-06	3.86e-09	2.74e-12	2.23e-15
3001	$174, 266, 1269$	3.03e-03	2.54e-06	8.24e-10	3.24e-13	1.37e-16
4001	$113, 766, 2537$	2.00e-03	1.14e-06	2.38e-10	6.52e-14	2.08e-17
5003	$792, 1889, 191$	1.48e-03	2.40e-06	1.94e-09	1.84e-12	1.78e-15
6007	$1351, 5080, 3086$	1.01e-03	3.07e-07	3.04e-11	3.54e-15	4.43e-19
8191	$2488, 5939, 7859$	6.22e-04	1.66e-07	1.98e-11	3.20e-15	5.73e-19
10007	$1206, 3421, 2842$	4.86e-04	1.30e-07	1.29e-11	1.55e-15	2.00e-19
20039	$19668, 17407, 14600$	2.76e-04	1.69e-07	4.33e-11	1.19e-14	3.31e-18
28117	$17549, 1900, 24455$	1.08e-04	9.26e-09	3.18e-13	1.32e-17	5.88e-22
39029	$30699, 34367, 605$	7.70e-05	8.57e-09	3.67e-13	1.87e-17	1.01e-21
57091	$52590, 48787, 38790$	5.62e-05	1.25e-09	1.05e-14	1.10e-19	1.30e-24
82001	$57270, 58903, 17672$	3.06e-05	8.25e-10	8.77e-15	1.13e-19	1.56e-24
100063	$92313, 24700, 95582$	1.87e-05	3.22e-10	1.89e-15	1.28e-20	9.20e-26

В работе [1] в 1990 году был построен другой ряд оптимальных коэффициентов и проведены численные эксперименты по оценке максимальной погрешности при использовании этих коэффициентов. Их особенностью является то, что $p = 2^n$, а коэффициенты a_i строятся итеративно. Результаты их пересчета приведены в таблице ниже (для размерности $s = 4$).

p	a_2, a_3, a_4	H	B_4	B_6	B_8	B_10
128	$45, 23, 57$	3.96e-01	1.69e-01	3.48e-02	8.16e-03	1.99e-03
256	$45, 23, 57$	2.27e-01	1.36e-01	3.18e-02	7.84e-03	1.96e-03
512	$211, 233, 199$	5.15e-02	2.00e-03	4.51e-05	1.20e-06	3.32e-08
1024	$211, 233, 199$	2.29e-02	3.70e-04	2.00e-06	1.21e-08	7.73e-11
2048	$813, 233, 199$	9.43e-03	1.16e-04	4.84e-07	2.23e-09	1.06e-11
4096	$1235, 1815, 199$	3.98e-03	5.40e-05	2.08e-07	8.59e-10	3.66e-12
8192	$1235, 2281, 3897$	2.09e-03	4.02e-05	1.76e-07	7.80e-10	3.47e-12
16384	$6957, 5911, 4295$	4.51e-04	4.24e-07	1.30e-10	4.59e-14	1.71e-17
32768	$6957, 5911, 12089$	1.40e-04	4.74e-08	5.87e-12	8.12e-16	1.15e-19
65536	$25811, 5911, 12089$	5.84e-05	4.86e-09	1.30e-13	4.00e-18	1.30e-22
131072	$25811, 5911, 53447$	2.11e-05	2.61e-09	8.92e-14	3.15e-18	1.12e-22
262144	$25811, 5911, 53447$	6.19e-06	4.37e-11	9.82e-17	2.35e-22	5.71e-28
524288	$236333, 5911, 53447$	3.01e-06	1.68e-11	3.21e-17	6.70e-23	1.45e-28
1048576	$236333, 518377, 53447$	1.35e-06	5.84e-12	7.77e-18	1.14e-23	1.74e-29
2097152	$236333, 530199, 53447$	4.50e-07	9.58e-13	4.42e-19	2.13e-25	1.04e-31
4194304	$1860819, 1566953, 2043705$	2.01e-07	3.98e-13	1.68e-19	7.33e-26	3.20e-32

В работе [6] был также построен ряд оптимальных коэффициентов и проведены численные эксперименты по оценке максимальной погрешности. При этом, для отбора коэффициентов использовались все значения $B_4, ..., B_{10}$, а эксперименты проводились с помощью стандартных типов с плавающей запятой. Результаты наших экспериментов приведены в таблицах ниже (для размерности $s = 4$). Жирным выделены отличающиеся значения.

p	a_2, a_3, a_4	H	B_4	B_6	B_8	B_10
311	52 , 216 , 36	1.39e-01	8.21e-03	2.01e-04	5.26e-06	1.42e-07
421	279, 377, 354	5.63e-02	5.78e-04	2.57e-06	1.39e-08	8.28e-11
821	470, 51, 161	2.26e-02	1.84e-04	5.40e-07	1.87e-09	6.97e-12
1151	1060, 224, 334	1.51e-02	9.75e-05	2.28e-07	6.10e-10	1.72e-12
1621	1489, 1214, 231	9.94e-03	2.24e-05	2.10e-08	2.27e-11	2.61e-14
3361	2672, 820, 3029	2.84e-03	3.52e-06	1.67e-09	1.00e-12	**6.74e-16**
4091	1781, 1436, 641	2.12e-03	1.87e-06	6.44e-10	2.73e-13	**1.26e-16**
8741	4626, 1908, 6739	9.92e-04	7.53e-07	1.78e-10	5.35e-14	**1.84e-17**
16301	11095, 10174, 12406	2.67e-04	7.98e-08	8.54e-12	1.04e-15	**1.30e-19**
19381	15885, 11986, 18047	1.76e-04	1.26e-08	3.45e-13	**1.17e-17**	**4.34e-22**
60961	6790, 17584, 33722	6.66e-05	8.68e-09	3.70e-13	**1.88e-17**	**1.01e-21**
62141	25795, 38338, 16836	3.29e-05	8.62e-10	**8.35e-15**	**9.55e-20**	**1.17e-24**
99241	17908, 48793, 67280	3.06e-05	7.12e-10	**5.72e-15**	**5.51e-20**	**5.67e-25**
114041	97866, 20571, 35713	1.17e-05	9.68e-11	**2.40e-16**	**7.05e-22**	**2.28e-27**
129341	15524, 32293, 120157	1.29e-05	7.84e-11	**1.78e-16**	**4.50e-22**	**1.19e-27**
247031	84389, 93653, 20234	3.17e-06	4.46e-12	**2.24e-18**	**1.45e-24**	**1.07e-30**
262231	102490, 12933, 187696	2.69e-06	2.39e-12	**7.89e-19**	**3.00e-25**	**1.20e-31**
366941	342458, 202636, 272073	1.77e-06	1.05e-12	**2.00e-19**	**4.53e-26**	**1.11e-32**
522961	99896, 69014, 27681	9.07e-07	3.18e-13	**4.31e-20**	**8.25e-27**	**1.83e-33**
1000381	285112, 893627, 745858	3.92e-07	2.05e-13	**3.97e-20**	**9.24e-27**	**2.28e-33**
1541291	1042613, 151289, 157217	2.02e-07	2.81e-14	**1.25e-21**	**6.57e-29**	**3.72e-36**

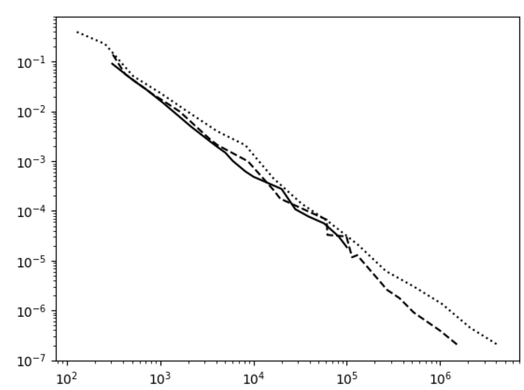


Рис. 1: Сравнение погрешностей H-функции. Сплошной график – [4], точечный график – [1], пунктирный график – [6].

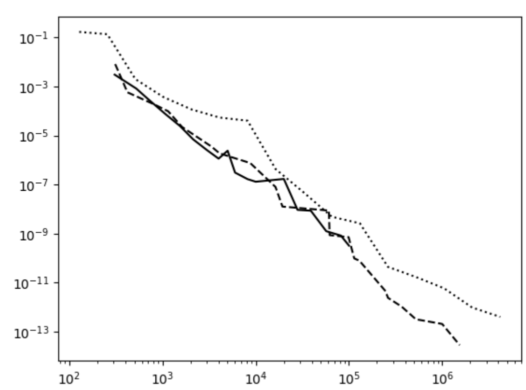


Рис. 2: Сравнение погрешностей B_4-функции. Сплошной график – [4], точечный график – [1], пунктирный график – [6].

Во-первых, отметим, что коэффициенты из работ [4] и [6] дают сравнимые погрешности вычисления. Коэффициенты из статьи [1] дают несколько большую погрешность, однако надо учесть, что в этом случае $p = 2^n$.

Во-вторых, использование значений $B_4, ..., B_{10}$ для оценки качества оптимальных коэффициентов для небольших размерностей неэффективно, так как значения достигаемых на них погрешностей быстро становятся меньше вычислительной погрешности стандартных типов с плавающей запятой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. М. Добровольский, Н. Л. Клепикова, Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов, Препринты ИПФ АН СССР, 1990, №63, 29 с.
2. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
3. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83–90.
4. Салтыков А. И., Таблицы для вычисления кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Том 3. № 1. С. 181–186;
5. Hua Loo Keng, Wang Yuan, Applications of Number Theory to Numerical Analysis – Springer–Verlag Berlin, 1981.
6. Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N., Temirgalieva Zh. N., Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 2009, Vol. 49, No. 1, pp. 14–25.

УДК 51-7

Математические зависимости характеристик процесса фрикционного взаимодействия и износа гетерофазных металлических систем[1]

А. Д. Бреки (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский политехнический универ-ситет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН
e-mail: albreki@yandex.ru
А. А. Калинин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: antony-ak@mail.ru
И. В. Минаев (Россия, г. Тула)
ООО НПП «Телар»
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

[1]Работа выполнена по проекту №11.6682.2017/8.9.

Mathematical dependences of the characteristics of the process of friction interaction and wear of heterophase metal systems

A. D. Breki (Russia, St. Petersburg)
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences
e-mail: albreki@yandex.ru
A. A. Kalinin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: antony-ak@mail.ru
I. V. Minaev (Russia, Tula)
NPP Telar LLC
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru
N. N. Dobrovolsky (Russia, Tula)
Tolstoy Tula State Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tolstoy Tula State Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

1. Введение

Известно, что соприкосновение прижатых друг к другу реальных тел происходит всегда по некоторой площадке, размеры которой зависят от действующих нагрузок, материалов металлических систем тел из которых они изготовлены, их структуры, свойств дисперсности фазовых и структурных составляющих и других факторов. В частности, в случае контакта шара и пластины имеет место быть площадка в форме круга. Приведению одного из тел во вращение по другому телу препятствуют силы трения скольжения, распределенные по площадке соприкосновения и определяющие в своей совокупности так называемое трение верчения [1, 2, 3, 4].

Совокупность этих сил может быть приведена к паре, которая уравновешивается парой, приложенной к телу и стремящейся повернуть его вокруг оси, перпендикулярной к площадке соприкосновения. Определение предельной величины момента пары трения верчения представляет собой сложную задачу, так как этот момент зависит от распределения давлений по площадке соприкосновения, а последние в свою очередь от формы поверхностей и упругих свойств прижатых друг к другу тел. Предельную величину момента трения верчения принимают пропорциональной прижимающей силе N и определяют формулой [1, 2]:

$$M_{\textit{тв}}^{\textit{пр}} = f_{\text{тв}} \cdot N \tag{1}$$

где $f_{\text{тв}}$ — коэффициент трения верчения, имеющий размерность длины;
N — нормальная нагрузка; $M_{\textit{тв}}^{\textit{пр}}$ — предельная величина момента трения верчения (установившееся значение момента в процессе трения).

Коэффициент трения верчения в свою очередь зависит от коэффициента трения скольжения f.

Согласно теоретическим выводам академика Л.А. Галина в сложном случае соприкосновения тела, ограниченного поверхностью вращения, с телом, ограниченным плоской поверхностью, момент трения верчения определяется из соотношения [2]:

$$M_{\textit{тв}}^{\textit{пр}} = \frac{3\pi}{16} \cdot f \cdot N \cdot a, \tag{2}$$

где a — радиус пятна контакта вследствие упругих деформаций; f — коэффициент трения скольжения.

Известно, что в случае контакта шара с упругим полупространством радиус области контакта можно приблизительно определить с использованием формулы Герца [3]:

$$a = \left(\frac{3NR}{4E^*}\right)^{1/3}, \tag{3}$$

где R — радиус шара, а E^* определяется из соотношения:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}, \tag{4}$$

где E_1 и E_2 — модули упругости (Юнга) для шара и тела ограниченного плоскостью соответственно; μ_1 и μ_2 — коэффициенты Пуассона для шара и тела ограниченного плоскостью.

В границах данной работы исследован процесс трения верчения шара из стали ШХ15 по плоской поверхности призмы из порошковой стали 10Р6М5-МП. Радиус шара составлял $R \approx 6,35 \times 10^{-3}$ м. Модули упругости сталей принимались приблизительно равными $E_1 \approx E_2 \approx 2,1 \times 10^5$ МПа. Коэффициенты Пуассона также принимались приблизительно равными $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 0,3$. Соответственно, при подстановке исходных данных в (4) имеем $E^* \approx 1,154 \times 10^5$ МПа.

Подставляя значения параметров в (3) получаем зависимость радиуса контакта от нормальной нагрузки тел из сталей ШХ15 и 10Р6М5-МП:

$$a = 3,456 \cdot 10^{-5} N^{1/3}. \tag{5}$$

Справедливость формул (3) и (5) можно принять в первом приближении при трении верчения покоя (отличаем от трения покоя при линейном предварительном смещении). При реализации трения верчения идёт процесс изнашивания и изменение радиуса контакта происходит в соответствии с закономерностью изнашивания во времени. В связи с этим изменение радиуса контакта при трении верчения шара по плоскости во времени может быть выражено следующим образом:

$$a_w(N,t) = \triangle\, a(N,t) + 3,456 \cdot 10^{-5} N^{1/3}, \tag{6}$$

где $a_w(N,t)$ — радиус пятна износа; $\triangle\, a(N,t)$ — приращение радиуса контакта вследствие износа [4].

Необходимы экспериментальные исследования для выявления (6) а также проверки, закона (1) и его модификации (2) для трения верчения с изнашиванием шара из стали ШХ15 по плоской поверхности призмы из стали 10Р6М5-МП порошкового производства.

2. Материалы и методы исследования

Исследование в условиях трения верчения по схеме «шар – плос-кость» осуществляли на машине трения ПБД-40 (рис.1, а) по методикам [4, 14, 15, 18].

В качестве вращающегося образца использовался шарик стали марки ШХ-15, диаметром 12,7 мм. В качестве неподвижного контртела использовалась прямоугольная призма из стали 10Р6М5-МП. Образцы зажимались в специальную струбцину, трение осуществляли по грани призмы с наибольшей площадью. Перед началом испытания шар приво-дили в контактное взаимодействие с плоскостью образца согласно схеме (рис.1, б). Далее шар прижимался к призме с силами 145Н, 195Н и 235Н. Далее запускали движение шара, зажатого в цанге с частотой вращения 850 об/мин. Время одного испытания при одной нагрузке составляло 600 с (10 мин). Момент трения фиксировался в процессе эксперимента с помощью осциллографа и записывался на компьютер. Радиусы пятна контакта измеряли с помощью микроскопа после завершения каждого испытания.

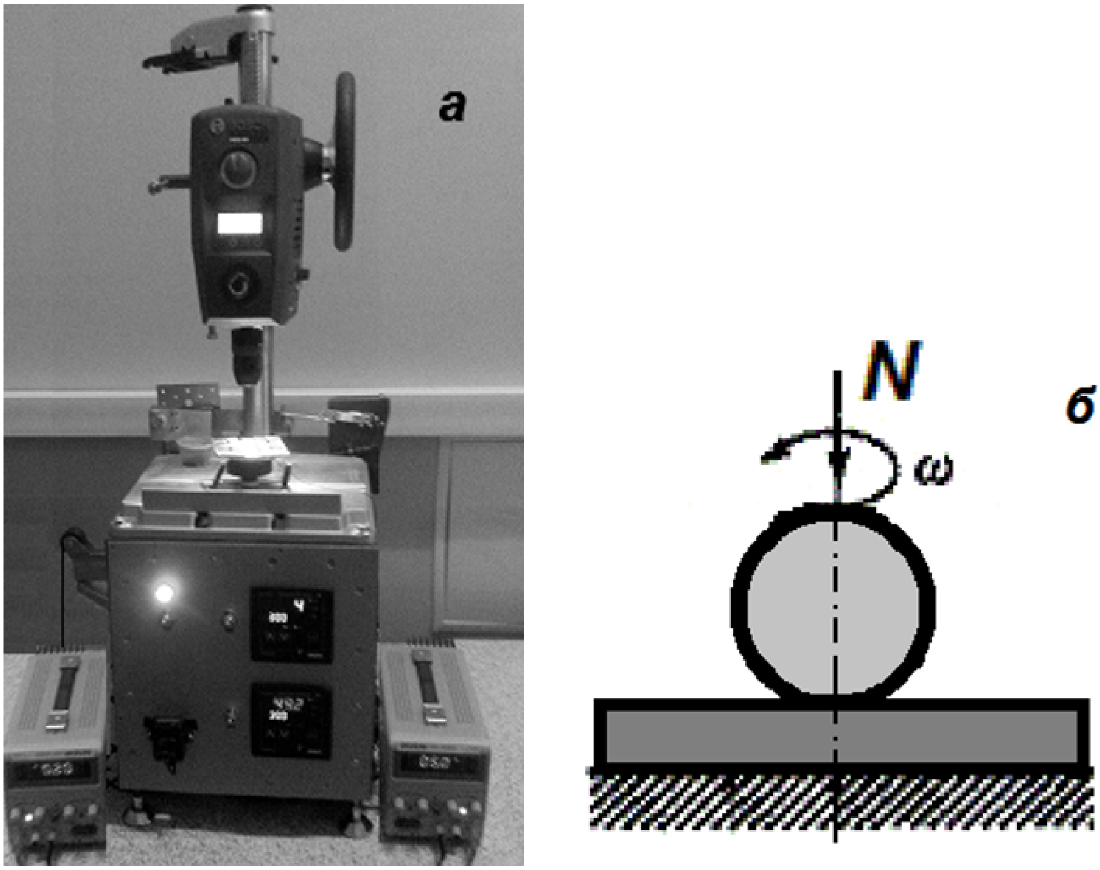


Рис. 1: Испытательное оборудование: а — машина трения ПБД-40; б — схема испытаний

3. Результаты и их обсуждение

Зависимости радиуса пятна износа на шаре при разных нагрузках в зависимости от времени показаны на рис. 2.

При нагрузке в 145 Н зависимость аналитически выражается следующим образом:

$$a_w(t) = \frac{0,0000002t + 0,0007}{1 + \exp(-0,14(t-30))} + \left(1,81 \cdot 10^{-4}\right). \tag{7}$$

Второе слагаемое в (7) есть результаты расчёта по формулам (3) – (5), а первое слагаемое определено экспериментальными данными по пятну износа на шаре [4, 18].

Зависимость $M_{тв}(t)$ — момента трения верчения от времени, при нагрузке 145Н приведена на рис. 3.

При нагрузке в 145 Н зависимость $M_{тв}(t)$ аналитически выражается следующим образом:

$$M_{тв}(t) = \frac{0,0285}{1 + \exp(-0,12(t-35))}. \tag{8}$$

Результаты проведенных экспериментальных исследований [4, 18] позволили получить аналитическую зависимость радиуса пятна износа от нагрузки и времени в виде:

$$a_w(N,t) = \frac{0,0000002t + (5,6 \cdot 10^{-5}) \cdot \sqrt{N}}{1 + \exp(-0,14(t-30))} + 3,456 \cdot 10^{-5} N^{1/3}. \tag{9}$$

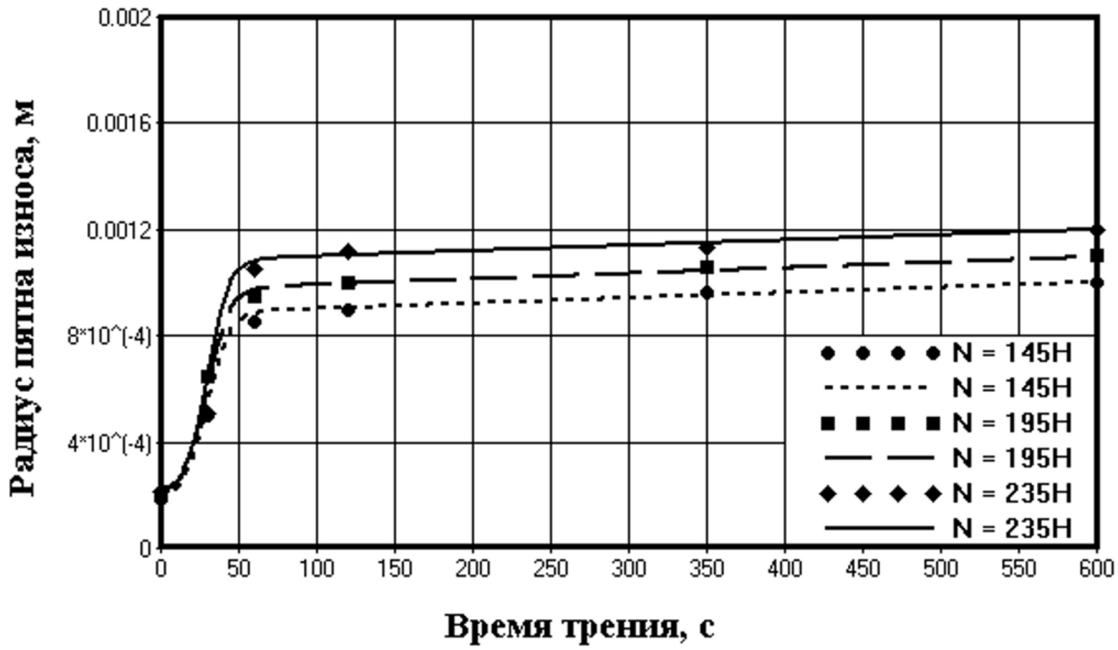


Рис. 2: Изменение радиуса контакта вследствие изнашивания

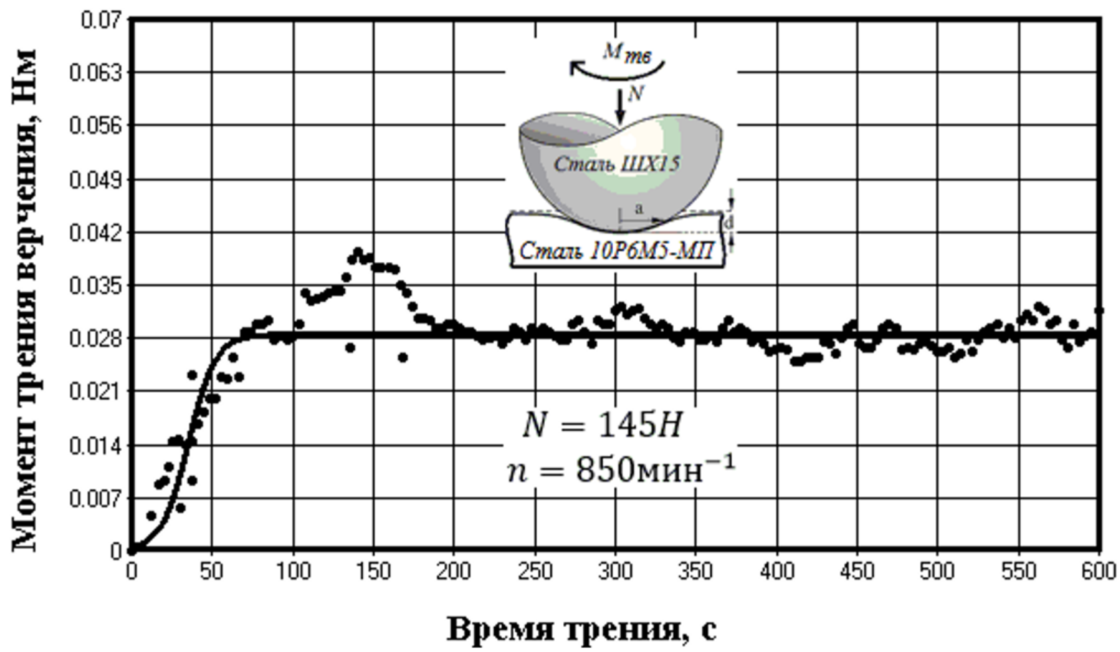


Рис. 3: Зависимость момента трения верчения от времени при нагрузке 145Н

График зависимости радиуса пятна износа от нагрузки и времени (функции (9)) приведён на рис. 4.

В результате выполненных исследований установлено [4, 18] , что зависимость аналитически можно выразить следующим образом:

$$M_{тв}(N,t) = \frac{(2,21 \cdot 10^{-4}) \cdot N}{1 + \exp(-0,12(t-35))}. \tag{10}$$

График функции (10) приведён на рис. 5.

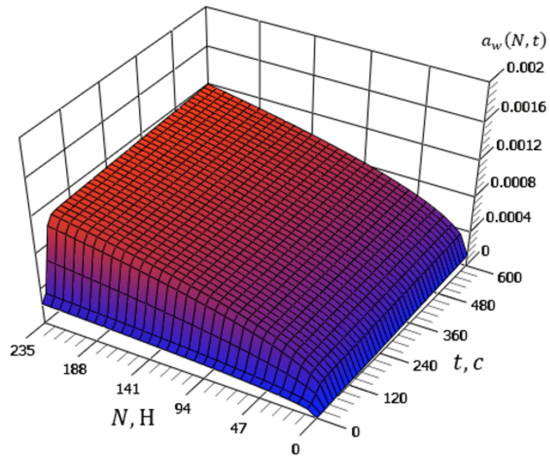


Рис. 4: График зависимости радиуса пятна износа (контакта) от нагрузки и времени

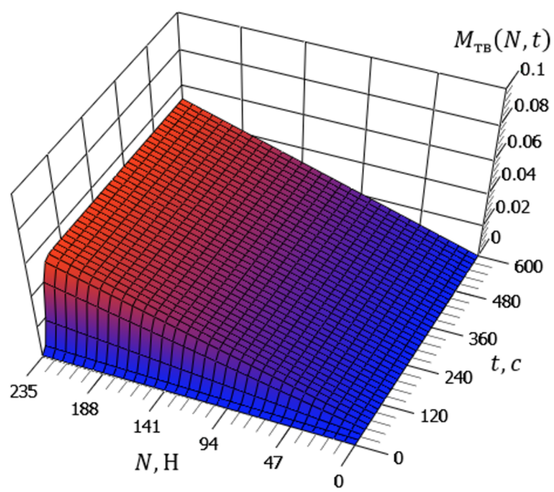


Рис. 5: График зависимости момента трения верчения от нагрузки и времени фрикционного взаимодействия

Полученные зависимости можно использовать для анализа процессов фрикционного взаимодействия и износа металлических сплавов с различной дисперсностью фазовых и структурных составляющих.

4. Выводы

На основании проведённого исследования можно сделать следующие основные выводы:

1. Исследован процесс фрикционного взаимодействия гетерофозных металлических систем на примере трения верчения шара из конструкционной шарикоподшипниковой стали ШХ15 по плоской поверхности призмы из порошковой высоколегированной инструментальной стали 10Р6М5-МП.

2. Построены математические модели характеристик процесса фрикционного взаимодействия: радиуса пятна износа от времени и момента трения верчения от времени при различных нагрузках и установлены закономерности поведения данных характеристик от времени в процессе изнашивания.

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих технологий обработки металлических материалов с использованием новых нанокомпозиционных смазок и покрытий [4]-[18].

Работа выполнена по проекту №11.6682.2017/8.9.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т. I. Статика и кинематика. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 352 с.

2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 304 с.

3. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352с.

4. Математические модели характеристик процесса фрикционного взаимодействия гетерофазных металлических систем / А.Д. Бреки, А.Е. Гвоздев, И.В. Минаев, С.Н. Кутепов, А.А. Калинин / Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. № 7. С. 39-53.

5. Влияние элементов графитизаторов на распад цементита при термо-циклической обработке вблизи А0 углеродистых сталей / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, А.В. Маляров, Н.Н. Сергеев, И.В. Тихонова // Матери-аловедение. 2013. № 11. С. 43-45.

6. Механические свойства конструкционных и инструментальных сталей в состоянии предпревращения при термомеханическом воздействии / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, О.В. Кузовлева, Н.Н. Сергеев, И.В. Ти-хонова // Деформация и разрушение материалов. 2013. № 11. С. 39-42.

7. Условия проявления нестабильности цементита при термоциклировании углеродистых сталей / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, А.В. Маляров, Н.Н. Сергеев, И.В. Тихонова, М.Е. Пруцков // Материаловедение. 2014. № 10. С. 31-36.

8. Роль процесса зародышеобразования в развитии некоторых фазовых переходов второго рода / А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, И.В. Минаев, И.В. Тихонова, А.Г. Колмаков // Материаловедение. 2015. № 1. С. 15-21.

9. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Колмаков А.Г. Формирование механических свойств углеродистых сталей в процессах вытяжки с утонением // Технология металлов. 2015. № 11. С. 17-29.

10. Зависимость показателей сверхпластичности труднодеформируемых сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП от схемы напряженного состояния / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев, Д.Н. Боголюбова // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 11. С. 42-46.

11. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low-and medium-carbon low-alloy steels / A.E. Gvozdev, I.V. Minaev, N.N. Sergeev, A.G. Kolmakov, D.A. Provotorov, I.V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. Т. 6. № 1. P. 41-44.

12. Role of nucleation in the of first-order phase transformations / A.E. Gvozdev, N.N. Sergeyev, I.V. Minayev, A.G. Kolmakov, I.V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 4. P. 283-288.

13. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets / A.E. Gvozdev, I.V. Golyshev, I.V. Minayev, A.N. Sergeyev, N.N. Sergeyev, I.V. Tikhonova, D.M. Khonelidze, A.G. Kolmakov // Inor-ganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 4. P. 305-310.

14. Использование обобщенного треугольника Паскаля для описания колебаний силы трения материалов / А.Д. Бреки, А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков // Материаловедение. 2016. № 11. С. 3-8.

15. О фрикционном взаимодействии металлических материалов с учетом явления сверхпластичности / А.Д. Бреки, А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, Н.Е. Стариков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев, Д.М. Хонелидзе // Материаловедение. 2016. № 8. С. 21-25.

16. Вариант расчета максимального упрочнения малоуглеродистых сталей в процессах пластической деформации / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов // Производство проката. 2016. № 7. С. 9-13.

17. Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного вы-давливания металлических изделий / А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев, А.Г. Колмаков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев // Технология металлов. 2016. № 1. С. 23-32.

18. Полуэмпирические математические модели трения верчения стали ШХ-15 по стали Р6М5, по схеме шар-плоскость с учетом износа / А.Д. Бреки, А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков // Материаловедение. 2019. № 2. С. 43-48.

УДК 517.956.4, 511.3

Моделирование численных методов для решения краевых задач

А. И. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru
И. В. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru

Simulation of numerical methods for solving boundary value problems

A. I. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru
I. V. Denisov (Россия, г. Тула)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru

Обозначим через Ω прямоугольник $\{(x,t)\,|\,0<x<1,\ 0<t<T\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0,\varepsilon)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{2}$$

$$u(0,t,\varepsilon)=\psi_1(t),\quad u(1,t,\varepsilon)=\psi_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3}$$

Для нелинейных задач нельзя гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Более того, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удается. Решение ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon\to 0$

$$u(x,t,\varepsilon)=\bar u+(\Pi+Q+Q^*)+(P+P^*). \tag{4}$$

Здесь $\bar u$– регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω, Π, Q и Q^*– погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t=0$, $x=0$ и $x=1$, P и P^*– угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0,0)$ и $(1,0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [1]): уравнение (1) разделяется на части: регулярную, погранслойные и угловые погранслойные.

Регулярная часть асимптотики $\bar u$ строится в виде ряда по степеням ε:

$$\bar u(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\,\bar u_k(x,t).$$

Погранслойная часть асимптотики вводится для устранения невязок регулярной части с начальным и граничными условиями. При этом переходят к растянутым переменным

$$\xi=\frac{x}{\varepsilon},\quad \xi_*=\frac{1-x}{\varepsilon},\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon^2}.$$

Погранслойные функции ищутся в виде рядов

$$\Pi(x,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Pi_k(x,\tau),$$

$$Q(\xi,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kQ_k(\xi,t),$$

$$Q^*(\xi_*,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kQ_k^*(\xi_*,t).$$

С целью устранения невязок с начальным и граничными условиями вблизи угловыых точек $(0,0)$ и $(1,0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi,\tau,\varepsilon)$ и $P^*(\xi_*,\tau,\varepsilon)$, нахождение которых доставляет основные трудности при решении поставленной задачи. Эти функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kP_k(\xi,\tau),$$

$$P^*(\xi_*,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k P_k^*(\xi_*,\tau).$$

Задача для определения $P_0(\xi,\tau)$ ставится в первой четверти $\mathbb{R}_+^2$ плоскости растянутых переменных (ξ,τ) и имеет вид

$$a^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_0}{\partial\tau}=F\left(\bar{u}_0+\Pi_0+Q_0+P_0\right)-F\left(\bar{u}_0+\Pi_0\right)-F\left(\bar{u}_0+Q_0\right), \tag{5}$$

$$P_0(0,\tau)=-\Pi_0(0,\tau),\quad P_0(\xi,0)=-Q_0(\xi,0), \tag{6}$$

$$P_0(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty. \tag{7}$$

Для функций $P_k(\xi,\tau),\ k\geqslant 1$, в области $\mathbb{R}_+^2$ получаются линейные задачи

$$a^2\frac{\partial^2 P_k}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_k}{\partial\tau}=F'\left(\bar{u}_0+\Pi_0+Q_0+P_0\right)P_k+h_k, \tag{8}$$

$$P_k(0,\tau)=-\Pi_k(0,\tau),\quad P_k(\xi,0)=-Q_k(\xi,0), \tag{9}$$

$$P_k(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty, \tag{10}$$

где неоднородности $h_k=h_k(\xi,\tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам вида

$$|h_k(\xi,\tau)|\leqslant C\exp(-\kappa(\xi+\tau)),$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции $P_0,\ldots,P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Даже в случае разрешимости задач (5)–(7) и (8)–(10) доказательство того, что задача (1)–(3) имеет решение, все равно остается проблемой. Это связано с тем, что, не зная явного вида функции $P_0(\xi,\tau)$, мы не можем знать явного вида коэффициента $F'\left(\bar{u}_0+\Pi_0+Q_0+P_0\right)$, который может оказаться как положительным, так и отрицательным. Это обстоятельство, вообще говоря, не позволяет обосновать построенную асимптотику решения.

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*,\tau),\ k\geqslant 0$, ставятся аналогично.

При определенных условиях на функцию F удается доказать существование решений задач (5)–(7) и (8)–(10) (см. [2–7]). Для конкретных задач можно смоделировать численные методы для приближенного представления о поведении асимптотических решений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.

2. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т.57. №2. С. 255-274.

3. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т.58. №4. С. 1-11.

4. Денисов А.И., Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т.59. №1. С. 102-117.

5. Денисов А.И., Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т.59. №9. С. 1581-1590.

6. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т.61. №2. С. 256–267.

7. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т.61. №11. С. 1894–1903.

———————————————————————————

УДК 511.3

Об обобщённых неравномерных сетках Коробова[1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

On generalized non-uniform Korobov grids[1]

N. N. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru
N. M. Dobrovol'skii (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru

В 1956 — 1960 годах при создании теоретико-числового метода в приближенном анализе Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций E_s^α ($\alpha > 1$) с быстро убывающими коэффициентами Фурье, состоящий из функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, имеющих по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_s$ период, равный единице, и для которых их ряды Фурье

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \quad (1)$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-41-710004_р_а.
[1]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

удовлетворяют условиям

$$|C(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\frac{C}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha},\tag{2}$$

где константа C не зависит от $m_1,\ldots,m_s$, и для вещественных m полагаем $\overline{m}=\max(1,|m|)$. Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, а поэтому для любого $(\alpha>1)$ они представляют непрерывные функции.

Рассмотрение классов периодических функций в теоретико-числовом методе в приближенном анализе не является случайным. Дело в том, что особая роль теории чисел в вопросах интегрирования периодических функций была выявлена ещё сто лет тому назад в знаменитой работе Г. Вейля, с которой начинается теория равномерного распределения по модулю 1, и в которой получил общее развитие метод тригонометрических сумм, возникший в работах К. Ф. Гаусса ещё в 1811 г.. Фактически интегральный критерий Г. Вейля, доказанный сто лет тому назад, является предшественником теоретико-числового метода Н. М. Коробова в приближенном анализе, который начал создаваться на семинаре **трёх К** в 1956 году через 40 лет после работы Г. Вейля.

Позднее Н. Н. Ченцов, один из трёх руководителей семинара **трёх К**, предложил метод периодизации задач численного интегрирования, который позволил расширить класс функций, для которых можно применять методы теории чисел. С этими методами можно ознакомиться по монографиям [3], [4] и работе [2].

Введение неравномерных сеток для построения многомерных квадратурных формул позволило с помощью оценок полных рациональных тригонометрических сумм получить гарантированную оценку погрешности приближенного интегрирования, аналогичную оценке для метода Монте-Карло.

Классические неравномерные сетки $M(P)$ Коробова, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P:

$$M_k=\left(\left\{\frac{k}{P}\right\},\left\{\frac{k^2}{P}\right\}\ldots,\left\{\frac{k^s}{P}\right\}\right)\qquad(k=1,2,\ldots,P),\tag{3}$$

где $P=p$ или $P=p^2$ и p — нечетное простое число, имеют для нормированной тригонометрической суммы соотношение

$$\left|S^*_{M(P)}(\vec{m})\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{s-1}{\sqrt{P}} & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,p)=1,\\ 1 & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,p)=p.\end{cases}\tag{4}$$

Поведение рациональных тригонометрических сумм достаточно сложное, поэтому мы не можем дать исчерпывающее описание разбиения Коробова для неравномерных сеток. Можно утверждать только следующее: $K_4=\emptyset$, $K_1=P\mathbb{Z}^s$, при $P>(s-1)^2$ имеем $K_0\bigcup K_3\supset\mathbb{Z}^s\setminus p\mathbb{Z}^s$. Если $P=p$, то $K_2=\emptyset$. Если $P=p^2$, то $K_2\subset p\mathbb{Z}^s\setminus P\mathbb{Z}^s$.

Из вида неравномерных сеток вытекает одно обобщение их, связанное с рассмотрением произвольного P. Такое обобщение приводит к необходимости использовать для оценок погрешности общие рациональные тригонометрические сумм, которые имеют другой вид оценок чем сумм по простому модулю, или по квадрату простого.

Ещё один класс неравномерных сеток получается, если брать произведение неравномерных сеток по разным модулям. Пусть $p_1,\ldots,p_k$ — различные нечетные простые числа, тогда рассмотрим сетку

$$M_s(\vec{p})=M_s(p_1,\ldots,p_k)=M(p_1)\cdot\ldots\cdot M(p_k).$$

Очевидно, что $N=|M_s(p_1,\ldots,p_k)|=p_1\cdot\ldots\cdot p_k$. Сетка $M_s(p_1,\ldots,p_k)$ имеет

$$M_s(p_1,\ldots,p_k)=\left\{\left(\left\{\sum_{j=1}^k\frac{x_j}{p_j}\right\},\left\{\sum_{j=1}^k\frac{x_j^2}{p_j}\right\},\ldots,\left\{\sum_{j=1}^k\frac{x_j^s}{p_j}\right\}\right)\middle|\begin{matrix}0\leqslant x_j\leqslant p_j-1\\ j=1,2,\ldots,k\end{matrix}\right\}.\tag{5}$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_s(\vec{p})$ имеем:

$$\left|S^*_{M_s(\vec{p})}(\vec{m})\right| = \prod_{j=1}^{k}\left|S^*_{M(p_j)}(\vec{m})\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{(s-1)^t}{\sqrt{\prod\limits_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}}} & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,N) = \frac{N}{\prod\limits_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}}, \\ 1 & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,N) = N. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *Для дзета-функции обобщенной неравномерной сетки $M_s(\vec{p})$ справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha, 1|M_s(\vec{p})) \leqslant \frac{s^k(1+2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{N}}. \tag{7}$$

Последняя теорема позволяет сделать вывод, что наилучшая оценка погрешности получается для обычных неравномерных сеток, хотя порядок во всех этих случаях одинаковый. Наряду с неравномерными сетками (3) рассмотрим ещё один класс обобщённых неравномерных сеток $M(P,\vec{a})$, координаты точек которых имеют вид

$$M_k(\vec{a}) = \left(\left\{\frac{k+a_1}{P}\right\}, \left\{\frac{k^2+a_2}{P}\right\}\ldots, \left\{\frac{k^s+a_s}{P}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, P), \tag{8}$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, имеют для нормированной тригонометрической суммы соотношение

$$\left|S^*_{M(P,\vec{a})}(\vec{m})\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{s-1}{\sqrt{P}} & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,p) = p. \end{cases} \tag{9}$$

Повторяя дословно рассуждения Н. М. Коробова для неравномерных сеток получаем для произвольной сетки вида 8 такой же результат.

Теорема 2. *Для дзета-функции обобщенной неравномерной сетки $M(P,\vec{a})$ справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha, 1|M(P,\vec{a})) \leqslant \frac{s(1+2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{P}}. \tag{10}$$

У нас имеется P^s различных сеток $M(P,\vec{a})$. Из теоремы 2 следует, что если взять случайным образом произвольную сетку $M(P,\vec{a})$ и численно проинтегрировать произвольную функцию $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, то для погрешности интегрирования $R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})]$ справедлива оценка $|R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})]| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\cdot s(1+2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{P}}$. Возникает вопрос об оценке математического ожидания $M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})])$. Получается следующий парадоксальный результат

Теорема 3. *Для математического ожидания $M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})])$ справедлива оценка*

$$|M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})])| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\cdot(1+2\zeta(\alpha))^s}{P^\alpha}. \tag{11}$$

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{z}$ сдвинутую сетку $M + \vec{z}$ и дадим следующие определения.

Определение 1. *Для произвольной сетки M и произвольного $\vec{z}$ модифицированной сеткой $M(\Lambda,\vec{z})$ назовем множество $M(\vec{z}) = (M+\vec{z})\cap G_s$.*

Сетка $M_1(\vec{z}) = (M+\vec{z})\cap[-1;1)^s$.

Модифицированной сеткой II рода $M'(\vec{z})$ назовем множество

$$M'(\vec{z}) = \{\vec{x}\,|\,\vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y}\in M_1(\vec{z})\}.$$

Определение 2. *Квадратурной формулой с модифицированной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ назовем формулу вида*

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (|M'(\vec{z})|)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(M,\vec{z})}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\vec{z}), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(M, \vec{z}) = |M'(M, \vec{z})|,$$

$R_{N'(M,\vec{z})}[f]$ *— погрешность квадратурной формулы.*

Квадратурные формулы с модифицированной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ естественным образом возникают в следующей ситуации. Пусть имеется сетка M_1 и параллелепипедальная сетка M_2. Рассмотрим произведение этих сеток:

$$M = M_1 \cdot M_2 = \{\{\vec{x} + \vec{y}\} | \vec{x} \in M_1, \, \vec{y} \in M_2\}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{|M_2|} \sum_{\vec{z} \in M_2} \left(|M'(\vec{z})|^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(M_1,\vec{z})}[f] \right), \tag{12}$$

$$R_{N'(M)}[f] = \frac{1}{|M_2|} \sum_{\vec{z} \in M_2} R_{N'(M',\vec{z})}[f]. \tag{13}$$

Формулы (12) — (13) являются аналогами основы для концентрических алгоритмов численного интегрирования с квадратурными формулами по обобщенным параллелепипедальным сеткам (см. [1], стр. 192, 193).

Определение 3. *Для концентрической пары сеток II типа $M_1 \subset M = M_1 \cdot M_2$ и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ мультипликативной дискретной дисперсией $\Delta = \Delta(M'(\Lambda), M'(\Lambda_1), \rho(\vec{x}), f(\vec{x}))$ назовем величину*

$$\Delta = \frac{1}{|M_2|} \sum_{\vec{z} \in M_2} |R_{N'(M_1,\vec{z})}[f] - R_{N'(M_1)}[f]|^2. \tag{14}$$

Нетрудно понять, что определение 3 согласуется с аналогичным определение из работы [1] (см. стр. 204), так как сетка M является произведением сетки M_1 и сетки M_2.

Теорема 4. *Пусть $M_1 = M(P)$ — неравномерная сетка, $P = p$ — простое число, $p > s \geqslant 2$, а $M_2 = M(\vec{a}; N)$ — параллелепипедальная сетка, для которой дзета-функция решётки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}; N)|\alpha) \leqslant c(\alpha, s) \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha}$, и $N < P$. Для погрешности квадратурной формулы (12) справедлива оценка*

$$|R_{N'(M)}[f]| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot c(\alpha, s) \ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \cdot \left(\frac{s-1}{\sqrt{P}} + \frac{1}{P^\alpha} \right). \tag{15}$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и $0 < c < 1$, $cP < N < P$, тогда для погрешности квадратурной формулы (12) справедлива оценка*

$$|R_{N'(M)}[f]| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot s \cdot c(\alpha, s) \ln^{\alpha(s-1)} N'(M)}{c^\alpha N'(M)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}}}. \tag{16}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.
2. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.
3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

———————————————————————————

УДК 519.2

О плотности распределения вероятностей агрегированной случайной величины для оценки функционирования сложных систем: трехмерный случай[1]

Р. А. Жуков (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ
e-mail: pluszh@mail.ru
Н. О. Козлова (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ
e-mail: 95kno@mail.ru

On the probability distribution densities of an aggregated random variable for evaluating the functioning of complex systems: a three-dimensional case

R. A. Zhukov (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
e-mail: pluszh@mail.ru
N. O. Kozlova (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
e-mail: 95kno@mail.ru

При поиске параметров производственных функций (ПФ), применяемых при моделировании функционирования элементов сложных систем [1, 2], используют ряд методов, одним из которых является метод максимального правдоподобия (MLE), заключающийся в максимизации логарифмической функции правдоподобия вида:

$$lnL(y^*|C^*_{i,j}, x^*_{i,j}, \sigma_{y^*}) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} f(y^*|C^*_{i,j}, x^*_{i,j}, \sigma_{y^*}) \to max. \tag{1}$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-28-20061, https://rscf.ru/project/22-28-20061/ и Тульской области

Максимум (1) ищется по набору $C^*_{i,j}$ (параметры стандартизованной i-той ПФ) и σ_{y^*} (стандартное отклонение y^*_i), y^*_i – стандартизованное значение фактического результата функционирования i-того элемента сложной системы y_i, которое определяется по формуле:

$$y_i = f_i(C_{i,j}, x_{i,j}) + \epsilon_i, \tag{2}$$

где i — индекс случайной величины ($i = i..m \in N$), m – число результативных признаков, $C_{i,j}$ — параметры функций $f_i(\cdot) = \hat{y}_i$ (ожидаемое значение, норматив), $x_{i,j}$ – факторные признаки, ϵ_i — стохастические случайные составляющие (предполагается $N(0; \sigma^2_{\epsilon_i})$, дисперсия $\sigma^2_{\epsilon_i}$ неизвестна [3].

При использовании MLE необходимо знать плотности распределения случайных величин ϵ_i и агрегированной случайной величины ϵ в случае, если рассматривается подсистема или система в целом, для которой строится агрегированная производственная функция (АПФ) посредством квадратичной свертки. Для стандартизованной агрегированной случайной величины ϵ^* плотность вероятности будет определяться как:

$$f_p(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\Delta}} \frac{d}{dy^*} \int \cdots \int_D exp(-\frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} \epsilon^*_i \epsilon^*_j) dD, \tag{3}$$

где Δ, $A_{i,j}$ — соответственно определитель и алгебраические дополнения корреляционной матрицы $\|r_{i,j}\|$, элементами которой являются парные коэффициенты корреляции;

$$\epsilon^*_i = \frac{(y^*_i - \hat{y}^*_i)^2}{2\sigma^2_{y^*_i}}; \tag{4}$$

D зависит от комбинации ϵ^*_i и соответственно y^*, являющейся комбинацией y^*_i; $\sigma^*_{y^*_i}$ — дисперсия y^*_i. При этом агрегированные фактические и ожидаемые значения стандартизованного результативного признака подсистемы или системы в целом определяются по формулам:

$$y^*_k(t) = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I} \sum_{i_2=1}^{I} r_{i_1,i_2} y^*_{i_1,k}(t) y^*_{i_2,k}(t)}, \tag{5}$$

$$\hat{y}^*_k(t) = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I} \sum_{i_2=1}^{I} \hat{r}_{i_1,i_2} \hat{y}^*_{i_1,k}(t) \hat{y}^*_{i_2,k}(t)}, \tag{6}$$

где r_{i_1,i_2}, $\hat{r}_{i_1,i_2}$ — соответствующие значения парного коэффициента корреляции Пирсона между i_1-тыми $y^*_{i_1}$, $\hat{y}^*_{i_1}$ и i_2-тыми $y^*_{i_2}$, $\hat{y}^*_{i_2}$ переменными $(i_1, i_2 = 1..I)$ для k-той подсистемы в период t. Выражение (6), записанное для переменной $\hat{y}^*$, принимающей значения $\hat{y}^*_k(t)$, представляет собой стандартизованную АПФ. Для двумерного случая в [3] было получено аналитическое выражение плотности распределения вероятностей. В трехмерном случае требуемую плотность вероятности $f_p(y^*)$ можно найти, используя соотношение:

$$f_p(y^*) = \frac{d}{dy^*}(F(y^*)) = Pr\{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} r_{i,j} y^*_i y^*_j \leqslant (y^*)^2\} =$$
$$= \frac{d}{dy^*}(\iiint_{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} r_{i,j} y^*_i y^*_j \leqslant (y^*)^2} f_p(y^*_1, y^*_2, y^*_3) dy^*_1 dy^*_2 dy^*_3). \tag{7}$$

Здесь $F(y^*)$ – функция распределения случайной величины y^*.

К каноническому виду квадратичную форму $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} r_{i,j} y^*_i y^*_j$ можно привести, найдя собственные числа и собственные векторы матрицы $\|r_{i,j}\|$ или воспользовавшись методом Лагранжа. В последнем случае, переходя к сферической системе координат и взяв производную по радиусу r, получим выражение для плотности вероятности $f_p(y^*)$:

$$f_p(y^*) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\Delta}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (y^*)^2 sin\theta exp[-\frac{1}{2}(y^*)^2 \cdot$$
$$\cdot (c_{11}cos^2\phi sin^2\theta + c_{22}sin^2\phi sin^2\theta) + c_{22}cos^2\theta +$$
$$+c_{12}sin2\phi sin^2\theta + c_{13}cos\phi sin2\theta + c_{23}sin\phi sin2\theta]d\theta d\phi, \quad (8)$$

где

$$c_{11} = K_{11}$$
$$c_{22} = \frac{1}{K_{33}\Delta}(K_{11}r_{12}^2 + K_{22} - 2K_{12}r_{12}),$$
$$c_{33} = \frac{1}{K_{33}}(r_{12}K_{23} + r_{13}K_{33})(K_{11}r_{12}K_{23} + K_{11}r_{13}K_{33} -$$
$$-2K_{12}K_{23} - 2K_{13}K_{33}) + K_{33}^2 + 2K_{23}^2 + \frac{K_{22}K_{23}^2}{K_{33}},$$
$$c_{12} = \frac{1}{\sqrt{K_{33}\Delta}}(-K_{11}r_{12} + K_{12})$$
$$c_{13} = \frac{1}{\sqrt{K_{33}}}(-K_{11}r_{12}K_{23} - K_{11}r_{13}K_{33} + K_{12}K_{23} + K_{13}K_{33}),$$
$$c_{23} = \frac{1}{K_{33}\sqrt{\Delta}}(K_{11}r_{12}(r_{12}K_{23} + r_{13}K_{33}) + K_{22}K_{23} -$$
$$-K_{12}(2r_{12}K_{23} + r_{13}K_{33}) - r_{12}K_{13}K_{33} + K_{23}K_{33}), \quad (9)$$

$K_{i,j}^{-1} = A_{ij}/\Delta$– элементы обратной матрицы ковариаций.

Таким образом, построена плотность распределения агрегированной случайной величины, используемая для оценки параметров агрегированной производственной функции, определяемой квадратичной сверткой производственных функций, характеризующих частные результаты функционирования элементов сложной системы. Получены соотношения в квадратурах для трехмерного случая.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейнер Г. Б. Производственные функции: теории, методы, применение. — Москва: Финансы и статистика, 1986. 239 с.

2. Жуков Р. А. Оценка эффективности функционирования социально-экономических систем на основе производственных функций: новый подход // Вестник Волгоградского государственного университета. Экономика. 2019. Том 21. № 3. С. 71-82. DOI: 10.15688/ek.jvolsu.2019.3.7.

3. Жуков Р. А. Метод оценки результатов функционирования иерархических социально-экономических систем на основе агрегированной производственной функции // Экономика и математические методы. 2021. Том 57. № 3. С. 17-31. DOI: 10.31857/S042473880016428-9.

–––

УДК 517.927.25

Асимптотика спектра оператора Штурма — Лиувилля с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом

А. В. Качкина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alisa-kachkina@mail.ru

Asymptotic behavior of the spectrum of the Sturm–Liouville operator with a boundary condition at zero and a rapidly growing potential

A. V. Kachkina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: alisa-kachkina@mail.ru

Оператором Штурма — Лиувилля $\mathbb{L}_q$ называется оператор, порожденный дифференциальным выражением $\mathbb{L}_q y = -y'' + q(x)y$, где потенциал q – непрерывная действительнозначная функция, $D(\mathbb{L}_q) = \{y \in L_2[0,+\infty) : y, y'$ абсолютно непрерывны на любом $[a,b] \subset [0,+\infty)$ и $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\}$ – область определения оператора $\mathbb{L}_q$.

Такой оператор хорошо изучен и является самосопряженным для действительнозначного потенциала q.

В данной работе будут рассматриваться только потенциалы, быстро растущие на бесконечности, то есть с условием $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$. При таком предположении спектр оператора $\mathbb{L}_q$ дискретен (см. [1]). Занумеруем собственные числа оператора в порядке неубывания: $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$.

Введем классы функций $\mathfrak{Q} = \{q \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty) : q''(x) \ge 0,\ x \ge x_0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty\}$, $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu} = \{q \in \mathfrak{Q} : \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln q(x)}{\ln^\beta x} = \mu\}$. Тогда при $\beta = 1$ рост потенциалов будет полиномиальным и для $q(x) = x^k,\ k > 0$, в работе [2] Э. Ч. Титчмарш получил асимптотику

$$\lambda_n \sim \left\{ \frac{\pi k \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{k})} \cdot n \right\}^{\frac{2k}{k+2}}.$$

Также асимптотику спектра оператора Штурма — Лиувилля с граничным условием $y(0) = 0$ для потенциала $q(x) = x^k + V(x),\ k > 0$ изучали Х. Х. Муртазин и Т. Г. Амангильдин в работе [3] для $V(x) \in C_0^{(2)}[0,\infty)$ и Х. К. Ишкин для $V(x) \in C_0^{(1)}[0,\infty)$.

Обозначим через p обратную функцию к q, то есть $p(q(x)) = x$. В работе [4] было найдено асимптотическое поведение λ_n для $\beta \ge 2$ при $n \to +\infty$. В случае $\beta = 2$ А. И. Козко была установлена справедливость

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2)\exp(2\mu^2), n \to +\infty. \tag{1}$$

В работе [5] для $\beta \in (3/2, 2]$ было установлено:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2)\exp\left(4\frac{\mu^\beta}{\beta}\ln^{2-\beta} p((\pi n)^2)\right), n \to +\infty \tag{2}$$

и для $\beta \in (4/3, 3/2]$:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\left(4\frac{\mu^\beta}{\beta}\ln^{2-\beta} p((\pi n)^2) - \frac{1}{\beta}(\frac{3}{\beta}-1)\mu^3 4\ln^{3-2\beta} p((\pi n)^2)\right), n \to +\infty. \quad (3)$$

В работе [6] было найдено асимптотическое поведение λ_n для $\beta \in (5/4, 4/3]$:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 \exp\Biggl(-\Biggl\{2\mu^\beta \ln^{\frac{1}{\beta}}((\pi n)^2) - \frac{4}{\beta}\mu^{2\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}((\pi n)^2) +$$

$$+\frac{4(3-\beta)}{\beta^2}\mu^{3\beta}\ln^{\frac{3}{\beta}-2}((\pi n)^2) - \frac{16(8-6\beta+\beta^2)}{3\beta^3}\mu^{4\beta}\ln^{\frac{4}{\beta}-3}((\pi n)^2)\Biggr\} + o(1)\Biggr), n \to +\infty. \quad (4)$$

Теорема 1. *Пусть $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$, $c_n = (\pi n)^2$, $\delta = \mu^\beta$, $\beta \in (6/5, 5/4]$. Тогда для спектра оператора $\mathbb{L}_q$ справедливо*

$$\lambda_n \sim c_n \exp\Biggl(-2\delta\Biggl\{\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n +$$

$$+(2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Biggr\} + o(1)\Biggr), n \to +\infty. \quad (5)$$

Следствие 1. *Если $\beta \in (5/4, 4/3]$, то $\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n = o(1)$, что приводит нас к формуле (4). Если $\beta \in (4/3, 3/2]$, то $\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n = o(1)$, что приводит нас к формуле (3). Если $\beta \in (3/2, 2]$, то $\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n = o(1)$, что приводит нас к формуле (2). Если $\beta = 2$, то получаем формулу (1).*

Техника нахождения асимптотических свойств оператора $\mathbb{L}_q$ помогает нахождению регуляризованных следов, см. [7]–[10]. В заключение выражаю благодарность Козко А. И. за полезные советы и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молчанов А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Моск. матем. об-ва. 1953. Том 2, С. 169–200.

2. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка т.1 – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1960. 276 с.

3. Муртазин Х. Х., Амангильдин Т. Г. Асимптотика спектра оператора Штурма—Лиувилля // Математический сборник. 1979. Том 110, № 1. 135–149.

4. Козко А. И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференц. уравнения. 2005. 41:5. С. 611–622; Differ. Equ. 2005. 41:5. 636–648.

5. Киселева А. Ю. Асимптотика спектра задачи Штурма—Лиувилля с быстро растущим потенциалом // Дипломная работа. 2006.

6. Насртдинов И. Г. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y(0)\cos(\alpha)+y'(0)\sin(\alpha) = 0$ // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова, 31 мая 2018 г.

7. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4, С. 11–17.

8. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков // Математические заметки. 2008. Том 83, № 1. С. 39–49

9. Козко А. И., Печенцов А. С. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Том 74, № 6. С. 107–126.

10. Садовничий В. А., Печенцов А. С., Козко А. И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов // Доклады РАН. 2009. Том 427. С. 461-465

———————————————————————————

УДК 517.948

О коэрцитивных свойствах и разделимости оператора Трикоми в весовом пространстве

О. Х. Каримов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

On coercive properties and separability of the Tricomi operator in a weight space

Kh. O. Karimov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

Термин "разделимость дифференциальных операторов"впервые ввели в научную литературу английский математик В.Н.Эвеританн и шведский математик М.Гирц. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[1]-[5] и имеющиеся там ссылки).

Рассмотрим в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,k}(R^2)$ дифференциальный оператор Трикоми

$$L[u(x,y)] = -\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + V(x,y)u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

Определение. *Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор), следуя [1,2], называется разделимым в $L_{2,k}(R^2)$, если*

$$-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}, \quad V(x,u)u(x,y) \in L_2(R^2)$$

для любого $u(x) \in L_{2,k}(R^2) \cap W_2^2(R^2)$ такие, что $f(x) \in L_{2,k}(R^2)$.

Найдены условия на функцию $V(x,y)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_{2,k}(R^2)$, и для всех решений $u(x) \in L_{2,k}(R^2) \cap W_{2,loc}^2(R^2)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x,y) \in L_{2,k}(R^2)$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|V(x,y)u(x,y); L_{2,k}(R^2)\| + \|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}; L_{2,k}(R^2)\| +$$
$$+ \left\| V^{\frac{1}{2}}(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}; L_{2,k}(R^2)\right\| + \left\| V^{\frac{1}{2}}(x,y)y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}; L_{2,k}(R^2)\right\| \le M\|f(x,y); L_{2,k}(R^2)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x,y)$, $f(x,y)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
2. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.
3. E. M. E. Zayed, S. A. Omran. Separation of the Tricomi Differential Operator in Hilbert Space with Application to the Existance and Uniqueness Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, 2011, № . 8, 353 - 364.
4. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал, 2017, т.9, № 1, с.55-62.
5. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимсоти нелинейного уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник, 2021, т.22, № 1, с.163-176.

УДК 518.865

Об одном методе приближения в математической модели экономического роста[1]

А. И. Козко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Л. М. Лужина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: lluzhina@gmail.com
А. Ю. Попов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а)

On a method of approximation in a mathematical model of economic growth

A. I. Kozko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
L. M. Luzhina (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.
e-mail: lluzhina@gmail.com
A. Yu. Popov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, Moscow center of fundamental and applied mathematics.
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Доклад посвящен развитию результатов, опубликованных в [1] –[4]. Исследуется математическая модель Рамсея-Касса-Купманса экономического роста в случае стационарности функции сбережения. Мы предлагаем способ нахождения приближенного решения системы дифференциальных уравнений из модели экономического роста Рамсея-Касса-Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса систем.

В модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [5] –[8]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2 C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

В работе [9] получены явные формулы для выражения зависимости капитала $K(t)$ от потребления $C(t)$ в случае соотношения $x_2 = \alpha x_1$ (условие стационарности сбережения). Точнее, было получено: Если экономические параметры, определяющие систему дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями $C(0) = C_0$, $K(0) = K_0$, связаны соотношением $x_2 = \alpha x_1$, то между функциями $v = v(t) = K(t)e^{x_1 t}$ и $w = w(t) = C(t)e^{x_2 t}$ имеется следующая зависимость:

$$v = \left(K_0^{\alpha} \left(\frac{w}{C_0} \right)^{\theta} + \frac{\theta w^{\theta}}{a} \left(U_\theta(C_0) - U_\theta(w) \right) \right)^{1/\alpha},$$

где $U_\theta(C) = \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}$, для $\theta > 0$, $\theta \neq 1$.

Покажем, как, рассмотрев систему дифференциальных уравнений (1), мы будем строить приближение в данной экономической модели. Система уравнений (1) является автономной, то есть при записи её в более кратком виде

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - C - x_1 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C. \end{cases} \tag{2}$$

временная переменная t в правые части системы (2) не входит. Это даёт возможность, отправляясь от начальных условий $C(0) = C_0$, $K(0) = K_0$, и решая систему по соответствующим приближенным формулам, достигнув при некотором значении времени t_1 состояния $C(t_1) = C_1$, $K(t_1) = K_1$, и решать далее систему, осуществив сдвиг по времени, по тем же приближённым формулам, но с новыми начальными условиями $C(t_1) = C_1$, $K(t_1) = K_1$. Продолжая действовать постоянно таким же образом, приходим к приближённому решению.

Нами обнаружено, что системы более общего вида, чем рассмотренные в (1),

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - bC - x_1 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}C - x_2 C. \end{cases} \tag{3}$$

где $b \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр, но при наличии специальной связи между "экономическими"константами x_1, x_2, α, состоящей в выполнении равенства $x_2 = \alpha x_1$, допускают решение в квадратурах. Более того (это особенно важно!), полученные нами интегральные формулы, выражающие решения задачи Коши (3) с начальными условиями $C(0) = C_0$, $K(0) = K_0$ при выполнении равенства $x_2 = \alpha x_1$, не очень сложны.

Равенство $x_2 = \alpha x_1$ рассматривалось в ряде публикаций, поскольку, при его выполнении функция сбережения (см. о ней в [5]) является тождественной постоянной. Отметим, что нам не встретились в работах по этой тематике какие-либо решения системы (1) в квадратурах даже при выполнении связи $x_2 = \alpha x_1$ между входящими в систему экономическими параметрами. Обычно находят приближённое решение данной системы уравнений (без теоретической оценки погрешности), либо решают её численно. Также, из этой системы приближённо выражают зависимость $C(K)$, показывающую, каким образом функция потребления зависит от величины капитала.

Существенным обстоятельством, которое, по нашему мнению, поможет получать приближенные аналитические выражения для решения задачи Коши (3) с начальными условиями $C(0) = C_0$, $K(0) = K_0$ в общем случае значений констант x_1, x_2 (при отсутствии связи $x_2 = \alpha x_1$), является то, что мы нашли решение в квадратурах именно системы (3) с произвольным значением параметра b, но, правда, при наличии связи $x_2 = \alpha x_1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том. 182. С. 39-44.

2. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея-Касса-Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2021. Том. 22, № 2. С. 501-509.

3. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея - Касса - Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности // Чебышевский сборник. 2021. Том. 22, № 2(78). С. 121-134.

4. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

5. Ramsey F. P. A mathematical theory of saving // The Economic Journal. December. 1928. P. 543–559.

6. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

7. Benassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory. // New York: Oxford University Press. 2011. C. 145–160.

8. Gomez M. A., Economic growth and factor substitution with elastic labor supply // Math. Social Sci. 2018. V. 94. P. 49-57.

9. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея-Касса-Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Том. 23, № 1. С. 118-130.

———————————————————————————

УДК 511.9

О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений[1]

А. Н. Кормачева (Швейцария, г. Церн)
e-mail: juska789@mail.ru

On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons[1]

A. N. Kormacheva (Switzerland, Cern)
e-mail: juska789@mail.ru

В методе оптимальных коэффициентов профессора Н. М. Коробова [3, 4] большую роль играет гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки решений Λ линейного сравнения

$$m_1 + a_1 m_2 + \ldots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod N, \quad (a_j, N) = 1 \quad (j = 1, \ldots, s-1), \tag{1}$$

который задается равенством $q(\Lambda) = \min_{\vec{m}\in\Lambda,\, \vec{m}\neq\vec{0}} \overline{m_1}\ldots\overline{m_s}$ и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного числа m.

Определение 1. *(См. [1]) Назовем ненулевое решение сравнения (1) минимальным, если не существует другого ненулевого решения* $(m_1', \ldots, m_s')$*, для которого*

$$|m_1'| \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s'| \leqslant |m_s|; \quad |m_1'| + \ldots + |m_s'| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле непосредственно следует, что для таких решений справедливо неравенство

$$\overline{m_1}\ldots\overline{m_s} \leqslant N, \tag{2}$$

и они составляют конечное множество. Это множество будем называть минимальным множеством Быковского $B^{(0)}(\Lambda)$ решётки решений сравнения (1). Через $r^{(0)}(\Lambda)$ будем обозначать

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.
[1]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

количество элементов в минимальном множестве Быковского $B^{(0)}(\Lambda)$. Так как множество $B^{(0)}(\Lambda)$ — центрально симметрично относительно нулевой точки, то ровно половина точек из $B^{(0)}(\Lambda)$ имеют первую ненулевую координату положительную. Следовательно, $r^{(0)}(\Lambda)$ — четное натуральное число.

Цель данной работы — построить в случае двумерной решётки $\Lambda(a, N)$ решений простейшего линейного сравнения $m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod N$ от двух переменных алгоритм вычисления гиперболического параметра $q(\Lambda(a, N))$ за $O(\ln N)$ арифметических операций и описать множество Быковского для этого случая.

Решётка $\Lambda(a, N)$ имеет простой вид: $\Lambda(a, N) = \{(m_1, m_2) = (xN - ay, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$ и задается базисом $\vec{\lambda}_1 = (-a, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (N, 0)$. Детерминант решётки $\Lambda(a, N)$ равен N: $\det \Lambda(a, N) = N$.

Пусть β — произвольное действительное число отличное от нуля ($\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$). Через $\|\beta\|$ будем обозначать расстояние до ближайшего целого $\|\beta\| = \begin{cases} \{\beta\}, & \text{если } 0 \leqslant \{\beta\} \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - \{\beta\}, & \text{если } \frac{1}{2} < \{\beta\} < 1, \end{cases}$
$\{\beta\} = \beta - [\beta]$— дробная часть β, $\quad [\beta] = n$, где $n \in \mathbb{N}, n \leqslant \beta < n + 1$,— целая часть β.

Будем через $\Lambda(\beta)$ обозначать решётку приближений Дирихле

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p) | q, p \in \mathbb{Z}\} = \{(q, \{q\beta\} - p) | q, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Заметим, что если β — рациональное число, то решётка $\Lambda(\beta)$ — декартова, для любого иррационального β решётка $\Lambda(\beta)$ не является декартовой. Всякая решётка приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ является унимодулярной решёткой.

В 1842 году П. Г. Лежён-Дирихле доказал знаменитую теорему.

Теорема 1. *Для любого $\beta \in \mathbb{R}$ и $Q > 1$, $Q \in \mathbb{N}$ найдется натуральное $q \leqslant Q$ такое, что*

$$\|q\beta\| < \frac{1}{Q}.$$

Пусть $\frac{P_m}{Q_m}$ — m-ая подходящая дробь к рациональному числу β ($m = 0, 1, \ldots, n$). Рассмотрим точки решётки $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ ($m = 0, 1, \ldots, n$). Так как $P_m = q_m P_{m-1} + P_{m-2}$, $Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2}$ ($m = 0, 1, \ldots, n$), если положить $Q_{-2} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_{-2} = 0$, $P_{-1} = 1$, то справедливо рекуррентное соотношение для векторов $\vec{\lambda}_m$: $\vec{\lambda}_m = q_m\vec{\lambda}_{m-1} + \vec{\lambda}_{m-2}$.

Напомним известное определение наилучшего приближения второго рода.

Определение 2. *Рациональная дробь $\frac{a}{b}$ ($b > 0$) называется наилучшим приближением второго рода числа β, если из $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leqslant b$ необходимо следует*

$$|d\beta - c| > |b\beta - a|.$$

Известна теорема

Теорема 2. *Всякое наилучшие приближение второго рода есть подходящая дробь. Всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода; единственное (тривиальное) исключение представляет*

$$\beta = q_0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}.$$

Следуя за Г. Ф. Вороным [2] и работе [1], дадим следующее определение локального минимума для решётки $\Lambda(\beta)$.

Определение 3. *Точка $(q, q\beta - p)$ называется локальным минимумом решётки $\Lambda(\beta)$, если параллелепипед $\Pi(q, q\beta - p) = [-q, q] \times [-q\beta + p, q\beta - p]$ не содержит ненулевых точек решётки $\Lambda(\beta)$ кроме своих вершин.*

Если ограничиться случаем только рациональных $\beta > 0$, то из теоремы 2 следует, что множество всех локальных минимумов решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ состоит в точности из точек $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Зададим точки $\vec{\lambda}_{-1} = (0, -1)$, $\vec{\lambda}_{-2} = (1, \beta)$, которые образуют базис решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$.

Теорема 3. *Последовательность всех локальных минимумов $\{\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_n\}$ задается рекуррентным равенством*

$$\vec{\lambda}_m = q_m\vec{\lambda}_{m-1} + \vec{\lambda}_{m-2} \quad (0 \leqslant m \leqslant n), \tag{3}$$

где целое число q_m определяется равенством

$$q_m = \left[\frac{|\lambda_{m-2,2}|}{|\lambda_{m-1,2}|}\right], \quad \vec{\lambda}_m = (\lambda_{m,1}, \lambda_{m,2}). \tag{4}$$

Прежде всего установим взаимно-однозначное соответствие между точками решёток $\Lambda(a, N)$ и $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$: $\psi : \Lambda(a, N) \longleftrightarrow \Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, $\psi((xN - ay, y)) = \left(y, y \cdot \frac{a}{N} - x\right)$, $\psi^{-1}\left(q, q \cdot \frac{a}{N} - p\right) = (pN - aq, q)$.

Для решётки $\Lambda(a, N)$ определение локального минимума несколько отличается от определения 3.

Определение 4. *Точка $(xN - ay, y)$ называется локальным минимумом решётки $\Lambda(a, N)$, если параллелепипед $\Pi^*(xN - ay, y) = [-\overline{xN - ay}, \overline{xN - ay}] \times [-\overline{y}, \overline{y}]$ не содержит ненулевых точек решётки $\Lambda(a, N)$ кроме своих вершин.*

Будем множество локальных минимумов решётки $\Lambda(a, N)$ называть просто множеством Быковского и обозначать через $B(a, N)$, а количество элементов — через $r(a, N)$. Ясно, что $B(a, N) = B^{(0)}(\Lambda) \setminus \{(0, N), (0, -N)\}$ и $r(a, N) = r^{(0)}(\Lambda) - 2$.

Нетрудно видеть, что взаимно-однозначное соответствие ψ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством Быковского $B(a, N)$ и всеми локальными минимумами решётки Дирихле $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, кроме точки $(N, 0)$, которая является локальным минимумом в решётке $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, а соответствующая ей точка $(0, N)$ не является локальным минимумом в решётке $\Lambda(a, N)$. Если через $B^*(a, N)$ обозначим множество всех локальных минимумов решётки $\Lambda(a, N)$ вида $(xN - ay, y)$ с $0 < y < N$, то будем иметь $B(a, N) = B^*(a, N) \cup -B^*(a, N)$. И из теории наилучших приближений второго рода следует следующая теорема.

Теорема 4. *Для множества Быковского $B(a, N)$ справедливо равенство*

$$B^*(a, N) = \{((-1)^m[q_{m+2}, \ldots, q_n]_{(n-m-1)}, Q_m) | m = 0, \ldots, n-1\}, \quad B(a, N) = B^*(a, N) \cup -B^*(a, N).$$

Кроме этого, $r(a, N) = 2n$.

Следствие 1. *Для гиперболического параметра $q(\Lambda(a, N))$ двумерной решётки $\Lambda(a, N)$ решений линейного сравнения справедливо равенство*

$$q(\Lambda(a, N)) = \min_{0 \leqslant m \leqslant n-1} [q_{m+2}, \ldots, q_n]_{(n-m-1)} \cdot Q_m.$$

Кроме этого, всегда $q(\Lambda(a, N)) \leqslant a$ для $1 \leqslant a < N$, $(a, N) = 1$.

Как известно (см. [1]), гиперболическая дзета-функция решётки $\Lambda(a,N)$ задаётся равенством

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) = {\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}}' \frac{\delta_N(m_1+am_2)}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha}, \quad \delta_m(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod m, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod m, \end{cases} \tag{5}$$

где $\overline{x} = \max(1,|x|)$ для любого вещественного x. С ней тесно связана функция $H(a;N)$, заданная формулой

$$H(a;N) = \frac{9}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(1-2\frac{k}{N}\right)^2\left(1-2\left\{\frac{ak}{N}\right\}\right)^2.$$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) = \frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha} + \zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha), \quad H(a;N) = 1 + \frac{4}{N^2} + \frac{36}{\pi^4}\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|2),$$

где $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана, а

$$\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

Положим $N_1 = \left[\frac{N}{2}\right]$, $N_2 = \left[\frac{N-1}{2}\right]$, тогда множество чисел $M(N) = \{-N_2,\ldots,N_1\}$ образует абсолютно наименьшую полную систему вычетов по модулю N. Очевидно, что для множества Быковского $B(a,N)$ выполняется включение $B(a,N) \subset M(N)^2$.

Определим величины

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{m_1,m_2=1}^{N_1} \frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha},$$

$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{\max(m_1,m_2)>N_1} \frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

Ясно, что $\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha) = \zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) + \zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha)$.

Лемма 2. *Справедливо неравенство* $\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)$.

Так как $\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) = \zeta_H^{**}(\Lambda(N-a,N)|\alpha)$, то, без ограничения общности, считаем $1 \leqslant a < \frac{N}{2}$.

Лемма 3. *Справедливо неравенство* $\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant 4\zeta^2(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{Q_\nu^\alpha[q_{\nu+2},\ldots,q_n]^\alpha_{(n-\nu-1)}}$.

Выражение $SB(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in B(\Lambda)}\frac{1}{(\overline{x}_1\ldots\overline{x}_s)^\alpha}$ будем называть суммой Быковского.

Теорема 5. *Для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(a,N)$ справедливы неравенства*

$$SB(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha} + \frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right) + 2\zeta^2(\alpha)SB(\Lambda(a,N)|\alpha).$$

Для суммы Быковского решётки $\Lambda(a,N)$ решений линейного сравнения несложно получить двусторонние оценки.

Теорема 6. *Для суммы Быковского справедливы неравенства*

$$\frac{c_1(\Lambda(a,N)|\alpha)}{N^\alpha} \leqslant SB(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{c_2(\Lambda(a,N)|\alpha)}{N^\alpha},$$

где $c_1(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(q_{\nu+1})^\alpha$, $\quad c_2(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(q_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+2}}+\frac{1}{q_\nu}\right)^\alpha$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
2. Г. Ф. Вороной Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей // В книге Г. Ф. Вороной. Собрание сочинений в трех томах. Т. 1, С. 197–391.
3. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
4. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

УДК 669.15

Строение зон газолазерного термического влияния сталей

И. В. Минаев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
А. А. Калинин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: antony-ak@mail.ru
Е. А. Протопопов (Россия, г. Тула) Тульский государственный университет
e-mail: pea_12@mail.ru
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Structure of zones of gas-laser thermal influence of steels

I. V. Minaev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
A. A. Kalinin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: antony-ak@mail.ru
Protopopov Evgeny Aleksandrovich (Russia, Tula)
Tula State University (Tula)
e-mail: pea_12@mail.ru
N. N. Dobrovolsky (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Исследовано строение зоны термического влияния при газолазерной резке (ГЛР) сталей различных марок. Установлено, что вблизи поверхности газолазерного реза в зоне термического влияния присутствует белый слой. Непосредственно к нему примыкает область со структурой мелкоигольчатого мартенсита, что и обеспечивает микротвердости на поверхности ГЛР самое высокое значение, с ней граничит область со структурой феррита. Далее расположена область с феррито-перлитной структурой, состоящей из фаз феррита и цементита и соответствующей структуре стали в исходном состоянии.

При газолазерном воздействии на металлическое вещество образуются зоны газолазерного термического влияния (ЗГЛТВ), состоящие из нескольких гетерофазных структурных слоев, определяющих структуру, свойства и ресурс получаемых изделий из металлических сплавов [1, 2]. С использованием математического и цифрового моделирования можно получать математические модели, связывающие протяженность ЗГЛТВ с параметрами газолазерного реза: мощностью, скоростью реза, давлением вспомогательного газа (кислорода), фокусным расстоянием и химическим составом материала заготовки, из которой получают конечную деталь [1, 3]. Применением нелинейной многопараметрической оптимизации вычисляли режимы газолазерной обработки для получения детали с заданными параметрами [4]. Актуальность работы подтверждается её выполнением в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 6082.2017/8.9), а также соответствием Приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в РФ в части рационального природопользования, ресурсосбережения и энергоэффективности.

Для исследования в качестве объектов были выбраны металлические горячедеформированные листы, изготовленные из углеродистых конструкционных качественных сталей 20, 35, 45 (ГОСТ 1050-88), и инструментальных углеродистых сталей У7, У8А (ГОСТ 1435-99). Из стальных листов на трехкоординатном лазерном комплексе газолазерной резкой вырезали образцы 40х40 мм. Лазерный комплекс снабжен оптической головкой ЭИП 1119 производства НТО «ИРЭ-Полюс» и системой подачи технологического газа - кислорода высокой степени чистоты в зону лазерной резки.

При подготовке образцов ГЛР в лазерном комплексе использовали и авторские разработки: трехкоординатный лазерный комплекс, оптическую головку для лазерной резки листового проката и установку для лазерной обработки изделий, защищенные патентами РФ на полезные модели: 151792 от 08.10.2014 и 122325 от 25.04.2012.

Параметрами газолазерной резки являлись: мощность W излучения в пределах изменения от 750 до 1400 Вт, скорость резки V в пределах изменения от 700 до 1400 мм/мин; давление вспомогательного газа P в пределах изменения от 0,1...2,0 атм, фокусное расстояние F в пределах изменения от 297 до 301 мм положения фокального пятна вдоль оси оптической головки.

Критериями (показателями) качества поверхности газолазерного реза являлись: отсутствие грата (капель расплава, застывших на поверхности реза после кристаллизации), протяженность зоны газолазерного термического влияния L, отклонение от ортогональности (перпендикулярности) поверхности реза a, величина шероховатости поверхности реза Rz.

Комплексная методика исследования образцов из углеродистых сталей после ГЛР на разных режимам включала: изготовление образцов газолазерной резкой, применение металлографического анализа, измерение шероховатости поверхности после ГЛР, выполнение микроскопического анализа для исследования строения и структуры ЗГЛТВ, измерение микротвердости по Виккерсу, измерение перпендикулярности поверхности ГЛР, выполнение статистической обработки экспериментальных результатов. Макроскопический анализ проводили для исследования поверхности ГЛР и отсутствия грата на стереоскопическом микроскопе с использованием цифровой техники и измерительных средств. Величину шероховатости поверхности ГЛР количественно оценивали характеристикой Rz, определяемой высотой неровностей профиля поверхности ГЛР по десяти точкам на портативном измерителе шероховатости TR 220 с применением статистической обработки результатов измерений.

Микроскопический анализ проводили на металлографическом микроскопе Observer Dfm при увеличениях 100, 200, 500 и 1000 крат, микроскопе «Neaphat 21» и на электронном микроскопе (РЭМ) JEOL «JSM 6390» с энергодисперсионным рентгеновским спектрометром BRUKER «QUANTEX QXI». Измерения перпендикулярности поверхности реза (a) проводили угломером (ГОСТ 5378-88). За критерий a принимали величину отклонения поверхности реза от 90°. Статистическую обработку результатов экспериментов выполняли с использованием пакетов прикладных программ на ЭВМ.

Выполнены дюрометрические исследования на образцах сталей 20, 35, 45, У7, У8А, измерена микротвердость от поверхности образца в глубь. Микротвердость по Виккерсу (ГОСТ 2990-75) измеряли на твердомере HV 1000 производства фирмы «Time» (нагрузка 2Н, выдержка 10 с) перпендикулярно поверхности реза вглубь образца. Пределы относительной погрешности измерения микротвердости составляли от 6 % до 9 %. Получены количественные оценки протяженности зоны газолазерного термического влияния по данным анализа значений HV.

Установлено, что характер изменения микротвердости у образцов всех исследованных сталей подобен. Наибольшие значения микротвердости отмечены вблизи поверхности реза, по мере перемещения вглубь образца HV снижается до величины, характерной для исходного состояния. За протяженность зоны газолазерного термического влияния L принимали расстояние от поверхности реза до слоя с постоянной микротвёрдостью.

На образцах из сталей 20, 35, 45, У7, У8А исследована структура ЗГЛТВ с использованием металлографического и электронно-микроскопического анализа. Получены систематические данные по микроструктуре ЗГЛТВ углеродистых сталей 20, 35, 45, У7, У8А, выявлены особенности формирования структуры и общие закономерности строения ЗГЛТВ.

Установлено строение ЗГЛТВ на образцах сталей марок 35 и У8А. Вблизи поверхности ГЛР в зоне газолазерного термического влияния присутствует белый слой. Непосредственно к нему примыкает область со структурой мелкоигольчатого мартенсита, что и обеспечивает на поверхности ГЛР самое высокое значение микротвердости. С областью с мартенситной структурой граничит область со структурой феррита. За ней расположена область с феррито-перлитной структурой, состоящей из фаз феррита и цементита, и соответствующей структуре стали 35 в исходном состоянии.

Микроструктура ЗГЛТВ образца стали У8А имеет: область со столбчатой дендритной структурой, которая была образована оплавлением поверхности при лазерном воздействии и последующим ускоренным охлаждением; область белого слоя; область со структурой мелкоигольчатого мартенсита с некоторым количеством остаточного аустенита; переходную область с феррито-перлитной структурой, которая переходит в структуру основного металла, состоящую из перлита. Дендритный слой в структуре ЗГЛТВ обнаружен только в образцах стали У8А. Вероятно, это обусловлено максимальной мощностью лазерного излучения при ГЛР образцов стали У8А, а также меньшей температурой её ликвидуса по сравнению с другими исследованными углеродистыми сталями.

Обнаруженный эффект полного или частичного обезуглероживания переходной области ЗГЛТВ свидетельствует о существенном перераспределении углерода в ЗГЛТВ при лазерном кратковременном воздействии. При этом углерод диффундирует из глубинных слоев ЗГЛТВ к поверхностным. Слой с ферритной структурой формируется при нагреве в интервале температур от области температур, предшествующих эвтектоидному превращению, до температур окончания этого превращения с учетом сдвига критических точек при ГЛР, поэтому соответствует интервалу температур предпревращений перед критической точкой Ac_1. Вероятнее всего следует видеть две причины проявления эффекта: градиент температур между глубинными и поверхностными слоями как движущая сила диффузии углерода и повышенная диффузионнаяю подвижность углерода в состоянии предпревращения.

Необходимо отметить, что микротвердость феррита, испытавшего термомеханическое влияние ГЛР, выше микротвердости исходной феррито-перлитной структуры. Причина этого заключается в возрастании плотности дефектов кристаллического строения (вакансий дислокаций, границ зерен, поверхностей раздела фаз) из-за градиентов температур и напряжений в ЗГЛТВ, которые наряду с $\alpha \leftrightarrow \gamma$ перекристаллизацией приводят к появлению полей напряжений, вызванных разными удельными объемами и коэффициентами линейного расширения сосуществующих фаз. Постепенно ЗГЛТВ переходит в структуру стали не испытавшей газолазерного воздействия. Сложные физические процессы, протекающие при ГЛР в металлической структуре, сопровождаются переносом углерода из глубинных слоев к поверхностным. Это явление является общим для всех исследованных доэвтектоидных и эвтектоидных сталей. Такое перераспределение углерода и может служить причиной формирования белого слоя и мартенситной структуры даже в малоуглеродистых сталях, приводя к поверхностному упрочнению [1], что важно при получении стальных деталей сложной формы [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минаев И. В., Гвоздев А. Е. Особенности формирования структуры и свойств металлических сплавов системы "железо - углерод"при газолазерной резке: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2021. 348 с.

2. Гвоздев А. Е., Минаев И. В., Кутепов С. Н., Калинин А. А., Сапожников С. В. Ресурсосберегающие технологии получения заготовок быстрорежущего инструмента: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2021. 316 с.

3. Сергеев Н. Н., Минаев И. В., Гвоздев А. Е., Чеглов А. Е., Тихонова И. В., Губанов О. М., Цыканов И. А., Алявдина Е. С., Бреки А. Д. Влияние содержания углерода и параметров лазерной резки на строение и протяженность зоны термического влияния стальных листов // Сталь. 2018. № 5. С. 21-28.

4. Minaev I. V., Tikhonova I. V., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Arkhipova E. A. Formation of the cut surface and the surface hardening of chain sprockets made of St3 and 30KhGSA steels during laser cutting // Russian Metallurgy (Metally). Vol. 2021. No. 4. P. 501-506.

УДК 511.32

Биквадратичные поля Дирихле и алгоритмы построения четырёхмерных квадратурных формул с помощью наилучших совместных приближений второго рода[1]

А. В. Михляева (Росиия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта по гранту № 19-41-710004_р_а.

Biquadratic Dirichlet fields and algorithms for constructing four-dimensional quadrature formulas using the best joint approximations of the second kind[1]

A. V. Mikhlyaeva (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail:white.background.invisible@mail.ru

Биквадратичные поля Дирихле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, где a, b — бесквадратные взаимно простые натуральные числа, в четырёхмерном случае дают пример эффективно заданных алгебраических решёток в реализации метода К. К. Фролова [9], [10]. Главное их достоинство в том, что легко выписать базис этих решёток Λ: $\vec{\lambda}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{a}, -\sqrt{a})$, $\vec{\lambda}_3 = (\sqrt{b}, \sqrt{b}, -\sqrt{b}, -\sqrt{b})$, $\vec{\lambda}_4 = (\sqrt{ab}, -\sqrt{ab}, -\sqrt{ab}, \sqrt{ab})$, $\det\Lambda = 16ab$. На соответствующих алгебраических сетках с весами достигается правильный порядок погрешности приближённого интегрирования на классах Коробова E_4^α [4] и правильный порядок гиперболической дзета-функции четырёхмерных решёток [2], [3].

Недостатки этих квадратурных формул с алгебраическими сетками при $1 < \alpha \leqslant 2$ несколько меньше, чем в общем случае, по двум причинам:

— в этих квадратурных формулах веса можно взять достаточно простые, заданные весовой функцией

$$\rho(\vec{x}) = \prod_{j=1}^{4}(1 - |x_j|);$$

— при такой весовой функции нетрудно оценить соответствующие константы. Следовательно, в этом случае эти квадратурные формулы можно применять на практике после соответствующих численных экспериментов.

В связи с этим возникает вопрос о приближении биквадратичных алгебраических сеток рациональными. Поскольку рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки, взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения биквадратичной алгебраической решётки целочисленной четырёхмерной решёткой.

Из теории обобщённых параллелепипедальных сеток и квадратурных формул с этими сетками возникает следующая постановка.

Пусть у нас есть алгебраическая решётка $\Lambda(t,F) = t\Lambda(F)$. $(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \Theta^{(3)}, \Theta^{(4)})$ — точки решётки $\Lambda(F)$, образующие полный набор алгебраически сопряжённых чисел. $\Theta = \Theta^{(1)}$ пробегает кольцо целых алгебраических чисел чисто вещественного алгебраического поля F.

Вопрос о приближении алгебраической решётки $\Lambda(t,F)$ целочисленной решёткой $\Lambda(t)$ можно ставить так: Найти целочисленную решётку $\Lambda(t)$ такую, что расстояние $\rho(\Lambda(t), \Lambda(t,F))$ минимальное для заданного натурального t.

Согласно теории гиперболической дзета-функции решёток наиболее важны решётки Λ, для которых отношение гиперболического параметра решётки $q(\Lambda)$ к $\det\Lambda$ наибольшее.

В связи с этим можно дать следующее определение наилучшего приближения алгебраической решётки $\Lambda(t,F)$ целочисленной решёткой $\Lambda(t)$.

Целочисленная решётка $\Lambda(t)$ называется наилучшим приближением алгебраической решётки $\Lambda(t,F)$ с показателем β, если для любого натурального $t_1 < t$ выполняется неравенство

$$\frac{q(\Lambda(t)) \cdot \ln^\beta \det\Lambda(t)}{\det\Lambda(t)} > \frac{q(\Lambda(t_1)) \cdot \ln^\beta \det\Lambda(t_1)}{\det\Lambda(t_1)}.$$

[1]The study was carried out with the financial support of the RFBR within the framework of the scientific project under grant № 19-41-710004_r_a.

Такая постановка является новой и ранее не встречалась в литературе.

Связанный с такой постановкой принципиальный вопрос заключается в следующем: Какое минимальное значение β допустимо в определении наилучшего приближения алгебраической решётки целочисленной?

Если окажется, что $\beta > 0$, тогда для наилучших приближений алгебраических решёток имеется аналог теоремы Туэ для приближения алгебраических чисел.

В работе [6] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$. В работе [7] эти исследования были продолжены и была найдена функция качества $H(M(\Lambda_m(p)))$, позволяющая её вычислять за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций. В работе [8] был рассмотрен общий случай квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где дискриминант поля d — произвольное бесквадратное натуральное число больше 1 (или d — радикал).

Для величин H_k, заданных равенствами

$$H_k = \frac{9}{Q_k} \sum_{n=0}^{Q_k - 1} \left(1 - 2\frac{n}{Q_k}\right)^2 \left(1 - 2\left\{\frac{P_k n}{Q_k}\right\}\right)^2,$$

в работе [1] доказана теорема, согласно которой

$$H_k = 1 + \frac{4}{5Q_k^2} \left(10 + 5k + \sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda^2 - \frac{3(P_k^2 + Q_{k-1}^2)}{Q_k^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{Q_k} \left(2 \sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda (Q_\lambda T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda-1}) - 10 \sum_{\lambda=1}^{k-1} Q_{\lambda-1} T_{k,\lambda+1}\right)\right).$$

Здесь через $T_{k,\nu}$ обозначены величины $T_{k,\nu} = [q_{\nu+1}, \ldots, q_k]_{(k-\nu)}$.

При биквадратичном случае особую роль играют наилучшие совместные приближения второго рода для квадратичных иррациональностей $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$.

По определению 1 [5] речь идёт о таких q, что $(q, q\sqrt{a} - r_1, q\sqrt{b} - r_2, q\sqrt{ab} - r_3)$ — наилучшее приближение второго рода. Тогда решётка $\Lambda(q, F)$ будет приближаться целочисленной решёткой $\Lambda_{\mathbb{Z}}(q, F)$, заданной базисной матрицей A_q:

$$A_q = \begin{pmatrix} q & q & q & q \\ r_1 & -r_1 & r_1 & -r_1 \\ r_2 & r_2 & -r_2 & -r_2 \\ r_3 & -r_3 & -r_3 & r_3 \end{pmatrix}, \quad \det A_q = 16 q r_1 r_2 r_3.$$

Взаимная решётка $\Lambda^*_{\mathbb{Z}}(q, F)$, точки которой будут образовывать соответствующую обобщенную параллелепипедальную сетку,задаётся базисной матрицей

$$A^*_q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4q} & \frac{1}{4q} & \frac{1}{4q} & \frac{1}{4q} \\ \frac{1}{4r_1} & -\frac{1}{4r_1} & \frac{1}{4r_1} & -\frac{1}{4r_1} \\ \frac{1}{4r_2} & \frac{1}{4r_2} & -\frac{1}{4r_2} & -\frac{1}{4r_2} \\ \frac{1}{4r_3} & -\frac{1}{4r_3} & -\frac{1}{4r_3} & \frac{1}{4r_3} \end{pmatrix}, \quad \det A^*_q = \frac{1}{16 q r_1 r_2 r_3}.$$

Для оценки качества рациональной сетки $M(\Lambda^*_{\mathbb{Z}}(q, F)) = \Lambda^*_{\mathbb{Z}}(q, F) \bigcap [0; 1)^4$ можно использовать функцию $H(M(\Lambda^*_{\mathbb{Z}}(q, F)))$:

$$H(M(\Lambda^*_{\mathbb{Z}}(q, F))) = \frac{81}{16 q r_1 r_2 r_3} \sum_{M_{k,l,n,m} \in M(\Lambda^*_{\mathbb{Z}}(q, F))} \prod_{j=1}^{4} (1 - 2x_{j,k,l,n,m})^2,$$

где $x_{1,k,l,n,m} = \frac{k}{4q} + \frac{l}{4r_1} + \frac{n}{4r_2} + \frac{m}{4r_3}$, $x_{2,k,l,n,m} = \frac{k}{4q} - \frac{l}{4r_1} + \frac{n}{4r_2} - \frac{m}{4r_3}$, $x_{3,k,l,n,m} = \frac{k}{4q} + \frac{l}{4r_1} - \frac{n}{4r_2} - \frac{m}{4r_3}$, $x_{4,k,l,n,m} = \frac{k}{4q} - \frac{l}{4r_1} - \frac{n}{4r_2} + \frac{m}{4r_3}$.

Показателем качества сетки можно взять величину константы И. Ф. Шарыгина:

$$Sh(M(\Lambda^*_{\mathbb{Z}}(q,F))) = (H(M(\Lambda^*_{\mathbb{Z}}(q,F))) - 1) \cdot (16qr_1r_2r_3)^2 \ln^{-3}(16qr_1r_2r_3).$$

Реализованные в системе Mathcad алгоритмы дают следующие результаты:

При выполнении программной реализации №1 получаем значения функции $TKS(TK)$:

0	1	2	3	4	5
307	523	701	$1,069 * 10^3$	$1,543 * 10^3$	$2,129 * 10^3$
0,091	0,041	0,028	0,015	$8,369 * 10^{-3}$	$4,996 * 10^{-3}$
45,477	45,974	49,076	50,434	50,358	50,313

6	7	8	9	10	11
$3,001 * 10^3$	$4,001 * 10^3$	$5,003 * 10^3$	$6,007 * 10^3$	$8,191 * 10^3$	$1,001 * 10^4$
$3,025 * 10^{-3}$	$2,001 * 10^{-3}$	$1,48 * 10^{-3}$	$1,009 * 10^{-3}$	$6,219 * 10^{-4}$	$4,859 * 10^{-4}$
53,084	56,147	59,962	55,274	57,026	62,262

При выполнении программной реализации №2 получаем значения функции $ND(10000,8)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 7 & 22 & 198 & 1504 & 5613 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 10 & 31 & 280 & 2127 & 7938 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 12 & 38 & 343 & 2605 & 9722 \\ 2 & 7 & 10 & 12 & 17 & 54 & 485 & 3684 & 13749 \\ 0,4142136 & 0,2426407 & -0,3431458 & 0,0710678 & -0,1005051 & 0,1126984 & 0,0142853 & -0,0228022 & -0,0192744 \\ -0,2679492 & 0,1961524 & -0,0717968 & -0,339746 & 0,1243557 & 0,1051178 & -0,0539401 & 0,0044146 & 0,0011829 \\ 0,4494897 & 0,3484692 & -0,202041 & 0,2474487 & 0,1464282 & -0,1112257 & -0,0010309 & 0,0325731 & -0.0140738 \\ 0,4494897 & 0,3484692 & 0,3431458 & 0,339746 & 0,1464282 & 0,1126984 & 0,0539401 & 0,0325731 & 0,0192744 \end{pmatrix}.$$

Согласно программным реализациям алгоритмов и по полученным результатам построены таблица наилучших совместных приближений второго рода для квадратичных иррациональностей, таблицы значений численного вычисления интеграла от граничной функции по биквадратичным алгебраическим сеткам, соответствующим параметрам наилучших совместных приближений и по соответствующим рациональным сеткам, а также рассчитаны таблицы значений констант Шарыгина для биквадратичных алгебраических сеток и соответствующих рациональных сеток.

Основной момент заключается в том, что построен алгоритм нахождения обобщённых параллелепипедальных четырёхмерных сеток с помощью наилучших приближений биквадратичных алгебраических решёток, основанный на использовании наилучших совместных приближений второго рода только трёх квадратичных иррациональностей $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab}$ вместо шести, что даёт улучшение в теореме Дирихле показателя степени приближения $1/3$ вместо $1/6$.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. Монография под редакцией Н. М. Добровольского. — Тула, 2012. — 193 с.

2. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, № 4(44). С. 4-107.

3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с.

4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе (второе издание). — М.: МЦНМО, 2004. – 288 с.

5. Михляева А. В. Биквадратичные поля Дирихле, наилучшие совместные приближения и алгоритмы построения четырёхмерных квадратурных формул // Материалы XX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 21-24 сентября 2021 г.) — Тула, 2022. С. 152-155.

6. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 3(67). С. 241-256.

7. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 1(69). С. 305-310.

8. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток - II // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 3(75). С. 223-231.

9. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231, № 4. — С. 818-821.

10. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - М.: ВЦ АН СССР. — 1979.

———————————————————————————————

УДК 511.3

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток

Е. М. Рарова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rarova82@mail.ru

Trigonometric sums of grids of algebraic lattices

E. M. Rarova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rarova82@mail.ru

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$. Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество $M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}$.*

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x}+(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x}\in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x}\notin(-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})}d\vec{x}\right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1\ldots\overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma}\in\mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II-ого типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int\limits_{0}^{1}\cdots\int\limits_{0}^{1} f(\vec{x})d\vec{x} = (\det\Lambda)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)}\rho_{\vec{x}}f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda),\{\vec{y}\}=\vec{x}}\rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — *погрешность квадратурной формулы.*

Пусть $\vec{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν $(\nu=1,\ldots,s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta}=(\Theta_1,\ldots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t>0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) = \left\{\vec{x} = \left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\ldots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right) = t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Совокупность $M\subset G_s$ точек $M_k=(\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k))$ $\quad(k=1\ldots N)$ называется *сеткой M* из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы.* Величины $\rho_k=\rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. Будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

В работах [2]–[6] использовалась весовая функция $\rho_r(x)$, определенная равенствами

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu}\dfrac{(-1)^{\nu}}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1-(-1)^r(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu}\dfrac{1}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases}, \tag{6}$$

при этом для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int\limits_{-1}^{1} \rho_r(x) e^{2\pi i\sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leqslant \frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{7}$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с некоторой константой $B(r)$.

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{8}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t\cdot\Lambda(T))$ из $N'(t\cdot\Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1,\ldots,N'(t\cdot\Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k,\, \vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\, \vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для произвольной решётки Λ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[1]

$$S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' \int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m}-\vec{x})} d\vec{y}, \tag{9}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Лемма 1. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_{-1}^{1} (1-|x|) e^{2\pi i\sigma x} dx \right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-2}, \quad \text{при } \overline{\sigma} = \max(1,|\sigma|). \tag{10}$$

[1]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

Теорема 2. *При $t \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \tag{11}$$

Теорема 3. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \tag{12}$$

В работе [7] с помощью функции $\rho_r(x)$ эти теоремы были усилены:

Теорема 4. *Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(t(m, \ldots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{13}$$

Теорема 5. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m}) \leqslant B(r) \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \tag{14}$$

Перенесем теоремы 4 и 5 на случай бесконечно дифференцируемой весовой функции $\rho_\infty(x)$.

В работе [1] была определена бесконечно дифференцируемая функция

$$\rho_\infty(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 - e^{\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{1+x}}}, & \text{при } -1 < x < 0, \\ 0, & \text{при } |x| \geqslant 1. \end{cases} \tag{15}$$

Использование бесконечно дифференцируемых весовых функций позволяет в методе Фролова [9] избавиться от зависимости квадратурной формулы от класса E_s^α.

Лемма 2. *Справедливо разложение на отрезке $[-1, 1]$ в ряд Фурье:*

$$\rho_\infty(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_\infty(m) e^{\pi i m x},$$

где $c_\infty(0) = \frac{1}{2}$ и $c_\infty(m) = \begin{cases} 0, & \text{при } m = 2n, \\ O\left(\frac{1}{\overline{m}^r}\right), & \text{при } m = 2n+1 \end{cases}$ при $m \neq 0$ и произвольном натуральном $r > 1$.

Лемма 3. *Пусть функция $\rho_\infty(x)$ определена равенствами (15). Тогда дляя любого действительного числа σ и интеграла*

$$I_\infty(\sigma) = \int_{-1}^{1} \rho_\infty(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_\infty(\sigma)| \leqslant \begin{cases} (\overline{\sigma})^{-r}, & \text{при} |\sigma| \leqslant 1, \\ \frac{B(r,\infty) 2\pi \|\sigma\|}{2\pi \overline{\sigma}^{r+1}}, & \text{при } |\sigma| > 1 \end{cases} \tag{16}$$

и функция $\rho_\infty(x)$ — весовая функция бесконечного порядка с константами $B(r,\infty)$ $(r \in \mathbb{N})$, где

$$B(r,\infty) = \int\limits_0^1 |f_{r+1}(x)|dx.$$

Теорема 6. *Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{17}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и, следовательно, $\vec{m} \neq t(m,\ldots,m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Для решетки $\Lambda = \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ определим два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условия $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geqslant 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leqslant C(\Lambda)$.

Лемма 4. *Для любого действительного x справедливы неравенства*

$$\frac{1}{\overline{\overline{n-x}}} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2\overline{x}}, & \text{при } \overline{n-x} \geqslant 2\overline{x}, \\ \frac{1}{\overline{\overline{x}}}, & \text{при } 2\overline{x} > \overline{n-x} \geqslant \overline{x}, \\ \frac{2}{\overline{\overline{x}}}, & \text{при } \frac{\overline{x}}{2} \leqslant \overline{n-x} < \overline{x}, \\ \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}, & \text{при } \overline{n-x} < \frac{\overline{x}}{2}. \end{cases} \tag{18}$$

Теорема 7. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m}) \leqslant B(r,\infty) \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \tag{19}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

2. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49

3. Рарова Е. М. Тригонометрической суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39

4. Рарова Е. М. Тригонометрической суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: соременные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидисятилетию со сдня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 356–359.

5. Рарова Е. М. О взвешанном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сб. 2018, Т. 19, вып. 1, с. 200–219.

6. Е. М. Рарова Тригонометрической суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сб. 2019, Т. 20, вып. 2, с. 399–405.

7. Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток // Чебышевский сб. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 232–240.

8. Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский Тригонометрических суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. вып. 3. С. 166–178.

9. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.

———————————————————————————

УДК 511.482

Применение теоретико-числового метода к решению дифференциальных уравнений в частных производных[1]

А. В. Родионов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Application of the number-theoretic method to the solution of differential equations in partial derivatives

A. V. Rodionov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

1. Введение

Теоретико-числовой метод в приближённом анализе берёт своё начало в 1956 году, когда в Математическом институте АН СССР под руководством Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова начал работать семинар, целью которого была разработка новых многомерных квадратурных формул. За более чем шестидесятилетнюю историю развития метода было получено несколько эффективных способов численного интегрирования с применением теоретико-числовых сеток.

Однако применение теоретико-числового метода не ограничивается только интегрированием. За последнее время появились новые результаты в теории и практике численного интерполирования и решения интегральных уравнений. При этом теория применения теоретико-числовых методов в приближенном анализе к решению дифференциальных уравнений в частных производных развивалась не так активно.

В данной работе приведены основные результаты автора по этой проблематике.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-41-710004_р_а

2. Теоретико-числовой метод решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \tag{1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \ldots, s),$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_s), \tag{2}$$

где

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \tag{3}$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \ldots + n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1, \ldots, n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α $(\alpha > m(Q) + 1)$.[1]

Таким образом,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} c_{m_1,\ldots,m_s} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \tag{4}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1,\ldots,m_s}| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha}. \tag{5}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha} = \sup_{m_1,\ldots,m_s} |c_{m_1,\ldots,m_s} (\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha| < \infty \tag{6}$$

является нормой на пространстве E_s^α, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Пусть задана целочисленная решетка Λ, которая определяет обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ и абсолютно минимальную гиперболическую полную систему вычетов $M_H^*(\Lambda)$. С задачей Коши (1) — (3) свяжем дискретную задачу Коши с решеткой Λ, отличие которой от просто задачи Коши заключается в том, что начальное условие ослабляется и задается не на единичном s-мерном кубе, а только на конечном множестве $M(\Lambda)$.

Теорема 1. *Решением дискретной задачи Коши с решеткой Λ является тригонометрический многочлен*

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \tag{7}$$

где

$$c(\vec{m}) = c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}. \tag{8}$$

[1] Условие на α гарантирует, что ряд Фурье для образа $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)\varphi(\vec{x})$, полученный почленным дифференцированием, равномерно и абсолютно сходится.

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(t,\vec{x})$ как приближение к решению $u(t,\vec{x})$ задачи Коши. Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

Теорема 2. *Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения задачи Коши, справедливо неравенство*

$$|u(t,\vec{x})-u_\Lambda(t,\vec{x})| \leqslant \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E_s^\alpha(Q,T)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}}\left(\frac{2^s\ln^{s-1}q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{s-2}\frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!}\sum_{k=m}^{s-1}\frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k}\left(\sum_{j=k+2}^{s}C_s^j 2^j\zeta(\alpha)^{j-2}+\sum_{j=k+1}^{s}C_s^j 2^j\frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1}\right)\right). \qquad (9)$$

3. Теоретико-числовой метод решения задачи Дирихле

Рассмотрим задачу Дирихле

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\vec{x})=f(\vec{x}), \qquad (10)$$
$$u(\vec{x})\big|_{\partial\overline{G_s}}=\varphi(\vec{x}),\quad u(\vec{x}),f(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\in E_s^\alpha, \qquad (11)$$

где

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)=\sum_{j_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{j_s=0}^{n_s}a_{j_1,\ldots,j_s}\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}}\ldots\frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}. \qquad (12)$$

Определение 1. *Дискретной задачей Дирихле с решеткой Λ называется уравнение*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\vec{x})=f(\vec{x}),\quad \vec{x}\in M(\Lambda), \qquad (13)$$
$$f(\vec{x})\in E_s^{\alpha,Q}, \qquad (14)$$

с дискретными граничными условиями

$$u(\vec{x})=I_\Lambda\varphi(\vec{x}),\quad \left(\vec{x}\in\partial\overline{G_s}\right), \qquad (15)$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α $(\alpha>m(Q)+1)$, а $I_\Lambda\varphi(\vec{x})$ — её интерполяционный многочлен,

$$I_\Lambda\varphi(\vec{x})=\sum_{\vec{m}\in M^*(\Lambda)}d(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

где

$$d(\vec{m})=\frac{1}{N}\sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)}\varphi(\vec{y})e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{y})},\quad N=|M(\Lambda)|.$$

Решением дискретной задачи Дирихле с решеткой Λ называется тригонометрический многочлен $u(\vec{x})\in\mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (13) с функцией (14) и с дискретными граничными условиями (15).

Теорема 3. *Дискретная задача Дирихле с решёткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \frac{1}{N}\sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)} f(\vec{y}), \quad \vec{x}\in M(\Lambda), \tag{16}$$

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\in\mathfrak{Q},\ \ f(\vec{x})\in E_s^{*\alpha}, \tag{17}$$

с дискретными граничными условиями

$$u(\vec{x}) = I_\Lambda\varphi(\vec{x}), \quad \left(\vec{x}\in\partial\overline{G_s}\right), \tag{18}$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α $(\alpha > m(Q)+1)$, а $I_\Lambda\varphi(\vec{x})$ — её интерполяционный многочлен,

$$I_\Lambda\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in M^*(\Lambda)} d(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

где

$$d(\vec{m}) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)}\varphi(\vec{y})e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|$$

разрешима тогда и только тогда, когда существует c_Λ такое, что для каждого $\vec{j}_{s,s-1}\in J^*_{s,s-1}$ выполнены соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n}\in M^*(\Lambda),\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}}\frac{b(\vec{n})}{Q(\vec{n})} = \sum_{\substack{\vec{n}\in M^*(\Lambda),\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d(\vec{n}),$$
$$m_{j_1}^2+\ldots+m_{j_{s-1}}^2\neq 0, \tag{19}$$

$$\sum_{\substack{\vec{n}\in M^*(\Lambda),\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d(\vec{n}) + {\sum_{\substack{\vec{n}\in M^*(\Lambda),\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}}}' \frac{b(\vec{n})}{Q(\vec{n})} = c_\Lambda,$$
$$m_{j_1}^2+\ldots+m_{j_{s-1}}^2 = 0, \tag{20}$$

где

$$b(\vec{n}) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)} f(\vec{y})e^{-2\pi i(\vec{n},\vec{y})}.$$

Решением дискретной задачи Дирихле с решёткой Λ (16) — (18) является функция

$$u(\vec{x}) = {\sum_{\vec{m}\in M^*(\Lambda)}}' \frac{b(\vec{m})}{Q(\vec{m})}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} + c_\Lambda, \tag{21}$$

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(\vec{x})$ как приближение к решению $u(\vec{x})$ задачи Дирихле. Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

Теорема 4. *Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения задачи Дирихле справедливо неравенство*

$$\|u(\vec{x}) - u_\Lambda(\vec{x})\|_C \leqslant \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E_s^\alpha(Q)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}}\left(\frac{2^s\ln^{s-1}q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2}\frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!}\sum_{k=m}^{s-1}\frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k}\left(\sum_{j=k+2}^{s}C_s^j 2^j\zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^{s}C_s^j 2^j\frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1}\right)\right). \tag{22}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

2. А. В. Родионов. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом В. С. Рябенького // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013, т. 13, вып. 4(2), с. 120–124.

3. А. В. Родионов. О методе Н. М. Коробова приближенного решения задачи Дирихле // Чебышевский сборник, 2014, т. 15, вып. 3, с. 48–85.

4. А. В. Родионов. Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 256–297.

Секция 9. История математики

УДК 51(091)

Математическая жизнь Архипова Геннадия Ивановича (1945–2013)

И. Ф. Авдеев (Россия, г. Орел)
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева
e-mail: ivan_avd@mail.ru
Т. К. Авдеева (Россия, г. Орел)
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева
e-mail: ivan_avd@mail.ru

Mathematical life Gennady Ivanovich Arkhipov (1945–2013)

I. F. Avdeev (Russia, Orel)
Orel State University named after I. S. Turgenev
e-mail: ivan_avd@mail.ru
T. K. Avdeeva (Russia, Orel)
Orel State University named after I. S. Turgenev
e-mail: ivan_avd@mail.ru

2022 год математики, как символично, в сумме дает 6 — первое совершенное число, которое указывает на удивительную, загадочную науку, которая исследует и моделирует закономерности окружающего нас мира, устремляет свой взор в будущее, пытаясь во всем установить совершенство. Число 7 тоже покрыто славой, благодаря пифагорейскому союзу и народной молве, которая увековечила это число в своих пословицах и поговорках. В этом 2022 году исполнилось бы 77 лет Геннадию Ивановичу Архипову, удивительному человеку, математику, педагогу. Мы расскажем о нем, нашем земляке-орловце, математике, друге, учителе.

Мы неоднократно писали о Геннадии Ивановиче Архипове, излагая его биографию [2, 3] поэтому здесь приведем лишь отдельные ее фрагменты. Родился Геннадий Иванович 12 декабря 1945 года в Ельце, но вскоре семья Архиповых вернулась в Орел, где росли, учились ее дети: Светлана, Александр, Геннадий. Поэтому, по праву, мы считаем Геннадия Ивановича своим земляком. До последних дней Геннадий Иванович часто приезжал в Орел, мы часто гуляли с ним, посещая памятные для него места. Проходя по Ленинской улице, он с теплотой вспоминал шахматно-шашечный клуб, где часто с друзьями наблюдали за баталиями, которые разыгрывались за столом; по дороге домой обсуждали увиденное. Дома с братом Сашей не раз разыгрывали шахматные партии, порой, Гена отбирал победу у старшего. Может за шахматным столом впервые появилась у Г.И. Архипова потребность в логических размышлениях, здесь же формировалась его феноменальная память.

Улица Тургенева, здесь родная школа - № 24, которая сейчас носит имя И.С. Тургенева. Отличником-зубрилой Гена не был, но школа подарила ему любимого Учителя, друга, открывшего для него волшебный мир математики, это Геннадий Николаевич Плотников. Они всегда были вместе на уроках, занятиях кружка, факультативе, да и после занятий возвращаясь домой, обсуждали интересные задачи, для которых иногда находили новые решения. Расставались ненадолго и уже утром следующего дня любознательный, талантливый ученик Гена Архипов ждал Геннадия Николаевича со своим открытием — новым способом решения вчерашней задачи… Упорный труд друзей и тесок был вознагражден: пришли победы на областных и Всероссийских олимпиадах по математике и физике, где Геннадий Архипов представлял Орловскую область. Кроме побед, у Геннадия сформировалась потребность к размышлениям, строгим математическим доказательствам, появилась уверенность, что именно математика может стать делом всей его жизни. Как часто мы говорим «счастливое стечение обстоятельств», увы, не всегда оно случается. А вот Геннадию Ивановичу Архипову повезло, открытие специализированной школы-интерната № 18 физико-математического профиля в августе 1963 года в Москве, было именно таким подарком судьбы. Приглашение учиться в этой школе получил орловский школьник Гена Архипов. Насколько прозорливы были наши ученые А.Н. Колмогоров и И.К. Кикоин, много сил приложивших для создания этой школы, сколько талантливых мальчишек и девчонок состоялись в математике и физике, благодаря ей.

VI Международная математическая олимпиада 1964 г. в Москве показала, что среди победителей 3 выпускника ФМШ № 18, один из них Архипов Геннадий 39 б. (золото). По итогам олимпиады Г.И. Архипов был зачислен студентом механико-математического факультета МГУ вне конкурса. Незаметно пролетели 5 лет университетской жизни: 1969 год — окончание университета и начало другого этапа — обучение в аспирантуре Математического института имени В.А. Стеклова, где его руководителем был Анатолий Алексеевич Карацуба [2]. Одно из древнейших направлений математики — теория чисел, именно здесь работал Г.И. Архипов, основой для его изысканий стали проблемы, поставленные еще в XVII веке, которые оставались нерешенными до середины XX века. Над их решением Г.И. Архипов работал всю жизнь. Эффективный метод в решении задач теории чисел, был разработан И.М. Виноградовым [4], так называемый «метод тригонометрических сумм» (1947). Виноградов И.М. выделилтри актуальных направления исследований, связанных с его методом: оценки кратных тригонометрических сумм с вещественной функцией в экспоненте; распределение значений арифметических функций от многих переменных; диофантов анализ для целочисленных функций от большого числа переменных, причем переменные могут пробегать различные множества значений. В 1975 г. Г.И. Архипов защитил кандидатскую диссертацию «Кратные тригонометрические суммы и приложения», в которой он решил первые две проблемы, поставленные И.М. Виноградовым в его монографии [4]. Эти исследования были отмечены как лучшие по АН СССР за 1976-1980 г. В этом же году Г.И. Архипов вместе с В.Н. Чубариковым решил проблему моментов для кратных сумм, на основе которой была построена теория, подобная теории Виноградова для однократных сумм Вейля. Позднее они решили задачу И.М. Виноградова оценки сумм Г. Вейля при всевозможных значениях коэффициентов многочлена от нескольких переменных, стоящих в экспоненте. Оценка индивидуальной тригонометрической суммы сводится к оценке ее среднего значения.

Г.И. Архиповым доказана сходимость тригонометрических рядов Виноградова. Получены принципиально новые оценки мощности исключительного множества в аддитивных задачах типа проблем Гольдбаха. Получены оценки количества слагаемых в аддитивных задачах, являющихся многомерным обобщением проблемы Гольдбаха-Варинга и Гильберта-Камке. Г.И. Архиповым обнаружен ряд неожиданных эффектов, оказалось, что если переменные пробегают значения: а) натуральных чисел, то количество слагаемых возрастает экспоненциальным образом относительно степени и слабо зависит от размерности, б) простых чисел — зависимость для количества слагаемых факториальная от степени и экспоненциальная по размерности, в) целых алгебраических чисел — скорость роста количества слагаемых существенно меньше показательной функции от степени системы уравнений [5]. Г.И. Архиповым дано простое доказательство формул Эйлера, Абеля и Пуассона суммирования значений функций по целым точкам отрезка на вещественной прямой. Получено уточнение Ван дер Корпута о замене тригонометрической суммы на интеграл и теоремы И.М. Виноградова о замене тригонометрической суммы на более короткую с небольшой ошибкой (формула обращения для тригонометрических сумм).

С 1983 г. по приглашению И.М. Виноградова — до последних дней своей жизни (14.03.2013) Г.И. Архипов работал в Математическом институте имени В.А. Стеклова АН СССР. В 1984 году Геннадий Иванович защитил докторскую диссертацию по теме «Исследования по проблеме Гильберта-Камке». Исследования по этой проблеме он продолжал многие годы и добился существенных результатов. В 1992 году его исследования по проблеме Гильберта-Камке были отмечены премией А.А. Маркова РАН. Это награда за выдающиеся результаты в области математики; с 1971 и до 2015 года ей удостоились всего 16 человек!

Анализируя математическую жизнь Геннадия Ивановича Архипова и перечисляя его достижения, мы обращались к проблемам теории чисел: проблема Варинга (1770), Гольдбаха (1742), Гильберта (1909), к достижениям математиков, в частности И.М. Виноградова (2 (14) сентября 1891 — 20 марта 1983). Результаты Г.И. Архипова получены в период с 1975 по 2013 годы.

Сегодня развитие теории чисел продолжают молодые математики, в том числе ученики Г.И. Архипова. Чтобы облегчить математикам эту работу была издана книга трудов Геннадия Ивановича, где приведены его исследования с подробными математическими выкладками, а также поставлены проблемы для продолжения изысканий в этом направлении [5].

Книгу можно получить, обратившись на кафедру математики и прикладных информационных технологий и методики обучения математике имени Н.А. Ильиной Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Катанов В. М. Жар-птица. 1931-2011. — Орел: Вешние воды, 2004. 125 с.

2. Авдеев Ф. С., Авдеев И. Ф., Авдеева Т. К. Специализированная школа-интернат №18 физико-математического профиля. Выпуск первый – 1963-1964 г. На пути к математике: Архипов Геннадий Иванович. 1931-2011 // Чебышевский сборник. Том 17, выпуск 1, Тула, 2016. - С. 10-21.

3. Авдеев И. Ф., Авдеева Т. К. Теория чисел: Иван Матвеевич Виноградов (1891-1983) и Геннадий Иванович Архипов (1945-2013). / Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (18-21 ноября 2021 г.Орел): научное электронное издание.- Орел: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2021. - с. 516-525.

4. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.

5. Архипов Г. И. Избранные труды /под ред. В.Н. Чубарикова. — Орел: Изд-во Орловского государственного университета,2013. 464 с.

УДК 51(091)

Авдеев Федор Степанович (1950-2021): математик, ректор, краевед

И. Ф. Авдеев (Россия, г. Орел)
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева
e-mail: ivan_avd@mail.ru

Т. К. Авдеева (Россия, г. Орел)
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева
e-mail: ivan_avd@mail.ru

Avdeev Fedor Stepanovich (1950-2021): mathematician, rector, local historian

I.F. Avdeev (Russia, Orel)
Orel State University named after I.S. Turgenev
e-mail: ivan_avd@mail.ru
T.K. Avdeeva (Russia, Orel)
Orel State University named after I.S. Turgenev
e-mail: ivan_avd@mail.ru

2022 год объявлен годом математики, а это значит, что пойдет разговор об открытиях фундаментальных и прикладных, об их развитии в истории математики и обязательно о личностях, трудами которых они достигнуты. История математики показывает, что наука не развивается одиночками, это, как правило, союз, школа, кружок, сообщество. Например, всем известный Пифагорейский союз со своими традициями и законами, первыми открытиями, историческими проблемами и задачами, которые определяли пути развития математики, а некоторые из них продолжают волновать математиков и сегодня, такие как проблема простых и совершенных чисел. Первые совершенные числа были известны еще пифагорейцам 6 и 28 ($6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$), это VI-V в. до н.э. Древнегреческий математик Евклид нашел еще два совершенных числа 496 и 8128 — III в. до н.э. Прошло 17 веков и только в 1460 году было найдено пятое совершенное число 33550336. Восьмое совершенное число нашел Л. Эйлер, математик, которого по праву называли гением XVIII века, это 2305843008139952128. Прошло более ста лет и уральский священник Иван Матвеевич Первушин, влюбленный в математику, талантливый человек, нашел девятое совершенное число, оно уже содержало 37 цифр, это был 1883 год. Более 2000 лет потратили на эти поиски ученые математики и просто математики, для которых она не стала профессией...

Мы привели один фрагмент факультативного курса «Математические понятия в их историческом развитии», разработанный Федором Степановичем Авдеевым для студентов института естествознания Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева, к сожалению, этот курс был его последним вкладом в развитие математики, ее истории, математического образования и нравственного воспитания студентов.

Рано ушел из жизни Федор Степанович, прожив неполный 71 год, оставил после себя яркий след. Это уникальная многогранная личность, талант которой сформировала, на наш взгляд, математика, ей он не изменял всю жизнь.

В этой статье мы расскажем о Федоре Степановиче Авдееве, который состоялся в трех ипостасях: как математик, ректор и краевед.

Авдеев Ф.С. — математик. Федор Степанович Авдеев родился в селе Сопыч Глуховского района Сумской области (Украина) в бедной крестьянской семье, мать воспитывала двоих сыновей одна, увы... такова была судьба многих послевоенных семей. Воспитатели — дом, где мать с утра до вечера на работе, бабушка — занята хозяйством и улица, о которой во время холода и ненастья приходилось забывать — нечего было одеть... Спасали книги, которые он читал с раннего детства, научившись этому у своих двоюродных братьев и сестер, с которыми жил в одном доме... Школа для Феди храм науки, учился с удовольствием и самозабвенно, был отличником по всем предметам, но особая любовь к математике, в ней он первый помощник своим товарищам, а порой и учителю — Вере Акимовне. В школе получил первые награды как победитель районных и областных математических олимпиад. Как итог: первая в истории школы золотая медаль при окончании учебы была вручена Федору Авдееву.

1968-1970 г. Служба в Армии, награжден медалью «За воинскую доблесть» (1970). В 1971 году поступил в Орловский государственный педагогический институт на физико-математический факультет, во время учебы был Ленинским стипендиатом, занимался общественной работой — член комитета комсомола института; летом — командир студенческих отрядов, итог работы заслуженная награда — медаль «За трудовую доблесть» (1974). Авдеев Ф. С. это человек труда, будь то учеба, работа преподавателем в институте или на полях страны в стройотрядах, но математика, по-прежнему, не отпускала его; любимое место для вдохновения — читальный зал. И вот мечта сделала шаг ему навстречу — целевое направление Орловского государственного педагогического института в очную аспирантуру на кафедру математического анализа МОПИ имени Н. К. Крупской (Москва). Научный руководитель определился сразу — Виталий Петрович Громов, доктор физико-математических наук, профессор. Что дальше? На помощь, как всегда, пришли книги, библиотека имени В.И. Ленина стала его вторым домом. В 60-х годах XX века в работах А. Ф. Леонтьева и В. П. Громова начали рассматриваться вопросы представления произвольных аналитических функций многих комплексных переменных в многомерные функциональные ряды. А. Ф. Леонтьев разработал метод представления произвольных аналитических функций одного комплексного переменного рядами экспонент и более общими функциональными рядами. Развивать этот метод стали его ученики — Ю. Ф. Коробейник, В. П. Громов, В. И. Шевцов, Ю. Н. Фролов, В. Х. Мусоян и др. Вопросов в этом направлении исследования было больше, чем достаточно, над ними нужно работать, искать, обязательно рассмотреть функции многих комплексных переменных, а это заманчиво и интересно.... Так определилась тема работы «Представления функциональными рядами типа рядов Дирихле в пространствах целых функций многих комплексных переменных», которая завершилась защитой кандидатской диссертации. В своей работе Федор Степанович впервые провел исследование многомерной интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева, получил ее новые свойства, что позволило ему впервые доказать многомерную теорему единственности для рассматриваемых многомерных функциональных рядов. Кроме этого, были доказаны необходимые и достаточные условия представления целых функций многих комплексных переменных функциональными рядами рассматриваемого вида. Впервые описана скорость стремления к нулю коэффициентов многомерных функциональных рядов в зависимости от свойств, представляемой функции. Результаты, полученные Авдеевым Ф. С. оказались столь значительными, что были опубликованы в докладах АН СССР [1]. Проведенные Федором Степановичем исследования имеют большое практическое значение, они могут быть использованы при разработке задач теории многомерных уравнений бесконечного порядка и уравнений свертки; в исследованиях инвариантных подпространств весовых пространств целых функций; в задачах спектрального синтеза.

Быстро пролетел творческий период аспирантуры, и вот Ф. С. Авдеев старший преподаватель кафедры математического анализа Орловского государственного педагогического института, теперь он поведет студентов в эту замечательную страну – математику.

Авдеев Ф.С. — ректор. 27.11.1992 г. Авдеев Федор Степанович избран на должность ректора Орловского государственного педагогического института и работал в этой должности по 02.09.2013 года. Под его руководством ОГПИ стал крупным научным и методическим центром России, что позволило ему перейти в статус педагогического университета (1994), а затем классического университета (1996). При этом Федор Степанович не только сохранил традиции вуза, но и заложил новые актуальные направления образовательной деятельности, уделяя внимание возможностям реализации открытого образования, способствуя построению модели и внедрению технологии интенсивного образования, дистанционного обучения и других инновационных образовательных технологий. Были открыты многие специальности и направления подготовки. Научно-исследовательская работа в университете в 2001 году осуществлялась на 84 кафедрах и в 24 исследовательских лабораториях [2]. В стенах университета реализовывался цикл подготовки специалиста от студента до кандидата и доктора наук. Действовала аспирантура по 74 специальностям и докторантура по 7 специальностям, работали 40 научных школ и 9 специализированных советов. В диссертационном совете К212.183.03 Федор Степанович был бессменным председателем 26 лет до дня своей смерти [2]. Большая заслуга Ф.С. Авдеева в установлении и развитии связей с ведущими вузами нашей страны — МГУ имени М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургским государственным университетом, благодаря которым были открыты новые кафедры, научно-исследовательские лаборатории. В университет были приглашены на постоянную работу видные ученые, в том числе математики — академик РАО Ю. М. Колягин, доктор физико-математических наук В. П. Громов; и сегодня работает лаборатория теории функций и функционального анализа имени В. П. Громова. Начиная свой путь в математике именно в этом направлении, Федор Степанович сделал все, чтобы эти исследования могли продолжить студенты Орловского государственного университета. XXI век это поистине век торжества фундаментальной математики и ее приложений, поэтому Ф. С. Авдеев приложил немало усилий для организации в университете научных конференций, симпозиумов и просто встреч с учеными, посвященные обсуждению ее актуальных проблем. В 2000 г. на физмате состоялся IX Международный симпозиум МДОЗМФ (методы дискретных задач математики и физики). На нем выступали академик С. М. Белоцерковский и летчик-космонавт дважды Герой Советского Союза А. А. Леонов. В 2009 году был официальный визит в ОГУ академика Российской академии наук, лауреата Нобелевской премии, члена комитета Государственной Думы РФ по науке и наукоемким технологиям Ж. И. Алферова. Традиционной стала международная школа – семинар молодых ученых «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (с 2000 г.) В 2020 г. проведена Международная научно-практическая конференция, посвященная 115-летию со дня рождения патриарха российского образования, великого педагога и математика, академика РАН С. М. Никольского (1905-2012). Ф.С. Авдеев много сделал в укреплении зарубежных связей и международной академической мобильности, увеличивая экспорт образовательных услуг вуза. Федор Степанович добился международного признания Орловского государственного университета, развивая партнерские отношения университета с образовательными и научными учреждениями Франции, Германии, Бельгии, Испании, Словакии, США, Китая и др. стран (им подписаны 24 действующих соглашения о сотрудничестве) [2]. С 2000 года Авдеев Ф. С. является Почетным доктором математики Реймского университета (Франция); за свою работу он награжден французским орденом академических пальм (2015).

Говорят, что за свою жизнь человек должен построить дом, посадить дерево, вырастить сына. Будучи ректором ОГУ Ф.С. Авдеев построил и реконструировал 11 корпусов и зданий университета; создал коллектив из более чем 1500 преподавателей и сотрудников, вместе с которыми были обучены и воспитаны около 80 тыс. студентов [2]. Посадил дуб, возле общежития ОГУ, в честь рождения своего первенца.

«Я знаю Вас как человека, отзывчивого к инновациям и почитающего традиции, как человека, чьи профессиональные устремления, питаемые бойкостью духа и верой в успех, всегда сопряжены с осознанием общественного и общенационального долга», так характеризовал Ф. С. Авдеева Президент Российского Союза ректоров, ректор МГУ имени М.В. Ломоносова, Вице-президент РАН, академик В. А. Садовничий.

Авдеев Ф.С. — краевед. В структуре университета 12 музеев, один из них музей образования: от классической гимназии — к классическому университету, детище Федора Степановича. Реконструкция здания бывшей Орловской мужской гимназии была началом большой работы для всего коллектива университета по изучению ее знаменитых выпускников (их обнаружено 69 человек). Авдеев Ф. С. возглавил группу краеведов-математиков. Начался сбор материалов по Андрею Петровичу Киселеву (1852-1940), автора учебников математики, уроженца г. Мценска; Константина Дмитриевича Краевича (1833-1892), лучшего учителя физики Санкт-Петербурга второй половины XIX в., автора учебников физики и математики; Ивана Ивановича Жегалкина (1869-1947), математика. Поиски были непростыми: потомков А. П. Киселева удалось найти в Санкт-Петербурге; К. Д. Краевича — во Франции; поиски материалов по И. И. Жегалкину еще не завершены. Проработаны сотни документов архивов во Мценске, Колпне (материалы краеведческого музея), Москве, Санкт-Петербурге, Воронеже. Материалы по А. П. Киселеву и К. Д. Краевичу опубликованы [3, 4] и стали достоянием широкого круга читателей. Личности этих педагогов-математиков стали образцом для подражания нашему подрастающему поколению. Школа №3 г. Мценска и УВК №2 г. Воронежа носят имя А. П. Киселева. Ярищенская средняя общеобразовательная школа Колпнянского района носит имя К. Д. Краевича.

Возможно, со знакомства с этими личностями начнется путь школьников в фундаментальную математику или физику, об этом мечтал Федор Степанович Авдеев.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеев Ф. С. О многомерных функциональных рядах // Чебышевский сборник. 1981. Том 260, № 5. С. 1033-1036.

2. Авдеев Ф. С. Орловский государственный университет. 1931-2011. — Орел: ООО «Модуль», 2011. 276 с.

3. Авдеев Ф. С., Авдеев Т. К. Андрей Петрович Киселев. — Орел: Изд-во Орловской государственной телерадиовещательной компании, 2002. 268 с.

4. Авдеев Ф. С., Авдеев Т. К. Константин Дмитриевич Краевич. Жизнь, Педагогическая деятельность. Научное творчество. — Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2011. 224 с.

УДК 371.38

Задачи научно-исследовательского характера при преподавании темы ортогонализации в электронном обучении

И. Ш. Джаббаров (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский государственный университет
e-mail:ilgar_js@rambler.ru
Н. Н. Асланова (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский государственный университет
e-mail:natiga.cabbarova@mail.ru

Problems of scientific research character in electronic teaching for the theme of orthogonalization

I. Sh. Jabbarov (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail:ilgar_js@rambler.ru
N. Sh. Aslanova (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University
e-mail:natiga.cabbarova@mail.ru

При преподавании некоторых вопросов алгебры средствами электронного обучения рассматриваются вопросы о построении таких многочленов, которые принимают значения достаточно близкие к нулю в данной точке. Такие задачи могут появится в различных формах. К таким задачам с большим успехом применяется LLL алгоритм, с использованием компьютерных методов. Особого внимания заслуживают онлайн среды типа Sage.

Отправной точкой LLL алгоритма является процесс ортогонализации Грама Шмидта. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задан некоторый базис $b_1, ..., b_1$. Процесс ортогонализации состоит в построении нового базиса, который определяется при помощи равенств:

$$b_1^* = b_1, b_i^* = b_j - \sum_{j<i} \mu_{i,j} b_j^*; n \geqslant i > 1,$$

при этом,

$$\mu_{i,j} = \frac{(b_i, b_j^*)}{(b_j^*, b_j^*)}.$$

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана решетка, т.е. множество всех линейных комбинаций с целыми коэффициентами векторов некоторого фиксированного базиса $b_1, ..., b_1$. Основное содержание LLL алгоритма заключается в замене данного базиса решетки таким ее же новым базисом $b_1^*, ..., b_1^*$, для векторов которого в процессе ортогонализации выполнялись бы соотношения

$$|\mu_{i,j}| \leqslant 1/2; i \geqslant 2,$$

и при этом

$$|b_i^*| \geqslant \left(3/4 - \mu_{i,j-1}^2\right) |b_{i-1}^*|^2.$$

Базис решетки с такими свойствами существует и называется LLL приведенным базисом. Такой базис обладает рядом важных свойств, которые привели к важным приложениям в разных областях алгебры и теории чисел. Такой базис является "почти ортогональным"и состоит из "коротких"векторов. Процесс построения такого базиса носит название LLL алгоритма и представляет собой процедуру, требующую огромного количества вычислений. В приложениях часто этот процесс выполняется комьютерными методами, которые занимают приемлемую долю (т. н. полиномиальное количество) машинного времени. Это процедура в среде Sage носит обозначение LLL().

Приведем пример постороения LLL приведенного базиса при помощи Sage. Пусть задана решетка с базисом (он будет целым) [5,2,-6],[1,4,-3],[2,3,0]. В окне Sage вводим следующие команды:
sage: X = matrix(ZZ, [[5,2,-6],[1,4,-3],[2,3,0]])
sage: Y = X.LLL() ; Y

Sage возвращает базис: [1 -1 3], [2 3 0], [4 -2 -3].

В настоящей работе рассматривается вопрос о приближении действительных чисел квадратичными иррациональностями вида

$$\frac{a + b\sqrt{c}}{d},$$

где a, b, c, d целые числа $c \geqslant 0, d \neq 0$. Такие иррациональности простейшие и очень просто выполнять над ними четырех арифметических операций и возведение в степень. Поэтому, зачастую удобно оперировать над ними, чем над десятичными дробями с большим количеством десятичных цифр. Процесс построения такого приближения основывается на построении многочлена второй степени с целыми коэффициентами которое принимает значение близкие к нулю с достаточной степени точности. Метод построение такого многочлена основывается на LLL алгоритм. В среде Sage этот алгоритм дается следующими кодами:

sage: def myalgdep(a, d, $K = 10^u$):
sage: aa = [floor($K * a^i$) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
Здесь a -данное число, d-степень искомого многочлена, 10^{-u} требуемая точность приближения. Например, если требуется построить многочлен с целыми коэффициентами 3-й степени приближающий 0 в точке a = 0.234256 с точностью 10^{-6} мы пишем:
sage: a = 0.234256
sage: myalgdep(a, 3, 10^6)
Sage выдает ответ: $-7 * x^3 - 22 * x^2 - 3 * x + 2$.

Чтобы использовать эту процедуру для приближения чисел квадратичными иррациональностями нужно ввести d=2. Например, приблизим число a=0.141 квадратичными иррационалнстями рассмотренного выше. Исползуя Sage, вводим:
sage: def myalgdep(a, d, K):
sage: aa = [floor($K * a^i$) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
sage: a=0.141
sage: myalgdep(a,2,10^8)

Находим многочлен: $42 * x^2 + 65 * x - 10$.
Поэтому, $a \approx \frac{-65+\sqrt{5905}}{84} \approx 0.140999973973$.
Построим приближение для числа e. После ввода кодов
sage: def myalgdep(a, d, K):
sage: aa = [floor($K * a^i$) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
sage: a=2.718281828
sage: myalgdep(a,2,10^{10})
sage выдает многочлен $-744 * x^2 + 1759 * x + 716$.
Поэтому, $a \approx \frac{-1759-\sqrt{5224897}}{-1488} \approx 2,71828182787$.

Рассмотрим приближение числа π.
sage: def myalgdep(a, d, K):
sage: aa = [floor($K * a^i$) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()

sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
sage: a=math.pi
sage: myalgdep(a,2,10^{10})
Получим многочлен
$245 * x^2 - 71 * x - 2195$,
который дает приближение
$\pi \approx \frac{71+\sqrt{2156141}}{490} \approx 3.1415926537$.

Рассмотрим приближение числа $\sqrt[3]{7}$.
sage: def myalgdep(a, d, K):
sage: aa = [floor($K * a^i$) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
sage: a=1.912931182772
sage: myalgdep(a,2,10^{10})
Получим многочлен
$-1295 * x^2 + 6032 * x - 6800$.
Отсюда следует приближенное равенство:
$\sqrt[3]{7} \approx \frac{-6032+\sqrt{71609024}}{-2590} \approx 1.91293118277$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Москва: Наука, 1975. 432 с.
2. P. Zummerman and others. Computational Mathematics with SageMath. https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en.

———————————————————————

УДК 51(091)

Математизация статики на рубеже XVI–XVII вв.

Е. А. Зайцев (Россия, г. Москва)
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Mathematization of statics at the turn of the XVI–XVII centuries

E. A. Zaytsev (Russia, Moscow)
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Математические и механические трактаты Архимеда сыграли важную роль в формировании науки Нового времени. Особое значение они имели для развития статики, которая во многом благодаря геометрической технике, разработанной в трудах гениального сиракузца, обрела к середине XVII века статус строгой научной дисциплины, изучающей условия равновесия тяжелых тел и приемы нахождения их центров тяжести. Формирование статики шло в эту эпоху, в основном, вокруг архимедова правила рычага, согласно которому два тела, помещенные на коромысле весов, находятся в равновесии, если отношение его плеч обратно отношению тяжестей тел. Доказательство правила рычага опирается у Архимеда на основную аксиому, которая может быть сформулирована в двух вариантах. Первый вариант: «Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются». Второй вариант: «Центр тяжести тела, составленного из двух равных тел, находится на середине соединяющего их отрезка».

Обоснование правила рычага, содержащееся в трактате «О равновесии плоских фигур», не было, однако, логически безупречным. В своем доказательстве Архимед неявно использовал постулат о параллельности линий тяжестей, приложенных к весам, который противоречил общепризнанному физическому постулату, согласно которому эти линии сходятся в центре Земли (Аристотель). Указанный физический постулат был не просто хорошо знаком Архимеду; последний существенным образом использовал его при доказательстве основного принципа гидростатики в трактате «О плавающих телах». Таким образом, противоречие, о котором пойдет речь в этой статье, присутствует уже у самого Архимеда [1, p. 377-379]. В античности и в средние века это обстоятельство, кажется, не было замечено. Хотя Папп Александрийский и указал на то, что силовые линии грузов, подвешенных к коромыслу весов, сходятся к центру Земли, его статика, подобно статике Архимеда, опиралась на постулат о параллельности. Первые сомнения в корректности правила рычага появились в XVI в. после издания переводов архимедовых сочинений на латинский язык.

С точки зрения современной механики проблема согласования двух архимедовых моделей представляется надуманной: размеры весов настолько малы по сравнению с радиусом Земли, что величинами углов, образованных нитями грузов и перпендикулярами к коромыслу, можно пренебречь. Иными словами, можно считать линии действия сил тяжести параллельными. Именно так считали, в частности, С. Стевин и Г. Галилей. Стевин, например, писал: «Все эти несоответствия происходят из-за того, что [нити] ... не являются параллельными; однако, в виду того, что с точки зрения *практики* указанное различие весьма мало, их можно с чистой совестью считать параллельными, ибо, заметить столь малые различия в углах можно только, если длина балки ... составляет несколько миль; кроме того, мелочное и придирчивое выискивание такого рода ошибок не принесет никакой пользы для дела, т.е. для *практической* статики; и потому лучше этим не заниматься» [2, p. 10].

Эту же мысль мы находим у Галилея: «Я прошу вас разрешить нашему Автору принимать то, что принималось некоторыми величайшими мужами, хотя и неправильно. Авторитет одного Архимеда должен успокоить в этом отношении кого угодно. В своей «Механике» и в «Книге о квадратуре параболы» он принимает как правильный принцип, что коромысло весов является прямой линией, равноудаленной во всех своих точках от общего центра всех тяжелых тел, и что нити, к которым подвешены тяжелые тела, параллельны между собою. Подобные допущения всеми принимались, ибо на *практике* инструменты и величины, с которыми мы имеем дело, столь ничтожны по сравнению с огромным расстоянием, отделяющим нас от центра земного шара, что мы смело можем принять ... два перпендикуляра, опущенные из ее концов (имеется в виду малая дуга земной окружности – *Е.З.*) за параллельные линии» [3, с. 310] .

Однако далеко не все современники Стевина и Галилея приняли тезис «от практики». Многие из них заняли в отношении правила рычага двойственную позицию, в основе которой лежало стремление сохранить по возможности обе модели, освященные авторитетами Аристотеля и Архимеда. В итоге, статика XVI-XVII вв. по существу распалась на две разные дисциплины. Одна из них, опиравшаяся на постулат о сходимости силовых линий, трактовала о «космологических» весах, размеры которых были сопоставимыми с размерами Земли. Кроме того, в ней изучалось поведении весов обычного размера, но находящихся вблизи центра Земли (для них линии тяжестей также были сходящимися). Эта дисциплина стала называться «геостатика» (по названию трактата Ж. Ботрана, 1636). Вторая теория статики, опиравшаяся на постулат параллельности, занималась проблемами равновесия «практических» весов, а также вопросами равновесия сил в простых машинах.

Указанную двойственность мы находим, например, в работах Гвидобальдо дель Монте.

С одной стороны, дель Монте включает в состав своей «Механики» специальный раздел, посвященный космологическим весам, в котором сравнивает между собой величины моментов сил при разных углах отклонения коромысла от горизонтали с учетом различного взаимного расположения весов и Земли [4, p. 10r-14r]. Задача, которую он при этом ставит, не связана напрямую с правилом рычага. Цель дель Монте состоит в доказательстве положения, согласно которому момент силы тяжести относительно точки вращения коромысла максимален тогда, когда коромысло слегка наклонено вниз (в противоположность мнению Дж. Кардано, который считал, что максимум достигается в горизонтальном положении). Очевидно, что в подобном рассуждении ключевую роль играет постулат о сходимости линий тяжести. В другой работе дель Монте также упоминает об использовании сходимости силовых линий в трактате Архимеда «О плавающих телах» [5, p. 11]. И наконец, в рукописных заметках *Meditatiunculae de rebus mathematicis* он резко критикует Дж. Бенедетти за то, что последний при обсуждении движения коромысла весов не учитывает фактора сходимости линий тяжестей [6].

Вместе с тем в той же «Механике» при изложении правила рычага дель Монте строит теорию равновесия, опираясь исключительно на постулат о параллельности линий. Очевидное противоречие между двумя подходами он никак не комментирует.

Активное обсуждение условий выполнимости правила рычага начинается в 1636 г. после публикации «Геостатики» Ж. Ботрана [7, p. 156-185]. В этом трактате Ботран попытался построить теорию космологических весов, опиравшуюся на аристотелевский постулат о сходимости. Попытка эта оказалась неудачной, прежде всего, в силу сложности соответствующей теории. В геостатике не выполняется основной постулат статики, который состоит в том, что положение центра тяжести является внутренним свойством тела и не зависит от его положения относительно центра Земли. В геостатике центр тяжести тела, вообще говоря, не фиксирован. Он меняет свое положение при приближении к Земле или удалении от нее, а также при вращении тела вокруг оси. Кроме того, в своей работе Ботран допускал логические ошибки, используя, например, обычный закон рычага в ситуации, которая требовала учета сходимости силовых линий. На эту ошибку указал в письме М. Мерсенну Декарт (1638), который отметил, что правило рычага верно только, «если ... нити тяжестей направлены вниз в виде параллельных линий, а не склоняются к одной и той же точке» [8, p. 185].

Сходное замечание по поводу геостатики высказал в письме Мерсенну П. Ферма (1636): «Я давно подозревал, что Архимед недостаточно точно сформулировал основания механики; он, несомненно, считал, что направления спуска тяжелых тел являются параллельными, ибо без этой гипотезы его доказательства неверны. Речь не идет о том, что данная гипотеза существенно расходится с истиной; значительное расстояние, на котором находится центр Земли, позволяет рассматривать линии спуска тяжелых тел как параллельные. Вместе с тем, такой вывод не может удовлетворить тех, кто ищет глубокой и точной истины» [9, p. 23]. Далее в письме Ферма делает попытку развить собственный вариант геостатики, в рамках которого пытается, в частности, доказать (неверное) утверждение о том, что правило рычага выполняется только в случае совпадения точки опоры весов с центром Земли.

Итог дискуссии о геостатике, в которой помимо Ботрана, Ферма и Декарта приняли участие Мерсенн, Э. Паскаль и Ж. П. Роберваль, подвел Э. Торричелли, предложивший свой вариант решения вопроса.

«Основное возражение, широко распространенное даже среди самых серьезных мужей, – писал Торричелли, состоит в том, что Архимед ... допустил параллельность нитей, подвешенных к весам, в то время как на деле они должны пересекаться в центре Земли. Я же ...

полагаю, что основания механики должны трактоваться иначе. Я согласен с тем, что, если к весам подвешены физические величины, то материальные нити подвешивания пересекутся, ибо каждая из них направлена к центру Земли. Тем не менее, если те же весы ... рассматривать не на поверхности Земли, а в отдаленнейших областях ... выше орбиты Солнца, то тогда нити (хотя они все еще будут направлены к центру Земли), станут намного менее сходящимися, но почти параллельными. Представим себе теперь, что те же механические весы перенесены за пределы звездных Весов небосвода на бесконечное расстояние; тогда легко понять, что линии подвеса не будут более пересекаться, но станут строго параллельными. Когда я рассматриваю весы, нагруженные геометрическими фигурами, я представляю их ... бесконечно удаленными от той точки, к которой устремлены тяжелые тела» [10, p. 9].

Описанный Торричелли мысленный «эксперимент» стал одной из последних попыток согласования правила рычага Архимеда с аристотелевской физикой. Последующее развитие статики пошло по «узкому» пути, намеченному Стевином и Галилеем: ее объектами стали тела, расположенные вблизи поверхности Земли и имеющие размеры, значительно меньшие размеров Земли. В отношении этих тел законы равновесия становились «практически истинными». Именно это обстоятельство позволило придать статике строгую математическую форму. Что же касается геостатической проблематики, столь популярной на начальном этапе научной революции, то она в конечном итоге была предана забвению.

В современных учебниках по истории науки тема геостатики почти полностью отсутствует. Связано это с тем, что с точки зрения позитивизма, на который все еще ориентируется современная история науки, внимание к этой теме, оказанное творцами науки Нового времени, представляется всего лишь курьезом, отвлекающим от исследования магистральных путей развития естествознания.

На самом деле, попытки разработки двух вариантов статики говорят о том, что в XVII в. ученые по-разному трактовали понятие «закона природы». Одни из них (геостатики) понимали под законами природы закономерности, существующие в природе независимо от деятельности человека. Другие (практические статики) исходили из того, что законами природы являются закономерности, относящиеся не ко всей природе, а лишь к определенной ее части, а именно, к той, что включена в практику человеческого преобразования. Если исходить из второго толкования, то слова Галилея о книге природы, написанной на языке математики, следует понимать как указание на то, что математика описывает не природу как таковую, в ее естественном модусе, но технический фрагмент природного бытия, который создается человеком. При таком толковании вопрос о возможности описания природы вне практики преобразования остается открытым. На неудовлетворенность таким положением дел и указывает Ферма, когда говорит о том, что принцип рычага, в его практическом варианте, «не может удовлетворить тех, кто ищет глубокой и точной истины».

Еще один вопрос возникает в этой связи, а именно, вопрос о пересмотре в XVII в. традиционной концепции истинности. В аристотелевской и средневековой традиции истинность понималась как adequatio intellectus rei, т.е. как соответствие понятий ума свойствам природных вещей. В своей деятельности ум подстраивается под объективные формы вещей, существующих независимо от него. В Новое время формируется иное представление об истинности. Истинность теперь понимается как adequatio rei intellectus, т.е. как соответствие искусственно создаваемой вещи или движения правилам, заранее сформулированным интеллектом. Если раньше предметами исследования служили вещи и явлениях, существующие независимо от человека, то теперь таковыми становятся искусственно создаваемые вещи, которые при помощи человеческих рук «подстраиваются» под идеальный образ, создаваемый интеллектом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dijksterhuis E.J. Archimedes. Copenhagen, 1956.
2. Stevin S. De beghinselen der weeghconst. Leyden, 1586.
3. Галилей Г. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки // Он же. Избранные произведения в 2-х тт. Т.2. М., 1964. С. 109-403.
4. Del Monte G. Mechanicorum liber. Pisauri, 1577.
5. Del Monte G. In duos Archimedis aequiponderantium libros Paraphrasis scholiis illustrata. Pisauri, 1588.
6. Renn J., Omodeo P.D. Guidobaldo Del Monte's Controversy with Giovan Battista Benedetti on Positional Heaviness // Guidobaldo del Monte (1545-1607): Theory and Practice of Mathematical Disciplines from Urbino to Europe. Berlin, 2103, P. 53-94.
7. Duhem P. Les origines de la statique. T. 2. Paris, 1906.
8. Descartes. Oeuvres. T. 2. Correspondance. Paris, 1896.
9. Fermat P. Oeuvres. T. 2. Correspondance. Paris, 1894.
10. Torricelli E. Opera geometrica. De dimensione parabolae. Florentiae, 1644.

———————————————————————

УДК 51

Применение дифференциальных уравнений в биологии и медицине

Н. М. Исаева (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: isaevanr@yandex.ru

Application of differential equations in biology and medicine

N. M. Isaeva (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: isaevanr@yandex.ru

Дифференциальные уравнения, применяемые в биологических и медицинских исследованиях, обычно распределяются на два класса: точечные системы и распределительные системы. Точечные системы представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а распределительные системы представляют собой уравнения в частных произведениях. Наиболее адекватными моделями процессов, протекающих в живых организмах, являются системы уравнений в частных произведениях, так как эти процессы разворачиваются как во времени, так и в пространстве. Однако, в очень большом числе случаев можно считать, что во всех частях рассматриваемого объема процессы синхронны и, следовательно, зависимость от координат отсутствует.

Точечные модели описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1}$$

где величины $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — линейные или нелинейные функции переменных x_i, как правило, состоящие из нескольких слагаемых. Положительные члены $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ описывают прибыль компонента x_i, отрицательные — убыль. Для построения системы достаточно знать скорость притока и оттока каждого компонента и их зависимость от переменных x_i.

В случае распределительных систем модели типа (1) усложняются, так как необходимо учесть приток вещества в данный элемент пространства и отток из него, связанные с наличием градиентов концентраций x_i.

В случае моделирования поведения системы в переменных внешних условиях задача (1) становится неавтономной. При этом сначала строится и исследуется автономная модель; затем, в зависимости от характера переменного внешнего воздействия, либо добавляются новые члены, явно зависящие от времени, либо постоянные коэффициенты заменяются переменными, тоже явно зависящими от времени. Точечные модели типа (1) нашли широкое применение в биологии и медицине.

Особая роль в математическом моделировании отводится детерминистским моделям, основанным на дифференциальных уравнениях. В настоящее время построено достаточно большое количество детерминистских моделей, из которых следует особо отметить нелинейные модели. Модели типа (1) часто применяются при описании колебательных биологических и биохимических реакций. Приведем наиболее известные из этих моделей.

В 1910 году была опубликована статья Лотки [4], в которой была описана теоретическая реакция с затухающими колебаниями. Позднее в 1920 году эта реакция была моделирована Лоткой; в новой модельной системе уже возникали незатухающие временные колебания. Эта модель была математически идентична экологической модели Вольтерра [1], отражающей ситуацию "хищник-жертва"в Адриатическом море для двух видов рыб. Модельные уравнения, предложенные Вольтерра, совпадают с уравнениями Лотки для механизма гипотетической химической реакции:

$$A + X \xrightarrow{k_1} 2X, \tag{2}$$

$$X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y, \tag{3}$$

$$Y \xrightarrow{k_3} B, \tag{4}$$

где X, Y — промежуточные вещества, k_1, k_2 и k_3 — константы скорости реакций, а концентрации исходного регента A и продукта B поддерживаются постоянными. Условия постоянства A и B означают, что система (2)-(4) открыта и здесь тем самым должен происходить обмен вещества с окружением. Если обозначить концентрации вещества A, B, X и Y для удобства теми же буквами, то из закона действующих масс, примененного к (2)-(4), следуют кинетические уравнения для $X(t)$ и $Y(t)$:

$$\frac{dX}{dt} = k_1AX - k_2XY = X(k_1A - k_2Y), \tag{5}$$

$$\frac{dY}{dt} = k_2XY - k_3Y = Y(k_2X - k_3), \tag{6}$$

в которых A, k_1, k_2 и k_3 — постоянные. Для решения этих уравнений взяты начальные условия в виде $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, где $X_0 > 0$, $Y_0 > 0$. Решение системы (5)-(6) имеет колебательный характер. Интересная модель универсального осциллятора была предложена Зеелигом

[4]. Она основана на распространенном во многих ферментативных реакциях ингибировании субстратом.

Дифференциальные уравнения применяются также при моделировании колебательного поведения концентраций продукта и некоторых промежуточных веществ в цепи реакций, называемой гликотическим путем метаболизма, то есть серии реакций, обеспечивающих гликолиз. Первоначальный модельный механизм гликотических колебаний, на котором основаны все последующие модели, принадлежит Е. Е. Селькову [4], позднее общие результаты по метаболическим сетям были представлены Рейхом и Сельковым [4], в статье Буато, Гольдбера и Гесса [2] показано, что у гликотического осциллятора могут появляться субгармоники.

К колебательным процессам относится не только процесс гликолиза, но и фотосинтез, так как в условиях смены дня и ночи интенсивность фотосинтеза, т.е. скорость поглощения углекислого газа и соответственно скорость выделения кислорода, изменяется периодически. Моделирование процесса фотосинтеза осуществлялось с помощью гипотетических моделей. В качестве примера можно привести модель Н. М. Чернавской и Д. С. Чернавского [8], которая сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dC_3}{dt} = \alpha_1 C_3^2 - \alpha_2 C_3 C_6 + \alpha_0,$$

$$\frac{dC_6}{dt} = \beta_1 C_3^2 - \beta_2 C_3 C_6 - \beta_3 C_6^2 \qquad (7)$$

и описывает изменение концентраций легких сахаров C_3 и тяжелых сахаров C_6 при фотосинтезе. Подробное качественное исследование системы (7) с привлечением бифуркационного анализа было проведено Л. Н. Беллюстиной и ее сотрудниками. Это исследование показало наличие в данной системе устойчивого предельного цикла.

Дифференциальные уравнения применяются также при создании физиологических и медицинских моделей. Существует обширная литература, предлагающая множество различных моделей генерации физиологических ритмов. Так, примером системы с отрицательной обратной связью является математическая модель дыхания Чейна — Стокса, которую можно найти в работах Mackey и Glass [2]; там подробно описаны способы оценки значений параметров. Другие более сложные математические модели были разработаны для объяснения изменений в концентрации O_2 и CO_2 , но детальный теоретический характер устойчивости в этих случаях обычно невозможен (Longobardo, Cherniack, Fishman [2]; Milhorn [2]). Однако многие исследования устойчивости таких систем используют линейные методы и, таким образом, имеют ограниченное применение для анализа нелинейных колебаний, которые могут наблюдаться вне линейной области уравнений.

Среди медицинских моделей, в которых используются дифференциальные уравнения, следует особо выделить математические модели воспалительных и иммунных процессов, а также модели, описывающие влияние опухоли на организм. Математические модели, описывающие воспалительный процесс, должны учитывать, прежде всего, иммунную реакцию организма. Наиболее универсальной моделью иммунитета, является модель, предложенная Г. И. Марчуком [5]. Дифференциальные модели часто применялись в последние десятилетия при моделировании воздействия опухоли на организм. Так, была создана математическая модель иммунодепрессии вызываемой системным действием опухоли на организм. Авторами модели являются Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский [9].

Таким образом, обыкновенные дифференциальные уравнения успешно используются при математическом моделировании биологических процессов, что позволяет понять принципы работы биологических систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с англ. – М.: Наука, 1976, 286 с.
2. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни: Пер. с англ.– М.: Мир, 1991, 248 с.
3. Исаева Н. М., Добрынина И. В. , Сорокина Н. В. Математическое моделирование в биологии: Учеб.-метод. пособие.– Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018, 63 с.
4. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. Пер. с англ.– М.: Мир, 1983, 397 с.
5. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. 2-е изд. - М.: Наука, 1985, 240 с.
6. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. – М.: Мир, 1990, 342 с.
7. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979, 378 с.
8. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математические модели в биологии.– М.: Наука, 1975, 257 с.
9. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984, 304 с.
10. Carosso V. Reaction-diffusion models for the spread of a class of infections diseases. - Proc. 2nd Eur. Symp. Math. Ind., Oberwolfach, Mach 1-7, 1987: ESMI II. - Stuttgart, Dordrecht, 1988, P.181-198.

УДК 51(091)

"Vollständige Anleitung zur Algebra" Л. Эйлера как веха в развитии диофантова анализа XVIII века

Т. А. Лавриненко (Россия, г. Москва)
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
e-mail: Lavrinenko.TA@rea.ru
Г. А. Михно (Россия, г. Тверь)
Тверской государственный университет
e-mail: g.mikhno@yandex.ru

Leonhard Euler's "Vollständige Anleitung zur Algebra" as a milestone in the development of Diophantine analysis in the XVIII$^{\underline{th}}$ century

T. A. Lavrinenko (Russia, Moscow)
Plekhanov Russian University of Economics
e-mail: Lavrinenko.TA@rea.ru

G. A. Mikhno (Russia, Tver)
Tver State University
e-mail: g.mikhno@yandex.ru

В 2020 году исполнилось 250 лет с момента выхода в свет монографии Л. Эйлера "Vollständige Anleitung zur Algebra" [1][1] (в дальнейшем в статье – просто "Алгебра") и 350 лет с момента выхода в свет знаменитого издания "Арифметики" Диофанта Александрийского [3], осуществленного Самуэлем Ферма, сыном великого математика Пьера Ферма. В этом издании, содержащем замечания П. Ферма, сделанные им к задачам "Арифметики", было также опубликовано сочинение "Doctrinae Analyticae inventum novum" (в дальнейшем в статье – "Inventum novum"), составленное Жаком де Бильи на основе переписки с П. Ферма. "Алгебра" Эйлера [1], вышедшая ровно через 100 лет после появления "Inventum novum" и сыгравшая важную роль в развитии диофантова анализа, в той своей части, в которой речь шла о решении диофантовых уравнений в рациональных числах, была тесно связана с "Inventum novum". Уже через три года после издания "Алгебры" на немецком языке, в 1773 году, вышел её перевод на французский язык с добавлениями Лагранжа, а также на голландский язык. Позже сочинение Эйлера было переведено на латынь (1790) и на английский язык (1797). Всего оно выдержало около 30 переизданий.

Сочинение Эйлера [1] было адресовано широкому кругу любителей математики и представляло собой обстоятельное руководство по алгебре и теории неопределенных уравнений. Теория неопределенных, или диофантовых, уравнений составляла содержание 2-го раздела 2-ой части "Алгебры", который назывался "Von der unbestimmten Analytik" ("О неопределенной аналитике"). В дальнейшем, говоря об "Алгебре" Эйлера, мы будем иметь в виду именно эту часть его сочинения. Её значение для дальнейшего развития диофантова анализа было двояким. Во-первых, это был по существу первый учебник по диофантову анализу, в котором были сведены воедино основные приемы решения диофантовых уравнений, находящиеся в распоряжении диофантова анализа второй половины XVIII века. Во-вторых, в "Алгебру" вошли и собственные изыскания Эйлера, представлявшие интерес для развития диофантова анализа. По существу сочинение Эйлера вобрало в себя всё сколь-нибудь значительное в области диофантова анализа на момент 1770 года и зафиксировало состояние этой области математики к данному моменту.

Как известно, Эйлер диктовал текст "Алгебры" подмастерью портного с целью непосредственно выяснить доступность изложения. И по свидетельству сына Эйлера Иоганна Альбрехта учебные цели при написании "Алгебры" оказались достигнутыми. Действительно, изложение Эйлера характеризуется строгой продуманностью, детальностью и ясностью. Большую роль в рассмотрениях "Алгебры" играют примеры. Как правило, изучение определенного типа диофантовых уравнений Эйлер начинает с одного или нескольких примеров, формулируя затем примененный прием для общего случая. Иногда вначале дается общая формулировка метода, применение которого затем иллюстрируется на примерах. Рассматривая определенный тип диофантовых уравнений, Эйлер стремится изложить вопрос с возможно большей полнотой, дополняя известные методы собственными результатами. Приступая к изложению методов "неопределенной аналитики", Эйлер пишет, что это изложение "служит для обучения начинающих и для совершенствования их мастерства в арифметике" и подчеркивает принципиальное отличие задач неопределенного анализа от задач определенного анализа, отмечая, что "эта часть аналитики часто требует совершенно особых приемов".

Рассматриваемая часть "Алгебры" содержит 15 глав, в которых излагаются методы решения неопределенных уравнений как в целых, так и в рациональных числах. При этом груп-

[1] Любопытно, что русский перевод этого произведения был опубликован раньше немецкого оригинала, в 1768-1769 годах, под названием "Универсальная арифметика" [2]

пировка материала осуществляется в [1] по степеням неопределенных уравнений. Так, первые две главы рассматриваемой части “Алгебры” посвящены решению линейных неопределенных уравнений и их систем в целых числах, третья глава – решению в целых числах неопределенных уравнений, в которые одна из неизвестных входит в первой степени. В следующих четырех главах, с четвертой по седьмую, рассматривается проблема решения диофантова уравнения 2-ой степени в рациональных и в целых числах, а в 8–9 главах – решение диофантовых уравнений 3-й и 4-й степеней в рациональных числах. В остальных главах, с десятой по пятнадцатую, содержится более трудный материал, касающийся вопросов разрешимости диофантовых уравнений 2-й–4-й степеней. Исключение составляет только 14-я глава, в которой решаются различные конкретные задачи в диофантовом стиле, приводящие к системам неопределенных уравнений. Например, в 17 вопросе этой главы требуется “найти три квадратных числа x^2, y^2 и z^2 таких, что сумма каждых двух снова образует кадрат”. Большая часть задач 14 главы сводится Эйлером к неопределенным уравнениям, для получения рациональных решений которых он использует методы, изложенные им в предыдущих главах. Глава 13 целиком посвящена доказательствам неразрешимости в целых числах ряда уравнений вида $ax^4 + by^4 = z^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$, основанным на применении метода спуска Ферма. В частности, здесь приводится доказательство неразрешимости в целых положительных числах уравнения $x^4 + y^4 = z^2$, откуда следует последняя теорема Ферма для $n = 4$. Наиболее известным результатом Эйлера о диофантовых уравнениях, впервые опубликованном в [1], является доказательство последней теоремы Ферма для $n = 3$. Этому вопросу посвящена последняя, пятнадцатая, глава сочинения Эйлера. Основанное на методе спуска, знаменитое доказательство Эйлера неразрешимости в целых положительных числах уравнения $x^3 + y^3 = z^3$, впрочем, содержало некий пробел (подробнее об этом см. статью Башмаковой [4]). Важным здесь было использование для доказательства чисел вида $a + b\sqrt{-3}$ и расширение понятия целого числа на числа такого вида, что подталкивало к созданию теории алгебраических чисел и их арифметики.

Если при рассмотрении методов решения диофантовых уравнений в целых числах Эйлер использует, как правило, соображения теоретико-числового характера, в частности, соображения делимости, то нахождение рациональных решений диофантовых уравнений основано на чисто алгебраическом подходе. Эйлер использует алгебраический аппарат преобразований, замен и подстановок, позволяющих получить либо всё множество рациональных решений диофантова уравнения, либо некоторые его рациональные решения. Сейчас вопросы, связанные с рациональными решениями диофантовых уравнений, рассматриваются в рамках алгебраической геометрии, составляя один из её разделов – арифметику алгебраических кривых. Геометрический язык при этом кажется нам вполне естественным и неотъемлемым атрибутом таких рассмотрений, хотя вошел он в диофантов анализ лишь к концу XIX века. Эйлер же, используя в [1] только алгебраический язык и средства элементарной алгебры, тем не менее сделал важные шаги в изучении рассматриваемой проблемы. Кратко перечислим некоторые из этих шагов.

1. В [1] были рассмотрены все основные типы неопределенных уравнений 3 и 4 степени, выделенные ранее Ферма, и методы Диофанта–Ферма получения рациональных решений таких уравнений впервые были сформулированы в буквенном виде. В этом отношении Эйлер в целом следовал изложенному де Бильи в “Inventum novum” [3], но там были приведены только громоздкие словесные формулировки методов для выделенных типов уравнений. Как известно, изложенные в [3] методы Диофанта–Ферма, служащие для нахождения рациональных решений уравнений $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^2$ и $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^3$ с рациональными коэффициентами, соответствуют двум основным методам нахождения точек на кривых рода 1 – методу “касательной” и методу “секущей”[2], выраженным на алгебраическом языке (см. [5],

[2]Относительно метода “секущей”, применяемого в [3] для уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^3$, уточним,

[6]). Для нахождения рациональных решений уравнения $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = y^2$ в [3] применялся метод “парабол”, также в его алгебраическом выражении.

2. В [1] Эйлер впервые применил для нахождения рациональных решений уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^3$ алгебраический метод, соответствующий методу секущей для двух конечных точек. Рассматривая в главе 10 уравнение $4+x^2 = y^3$, Эйлер использует для нахождения нового рационального решения этого уравнения два известных рациональных решения $x_1 = 2, y_1 = 2$ и $x_2 = 11, y_2 = 15$. Свой метод он изложил только на примере, однако благодаря подробным разъяснениям не составляет никакого труда перенести рассуждения Эйлера на общий случай уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^3$.

3. Для исследования неопределенных уравнений 3-й степени Эйлер использовал в [1] обобщения известных подстановок из методов Диофанта–Ферма. При этом он получил, говоря современным языком, первые факты о бирациональной эквивалентности кривых довольно общего вида над полем $\mathbb{Q}$. Так, в 8 главе “Алгебры” по существу установлена бирациональная эквивалентность кривой 3-го порядка вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^2$ с квадратным свободным членом и кривой 4-го порядка вида $a_1p^4 + b_1p^3 + c_1p^2 + d_1p + e_1 = z^2$. Пример из 15 главы “Алгебры” показывает, что Эйлер умел также переходить от уравнения 3-й степени вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^3$ с кубическим свободным членом к уравнению 4-й степени вида $a_1p^4+b_1p^3+c_1p^2+d_1p+e_1 = z^2$, что означало установление бирациональной эквивалентности соответствующих кривых 3-го и 4-го порядков. Уже сами факты о связи между решением в рациональных числах неопределенных уравнений 3-й и 4-й степеней, полученные Эйлером, наталкивали на мысль, что неопределенные уравнения нужно классифицировать не по их степеням, а по другому признаку, учитывающему связь, которая существует между уравнениями различных степеней. Такой признак был сформулирован А. Пуанкаре в 1901 году: это бирациональная эквивалентность кривых над полем $\mathbb{Q}$.

4. Эйлер сделал в “Алгебре” первые шаги по изучению такого важного свойства алгебраических кривых, как униформизируемость в рациональных функциях над полем $\mathbb{Q}$. Разумеется, он не использует современной нам терминологии, а просто говорит о возможности выразить все рациональные решения неопределенного уравнения одной формулой, имея в виду формулу вида $f_n(t)/g_m(t)$, где $f_n(t)$ и $g_m(t)$ – многочлены с рациональными коэффициентами степеней n и m соответственно. Как известно, кривые видов $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^2$ и $ax^3 + bx^2 + cx + d = y^3$ униформизируемы в рациональных функциях тогда и только тогда, когда многочлен в левой части равенства имеет кратные корни. Эйлер установил в “Алгебре” достаточность этого условия для кривой $ax^3+bx^2+cx+d = y^2$ и для кривой $bx^2+cx+d = y^3$.

В заключение заметим, что Эйлер был одним из немногих, если не единственным из математиков XVIII века, кто уделил исследованию диофантовых уравнений достаточно большое внимание. Как писал Лагранж в своих “Добавлениях” к “Алгебре”, “в настоящем столетии этой ветвью анализа почти совсем пренебрегают (имеется в виду диофантов анализ – Т.Л.), и, за исключением г. Эйлера, я не знаю никого, кто бы занимался ею. Но прекрасные и многочисленные открытия, которые этот великий математик сделал в ней, достаточно компенсируют безразличие, с которым математические авторы относились до сих пор к таким исследованиям” [7, с. 463–464]. В этих условиях появление труда Эйлера, значительная часть которого была посвящена диофантову анализу, было особенно важным: собранные воедино и доступно изложенные сведения о решении диофантовых уравнений, дополненные собственными глубокими результатами Эйлера, служили популяризации диофантова анализа и привлекали внимание ученых к этой области математических исследований.

что этот алгебраический метод соответствует ситуации, когда секущая проводится через одну конечную и одну бесконечно удаленную точку кривой, задаваемой диофантовым уравнением. Метод нахождения нового рационального решения неопределенного уравнения 3-й степени по двум известным рациональным решениям в математической литературе вплоть до Эйлера не встречается.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Euler L. Vollständige Anleitung zur Algebra. T. 1, 2. — Petersbourg, 1770 (reprint. Stuttgart, 1959). (Также в: Leonhardi Euleri Opera omnia, ser. 1. V. 1. P. 209–498. — Lipsiae et Berolini, 1911.).
2. Универсальная арифметика г. Леонгарда Эйлера, переведенная с немецкого подлинника студ. П. Иноходцевым и И. Юдиным. Т. 1, 2. — СПб., 1768–1769.
3. Diophanti Alexandrini. Arithmeticorum Libri sex, et de numeris multangulis Liber unus / Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et Observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani. Accessit Doctrinae Analyticae inventum novum, collectam ex varijs eiusdem D. de Fermat Epistolis. — Tolosae, MDCLXX.
4. Башмакова И. Г. Вклад Леонарда Эйлера в алгебру // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей. М.: Наука, 1988. С. 139–152.
5. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. — М.: Наука, 1984 (переизд.: М.: ЛЕНАНД, 2015).
6. Каучикас А. П. Диофант и неопределенный анализ в трудах европейских математиков XIII-XVI веков: дис. канд. физ.-мат. наук: 07.00.10. — М., 1979.
7. Euler L. Éléments d'Algèbre. T. 1, 2. — Lyon, 1773 (1774).

УДК 51.091

Ученый и педагог. К 90-летнему юбилею Александра Сергеевича Симонова (04.09.1932–20.02.2013)

Е. В Манохин (Россия, г. Тула)
Тульский филиал Финансового университета при правительстве РФ
e-mail: emanfinun@mail.ru
И. В. Добрынина (Россия, г. Химки)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Scholar and teacher. To the 90th anniversary Alexander Sergeevich Simonov (04.09.1932–20.02.2013)

E. V. Manokhin (Russia, Tula)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch)
e-mail: emanfinun@mail.ru
Dobrynina (Russia, Khimki)
Academy of civil protection of EMERCOM of Russia
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Рис. 1: А. С. Симонов (первый на снимке) в кругу семьи

1. Основные факты биографии

Симонов Александр Сергеевич родился 4 сентября 1932 г. в г. Москве. В 1951 году поступил на физико-математический факультет Тульского государственного педагогического института. Окончил в 1955 году, получил специальность – преподаватель математики средней школы.

По распределению А. С. Симонов оказался в сельской средней школе Хабаровского края, где он проработал с 1955 по 1956 годы учителем математики.

Затем последовала работа в различных институтах этого края. С 1956г. по 1961 г. он – ассистент кафедры высшей математики Хабаровского железнодорожного института.

В 1961 г. А. С. Симонов поступил в аспирантуру Хабаровского techинститута.

Руководитель – Леонид Моисеевич Лихтарников. Из аспирантуры Хабаровского пединститута он был командирован в Воронежский университет, где в 1966 г. под руководством профессора Селима Григорьевича Крейна защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему: "Обобщенные решения с повышенной гладкостью квазилинейных эллиптических уравнений". В последующем он продолжает работу в Хабаровских вузах: 1964 г. – старший преподаватель кафедры математического анализа, 1969 г. – заведующий кафедрой. В 1968 г. ему присвоено звание доцента [1].

С 1971 по 2013 годы А. С. Симонов работал в Тульском государственном педагогическом институте (ТГПИ) им. Л. Н. Толстого. В 1971–1982 годах и в 2002–2008-е годы Александр Сергеевич возглавлял кафедру математического анализа.

В 1985 г. преподавал математику в республике Куба. В 90-е годы работал в Тульском областном институте усовершенствования учителей заведующим кафедрой естественно-математических дисциплин.

В 2001 году защитил диссертацию «Математические модели экономики в школьном курсе математики» по специальности 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания на соискание ученой степени доктора педагогических наук (научный консультант – Г. В. Дорофеев). В 2002 г. присвоено ученое звание профессора

Был требователен к себе и к студентам. Оказывал большую помощь студентам, желающим более глубоко овладеть математическими дисциплинами.

Александр Сергеевич вёл систематическую и очень плодотворную научную работу. Под его руководством вели научную работу отдельные студенты, которые впоследствии стали учеными. Подготовил к поступлению в аспирантуру по математическому анализу И. В Денисова.

Денисов Игорь Васильевич – доктор физико-математических наук, в 1996–2002 годах возглавлял кафедру математического анализа [2].

А. С. Симонов был высоко образованным, интеллигентным человеком. В работе и взаимоотношениях с коллегами и студентами он был принципиальным, требовательным, открытым к общению. Автор статьи не раз обсуждал с ним педагогические и научные проблемы и Александр Сергеевич щедро делился своими обширными знаниями.

Александра Сергеевича увлекала не только наука, педагогическая деятельность, но и литература, искусство, спорт. Он пользовался большим авторитетом и уважением студентов, преподавателей и педагогической общественности.

На протяжении всей своей научно-педагогической деятельности профессор А. С. Симонов активно занимался научно-методической работой, им опубликовано более 110 научных и научно-методических работ. Научные и педагогические успехи А. С. Симонова отмечены рядом поощрений и наград: Значок "Отличник народного просвещения"; Значок "Отличник просвещения СССР"; Почетная грамота департамента образования Тульской области.

Симонов Александр Сергеевич скончался 20 февраля 2013 года после болезни в г.Туле

2. Научная работа

На протяжении всей своей научно-педагогической деятельности профессор А. С. Симонов активно занимался научно-методической работой, им опубликовано более 110 научных и научно-методических работ.

В 1966 и 1970 году вышли работы [3], [4]. В первой работе рассматривались квазилинейные уравнения с линейной главной частью, для которых доказываются теоремы существования решений повышенной гладкости. При этом существенно используются теоремы о наборе гомеоморфизмов, осуществляемых линейным эллиптическим оператором, а также предполагаемая сильная эллиптичность этого оператора.

Вторая работа содержала информацию о третьей Дальневосточной математической школе, организованной Хабаровским педагогическим институтом. Другие сочинения А. С. Симонова того периода были посвящены методу Фурье для одного интегро-дифференциального уравнения эллиптического типа, априорным оценкам для интегро-дифференциальных уравнений, о существовании решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений.

Позже научные интересы перешли в область популяризации математических знаний и математические модели экономики в школьном курсе математики. Например, [5]. Много публиковался в журнале «Математика в школе».

Общее направление проведенных А. С. Симоновым исследований связано с изучением возможностей, предоставляемых многочисленными и глубокими связями математики и экономики. Это способствует развитию у учащихся интереса к изучению математики, выяснению ее тесных связей с реальными задачами современной рыночной экономики, многими из которых должен владеть каждый человек независимо от сферы его интересов. Это помогало становлению экономической культуры, экономической грамотности и экономической этики учащихся, Разработанный А. С. Симоновым принцип имплантации экономического содержания в круг решаемых в школе математических задач, рассмотрение вопросов интеграции экономических и математических знаний в процесс составления, анализа и решения задач, позволил обновить набор задач, решаемых в 7-11 классах. Это удалось сделать за счет замены части «безыдейных», устаревших или неинтересных задач на новые задачи, имеющие ярко выраженное экономическое содержание. Поскольку математический аппарат при этом не изменяется (меняется только объект, к которому он прилагается), то на математическую подготовку это не влияет, а экономическая составляющая школьного курса математики становится более содержательной и действенной. При этом ученик впервые сталкивается с триадой «экономика – математика –

экономика» и начинает понимать, каким образом экономические задачи переводятся на математический язык, далее решаются всем известными, а если это необходимо, то и новыми методами математики и вычислительной техники, и как затем полученные с помощью математического инструментария результаты вновь истолковываются в экономических терминах, давая советы, рекомендации, перечисляя сценарии развития экономических процессов и т. д.

Александр Сергеевич Симонов активно занимался научной деятельностью [6] до самой смерти.

3. Заключение

Математика и педагогика для Александра Сергеевича Симонова – главные ценности, которым он посвятил свою жизнь и творчество. Открытость и дружелюбность Александра Сергеевича, неизменное внимание к каждому, кто встречался на его пути, высокий профессионализм, определили отношение коллег, у которых Александр Сергеевич пользовался огромным уважением. Чувство глубокой благодарности за добрые дела и светлая память о выдающемся ученом, педагоге, научном руководителе и просто замечательном человеке сохраняется в сердцах его коллег, учеников, друзей и близких.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов И. В., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Чубариков В. Н. К 80-летию Александра Сергеевича Симонова // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13., №3. С. 111-115.

2. Денисов И. В. Пути развития математического анализа в Тульском государственном педагогическом университете имени Л. Н. Толстого (к 70-летию образования кафедры математического анализа) // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, №5. С. 270–306.

3. Крейн С. Г., Симонов А. С. Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения // Доклады АН СССР. 1966. Т.167, №:6. С. 1226–1229.

4. Лихтарников Л. М., Симонов А. С. Третья Дальневосточная математическая школа // УМН. 1970. Т. 25, №:3. С. 278.

5. Виленкин Н. Я., Симонов А. С., Сурвилло Г. С., Кудрявцев А. И. Алгебра – 9: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. / Рекомендовано главным управлением развития общего среднего образования Мин-ва образования РФ. Включено в федеральный комплект учебников. М.: Просвещение, 1996. - 384 с.

6. Л. П. Добровольская, Н. М. Добровольский, А. С. Симонов, “О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам”, Чебышевский сб., **9**:1 (2008), 185–223

УДК 378.519.2

Формирование критериально-ориентированного теста по линейной алгебре в системе дистанционного обучения (LMS) MOODLE

Л. Е. Морозова (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: lidimorozova@yandex.ru

Formation of a criterion-oriented test in linear algebra in the distance learning system (LMS) MOODLE

L. E. Morozova (Russia, St. Petersburg)
St.Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
e-mail: lidimorozova@yandex.ru

Тест как элемент дистанционного образования можно и нужно рассматривать в тесной взаимосвязи со всеми аспектами образовательного процесса, включая его цели и задачи. Особенно актуально это при обучении математике. Сложность и субъективная трудность восприятия формального математического языка зачастую обусловлена семантическими проблемами в толковании специальной терминологии. Эти проблемы возникают при изучении линейной алгебры, поскольку этот раздел математики приходится в основном на первый семестр, т. е. период первичной адаптации студентов к особенностям обучения в вузе. Облегчает остроту проблемы то, что для усвоения материала достаточно базовых знаний алгебры в рамках школьной программы. Однако в силу того, что элементы линейной алгебры используют как инструмент в той или иной степени другие разделы высшей математики и многие технические дисциплины, все требования на выходе: знать, уметь, владеть – накладывают необходимость эффективного использования всех элементов методики преподавания.

В рамках традиционного преподавания одним из таких элементов было формирование курсов в системе дистанционного образования MOODLE и электронных учебников (ЭУ). ЭУ, создаваемый как самостоятельный продукт со встроенной структурой, словарями, возможностью поиска, всплывающими подсказками и т.п., предполагает наличие как минимум опросников для закрепления прочитанного, а в идеале – полноценных тестов, контролирующих и обучающих с промежуточными этапами подсказки, частичного решения, ответа, решения различными методами.

Первый электронный учебник в СПбГАСУ был создан в 2014 году на базе уже изданного учебного пособия по линейной алгебре в рамках дипломной работы выпускника бакалавриата специальности ПМИ [1].

Параллельно с созданием ЭУ формируются первые наборы тестовых опросников в системе дистанционного образования MOODLE.spbgasu.ru для некоторых разделов математики, в том числе и для линейной алгебры.

Тесты, которые составлялись самими преподавателями кафедры, формировались в рамках отдельной дисциплины или раздела дисциплины внутри авторских курсов, не носили массовый характер, т.е. имели весьма ограниченный банк данных и в силу этого были хорошо отредактированы. Тесты не выполняли роль основного контроля, не использовались, как дополнительный источник промежуточной аттестации, не являлись обязательными к выполнению. Обычно их предлагали пройти в рамках самоконтроля, и в силу всего перечисленного тесты обладали широкой популярностью среди студентов. При этом результаты тестирования достаточно адекватно отражали степень освоения материала студентами, о чем можно было судить, поскольку в рамках очной формы образования преподаватели хорошо знали своих студентов.

Экстренный переход системы образования в режим онлайн в связи с пандемией и требованиями самоизоляции дал толчок развитию дистанционного образования, но прежде всего столкнул с проблемами как всю систему образования, так и каждого конкретного преподавателя.

Необходимость дистанционной формы как преподавания дисциплины, так и промежуточного контроля знаний привела к высокой востребованности тестов. Индивидуальные методические материалы, как в печатной, так и в электронной форме нельзя автоматически перенести в тест, поскольку редактор тестовых заданий формирует математические символы в кодах HTML. Трудоемкая работа многих преподавателей по формированию новых тестов привела к резкому увеличению банка данных, из которого формируется конкретный тест. Раздел линейная алгебра к концу 2021 года был представлен примерно 30-40 категориями с большим количеством подкатегорий однотипных вопросов. Некоторые вопросы содержали опечатки технического характера или были не вполне корректными в силу того, что некоторые задачи, традиционные для аудиторного обучения и контроля, не годятся для тестового задания в исходной формулировке. Таким образом было принято решение о создании методических групп преподавателей с целью формирования валидных и надежных тестов по всем дисциплинам кафедры математики.

По линейной алгебре было решено формировать критериально-ориентированного тест, который составляется таким образом, что отражает степень усвоения учащимися знаний, умений, навыков по тем учебным элементам, которые в линейной алгебре являются целью обучения. Таким образом возникает классификация тестов по уровню усвоения. Например, 4 уровня: 1) первичные знания и умения (тесты, направленные на опознание, различение, классификацию); 2) типовые задачи; 3) нетипичные задачи 4) творческие умения. Американский психолог Б. Блум предложил классификацию тестов по учебным целям [2]. Им выделено 6 категорий учебных целей: знание; понимание; применение; синтез; оценка. Отметим также, что критериально-ориентированные тесты предполагают более глубокое и детальное погружение в область содержания исследуемого предмета, поскольку это позволит адекватно интерпретировать результаты тестировании.

Ресурс «Тест» системы дистанционного образования MOODLE предлагает большой набор типов вопросов. Для нужд линейной алгебры годятся в той или иной мере почти все. Невостребованными оказались только «эссе» и «описание». Поскольку наибольшей критике тесты подвергаются за вопросы открытого типа, приведу примеры использования таких заданий.

Задания на соответствие предполагают, что список ответов должен быть длиннее списка объектов, для каждого из которых устанавливается соответствие одного единственного ответа. Для применения этого типа тестовых заданий в разделе линейная алгебра лучше всего использовать опросники, которые существовали ранее при традиционной форме преподавания в форме коллоквиума. Здесь преобладают теоретические вопросы. Например, сопоставить виды матриц их названиям: прямоугольная, квадратная, скалярная, диагональная, единичная, верхняя треугольная и т.д.

Приведем пример неудачного использования этого типа вопроса.

Задание1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

К каждой матрице подобрать соответствующее название:

Список вопросов: 1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Список ответов:

а) противоположная матрица к матрице А;

б) обратная матрица к матрице А;

в) транспонированная матрица к матрице А.

Здесь число вопросов и ответов совпадает. Если студент умеет вычислять обратную матрицу, то он знает, что такое транспонированная матрица. Противоположная угадывается по ассоциации. Таким образом, очевидно, что ни один студент не будет в этом случае вычислять обратную матрицу, отметив ее как оставшийся вариант. Добавление к списку ответов варианта г) – союзной матрицы, не сильно улучшит это задание. Можно было бы установить обратное соответствие: для списка названий а), б), в), г) предложить на выбор большое количество матриц, но технически это невозможно, поскольку невозможно ввести в строку ответов матрицу. Строка ответов в задании «на соответствие» представляет собой обычный текстовый редактор, который не преобразует текст HTML в формулу.

Удачным использованием тестового задания «на соответствие» можно считать задания следующего вида.

Задание 2. Если (x_0, y_0, z_0) – решение системы $\begin{cases} 3x+2y-z=9; \\ 4x+3y-5z=5; \\ 5x-2y-3z=7, \end{cases}$ то

Список вопросов: $x_0; y_0; z_0$.

Список ответов: $0; 1; 2; 3$.

По своей сути это задание закрытого типа предполагает множественный выбор из 64 вариантов ответов, среди которых только один очевидный дистрактор $x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 0$ – нулевое решение системы. Попытка подбора корней займет много времени, быстрее решить систему.

Заметим, что не всегда число вопросов должно быть меньше, чем число ответов. С помощью заданий типа «на соответствие» можно конструировать задания на альтернативность, когда студент оценивает некоторое утверждение, как истинное или ложное. Задания такого вида полезны для понимания отдельной темы.

Задание 3. Определителем третьего порядка является сумма шести слагаемых, т.е. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum\limits_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}^{3!} (-1)^{P(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)} \cdot a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3}$.

Определите, могут ли предложенные произведения входить в эту сумму.

Список вопросов: 1)$a_{13}a_{21}a_{32}$; 2)$a_{12}a_{11}a_{23}a_{31}$; 3) $-a_{12}a_{22}a_{33}$; 4)$a_{12}a_{21}a_{33}$.

Список ответов: да, нет.

При этом список вопросов может быть сколько угодно длинным с любым количеством ложных и истинных утверждений.

Система дистанционного образования MOODLE является достаточно мощным средством для формирования заданий как закрытого, так и открытого типа. Задания открытого типа, требующие ввода с клавиатуры числового ответа, реализуются как вычисляемый вопрос (простой или множественный). В линейной алгебре таких задач огромное количество. Однако, следует избегать прямых заданий типа решить систему методом Гаусса. Прежде всего потому, что интернет предлагает огромное количество онлайн калькуляторов, а верно введенный ответ не несет никакой информации о методе решения. Приведем пример простого вычисляемого вопроса.

Задание 4. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ равен двум, если λ равно...

Основными показателями качества теста является его валидность и надежность [3]. Валидность теста означает, что результаты теста отвечают поставленным задачам и целям. Тестовые задания должны проходить через строгую редакцию специалистов-предметников и подвергаться жесткому отбору с точки зрения валидности по содержанию, а наборы тестов полностью охватывать, и при этом в нужной пропорции, все основные аспекты того раздела дисциплины, подготовленность в которой этот тест оценивает, измеряет знания и практические навыки студента. При этом следует особое внимание уделять методике оптимального выбора проходного балла. Валидный тест всегда имеет высокую надежность, обратное неверно.

Система дистанционного образования Moodle обладает широким спектром встроенных статистических оценок результатов тестирования. [3]. Система анализа статистических результатов позволяет определить надежность нормативно-ориентированного тестирования. При использовании критериально-ориентированного тестировании важны характеристики, которые относится к каждому вопросу или категории вопросов, присутствующих в тесте. Тестовый балл, выраженный в процентах, отражает долю правильно выполненных заданий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сайт https://moodle.spbgasu.ru/course/view.php?id=759
2. Иванов А. П. Систематизация знаний по математике в профильных классах с использованием тестов. — М.: Изд-во "Физматкнига 2004. 416 с.
3. Ким В. С. К 40 Тестирование учебных достижений. Монография. — Уссурийск: Издательство УГПИ, 2007 - 214 с.: ил.

УДК 51.091

К вопросу о возникновении Советской историко-математической школы

С. С. Петрова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: spetr33@mail.ru

On the question of the origin of the Soviet school of the history of mathematics

S. S. Petrova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: spetr33@mail.ru

Советская историко-математическая школа – одна из крупнейших в мире школ второй половины XX века в области истории математики. Она возникла в 1930-е годы на волне подъёма интереса к марксистскому пониманию феномена науки, в нашем случае – математики. Такое понимание предполагало особое внимание к марксистскому анализу её предмета и метода в историческом аспекте, а, следовательно, к истории математики, рассматриваемой в контексте марксистского учения. Поэтому естественно, что создателями новой школы стали молодые учёные-марксисты С.А. Яновская (1896 – 1966) и М.Я. Выгодский (1898 – 1965). Основной площадкой их деятельности стал Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета, а затем механико-математический факультет МГУ, выделившийся из физико-математического факультета в ходе реконструкции университета в 1933 году. Уже на этом факультете был создан существующий и поныне семинар, к руководству которым они вскоре привлекли А.П. Юшкевича (1906 – 1993). Эти три выдающиеся учёные за годы, предшествующие Великой Отечественной войне, положили начало исследованиям в целом ряде направлений – прежде всего в истории математического анализа (М.Я. Выгодский, А.П. Юшкевич), оснований математики (С.А. Яновская) и истории математики в России (А.П. Юшкевич). На примере эволюции тематики историко-математических исследований, проводившихся в СССР в предвоенное десятилетие, можно наблюдать изменения общего идейно-политического климата в стране: если в начала 30-ых годов акцент делался на вопросах анализа диалектики развития математической мысли и обусловленности этого развития запросами материально-технического базиса (см., например, исследования М.Я. Выгодского об арифметике и алгебре в Древнем мире), то к началу 40-ых годов всё явственнее начинает проступать тема истории отечественной математики. Когда перед А.П. Юшкевичем, после присуждения ему в 1936 года степени кандидата физико-математических наук, встал вопрос о подготовке докторской диссертации, С.А. Яновская посоветовала ему избрать тему, связанную с историей математики в России. Итогом стала диссертация «Математика и её преподавание в России XVII – XIX вв.», защищённая в 1940 году. К этой диссертации восходят последующие исследования Юшкевича, посвящённые творчеству Л. Эйлера, развитию математики в России в XIX столетии, наконец, его классическая монография «История математики в России до 1917 года», опубликованная в 1968 году. Когда аспиранту механико-математического факультета МГУ (1934 – 37) Б.В. Гнеденко нужно было избрать тему реферата по философии, он остановился на истории математики в России. Именно из этого реферата выросли его известные «Очерки по истории математики в России», увидевшие свет в 1946 году.

К началу Великой Отечественной войны был заложен фундамент основным направлениям исследований Советской школы истории математики, бурное развитие которых пришлось уже на послевоенную пору и достигло своего расцвета в 60 – 70-е годы: это и классические труды Юшкевича, и вышедшие под его редакцией серия книг по истории математики с древности до начала XX века, и сборники «Историко-математических исследований», ставшие в те годы необычайно влиятельными и чрезвычайно ценимыми во всём мире. Творческие достижения представителей школы, своими трудами покрывавших практически всё поле изысканий историко-математических исследований того времени, получили мировое признание. Практически ни одно заметное событие в жизни международного историко-математического сообщества не обходилось в те годы без участия советских специалистов. Наметившийся уже в начале 80-ых спад был связан прежде всего с внешними по отношению к науке факторами, а вовсе не истощением её внутреннего потенциала.

———————————————————————————

УДК 511.3

П. Л. Чебышёв и отечественные математические школы по теории чисел[1]

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru
А. П. Крылов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alek.krylov@gmail.com

P. L. Chebyshev and Russian mathematical schools on number theory[1]

I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru
A. P. Krylov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alek.krylov@gmail.com

В этом году исполнится 75 лет со дня выхода замечательной книги Б. Н. Делоне [1], в которой Борис Николаевич, являясь фактически последним представителем Петербургской школы теории чисел, дал исчерпывающее описание создания и становления этой первой отечественной математической школы.

Здесь прослеживается прямая связь поколений: Пафнутий Львович Чебышёв (16.05.1821–26.11.1894) $\to$ Александр Николаевич Коркин (19.02.1837–19.08.1908) $\to$ Дмитрий Александрович Граве (25.08.1863–19.12.1939) $\to$ Борис Николаевич Делоне (15.03.1890–17.07.1980).

Трое ученых оказали исключительное влияние на формирование научных интересов П. Л. Чебышёва. Прежде всего научный руководитель профессор Московского университета Николай Дмитриевич Брашман (25.06.1796–25.05.1866). Затем труды по теории чисел Леонардо Эйлера (15.04.1707–18.09.1783), к изданию которых привлёк П. Л. Чебышёва академик Виктор Яковлевич Буняковский (15.12.1804–12.12.1889). Необходимо отметить, что В. Я. Буняковский плодотворно работал в области теории чисел.

Хотя у П. Л. Чебышёва было всего 10 работ по теории чисел, именно они принесли ему мировую славу и позволили создать первую отечественную математическую школу, которая известна во всём мире как Петербургская школа теории чисел.

Создание генеалогического древа П. Л. Чебышёва по теории чисел — это непростая, но актуальная задача.

$$\text{П. Л. Чебышёв} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Александр Николаевич Коркин 19.02.1837–19.08.1907} \\ \downarrow \\ \text{Егор Иванович Золотарёв (12.04.1847–19.07.1878)} \\ \text{Андрей Андреевич Марков (14.06.1856–20.07.1922)} \end{array} \right. . \qquad (1)$$

Рассмотрение первого яруса этого древа (1) создает иллюзию, что у П. Л. Чебышёва было только три ученика по теории чисел, но это глубоко ошибочное заключение, так как здесь мы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-41-710004_р_а
[1]This work was prepared under a grant from the RFBR №19-41-710004_р_а

видим только выдающихся учеников, каждый из которых был профессором и двое из них — академиками Петербургской академии наук, и каждый внёс существенный вклад в развитие теории чисел. Заметим, что Егор Иванович Золотарёв был одновременно и учеником П. Л. Чебышёва, и А. Н. Коркина. И лишь безвременная кончина в возрасте 31 года не позволила этому блестящему математику стать со временем академиком и иметь достойных учеников.

Почему можно с уверенностью говорить о таком явлении, как Петербургская школа теории чисел. Это непосредственно следует уже из рассмотрения второго и третьего ярусов древа Чебышёва:

$$\text{П. Л. Чебышёв} \to \left\{\begin{array}{l} \text{А. Н. Коркин} \to \text{Д. А. Граве} \to \text{Б. Н. Делоне} \\ \downarrow \\ \text{Е. И. Золотарёв} \\ \text{А. А. Марков} \to \left\{\begin{array}{l} \text{Я. В. Успенский} \to \left\{\begin{array}{l} \text{И. М. Виноградов} \\ \text{Р. О. Кузьмин} \end{array}\right. \\ \text{Г. Ф. Вороной} \to \text{В. Ф. Серпинский} \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Интересно отметить, что ученые, входящие в общий ярус генеалогического древа П. Л. Чебышёва, принадлежали, как правило, одному поколению. Действительно, второй ярус: Дмитрий Александрович Граве (25.08.1863–19.12.1939), Георгий Феодосьевич Вороной (28.04.1868–20.11.1908), Яков Викторович Успенский (11.05.1883–27.01.1947); третий ярус: Вацлав Франциск Серпинский (14.03.1882–21.10.1969), Борис Николаевич Делоне (15.03.1890–17.07.1980), Иван Матвеевич Виноградов (14.09.1891–20.03.1983), Родион Осиевич Кузьмин (3.12.1891–24.03.1949).

Не все математики из указанного древа П. Л. Чебышёва были чистыми теоретико-числовиками или, как говорил Ю. В. Линник, арифметиками [3]. Многие из них, как и основатель П. Л. Чебышёв, были разносторонними исследователями, внесшими вклад в различные ветви математики.

Создание Петербургской математической школы оказало существенное влияние на аналогичные процессы в Москве. Это прежде всего касается математической школы Егорова–Лузина. Нас будет интересовать эта научная школа, так как в ней выросли три блестящих отечественных математика, внесших существенный вклад в развитие Мировой теории чисел. Это Лев Генрихович Шнирельман (15.01.1905–24.09.1938), Александр Яковлевич Хинчин (19.07.1894–18.11.1959), Александр Осипович Гельфонд (24.10.1906–7.11.1968). Отметим, что А. О. Гельфонд был основателем одной из московских теоретико-числовых школ, которая дала значительные "побеги" исследований в различных областях теории чисел.

30-40-е годы XX столетия можно охарактеризовать как состязание Московской теоретико-числовой школы и Ленинградской. К началу 50-х годов XX столетия лидером Ленинградской теоретико-числовой школы стал академик АН СССР Юрий Владимирович Линник (08.01.1915–30.06.1972), который был учеником Владимира Абрамовича Тартаковского (13.01.1901–09.09.1972). И здесь мы видим, что Ю. В. Линник является продолжателем Петербургской школы теории чисел П. Л. Чебышёва, так как профессор В. А. Тартаковский был учеником Б. Н. Делоне.

Ещё один поразительный факт развития теории чисел в СССР, который имел место в XX столетии, связан с личностью академика И. М. Виноградова. Формально у него не было учеников, т. е. тех, кто под его руководством защитил кандидатские диссертации, но фактически все выдающиеся теоретико-числовики в СССР были его учениками, так как развивали его методы, работали под его руководством в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР.

В работе [5] Л. Д. Фаддеев и И. А. Лавров дали укрупненный портрет Российских математических школ, но там практически ничего не говорится про теоретико-числовые школы СССР. В работе [3] в обзорной статье Ю. В. Линника дается достаточно много информации о состоянии исследований по теории чисел в СССР до середины 50-х годов XX столетия, но получить информацию об отечественных школах по теории чисел практически невозможно.

Парадокс нынешнего состояния информатизации и цифровизации научных исследований состоит в том, что мы не можем найти ответы на простейшие вопросы:

1. Кто защищал докторские диссертации по теории чисел и каков полный список этих диссертаций?

2. Кто защищал кандидатские диссертации по теории чисел и каков полный список этих диссертаций?

3. Какие научные школы по теории чисел были и имеются в России и СССР, какова их история?

4. Каков полный список отечественных исследователей и их работ по теории чисел?

На наш взгляд, коллективными усилиями в рамках развития Проблемно-ориентированной информационно-вычислительной системы (ПОИВС) можно решить эту проблему. Необходимость решения этой проблемы очевидна, если мы исходим из принципа *непрерывности интеллектуальной эстафеты*, которая, как показывает анализ истории развития науки, происходит от *учителя к ученику*.

В обзорной статье Ю. В. Линника указано: "В послевоенные годы выросли целые группы арифметиков в разных городах СССР, плодотворно и интенсивно разрабатывающих характерные для них направления. Такие группы имеются в Москве, Ленинграде, Саратове, Ташкенте, Тбилиси, Вильннюсе и других городах". Фактически Ю. В. Линник указывает, что в эти годы в СССР стали складываться территориальные научные школы по теории чисел.

Таким образом, основываясь на идее построения генеалогического древа П. Л. Чебышева, необходимо создать общее генеалогическое древо теории чисел в России, начинающееся от Л. Эйлера и Х. Гольдбаха, в котором можно позиционировать любого отечественного математика, занимающегося теорией чисел, и его работы.

Если такой инструмент будет создан, то это будет дополнительной мотивацией для молодых исследователей, когда они будут знать, что принцип *никто не забыт, ничто не забыто* соблюдается для отечественной теории чисел. А то, что ряды специалистов по теории чисел должны непрерывно пополняться, очевидно для любого, кто серьезно относится к проблемам информационной безопасности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. — 419 с.

2. Математика в СССР за тридцать лет. 1917–1947. / ред.: Курош А. Г., Маркушевич А. И., Рашевский П. К. — М.: ГИТТЛ, 1948. — 1043 с.

3. Математика в СССР за сорок лет 1917–1957 (Том 1). / гл. ред. Курош А. Г. — М.: Физматгиз, 1959. — 1000 с.

4. Математика в СССР за сорок лет 1917–1957 (Том 2). / гл. ред. Курош А. Г. — М.: Физматгиз, 1959. — 821 с.

5. Л. Д. Фаддеев, И. А. Лавров. Российские математические школы // Вестник Российской академии наук. 1999. Том 69 № 5. С.391–397.

УДК 511.32

История тождества Эйлера

Г. И. Синкевич (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Euler identity history

G. I. Sinkevich (Russia, Saint-Petersburg)
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

История самой красивой формулы математики

$$e^{i\pi} = -1$$

известна за исключением одной небольшой детали: кто же впервые написал её в приведённом нами виде? У самого Эйлера в таком виде формулы нет. Приведём хронологию предшествующих математических событий.

В 1545 г. Джироламо Кардано в своей книге *Великое искусство* получил корни из отрицательных величин при исследовании общей формулы кубического уравнения.

В 1572 г. инженер-гидравлик Р. Бомбелли в книге *Алгебра* указал на возможность определить отношение равенства, сумму и произведение комплексных чисел.

В 1614 г. Джон Непер опубликовал*Описание удивительной таблицы логарифмов*, содержащую понятие логарифма и таблицы логарифмов тригонометрических функций.

В 1637 г. Рене Декарт в своей *Геометрии* рассматривал задачу о пересечении окружности с параболой. Случай раздельного положения параболы и окружности Декарт рассматривал как наличие лишь воображаемых (imaginariae) корней.

В 1685 г. Джон Валлис в трактате *Алгебра* впервые сделал попытку дать геометрическую и физическую интерпретацию отрицательным и мнимым числам. Он рассматривает мнимое число как среднее пропорциональное между положительной и отрицательной величиной, т.е. как вертикальный отрезок по отношению к действительной прямой.

В 1702 г. Иоганн Бернулли рассматривал проблему вычисления логарифма отрицательного числа. Обсуждение этого вопроса с Лейбницем протянулось до 1712 г. Лейбниц полагал, что он должен быть комплексным. Бернулли, а потом и Даламбер, считали, что вещественным.

В 1707, а затем в 1722 году у Абрахама Муавра появилась тригонометрическая интерпретация комплексного числа. Используя известные тригонометрические соотношения, Муавр пришёл к формуле возведения в степень и извлечения корня натуральной (до 7-й) степени из комплексного числа.

В 1714 г. математик и астроном Роджер Коутс в работе *Измерения отношений* в словесном виде высказал формулу

$$ln(cosx + isinx) = xi$$

В 1730-1740-х годах Леонард Эйлер в Петербурге разработал основы теории функций комплексного переменного. Он использовал более удобные обозначения: e (1728), pi (1736), i (1777). Но ещё долго математики использовали старые обозначения. В своих работах Эйлер переходил от координат точки к комплексному числу, представлял его в полярных координатах.

В 1749 г. Эйлер сделал доклад в Берлинской академии наук *О логарифмах отрицательных и мнимых чисел*, в котором приводит формулу

$$ln(-1) = (\pi \pm 2\pi n)\sqrt{(-1)}$$

и её частный случай для n=0. Отсюда лишь малый шаг до названной в начале наших тезисов формулы, но Эйлер его не делает.

В XIX веке геометрическая интерпретация комплексного числа была открыта Весселем и Арганом, и развита в работах Гаусса, Грассмана, Гамильтона и других учёных.

Работа норвежского геодезиста и картографа Каспара Весселя *Опыт об аналитическом представлении направления и его примененииях* (1797, опубл. в 1799 на датском языке) осталась неизвестной математическому сообществу.Вессель ввёл понятие комплексного числа как направленного отрезка, определил сложение как параллельное смещение плоскости, а умножение – как вращение плоскости с растяжением.

В 1806 г. во Франции вышла анонимная брошюра *Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях*, в которой была разработана геометрическая теория комплексного числа. В частности, там говорится, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а модули растягиваются. В работе введены так называемые диаграммы Аргана, изображающие на окружности операции умножения, возведения в степень и извлечения корня из комплексного числа. Лежандр высоко оценил эту работу. Автором брошюры был математик-любитель Арган. Его биографии спорна и даже подлинность его имени подвергается сомнениям. В будущей статье мы расскажем об этом подробнее.

В то время во Франции жили два брата, армейские офицеры и после отставки преподаватели математики. Старший, Франсуа Жозеф Франсе, преподавал математику в гражданских и военных учебных заведениях. Он был дружен с Арбогастом, написал несколько мемуаров о дифференциальном исчислении и его применении в артиллерии, получивших высокую оценку Лежандра, Лагранжа, Лакруа и Био. Лежандр передал ему анонимную брошюру Аргана 1806 г.

Младший брат, Жак Фредерик Франсе, служил в инженерном корпусе, затем был профессором военного искусства в Меце. Ему принадлежат работы по интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных и по аналитической геометрии. После смерти своего старшего брата Франсуа Жозефа Франсе (1810), Жак Франсе изучил его математический архив и продолжил его исследования. В сентябре 1813 г. во втором номере IV тома журнала Жергонна Жак Франсе опубликовал работу *Новые принципы позиционной геометрии и интерпретация мнимых символов*, в которой дал геометрическое представление комплексных чисел с приложениями. Жак Франсе сослался на анонимную брошюру Аргана 1806 г.: “Я должен по справедливости заявить, что основание этих новых идей не принадлежит мне. Я нашел это в письме г-на Лежандра к моему покойному брату, о чём этот великий геометр рассказал ему. Следовательно, то, что принадлежит мне, сводится к способу объяснения и демонстрации этих принципов, к обозначению и к идее обозначения положения ... Я публикую полученные мной результаты в надежде на то, что первый автор этих идей заявит о себе”. Именно в этой статье, на 64 с., [во втором следствии] Жак Франсуа пишет:

$$+1 = e^{0\pi\sqrt{(-1)}}, -1 = e^{\pm\pi\sqrt{(-1)}}$$

Это и есть первое явное написание тождества Эйлера.

В ноябре 1813 г. в V выпуске того же 4-го тома этого журнала Арган откликнулся своей статьей *Размышления о новой теории мнимых с последующим приложением к доказательству теоремы анализа*, в которой признал своё авторство брошюры 1806 г., упомянул о знакомстве с ней Лежандра и об его мнении, а также изложил с некоторыми уточнениями своё новое доказательство основной теоремы алгебры, и ввёл термин "модуль комплексного числа" в его современном значении.

В 1864 г. американский астроном и математик Бенджамин Пирс на одной из лекций назвал тождество Эйлера таинственной формулой и сказал: "Господа, это безусловно верно, это абсолютно парадоксально, мы не можем этого понять, и мы не знаем, что это значит, но мы доказали это, следовательно, мы знаем, что это должно быть верно".

В 1933 г. Ричард Фейнман назвал формулы Эйлера самым замечательным результатом в математике.

Этой формуле даже посвящён лимерик:

e raised to the *pi* times *i*,
And plus 1 leaves you nought but a sigh.
This fact amazed Euler
That genius toiler,
And still gives us pause, bye the bye.

В XX в. апология этой формулы возрастала подобно апологии золотого сечения.

УДК 519.21

История развития научных исследований по прикладному вероятностному анализу кафедры ТВ и МС Томского государственного университета

И. А. Туренова (Россия, г. Москва)
Томский государственный университет
e-mail: irenaturena@yandex.ru
Е. Л. Туренова (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: turenova@yandex.ru
С. П. Моисеева (Россия, г. Томск)
Томский государственный университет
e-mail: smoiseeva@mail.ru

The History of the development of scientific research in applied probability analysis of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics Tomsk state University

I. A. Turenova (Russia, Moscow)
Tomsk state University
e-mail: irenaturena@yandex.ru
E. L. Turenova (Russia, Moscow)
Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
e-mail: turenova@yandex.ru
S. P. Moiseeva (Russia, Tomsk)
Tomsk state University
e-mail: smoiseeva@mail.ru

В 60-е годы прошлого столетия резко возрос интерес к кибернетике, электронно-вычислительной технике и программированию и возникла острая потребность в специалистах в данных областях. Первые исследования в области кибернетики в восточной части нашей страны начались в Томском государственном университете и связаны с именами П.П. Бирюлина, А.Д. Закревского, Г.А. Медведева, В.П. и Ф.П. Тарасенко [1]. Оказалось, что для развития теоретических и технических методов обработки информации и принятия решений, необходим высокий уровень владения методами теории вероятностей, математической статистики, численных и других прикладных математических методов. Профессор Г.А. Медведев проводил исследования в области прикладного вероятностного анализа для решения задач в теории систем автоматического поиска, радиоразведки и радиопротиводействия. В 1970 г. он стал первым деканом открывшегося факультета прикладной математики, ныне институт прикладной математики и компьютерных наук в Томском государственном университете, сформированном на базе кафедры электронной вычислительной техники и автоматики радиофизического факультета.

Изначально факультет составляли кафедры прикладной математики, теоретической кибернетики и математической логики и программирования. Но вскоре была открыта кафедра теории вероятностей и математической статистики (ТВ и МС), где 50 лет назад под научным руководством первого заведующего кафедрой профессора Александра Федоровича Терпугова сформировалась известная в нашей стране и за рубежом научная школа по прикладной теории массового обслуживания.

В 60-ые годы научный интерес профессора А.Ф. Терпугова среди прочих составляли задачи поиска в многоканальных системах неподвижного сигнала, а позднее, в связи с усложнением практических задач, и задачи поиска сигнала, перемещающегося по каналам. Результаты исследований по поиску неподвижного сигнала вошли в монографию Л.Е. Радюк, А.Ф. Терпугов, Ф.А. Шапиро «Поиск сигнала в многоканальной системе» [2], а по поиску перемещающего сигнала в работах Ю.М. Тонконогова [3].

Большое практическое значение для прогнозирования состояния различных технических и экономических систем имеют результаты А. Ф. Терпугова и его учеников в области анализа трендов временных рядов. Важной особенностью этих исследований является нахождение оценок параметров моделей трендов в отсутствие некоторого случайного числа наблюдений или при наличии случайности моментов измерений, или даже неизвестности этих моментов. Результаты таких исследований, к примеру, были использованы в ОКБ «Полет» для разработки ПО систем телеметрического контроля и прогнозирования состояния навигационных спутников.

Одним из активно развиваемых направлений в конце 70х годов прошлого столетия стали управляемые системы массового обслуживания. Исследованием таких систем с динамическими приоритетами занимался Анатолий Андреевич Назаров (доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой ТВ и МС 1999-2020 г.г.) с помощью предложенной им модификации метода динамического программирования для СМО, функционирующих в стационарных режимах. Тогда же был введен термин адаптивного управления системами массового обслуживания, когда в режиме реального времени необходимо оценивать параметры системы и назначать оптимальное управление. Решать такие задачи предлагалось с помощью автоматов с целесообразным поведением. Также рассматривался класс управлений по косвенным наблюдениям, когда оно осуществляется по информации стохастически связанной с состоянием системы. Результаты проведенных исследований были защищены в их докторских диссертациях и опубликованы в монографиях [4], [5].

Большой практический и научный интерес имеют исследования систем массового обслуживания со случайно или детерминировано изменяющимися параметрами, так как они наиболее близко описывают реальные системы. Этой области посвящены исследования И.А. Коротаева, Н.И. Головко, И.А. Ташлинского. Ими были рассмотрены как классические по структуре СМО с переменным параметрами, так и СМО с групповым обслуживанием заявок, системы, функционирующие в случайной среде с дважды стохастическим входящим потоком, СМО с нестационарным входящим потоком, зависящим от малого параметра [6].

Проводимые исследования систем массового обслуживания различной конфигурации привели к необходимости рассмотрения условий большой загрузки системы. Это означает, что загрузка системы стремится к критической, либо окно наблюдения неограниченно возрастает, либо возрастает число источников в сети связи, либо интенсивность потока заявок из источника повторных вызовов, если таковой имеется в системе, стремится к нулю. При решении этих и многих других задач А.А. Назарову открылось понимание широты применения такого подхода, и им был сформулирован метод асимптотического анализа для исследования марковских и немарковских, но марковизируемых систем массового обслуживания, а также некоторых классов случайных потоков однородных событий.

В дальнейшем большим блоком решаемых задач под руководством профессора А.А. Назарова стали задачи моделирования и исследования различных сетей связи с протоколами случайного множественного доступа. В кандидатских диссертациях аспирантов кафедры отражены основные полеченные результаты исследований: для локальной вычислительной сети с протоколом «простая Алоха» (Н.М. Юревич), с протоколом «синхронная Алоха» (О.В. Иванова); для сетей с протоколами множественного доступа с контролем несущей и обнаружением конфликта (О.С.Бергман); сетей связи с динамическими и адаптивными протоколами доступа (С.Л. Шохор, Д.Ю. Кузнецов, А.Н. Туенбаева, Т.В. Любина); сетей интегрального обслуживания (Н.Ю. Марголис); кольцевых сетей связи (М.Ш. Вайндер); спутниковых сетей связи (А.А. Назаров, С.Б. Пичугин); управляемых адаптивных терминальных измерительных систем (А.А. Южаков); рассмотрена проблема распределения буферной памяти узла коммутации глобальной сети (А.В. Зоркальцев), и многие другие задачи.

Помимо уже упомянутого метода асимптотического анализа, в последние годы активно развивается и широко используется ряд других оригинальных методов исследования. Метод предельной декомпозиции (А.А. Назаров, С.П. Моисеева, А.С. Морозова) разработан для анализа потоков обращений в системах с неограниченным числом приборов и обратной связью, был впервые опубликован в 2008 г. Его приложения к решению экономических задач позволили решать оптимизационные задачи (И.Р. Гарайшина), в том числе в сфере математического маркетинга (И.А. Захорольная).

Метод динамического просеивания С.П. Моисеева, А.Н. Моисеева позволяет проводить исследование немарковских сетей массового обслуживания, гетерогенных и ресурсных СМО. Результаты этих исследований отражены в публикациях и докторских диссертациях С.П. Моисеевой, А.Н. Моисеева и кандидатских диссертациях И.Л. Лапатина, И.А. Синяковой, Е.Ю. Лисовской, Е.В. Панкратовой.

В настоящее время основными направлениями исследований научной школы по прикладной теории массового обслуживания под руководством профессора Назарова А.А и ее приложениям для технических и экономических систем на кафедре теории вероятностей и математической статистики ТГУ являются:

развитие общих подходов и методов к исследованию немарковских математических моделей сетей связи с протоколами случайного множественного доступа различной конфигурации (с конфликтами заявок, приоритетами в обслуживании, «нетерпеливыми» и «отрицательными» заявками, динамическим, адаптивным и статическим протоколами доступа) – С.В. Пауль, Е.Ю. Данилюк, Е.А. Федорова, Я.Е. Измайлова;

развитие асимптотических методов исследования немарковских моделей систем и сетей массового обслуживания с непуассоновскими входящими потоками (модулированными пуассоновскими, полумарковскими) различной конфигурации (многолинейные, многофазные, с обратной связью) Л.А. Задиранова, М.А. Шкленник, А.Н. Моисеев;

разработка методов исследования СМО со случайным (дискретным и/или непрерывным) объемом требований к ресурсам – Е.Ю. Лисовская, С.П. Моисеева, И.А. Туренова;

разработка новых математических моделей процессов передачи данных в транспортном соединении телекоммуникационных сетей и их анализ с целью оптимизации быстродействия.

За 50 лет существования кафедры, благодаря интенсивной работе развившейся на ней научной школы по прикладному вероятностному анализу, теории массового обслуживания и ее приложениям, было подготовлено и успешно защищено 12 докторских диссертаций и более 70 кандидатских.

Сотрудники кафедры имеют богатый опыт представления научных работ на крупных международных конференциях и семинарах, являются организаторами нескольких международных конференций с привлечением ведущих ученых из разных стран мира. Кафедра поддерживает и развивает контакты с российскими и зарубежными научными коллективами в области теории массового обслуживания. Благодаря сотрудничеству с ведущими мировыми учеными в области теории массового обслуживания получила признание мировым научным сообществом ежегодная Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (http://itmmconf.tsu.ru/). Одним из доказательств этого служит публикация избранных докладов в качестве отдельного тематического тома «Queueing Theory and Applications» в рамках серии Communications in Computer and Information Science (CCIS) «Queueing Theory and Applications», Springer Verlag, которая входит в базу цитирования Scopus.

По инициативе ученых кафедры в 2018 году впервые в России прошел Международный симпозиум «Workshop on Retrial Queues and Related Topics». Его проведение в Томском государственном университете имело высокое значение для признания мировым сообществом научных исследований томской научной школы и способствовало установлению связей между вузами и научными организациями России и зарубежья, обмену опытом между учеными, определению перспективных направлений развития теории и практики, определению мировых тенденций, актуальных и перспективных направлений научных исследований и практических разработок.

Отдельно стоит отметить роль сотрудников кафедры в привлечении к занятиям наукой молодых талантливых исследователей, среди ее учеников есть стипендиаты премии Президента РФ для аспирантов, стипендиаты Оксфордского фонда, победители конкурса по предоставлению грантов на научные поездки фонда Прохорова, руководители и участники грантов РФФИ.

В 2015-2020 гг. профессор А.А. Назаров являлся экспертом высшей аттестационной комиссии, а с 2021 года включен в состав экспертов Российской академии наук. В 2018 году коллектив кафедры под руководством профессора А.А. Назарова стал лауреатом премии Томской области в сфере образования, науки, здравоохранения и культуры для научных коллективов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горцев А. М. Факультет прикладной математики и кибернетики // Вестник Томского государственного университета. 2010. № 271. С. 9-12.

2. Радюк Л. Е. Поиск сигнала в многоканальной системе. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 126 с.

3. Тонконогов Ю. М. Поиск движущегося сигнала в многоканальной системе. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. 194 с.

4. Горцев А. М. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. 208 с.

5. Назаров А. А. Управляемые системы массового обслуживания. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984. 234 с.

6. Коротаев И. А. Системы массового обслуживания с переменными параметрами. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 166 с.

7. Назаров А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 158 с.

8. Назаров А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. — Томск: Изд-во Науч. - технической лит., 2006. 112 с.

9. Моисеев А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. — Томск: Изд-во Науч. - технической лит., 2015. 240 с.

УДК 378.016

История развития анализа данных в биологии

Ф. В. Тюрин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им Л. Н. Толстого
e-mail: tiurin-teodor-1@yandex.ru

The history of the development of data analysis in biology

F. V. Tyurin (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: tiurin-teodor-1@yandex.ru

Как самостоятельная дисциплина, экология выделилась из биологии достаточно поздно. Термин «экология» был введен лишь в 1866 Эрнстом Геккелем. Поэтому сначала необходимо сказать о появлении математических методов в биологии.

Проникновение математики в биологию началось посредством смежных наук, прежде всего физики. Наиболее известные примеры – работы Дж. Борелли (1680-1681) о движении животных, Л. Эйлера (1730), Р.Реомюра труды по физиологии и биологии колоний насекомых (1734-1742), Ж. Пуазейля (1840) и Дж. Стокса (1845) по гемодинамике и Г. Гельмгольца по физиологической оптике (1867) и акустике (1863) – носили эпизодический характер. Опыты Георга Менделя, доказывающие статистический характер фенотипического расщепления гибридов n-го поколения были опровергнуты, и названы «статистической ложью», несмотря на их достоверность. В последствие, они были переоткрыты и получили заслуженное признание. Только в конце XIX века была осознана необходимость использования математики в биологических исследованиях.

Первым ученым, удачно объединившим антропологию с элементами теории вероятностей и математической статистикой, стал бельгийский антрополог А. Кетле (1796-1874). В труде «Антропология» он показал, что
открытые им статистические закономерности распространяются не только на человеческое общество, но и на все другие живые существа, и что задача статистики заключается не только в сборе и классификации данных, но и в их анализе, целью которого должно быть открытие закономерностей, действующих в сфере массовых явлений.

Кетле одним из первых убедительно показал, что случайности, наблюдаемые в живой природе, можно исследовать и описать точными математическими методами, таким образом, заложив основы биометрии.

Математический аппарат для биометрии был создан английскими учеными Ф. Гальтоном и К. Пирсоном под влиянием гениальных исследований Ч. Дарвина, в которых на примере наследственной изменчивости показана связь между случайностью и необходимостью.

Гальтон применил статистические методы к решению вопросов наследствеиности и изменчивости организмов, а Пирсон дополнил используемые методы (усовершенствовал корреляцию и регрессию Гальтона) и ввел в биометрию показатели среднего квадратичного отклонения и коэффициента вариации.

На рубеже XIX и XX веков В.Госсет разработал незаменимую для любого современного исследования теорию малой выборки. Огромный вклад в биометрию внес Р.Фишер – заложил основы планирования экспериментов.

В истории развития анализа данных в биологии можно выделить пять основных этапов:

- первый – описательный, на котором измерения рассматривались как метод научного познания природы;

- второй (вторая половина XVII – XIX века) – закладывается основа биометрии, направленной на открытие статистических закономерностей, которые действуют в сфере массовых явлений. Ознаменован работами А.Кетле;

- третий (формалистический) – создание Ф Гальтоном и К. Пирсоном математического аппарата биометрии;

- четвертый (рационалистический) – начинается с 1902 г. классическими исследованиями Иогансена, показавшего, что в области биологических исследований первое место должно принадлежать биологическому эксперименту, а не математике. Математические методы должны применяться как вспомогательный аппарат при обработке экспериментальных данных.

- пятый - открывают классические работы Стьюдента и Р. Фишера. В это время создаются основы теории малой выборки, теории планирования экспериментов, вводятся в содержание биометрии новые термины и понятия, применение ее методов в различных областях биологии, медицины, антропологии и других смежных науках.

- шестой этап связан с увеличением масштаба (до глобального) и количества одновременно рассматриваемых свойств объекта (объектов).

Современный этап развития анализа данных в экологии связан с интеграцией экологии в другие науки, появлением большого числа научных теорий. Основным методом исследования в экологии стал системный анализ, который использует математический аппарат теории исследования операций, методы многомерной статистики и компьютерное моделирование, что позволяет разрабатывать проблемы интеграции организмов в биологические макросистемы, рациональным природопользованием и другими вопросами, связанными с влиянием человека на природу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексанов В.В., Методы изучения биологического разнообразия/ В.В.Алексанов. – Калуга, 2017. –10

2. Безрукова В.С. Педагогическая интеграция: Сущность, состав, реализация. — Свердловск, 1987.

3. Благов Ю.В., Ощепкова О.В., Теоретические основы реализации интегративного подхода в образовательном процессе, https://cyberleninka.ru/article/n/teoreticheskie-osnovy-realizatsii-integrativnogo-podhoda-v-obrazovatelnom-protsesse

4. Исаева Н.М., Добрынина И.В., Сорокина Н.В., Математическое моделирование в биологии - Science, engineering and technology in the context of globalization: paradigmatic characteristics and problems of integration. materials of the II international scientific conference. –Прага: Изд-во: Vedeckovydavatelske centrum Sociosfera-CZ s.r.o., 2017 – С.16-19

5. Исаева Н.М., Добрынина И.В., Трусова Ю.Н., Использование информационных технологий для повышения эффективности обучения дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика Многомасштабное моделирование структур, строение вещества, наноматериалы и нанотехнологии, сборник материалов IV международной конференции. – Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2017 С. - 209-213.

6. Короткова, А. А., Системные механизмы адаптации энтомокомплекса в урбанистических условиях: дис. ... д-ра биол. наук / А. А. Короткова. - Тула: Тул. гос. ун-т, 2004 а. - 362 с

7. Лакин Г. Ф. Биометрия/ Г.Ф. Лакин. – Москва, 1990. – 352 с

8. Тюрин, Ф. В. Системный анализ в изучении энтомофауны: бакалаврская работа – Тула, 2021. – 41 с

9. Фомин С.В., Беркинблит М.Б. / Математические проблемы в биологии / . - М.: Наука, 1973. - 200 с.

УДК 51(091)

Взгляды Рело на стиль машиностроения

В. Н. Чиненова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Reuleaux's views on the style of mechanical engineering

V. N. Chinenova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Содержание каждой машины выражается в определенных взаимодействиях ее органов, в ее целесообразности и соответствии тем задачам, для выполнения которых она предназначена. Одновременно машина воплощена в материальную форму, которая является таким же необходимым атрибутом, как кинематическая и динамическая сущность. Однако форма машины может не совпадать и даже оказаться в противоречии с ее функцией: она варьируется в довольно широких пределах, в частности включает различные элементы декора.

Франц Рело (1829-1905) впервые в книге «Техника и ее связь с задачей культуры» (1875) четко сформулировал основные вопросы структуры и кинематики механизмов, связал теорию с проблемами конструирования, поставил и пытался решить проблему эстетичности машин как технических объектов.

Он провозгласил возможность единого гармоничного развития искусства и техники. Особый интерес представляют его мысли о принципах композиционного построения, не противоречащих принципам функционального формообразования. Впервые указал на связь техники с культурой, подчеркивая, что развитие техники не только не угрожает развитию культуры, а сама техника является носителем культуры.

Промышленные изделия на начальной стадии машинного переворота были несовершенными по форме и качеству исполнения и в этом существенно уступали вещам, сработанным ремесленниками. Они инородным телом вторгались в устоявшийся стиль жизненного уклада, вызывая резкое неприятие не только просвещенными кругами, но и широкими слоями населения.

Утопические идеи отказа от машинного производства ничего не могли изменить. Новые материалы и технологии начинают активно использоваться даже в такой устоявшейся и консервативной сфере как архитектурные сооружения. Проекты мостов начала XIX века английского инженера Г. Гелфорда по форме приближаются к современным.

Хрустальный дворец Дж. Пэкстона из металла и стекла стал провозвестником функционализма; с 1820-х годов широко применяются в жилой архитектуре сталь и бетон. Невиданные ранее машины, механизмы и предметы входят в повседневную жизнь на общественном уровне и в быту.

Каковы же были основные принципы и тенденции их формообразования?

Создатель теории кинематических пар, доведший анализ машины до ее элементарной составляющей, Франц Рело не мог не коснуться вопроса о форме машины - этому он посвятил специальную работу «О стиле в машиностроении» (1861), которая изначально представляла собой заключительную часть его пособия по конструированию машин. Эта работа Рело, представляет собой как бы своеобразный итог уже проделанного - исчерпывающий анализ архитектурного стиля в машиностроении. Задуманная как учебник, она не нашла широкого практического применения, так как вскоре после ее появления начался качественный перелом в технике, связанный с развитием больших скоростей и потребовавший принципиально новых форм. Зато книга дает полное представление о том, что же представлял собой архитектурный стиль.

Согласно сложившемуся общественному мнению, машина не могла быть красивой; это положение отражало, хотя и в утрированной форме, некоторые посылки эстетики Канта. По Канту, эстетическое бескорыстно, т.е. лишено практической полезности. Полезные предметы из сферы эстетического исключаются. Машина, как предмет чисто утилитарный, уже поэтому, красивой быть не могла, наоборот, была уродливой. Машинная среда постепенно становилась постоянной средой трудовой деятельности человека, и уже невозможно было игнорировать вопросы ее эстетики. По мере того как в жизнь человеческого общества все более прочно входили машины самых непривычных, уродливых форм, появлялась необходимость как-то примирить их с эстетическим чувством. Для этого чугунные части машин, рамы, станины, колонны и т.п. стали делать в готическом или греческом стиле, уместном, собственно, для каменных или деревянных построек. Такие разукрашенные детали машин продержались в машиностроении в течение многих десятков лет.

Рело хочет представить технической аудитории попытку систематизировать упорядоченные принципы «формоизобретательской» стороны машиностроения или, по крайней мере, способствовать такой «систематизации». Он различает три вида форм в технике: основную форму, которая обусловлена стремлением к прочности соответствующей детали машины, затем целевую форму, вытекающую из предназначения этой детали, и наконец, внешнюю форму, соединяющую эту деталь с другими, примыкающими деталями, и в выборе которой конструктор имеет самую большую свободу. Но эта внешняя форма требует очень тщательного выбора, она не должна противоречить целевой форме. Простое бессмысленное нагромождение скопированных форм на детали, внутренняя сущность которых с этим формами не имеет ничего общего, есть и остается неприемлемой. В итоге это вызовет у настоящего эксперта лишь недоумение: у машиностроителя - потому что ему голая полезная форма кажется гораздо существеннее и здоровее, чем просто внешняя вычурность формы, у художника - потому что он привык понимать искусственную форму в ее стилистическом смысле, то есть ему сразу же бросится в глаза абсурдность, бессмысленность неправильного применения формы.

Исходя из того положения, что конструирование в значительной степени является свободным творчеством и зависит не только от математических расчетов, но и от знаний, личности и вкусов инженера, Рело предполагает, что в будущем обязательно появится учение о машинной форме, которое позволит в каждом отдельном случае находить оптимальные решения. Свою задачу он видел в выявлении и систематизации наиболее общих законов и правил формообразования и старался показать, что машина может и должна быть красивой.

Иногда в литературе можно встретить мнение, что архитектурный стиль в машиностроении - явление порочное, порожденное лишь эстетической косностью, бездумным перенесением уже готовых архитектурных украшений на машину, которая и функцией, и материалом, и всей своей сущностью принципиально отличается от неподвижных архитектурных сооружений. Но и современные станки и машины не порывают стилевых связей с современной архитектурой; и в целом формообразование предметного мира каждой эпохи имеет множество общих черт и развивается по общим законам, к какой бы области ни принадлежали группы предметов. С точки зрения механики также нет противоречия между архитектурным сооружением и машиной. Сущность архитектурного сооружения - ферма - может рассматриваться как механизм с нулевой степенью свободы; вводя в механизмы дополнительные ограничения, мы можем прийти к той же ферме.

По мнению Рело, машиностроение должно следовать архитектуре там, где речь идет о формообразовании машины, поэтому он классифицирует основные машинные формы по степени их эстетического воздействия.

Действительно, в каждой части конструкции проступает более или менее отчетливо ее основная форма. Эти основные формы строго функциональны и оказывают самое непосредственное влияние на прочность конструкции. Таким образом, основные формы машины диктуют силуэт в целом. Они делятся на два класса: формы полностью определенные целесообразностью (винт и винтовая нарезка, колесо и профиль зубьев, паровой котел и форма цилиндра и т.п.), и формы «свободного выбора», т.е. такие, в которых целесообразность является лишь частью поставленной задачи, и рисунок которых может бесконечно варьироваться. Он предполагал, что в будущем обязательно появится учение о машинной форме, которое позволит в каждом отдельном случае находить оптимальные решения. Исходя из положения, что машина является неким архитектурным целым, Рело требует ясности и четкости в соотношении отдельных частей, причем подчеркивает функциональное значение каждой детали.

Особый интерес представляют мысли Рело о принципах композиционного построения. Основные узлы машины, по Рело, должны четко разделяться, не нарушая при этом гармонии целого, причем их внешний вид определяется их функцией. Рело смотрел на технику прежде всего с точки зрения инженера, но инженера широкого профиля, глубоко изучившего все области машиностроения, инженера, обладавшего большими способностями и склонного к обобщениям.

Большое внимание уделял он ритму и пропорциональности, которые, по его убеждению, заложены в природе и человеческой натуре и присущи всем человеческим творениям - от произведений искусства до машин. Ритмичная и пропорциональная форма не может быть нецелесообразной, а следовательно, не может противоречить принципам функционального формообразования.

В 80-90-х годах XIX столетия возникают первые догадки о прямом взаимодействии и взаимовлиянии формы машины и скорости. В формообразовании машины наступает переходный этап к новому стилю, выразившемуся впоследствии в обтекаемости и нашедшему свое научное обоснование в теории крыла самолета, созданной Н.Е.Жуковским. Именно Н.Е. Жуковский впервые в истории машин открыл, что форма является параметром динамической сущности машины. В работах Прандтля, Горячкина и других единство формы и содержания теоретически обосновывается и, таким образом, для многих машин и приборов находятся формы, наилучшим образом отвечающие их сущности.

К концу 20-х годов XX столетия машинная среда становится постоянной средой человека, а форме машин уделяется должное внимание и конструкторами и учеными. Интенсивно развивается и укрепляется дизайн, непосредственной целью которого и является формообразование массовой промышленной продукции

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рело Ф. Техника и ее связь с задачею культуры. — СПб, 1885.
2. Reuleaux F. Über den Maschinenbaustil. — 1861 (4-e Aufl. 1889).
3. Цыганкова Э. Г. У истоков дизайна. // Предисловие чл.-корр. НАНУ А.Н.Боголюбова — Москва: Наука, 1977.
4. Боголюбов А. Н., Чиненова В. Н. Франц Рело. — Москва: Наука, 2014. С.156-167.

———————————————————————————

УДК 531.091

К вопросу об истории аналитического решения задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки

А. О. Юлина (Россия, г. Санкт-Петербург)
Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского
e-mail:parfenova19761976@mail.ru

On the history of rotation problem of a solid around a fixed axis

A. O. Yulina (Russia, St. Petersburg)
Military Space Academy named after A. F. Mozhaisky
e-mail:parfenova19761976@mail.ru

Кинематические формулы Эйлер вывел еще в работе "Открытие нового принципа механики"(1750).[1] Там есть выражения для компонентов скорости произвольной точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u = q\cdot z - r\cdot y, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = v = r\cdot x - p\cdot z, \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = \omega = p\cdot y - q\cdot x \end{cases} \qquad (1)$$

x ,y,z - координаты точки, t - время, p,q,r - угловые скорости тела относительно осей координат. Дифференцируя уравнения (1) по времени, Эйлер находит формулы для компонентов

ускорения, а также для моментов ускорения относительно координатных осей. Оси координат Эйлер считает неподвижными. Лишь на последнем этапе исследований он смог увидеть, какие упрощения можно получить при переходе к подвижной системе координат.[2] Исходя из соотношений (1), Эйлер ставит следующую проблему: дана угловая скорость ω вращения твердого тела вокруг оси, проходящей через его центр инерции I и образующей углы α, β, γ с центральными главными осями инерции, которые приняты за оси координат. Какими должны быть компоненты X, Y, Z сил, приложенных к элементу тела массы dm, которое занимает положение, определенное точкой (x, y, z), чтобы за время dt ось и угловая скорость вращения получили заданные изменения $d\alpha, d\beta, d\omega$? В связи с тем, что в соответствии с основными принципами механики (вторым законом Ньютона) компоненты искомой силы после умножения на dt и деления на dm пропорциональны (а при соответствующем подборе единиц измерения – равны) приращениям компонентов скоростей ($\frac{Xdt}{dm} = du, \frac{Ydt}{dm} = dv, \frac{Zdt}{dm} = dw$), остается вычислить последние. Переписав формулы (1) в виде
$u = \omega(z\cos\beta - y\cos\gamma), v = \omega(x\cos\gamma - z\cos\alpha), w = \omega(y\cos\alpha - x\cos\beta)$
и приняв во внимание,что
$dx = udt = \omega dt(z\cos\beta - y\cos\gamma), dy = vdt = \omega dt(x\cos\gamma - z\cos\alpha),$
$dz = \omega dt(y\cos\alpha - x\cos\beta)$
находим
$du = d\omega(z\cos\beta - y\cos\gamma) - \omega(z\sin\beta d\beta - y\sin\gamma d\gamma) + \omega^2 dt(y\cos\alpha\cos\beta + +z\cos\alpha\cos\gamma - x\sin^2\alpha);$
$dv = d\omega(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - \omega(x\sin\gamma d\gamma - z\sin\alpha d\alpha) + \omega^2 dt(z\cos\beta\cos\gamma + +x\cos\beta\cos\alpha - y\sin^2\beta);$
$dw = d\omega(y\cos\alpha - x\cos\beta) - \omega(y\sin\alpha d\alpha - x\sin\beta d\beta) + \omega^2 dt(x\cos\gamma\cos\alpha + +y\cos\gamma\cos\beta - z\sin^2\gamma)$
Далее следует определение моментов dP, dQ, dR , приложенных к элементу dM сил относительно главных центральных осей инерции. В соответствии с приведенными выше формулами имеем:
$dP = \frac{dM}{dt} \cdot (yd\omega - zdv) = d\omega[(y^2 + z^2)\cos\alpha - xy\cos\beta - zx\cos\gamma -$
$- \omega[(y^2 + z^2)\sin\alpha d\alpha - xy\sin\beta d\beta - \sin\gamma d\gamma] + \omega^2 dt[(y^2 - x^2)\cos\beta\cos\gamma +$
$+ xy\cos\gamma\cos\alpha - yz\sin^2\gamma - zx\cos\alpha\cos\beta + zy\sin^2\beta]].$
Аналогично находятся dQ и dR.
Теперь, интегрируя по объему тела, Эйлер находит уравнения.
$P = \frac{d}{dt} \cdot [Ad\omega\cos\alpha - \omega Ad\alpha\sin\alpha + \omega^2(C - B)dt\cos\beta\cos\gamma],$
$Q = \frac{d}{dt} \cdot [Bd\omega\cos\beta - \omega Bd\beta\sin\beta + \omega^2(A - C)dt\cos\gamma\cos\alpha],$ (2)
$R = \frac{d}{dt} \cdot [Cd\omega\cos\gamma - \omega Cd\gamma\sin\gamma + \omega^2(B - A)dt\cos\alpha\cos\beta]$,
где A,B,C - центральные моменты инерции тела.
Последние уравнения позволяют дать ответ на вопрос, обратный приведенному выше: заданы силы, действующие на тело, вращающееся вокруг оси, проведенной через его центр инерции, с угловой скоростью ω ; как за время dt изменятся положение оси вращения и угловая скорость тела? Сначала Эйлер исходит непосредственно из уравнений (2). Так, с помощью линейной комбинации этих уравнений он находит
$d\omega = \frac{(C - B)(A - C)(B - A)}{ABC} \cdot \omega^2 dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + dt \cdot (\frac{P\cos\alpha}{A} + \frac{Q\cos\beta}{B} + + \frac{R\cos\gamma}{C}).$
Но дальше он обращает внимание на то, что уравнениям (2) можно придать значительно более простой вид, если перейти к величинам

$$p = \omega\cos\alpha, q = \omega\cos\beta, r = \omega\cos\gamma$$

—- составляющим угловой скорости в системе центральных осей инерции. Так впервые появляются эйлеровы уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки:

$$\begin{cases} P = A \cdot \dfrac{dP}{dt} + (C-B)qr, \\ Q = B \cdot \dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp, \\ R = C \cdot \dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq. \end{cases} \qquad (3)$$

Эйлер подчеркивает значение своего открытия, указывая, что"итог всей Теории Движения твердых тел содержится в этих трех достаточно простых формулах". Вместе с тем выявляется потребность использовать подвижную систему координат, неподвижно связанную с телом, – систему его главных осей инерции.[3]

Эйлеру удалось продемонстрировать самое важное применение уравнений (3) – решение с их помощью задачи о вращении твердого тела вокруг точки по инерции. Далее Эйлер решает задачу для случая трех или двух равных главных моментов инерции. В случае попарно неравных моментов при отсутствии внешних сил он выражает закон движения через дуги конических сечений, т.е. через эллиптические интегралы, и рассматривает условия, при которых решение сводится к элементарным интегралам.[4]

Эта основополагающая в теории гироскопа задача станет предметом изысканий многих ученых.

Первый шаг вперед сделал вскоре Жозеф Луи Лагранж (1736-1813). В 1773 г. он исследовал вращение твердого тела некоторой формы около неподвижной точки, рассмотрев и усовершенствовав решение Эйлера задачи о вращении тела без действия внешних сил. Позже, при подготовке второго издания "Аналитической механики"в начале XIX в., Лагранж вернулся к этой проблеме, начав более глубокое ее исследование [5]. Он вводит понятие мгновенной оси вращения твердого тела около неподвижной точки, опираясь на обоснование примененного им подхода, детально разработанного ранее. Далее заново выводятся кинематические уравнения Эйлера вращения твердого тела в дифференциальной форме. Затем заново выводятся динамические уравнения Эйлера, исходя из той формы дифференциальных уравнений движения системы, которые теперь называют "уравнениями Лагранжа второго рода". Лагранж подчеркивает, что свободные оси в твердом теле открыл Эйлер, и наиболее изящная и удобная во многих случаях форма дифференциальных уравнений движения впервые выведена Эйлером. Существенно новым достижением Лагранжа в этой проблеме была постановка задачи о движении твердого тела, получившая в дальнейшем наименование "случая Лагранжа": когда точка опоры или подвеса не совпадает с центром тяжести тела. Лагранж ввел упрощающие предположения о динамической симметрии твердого тела и о расположении точки опоры на оси симметрии. Тогда из третьего уравнения движения (отнесенного к оси динамической симметрии) определяется интеграл, также получивший имя Лагранжа, $r = const$, означающий постоянство величины угловой скорости около динамической оси симметрии. Этот важный результат вместе с выделением практически интересного случая движения тяжелого симметричного гироскопа (как стали позже называть случай Лагранжа) представляет чрезвычайно большое достижение в динамике твердого тела. Однако Лагранж этим не ограничился: он наметил путь интегрирования и двух первых уравнений движения, довел их до квадратур в эллиптических функциях.

Петербургский математик и механик, профессор Осип Иванович Сомов, к 1851 г. дал первое обобщенное решение задачи вращения тела вокруг неподвижной точки. О.И. Сомов получил решение задачи о вращении твердого тела около точки после первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром.Решение Сомова показало, что основные параметры движения выражаются через композицию эллиптических функций простейшего вида и, вводя их, задача о вращении твердого тела отностельно неподвижной точки сводится к простейшим элементам. В 1871 году Карл Вейерштрасс упрощает систему эллиптических функций Якоби, вводя вместо трех тета-функций одну, имеющую своим аргументом комплексное время. Поэтому дальнейшее исследование задачи о движении волчка имело продолжение на комлексной плоскости, направляющие косинусы при вращении тела были получены в виде частных θ или σ -функций. Получают ясность и кватернионные выражения для кинематики движения в задаче о вращения твердого тела около неподвижной точки.

Таким образом, рассмотренное решение задачи, представленное Сомовым О.И. в 1850 году вполне объясняет дальнейшее направление исследований: как в кватернионном представлении, так и в решении Ковалевской С.В. [6]

Специальным прикладным разделом динамики твердого тела с одной неподвижной точкой является теория гироскопа. Развитие этой практической области началось после 1851 г., когда Л. Фуко поставил в Парижском Пантеоне знаменитый опыт с качающимся маятником, обнаруживающим вращение Земли и позволяющим измерить угловую скорость ее вращения. Через год Фуко сконструировал прибор, названный им гироскопом, основная деталь которого – массивный маховик, быстро вращающийся в трехосном кардановом подвесе. Принципиальные возможности прибора Фуко для наблюдения вращения Земли, для сохранения ориентации системы в инерционном пространстве, для измерения долготы и широты местности были выявлены уже самим изобретателем этого прибора. Однако на пути использования гироскопа в указанных целях стояли разнообразные технические трудности: прибор теперь представлял собой не одно твердое тело, а систему тел, на которую действовали мало изученные силы (трения, сопротивления, упругие силы и пр.). Многие технические трудности были преодолены в достаточно совершенных конструкциях гироскопических устройств Г. Аншютца-Кемпфе, Э. Сперри в конце XIX и в начале XX в.

В XX в. в результате длительных усилий ученых, инженеров и технологов было достигнуто высокое совершенство гироскопических приборов. Стабилизация с помощью гироскопа была блестяще продемонстрирована И.В. Мещерским [7]. Иван Всеволодович Мещерский в 1921 году в рамках проекта «Гироскопическая однорельсовая железная дорога Петербург-Гатчина» представил статью «Дифференциальные уравнения движения гироскопического вагона однорельсовой железной дороги». Предметом его исследования стало составление точных дифференциальных уравнений движения гироскопического вагона и определение с помощью этих уравнений величины погрешностей, которые допускаются в том случае, когда движение вагона выражается приближенными линейными дифференциальными уравнениями.

Благодаря основам, заложеным Эйлером, Лагранжем и Сомовым, и развитых в последующих исследованиях, современное точное приборостроение успешно решает проблемы конструирования инерциальных навигационных систем, обеспечивающих полет и возвращение космических кораблей, достижения поверхности других планет космическими аппаратами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Euler. Mechanika sive Scientia motus analytice exposita. Petropoli, 1736. - L.Euleri Opera Omnia, ser.II, v. I, II.

2. Л. Эйлер. Основы динамики точки. М. – Л., ОНТИ, 1938 г.

3. L. Euler. Scientia navalis seu Tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Petropoli, 1749. L. Euler a Petropolis, 1749, t.1, I.

4. L. Euler. Découverte d'un nouveau principe de mécanique. - "Mémoires Acad.sc. Berlin v.6 (1750), 1752. – Opera Omnia, ser. II, v.V.

5. Ж.Л. Лагранж. Аналитическая механика, т.1, 2. М. – Л., ГТТИ, 1950 г.

6. Сомов О.И. Основания теории эллиптических функций. СПб: АН, 1850 г. - 250 с.

7. А.О. Юлина, Д.В. Бородин: О работе И.В. Мещерского в области гироскопической стабилизации монорельсового вагона // История науки и техники. 2020 г. №4. С. 45-52.

———————————————————————————————————————

Секция 10. Арифметическая и алгебраическая геометрии

УДК 511.32

О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости II

В. А. Горская (Россия, г. Нижний Новгород)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane II

V. A. Gorskaya (Russia, Nizhni Novgorod)
National Research University Higher School of Economics
e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

Классическая задача классификации вещественных алгебраических кривых берёт своё начало фактически у истоков математики. Современную формулировку задача приобрела после включения ее в 1900 г. Д. Гильбертом в его знаменитый список математических проблем под номером 16. Гильберт поставил задачу изотопической классификации неособых вещественных проективных кривых степени 6, которую в 1969 г. решил Д.А. Гудков [1]. Там же Гудков поставил задачу о классификации вещественных кривых степени 6, распадающихся в произведение двух неособых кривых при некоторых естественных условиях максимальности и общего положения. Эта задача была решена в 1977 году Г.М. Полотовским [2, 3].

В настоящее время после серии работ нескольких авторов (точные ссылки см. в [4]) почти завершено решение аналогичной задачи о распадающихся кривых степени 7. Кроме этого, в [5] найдена классификация кривых степени 6, распадающихся в произведение любого возможного числа неприводимых сомножителей в общем положении, и в [6] найдена классификация взаимных расположений M-квинтики и пары прямых.

Задача, которая рассматривается ниже, была предложена автору Г.М. Полотовским. Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [7], и посвящена изотопической классификации вещественных проективных кривых степени 7, распадающихся в произведение кубики и двух коник (т. е. определяемых многочленом вида $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \widetilde{C}_2$[1]) при выполнении следующих условий:

(i) *C_3, C_2 и $\widetilde{C}_2$ являются M-кривыми*[2]*;*

(ii) *каждые две из указанных в* (i) *кривых пересекаются без касания в максимально возможном* (*по теореме Безу*) *числе вещественных точек, т. е.*

$$\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2) = 6, \#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2) = 4;$$

[1]Здесь и ниже C_m – однородный многочлен степени m с вещественными коэффициентами от координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{R}C_m \subset \mathbb{R}P^2$ – множество вещественных точек кривой C_m.

[2]Кривая C_m называется M-кривой, если кривая неособая и $\mathbb{R}C_m$ имеет максимально возможное по теореме Харнака число $(m-1)(m-2)/2+1$ компонент связности; M-кривая степени 3 состоит в $\mathbb{R}P^2$ из одного овала и нечётной ветви (топологической окружности, вложенной в $\mathbb{R}P^2$ односторонне).

(iii) $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2 = \emptyset$, *т. е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;*

(iv) *все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики;*

(v) *для каждой из коник* $C_2, \widetilde{C}_2$ *все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне другой коники;*

(vi) *точки пересечения нечётной ветви с разными кониками перемежаются, т. е. нельзя так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем — со второй.*[3]

Схема исследования следующая: сначала перечисляем топологические модели кривых, удовлетворяющие наложенным ограничениям и топологическим следствиям теоремы Безу. Таких моделей оказалось 62. Затем для каждой из этих моделей пытаемся либо доказать её нереализуемость алгебраической кривой степени 7 с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений [8], либо реализовать её построением кривой степени 7 методом малого параметра из расположений, построенных в [5].

Теорема 1. *Топологические модели кривых рассматриваемого класса, отличные от показанных на рис.* 1, 2, *не могут быть реализованы кривыми степени* 7. *Из них первые девять* (*рис.* 1) *реализуются кривыми степени* 7, *а вопрос о реализуемости пяти оставшихся* (*рис.* 2) *открыт.*

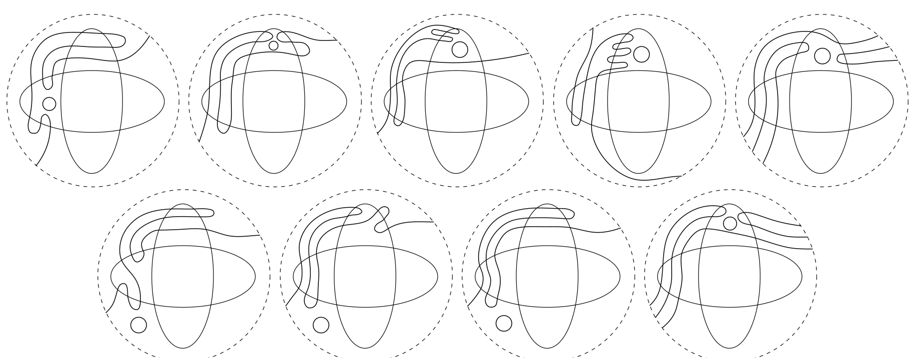


Рис. 1

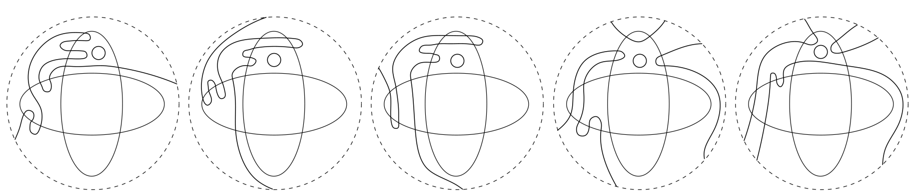


Рис. 2

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д.А., Уткин Г.А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Уч. зап. Горьков. ун-та. 1969. Вып. 87. С. 1–214.

2. Полотовский Г.М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 3. С. 548–551.

[3] Случай, когда точки пересечения не перемежаются, был рассмотрен в работе [7].

3. Полотовский Г.М. Полная классификация M-распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости // Деп. в ВИНИТИ. № 1349-78. М., 1978.

4. Борисов И.М., Полотовский Г.М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Тематические обзоры. 2020. Т. 176. С. 3-18.

5. Kuzmenko T.V., Polotovskiy G.M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position // AMS Translations Ser. 2. 1996. Vol.173. P.165-177.

6. Корчагин А.Б., Полотовский Г.М. О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21. № 2. С. 92–112.

7. Горская В.А., Полотовский Г.М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22. № 1. С. 24–37.

8. Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. Vol. 38. P. 779–810.

УДК 511.32

О расположениях двух M-кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой[1]

Н. Д. Пучкова (Россия, г. Нижний Новгород)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: nataha1910@mail.ru

On the dispositions of two M-singular curves of degree 4, the oval of one of which coils around the oval of the other[1]

N. D. Puchkova (Russia, Nizhny Novgorod)
National Research University Higher School of Economics
e-mail: nataha1910@mail.ru

Данная работа посвящена изучению взаимных расположений в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ двух M-кривых степени 4, находящихся в общем положении, и является продолжением исследования [1].

1. Постановка задачи. Задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта [2]. На данный момент известна классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

В данной работе исследуется взаимное расположение в вещественной проективной плоскости двух кривых степени 4 при некоторых условиях максимальности и общего положения.

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931

[1]The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. No 075-15-2019-1931

Именно, предполагается, что:
1. Эти две кривые являются M-кривыми.
2. Все точки пересечения этих кривых лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой.
3. Точек пересечения максимальное число, т. е. $4 \cdot 4 = 16$.
4. Точки пересечения попарно различны.

Введем тип пересечения ветвей, который назовём «змея, обвивающаяся вокруг овала».

Определение 1. Пусть овал O целиком лежит в аффинной плоскости[2]. Рассмотрим незамкнутую дугу без самопересечений, тоже целиком лежащую в аффинной плоскости и пересекающую овал O в восьми попарно различных точках Эту дугу будем называть *образующей дугой.* При достаточно малом ε граница ε-окрестности этой дуги представляет собой другой овал, который пересекает исходный овал O в 16 попарно различных точках. Этот второй овал будем называть *змеёй*, а такое взаимное расположение двух овалов будем называть пересечением ветвей типа *"змея, обвивающаяся вокруг овала"*.

Определение 2. Пусть в условиях определения 1 один (а, значит, и второй) конец образующей дуги лежит в неориентируемой компоненте дополнения к овалу O. Если из этого конца можно "уйти на бесконечность" [3], не пересекая овал O и образующую дугу, то отвечающую такой дуге змею назовём *"змеёй со свободным концом"*. В противном случае змею будем называть *"змеёй без свободного конца"* .

"Змеи со свободным концом" рассматривались в работе [1], в данной статье будем рассматривать "змеи без свободного конца".

Цель нашего исследования – найти изотопическую классификацию проективных кривых степени 8, удовлетворяющих условиям 1 – 4 и имеющих пересечение овалов типа "змея без свободного конца, обвивающаяся вокруг овала".

2. Основной результат. Получена полная классификация кривых степени 8 рассматриваемого класса, которую описывает следующая

Теорема 1. *Существуют только 6 изотопических типов кривых степени 8 типа "змея без свободного конца, обвивающаяся вокруг овала", показанные на рис.* 1 – 6.

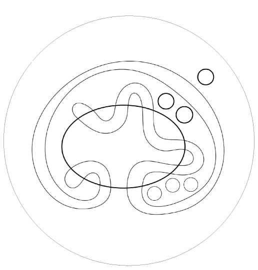


Рис. 1

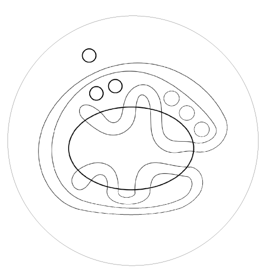


Рис. 2

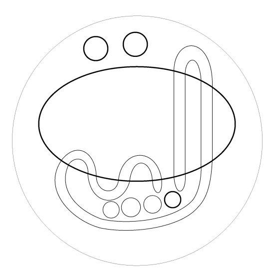


Рис. 3

Запреты доказываются с помощью теоремы Безу и метода Оревкова [3], основанного на теории кос и зацеплений. Построения осуществлены методом малого параметра.

[2]Для овала M-кривой степени 4 этого всегда можно добиться, выбрав в качестве бесконечно удаленной прямой аффинной плоскости слегка сдвинутую двойную касательную к этой кривой.

[3]Т. е. соединить его с граничной окружностью модели проективной плоскости.

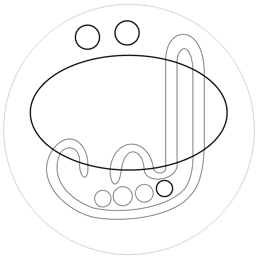


Рис. 4

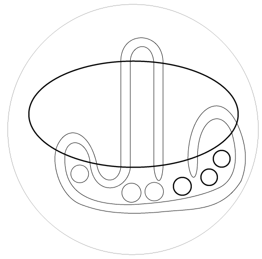


Рис. 5

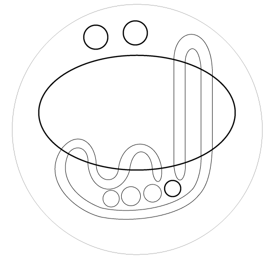


Рис. 6

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пучкова Н. Д. О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4 // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва, Тула, 18–22 мая 2021 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2021. – С. 347-351.

2. Проблемы Гильберта (под редакцией П.С. Александрова) – М.: Наука, 1969 – 240 с.

3. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. 1999. Том 38. Vol.4. P. 779—810.

УДК 512.815.1+512.815.6+512.816.1+512.816.2

Топологические и гомологические свойства пространства орбит простой трёхмерной компактной линейной группы Ли

О. Г. Стырт (Россия, г. Москва)
Московский физико-технический институт
e-mail: oleg_styrt@mail.ru

Topological and homological properties of the orbit space of a simple three-dimensional compact linear Lie group

O. G. Styrt (Russia, Moscow)
Moscow Institute of Physics and Technology
e-mail: oleg_styrt@mail.ru

Исследуется вопрос о том, является ли пространство орбит компактной линейной группы топологическим многообразием и гомологическим многообразием. Доклад посвящён случаю простой трёхмерной группы. Получена верхняя оценка для суммы целых частей половин размерностей неприводимых компонент представления, фактор которого является гомологическим многообразием, что усиливает прежний результат, дающий ту же оценку в случае, если фактор представления является гладким многообразием. Большинство представлений, удовлетворяющих данной оценке, также разобраны ранее.

Основным результатом по данному случаю служит следующая теорема.

Теорема 1. *Если фактор представления простой трёхмерной группы является гомологическим многообразием, то сумма целых частей половин размерностей неприводимых компонент данного представления не превосходит* 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стырт О. Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2018. № 3. С. 68-81.

2. Стырт О. Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой. Выводы // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2018. № 6. С. 48-63.

3. Стырт О. Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит простой трёхмерной компактной линейной группы Ли // Чебышёвский сборник. 2022 (в печ.).

Секция 11. Многомасштабное математическое моделирование в физике

УДК 537.87

О численном моделировании возбуждения электромагнитных колебаний открытого плазменного эндовибратора

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
Т. Г. Мещерякова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: tatyanka.parshkova@mail.ru
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: panin@tspu.tula.ru

On numerical modeling of excitation of electromagnetic oscillations of the open plasma endovibrator

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:bobylev.yu@mail.ru
T. G. Meshcheryakova (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:tatyanka.parshkova@mail.ru
V. A. Panin (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:panin@tspu.tula.ru

Введение

Одной из актуальных проблем высокочастотной электродинамики является корректная постановка и решение нестационарной задачи о возбуждении открытого эндовибратора (резонатора) некоторым нестационарным внешним источником. В случае стационарного гармонического внешнего источника подобные задачи подробно исследованы [1]. Если же внешний источник нестационарен и создаваемые им возмущения произвольным образом изменяются со временем, то задача существенно усложняется. Основной трудностью при этом является правильная постановка граничных условий излучения на открытом торце резонатора, из которого происходит излучение электромагнитных волн в окружающее пространство. Данная трудность обусловлена тем, что известные ранее условия излучения типа Зоммерфельда, принципа предельного поглощения и принципа предельной амплитуды [1, 2] разрабатывались для решения стационарного уравнения Гельмгольца, описывающего установившийся колебательный процесс, и, поэтому непосредственно в качестве граничных условий излучения для полной нестационарной системы уравнений Максвелла-Власова использованы быть не могут. Ситуация ещё более усложняется, если полость эндовибратора заполнена некоторой диспергирующей средой, в частности, плазмой.

Важный шаг на пути решения указанной проблемы осуществлён в ряде работ, в частности, в работе [3] и обобщён в [4]. Там сформулированы общие нестационарные парциальные граничные условия на открытом торце эндовибратора, позволяющие рассматривать произвольные нестационарные электромагнитные явления. Однако практическая реализация парциальных условий излучения при численных расчётах сталкивается со значительными математическими сложностями, поэтому апробация этих условий проводится на относительно простых модельных задачах. Так, в работе [5] рассматривалась задача о возбуждении электромагнитных колебаний открытого вакуумного резонатора внешним источником, включающимся в момент времени $t = 0$ и моделируемым бесконечно-тонким гармонически осциллирующим заряженным плоским слоем, расположенным в начале координат. В настоящей работе для тестирования парциальных условий излучения мы будем использовать более общую модель внешнего источника - элементарный диполь, расположенный в начале координат, соответствующий бесконечно-тонкому кольцу определённого радиуса.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим систему [5], основной частью которой является резонатор - металлический цилиндрический волновод радиуса R и длиной L с идеально проводящими стенками. Участок волновода $0 \leqslant z < L$ заполнен поперечно однородной линейной плазмой. Вдоль оси волновода наложено сильное магнитное поле, полностью замагничивающее электроны плазмы. В продольном направлении (вдоль оси $0z$) плазма является неоднородной. Область $z \geqslant L$ моделирует излучающий рупор, состыкованный с резонатором. В простейшем случае рупором является продолжение того же волновода, но только вакуумного. При этом граница $z = L$ является открытой границей, через которую и осуществляется вывод излучения. Плотность внешнего источника $j_{zd}(t, z, r)$ в отличие от [5], будем определять выражением

$$j_{zd}(t, z, r) = j_{d0}\delta(r - r_d)\delta(z)\vartheta(t)sin(\omega t), \tag{1}$$

где $\vartheta(t)$ - ступенчатая функция Хевисайда, δ - функция Дирака. Ясно, что данная формула описывает синусоидальный источник, включаемый в момент времени $t = 0$, плотность тока которого соответствует бесконечно-тонкому кольцу радиуса r_d , расположенному в начале координат. Сами же исходные уравнения, описывающие аксиально-симметричные возбуждения волн E – типа, создаваемые источником (1), имеют вид системы [5]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial (r)}(rB_\varphi) = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(j_{zp} + j_{zd}), \qquad \frac{\partial j_{zp}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2(z)}{4\pi}E_z.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\omega_p(z)$ - ленгмюровская частота электронов плазмы, а $j_{zp}(t, z, r)$. - продольная составляющая плотности тока, наведённого в плазме.

Разлагая, далее, компоненты векторов поля по собственным функциям цилиндрического волновода (соотвествующие функции Бесселя нулевого и первого порядка), для коэффициентов данных разложений $E_z^{(n)}$, $E_r^{(n)}$, $B_\varphi^{(n)}$, $J_{zp}^{(n)}$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} + k_{\perp n}E_z^{(n)} = -\frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial z} = -\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau} = k_{\perp n}B_\varphi^{(n)} - J_{zp}^{(n)} - J_d^{(n)}, \quad \frac{\partial J_{zp}^{(n)}}{\partial \tau} = \widetilde{\omega}_p^2(z)E_z^{(n)}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь обозначено $\tau = ct$, $\widetilde{\omega} = \omega/c$, $\widetilde{\omega}_p(z) = \omega_p(z)/c$,

$$J_d^{(n)} = \frac{8\pi}{c}\frac{r_d J_0(k_{\perp n} r_d)}{R^2 J_1^2(\mu_{0n})} j_{d0}\delta(z)\vartheta(t)sin(\widetilde{\omega}\tau); \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{4}$$

Как видно из этих обозначений, новая переменная τ имеет, как и координата z размерность длины, а частоты $\widetilde{\omega}_p$ и $\widetilde{\omega}$ - размерность волнового числа м$^{-1}$. Система уравнений (3) дополняется нулевыми начальными и граничным условиями, а также условием излучения при на правом конце системы. Так как при $z = L \quad \omega_p(L) = 0$, то уравнения (3) содержат только компоненты поля, то есть являются однородными. Используя преобразование Лапласа, решение уравнений (3) для данного случая можно записать в виде [4]:

$$\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} + k_{\perp n}\int\limits_0^{\tau} J_1(k_{\perp n}(\tau - \tau'))\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z}d\tau', \tag{5}$$

где J_1 функция Бесселя первого порядка. Эти соотношения, следуя [4], мы и рассматриваем как нестационарные парциальные граничные условия излучения, записанные в точке $z = L$ - левой границы излучающего устройства. Как видно, это условие является достаточно сложным интегро-дифференциальным уравнением, и поэтому численная его реализация не совсем проста.

Определим спектральный состав поля излучения на выходе системы для каждой моды функциями

$$E_r^{(n)}(\Omega) = \int\limits_0^{\tau} E_r^{(n)}(\tau', L)exp(i\Omega\tau')d\tau', (n = 1, 2....), \tag{6}$$

являющимся, фактически, образами Фурье функций $E_r^{(n)}(\tau, L)$. Кроме того, из (3) стандартным образом выводится дисперсионное уравнение, из которого можно получить следующее выражение для продольного волнового числа k_z

$$k_z^2 = \frac{\widetilde{\omega}^2 - \widetilde{\omega}_p^2 - k_{\perp n}^2}{1 - \widetilde{\omega}_p^2/\widetilde{\omega}^2} \tag{7}$$

Результаты численного моделирования

Для определённости во всех дальнейших расчётах положим $L = 10$см., $R = 1,8$см. Если частота внешнего источника $\widetilde{\omega}$ задана, и она больше частоты отсечки ω_{01}, то как известно, поле в волноводе будет представлять собой суперпозицию бегущих волн, число которых ограничено. Это видно и из (7). Так, в случае вакуумного волновода при $\widetilde{\omega}_p$ =0: $k_z^2 = \widetilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2$, а поскольку собственные числа $k_{\perp n}$ непрерывно увеличиваются с ростом n, то при некотором n данная разность станет отрицательной, и волна, соответствующая этому номеру, будет затухать (асимптотически убывая по амплитуде до нуля при $z \to \infty$). Выберем $\widetilde{\omega}$=5, тогда в волноводе могут существовать три бегущие волны, так как $k_z^2 = \widetilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2 = \widetilde{\omega}^2 - \mu_{0n}^2/R^2 > 0$, если $\mu_{0n}/R < \widetilde{\omega}$, или $\mu_{0n} < \widetilde{\omega}R = 9$, что будет выполнено для $\mu_{01} \approx 2{,}4$; $\mu_{02} \approx 5{,}52$ и $\mu_{03} \approx 8{,}65$ ($\mu_{04} \approx 11{,}79$). Положим, для определённости, в формуле (4) r_d=0,65см. Данное значение r_d соответствует расположению элементарного диполя вблизи максимума второй поперечной моды волновода, и, определяет тем самым условия наиболее интенсивного возбуждения этой моды.

На Рис.1 изображены спектральные характеристики $\left|E_r^{(n)}(\Omega)\right|$ первых четырёх поперечных мод (n=1;. . . ;4). Из этого рисунка видно, что на частоте внешнего источника $\widetilde{\omega}$ =5 возбуждены первые три поперечные моды,причём наиболее интенсивно, как и положено, возбуждается вторая мода. Третья мода, условие существования которой в виде бегущей волны находится “на грани”, имеет уже частоту, несколько отличную от частоты вынуждающей силы, то есть, она уже утратила задаваемую частотой диполя $\widetilde{\omega}$ периодичность. Четвёртая мода практически не возбуждается.

Рассмотрим теперь плазменный волновод. Снова будем считать частоту внешнего источника $\widetilde{\omega}$ =5., и положим $\widetilde{\omega}_{p0}$ =3, тогда, в соответствии с (7) условию $k_z^2 = \widetilde{\omega}^2 - \widetilde{\omega}_{p0}^2 - k_{\perp n}^2 \geqslant 0$ будут удовлетворять только две поперечные моды (n=1 и n=2) Именно эти две поперечные моды наиболее интенсивно возбуждаются на частоте $\widetilde{\omega}$ =5, что видно из Рис.2. Третья же мода, в отличие от Рис.1 возбуждается незначительно, причём на частоте, отличной от $\widetilde{\omega}$ =5. Четвёртая мода практически не возбуждается и поэтому её спектральная характеристика на Рис.2 не приводится.

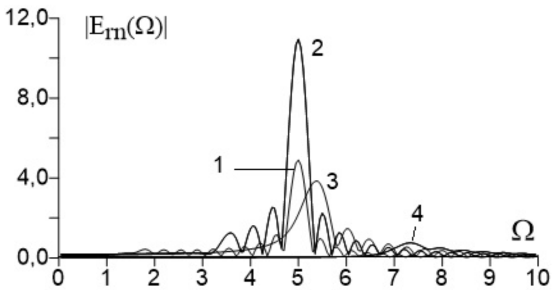


Рис. 1: Спектральные характеристики $\left|E_r^{(n)}(\Omega)\right|$ первых четырёх поперечных мод поля излучения при $\widetilde{\omega_p}$ =0 и $\widetilde{\omega}$=5

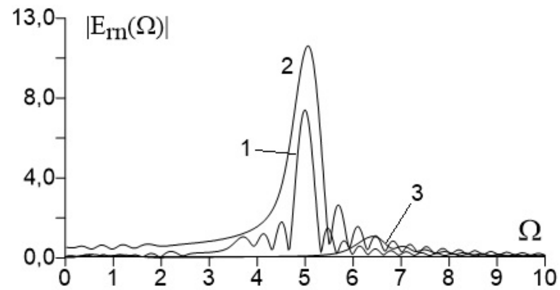


Рис. 2: Спектральные характеристики $\left|E_r^{(n)}(\Omega)\right|$ первых четырёх поперечных мод поля излучения при $\widetilde{\omega_p}$ =3 и $\widetilde{\omega}$=5

Из проведённого анализа процесса возбуждения электромагнитных полей диполем в плазменном волноводе можно сделать вывод о том, что использование при численном моделировании парциальных граничных условий излучения верно отражает динамику рассматриваемых электродинамических процессов и является перспективным для изучения переходных процессов в более сложных электродинамических системах с плазменным и иным заполнением, независимо от природы причины, приводящей к возникновению колебаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. 636 с.

2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 528 с.

3. Майков А. Р., Свешников А. Г., Якунин С. А. Статья в журнале // ЖВМ и МФ. 1985. Том 25, № 6. С. 883-894.

4. Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Свешников А. Г. Статья в журнале // Физика плазмы. 1999. Том 25, № 7. С. 615-620.

5. Панин В. А., Бобылёв Ю. В. Материалы конференции // XVIII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвящённая столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 23-26 сентября 2020г.) — Тула, 2020. С.441-445.

УДК 37.01

О компьютерном, аналитическом и натурном моделировании падения шара в вязкой среде

Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
А. И. Грибков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ks7a@yandex.ru
Р. В. Романов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru

On computer, analytical and full-scale modeling of ball fall in a viscous medium

Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
A. I. Gribkov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ks7a@yandex.ru
R. V. Romanov (Russia, г. Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru

В традиционном лабораторном практикуме по физике в педагогическом вузе есть две лабораторные работы, в ходе выполнения которых изучается движение твёрдого тела (шарика) в различных средах: «Определение ускорения силы тяжести при свободном падении тела» [1] и «Определение коэффициента внутреннего трения жидкости» [2]. Обычно получаемые результаты и расчёт соответствующих погрешностей относятся непосредственно к проведённому натурному эксперименту и не затрагивают анализа корректности и достоверности используемых при этом физических моделей. Вместе с тем для понимания изучаемого материала было бы весьма полезным, если в опыте можно было дать количественные оценки, совпадающие в пределах погрешности с аналитическими результатами и подтвердить их соответствующими компьютерными расчётами. Демонстрации данной связи между теоретической, вычислительной и экспериментальной физикой на примере указанных выше лабораторных работ и посвящена настоящая статья.

Уравнения движения для шара, радиуса r, падающего с небольшой высоты, записываются следующим образом [3]:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_T + \vec{F}_A + \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \tag{1}$$

Здесь: $\vec{F}_T = m\vec{g} = \rho V\vec{g}$, $\vec{F}_A = -\rho_0 V\vec{g}$ – силы тяжести и Архимеда. Сопротивление среды складывается из двух слагаемых: $\vec{F}_1 = -6\pi\eta r\vec{v} = -3\pi\eta d\vec{v}$ – сила вязкого трения по Стоксу и

$\vec{F}_2 = -c\rho_0 S v\vec{v}/2$ - сила аэродинамического (лобового) сопротивления по Ньютону. В данных формулах использованы обозначения: d – диаметр шара, ρ – плотность материала шара, $V = \pi d^2/6$ и $m = \rho V$ – его объём и масса, $S = \pi d^2/4$ – площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, η – коэффициент динамической вязкости среды, ρ_0 – плотность среды, c – коэффициент лобового сопротивления (для шара $c = 0{,}50$).

Авторами был достаточно подробно проанализирован случай падения шарика в установке ФП-26 в лабораторной работе по определению ускорения силы тяжести. Результаты анализа приведены в [4]. При этом было подготовлено Windows-приложение, моделирующее данный эксперимент и позволяющее в широком диапазоне варьировать параметры задачи (Рис. 1).

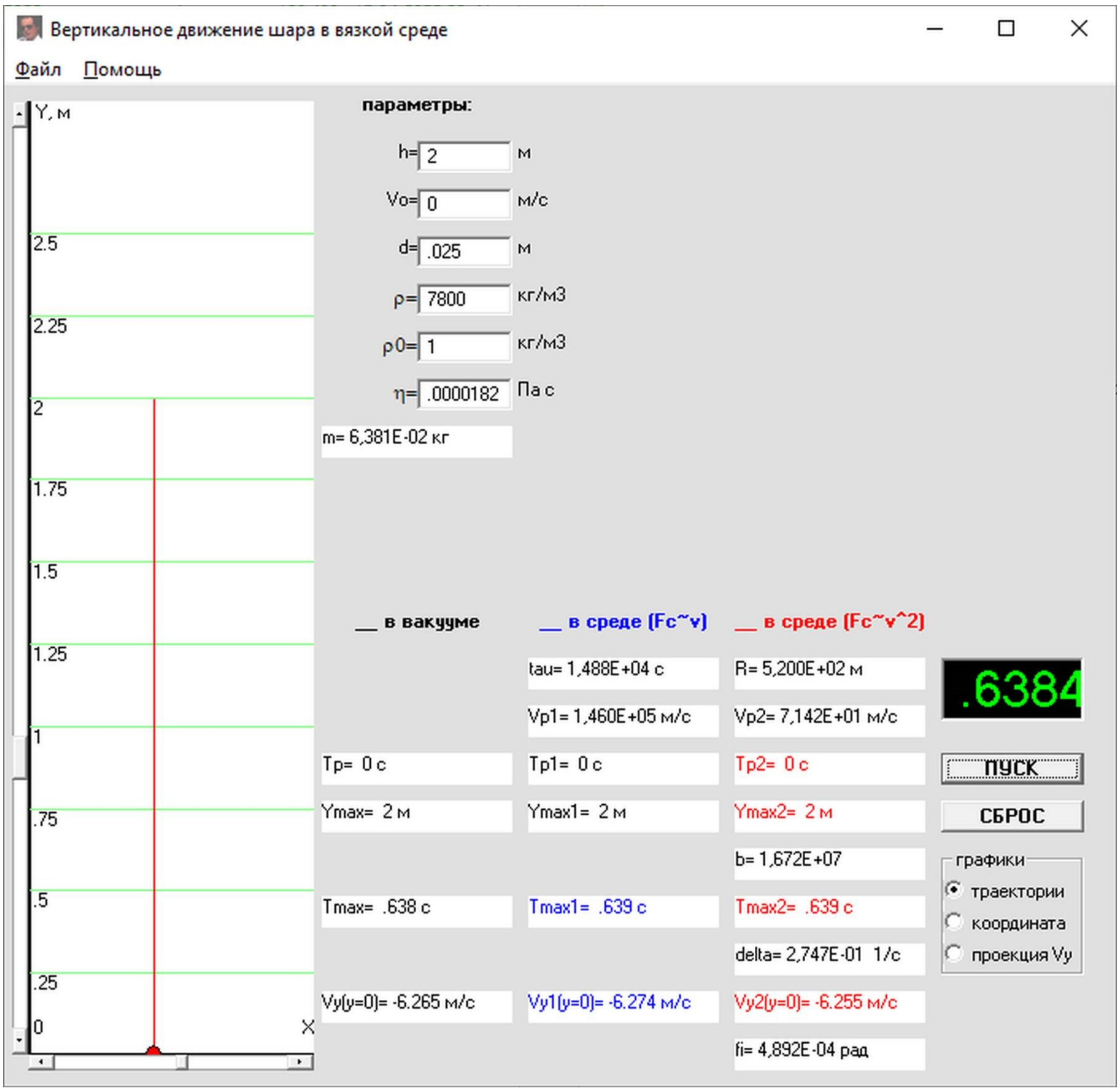


Рис. 1: Главное окно Windows-приложения

В настоящей работе рассмотрим более подробно описание движения шарика в среде, реализуемое в лабораторной работе по определению коэффициента внутреннего трения жидкости.

Реальный эксперимент выполняется достаточно просто. Стеклянная колба длиной более 1 м и диаметром D = 60 мм заполнена касторовым маслом (ρ_0= 960 кг/м^3, η = 0,985 Па $\cdot$ c).

Свинцовая дробинка (d = 5,0 мм, ρ = 11340 кг/м^3) отпускается без начальной скорости и ручным электронным секундомером $Hama - SW - 104$ с дискретностью 0,01 с засекается время прохождения высоты падения h = (1,080 ± 0,005) м. После многократных измерений было определено время $t_{\text{эксп}}$ = (5,4 ± 0,3) с.

Из описания данной установки видно, что условия движения шарика в данном случае отличаются от реализуемых в установке ФП-26 наличием границ среды, в которой происходит падение шарика. Именно это обстоятельство и требует отдельного рассмотрения.

Используемый в данной лабораторной работе метод определения коэффициента внутреннего трения жидкости основан на измерении скорости установившегося движения твёрдого шарика в вязкой среде под действием силы тяжести. На движущийся в жидкости шарик здесь действуют три силы (как показано в [4] при указанных параметрах силой аэродинамического сопротивления можно пренебречь): сила тяжести, архимедова сила и сила сопротивления, величину которой для тел сферической формы обычно определяют по формуле Стокса

$$F_c = 6\pi\eta r u, \tag{2}$$

где u - скорость установившегося движения шарика. При этом малость скорости шарика u выражается в виде условия малости числа Рейнольдса $Re = ru\rho_0/\eta < 1$, а для коэффициента вязкости используется следующее выражение:

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_0)}{9u} \tag{3}$$

Данную формулу и применяют для вычисления коэффициента вязкости в лабораторных работах в большинстве педвузов. Однако формула для силы Стокса была выведена им в предположении неограниченности вязкой среды, в которой движется шарик. Реально же шарик падает вдоль оси трубки радиусом R, в результате чего у стенок исследуемая жидкость покоится, а пограничный слой жидкости около шарика движется вместе с ним. Это приводит к увеличению градиента скорости, и, следовательно, скорость равномерного падения шарика в трубке будет меньше, чем в безграничной среде. Поэтому в ряде вузов предлагают проводить более точные расчёты с учётом поправок на влияние боковых стенок сосуда, а также, хотя и гораздо реже - учитывать ещё и верхнюю и нижнюю границы жидкости, пользуясь для этого вместо (3) формулами

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_0)}{9u(1 + 2,4r/R)}, \qquad \eta = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_0)}{9u(1 + 2,4r/R)(1 + 1,33r/h)} \tag{4}$$

При этом для силы сопротивления в случае учёта боковой поверхности цилиндра, вдоль оси которого падает сферическая частица, наличия неподвижного твёрдого дна цилиндра и свободной поверхности жидкости, может быть получено такое выражение [5]

$$F_c \approx 6\pi\eta r\overline{u}\left\{1 + 2,105\frac{r}{R} + \frac{r}{h}\frac{1}{(h_2/h) - (h_1/h)}\left(\frac{9}{8}ln\frac{(h_2/h)}{(h_1/h)} + \frac{3}{4}ln\frac{1-(h_1/h)}{1-(h_2/h)}\right)\right\}, \tag{5}$$

где $\overline{u} = (h_2 - h_1)/t$ - средняя скорость падения частицы (h_2 и h_1 - начальное и конечное расстояния частицы от дна цилиндра, t - продолжительность падения частицы между данными положениями).

Из сравнения (2) и (3) с (4) и (5) видно, что при малых отношениях $r/R << 1$ и $r/h << 1$ поправками, учитывающими влияние границ жидкости, в формулах для силы сопротивления и коэффициента вязкости, действительно можно пренебречь. Конечно, решение о таком пренебрежении должно приниматься исходя из условий конкретного эксперимента. Так, например, в используемой в нашей лабораторной работе экспериментальной установке, параметры которой указаны выше, отношение $r/R = 0,083$, и добавка к единице в знаменателе первой формулы в (4) составляет: $2,4 \cdot r/R = 0,2$, и уже не является достаточно малой. Не учёт данной поправки приведёт к ошибке в определении вязкости в 20%, если же эта поправка будет учтена, то точность определения η на нашем оборудовании будет составлять 12%. Таким образом, в условиях нашего эксперимента для получения качественных результатов для расчёта η мы используем первую формулу в (4), учитывающую влияние боковых стенок сосуда на движение шарика, влиянием же верхней и нижней границ жидкости, поскольку $r/R = 0,0025$, следует пренебречь.

В заключение отметим, что использование в учебном процессе при проведении лабораторного практикума сочетания методов аналитического анализа рассматриваемых явлений, изучаемых в натурном эксперименте, а также их компьютерное моделирование, положительно влияет на усвоение знаний студентами и их дальнейшее практическое применение в профессиональной деятельности. Данное сочетание позволяет аргументированно доказать обоснованность тех или иных приближений, используемых при записи физических формул, когда весьма строгое теоретическое описание может быть существенно упрощено, а используемая модель значительно огрублена, поскольку учёт всех имеющихся факторов явился бы превышением точности в условиях конкретного проводимого эксперимента.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. 1. Майсова Н. Н. Практикум по курсу общей физики / Изд. 2-е, переработ. и доп. Учебное пособие. М.: Высш. школа, 1970, 448 с.

2. 2. Физический практикум. Механика и молекулярная физика: учебное пособие / Под ред. В. И. Ивероновой. — 2-е изд. — Москва: Наука, 1967, 352 с.

3. 3. Путилов К. А. Курс физики: В 3 т., Т. 1. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика / К. А. Путилов. – 11-е изд. – М.: ГИ ФМЛ, 1963, 560 с.

4. 4. Бобылёв Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. О сочетании аналитических и численных методов при решении физических задач // Инновации в образовании, 2018, №11, С. 115-126.

5. 5. Хаппель Дж. Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М. Издательство Мир, 1976, 631с.

———————————————————————————————

УДК 621.315.592.2

Экситоны в полупроводниковых гетероструктурах на основе EuO

И. А. Иванов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: igor.ii01@yandex.ru
Д. А. Нургулеев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dan@tsput.ru

Excitons in semiconductor heterostructures based on EuO

I. A. Ivanov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: igor.ii01@yandex.ru
D. A. Nurguleev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dan@tsput.ru

Базу для создания гетероструктур и сверхрешёток создают полупроводники с различным химическим потенциалом. В направлении роста многослойной структуры энергетические зоны полупроводников моделируются повторением потенциальных барьеров и квантовых ям, имеющих почти прямоугольную форму. Искривление потенциального профиля на гетерогранице обусловлено переходом носителей заряда в соседнюю область [1]. При гетеропереходах потенциальные барьеры для электронов и дырок имеют различную величину. Может быть и так, что два полупроводника с одинаковым типом проводимости и одними и теми же атомами являются составляющими гетероперехода. Если ширина потенциального барьера увеличивается, то происходит рост числа его потенциальных ям. При гетеропереходах происходит контакт двух полупроводников, при этом уровень Ферми у них выравнивается. Если в сверхрешётке появляется одномерный потенциал, то происходит изменение зонной структуры исходного полупроводника, появляется ряд запрещённых щелей и достаточно узких подзон [2]. Гетероструктуры на основе EuO являются объектами для наблюдения магнитооптических явлений, связанных с образованием экситонных и поляритонных состояний в сочетании с магнитными свойствами атомов редкоземельного иона.

Магнитные полупроводники EuO и SrO представляют интерес для практических целей. Они применяются в квантовой информатике, спиновой электронике и других областях. Для EuO, как и к любому другому магнитному полупроводнику, может быть применена модель косвенного обменного взаимодействия. Спины с-электронов не влияют на полный момент кристалла EuO, в отличие от l-электронов. С-электроны движутся по кристаллу и при этом движении взаимодействуют с l-спинами. Так возникает косвенное обменное взаимодействие в EuO. При косвенном обменном взаимодействии все локализованные f-электроны принимаются абсолютно одинаковыми, а коллективизированные электроны могут не обязательно находиться в s-состоянии. Магнитный полупроводник состоит из катионов с ненулевым спином, равным 7/2, немагнитных анионов. Зона проводимости представляет собой состояние, отличное от состояния частично заполненных оболочек. При появлении пары «электрон проводимости – дырка» состояния орбиталей l-электронов не меняются. Обмен l-спинов и электронов происходит гораздо сильнее, чем обмен l-спинов и дырок. Косвенное обменное взаимодействие усиливается при установлении магнитного порядка. Косвенный обмен, как и внутризонный, вызывает расщепление орбиталей по спину. EuO является ферромагнитным полупроводником, благодаря недозаполненной 4f-оболочке. Он имеет кристаллическую решётку с периодом 0,5139 нм и ширину запрещённой зоны 1,2 эВ и относится к пространственной группе F_{m3m}. Суммарный магнитный момент для EuO составляет семь магнетонов Бора. Максимум оптического поглощения наблюдается в EuO при длине волны, равной 1 мкм. Температура точки Кюри для EuO составляет 69 K. SrO в отличие EuO является парамагнитным полупроводником с шириной запрещённой зоны 5,8 эВ, но тоже имеет кристаллическую решётку с периодом 0,5083 нм и также относится к пространственной группе F_{m3m}. В EuO и SrO можно наблюдать магнитные экситоны. Они будут иметь малый радиус и являться экситонами Френкеля. Энергия связи экситонов в квантовых ямах увеличивается. Высота потенциального барьера и ширина квантовой ямы являются ограниченными, поэтому экситоны никогда не становятся двумерными. Экситоны образуются при возбуждении кристалла квантами с энергией, превышающей

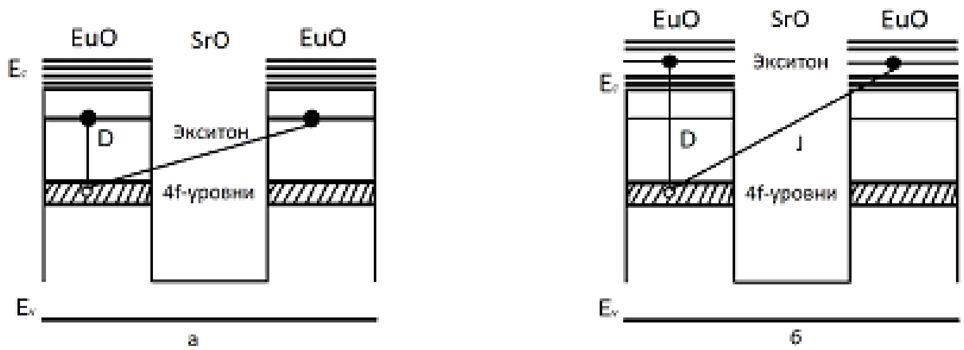


Рис. 1: Механизмы образования прямых и межбарьерных экситонов в сверхрешётки EuO-SrO

ширину запрещённой зоны. Энергия образования экситона может являться возбуждением электромагнитного поля. Электрон и дырка могут находиться в одном узле кристаллической решётки. Экситон в кристалле, являясь подвижным, может не образовывать локализованных состояний. Время жизни экситонов в квантовых ямах является связанным со временем их рекомбинации. Времена жизни экситонов могут быть примерно равны временам релаксации спиновых состояний. Повышение жизни экситона связано с высокой степенью порядка в кристалле. Взаимодействие экситонов с тепловыми колебаниями атомов решётки при этом отсутствует. При межзонном оптическом поглощении, которое связано с переходом с уровней валентной зоны в квантовой яме, образуется ограниченный квазидвумерный экситон. Энергия связи состояния одномерного экситона принимается равной бесконечности.

Спектры экситонов реальных гетероструктур невозможно описывать эффективным понижением размерности пространства. Гетерограницы в гетероструктурах имеют форму островков размером, превышающим размер экситона. Экситон находится внутри каждого островка.

Были описаны экситонные состояния в полупроводниковых гетероструктурах на основе EuO. В EuO возникают прямые и межъямные экситоны. Время жизни прямых экситонов в двойных квантовых ямах значительно превышает время жизни межъямных экситонов в одиночных квантовых ямах. У межъямных экситонов в отличие от прямых электрон и дырка будут располагаться в разных квантовых ямах. Эти ямы будут разделены туннельным барьером. Принято, что взаимодействие экситонов с тепловыми колебаниями атомов решётки при этом отсутствует. Тогда можно сказать, что время жизни состояний спина экситона окажется больше, чем время жизни самого экситона. Приняты модели, которые говорят о том, что время жизни экситонов в квантовых точках зависит от времени их рекомбинации, а также, что время жизни экситонов может быть примерно равно времени релаксации состояний спинов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головнёв Ю.Ф. Наноразмерные гетеросистемы на основе ферромагнитных металлов и полупроводников: Дис. канд. физ.- мат. наук. 261 с. Москва, 2008

2. Херман М. Полупроводниковые сверхрешетки: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 240 с.

———

УДК 517.957

Интерполяционные свойства одного типа нормированных пространств дифференцируемых функций во всём пространстве со степенным весом

С. А. Исхоков (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: sulaimon@mail.ru
Б. А. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
e-mail: bakhtovar-1989@mail.ru

Interpolation properties of one type of normed spaces of differentiable functions in the whole space with power weight

S. A. Iskhokov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: sulaimon@mail.ru
B. A. Rahmonov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan
e-mail: bakhtovar-1989@mail.ru

Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1+k_2+\cdots+k_n$ – длина мультииндекса k, и пусть $u^{(k)}(x)$ – обобщенная в смысле С.Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k. Пусть r – натуральное, α – вещественное число. Символом $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве R^n, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V^r_{2;\,\alpha}(R^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{2\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^2 dx + \int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$. Для удобства записи во всех интегралах по всему пространству R^n мы опускаем символ R^n. Далее, следуя работе [[1], глава 3], распространим определение пространства $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ на случай дробных показателей r. Пусть r – положительное дробное число и $\{r\} \neq 0$ – его дробная часть. Положим $r = [r] + \{r\}$. Тогда пространство $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ определяется с помощью следующей нормы:

$$\|u; V^r_{2;\,\alpha}(R^n)\| = \left[\int\int \sum_{|k|=[r]} \frac{\left|d^\alpha(x)u^{(k)}(x) - d^\alpha(y)u^{(k)}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2\{r\}}} dxdy + \right.$$
$$\left. + \int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что пространство $V^r_{2;\,\alpha}(R^n)$ вложено в $L_{2;\,\alpha+r}(R^n)$ при всех $r \geq 0$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Учитывая это, определим пространство $V^r_{2;\,\alpha}(R^n)$ при $r < 0$ как пополнение пространства $L_{2;\,-\alpha-r}(R^n)$ по норме

$$\left\|f;\, V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha+r}|}{\left\|v;\, V^{-r}_{2,-\alpha}(R^n)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x) \in V_{2,-\alpha}^{-r}(R^n)$.

Далее применяя K – метод интерполяции банаховых пространств (см., например, [[1], глава 3], [2]) изучим интерполяционные свойства пространств $V_{2;\alpha}^{r}(R^n)$.

K – метод построения интерполяционных пространств, разработан в работах Петре (Peetre J.) [3], [4] и сейчас широко применяется в научной литературе. Прежде чем сформулировать свои результаты, напомним основную схему этого метода.

Пусть H_0, H_1 – два гильбертовых пространства. Пересечение и сумму этих пространств обозначим через $H_0 \cap H_1$, $H_0 + H_1$. Нормы в этих пространствах определяются следующим образом:

$$\|u;\, H_0 \cap H_1\| = \max\left(\|u;\, H_0\|,\, \|u;\, H_1\|\right),$$
$$\|u;\, H_0 + H_1\| = \inf_{u=u_0+u_1,\, u_j \in H_j} \left(\|u_0;\, H_0\| + \|u_1;\, H_1\|\right),$$

где $\|u;\, H_0\|$,$\|u;\, H_1\|$ – нормы пространств H_0, H_1, соответственно. Далее предположим, что $H_0 \cap H_1$ в каждом из пространств H_0, H_1. K – функционал, с помощью которого строятся интерполяционные пространства, определяется для всех $u \in H_0 + H_1$ равенством

$$K(t,\, u,\, \{H_0,\, H_1\}) = \inf_{u=u_0+u_1,\, u_j \in H_j} \left(\|u_0;\, H_0\|^2 + t^2 \|u_1;\, H_1\|^2\right)^{1/2}.$$

Для любого $\theta \in (0,\, 1)$ пространство $(H_0,\, H_1)_\theta$ определяется как множество всех элементов $u \in H_0 + H_1$, для которых конечна следующая величина, (норма в пространстве $(H_0,\, H_1)_\theta$):

$$\|u;\, (H_0,\, H_1)_\theta\| = \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{-\theta} K(t,\, u,\, \{H_0,\, H_1\})\right]^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

Пространства $(H_0,\, H_1)_\theta$ будут интерполяционными между H_0 и H_1. Это означает, что если какой-нибудь оператор L действует ограниченно из H_0 в H_0' и H_1 в H_1', то L действует также ограниченно из $(H_0,\, H_1)_\theta$ в $(H_0',\, H_1')_\theta$ при всех $\theta \in (0,\, 1)$, и имеет место неравенство

$$\left\|L;\, (H_0,\, H_1)_\theta \to \left(H_0',\, H_1'\right)_\theta\right\| \le \left\|L;\, H_0 \to H_0'\right\|^{1-\theta} \left\|L;\, H_1 \to H_1'\right\|^{\theta}.$$

При этом, если L – изоморфизм пространств H_j на H_j', $j \in \{0,\, 1\}$, то он также изоморфизм пространств $(H_0,\, H_1)_\theta$ на $(H_0',\, H_1')_\theta$ при всех $\theta \in (0,\, 1)$.

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_j \in (-\infty,\, +\infty)$, $r_j \ge 0$ для $j \in \{1,\, 2\}$. Тогда для всех $\theta \in (0,\, 1)$ имеет место равенство*

$$\left(V_{2;\alpha_1}^{r_1}(R^n),\, V_{2;\alpha_2}^{r_2}(R^n)\right)_\theta = V_{2;\alpha}^{r}(R^n),$$

где $r = (1-\theta)r_1 + \theta r_2$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$.

Используя свойство интерполяции двойственных пространств, с помощью этой теоремы доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть $\alpha_j \in (-\infty,\, +\infty)$, $r_j \le 0$ для $j \in \{1,\, 2\}$. Тогда для всех $\theta \in (0,\, 1)$ имеет место равенство*

$$\left(V_{2;\alpha_1}^{r_1}(R^n),\, V_{2;\alpha_2}^{r_2}(R^n)\right)_\theta = V_{2;\alpha}^{r}(R^n),$$

где $r = (1-\theta)r_1 + \theta r_2$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$.

Отметим, что пространства $V_{2;\alpha}^{r_1}(R^n)$ играют важную роль в исследовании гладкости решения граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений во всем пространстве. Ранее в работах авторов [5], [6] изучались разрешимость и гладкость решения вариационной задачи Дирихле для некоторых классов эллиптических операторов с вырождением, решение которой единственно в пространстве $V_{2;\alpha}^{r_1}(R^n)$. Сформулированные выше теоремы 1 и 2 позволяют обобщить ряд результатов работ [5], [6] на случай функциональных пространств дробного порядка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы // М.: Мир. -1980.
2. Никольский С.М, Лирозкин П.И, Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Известия вузов. Математика, 1988, № 8, с.4-30.
3. Peetre J. A theory of interpolation of normed spaces // Notes Universidade de Brasilia 1963 [Notas de matematica, v. 39 (1968)].
4. Peetre J. Interpolation i abstracta rum // Lecture Notes, Lund, 1966.
5. Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве, связанной с некоэрцитивной формой // Уфимский математический журнал. 2020, т.12, № 1, с.13-29.
6. Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной формой во всем пространстве // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. 2018, № 2, с.17-25 .

———————————————————————————

УДК 539.3 + 539.5

О новых нелинейно-упругих модулях в жаропрочных сплавах Ni-Co-Cr-(X)[1]

Д. М. Левин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: danlevin48@gmail.com
Д. О. Фролов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: fdolegovich@yandex.ru

On new nonlinear elastic modules in heat-resistant Ni-Co-Cr-(X) alloys

D. M. Levin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: danlevin48@gmail.com
D. O. Frolov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: fdolegovich@yandex.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Тульской области (государственный грант в сфере науки и техники №ДС/260)

1. Аннотация

В рамках термодинамики деформируемого твердого тела предложен полуфеноменологический подход, позволяющий для умеренно высоких температур $T = (0.3 - 0.5)T_m$, где T_m – температура плавления, развить нелинейную теорию упругости и тем самым сформулировать основные положения, необходимые для дальнейшего построения теории микропластичности. Установлено, что помимо двух коэффициентов Лямэ жаропрочные материалы на основе системы Ni-Co-Cr имеют три нелинейно-упругих модуля A, B и C, являющихся независимыми и ответственными за отклонение от линейно-упругих свойств вещества в окрестности физического предела упругости. Показано, что дополнительные принципы нелинейной теории упругости, полученные в третьем приближении свободной энергии тела, могут быть основой микропластичности и микротекучести сплавов. Обнаружено нарушение симметрии тензорного поля напряжений Коши. Выведены условия, налагаемые термодинамикой на уравнения равновесия тела. Рассмотрен частный случай изотермических деформаций.

Ключевые слова: эталон, жаропрочные сплавы, свободная энергия, энтропия, нелинейно-упругие модули, нарушение симметрии, микропластичность.

2. Введение

Термодинамика накладывает существенные ограничения на сопротивление авиационных жаропрочных сплавов высоким температурам, вследствие чего материал переходит из упругого в вязкоупругое состояние при температуре [1]

$$T_{cr} = \frac{U_f^{(1)} - U_f^{(2)}}{k \ln \dfrac{A_1}{A_2}}, \tag{1}$$

где $U_f^{(1)}$ – первая энергия активации высокотемпературного фона внутреннего трения (ВТ); $U_f^{(2)}$ – вторая энергия активации высокотемпературного фона ВТ; $A_{1,2}$ – коэффициенты, отвечающие за механизм формирования вязкоупругих свойств вещества на первой и второй стадиях перехода; k – постоянная Больцмана. При этом прочностные свойства сплава меняются. В материалах, применяемых для ГТД (газотурбинных двигателей) и РД (ракетных двигателей), под действием давления газов и нескомпенсированных внешних сил развиваются нелинейные упругие свойства, а затем и микропластическая деформация.

Микропластичность (или мелкомасштабная пластичность) – это свойство тел [2] приобретать необратимые остаточные микродеформации, которые могут накапливаться при циклической работе изделия.

Возникает немало трудностей с выбором материала для изготовления опытных образцов перспективных авиационных двигателей. Подобные вопросы ещё недостаточно изучены и большое количество работ посвящено изучению неупругих свойств материалов, особенно кинетике дефектов и эволюции микроструктуры. Вместе с этим стоит отметить повсеместное использование закона Гука даже, казалось бы, в тех областях, где его применять несколько некорректно (например, в некоторых вопросах теории дислокаций [3], для описания свойств хрупких ТТ и т.д.), имея ввиду порядок приближения.

В связи с этим актуальным представляется изучение физико-механических свойств жаропрочных сплавов в области умеренно высоких температур $T \sim T_{cr}$ и выше, а также прогнозирование поведения материала в самых различных экспериментальных ситуациях, например, когда $T > T_{cr}$.

На сегодняшний день упругие и пластичные свойства материалов описываются в рамках устоявшихся теорий. Упругое поведение моделируется исключительно методами теории упругости (в том числе нелинейной) как для изотропных так и анизотропных тел. Пластическое деформирование [4] описывается теорией пластичности, в которой за исходные принимаются экспериментальные данные и непосредственно она не связана с физическим объяснением свойств пластичности. Все сводится к модели идеально пластичного тела, которая является скорее и больше математической, свободной от физических эффектов, в частности, ангармонизма и других случаев.

Природа пластичности, по нашему мнению, может быть выяснена в результате исследования переходной области или микропластичности как явления, отражающего неоднородность протекания пластической деформации в отдельных локальных объёмах материала, когда деформации тела все ещё малы.

Поэтому, цель настоящей работы – теоретическое описание напряженно-деформированного состояния (НДС) материала в области малых деформаций за пределами гуковского приближения на основе полученных экспериментальных данных в ходе нагружения жаропрочного сплава ВЖ171.

3. Материалы и методы исследования

Объектом исследования является деформируемый сплав нового поколения марки ВЖ171, состоящий из матрицы на основе Ni, с добавлением кобальта в количестве 28.5 вес. % и хрома в количестве 29.5 вес. %, легируемый титаном, вольфрамом и молибденом для большего сопротивления микропластической деформации. Образец сплава ВЖ171 был вырезан из пластины. Форма образца – стержень сечением 1.05×1.03 мм. Длина 75 мм.

Испытания проводили методом механической спектроскопии на установке для комплексного измерения внутреннего трения и характеристик механических свойств материалов при кручении в области микропластических деформаций. Результаты измерений сравнивали с эталонными значениями. В качестве эталона была выбрана типовая низкоуглеродистая сталь марки 08кп.

4. Экспериментальные данные

На рис. 1 показано отклонение точек от прямой (пунктирная линия), начиная с некоторой деформации $\gamma_0 = 7 \cdot 10^{-4}$.

5. Предпосылки к построению теории микропластичности

Область Л, указанную на рис. 1, условно стянем в точку. Для описания напряженно-деформированного состояния при $\gamma \ll 1$ в окрестности точки "Л" рассмотрим сначала недеформированное твердое тело объемом V. Пусть его свободная энергия, приходящаяся на единицу объема, равна $F_0(T)$. Тогда полная свободная энергия тела в равновесии

$$\Phi_0\left(T\right) = \int F_0\left(T\right)\, dV. \tag{2}$$

Будем считать недеформированным состояние тела в отсутствии внешних сил при некоторой известной температуре $T_{cr} \sim 0.4T_m$. Если теперь тело находится при температуре T, отличающейся от T_{cr}, то даже когда внешние силы не действуют оно будет, вообще говоря, деформировано из-за теплового расширения. Приложим внешнюю силу, например, начнем тело

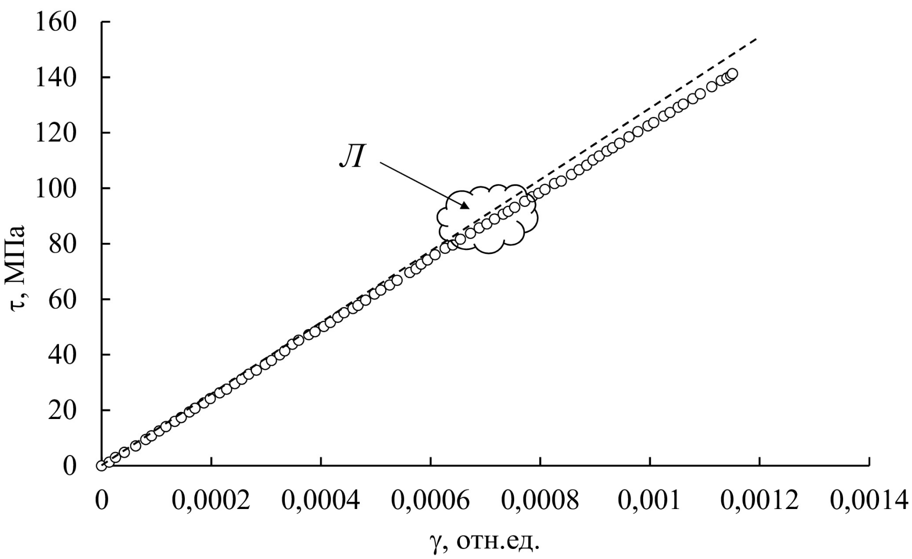


Рис. 1: Кривая нагружения ($t_0 = 21°C$).

закручивать и так его слегка деформируем. Напишем свободную энергию тела

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_{cr})\,Sp\,u_{ik} + F^{(2)} + F^{(3)} + \ldots, \tag{3}$$

где K – это модуль всестороннего сжатия; α – коэффициент теплового расширения; $Sp\,u_{ik}$ – скалярный след тензора деформации, $u_{\ell\ell}$; $F^{(2)}$ – свободная энергия упругой деформации; $F^{(3)}$ – свободная энергия деформации в 3-ем приближении.

В гуковском приближении для изотропного тела имеем [5]

$$F^{(2)} = \mu u_{ik}^2 + 2^{-1}\lambda u_{ii}^2, \tag{4}$$

где μ, λ – коэффициенты Лямэ. Далее по мере роста деформации пишем

$$F^{(3)} = 3^{-1}Au_{ik}u_{i\ell}u_{k\ell} + Bu_{ik}^2u_{\ell\ell} + 3^{-1}Cu_{\ell\ell}^3, \tag{5}$$

где A, B, C – новые модули, характеризующие материал.

Энтропия равна производной $-\dfrac{\partial F}{\partial T}$ от энергии по температуре

$$S(T) \approx S_0(T) + K\alpha\cdot\partial_\ell u_\ell + \frac{1}{2}K\alpha(\partial_\ell u_n)^2 + \ldots \tag{6}$$

Исходя из вариации свободной энергии тензор напряжений Коши

$$\widetilde{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} - K\alpha(T - T_{cr})\,\delta_{ik} - 3K\alpha(T - T_{cr})\,\partial_k u_i, \tag{7}$$

где несимметричная составляющая

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} = \frac{\mu}{2}(\partial_k u_i + \partial_i u_k) + \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\partial_i u_\ell\cdot\partial_k u_\ell + 3\lambda\partial_k u_i +\\ + (B+\lambda)\,\partial_k u_i\partial_\ell u_\ell + \frac{A}{12}\partial_i u_\ell\cdot\partial_\ell u_k + \frac{B}{2}\partial_i u_k\cdot\partial_\ell u_\ell + C(\partial_\ell u_\ell)^2\,\delta_{ik}.\end{aligned} \tag{8}$$

Новые уравнения равновесия запишутся как

$$\partial_k\sigma_{ik} - K\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i} - 3K\alpha\left[\frac{\partial T}{\partial x_k}\partial_k u_i + (T - T_{cr})\,\partial_{kk}^2 u_i\right] + \rho g_i = 0. \tag{9}$$

В случае изотермических деформаций полагаем $T = T_{cr}$.

6. Выводы

Уравнения равновесия позволяют найти распределение деформаций внутри твердого тела. Нелинейная зависимость тензора Коши от деформационных членов приводит к нарушению симметрии σ_{ik} на фундаментальном уровне. Поликристаллические сплавы (свойства которых были рассматрены на модели изотропного тела) в точке Л перестают подчиняться идеальному закону Гука. Несимметричность компонент тензора напряжений может побуждать к появлению дефектов структуры при увеличении деформации и последующей кинетике вакансий, к движению границ и т.п. Получается, что микропластичность может проявляться как следствие такого поведения материала.

С точки зрения кристаллического строения тел считается, что пластичность обусловлена межзеренным проскальзыванием и сдвигом по кристаллографическим плоскостям. Однако, данные явления, по всей видимости, имеют общую природу. Похоже, в её основе лежат физические модули A, B, и C, существование которых является общим реологическим свойством для всех жаропрочных материалов. К тому же возникновение пластичности в локальных областях тела согласуется с несимметричностью тензорного поля напряжений. Кроме того, свободная энергия имеет экстремумы. Это означает, что не все модули A, B, C положительные.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Д. М., Фролов Д. О. Материалы конференции // XX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая 130-летию со дня рождения академика И.М. Виноградова.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 21-24 сентября 2021 г.) – Тула, 2022. С. 186-190.

2. Maas R., Derlet P. M. Micro-plasticity and recent insights from intermittent and small-scale plasticity // Acta Materialia. 2018. Vol. 143, pp. 338 - 363.

3. Косевич А. М. Дислокации в теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1978. 220 с.

4. Ильюшин А. А. Пластичность. Часть первая. – Москва: ОГИЗ, 1948. 376 с.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. – Москва: Наука, 1987. 247 с.

УДК 534.11

Математическое моделирование нелинейных колебаний каната с движущейся границей

В. Л. Литвинов (Россия, г. Самара)
Самарский государственный технический университет
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru
К. В. Литвинова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru

Mathematical modeling of nonlinear vibrations of a rope with a moving boundary

V. L. Litvinov (Russia, Samara)
Samara State Technical University
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru
K. V. Litvinova (Russia, Moscow)
Moscow State University
e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru

Until now, the problems of longitudinal - transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear setting, the energy exchange through the moving boundary and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account [1–5, 7–10]. In rare cases, the action of the forces of resistance of the external environment was taken into account [6]. Real technical objects are much more complicated, for example, with an increase in the intensity of oscillations, the geometric nonlinearities of the object have a great influence on the oscillatory process.

In connection with the intensive development of numerical methods, it became possible to more accurately describe complex mathematical models of longitudinal-transverse oscillations of objects with moving boundaries, taking into account a large number of factors influencing the oscillatory process.

The paper presents a new nonlinear mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of a rope with a moving boundary, which takes into account geometric nonlinearity, energy exchange across the boundary. The boundary conditions are obtained in the case of interaction between the parts of the object to the left and to the right of the moving boundary.

The system of differential equations is obtained

$$\left\{\begin{array}{l} \rho S u_{1,tt} - S\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}-1\right)+\mu\frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)\frac{u_{1,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)=0;\\ \rho S u_{2,tt} - S\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}-1\right)+\mu\frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)\frac{u_{2,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)+\\ +I\left(Eu_{2,xxxx}+\mu u_{2,xxxxt}\right)+\lambda u_{2,t}+k_0 u_2 - f(x,t)=0. \end{array}\right.$$

Border conditions

$$u_2(0,t)=0;\quad u_{2,xx}(0,t)=0; u_2(L_0,t)=0;\quad u_{2,x}(L_0,t)=0;$$

$$m_1\frac{d^2}{dt^2}u_1\left(L(t),t\right)+\rho S\left(u_{1,t}\left(L(t)-0,t\right)-u_{1,t}\left(L(t)+0,t\right)\right)L'(t)+$$
$$+\left(ES\left(\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)}-1\right)+\right.$$
$$\left.+\mu S\frac{u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)u_{j,xt}\left(L(t)-0,t\right)}{\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)}}\right)\frac{u_{1,x}\left(L(t)-0,t\right)}{\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)}}-$$
$$-\left(ES\left(\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)}-1\right)+\right.$$
$$\left.+\mu S\frac{u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)u_{j,xt}\left(L(t)+0,t\right)}{\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)}}\right)\frac{u_{1,x}\left(L(t)+0,t\right)}{\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)}}-F_1(t)=0;$$

$$m_2\frac{d^2}{dt^2}u_2\left(L(t),t\right)+EIu_{2,xxx}\left(L(t)+0,t\right)+\mu Iu_{2,xxxt}\left(L(t)+0,t\right)-$$

$$-EIu_{2,xxx}\left(L(t)-0,t\right)-\mu Iu_{2,xxxt}\left(L(t)-0,t\right)+k_2u_2\left(L(t),t\right)-F_2(t)=0;$$

$$u_2\left(L(t)-0,t\right)=u_2\left(L(t)+0,t\right);\;\; u_{2,x}\left(L(t)-0,t\right)=0;\quad u_{2,x}\left(L(t)+0,t\right)=0.$$

Initial conditions

$$u_2(x,0)=\varphi_3(x);\quad u_{2,t}(x,0)=\varphi_4(x).$$

Let us linearize the system of differential equations.

$$\rho Su_{2,tt}-ES\varepsilon_0u_{2,xx}+EIu_{2,xxxx}+\mu Iu_{2,xxxxt}+\lambda u_{2,t}+k_0u_2-f(x,t)=0; \tag{1}$$

$$u_2(0,t)=0;\quad u_{2,xx}(0,t)=0;\quad u_2(L_0,t)=0;\quad u_{2,x}(L_0,t)=0; \tag{2}$$

$$\begin{gathered} m_2\tfrac{d^2}{dt^2}u_2\left(L(t),t\right)+EI\left(u_{2,xxx}\left(L(t)+0,t\right)-u_{2,xxx}\left(L(t)-0,t\right)\right)+ \\ +\mu I\left(u_{2,xxxt}\left(L(t)+0,t\right)-u_{2,xxxt}\left(L(t)-0,t\right)\right)+k_2u_2\left(L(t),t\right)-F_2(t)=0; \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u_2\left(L(t)+0,t\right)=u_2\left(L(t)-0,t\right); \\ u_{2,x}\left(L(t)+0,t\right)=0;\quad u_{2,x}\left(L(t)-0,t\right)=0; \end{gathered} \tag{4}$$

$$u_2(x,0)=\varphi_3(x);\quad u_{2,t}(x,0)=\varphi_4(x). \tag{5}$$

In problem (1) - (5) we take

$$I=0,\lambda=0,\mu=0,k_0=0,f(x,t)=0,F_2(t)=0.$$

In this case, the vibrations of the rope will be described by the wave equation:

$$\rho u_{2,tt}-E\varepsilon_0u_{2,xx}=0;\quad x\in(-\infty;\ \infty). \tag{6}$$

The initial conditions are

$$u_2(x,0)=\varphi_3(x);\qquad u_{2,t}(x,0)=\varphi_4(x). \tag{7}$$

From [3] we obtain the boundary conditions:

$$\begin{gathered} m\tfrac{d^2}{dt^2}u_2\left(L(t),t\right)-\rho S\left(u_{2,t}\left(L(t)+0,t\right)-u_{2,t}\left(L(t)-0,t\right)\right)L'(t)- \\ -ES\varepsilon_0\left(u_{2,x}\left(L(t)+0,t\right)-u_{2,x}\left(L(t)-0,t\right)\right)+k_2u_2\left(L(t),t\right)=0; \end{gathered} \tag{8}$$

$$u_2\left(L(t)+0,t\right)=u_2\left(L(t)-0,t\right).$$

Thus, a new nonlinear mathematical model of transverse vibrations of an unrestricted rope with a moving boundary has been put forward, which is solved numerically in the Matlab environment. The boundary conditions are obtained in the case of occurrence between the parts of the object to the left and to the right of the boundary. The obtained model is linearized, while the principle of homogeneity is observed: in the particular case of small fluctuations, the obtained model coincides with the classical one, which indicates the correctness of the results obtained. The obtained mathematical models make it possible to describe high-power oscillations with moving boundaries.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Savin G.N., Goroshko O.A. Dynamics of a variable length thread // Nauk. dumka, Kiev, 1962, 332 p.

2. Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space // Applied Mathematics and Mechanics. - 1964. - T. 26, V. 3. - P. 77–80.

3. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, Moscow, 2001, 320 p.

4. Lezhneva A.A. Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. - 1970. - No. 1. - P. 159-161.

5. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020.Vol. 26, No. 2. P. 188-199.

6. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries // Vestn. Himself. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science, 2015. Vol. 19, No. 2. P. 382-397.

7. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov - Samara: Samar. state tech. un – t, 2020. - 100 p.

8. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. No. 2. P. 70–77.

9. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. T. 19. No. 4. – P.161–165.

10. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and research of oscillations of one –dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov – Samara: Samar. state tech. un–t, 2017 .– 149 p.

———————————————————————————————

УДК 669.537.7:621.357.5

Моделирование эволюции микронесплошностей в напряжённых металлических средах различного производства

А. Н. Чуканов (Россия, Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
В. А. Терешин (Россия, Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: tereshin.va-tspu@yandex.ru
Е. В. Цой (Россия, Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Simulation of the evolution of microplanes in stressed metallic media of various production

A. N. Chukanov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
V. A. Tereshin (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: tereshin.va-tspu@yandex.ru
E. V. Tsoi (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Введение. Воздействие внешних полей различной природы (силовых, агрессивных сред, комплексное воздействие) при производстве и эксплуатации металлических изделий приводит к деструкции (развитию несплошностей различного масштабного уровня) [1-5]. Характер исходного внешнего воздействия, определяющий морфологию несплошности на этапе её формирования, влияет на последующее развитие указанных дефектов структуры.

Сходство общего количества несплошностей, образующихся в ходе водородной стресс-коррозии и послойного лазерного синтеза, их геометрия и ориентация ансамблей пор в объёме изделий позволяет распространить математический аппарат описания эволюции пор при водородном воздействии на поры в изделиях аддитивных технологий [6]. К таким объектам относятся поры в изделиях, изготовленных по технологии селективного лазерного синтеза (SLM-технология) из металлопорошковых композиций [7-9].

Целью данной работы являлось совершенствование разработанного в работах [1-5] алгоритма для ансамблей пор различной морфологии и различного производства.

Материал и методики. В качестве объектов анализа использовали ансамбли пор, формирующихся в объёме изделий как слиткового производства (экономно легированные арматурные стали), так и селективного лазерного синтеза (SLM-технология), изготавливаемых из металлопорошковых композиций типа 316l и Inconel 718 [6].

Используя аналогию поля напряжений у поры и поля скоростей при обтекании твёрдого тела идеальной жидкостью авторы распространили разработанный ими алгоритм описания напряжённо-деформированного состояния (НДС) в напряжённых металлических средах, подвергаемых водородной стресс-коррозии, на область микрообъёмов, окружающих поры в изделиях послойного лазерного синтеза [7-9]. Они выполнили расчёт компонент тензора напряжений и описания зон пластичности у формирующихся пор различной морфологии: длинных цилиндрических пор, сферических пор и эллипсовидных пор. Были выявлены ряд ограничений разработанного алгоритма расчёта. Его совершенствование позволило обобщить формализацию эволюции зон пластичности у разнотипных несплошностей [10,11].

Экспериментальные результаты. В ходе анализа определяли три компонента тензора напряжений. Граничные условия имели вид: $\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0$; $\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y = 0$, где n_x, n_y - проекции вектора нормали к поверхности поры. Они аналогичны условию на поверхности тела, обтекаемого жидкостью $v_x n_x + v_y n_y = 0$.

Длинная цилиндрическая пора. Рассчитывали компоненты тензора напряжений в нагруженной металлической среде у цилиндрической поры, перпендикулярной нагрузке [1,2]. Для $?_{xx}$, $?_{xy}$: получили $?_{xx} = 1 + \frac{a^2\left(y^2-x^2\right)}{(x^2+y^2)^2};;\ ?_{xy} = \frac{-2a^2xy}{(x^2+y^2)^2}$. Используя условие статики $d\sigma_{yx}/dx + d\sigma_{yy}/dy = 0$ и интегрирование по «y» определили $?_{yy} = f(x) + \frac{a^2\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$. Формулы для $?_{xx}$, $?_{xy}$ удовлетворяли условиям статики и условиям напряжений на поверхности поры

($x\sigma_{xx} + y\sigma_{xy} = 0$; $x\sigma_{yx} + y\sigma_{yy} = 0$). Использовали функции φ и ψ - аналоги функций потенциала и тока при обтекании жидкостью твёрдого цилиндра [1]. Для цилиндрической поры они имели вид $? = x\left[1+\frac{a^2}{x^2+y^2}\right]$;; $? \;=\; y\left[1-\;\frac{a^2}{x^2+y^2}\right]$. Сопоставление $?_{xx}$,$?_{xy}$ с решением Кирша для сквозного отверстия в пластине выявило соответствие для точек у поверхности поры (x^2 + y^2 - a^2 << a^2). Для более удалённых точек имелись ограничения.

Векторные функции. Для совершенствования [5,10] ввели понятия вектора $\boldsymbol{S}$ и поля вектора $\boldsymbol{S}$. КТН являлись его проекциями $S_x = \sigma_{xx}$, $S_y = \sigma_{xy}$. Условия $div\ \boldsymbol{S} = 0$ и $rot\ \boldsymbol{S} = 0$ привели к выводу о равенстве нулю лапласcиана $\boldsymbol{S}$ ($\Delta\ \boldsymbol{S} = 0$). По аналогии [1,2] использовали функции φ и ψ. Выражение для σ_{xx}: $?_{xx} \;=\; 1+\frac{By}{x^2+y^2}+C\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2\ )^2}$. позволило определить σ_{xy}: $?_{xy} \;=\; \frac{-Bx}{x^2+y^2} - \frac{2Cxy}{(x^2+y^2)^2}$. Объединив σ_{yx}с условием статики $d\sigma_{yx}/dx + d\sigma_{yy}/dy = 0$ определили величину σ_{yy}: $?_{yy} \;=\; \frac{-By}{x^2+y^2}+C\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+f(x)$. После конкретизации краевых условий формулы для σ_{ik} имели вид: $?_{xx} = 1+\;\frac{ay}{a^2+x^2}+\;a^2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $?_{xy} = \;\frac{-ax}{a^2+x^2} - \;\frac{2a^2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $?_{yy} = -\frac{2ax}{a^2+x^2}+\;\frac{ay}{x^2+y^2}+\;a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Полученные выражения позволили уточнить результаты расчёта σ_{ik}.

Алгоритм [1-4] расчёта напряжённо-деформированного состояния и компонент тензора напряжений у цилиндрической поры подтвердил свою целесообразность для часто встречающихся в сталях пор. Совершенствование алгоритма [5,10,11] продолжили для сферической и линзообразной пор.

Сферическая пора. Для расчёта компонент тензора напряжений у сферической поры применили цилиндрическую систему координат (z и ρ). Использовали вектор $\boldsymbol{S}$, проекции которого $S_z = \sigma_{zz}$ и $S_\rho = \sigma_{z\rho}$. Так как для $\boldsymbol{S}$ тождественно равны нулю и дивергенция, и ротор, то равен нулю и лапласиан скалярной функции – проекции вектора $\boldsymbol{S}$. В анализируемом трёхмерном случае одна из трёх координат - циклическая и не участвует в уравнениях. При равенстве нулю ротора и дивергенции $\boldsymbol{S}(z,\rho)$, функция S_z является гармонической, а функция S_ρ таковой быть не может. Поэтому, записали $\Delta\ S_z = 0$, ΔS_ρ ? 0. С учётом этого, вычисления компонент тензора напряжений начали с $\sigma_{zz} = S_z$. Получили $?_{zz} = 1+\frac{a^3}{2}\frac{?^2-2z^2}{(z^2+?^2)^{5/2}}$;; $?_{z?} = -\frac{3a^3}{2}\frac{z?}{(z^2+?^2)^{5/2}}$. $\sigma_{\rho\rho}$ $?_{z?} = -\frac{3Dz?}{(z^2+?^2)^{5/2}}$. $\sigma_{\rho\rho}$ определили, интегрируя по ρ уравнение $??_{??} = \int \quad \int 3D?^2\frac{?^2-4z^2}{(z^2+?^2)^{7/2}}d?\ +f(z)$, полученное подстановкой $\sigma_{z\rho}$ в условие статики. Для диапазона малых z ($z < a/2$) получили выражение $?_{??} \;=\; \frac{3a}{4?}\left[1-\frac{a^2}{?^2}\right]+\frac{45}{16}\frac{a^3z^2}{?^5}$. Для диапазона $z > a/2$ - $?_{??} \;=\; \frac{1{,}44a}{?} - \frac{2a^3?^2}{(?^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a^3?^4}{2z^2(?^2+z^2)^{5/2}}$. Анализ характерных точек у поверхности пор ($\sigma_{zz} = 1$, $\sigma\ _{\rho\rho}$ = - $\sigma_{z\rho}$= σ_{zz} = s) выявил зону с очень высокой интенсивностью σ_i напряжений [3]. σ_i считали равной второму инварианту девиатора напряжений и определяли комбинацией σ_{ik} $?_i = \;\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(?_{zz}-?_{??})^2+?^2_{??}+?^2_{zz}+6?^2_{z?}\right]^{1/2}$. В рассмотренных точках интенсивность σ_i определили равной 1,5. В этой области возможен переход материала в состояние пластичности (формирование зон пластичности).

Линзообразная пора. Разработку методики продолжили для поры в форме симметричной сферической линзы, вдоль главной оси симметрии которой действует внешнее напряжение $\sigma_{\text{н}}$. Применили алгоритм, полученный для сферической поры. Ввиду сложности единого описания компонент тензора напряжений у пор различной морфологии для разных частей пространства у поры-линзы выявили отличительные особенности и разработали два типа решений: группы формул I и II. Формулы группы I действенны для точек наблюдения у кромки линзы. Формулы группы II - для точек, достаточно удалённых от кромки.

Переходная функция. Вклад решений I и II в окончательные выражения для σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ учитывали введением переходной функции $\eta(z)$. Для расчёта величины $\sigma_{\rho\rho}$ использовали частные решения.

Выводы. Выполнили расчёт компонент тензора напряжений и описание зон пластичности у формирующихся пор, формирующихся в стальных изделиях слитковых и аддитивных технологий. Расчёт провели для пор различной морфологии: длинных цилиндрических, сферических и эллипсовидных пор. Был выявлен ряд ограничений использованного алгоритма расчёта. Его совершенствование позволило обобщить формализацию эволюции зон пластичности у разнотипных несплошностей [12].

Характер исходного внешнего воздействия, определяющий морфологию несплошности на этапе её формирования, влияет на последующее развитие указанных дефектов структуры. Разработанный ранее математический аппарат описания эволюции электролитических стресс-коррозионных пор распространили на поры изделий селективного лазерного синтеза из металлопорошковых композиций.

Подтвердили вывод о невозможности обобщенного описания компонент тензора напряжений у пор различной морфологии в изделиях различных видов производства. Разрыв непрерывности в точках кромки поры-линзы требовал отдельного рассмотрения нескольких областей около неё.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Шатульский А.А., Навоев А.П., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Кутепов С.Н., Цой Е.В. Эволюция зон пластичности в окрестности пор в сталях в условиях стресс-коррозии // Заготовительные производства в машиностроении.- 2020. - Т. 18. - №3.- С. 130-136.

2. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Цой Е.В. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в металлических средах на основе концепции силовых линий // Чебышёвский сборник. - 2020. - Т. 21. - Вып. 4 (76). - С. 376 - 389.

3. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Цой Е.В. Использование векторных функций для описания НДС в металлических средах с дефектами // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». - Матер. XIX Межд. конф. посвящ. 200-летию акад. П.Л. Чебышова, Тула, 18-22.05.2021 г.- Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. - 442 с.- С.395-399.

4. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В. Математическое моделирование полей напряжений у стресс-коррозионных дефектов // Современные материалы, техника и технологии. 2021.- т.6(39) -. С. 65 -70.

5. Чуканов А.Н. Морфология объёмных зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии / А.Н. Чуканов, В.А. Терешин, А.Е. Гвоздев, С.Н. Кутепов, А.Н. Сергеев, Е.В. Агеев, А.А. Яковенко // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2019. - Вып. 23(5). - С. 35-52.

6. Чуканов А.Н., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Цой Е.В. Об оценке свойств изделий аддитивного производства, полученных по SLM-технологии // Матер. V НПК «Промышленно-металлургического холдинга (ПМХ)». -Тула. –(25.11.2020 г). - С. 102- 108.

7. Чуканов А.Н. Анизотропия физико-механических свойств при послойном лазерном синтезе // «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150 акад. А.А. Байкова: Сб. научн. статей МНТК (18.09.2020 г.); Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2020. - 271 с. - С. 244-247.

8. Чуканов А.Н. Влияние ориентации изделий аддитивных технологий на их анизотропию деформации // Научные чтения им. чл.-корр. РАН И.А. Одинга «Механические свойства современных конструкционных материалов». - Москва. 17-18.09.2020 г./ Сб. матер. – М: ИМЕТ РАН, 2020, 194 с.- С. 79-80.

9. Чуканов А.Н. Анизотропия деформации при послойном лазерном синтезе изделий // «Перспективные технологии и материалы». Матер. Всеросс. научно-практич. конф. с межд. уч., (Севастополь, 14–16.10.2020 г.), Научное издание. - Севастополь, СевГУ. 222с., С. 169 -174.

10. Чуканов А.Н., Терешин В.А. Силовые линии и алгоритм моделирований напряженно-деформированного состояния материала // «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150-летию со дня рожд. академика А.А. Байкова: Сб. научн. статей МНТК (18.09.2020 г.)/ Юго-Зап. гос. ун-т. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2020. - 271 с. - С. 241-244.

11. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Цой Е.В. Эволюция стресс-коррозионных пор и напряжённо-деформированное состояние в металлической среде // Матер. XX Межд. конф., посвящ. 130 акад. И.М. Виноградова. (21-24.09.2021г).- Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого. - 187 с.- Тула, 2022. С. 159-163.

12. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В. Свойства изделий, полученных селективным лазерным синтезом. 1. «Сплошные» изделия // XIII-я МНТК «Современные автомобильные материалы и технологии (САМИТ-2021)», (20.11.2021 г.), Сб. статей., Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2021. С. 341-346.

——

СОДЕРЖАНИЕ