

Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам

Тезисы докладов

30 июня - 5 июля 2022
Суздаль



Организаторы конференции благодарны

Министерству науки и высшего образования Российской Федерации,

Администрациям Владимирской области и города Суздаля,

ООО НПП «Технофильтр»

за помощь в подготовке и проведении конференции.

STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES, MOSCOW

STEKLOV INTERNATIONAL MATHEMATICAL CENTER, MOSCOW

MOSCOW CENTER OF FUNDAMENTAL AND APPLIED MATHEMATICS

VLADIMIR STATE UNIVERSITY

NAMED AFTER ALEXANDER AND NIKOLAY STOLETOVS

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY

INTERNATIONAL CONFERENCE
ON DIFFERENTIAL EQUATIONS
AND DYNAMICAL SYSTEMS

ABSTRACTS

SUZDAL

30 JUNE – 5 JULY 2022

Vladimir
«Arkaim»
2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК, Г. МОСКВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ
"МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК" (МЦМУ МИАН), Г. МОСКВА

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. А. Г. И Н. Г. СТОЛЕТОВЫХ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Суздаль
30 июня – 5 июля 2022

Владимир
«Аркаим»
2022

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6
М43

Редакционная коллегия:

В. В. Козлов, доктор физико-математических наук, академик РАН (ответственный редактор)

Д. В. Трещёв, доктор физико-математических наук, академик РАН

А. А. Давыдов, доктор физико-математических наук, профессор

М43 Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 30 июня – 5 июля 2022. – Владимир: ООО «Аркаим». 208 с, ил.

ISBN 978-5-93767-460-9

В сборник включены тезисы докладов, представленных на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.

Издание представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

Мероприятие проведено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Конференция проводится при финансовой поддержке Фонда Саймонса и Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265).

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6

Программный комитет

- ◇ **В. В. Козлов** (председатель), Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **А. А. Давыдов** (зам. председателя), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **Д. В. Трещев** (зам. председателя), Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **А. А. Шкалик** (зам. председателя), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **А. А. Аграчев**, Международная школа высших исследований (SISSA), Триест, Италия.
- ◇ **А. И. Аптекарев**, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
- ◇ **С. М. Асеев**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **В. З. Гринес**, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики Нижний Новгород, Россия.
- ◇ **В. И. Максимов**, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия.
- ◇ **Г. П. Панасенко**, Университет Жана Монне, Сен Этьен, Франция.
- ◇ **А. Н. Печень**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **Н. И. Попиванов**, Софийский университет имени святого Климента Охридского, София, Болгария.
- ◇ **Г. А. Чечкин**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **А. П. Чупахин**, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия.
- ◇ **А. И. Шафаревич**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **С. Янечко**, Центр перспективных исследований, Варшава, Польша.

Организационный комитет

- ◇ **А. А. Давыдов** (председатель), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **И. А. Петренко** (заместитель председателя), Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.
- ◇ **С. А. Болтунова**, Департамент образования Владимирской области, Владимир, Россия.
- ◇ **А. О. Иванов**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **А. Д. Изаак**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **В. Е. Подольский**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **С. А. Поликарпов**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **С. В. Сахаров**, Администрация города Суздаля, Суздаль, Россия.
- ◇ **В. А. Тимофеева**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **А. В. Черникова**, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Abdrakhmanova N. T., Astashov E. A.	18
ON SIMPLE SINGULARITIES OF SKEW-SYMMETRIC MATRIX FAMILIES	
Agapov S. V.	19
RATIONAL INTEGRALS OF MAGNETIC GEODESIC FLOWS ON 2-SURFACES	
Akinshin A. A., Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E.	19
MODELING OF CIRCADIAN OSCILLATOR FUNCTIONING	
Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A.	20
BOJARSKI–MEYERS ESTIMATES OF SOLUTIONS TO ZAREMBA PROBLEM ON A FRACTAL FOR LAPLACIAN	
Astashova I. V.	21
ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO HIGHER-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EXPONENTIALLY OR POWER-SMALL PERTURBATIONS	
Bain D. D., Bountis A.	23
STABILITY AND CHAOS IN PERTURBED 4-DIMENSIONAL INTEGRABLE MAPS	
Bardin B. S., Maksimov B. A.	23
ANALYSIS OF THE ORBITAL STABILITY OF PENDULUM OSCILLATIONS OF A SYMMETRIC RIGID BODY WITH A FIXED POINT IN A UNIFORM GRAVITY FIELD	
Barinova M. K.	24
ENERGY FUNCTIONS FOR DIFFEOMORPHISMS GIVEN ON SURFACES	
Barinova M. K., Shustova E. K.	25
DYNAMICAL PROPERTIES OF DIRECT PRODUCTS OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS	
Bobkov V. E., Kolonitskii S. B.	26
IMPROVED POINCARÉ INEQUALITY FOR A SUBLINEAR EMBEDDING	
Bolotin S. V.	26
PASSAGE THROUGH A CRITICAL ENERGY LEVEL IN A HAMILTONIAN SYSTEM WITH SLOW DEPENDENCE ON TIME	
Borevich E. Z.	28
AN EXAMPLE FOR BIFURCATION OF SOLUTIONS OF THE BASIC EQUATIONS IN SEMICONDUCTORS	
Bortakovsky A. S., Evdokimova E. A.	28
OPTIMAL TRAJECTORIES OF THE MARKOV-DUBINS HYBRID MODEL WITH SEPARATION OF CONTROL OBJECTS	
Davydov A. A., Zosimov S. O.	30
GENERIC SOFT LOSS OF STABILITY IN OCEAN CIRCULATION BOX MODEL WITH TURBULENT FLUXES	
Dobrokhotov S. Yu., Minenkov V. E., Nazaikinskii V. E.	31
THE ALGORITHM FOR CONSTRUCTING ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF NONLINEAR SHALLOW WATER EQUATIONS IN BASINS WITH A GENTLY SLOPING BEACH	
Dudnikova T. V.	31
ON THE STATIONARY NONEQUILIBRIUM STATES FOR THE “FIELD–CRYSTAL” SYSTEM	
Efremova L. S.	33
ON THE NONWANDERING SET OF SIMPLEST SKEW PRODUCTS ON n -DIMENSIONAL ($n \geq 2$) CELLS, CYLINDERS AND TORI	

Finoshin A. V., Dolgov J. A., Zhulenko K. A.	33
GENERATING MODEL OF THE REFERENCE SIGNAL FOR THE TRACING CONTROL PROBLEM	
Gaiko V. A.	34
MULTISTABILITY AND GLOBAL LIMIT CYCLE BIFURCATIONS IN AN EULER–LAGRANGE–LIÉNARD POLYNOMIAL SYSTEM	
Grines V. Z., Morozov A. I., Pochinka O. V.	35
DETERMINATION OF THE HOMOTOPY TYPE OF A MORSE-SMALE DIFFEOMORPHISM ON AN ORIENTABLE SURFACE BY A HETEROCLINIC INTERSECTION	
Gurevich E. Ya.	36
ON GRADIENT-LIKE FLOWS WITHOUT HETEROCLINIC INTERSECTION	
Il'ichev A. T., Shargatov V. A.	37
STABILITY OF THE ANEURYSM IN A MEMBRANE TUBE	
Ivanov A. V.	38
ON HYPERBOLICITY OF $SL(2, \mathbb{R})$ -COCYCLES OVER IRRATIONAL ROTATIONS	
Kashchenko A. A.	39
RELAXATION CYCLES IN ONE NONLINEAR EQUATION WITH DELAY	
Khovanskii A. G.	39
GEOMETRY OF GENERALIZED VIRTUAL POLYHEDRA	
Koptev A. V.	40
MODEL FOR EMERGENCE AND DEVELOPMENT OF ROGUE-WAVES BASED ON 3D NAVIER-STOKES EQUATIONS	
Kruglov V. E.	41
ON MODULI FINITENESS CRITERION FOR MORSE-SMALE FLOWS ON SURFACES	
Kuznetsov S. A., Pechen A. N.	42
ON COMPLETE CONTROLLABILITY OF A CLASS OF HIGHLY DEGENERATE 4-LEVEL QUANTUM SYSTEMS WITH A “CHAINED” COUPLING HAMILTONIAN	
Lando S. K.	43
REAL VERSUS COMPLEX: ENUMERATION OF MEROMORPHIC FUNCTIONS	
Lokutsievskiy L. V.	44
DERIVATIVE OF SUB-RIEMANNIAN GEODESICS IS L_p -HÖLDER CONTINUOUS	
Maksimov V. I.	44
FEEDBACK CONTROL METHOD IN THE INVESTIGATION OF THE SCHLÖGL AND FITZHUGH–NAGUMO SYSTEMS	
Maslenikov I. N.	45
LOCAL DYNAMICS OF A SECOND-ORDER EQUATION WITH A DELAY AT THE DERIVATIVE	
Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V.	46
A-FLOWS AND CHAOTIC LAMINATIONS	
Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V.	47
ON 2-DIMENSIONAL EXPANDING ATTRACTORS OF A-FLOWS	
Miller B. M.	47
GENERALIZED SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LIE ALGEBRA STRUCTURE	
Mironov A. E.	49
ON DIFFERENTIAL EQUATIONS OF INTEGRABLE BILLIARD TABLES	

Morzhin O. V., Pechen A. N.	50
ON OPTIMIZATION OF COHERENT AND INCOHERENT CONTROLS IN SOME OPEN QUANTUM SYSTEMS	
Myachkova A. A., Pechen A. N.	51
SOME CONTROLLABLE AND UNCONTROLLABLE DEGENERATE FOUR-LEVEL QUANTUM SYSTEMS	
Nazarov A. I.	52
EQUATIONS GENERATED BY THE FRACTIONAL HARDY–SOBOLEV INEQUALITY, AND THEIR PERTURBATIONS	
Nozdrinova E. V.	52
SOLUTION OF THE 33RD PALIS-PUGH PROBLEM FOR GRADIENT-LIKE DIFFEOMORPHISMS OF A TWO-DIMENSIONAL SPHERE	
Nozdrinova E. V., Tsaplina E. V.	53
CRITERION FOR THE EXISTENCE OF A CONNECTED CHARACTERISTIC SPACE OF ORBITS IN A GRADIENT-LIKE DIFFEOMORPHISM OF A SURFACE	
Palshin G. P.	53
ON ONE BIFURCATION OF LIOUVILLE TORI IN THE PROBLEM OF VORTEX DYNAMICS	
Pastukhova S. E.	54
ON RESOLVENT APPROXIMATIONS IN HOMOGENIZATION	
Petruhanov V. N., Pechen A. N.	56
GRAPE METHOD FOR OPEN QUANTUM SYSTEMS DRIVEN BY COHERENT AND INCOHERENT CONTROLS	
Piskarev S. I.	57
SHADOWING IN THE NEIGHBORHOOD OF A HYPERBOLIC EQUILIBRIUM POINT FOR FRACTIONAL PROBLEMS	
Pochinka O. V., Shubin D. D.	57
NON-SINGULAR MORSE-SMALE FLOWS WITH THREE PERIODIC ORBITS ON ORIENTABLE 3-MANIFOLDS	
Pochinka O. V., Talanova E. A.	58
A KNON AS A COMPLETE INVARIANT OF MORSE-SMALE 3-DIFFEOMORPHISMS WITH FOUR FIXED POINTS	
Podobryaev A. V.	58
ATTAINABLE SET FOR A 2-STEP FREE CARNOT GROUP WITH POSITIVE CONTROLS	
Rozenberg V. L.	59
ON RECONSTRUCTION PROBLEM FOR A QUASI-LINEAR STOCHASTIC EQUATION UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY	
Rudoy E. M.	60
ASYMPTOTIC MODELLING OF INTERFACES IN KIRCHHOFF-LOVE’S PLATES THEORY	
Ryabov P. E., Sokolov S. V.	61
PHASE TOPOLOGY OF ONE MODEL OF A LAGRANGE TOP WITH A VIBRATING SUSPENSION POINT	
Ryzhikov V. V.	62
SELF-SIMILAR ERGODIC CONSTRUCTIONS, AND APPLICATIONS	
Sakbaev V. Zh.	63
INVARIANT MEASURES FOR HAMILTONIAN FLOWS AND RANDOM WALKS IN INFINITELY DIMENSIONAL PHASE SPACES	

Salnikova T. V.	63
STEADY STATES OF THE VLASOV EQUATION WITH A LENNARD-JONES TYPE POTENTIAL	
Samares P.	64
A NON-AUTONOMOUS MODEL INCORPORATING EFFECTS OF TOXICITY AND NUTRIENTS LEVEL ON PLANKTON DYNAMICS	
Sedova N. O.	64
SAFETY PROBLEM FOR TIME-VARYING DELAY SYSTEMS IN TERMS OF BARRIER FUNCTIONS	
Sergeev S. A.	65
ASYMPTOTIC SOLUTION FOR THE CAUCHY PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH TIME DISPERSION	
Shafarevich A. I.	66
SHORT-WAVE ASYMPTOTICS FOR EVOLUTIONARY EQUATIONS WITH ABRUPTLY VARYING COEFFICIENTS	
Shaposhnikova T. A.	66
BOUNDARY OPTIMAL CONTROL AND HOMOGENIZATION: CRITICAL CASE	
Shavlukov A. M.	67
SINGULARITIES OF SOLUTIONS TO THE GAS DYNAMICS EQUATIONS AND THE LINEAR WAVE EQUATION	
Shcheglova A. P.	68
ON SOME SOLUTIONS OF SEMILINEAR EQUATIONS IN \mathbb{R}^n WITH FRACTIONAL LAPLACIAN	
Sheinman O. K.	67
EFFECTIVE METHODS FOR HITCHIN SYSTEMS	
Shukla V. K.	69
STUDY OF HYBRID PROJECTIVE SYNCHRONIZATION BETWEEN SIMPLE AND LU CHAOTIC SYSTEMS	
Sidorenko V. V.	69
"ADIABATIC APPROXIMATION" IN STUDIES OF RESONANCE PHENOMENA IN THREE-BODY PROBLEM	
Singh R.	70
TRANSIENT RESPONSE OF COLLINEAR GRIFFITH CRACKS IN A FUNCTIONALLY GRADED STRIP BONDED BETWEEN DISSIMILAR ELASTIC STRIPS UNDER SHEAR IMPACT LOADING	
Tolchennikov A. A.	71
MASSLESS DIRAC EQUATION WITH A LINEAR POTENTIAL AND LOCALIZED R.H.S.	
Ustinov N. S.	71
ON THE CONSTANCY OF THE GROUND-STATE SOLUTIONS TO THE FRACTIONAL SEMILINEAR NEUMANN PROBLEM	
Vasyutkin S. A., Chupakhin A. P.	72
TRAVELING WAVES IN A LONG TUBE	
Velisevich A V., Lyubanova A. Sh.	73
INVERSE PROBLEMS FOR THE NONLINEAR STATIONARY EQUATIONS	
Volkov B. O., Pechen A. N.	74
HIGHER ORDER TRAPS IN QUANTUM CONTROL LANDSCAPES	
Vyugin I. V.	75
VECTOR BUNDLES AND THE RIEMANN-HILBERT PROBLEM ON A RIEMANN SURFACE	

Zinina S. Kh.	75
DYNAMICS OF REGULAR TOPOLOGICAL FLOWS ON MANIFOLDS	
Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г.	76
ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ	
Авдюшкин А. Н.	78
ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_1 В ПЛОСКОЙ СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ ПРИ РЕЗОНАНСАХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА	
Агафонкин Г. А.	79
ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПО НАПЕРЁД ЗАДАННОМУ СУЩЕСТВЕННОМУ СПЕКТРУ	
Азамов А. А., Абдуганиев А. А.	80
ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ДИНАМИКИ: ЦИКЛ СИСТЕМЫ РЁССЛЕРА	
Алексеев В. В., Зеленова В. К., Преображенская М. М.	81
СУЩЕСТВОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ БЕГУЩИХ ВОЛН В ПОЛНОСВЯЗНОЙ ЦЕПИ РЕЛЕЙНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ МЭКИ-ГЛАССА	
Аллёнов С. В.	82
ЗНАЧЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ВАСИЛЬЕВА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ТОРИЧЕСКИХ УЗЛОВ	
Антипов А. А.	83
ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ НЕАВТОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ КРАТНОГО ВНЕШНЕГО РЕЗОНАНСА	
Ардентов А. А.	84
МНОЖЕСТВО РАЗРЕЗА В СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧЕ НА ГРУППЕ КАРТАНА	
Асеев С. М.	85
ОБ ОСЛАБЛЕНИИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ	
Ахматов З. А., Тотиева Ж. Д.	86
ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ В СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ	
Бардин Б. С.	87
О ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ В ЗАДАЧЕ ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ	
Бардин Б. С., Волков Е. В., Сухов Е. А.	88
АНАЛИЗ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ	
Бардин Б. С., Рачков А. А.	89
О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ АНИЗОТРОПНОГО СУХОГО ТРЕНИЯ	
Беляков А. О.	90
ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЯХ В РАЗВИТИЕ ТЕХНОЛОГИЙ В ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА	

Богаевский И. А.	92
ВНУТРЕННЕЕ РАССЕЯНИЕ АРНОЛЬДА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ	
Богданов А. Н.	92
К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ	
Бойко К. В.	93
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА-КАПУТО	
Бойков И. В.	94
УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ	
Бойков И. В., Руднев В. А., Бойкова А. И.	95
ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	
Бортаковский А. С.	96
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ПЕРЕМЕННОЙ	
Бритвина Л. Ю.	98
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ	
Булатов В. В., Владимиров Ю. В.	99
АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД	
Бухштабер В. М.	100
ГРАДУИРОВАННАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА И ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИГМА-ФУНКЦИИ	
Валова Г. С., Черевко А. А., Богомякова О. Б., Тулупов А. А.	101
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОРОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИДКИХ СРЕД ГОЛОВНОГО МОЗГА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОЦЕФАЛИИ	
Васильев В. Б.	102
О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ	
Веденяпин В. В., Петров А. Г.	103
УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА-ЭЙНШТЕЙНА И ТОЧКИ ЛАГРАНЖА	
Водинчар Г. М., Казаков Е. А.	104
ОСЦИЛЛЯТОР С ПАМЯТЬЮ КАК МОДЕЛЬ ДВУМОДОВОГО ДИНАМО	
Воронин С. М., Черепанова Е. А.	105
ТЕОРЕМЫ О ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ БИНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	
Галкин В. Д., Починка О. В.	106
СФЕРИЧЕСКАЯ СХЕМА ПОТОКОВ С КОНЕЧНЫМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ЦЕПНО РЕКУРРЕНТНЫМ МНОЖЕСТВОМ	
Гарманова Т. А.	107
О ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА	
Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.	108
ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА	

Глызин С. Д., Колесов А. Ю.	109
Режимы типа кластерной синхронизации и бегущих волн в одной системе сингулярно возмущенных уравнений	
Годова А. Д., Федоров В. Е.	110
Задача типа Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах	
Гонцов Р. Р., Горючкина И. В.	111
Малые знаменатели и сходимость формальных решений q -разностных уравнений	
Гончаров В. Ю.	112
Осцилляционные свойства решений в задаче о потере устойчивости колонны при условиях монотонности	
Гончаров В. Ю., Муравей Л. А.	113
К вопросу существования и единственности оптимальной формы неоднородной колеблющейся балки	
Гранильщикова Я. А.	114
Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией	
Грешнов А. В.	115
О соединимости горизонтальными ломаными на группах Карно	
Гринес В. З.	116
О топологии несущих многообразий, допускающих диффеоморфизмы с хаотической гиперболической динамикой	
Гринес В. З., Минц Д. И., Чилина Е. Е.	117
Возмущения негиперболических автоморфизмов двумерного тора	
Гусейн-Заде С. М.	118
Зеркально симметричные пары по Берглунду–Хюбшу–Хеннингсону и их некоммутативные аналоги	
Гусейнов С. Т.	119
Гельдеровская непрерывность решений вырождающегося на части области эллиптического (p, q) -Лапласиана	
Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П.	120
Локальный принцип максимума в задаче оптимального управления с нерегулярными смешанными ограничениями	
Завьялова Т. В.	121
Моментные уравнения для линейной системы дифференциальных уравнений с полумарковскими коэффициентами	
Захарова Т. А., Федоров В. Е.	122
О локальной разрешимости вырожденного квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто	
Зизов В. С.	123
Сложность клеточных мультиплексов с повторяющимися входами	
Иванова А. С., Кириллов А. Н.	125
Периодическое управление системой Лотки — Вольтерра, сохраняющее видовую структуру биосообщества	
Ивановский Л. И.	126
Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия одной краевой задачи с дополнительной внутренней связью	

Игнатьев М. Ю.	127
ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	
Ижбердеева Е. М., Плеханова М. В., Судгаймер Е. А.	128
РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЕМ НА ОБРАЗ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА	
Иноземцев А. И.	129
ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА	
Калинин А. В., Тюхтина А. А.	131
ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ	
Калитвин В. А.	131
О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ	
Калманович В. В., Серегина Е. В.	134
О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ	
Канатников А. Н.	135
ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ И ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	
Карачик В. В.	136
ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ	
Кащенко И. С.	137
БИФУРКАЦИИ В УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	
Кириллов А. Н., Сазонов А. М.	138
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШУМПЕТЕРОВСКОГО ЦИКЛА ВНЕДРЕНИЯ ТЕХНОЛОГИИ	
Клово А. Г., Илюхин А. А., Куповых Г. В.	140
ОБОБЩЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ	
Кобзев А. А.	141
СПОСОБЫ ФОРМИРОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ В СИСТЕМАХ С КОМПЛЕМЕНТАРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ	
Козлов В. В.	142
ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ В НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ	
Конечная Н. Н.	143
АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ–РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	
Корнеева О. А., Мастерков Ю. В.	144
К ЗАДАЧЕ ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ВХОДОМ В \mathfrak{R}_+^2	
Косарев А. П.	144
АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ $n \times n$ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	
Котюков А. М., Павлова Н. Г.	146
ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЫНКА	

Красильников П. С., Доброславский А. В.	146
УСРЕДНЕННАЯ КРУГОВАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ: ВНУТРЕННИЙ ВАРИАНТ, НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	
Круглов Е. В.	147
О ПРОСТОЙ ДУГЕ, СОЕДИНЯЮЩЕЙ 3-ДИФФЕОМОРФИЗМ С РАСТЯГИВАЮЩИМСЯ АТТРАКТОРОМ И АНОСОВСКИЙ ДИФФЕОМОРФИЗМ	
Кулешов А. С., Гаджиев М. М.	148
О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ	
Куликов А. Н., Куликов Д. А.	149
ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ОБОБЩЕННОГО НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ	
Кушнер А. Г., Мухина С. С., Файзуллина Э. Р.	151
ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ГЛУБОКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ	
Лазарев Н. П., Шарин Е. Ф., Семенова Г. М.	152
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ТОЧКИ ШАРНИРНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ	
Лексин В. П.	152
РЕДУКЦИЯ СИСТЕМ ШЛЕЗИНГЕРА К ЛИНЕЙНЫМ СИСТЕМАМ ЖОРДАНА-ПОХГАММЕРА	
Литвинов В. Л.	154
ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА РИМАНА	
Литвинова К. В., Литвинов В. Л.	156
НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ	
Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А.	157
ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА—КИПРИЯНОВА И НЬЮТОНОВ B -ПОТЕНЦИАЛ С ОСОБЕННОСТЬЮ НА КОНУСЕ В \mathbb{R}_n	
Мастерков Ю. В.	158
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДОЛГОСРОЧНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ	
Маштаков А. П.	159
ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА С УПРАВЛЕНИЕМ В ПОЛУКРУГЕ	
Мирзоев К. А., Сафонова Т. А.	160
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИЛОГАРИФМОВ И АССОЦИИРОВАННЫХ С НИМИ ФУНКЦИЙ	
Морозов А. Д., Морозов К. Е.	162
О ВЫРОЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСАХ И СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ	
Муравей Л. А., Романенков А. М.	162
ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПОЛОТНА	
Назайкинский В. Е.	164
ЭФФЕКТИВНЫЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ	
Никаноров С. О.	165
ЭЛАСТИЧНОСТЬ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РЫНКА	
Николаев В. Г.	165
СТРУКТУРА ЯДРА ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ	

Николаенко С. С.	166
ТОПОЛОГИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИ РАЗДЕЛИМЫХ СИСТЕМ	
Новодерова А. П.	167
ДИНАМИКА КОЛЕСНОГО АППАРАТА НА «МИКСТЕ» ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕС С ДОРОГОЙ	
Овсянников В. М.	168
ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	
Панов А. В.	171
ОБ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ГАЗОВЗВЕСИ	
Панов Е. Ю.	171
О СТАБИЛИЗАЦИИ СЛАБЫХ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	
Постнов С. С.	172
МЕТОД МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ И ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА	
Преображенская М. М.	173
BURSTING ЭФФЕКТ В МОДЕЛИ ПЕРЦЕПТРОНА, ОПИСАННОЙ СИСТЕМОЙ РЕЛЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	
Пулькина Л. С., Гилев А. В.	175
ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА	
Ремизов А. О.	175
ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ С НЕИЗОЛИРОВАННЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ТОЧКАМИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ	
Родина Л. И.	176
ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОМЫСЛА ДЛЯ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ	
Рудаков И. А.	177
ЗАДАЧА О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ С ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ	
Рыбкина О. В.	178
ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ	
Савельева В. С., Чекин А. М., Чекина Е. А.	179
ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ	
Сачков Ю. Л.	180
СУБРИМАНОВА СФЕРА КАРТАНА	
Сачков Ю. Л., Сачкова Е. Ф.	182
СУБЛОРЕНЦЕВА ЗАДАЧА НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА	
Семенов М. Е., Соловьев А. М., Борзунов С. В., Мелешко П. А.	182
СТОХАСТИЧЕСКИЕ ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ	
Серегина Е. В., Степович М. А., Филиппов М. Н.	184
О ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ	

Солдатов А. П.	185
К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЙЯНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ	
Субботина Н. Н., Крупенников Е. А.	185
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ УПРАВЛЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ	
Тахиров Ж. О., Анваржонов Б.	186
О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПАНДЕМИИ (COVID-19)	
Трещев Д. В.	187
ЛИНЕАРИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА	
Трусова Н. И.	188
ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА	
Туманов С. Н.	189
ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ СТЕПЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ	
Туницкий Д. В.	190
О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА СФЕРЕ	
Туров М. М., Федоров В. Е.	192
АНАЛИТИЧЕСКИЕ В СЕКТОРЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ	
Филимонов А. М.	194
О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЭФФЕКТА БОЛЬШОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ДИСКРЕТНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	
Филин Н. В., Федоров В. Е.	195
О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГЕНЕРАТОРОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ РАЗРЕШАЮЩИХ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ДРОВНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ	
Фурцев А. И.	195
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ ПЛАСТИН И БАЛОК С УСЛОВИЯМИ НЕПРОНИКАНИЯ	
Хачатрян Х. А.	196
О СИСТЕМАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНОВСКОГО ТИПА НА ПОЛУПРЯМОЙ	
Хлопин Д. В.	197
О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ СЛАБО ОБГОНЯЮЩЕЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ	
Чечкина А. Г.	198
О ПОВЫШЕННОЙ СУММИРУЕМОСТИ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ p -ЛАПЛАСА	
Черевко А. А., Валова Г. С., Акулов А. Е., Паршин Д. В., Тур Д. А.	199
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ САХАРНОГО ДИАБЕТА 1 ТИПА НА СОСУДЫ ГОЛОВНОГО МОЗГА	
Чкалова Д. Г., Кондакова Е. Н.	200
ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СВЕРТКИ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННЫХ СДВИГОВ	
Шамолин М. В.	202
ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ	

Шарифуллина Т.С., Черевко А.А., Петренко И.А., Остапенко В.В.	203
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ЭМБОЛИЗАЦИИ АРТЕРИОВЕНОЗНОЙ МАЛЬФОРМАЦИИ	
Шаров Е.Б.	203
СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СТРУНЫ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ ВЕСОМ	
Шейпак И.А.	204
СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СТРУНЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ МАСШТАБИРУЮЩИМ МНОЖИТЕЛЕМ	
Шкаликов А.А.	205
СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ	
Шуклина А.Ф., Плеханова М.В.	206
ЗАДАЧА СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ	
Щелчков К.А.	207
ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ	

Abdrakhmanova N. T. (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University
abd.nelly@yandex.ru

Astashov E. A. (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University
ast-ea@yandex.ru

There exists a number of papers devoted to the classification of smooth or analytic matrix families. Such families naturally appear in the study of binary differential equations, dependency sets of vector fields on manifolds, as well as in connection with other problems in differential geometry. It is natural to consider such families up to \mathcal{G} -equivalence, i. e., up to parameter-dependent linear base changes and parameter changes.

In [1] analytic families of square matrices, which can be viewed as linear maps between equidimensional spaces, are considered. In particular, normal forms of \mathcal{G} -simple mappings (i. e., those having a finite number of adjacencies) are obtained. An ideologically similar paper [2] is devoted to the study of analytic families of symmetric matrices. In [3] analytic families of skew-symmetric matrices are considered. In particular, a complete classification of two-parameter and a partial classification of three-parameter 4×4 simple skew-symmetric matrix families are obtained.

We obtain a necessary existence condition for \mathcal{G} -simple analytic skew-symmetric matrix families in terms of number of parameters, matrix size and 1-jet rank. We also classify skew-symmetric matrix families with 1-jet of corank zero. Our work is generally inspired by aforementioned papers [1] and [2], while our results are new compared to those obtained in [3].

Our main results are as follows.

Theorem 1. *If either of the following conditions holds, then there exist no \mathcal{G} -simple skew-symmetric $n \times n$ matrix germs with r parameters:*

- (a) $n = r = 5$;
- (b) $n \geq 6$ and $3 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2} - 3$.

Theorem 2. *Any skew-symmetric $n \times n$ matrix germ that has 1-jet of rank $\frac{n(n-1)}{2}$ as a linear map between the parameter space and the skew-symmetric $n \times n$ matrix space is \mathcal{G} -simple and \mathcal{G} -equivalent to the germ*

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & \dots & \dots & x_{1,n} \\ -x_{1,2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & x_{n-1,n} \\ -x_{1,n} & \dots & \dots & -x_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix},$$

where each entry above the main diagonal is a different parameter $x_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n$).

Theorem 3. *Assume that A is a skew-symmetric $n \times n$ matrix germ with r parameters that has 1-jet of rank s as a linear map between the parameter space and the skew-symmetric $n \times n$ matrix space. If one of the following conditions is satisfied, then A is not \mathcal{G} -simple:*

- (a) $n = s = 5$;
- (b) $n \geq 6$ and $3 \leq s \leq N - 3$;
- (c) $n \geq 3, r \geq 3$, and $s = 0$;
- (d) $n \geq 5, r = 2$, and $s = 0$.

References

- [1] Bruce J. W., Tari F. On Families of Square Matrices // *Cadernos de Mathematica*. 2002. Vol. 3. P. 217–242.
- [2] Bruce J. W. On Families of Symmetric Matrices // *Moscow mathematical journal*. 2003. Vol. 3. P. 335–360.
- [3] Haslinger G. J. Families of Skew-symmetric Matrices. Ph. D. thesis. University of Liverpool. 2001.

Agapov S. V. (Russia, Novosibirsk)
 Sobolev Institute of Mathematics
 Novosibirsk State University
agapov.sergey.v@gmail.com, agapov@math.nsc.ru

In the talk we will consider integrable geodesic flows and also magnetic geodesic flows on 2-surfaces having an additional rational in momenta first integral. We will describe various approaches which allow us to construct new integrable examples of metrics, magnetic fields and such integrals.

The talk is based on joint work with Vladislav Shubin.

References

- [1] Agapov S., Shubin V. Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: New examples // Journal of Geometry and Physics, 2021. Vol. 170, 104389.

MODELING OF CIRCADIAN OSCILLATOR FUNCTIONING¹

Akinshin A. A. (Russia, Novosibirsk)
 Sobolev institute of mathematics
andrey.akinshin@gmail.com

Golubyatnikov V. P. (Russia, Novosibirsk)
 Novosibirsk state university
golubyatn@yandex.ru

Kirillova N. E. (Russia, Novosibirsk)
 Sobolev institute of mathematics
n.kirillova@g.nsu.ru

We study non-linear smooth kinetic dynamical system

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_1(\Gamma_1(x_2) \cdot \gamma_1(x_3) - x_1); \quad \dot{x}_\ell = k_\ell(\Gamma_\ell(x_5) \cdot L_\ell(x_1) - x_\ell); \quad \ell = 2, 3, 4; \\ \dot{x}_5 &= k_5(\Gamma_5(x_6) - x_5); \quad \dot{x}_6 = k_6(L_6(x_4) - x_6); \end{aligned} \tag{1}$$

as a 6D model of circadian oscillator in order to find cycles in its phase portrait. Similar model was proposed in [1]. All the variables denote concentrations of the components, the rates of their natural degradation are characterized by positive coefficients k_j ; here and below $1 \leq j \leq 6$.

Positive functions L_j are monotonically decreasing, they describe negative feedbacks, $L'_j < 0$. Positive functions γ_1, Γ_j , increase monotonically, and describe positive feedbacks, $\Gamma'_j > 0$. See [1], [2] for biological interpretations. We do not specify in our theoretical studies analytic forms of all these functions.

Inequalities (2) imply uniqueness of an equilibrium point S_0 of the system (1):

$$L_4 L'_2 \Gamma'_4 \Gamma_2 \geq L'_4 L_2 \Gamma_4 \Gamma'_2; \quad L_4 L'_3 \Gamma'_4 \Gamma_3 \geq L'_4 L_3 \Gamma_4 \Gamma'_3. \tag{2}$$

These conditions are just sufficient for uniqueness of this point S_0 .

Theorem, [2]. *If the conditions (2) are satisfied, and*

$$-L'_6 \Gamma_5 L_4 \Gamma'_4 > 8 - 2(\Gamma_1 \gamma'_1 L'_3 \Gamma_3 + \Gamma'_1 \gamma_1 L'_2 \Gamma_2),$$

then the point S_0 is unstable, and the system (1) has a cycle.

All the derivatives $L'_j, \Gamma'_j, \gamma'_1$ here and the values of these functions compose the linearization matrix M of the system (1) at the equilibrium point S_0 .

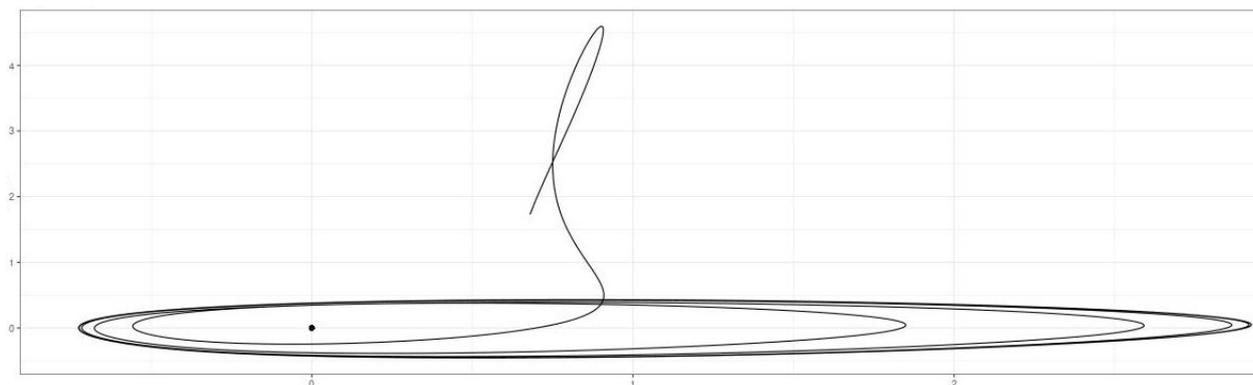


Fig. 1: Projections of a trajectory of the system (1) and its limit cycle onto 2D plane

Now, we have performed numerical experiments with trajectories of the system (1) and their limit cycles (see an example on the Figure 1) using special cloud application <https://andreyakinshin.shinyapps.io/clock-bmal1/> 2D plane mentioned above corresponds to the pair of eigenvalues of M which have positive real parts. In some cases, we have observed here bifurcations of cycles.

For some other dynamical systems of biochemical kinetics, we have proved existence of at least two cycles in their phase portraits.

References

- [1] Podkolodnaya O. A., Tverdokhlebov N. N., Podkolodnyy N. L. Computational modeling of the cell autonomous mammalian circadian oscillator // BMC Systems Biology. 2017. Vol. 11. P. 27–42.
- [2] Golubyatnikov V. P., Podkolodnyaya O. A., Podkolodnyy N. L., Ayupova N. B., Kirillova N. E., Yunosheva E. V. Conditions of existence of cycles in two models of circadian oscillator of mammals // Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki (in Russian). 2021. Vol. 15. No 4. P. 19–29.

BOJARSKI–MEYERS ESTIMATES OF SOLUTIONS TO ZAREMBA PROBLEM ON A FRACTAL FOR LAPLACIAN²

Alkhutov Yu. A. (Russia, Vladimir)

A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University
yurij-alkhutov@yandex.ru

Chechkin G. A. (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University
chechkin@mech.math.msu.su

Consider a bounded Lipschitz graph plane domain $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. We define the Sobolev space of functions $W_2^1(D, F)$, where $F \subset \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ is a closed set, as a completion of functions infinitely differentiable in the closure of D and equal to zero in a neighborhood of F , by norm

$$\|v\|_{W_2^1(D, F)} = \left(\int_D v^2 dx + \int_D |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

A priori, the functions $v \in W_2^1(D, F)$ are assumed to satisfy the inequality

$$\|v\|_{L_2(D)} \leq C \|\nabla v\|_{L_2(D)}. \quad (1)$$

¹Supported by RFBR grant 20-31-90011.

²The work of the first author (AYuA) were supported in part by RSF (project 22-21-00292).

We consider the Zaremba problem

$$\Delta u = l \quad \text{in } D, \quad u = 0 \quad \text{on } F, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } G, \quad (2)$$

where $G = \partial D \setminus F$, and $\frac{\partial u}{\partial n}$ is the outward normal derivative of the function u , and l is a linear functional on the space $W_2^1(D, F)$.

A variational solution to problem (1) is a function $u \in W_2^1(D, F)$ subject the equality

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi \, dx$$

for any $\varphi \in W_2^1(D, F)$. Here $f = (f_1, f_2)$, $f_i \in L_2(D)$, appears in the representation of the functional l due to the Hahn-Banach theorem.

Let $\{l_j\}$ be a decreasing sequence of positive numbers such that $2l_{j+1} < l_j$ ($j = 1, 2, \dots$) and let Δ_1 be a closed interval $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$. Denote by E_1 the subset of Δ_1 , which is the union of two closed intervals Δ_2 and Δ_3 with length l_2 and which contains both ends of the interval Δ_1 . Thus, we remove from the interval Δ_1 the interval of length $l_1 - 2l_2$ centered in the middle of Δ_1 . Next, we repeat the procedure with the intervals Δ_2 and Δ_3 (here the role of l_2 passes to l_3) and thus obtain four closed intervals with length l_3 . Let their union be denoted by E_2 and so on. We put $F = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$. It is clear, that the compact F is the classical Cantor set on the segment $[0, 1]$.

Moreover, inequality (1) is valid and hence we have the unique solvability of problem (2).

Theorem. *If $f \in (L_{2+\delta_0}(D))^2$, where $\delta_0 > 0$, then there are positive constants $\delta(\delta_0) < \delta_0$ and $C(\delta_0)$ such that for solution of problem (2) the following estimate holds:*

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} \, dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} \, dx.$$

References

- [1] Alkhutov Yu.A., Chechkin G. A., Increased integrability of the gradient of the solution to the Zaremba problem for the Poisson equation. // Russian Academy of Sciences. Doklady Mathematics 103 (2), 69–71 (2021) (Translated from Doklady Akademii Nauk 497 (2), 3–6 (2021))
- [2] Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form // CR Mécanique, V. 349 (2), 299–304 (2021)

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO HIGHER-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EXPONENTIALLY OR POWER-SMALL PERTURBATIONS³

Astashova I. V. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
Plekhanov Russian University of Economics
ast.diffiety@gmail.com

Consider the equation

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^{(j)} = p(x)|y|^k \operatorname{sgn} y + f(x), \quad (1)$$

where $k > 1$, $n \geq 2$, the functions $p, f, a_0, \dots, a_{n-1}$ are continuous for $x \geq 0$. We discuss qualitative and asymptotic properties of solutions to (1). (See, for example, [1–2] and references therein.)

³This work was partially supported by RSF, grant 20-11-20272.

Theorem 1. *If $f = 0$, the continuous functions a_0, \dots, a_{n-1} and p satisfy the conditions*

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-j-1} |a_j(x)| dx < \infty \quad \text{for all } j \in \{0, \dots, n-1\} \quad (2)$$

and, for some integer number $m \in \{0, \dots, n-1\}$, the condition

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-1+(k-1)m} |p(x)| dx < \infty, \quad (3)$$

then for any $C \neq 0$ there exists a solution y to equation (1) satisfying, as $x \rightarrow \infty$,

$$y^{(j)}(x) \sim \frac{C m! x^{m-j}}{(m-j)!} \quad \text{for all } j \in \{0, \dots, m\},$$

$$y^{(j)}(x) = o(x^{m-j}) \quad \text{and} \quad \int_{x_0}^{\infty} s^{j-m-1} |y^{(j)}(s)| ds < \infty \quad \text{for all } j \in \{m+1, \dots, n-1\}.$$

Theorem 2. ([5]) *If $a_j = 0$ for $j = 0, \dots, n-1$, the function f in equation (1) satisfies the condition*

$$|f(x)| \leq C e^{-\beta x}, \quad C > 0, \quad \beta > 0,$$

and p is a bounded continuous function, then for any vanishing at $+\infty$ solution $y(x)$ to equation (1) there exists a unique solution $z(x)$ to equation (1) with $f = 0$ such that

$$|y(x) - z(x)| = O(e^{-\beta x}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

and vice versa, for any vanishing at $+\infty$ solution $z(x)$ to equation (1) with $f = 0$ there exists a unique solution $y(x)$ to equation (1) such that condition (4) holds.

The same result ([5]) is obtained for power-small perturbations f .

Remark. Asymptotic behavior at infinity of solutions to equation (1) with additional conditions for the function p and the problem of the asymptotic equivalence of solutions is described in [3-5].

An extension of Theorem 2 for equation (1) with $a_j \neq 0$, under conditions similar to (2)-(3) is also discussed.

References

- [1] Kiguradze I. T., Chanturia T. A. Asymptotic properties of solutions to nonautonomous ordinary differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group. 1993.
- [2] Astashova I. V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations (in Russian), in: I. V. Astashova (ed.), Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition, Moscow: UNITY-DANA. 2012. P.22–290.
- [3] Astashova I. V. On the asymptotic behavior at the infinity of solutions to quasi-linear differential equations // Math. Bohem. 2010. No 135. P.373–382.
- [4] Astashova I. V. On asymptotic equivalence of n -th order nonlinear differential equations // Tatra mountains Math. Publ. 2015. No 63. P.31–38.

STABILITY AND CHAOS IN PERTURBED 4-DIMENSIONAL INTEGRABLE MAPS

Bain D. D. (Russia, Yaroslavl)

P. G. Demidov Yaroslavl State University
danila.bain@yandex.com

Bountis A. (Russia, Yaroslavl)

P. G. Demidov Yaroslavl State University
tassosbountis@gmail.com

It is well-known how stability and chaos arises in perturbed integrable 2-dimensional maps as, for example, the so-called McMillan map [1, 2]. Moreover, in the case of two weakly coupled such maps, chaotic behavior has been studied in the vicinity of unstable fixed points and periodic orbits. Very little is known, however, of how chaos arises in more general integrable 4-dimensional maps found in the literature [3]. The main purpose of this work is to study perturbations of such 4-dimensional integrable maps and compare their dynamics with the case of two coupled McMillan maps, which is more familiar from the theory of $2N$ -dimensional conservative dynamical systems.

References

- [1] V. Papageorgiou, L. Glasser, T. Bountis, "Mel'nikov's Function For 2-Dimensional Maps J. Appl. Math. 49 (3), 692 (1989)
- [2] G. Ruiz, T. Bountis, C. Tsallis, "Time-Evolving Statistics of Chaotic Orbits of Conservative Maps in the Context of the Central Limit Theorem Intern. J. Bifurc. Chaos, Vol. 22 (9), pp. 12502 (2012)
- [3] J. Hietarinta, N. Joshi, F. W. Nijhoff, "Discrete Systems and Integrability Cambridge University Press 2016

ANALYSIS OF THE ORBITAL STABILITY OF PENDULUM OSCILLATIONS OF A SYMMETRIC RIGID BODY WITH A FIXED POINT IN A UNIFORM GRAVITY FIELD⁴

Bardin B. S. (Russia, Moscow)

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences
Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)
bsbardin@yandex.ru

Maksimov B. A. (Russia, Moscow)

Moscow Aviation Institute (National Research University)
badmamaksimov1@gmail.com

The motion of a rigid body with one fixed point in a uniform gravitational field is considered. It is assumed that the body is dynamically symmetrical and its main moments of inertia relative to the fixed point are in the ratio 1:1:4. Due to the dynamic symmetry of the body, periodic pendulum oscillations are possible about the main axis of the ellipsoid of inertia located in its equatorial plane. Such motions are unstable in the sense of Lyapunov, but the problem of their orbital stability is of interest. If the center of mass of the body lies in the equatorial plane of the ellipsoid of inertia, then the Goryachev-Chaplygin integrable case takes place. The orbital stability of pendulum periodic motions of a rigid body in the case of Goryachev-Chaplygin was studied in [1-4].

In this work, no restrictions are imposed on the position of the center of mass of the body. In this case, the problem has two parameters. The first parameter determines the position of the center of mass and is the angle between the position vector of the center of mass and the equatorial plane of the ellipsoid of inertia, the second parameter is the amplitude of oscillations. The aim of this work is to study the orbital stability of pendulum oscillations.

In the case when the amplitude of pendulum oscillations is small, the analysis of orbital stability can be carried out analytically. For this purpose, the equations of motion were written

⁴The study was carried out at the Moscow Aviation Institute (National Research University) with a grant from the Russian Science Foundation (Research 19-11-00116).

in Hamiltonian form. Using the methodology of [5], local coordinates were introduced in the neighborhood of unperturbed periodic motion, and the problem of orbital stability of pendulum oscillations was reduced to the problem of stability of the equilibrium position of a second-order system with periodic coefficients. Hence, by the Depri-Hori method, a linear canonical change of variables was constructed, which reduces the quadratic part of the Hamilton function to normal form. Based on the analysis of the normalized linear system, the regions of parametric resonance, inside which the oscillations are orbitally unstable, were analytically constructed. For the values of the parameters outside the regions of parametric resonance it was found that pendulum oscillations are orbitally stable almost everywhere.

In the case when it is not possible to introduce a small parameter, rigorous conclusions about the orbital stability can be obtained using the technique developed in [6]. This technique reduces the problem of orbital stability of periodic motions to the problem of Lyapunov stability of a fixed point of a symplectic mapping generated by a phase flow of a system of equations of perturbed motion. In this paper, the indicated symplectic mapping was constructed up to terms of the fifth degree in the expansion of its right-hand side in a power series of canonical variables. This made it possible to apply the methods of the KAM theory and obtain rigorous conclusions about the orbital stability of pendulum oscillations for all possible values of the parameters.

References

- [1] Markeev A. P., On the Identical Resonance in a Particular Case of the Problem of the Stability of Periodic Motions of a Rigid Body // *Izv. RAS. MTT*. 2003. No. 3. pp. 32-37.
- [2] Markeev A. P., On pendulum-like motions of a rigid body in the Goryachev-Chaplygin case // *Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 68, Issue 2, pp. 282-293
- [3] Bardin B. S., On the problem of stability of pendulum-like motions of a rigid body in the Goryachev-Chaplygin case // *Izv. RAS. MTT*. 2007. No. 2. pp. 14-21.
- [4] Bardin B. S., On a method of introducing local coordinates in the problem of the orbital stability // *Russian Journal of nonlinear dynamics*, 2020, 16(4), pp. 581-594
- [5] Bolsinov, A. V., Borisov, A. V., and Mamaev, I. S., *Topology and Stability of Integrable Systems*, Russian Math. Surveys, 2010, vol. 65, no. 2, pp. 259-318; see also: *Uspekhi Mat. Nauk*, 2010, vol. 65, no. 2, pp. 71-132.
- [6] Markeev A. P. On one method of studying the stability of the equilibrium positions of Hamiltonian systems // *Izv. RAN. MTT*. 2004. No. 6. S. 3-12.

ENERGY FUNCTIONS FOR DIFFEOMORPHISMS GIVEN ON SURFACES⁵

Barinova M. K. (Russia, Nizhny Novgorod)

HSE University

mkbarinova@yandex.ru

If the chain recurrent set R_f of a diffeomorphism f given on a closed n -manifold M^n is hyperbolic (equivalently, f is an Ω -stable) then it coincides with the closure of the periodic points set Per_f and its chain recurrent components coincide with the basic sets.

A *Lyapunov function* for a diffeomorphism $f : M^n \rightarrow M^n$ is a continuous function $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ with the following properties:

- 1) if $x \notin R_f$ then $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$;
- 2) if $x, y \in R_f$ then $\varphi(x) = \varphi(y)$ iff x and y are in the same chain component;
- 3) $\varphi(R_f)$ is a compact nowhere dense subset of \mathbb{R} .

A Lyapunov function $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ for a diffeomorphism $f : M^n \rightarrow M^n$ is called an *energy function* if $Cr_\varphi = R_f$, where Cr_φ is a set of the critical points of φ .

Analogically definitions can be done for a flow f^t given on a manifold M^n . It follows from the results of C. Conley [1], that a Lyapunov function exists for any dynamical system, flow or

⁵The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. No 075-15-2019-1931.

diffeomorphism. This fact is known as “The Fundamental Theorem of Dynamical Systems”. For energy functions the analogical fact is not true. The first example of a Morse-Smale system which does not possess an energy function has been constructed by D. Pixton [2].

Starting from the dimension $n = 2$ a basic set of an Ω -stable diffeomorphism $f : M^n \rightarrow M^n$ can be *non-trivial*, i.e. other than a periodic orbit. The first result is about an existence of an energy function for Ω -stable diffeomorphisms given on surfaces with non-trivial attractors and repellers.

Theorem 1. *Every Ω -stable diffeomorphism $f : M^2 \rightarrow M^2$, whose all non-trivial basic sets have positive dimensions, possesses a smooth energy function which is a Morse function outside non-trivial basic sets.*

The question about an existence of an energy function for 2-diffeomorphisms with zero-dimensional basic sets was open until now. In the work [3] of H. Kalai were considered so called *basic sets without pairs of conjugated points*⁶ which are most closely related to the topology of the ambient manifold. The simplest example of a diffeomorphism with such a basic set is a *DA*-diffeomorphism obtain from an Anosov diffeomorphism by “Smale surgeries” in two directions.

The second result of the work is a proof of the following theorem.

Theorem 2. *Every Ω -stable diffeomorphism $f : M^2 \rightarrow M^2$ with a zero-dimensional non-trivial basic set without pairs of conjugated points does not possess an energy function.*

References

- [1] Conley C. Isolated invariant sets and the morse index. American Mathematical Society, CBMS, Providence, RI. 1978.
- [2] Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. 1977. Vol. 16. P.167–172.
- [3] Kalai Ch. On the topological classification of A-diffeomorphisms with nontrivial basis sets on two-dimensional manifolds. Ph.d. diss. Lobachevsky State University of Gorky. 1988.

DYNAMICAL PROPERTIES OF DIRECT PRODUCTS OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS⁷

Barinova M. K. (Russia, Nizhny Novgorod)

Laboratory of Dynamical Systems and Applications
National Research University Higher School of Economics
mkbarinova@yandex.ru

Shustova E. K. (Russia, Nizhny Novgorod)

Laboratory of Dynamical Systems and Applications
National Research University Higher School of Economics
ekshustova@gmail.com

A natural way for creating new dynamical systems is to consider the direct products of already known systems. The paper is devoted to the research of some dynamical properties of direct products of homeomorphisms and diffeomorphisms. In particular, authors proves that a chain-recurrent set of the direct product of homeomorphisms is a direct product of the chain-recurrent sets, and also that the direct product of diffeomorphisms holds a hyperbolic structure on the direct product of hyperbolic sets. It is known fact that if a diffeomorphism has a hyperbolic chain-recurrent set, then it is Ω -stable [1]. In this case, it follows from the results of the paper that the direct product of Ω -stable diffeomorphisms is also Ω -stable. Another question which was raised in the article concerns the existence of an energy function for the direct product of diffeomorphisms already possessing energy functions. Energy function is a smooth Lyapunov function [2] whose set of critical points coincides with the chain-recurrent set of the system. As a result, it is proved that in this case the function can be found as a weighted sum of their energy functions.

⁶Two distinct points $x, y \in \Lambda$ are said to be a *pair of conjugated points* if $x, y \in (W_x^s \cap W_y^u)$, $(x, y)^s \cap \Lambda = (x, y)^u \cap \Lambda = \emptyset$.

⁷The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. №075-15-2019-1931

References

- [1] Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos // Studies in Adv. Math. 1999. pp. 506.
 [2] Conley C. Isolated Invariant Sets and Morse Index // Am. Math. Soc., Providence, 1978.

IMPROVED POINCARÉ INEQUALITY FOR A SUBLINEAR EMBEDDING

Bobkov V. E. (Russia, Ufa)

Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences
bobkovve@gmail.com

Kolonitskii S. B. (Russia, Saint-Petersburg)

Saint-Petersburg State Electrotechnical University "LETI"
sergey.kolonitskii@gmail.com

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, be a bounded domain with $C^{1,\alpha}$ -boundary $\partial\Omega$. Poincaré inequality states that the best constant for embedding of $W_0^{1,2}(\Omega)$ into $L_2(\Omega)$ is $\frac{1}{\lambda_1}$, where λ_1 is the first eigenvalue. The equality is achieved only on multiples of the first eigenfunction. A well-known refinement of Poincaré inequality is that the gap in Poincaré inequality can be estimated from below:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 dx \geq (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\Omega} |\nabla u^\perp|^2 dx,$$

where $u^\perp = u - u^\parallel \varphi_1$, φ_1 is the normalized first eigenfunction, and $u^\parallel = \int_{\Omega} \varphi_1 u dx$. Similar statement for embedding of $W_0^{1,p}(\Omega)$ into $L_p(\Omega)$ for $p \in (2, +\infty)$ was proven in [1].

We extend these results to embedding of $W_0^{1,p}$ into L_q for $1 \leq q < p < \infty$.

Theorem 1. *Let $2 \leq q < p < \infty$, and let Ω be of class $C^{1,\alpha}$.*

Let

$$\lambda_1 = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}}$$

and let φ_1 be a normalized minimizer of this Rayleigh quotient, i.e. $\int_{\Omega} |u|^q dx = 1$.

Let $u^\parallel = \int_{\Omega} |\varphi_1|^{q-2} \varphi_1 u dx$ and $u^\perp = u - u^\parallel \varphi_1$.

Then there exists $C > 0$ such that

$$\|\nabla u\|_p^p - \lambda_1 \|u\|_q^p \geq C \left(|u^\parallel|^{p-2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^{p-2} |\nabla u^\perp|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u^\perp|^p dx \right), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

References

- [1] Fleckinger-Pellé J., & Takáč, P. An improved Poincaré inequality and the p -Laplacian at resonance for $p > 2$. Advances in Differential Equations, 7(8), 951-971.

PASSAGE THROUGH A CRITICAL ENERGY LEVEL IN A HAMILTONIAN SYSTEM WITH SLOW DEPENDENCE ON TIME

Bolotin S. V. (Russia, Moscow)

Moscow Steklov Mathematical Institute
bolotin@mi-ras.ru

We consider a smooth Hamiltonian system

$$\dot{q} = \partial_p H(z, \tau), \quad \dot{p} = -\partial_q H(z, \tau), \quad \dot{\tau} = \varepsilon \ll 1, \quad z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2d},$$

slowly depending on time. The energy $E(t) = H(z(t), \tau(t))$ changes slowly. For $\varepsilon = 0$ we obtain a frozen autonomous system with Hamiltonian H_τ depending on a parameter τ . If $d = 1$ and energy levels $\gamma_{\tau, E} = \{H_\tau = E\}$ are closed curves, for small ε , $(\tau(t), E(t))$ approximately follow level curves of the adiabatic invariant

$$I(\tau, E) = A(\gamma_{\tau, E}) = \oint_{\gamma_{\tau, E}} p dq.$$

For trajectories passing near a hyperbolic equilibrium $z_0(\tau)$ of the frozen system, the adiabatic invariant is destroyed. This case was studied by A. Neishtadt [1]. Without loss of generality let $H(z_0(\tau), \tau) \equiv 0$. Suppose the equilibrium has a figure 8 separatrix $\{H_\tau = 0\}$ which divides the plane in 3 regions $G_k(\tau)$. In the interior of $G_k(\tau)$ there is an adiabatic invariant $I_k(\tau, E)$, so $(\tau(t), E(t))$ shadows its level curves. When $E(t)$ approaches the critical level $E = 0$, the trajectory may be captured: $E(t)$ will stay near 0 for a long time, and $z(t)$ will shadow the separatrix, or scattered: $E(t)$ cross 0 and $z(t)$ will move into another region $G_{k'}(\tau)$. Then (τ, E) will shadow a level curve of $I_{k'}(\tau, E)$ till E reaches 0 again, and so on. We obtain a partial analog of Neishtadt's results for $d > 1$ constructing trajectories with $E(t)$ passing through the critical level [3]. Passage through noncritical levels was studied in [2].

Let $\alpha(\tau) = \min \operatorname{Re} \lambda$ for eigenvalues λ of $z_0(\tau)$. We call an eigenvalue λ leading if $|\operatorname{Re} \lambda| = \alpha(\tau)$. There are 2 generic cases:

1. Two real simple leading eigenvalues $\pm\alpha(\tau)$.
2. Four complex simple leading eigenvalues $\pm\alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$.

Let $W^\pm(\tau)$ be the stable and unstable manifolds of $z_0(\tau)$ and $W_{\text{strong}}^\pm(\tau) \subset W^\pm(\tau)$ the strong invariant manifolds corresponding to the nonleading eigenvalues. We call a transverse homoclinic orbit $\gamma_\tau : \mathbb{R} \rightarrow W^+(\tau) \cap W^-(\tau)$ leading if $\gamma_\tau(\mathbb{R}) \not\subset W_{\text{strong}}^+(\tau) \cup W_{\text{strong}}^-(\tau)$.

Let $P(\tau) = A(\gamma_\tau)$ be the Poincaré function and Δ an interval on which $P'(\tau) > 0$. Fix small $\delta > 0$. We assume that $\varepsilon > 0$ is small enough. Consider the complex case.

Theorem 1. *For any $\tau_0 \in \Delta$ there exists a trajectory $(z(t), \tau(t))$, $0 \leq t \leq T$, such that $\tau(0) = \tau_0$, $E(0) = \delta$, $E(T) = -\delta$, and $(\tau(t), E(t))$ shadows a level curve of*

$$I(\tau, E) = P(\tau) + \frac{E \ln |E|}{\alpha(\tau)} + O(|E|). \quad (1)$$

In the real case there exist $v_\pm(\gamma_\tau) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{\alpha(\tau)|t|} \dot{\gamma}_\tau(t)$. We call a leading homoclinic γ_τ positive if $\omega(v_+(\gamma_\tau), v_-(\gamma_\tau)) > 0$, where $\omega = dp \wedge dq$. Suppose there exist positive homoclinic γ_τ^1 , negative homoclinic γ_τ^2 , and $\omega(v_+(\gamma_\tau^1), v_-(\gamma_\tau^2)) > 0$. Suppose Poincaré's functions $P_k(\tau) = A(\gamma_\tau^k)$ satisfy $P_k'(\tau) > 0$, $\tau \in \Delta$. There exist functions $I_k(\tau, E)$ of the form (1) with $P = P_k$ such that the following holds.

Theorem 2. *For any $\tau_0 \in \Delta$ there exists a trajectory $(z(t), \tau(t))$, $0 \leq t \leq T$, such that $\tau(0) = \tau_0$, $E(0) = \delta$, $E(T) = -\delta$, such that $(\tau(t), E(t))$ shadows a level curve of I_1 for $E > 0$, and a level curve of I_2 for $E < 0$.*

References

- [1] A. Neishtadt, On the change in the adiabatic invariant on crossing a separatrix in systems with two degrees of freedom. *Prikl. Matem. Mekhan.*, vol. 51 (1987), 750–757.
- [2] V. Gelfreich, D. Turaev, Unbounded energy growth in Hamiltonian systems with a slowly varying parameter. *Comm. Math. Phys.*, vol. 283 (2008), 769–794.
- [3] S. Bolotin, Crossing of the critical energy level in Hamiltonian systems with slow time dependence. *Math. Notes*, vol. 110 (2021), 956–959.

AN EXAMPLE FOR BIFURCATION OF SOLUTIONS OF THE BASIC EQUATIONS
IN SEMICONDUCTORS

Borevich E. Z. (Russia, Saint Petersburg)
St.-Petersburg Electrotechnical University
danitschi@gmail.com

A simple mathematical model describing the mobile carrier transport in semiconductor devices is considered. Two functions $v(x)$ and $n(x)$ describing the electrostatic potential and the density of mobile electrons, satisfy for $0 < x < 1$ the system of equations [1]

$$\begin{cases} (D(|v'|)(n' - nv'))' = 0, \\ -v'' = f - n \end{cases} \quad (1)$$

and boundary conditions

$$v(0) = 0, \quad v(1) = v'(0) = v'(1) = E_0, \quad E_0 > 0. \quad (2)$$

The constant $f > 0$ represents a homogeneous density of ionized impurities, and $D(|v'|) > 0$ is the diffusion coefficient of electrons which depends on the electrical field. For all parameter f there exists a trivial solution $v(x) = E_0x$, $n(x) = f$ to problem (1)-(2). System (1)-(2) is equivalent to system of equations

$$\begin{cases} u = v', \\ D(|u + E_0|)(-u'' + fu + fE_0 + E_0u' + uu') = j, \\ v(0) = 0, \quad v(1) = v'(0) = v'(1) = E_0, \end{cases} \quad (3)$$

where j is the electron current density. Suppose that $j = fE_0D(E_0) + c$ and

$$\frac{E_0D'(E_0)}{D^2(E_0)} - 1 > 0.$$

Under such conditions the problem (3) has a bifurcational solutions of points f_k , $k = 1, 2, \dots$ [2].

References

- [1] Van Roosbroeck, W. Theory of flow of electrons and holes in Germanium and other semiconductors. Bell. Syst. Tech., 1950, 29, 560–607.
- [2] Grandall, M. G., Rabinowitz, P. H. Bifurcation for simple eigenvalues. J. Funct. Anal., 1971, 8, 321–340.

OPTIMAL TRAJECTORIES OF THE MARKOV-DUBINS HYBRID MODEL
WITH SEPARATION OF CONTROL OBJECTS

Bortakovsky A. S. (Russia, Moscow)
Moscow Aviation Institute (National Research University)
asbortakov@mail.ru

Evdokimova E. A. (Russia, Moscow)
Moscow Aviation Institute (National Research University)
evdokimovaekan@mail.ru

The paper considers a model of a hybrid system of variable dimension (HSVD) describing the plane motion of a group of controlled objects. Movement begins with one composite object (carrier), from which simple objects are separated during the functioning of the system. A modified Markov-Dubins model is used to describe the motion of the carrier [1,2,3]. The advantage of the model is that the curvature of the trajectory has no discontinuities, it changes linearly over time. In other words, the control object does not have shock effects, as in the well-known Markov-Dubins models. The trajectory of the carrier is a smooth connection of clotoids (Euler spirals) and rectilinear

sections. The switching of a hybrid system is considered to be the separation of simple objects from the carrier, while the number of controlled objects increases, therefore, the dimension of the system also increases. The classical Markov-Dubins model [2] is used for the movement of simple objects, the optimal trajectories of which are smooth connections of segments and arcs of circles.

The task is to find a control that ensures that simple objects achieve their fixed terminal positions (goals) as quickly as possible. The quality of control is assessed by the maximum time to achieve all goals, i.e. the task of group performance is solved.

The motion of the carrier is described by the equations

$$\dot{x}(t) = V \cos \gamma(t), \quad \dot{y}(t) = V \sin \gamma(t), \quad \dot{\gamma}(t) = \omega, \quad \dot{\omega}(t) = \varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq 1, \quad (1)$$

where x, y are plane coordinates, V is the magnitude of linear velocity, γ is the angle between the x axis and the direction of motion, ω is the angular velocity, ε is the angular acceleration. The initial state of the carrier is set: $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad \omega(0) = \omega_0$.

At the moment of switching \check{t} , n simple objects are separated from the carrier, the initial states of which coincide with the state of the carrier

$$x_i(\check{t}) = x(\check{t}), \quad y_i(\check{t}) = y(\check{t}), \quad \gamma_i(\check{t}) = \gamma(\check{t}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Separated simple objects move according to the equations

$$\dot{x}_i = V \cos \gamma_i, \quad \dot{y}_i = V \sin \gamma_i, \quad \dot{\gamma}_i = \omega_i, \quad |\omega_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

to achieve the specified terminal conditions (goals):

$$x_i(t_F^i) = x_F^i, \quad y_i(t_F^i) = y_F^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

where t_F^i – end time movement of the i -th object.

The quality of group control is assessed by the time of achievement of all goals:

$$T = \max_{i=1, \dots, n} \{t_F^i\}. \quad (5)$$

It is required to find the smallest value of the functional (5) and the control on which this value is achieved.

Using the maximum principle [4] for the carrier, it is shown that the optimal angular acceleration is either maximum in modulus (for turns) or equal to zero (for rectilinear motion). Optimal control of simple objects is known [2]. Therefore, to solve the problem, it is enough to find the optimal point of separation of control objects and build the optimal trajectory of the carrier falling at this point. Thus, the problem is reduced to finite-dimensional minimization. To solve the problem, an algorithm has been developed, the application of which is demonstrated by academic examples.

References

- [1] Markov A. A. Several examples of solving a special kind of problems about the largest and smallest quantities // Messages Kharkiv. Mat. Societies. 1889. Second series. Vol. I. P.250–276.
- [2] Dubins L. E. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American Journal Mathematics. 1957. Vol. 79. No. 3. P. 497–516.
- [3] Bortakovskiy A. S., Evdokimova E. A. Optimal trajectories of a hybrid model of plane motion of an aircraft // 20th International Conference "Aviation and Cosmonautics"(AviaSpace-2021). 22-26 November 2021. Moscow. Abstracts. Moscow: Publishing House "Pero". 2021. P. 412–413.
- [4] Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F., Mathematical theory of optimal processes. Moscow: Fizmatgiz. 1961.

GENERIC SOFT LOSS OF STABILITY IN OCEAN CIRCULATION BOX MODEL
WITH TURBULENT FLUXES⁸

Davydov A. A. (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University

National University of Science and Technology MISIS

davydov@vlsu.ru

Zosimov S. O. (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University

In the Wilander model [4] a homogeneous surface water layer of constant thickness is influenced by the atmosphere above it and the underlying deep water layer with constant temperature and salinity T_A, S_A and T_0, S_0 , respectively. The interaction between the layers is described by Newton's law, while for interaction with the atmosphere the exchange coefficients q_S and q_T for salinity and temperature are constant and satisfy the relation $0 < q_S < q_T$, and for turbulent exchange between two water layers, this coefficient is a function of the differences in the densities ρ and ρ_0 of the surface and deep layers, respectively. We will call this function *transfer function* and denote it by q_0 ; it is nondecreasing, having values being close to zero at significant negative values of this difference, and rapidly growing near zero.

After choosing the temperature, salinity and density of the deep water layer as zero for these indicators, the Wilander model takes the form

$$\begin{cases} \dot{T} = q_T(T_A - T) - q_0(\rho)T \\ \dot{S} = q_S(S_A - S) - q_0(\rho)S \end{cases} \quad (1)$$

where T and S are the temperature and salinity of the surface water layer. We take the dependence of the density of the surface layer of water on its temperature and salinity as a linear function

$$\rho = -\alpha T + \beta S \quad (2)$$

with $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ (as in many other works with similar models, for example, [2], [3], which provides a linear approximation near zero to any differentiable function $\rho = \rho(T, S)$ with zero value at zero and negative and positive derivatives at zero with respect to temperature and salinity, respectively).

As in [1], it is assumed that in the state of equilibrium of the surface water layer with the atmosphere, its temperature and density are higher than the temperature and density of the deep water layer, respectively, i.e. $T_A > 0$ and $-\alpha T_A + \beta S_A > 0$.

We show that for a generic smooth families of the considered transfer functions the analysis of the occurrence of self-oscillations of temperature and salinity in the model under study reduces to the analysis of the appearance of nontrivial fixed points of the composition of typical finite parametric smooth families of pairs of real line involutions with a common fixed point.

References

- [1] Davydov A.A., Melnikov N.B., Soft Loss of Stability in an Ocean Circulation Box Model with Turbulent Fluxes, Proc. Steklov Inst. Math., 259 (2007), 6–15.
- [2] Keane A., Pohl A., Dijkstra H.A., Ridgwell A., A simple mechanism for stable oscillations in an intermediate complexity Earth System Model // 2022, <https://arxiv.org/pdf/2201.07883.pdf>
- [3] Titz S., Kuhlbrodt T., Feudel U., Homoclinic bifurcation in an ocean circulation box model // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2002. V. 12, N 4. P. 869–875.
- [4] Welander P.A., A simple heat–salt oscillator // Dyn. Atmos. and Oceans. 1982. V. 6, N 4. P. 233–242.
- [3] Keller K., McInerney D. The dynamics of learning about a climate threshold // Clim. Dyn. 2007.

⁸The study was financially supported by the Russian Science Foundation, project no. 19-11-00223

THE ALGORITHM FOR CONSTRUCTING ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF NONLINEAR
SHALLOW WATER EQUATIONS IN BASINS WITH A GENTLY SLOPING BEACH⁹

Dobrokhotov S. Yu. (Russia, Moscow)

Ishlinsky Institute for problems in mechanics, RAS
s.dobrokhotov@gmail.com

Minenkov V. E. (Russia, Moscow)

Ishlinsky Institute for problems in mechanics, RAS
minenkov.ds@gmail.com

Nazaikinskii V. E. (Russia, Moscow)

Ishlinsky Institute for problems in mechanics, RAS
nazaikinskii@googlemail.com

We consider the problem of constructing solutions of a small amplitude of a nonlinear shallow water equations in a one or two-dimensional domain. We assume that the function $D(x, y)$ specifying the depth of the basin is smooth, and $\nabla D(x, y)$ on the set $D = 0$ (i.e., on the shoreline of the basin in the absence of waves). The smallness of the amplitude is characterized by a small parameter ε . The solution of the system is called a smoothly dependent triple (region, the free surface elevation, velocity), such that the sum of the free surface elevation and depth is positive inside the region and is zero at its boundary, and the functions themselves that define the free surface elevation and velocity are smooth in this region and satisfy nonlinear shallow water equations everywhere in the region. The asymptotic solution is determined in a similar way, only the equations must be satisfied with an accuracy up to some degree of a small parameter ε . We use a variable substitution (such as the simplified Carrier-Greenspan transformation) to construct asymptotic solutions of the Cauchy problem with small smooth initial data for nonlinear shallow water equations, depending on the unknown solution itself and transforming the domain in which the latter is defined into an undisturbed domain independent of the solution, and then the resulting nonlinear system is solved by standard methods of perturbation theory. As a zero approximation, a linear hyperbolic system with degeneracy at the boundary of the domain arises. One of the main results of the talk is formulated as follows.

Under the above assumptions about the depth function, nonlinear shallow water equations with small initial data has an asymptotic solution up to an arbitrarily high degree of the small parameter ε . This asymptotic solution is asymptotically unique.

We give precise constructive formulations of this and related other useful statements and describe the relationship with the results available in the literature, as well as examples, including for tsunami waves. The obtained solutions will also be compared with the results of a laboratory experiment.

References

- [1] S. Yu. Dobrokhotov, D.S. Minenkov, and V.E. Nazaikinskii, Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach, Russian Journal of Mathematical Physics, 2022, Vol. 29, No. 1, pp. 28–36.

ON THE STATIONARY NONEQUILIBRIUM STATES FOR THE "FIELD-CRYSTAL" SYSTEM

Dudnikova T. V. (Russia, Moscow)

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
tdudnikov@mail.ru

We consider a linear Hamiltonian system consisting of a real scalar Klein–Gordon field $\psi(x)$ and its momentum $\pi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, and a harmonic crystal described by the deviations $u(k) \in \mathbb{R}^n$ of

⁹The work was supported by the Russian Science Foundation (project 21-71-30011).

the particles (atoms, ions, etc.) and their velocities $v(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^d$. The Hamiltonian functional of the coupled field–crystal system reads

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\psi, \pi, u, v) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla \psi(x)|^2 + m_0^2 |\psi(x)|^2 + |\pi(x)|^2) dx \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} u(k) \cdot V(k - k') u(k') + |v(k)|^2 \right) \\ & + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} R(x - k) \cdot u(k) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Here $m_0 > 0$, the coupled function $R(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ is a smooth vector-valued function, exponentially decaying at infinity, “ \cdot ” denotes the inner product in \mathbb{R}^n , V is a real interaction matrix, $V(k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d, n \geq 1$. This model can be considered as the description of the motion of electrons (so-called *Bloch electrons*) in the periodic medium which is generated by the ionic cores. Understanding of this motion is one of the central problem of solid state physics.

We study the Cauchy problem with the initial data $Y_0 = (\psi_0, \pi_0, u_0, v_0)$. We assume that Y_0 belong to the phase space $\mathcal{E}_\alpha^s \equiv H_\alpha^{s+1} \oplus H_\alpha^s \oplus \ell_\alpha^2 \oplus \ell_\alpha^2$, where $H_\alpha^s \equiv H_\alpha^s(\mathbb{R}^d)$ denotes the weighted Sobolev space, $\ell_\alpha^2 \equiv \ell_\alpha^2(\mathbb{Z}^d)$ is the Hilbert space of vector-valued sequences $u(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^d$, with finite norm $\|\langle k \rangle^\alpha u(k)\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} < \infty$, $\langle k \rangle := \sqrt{k^2 + 1}$, $s, \alpha < -d/2$.

We assume that Y_0 is a random function of the form $Y_0(p) = \sum_{\pm} \zeta_{\pm}(p_1) Y_{\pm}(p)$, where $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{P}^d \equiv \mathbb{R}^d \cup \mathbb{Z}^d$, ζ_{\pm} are nonnegative cut-off functions equal to one for $\pm p_1 > a$ and zero for $\pm p_1 < -a$ with some $a > 0$, the random functions $Y_{\pm}(p)$ have Gibbs distributions $g_{\beta_{\pm}}$, $\beta_{\pm} = T_{\pm}^{-1}$, with temperatures $T_{\pm} > 0$. Given $t \in \mathbb{R}$, denote by μ_t the probability Borel measure in \mathcal{E}_α^s that gives the distribution of the random solution $Y(t) \equiv (\psi(\cdot, t), \pi(\cdot, t), u(\cdot, t), v(\cdot, t))$ with the random initial data Y_0 . The main result is the following theorem.

Theorem. *The measures μ_t weakly converge to a Gaussian measure μ_∞ as $t \rightarrow \infty$ on the space \mathcal{E}_α^s , $s, \alpha < -d/2$. The correlation matrix of μ_∞ is translation-invariant w.r.t. shifts in \mathbb{Z}^d . The explicit formulas for the limiting correlation functions are given.*

In non-equilibrium statistical mechanics, the heat flux is often calculated in models, which are an open system coupled to at least two reservoirs with different temperatures. These models differ in the description of the system, reservoirs and the type of interaction between them, see, e.g., [1]. Similar to these models, our system can be represented as a “system + two heat reservoirs”, where “reservoirs” are described by the solutions $Y(p, t)$ with coordinates lying in two regions with $p_1 \leq -a$ and $p_1 \geq a$, and an “open system” by the solutions with coordinates from the remaining part of the space. Initially, the reservoirs are assumed to be in thermal equilibrium with different temperatures T_- and T_+ . The limiting energy current density is $J = -c(T_+ - T_-, 0, \dots, 0)$, $c > 0$, i.e., the heat flows (on average) from the “hot reservoir” to the “cold” one. Thus, we prove that there exist stationary non-equilibrium states (or the probability limiting measures μ_∞), in which there is a non-zero heat flux in the studied model. For initial measures which are translation-invariant w.r.t. shifts in \mathbb{Z}^d , the weak convergence of μ_t was proved in [2]. For the Klein–Gordon fields, the similar results were obtained in [3], [4].

References

- [1] Bonetto F., Lebowitz J.L., Rey-Bellet L. Fourier law: a challenge to theorists // P. 128–150. In: Mathematical Physics 2000 (A. Fokas et al. (Eds)). London: Imperial College Press. 2000.
- [2] Dudnikova T.V., Komech A.I. On the convergence to a statistical equilibrium in the crystal coupled to a scalar field // Russian J. Math. Phys. 2005. Vol. 12. No 3. P. 301–325.
- [3] Dudnikova T.V., Komech A.I. On a two-temperature problem for the Klein–Gordon equation // Theory Probab. Appl. 2006. Vol. 50. No 4. P. 582–611.
- [4] Dudnikova T.V. Convergence to stationary non-equilibrium states for Klein–Gordon equations // Izvestiya: Mathematics. 2021. Vol. 85. No 5. P. 932–952.

ON THE NONWANDERING SET OF SIMPLEST SKEW PRODUCTS
ON n -DIMENSIONAL ($n \geq 2$) CELLS, CYLINDERS AND TORI

Efremova L. S. (Russia, Nizhny Novgorod)
Nizhny Novgorod State University
Moscow Institute of Physics and Technology
lefunn@gmail.com

Using results presented in the survey [1], we generalize methods of [2] and apply them to the description of the nonwandering set of continuous skew products in the following cases:

1. the set of periodic points is not empty (if the phase space is n -dimensional cylinder or a torus), and this set is closed for all maps under consideration;
2. the set of periodic points is empty for self-maps of n -dimensional ($n \geq 2$) cylinders and tori, and the nonwandering set is minimal.

References

- [1] Efremova L. S., Makhrova E. N., One-dimensional dynamical systems, Uspekhi Mat. Nauk; translation in Russian Math. Surveys, 76 (5), 821–881 (2021).
- [2] Efremova L. S., Dynamics of skew products of maps of an interval, Uspekhi Mat. Nauk; translation in Russian Math. Surveys, 72 (1), 101–178 (2017).

GENERATING MODEL OF THE REFERENCE SIGNAL
FOR THE TRACING CONTROL PROBLEM

Finoshin A. V. (Russia, Kaluga)
Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch
earlov@gmail.com

Dolgov J. A. (Russia, Moscow)
Academician Pilyugin Center NPCAP
yaroslaw2710@mail.ru

Zhulenko K. A. (Russia, Kaluga)
Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch
karina.zhulenko@yandex.ru

The tracing control problem is considered. The considered approach based on the reference signal can be presented as the output of the linear Generation model that is GM with specific precision. Reference model design is the significant problem especially if the reference signal either has complex shape or it is defined by tabular or graphical form. GM increases the tracing accuracy and reduces a time-lag even for simple reference signal compared to the reference model.

Consider the reference signal f is assigned by graphically or in tabular form over a finite time interval $f = \{f_1, f_2, \dots, f_{\bar{N}}\}$, where f_i is the value of function on t_i , $i = \overline{1..N}$. The method allows to determine the minimum order N and parameters $a_{N,j}$, $j = \overline{1, N}$ of the autoregressive model of reference signal [1]

$$f_k^0 = a_{N,1}f_{k-1}^0 - \dots - a_{N,N-1}f_{k-N+1}^0 - a_{N,N}f_{k-N}^0.$$

Then roots of characteristic polynomial of the autoregressive model are calculated. Then the continuousization of roots is performed. n roots match eigenvalues of \mathbf{A}_Γ of GM in state space. The remaining $N - n$ roots form the input η . If $n > N$ the matrix \mathbf{A}_Γ is extended by $n - N$ fast eigenvalues. Define GM as the continuous dynamic system with the order n is equal to the order of the control plant order, and the output approximates a signal f with the specific precision Δ_Γ

$$\dot{\mathbf{x}}_\Gamma = \mathbf{A}_\Gamma \mathbf{x}_\Gamma + \mathbf{B}_\Gamma \eta, \quad y_\Gamma = \mathbf{C}_\Gamma \mathbf{x}_\Gamma,$$

where $\mathbf{A}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n-1} & \\ -\tilde{\beta}_0 & \dots & -\tilde{\beta}_{n-1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_\Gamma = (0 \quad \dots \quad 1)^T$,

$$\mathbf{C}_\Gamma = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

$-\tilde{\beta}_0 \dots - \tilde{\beta}_{n-1}$ are coefficients selected from the characteristic polynomial based on the n roots. Weight coefficients $\eta(t)$ and initial conditions of a GM $\mathbf{x}_\Gamma(0)$ are calculated based on uncertain coefficients method taking into account values of the reference signal and its derivatives at zero.

If the reference signal is defined by the continuous function $f(t)$ then it is necessary to discretize them with a constant sampling step h . A sampling step holds conditions of the Kotelnikov-Shannon sampling theorem. Often the checking a theorem conditions is difficult so it is proposed to calculate the sampling step based on the Lipschitz constant. Incorrect choice of the sampling step leads part of the roots of the Characteristic polynomial are wrong. If the deviation between the output of the GM and the reference input is more than specified precision, it is necessary to reduce the sampling step.

References

- [1] Myshljaev J. I., Khaung P. K., Dolgov J. A. Synthesis of Tracking Algorithms for Linear Objects with a Generative Model of the Reference Signal. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2019; 20(2): 72-79. (In Russ.) <https://doi.org/10.17587/mau.20.72-79>.

MULTISTABILITY AND GLOBAL LIMIT CYCLE BIFURCATIONS IN AN EULER-LAGRANGE-LIÉNARD POLYNOMIAL SYSTEM

Gaiko V. A. (Belarus, Minsk)

National Academy of Sciences of Belarus

valery.gaiko@gmail.com

We consider an Euler-Lagrange-Liénard type equation

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x}^2 + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1)$$

and the corresponding dynamical system

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y - h(x)y^2. \quad (2)$$

There are many examples in the natural sciences and technology in which this and related systems are applied [1–6]. Such systems are often used to model either mechanical or electrical, or biomedical systems, and in the literature, many systems are transformed into Euler-Lagrange-Liénard type to aid in the investigations. They can be used, e. g., in certain mechanical systems, where $f(x)$ represents a coefficient of the damping force and $g(x)$ represents the restoring force or stiffness, when modeling wind rock phenomena and surge in jet engines. Such systems can be also used to model resistor-inductor-capacitor circuits with non-linear circuit elements. Recently, e. g., system (2) has been shown to describe the operation of an optoelectronics circuit that uses a resonant tunnelling diode to drive a laser diode to make an optoelectronic oscillator. There are also some examples of using such systems in ecology and epidemiology.

We suppose that system (2), where $g(x)$, $h(x)$ and $f(x)$ are arbitrary polynomials, has an anti-saddle (a node or a focus, or a center) at the origin and write it in the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 + a_1x + \dots + a_{2l}x^{2l}) + y(\alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_{2k}x^{2k}) \\ &\quad + y^2(c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n}). \end{aligned} \quad (3)$$

Following [1–5], we carry out a global qualitative analysis and study multistability and limit cycle bifurcations of the Euler-Lagrange-Liénard polynomial system (3) by means of canonical systems containing field rotation parameters [6].

Theorem 1. *The Euler-Lagrange-Liénard polynomial system (3) with limit cycles can be reduced to one of the canonical forms:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 + a_1x + \dots + a_{2l}x^{2l}) + y(\alpha_0 - \beta_1 - \dots - \beta_{2k-1} + \beta_1x \\ &\quad + \alpha_2x^2 + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_{2k}x^{2k}) + y^2(c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n}) \end{aligned} \quad (4)$$

or

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1+b_1x+\dots+b_{2l-1}x^{2l-1})+y(\alpha_0-\beta_1-\dots-\beta_{2k-1}+\beta_1x \\ &\quad +\alpha_2x^2+\dots+\beta_{2k-1}x^{2k-1}+\alpha_{2k}x^{2k})+y^2(c_0+c_1x+\dots+c_{2n}x^{2n}), \end{aligned} \quad (5)$$

where $1+a_1x+\dots+a_{2l}x^{2l}\neq 0$, $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ are field rotation parameters and $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$ are semi-rotation parameters.

By means of the canonical systems (4) and (5), we prove the following theorem [6].

Theorem 2. *The Euler–Lagrange–Liénard polynomial system (3) can have at most $k+l+1$ limit cycles, $k+1$ surrounding the origin and l surrounding one by one the other singularities of (3).*

References

- [1] Gaiko V. A. Global Bifurcation Theory and Hilbert’s Sixteenth Problem, Boston: Kluwer, 2003.
- [2] Gaiko V. A. On limit cycles surrounding a singular point // Differ. Equ. Dyn. Syst. – 2012. – Vol. 20. – P. 329–337.
- [3] Gaiko V. A. The applied geometry of a general Liénard polynomial system // Appl. Math. Letters. – 2012. – Vol. 25. – P. 2327–2331.
- [4] Gaiko V. A. Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. – 2012. – Vol. 4. – P. 242–254.
- [5] Gaiko V. A. Maximum number and distribution of limit cycles in the general Liénard polynomial system // Adv. Dyn. Syst. Appl. – 2015. – Vol. 10. – P. 177–188.
- [6] Gaiko V. A. Global bifurcation analysis of polynomial dynamical systems // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems, Basel: Springer Nature, 2020. – Vol. 139. – P. 83–101.

DETERMINATION OF THE HOMOTOPY TYPE OF A MORSE-SMALE DIFFEOMORPHISM ON AN ORIENTABLE SURFACE BY A HETEROCLINIC INTERSECTION¹⁰

Grines V. Z. (Russia, Nizhny Novgorod)

Laboratory of Dynamical Systems and Applications,
National Research University Higher School of Economics
vgrines@yandex.ru

Morozov A. I. (Russia, Nizhny Novgorod)

Laboratory of Dynamical Systems and Applications,
National Research University Higher School of Economics
andreifrostnn@gmail.com

Pochinka O. V. (Russia, Nizhny Novgorod)

Laboratory of Dynamical Systems and Applications,
National Research University Higher School of Economics
olga-pochinka@yandex.ru

This report is devoted to the study of homotopy types of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms on closed orientable surfaces. Since any Morse-Smale diffeomorphism has a finite set of periodic points, then, according to the Nielsen-Thurston classification, it is homotopic to either a periodic homeomorphism or an algebraically finite order homeomorphism. It follows from the results of V. Grines and A. Bezdenezhnykh that any gradient-like diffeomorphism is homotopic to a periodic homeomorphism. However, when the wandering set of a given diffeomorphism contains heteroclinic intersections, then the question of its homotopy type has remained open until now.

In the present work, it is proposed an algorithm for recognizing the homotopy type of a non-gradient-like Morse-Smale diffeomorphism by its heteroclinic intersection. The algorithm is based on the construction of a filtration for a diffeomorphism and calculation of the intersection index of

¹⁰The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. №075-15-2019-1931.

saddle separatrices in the fundamental annuli of filtration elements. It is established that a Morse-Smale diffeomorphism is homotopic to a periodic homeomorphism if and only if the total intersection index over all homotopic annuli is equal to zero.

ON GRADIENT-LIKE FLOWS WITHOUT HETEROCLINIC INTERSECTION¹¹

Gurevich E. Ya. (Russia, Nizhniy Novgorod)
NRU HSE
egurevich@hse.ru

We will say that gradient-like flow f^t belongs to a class $G(M^n)$, where M^n is connected closed oriented manifold of dimension $n \geq 3$, if:

- (a) Morse index (dimension of unstable manifold) of any saddle equilibrium state of the flow f^t equals either 1 or $n - 1$;
- (b) invariant manifolds of different saddle equilibria do not intersect.

Denote by ν_{f^t} and μ_{f^t} the numbers of saddle and node equilibria of the flow $f^t \in G(M^n)$ and set

$$g_{f^t} = (\nu_{f^t} - \mu_{f^t} + 2)/2.$$

Everywhere below \mathcal{S}_g^n stands for manifold which homeomorphic either to the sphere \mathbb{S}^n if $g = 0$ or to connected sum of $g > 0$ copies of $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Theorem 1. *Let $f^t \in G(M^n)$, $n \geq 2$. Then M^n is homeomorphic to $\mathcal{S}_{g_{f^t}}^n$.*

For $n = 2$ Theorem 1 immediately follows from [5] and for $n \geq 3$ it follows from [1], [2].

Theorem 2 below states that for manifolds \mathcal{S}_g^n , $n \geq 4$, the condition (b) implies the condition (a).

Theorem 2. *Let f^t be gradient-like flow on \mathcal{S}_g^n , $g \geq 0$, $n \geq 4$. If invariant manifolds of different saddle equilibria of f^t do not intersect, then Morse index of any saddle equilibrium equals 1 or $(n-1)$, that is $f^t \in G(\mathcal{S}_g^n)$. Moreover, there exists $k \geq 0$ such that $\nu_{f^t} = 2g + k$ and $\mu_{f^t} = k + 2$.*

For case $g = 0$ Theorem 2 is proved in [4], where necessary and sufficient conditions of topological equivalence of flows from class $G(\mathbb{S}^n)$, $n \geq 3$, where obtained. Theorem 2 allows to obtain topological classification of flows from class $G(\mathcal{S}_g^n)$, $g > 0$, in combinatorial terms using techniques of [4], [3].

For any $f^t \in G(\mathcal{S}_g^n)$ we put in correspondence a bicolor graph Γ_{f^t} which describes mutual arrangement of invariant manifolds of saddle equilibria of the flow f^t , and provide the following result.

Theorem 3. *Flows $f^t, f^{t'} \in G(\mathcal{S}_g^n)$ are topological equivalent iff their bicolor graphs $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f^{t'}}$ are isomorphic by means preserving colors isomorphism.*

References

- [1] Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // Topology and its Applications. 2002. Vol. 117. P. 335–344.
- [2] Grines V., Gurevich E., Pochinka O. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 208. No 1. P. 81–90.
- [3] Grines V., Gurevich E., Pochinka O., Malyshev D. On topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on the sphere \mathbb{S}^n ($n > 3$) // Nonlinearity. 2020. Vol. 33. No 12. P. 7088–7113.
- [4] Pilyugin S. Phase diagrams that determine Morse-Smale systems without periodic trajectories on spheres // Differ. Uravn. 1978. Vol. 14. No. 2. P. 245–254.
- [5] Smale S. Morse inequalities for a dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 66. P. 43–49.

¹¹Research is done under financial support of RFS, grant 21-11-00010.

Il'ichev A. T. (Russia, Moscow)
 Steklov Mathematical institute RAS
ilichev@mi-ras.ru

Shargatov V. A. (Russia, Moscow)
 National Research Nuclear University MePHI
shargatov@mail.ru

The results that are presented in this lecture are largely initiated by the studies given in [1] and [2]. The spectral stability of aneurysm-type solutions was studied in [3] in the absence of liquid inside the tube (the pressure control case). The authors found that the entire family of aneurysm-type solutions is spectrally unstable. In [4] the stability of the entire branch of aneurysm-type solutions in the presence of a fluid with zero mean flow was studied. It was found that solutions of the aneurysm type are still unstable. The authors of [5] undertook an analysis of the stability of solutions of the aneurysm type in the presence of a mean flow and found that if the flow velocity at infinity is sufficiently large, then these solutions can be spectrally stable. It is proved in [6] that for membrane tubes with localized inhomogeneity (thinning) of the wall a family of waves of smaller amplitude, which increases with the increasing of the inflation pressure, is spectrally stable. It is proved in [7] that a family of traveling solitary waves is stable if their propagation velocity is greater than a certain critical value. The stability of solitary waves in membrane tubes of finite length was considered in [8]. A survey on the spectral stability of weakly and fully nonlinear steady and running solitary waves in the ideal fluid-membrane tube system can be found in [9] (see also the references therein).

In all these papers, the fluid was considered ideal and the velocity profile was constant at each cross-section of the tube. At the same time, if we talk about an adequate blood model, it is known that the flow of blood in the arteries can be described by a non-Newtonian incompressible fluid. Viscosity plays a significant role in the further development of an aneurysm. In particular, the role of wall shear stress is essential for this process. However, we are not interested here in the process of further development of the aneurysm, the modeling of which goes beyond the framework of the theory of nonlinear elasticity.

We examine the stability of the family of bulging waves (aneurysms) in a fluid-filled axisymmetric membrane tube with the localized wall thinning. The problem of finding the unstable discrete spectrum of the linearized governing equations in the right half Ω^+ of the spectral parameter complex plane is equivalent to determining the zeroes of the Evans function, which locate in Ω^+ . To compute their number we evaluate the Evans function at some contour including an interval of the imaginary axis and then use the argument principle in the spirit of [10].

References

- [1] Epstein, M., Jonhston, C. On the exact speed and amplitude of solitary waves in fluid-filled elastic tubes // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 2001. 457. 1195–1213.
- [2] Fu, Y. B., Pearce, S. P., Liu, K. K. Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation // Int. J. Non Linear Mech. 2008. 43. 697–706.
- [3] Pearce, S. P., Fu, Y. B. Characterisation and stability of localised bulging/necking in inflated membrane tubes // IMA J. Appl. Math. 2010. 75. 581–602.
- [4] Il'ichev, A. T., Fu, Y. B. Stability of aneurysm solutions in a fluid-filled elastic membrane tube // Acta Mechanica Sinica. 2012. 28. 1209–1218.
- [5] Fu, Y. B., Il'ichev, A. T. Localized standing waves in a hyperelastic membrane tube and their stabilization by a mean flow // Maths Mech. Solids. 2015. 20. 1198–1214.
- [6] Il'ichev, A. T., Fu, Y. B. Stability of an inflated hyperelastic membrane tube with localized wall thinning // Int. J. Eng. Sci. 2014. 80. 53–61.
- [7] Il'ichev, A. T., Shargatov, V. A., Fu, Y. B. Characterization and dynamical stability of fully nonlinear strain solitary waves in a fluid-filled hyperelastic membrane tube // Acta Mechanica. 2020. 231. 4095–4110.

- [8] Fu, Y. B., Xie, Y. X. Stability of localized bulging in inflated membrane tubes under volume control // Int. J. of Eng. Sci. 2010. 48. 1242–1252.
- [9] Il'ichev, A. T. Dynamics and spectral stability of soliton-like structures in fluid-filled membrane tubes // Russian Math. Surveys. 2020. 75. 843–882.
- [10] Pego, R. L., Smereka, P., Weinstein, M. I. Oscillatory instability of travelling waves for KdV–Burgers equation // Physica D. 1993. 67. 45–65.

ON HYPERBOLICITY OF $SL(2, \mathbb{R})$ -COCYCLES OVER IRRATIONAL ROTATIONS

Ivanov A. V. (Russia, Saint-Petersburg)
 Saint-Petersburg State University
a.v.ivanov@spbu.ru

We study a skew-product map

$$F_A : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

defined for any $(x, v) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$ by

$$(x, v) \mapsto (\sigma_\omega(x), A(x)v),$$

where $\sigma_\omega(x) = x + \omega$ is a rotation of a circle \mathbb{T}^1 with irrational rotation number ω and $A : \mathbb{T}^1 \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ is a transformation of the form:

$$A(x) = R(\varphi(x)) \cdot Z(\lambda(x)).$$

Here $R(\varphi)$ denotes the rotation in \mathbb{R}^2 over an angle φ and $Z(\lambda) = \text{diag}\{\lambda, \lambda^{-1}\}$ is a diagonal matrix. It is assumed that C^1 -functions $\varphi : \mathbb{T}^1 \rightarrow 2\pi\mathbb{T}^1$, $\lambda : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the following conditions

- (H₁) $\{x \in \mathbb{T}^1 : \cos(\varphi(x)) = 0\} = \bigcup_{j=0}^N \{c_j\}$,
- (H₂) $\forall j = 0, \dots, N, C_1^{(j)}\varepsilon^{-1} \leq |\varphi'(x)| \leq C_2^{(j)}\varepsilon^{-1}, \forall x \in U_\varepsilon(c_j), \varepsilon \ll 1$,
- (H₃) $|\cos(\varphi(x))| \geq C_3 \quad \forall x \in \mathbb{T}^1 \setminus \bigcup_{j=0}^N U_\varepsilon(c_j)$,
- (H₄) $\text{ind}(\varphi) = 0$,
- (H₅) $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{T}^1$,

where C_k are positive constants, $U_\varepsilon(x)$ is a ε -neighborhood of a point $x \in \mathbb{T}^1$ and $\text{ind}(\varphi)$ stands for the index of a closed curve $\varphi(\mathbb{T}^1)$. Additionally, we assume that the functions φ and λ depend smoothly on a parameter $t \in [a, b] \in \mathbb{R}$ such that

$$(H_6) \quad \left| \frac{d\rho(c_j(t), c_k(t))}{dt} \right| > C_4 > 0, \quad \forall t \in [a, b], \quad j \neq k,$$

where ρ denotes the standard distance in \mathbb{T}^1 .

One may note that matrices $A_k = A(\sigma_\omega^k(x))$ appearing in the definition of the cocycle, corresponding to (1), admit an estimate $\|A_k\| \geq \lambda_0$ and are hyperbolic. However, $\|\prod A_k\|$ can be much smaller than $\prod \|A_k\|$. The obstacle to this fact is the presence of the critical set, which can be defined for the skew product (1) as

$$\mathcal{C}_0 = \bigcup_{j=0}^N \{c_j\}.$$

Each time a trajectory of a point $x \in \mathbb{T}^1$ under the rotation σ_ω falls into a small neighborhood of the set \mathcal{C}_0 , the hyperbolic properties of the cocycle are weakened. Since σ_ω is ergodic, every point $x \in \mathbb{T}^1$ reaches a small neighbourhood of \mathcal{C}_0 after some iterations. Thus, the hyperbolicity of the cocycle strongly depends on the dynamics of the critical set itself.

We apply the critical set method ([1]- [3]) to study how hyperbolic properties of the cocycle, corresponding to (1), are related to the rotation number and the parameter t . Using notions of primary and secondary collisions we formulate sufficient conditions on ω and t , which guarantee uniform (non-uniform) hyperbolicity of the cocycle.

References

- [1] Benedicks M., Carleson L. The dynamics of the Hénon map// Ann. Math. 1991. Vol. 133. P. 73-169.
- [2] Young L.-S., Lyapunov exponents for some quasi-periodic cocycles// Ergod. Th. & Dynam. Sys. 1997. Vol. 17, P. 483-504.
- [3] Lazutkin V.F. Making fractals fat// Reg. & Chaotic Dyn. 1999. Vol. 4. No. 1. P. 51-69.

RELAXATION CYCLES IN ONE NONLINEAR EQUATION WITH DELAY¹²

Kashchenko A. A. (Russia, Yaroslavl)
P. G. Demidov Yaroslavl State University
a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Consider a nonlinear equation

$$\dot{u} + u = \lambda F(u(t - T)), \tag{1}$$

where

$$F(x) = \begin{cases} b, & x \leq p_L, \\ f(x), & p_L < x < p_R, \\ d, & x \geq p_R, \end{cases}$$

here $p_L < 0 < p_R$, b and d are constants.

We assume that function $f(x)$ is piecewise-smooth, preserves its sign on the intervals $(p_L, 0)$ and $(0, p_R)$, and that if $f(x_0) = 0$, then $f'(x_0) \neq 0$. We consider positive, negative, and zero values of parameters b and d .

The aim of this study is constructing asymptotics of solutions of this equation and finding conditions on signs b and d for having a relaxation cycle of equation (1). We consider 9 cases of signs of b and d and find conditions on them and on function $f(x)$ for having a relaxation cycle – solution of equation (1). We find asymptotics, amplitude and period of these relaxation cycles.

GEOMETRY OF GENERALIZED VIRTUAL POLYHEDRA

Khovanskii A. G. (Canada, Toronto)
University of Toronto
askold@math.toronto.edu

I will discuss generalized virtual polyhedra and their mixed volumes. Mixed volumes of polyhedra and of virtual polyhedra appear in many problems of algebraic geometry and singularity theory related to geometry of toric varieties. It turns out that generalized virtual polyhedra are important for the theory of torus manifolds. Torus manifold is the main object in torus topology which generalizes algebraic geometry of toric varieties. In the talk I will deal with a pure geometrical part of this story, so I hope that the talk will be very understandable.

¹²This study was supported by the President of Russian Federation grant No MK-2510.2022.1.1.

MODEL FOR EMERGENCE AND DEVELOPMENT OF ROGUE-WAVES BASED
ON 3D NAVIER-STOKES EQUATIONS

Koptev A. V. (Russia, Saint-Petersburg)

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping

Alex.Koptev@mail.ru

Rogue-Waves (or Monster-Waves) is one of the most dangerous phenomena encountered by seafarers. Such waves can reach up to 20 meters high with a huge destructive force and often lead to disasters. A comprehensive study of the nature of waves of this type is one of the most important and urgent problem. We propose the model of wave formation based on 3D incompressible Navier – Stokes equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{1}{Re} \Delta w, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Where main unknown are velocity components u, v, w and pressure p . Re is Reynolds number, g is the gravity. It is proposed to consider the motion in deep water, so the flow area is assumed to be quite extensive and the influence of limiting surfaces can be ignored. Following the method of constructing solutions to the Navier-Stokes equations described in [1], we can show that there is exist a class of exact solutions to equations (1-4) corresponding to motion in deep water. Two solutions of this class look as [2]

Solution 1

$$u = -e^{\frac{6t}{Re}} (A_0 e^{x-2y-z} + B_0 e^{-x-y-2z}), \quad v = \frac{1}{2} e^{\frac{6t}{Re}} (-A_0 e^{x-2y-z} + 2C_0 e^{x+y+2z}),$$

$$w = \frac{1}{2} e^{\frac{6t}{Re}} (B_0 e^{-x-y-2z} - C_0 e^{x+y+2z}), \quad (5)$$

$$p - p_0 = -gz + e^{\frac{12t}{Re}} \left(\frac{1}{4} A_0 B_0 e^{-3y-3z} - \frac{3}{4} A_0 C_0 e^{2x-y+z} \right).$$

Solution 2

$$u = -e^{\frac{21t}{Re}} (A_0 e^{x-2y-4z} + B_0 e^{-x-4y-2z}), \quad v = \frac{1}{2} e^{\frac{21t}{Re}} (-A_0 e^{x-2y-4z} + 2C_0 e^{x+4y+2z}),$$

$$w = \frac{1}{2} e^{\frac{21t}{Re}} (B_0 e^{-x-4y-2z} - 4C_0 e^{x+4y+2z}), \quad (6)$$

$$p - p_0 = -gz + e^{\frac{42t}{Re}} \left(\frac{1}{4} A_0 B_0 e^{-6y-6z} + 3A_0 C_0 e^{2x+2y-2z} \right).$$

Where p_0 is pressure constant and A_0, B_0, C_0 are an arbitrary constants defined by initial conditions. Formulas (5-6) represent exact solutions of equations (1-4). They determine the fluid velocity and pressure in the entire area, both at depth and near the surface. The motion corresponding to formulas (5-6) is identical in its main characteristics to the motion with the formation of Rogue-Waves near the surface. Formulas (5-6) allow you to get the estimates of the wave appearance zone on the surface and calculate the wave profile. In particular is possible to expect the height of the wave h as a function of coordinates and time. For this purpose it is enough to suppose $z = h$ and $p - p_0 = 0$. If the values of constants are selected according to equalities $A_0 = 2, B_0 = \frac{1}{3}, C_0 = 1$, then for solutions 1 and 2 the wave profile is determined by

$$-ghe^{-h} + \frac{1}{6} e^{\frac{12t}{Re}} (e^{-3y-4h} - \frac{3}{2} e^{2x-y}) = 0,$$

$$-ghe^{2h} + \frac{1}{6}e^{\frac{42t}{Re}}(e^{-6y-4h} + 36e^{2x+2y}) = 0.$$

Those ratio present the transcendent equations with respect to unknown h . The numeral decisions of these equations are given by the value of height of wave above the surface of horizon as a function of coordinates x , y and time t . It's interesting to mark that values of h calculated from the previous equations can be both positive and negative. It corresponds to that a Rogue-Wave can be both as a large comb and as a large cavity.

References

- [1] Koptev A. V. Method for solving the Navier-Stokes and Euler equations of motion for incompressible media // J. of Mathematical Sciences. 2020. Vol.250. No1. New York. Springer.P. 254-255.
- [2] Koptev A. V. Deep water movement // Navier-Stokes equations and their applications. New York. Nova Science Publishers.Inc. 2021. P. 83-102.

ON MODULI FINITENESS CRITERION FOR MORSE-SMALE FLOWS ON SURFACES¹³

Kruglov V. E. (Russia, Nizhniy Novgorod)

National Research University Higher School of Economics

kruglovlava21@mail.ru

Two flows $f^t, f'^t: M \rightarrow M$ on a manifold M are called *topologically equivalent* if there exists a homeomorphism $h: M \rightarrow M$ sending trajectories of f^t into trajectories of f'^t preserving orientations of the trajectories. Two flows are called *topologically conjugate* if h sends trajectories into trajectories preserving not only directions but in addition the time of moving. To find an invariant showing the class of topological equivalence or topological conjugacy of flows in some class means to get a *topological classification* for one.

The *Morse-Smale flows* were introduced on the plane in the classical paper by A.A. Andronov and L.S. Pontryagin in [1]. The non-wandering set of such flows consists of a finite number of hyperbolic fixed points and finite number of hyperbolic limit cycles, besides, there is no a trajectory connecting saddle points. The most important for us combinatorial topological invariants for Morse-Smale flows are the *Leontovich-Maier's scheme* [2,3] for flows on the plane, the *Peixoto's directed graph* [4] for Morse-Smale flows on any closed surface and the *Oshemkov-Sharko's molecule* [5] for Morse-Smale flows on any closed surface.

J. Palis in [6] proved that the class of topological equivalence of a flow can contain any number of topological conjugacy classes, describing by analytical parameters called *moduli of stability*.

Any limit cycle generates a modulus equals to the period of the cycle. Additionally, in [7] it was proved that the presence of a cell bounded by limit cycles gives infinite number of moduli.

Theorem 1. *A Morse-Smale surface flow has finite number of moduli iff it has no a trajectory going from one limit cycle to another.*

Second, we use the complete topological classification with respect to equivalence for Morse-Smale surface flows [5], [6] by means of an *equipped graph* $\Upsilon_{\phi^t}^*$ describing dynamics of ϕ^t .

To distinguish topological conjugacy classes we add to the equipped graph an information on the periods of the limit cycles. It gives a new equipped graph $\Upsilon_{\phi^t}^{**}$. In this way we get the following result.

Theorem 2. *Morse-Smale surface flows ϕ^t, ϕ'^t without trajectories going from one limit cycle to another are topologically conjugate iff the equipped graphs $\Upsilon_{\phi^t}^{**}$ and $\Upsilon_{\phi'^t}^{**}$ are isomorphic.*

Acknowledgements. The results have been obtained in collaboration with O. Pochinka.

References

- [1] Andronov A. A., Pontryagin L. S. Rough systems // Doklady Akademii nauk SSSR. 1937. V. 14. N. 5. 247-250.

¹³The author is supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, grant No 075-15-2019-1931 of the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation.

- [2] Leontovich E. A., Mayer A. G. On trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories // Doklady Akademii nauk SSSR. 1937. V. 14. N. 5. 251–257.
- [3] Leontovich E. A., Mayer A. G. On scheme O cxeme, determining topological structure of partition into trajectories // Doklady Akademii nauk SSSR. 1955. V. 103. N. 4. 557–560.
- [4] Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds // Dynamical systems Proc. 1971.
- [5] Oshemkov A. A., Sharko V. V. On classification of Morse-Smale flows on 2-dimensional manifolds // Matematicheskiy sbornik. 1998. V. 189. N. 8. 93–140.
- [6] Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability // Astérisque. 1978. V. 51. 335–346.
- [7] Kruglov V., Pochinka O., Talanova G. On functional moduli of surface flows // Proceedings of the International Geometry Center. 2020. Vol. 13. No. 1. P. 49–60.
- [8] Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. Topological classification of Ω -stable flows on surfaces by means of effectively distinguishable multigraphs // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2018. Vol. 38. No. 9. P. 4305–4327.

ON COMPLETE CONTROLLABILITY OF A CLASS OF HIGHLY DEGENERATE 4-LEVEL
QUANTUM SYSTEMS WITH A “CHAINED” COUPLING HAMILTONIAN¹⁴

Kuznetsov S. A. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
Moscow Institute of Physics and Technology
kuznetsov.sa@phystech.edu

Pechen A. N. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
National University of Science and Technology "MISIS"
apechen@gmail.com

Our work explores the complete controllability problem [1], [2], [3] for a particular class of closed 4-level quantum systems which are described by the Hamiltonian

$$H = H_0 + u(t)V \tag{1}$$

with bare and coupling Hamiltonians H_0 and V respectively defined as follows

$$H_0 = \Omega \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & v_{12} & 0 & 0 \\ v_{12}^* & 0 & v_{23} & 0 \\ 0 & v_{23}^* & 0 & v_{34} \\ 0 & 0 & v_{34}^* & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Here $u(t)$ is an arbitrary function of time with real values, which represents the control performed by shaped laser field acting on the system, while H_0 and V itself remain constant with $v_{ij} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Similar systems arise in the analysis of second order traps for quantum control landscapes [4].

For real valued coefficients this system was studied in [5]. As our main contribution, we investigate properties of this system with regards to complete controllability for arbitrary non-zero complex values of the coefficients v_{12}, v_{23}, v_{34} . Specifically, we use a criteria provided by Polack, Thomas and Tannor [6] to show that the system is irreducible (i.e. it attains connectivity in every basis). Also, we apply a special recurrent procedure [7] to build and study a dynamical Lie algebra of the system. In terms of the following formulas

$$\begin{cases} C_0^1 = -iH_0 \\ C_0^2 = -iV \\ C_1^1 = [C_0^1, C_0^2] \\ C_k^n = \begin{cases} [C_0^1, C_{k-1}^n], & 1 \leq n \leq 2^{k-2} \\ [C_0^2, C_{k-1}^{n-2^{k-2}}], & 2^{k-2} + 1 \leq n \leq 2^{k-1} \end{cases} \quad (k \geq 2) \end{cases} \tag{3}$$

¹⁴This work is partially supported by the RSF grant 22-11-00330.

we prove that the set

$$\{C_0^1, C_1^1, C_2^1, C_2^2, C_3^2, C_3^4, C_4^2, C_4^4, C_4^6, C_5^4, C_5^{14}, C_5^{16}, C_6^{20}, C_6^{26}, C_6^{30}\} \quad (4)$$

forms a basis in the space of 4×4 skew-Hermitian matrices. It allows us to conclude that the dynamical Lie algebra is isomorphic to $\mathfrak{su}(4)$ and, according to the well-known theorem of complete controllability [1], the system is controllable.

References

- [1] Albertini F., D'Alessandro D. Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. Vol. 48. No. 8. P. 1399–1403.
- [2] Boscain U., Gauthier J-P., Rossi F., Sigalotti M. Approximate controllability, exact controllability, and conical eigenvalue intersections for quantum mechanical systems // Commun. Math. Phys. 2015. Vol. 333. Pp. 1225–1239.
- [3] Turinici G., Rabitz H. Quantum wavefunction controllability // Chem. Phys. 2001. Vol. 267. Pp. 1–9.
- [4] Pechen A. N., Tannor D. J. Are there traps in quantum control landscapes? // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 120402.
- [5] Schirmer S. G., Fu H., Solomon A. I. Complete controllability of quantum systems // Phys. Rev. A. 2001. Vol. 63. No. 6. P. 063410.
- [6] Polack T., Thomas H., Tannor D. J. Uncontrollable quantum systems: A classification scheme based on Lie subalgebras // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 79. No. 5. P. 053403.
- [7] D'Alessandro D. Introduction to Quantum Control and Dynamics, 2nd Edition. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC. 2021.

REAL VERSUS COMPLEX: ENUMERATION OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

Lando S. K. (Russia, Moscow)

National Research University Higher School of Economics

Skolkovo Institute of Science and Technology

lando@hse.ru

Relationship between the complex world, and the real world, which V. I. Arnold considered to be the physical one, was one of the most principal and most intriguing to him. In particular, he made important contributions [1, 2] to the Hurwitz problem about enumeration of ramified coverings of the sphere, both in the real, and in the complex case.

In the Hurwitz problem, one specifies ramification points (critical values) of the covering on the sphere, together with a ramification profile over each of these points. The number of complex ramified coverings is independent of the specific positioning of the ramification points. As usual, the real problem is much more difficult. In this case all ramification points must either be real, or split into complex conjugate pairs, and the number of real ramified coverings depends critically on the order of the real critical values.

The talk will address these problems and some recent progress [3, 4, 5] reached by Arnold's former students and followers.

References

- [1] V. I. Arnold, Topological Classification of Trigonometric Polynomials and Combinatorics of Graphs with an Equal Number of Vertices and Edges, *Funct. Anal. Appl.*, 30:1 (1996), 1–14.
- [2] V. Arnold, Topological classification of real trigonometric polynomials and cyclic serpents polyhedron, *The Arnold-Gelfand mathematical seminars*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997, 101–106.
- [3] I. Itenberg, D. Zvonkine, Hurwitz numbers for real polynomials, *Comment. Math. Helv.* 93 (2018), no. 3, 441–474, arXiv:1609.05219 (2016).
- [4] M. E. Kazarian, S. K. Lando, S. M. Natanzon, On framed simple purely real Hurwitz numbers, *Izv. Math.*, 85:4 (2021), 681–704.
- [5] B. Z. Shapiro, A. D. Vainshtein, Counting real rational functions with all real critical values, *Mosc. Math. J.*, 3:2 (2003), 647–659.

DERIVATIVE OF SUB-RIEMANNIAN GEODESICS IS L_p -HÖLDER CONTINUOUS

Lokutsievskiy L. V. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

lion.lokut@gmail.com

The talk will be devoted to the long-standing open problem on the smoothness of abnormal sub-Riemannian geodesics. I will show that the derivatives of abnormal sub-Riemannian geodesics are always L_p -Hölder continuous. This result has a number of interesting implications concerning (i) the Fourier coefficients decay on abnormal controls, (ii) the rate of their approximation by smooth functions, (iii) the corresponding generalization of the Poincare inequality, and (iv) the compact embedding of the set of shortest paths into the space of Bessel potentials. The result is obtained in the joint work with Mikhail I. Zelikin.

References

- [1] Lokutsievskiy L. V., Zelikin M. I. Derivatives of Sub-Riemannian geodesics are L_p -Hölder continuous, <https://arxiv.org/abs/2203.04956>

FEEDBACK CONTROL METHOD IN THE INVESTIGATION OF THE SCHLÖGL AND FITZHUGH–NAGUMO SYSTEMS

Maksimov V. I. (Russia, Ekaterinburg)

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, UB RAS

maksimov@imm.uran.ru

Last years, a part of mathematical control theory, namely, the theory of control for distributed systems, has been intensively developed. To a considerable degree, this is stimulated by the fact that a rather wide set of applied problems is described by such systems. At present, there exists a number of monographs devoted to control problems for distributed systems. In most of these works, the emphasis is on problems of program control in the case when all system's parameters are precisely specified. But the investigation of control problems for systems with uncontrollable disturbances (game or robust control problems) is also natural. Similar problems have been less investigated; in our opinion, this is connected with the fact that the well-known Pontryagin maximum principle is not really suitable for solving such problems. In the early 70'es, N.N. Krasovskii, working in Ekaterinburg, suggested an effective approach to solving guaranteed control problems. This approach is based on the formalism of positional strategies and extremal shift methods. In the report, we discuss applications of the feedback control method developed by the Ekaterinburg school to investigating some problems of guaranteed control and dynamical tracking of inputs and solutions of a parabolic equation with memory. This equation includes the Schlögl system

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y(\nu, t) - \Delta_L y(\nu, t) + R(y(\nu, t)) &= u(\nu, t) + f(\nu, t) \quad \text{in } Q_\vartheta \\ \partial_\mu y(\nu, t) &= 0 \quad \text{in } \Sigma_\vartheta \\ y(\nu, 0) &= y_0(\nu) \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

and the FitzHugh–Nagumo system

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y(\nu, t) - \Delta_L y(\nu, t) + R(y(\nu, t)) + z(\nu, t) &= u(\nu, t) - v(\nu, t) + f(\nu, t) \quad \text{in } Q_\vartheta \\ \partial_\mu y(\nu, t) &= 0 \quad \text{in } \Sigma_\vartheta \\ y(\nu, 0) &= y_0(\nu) \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} z(\nu, t) + \beta z(\nu, t) - \gamma y(\nu, t) + \delta^* &= 0 \quad \text{in } Q_\vartheta \\ z(\nu, 0) &= z_0(\nu) \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

In recent time, control problems for such systems have been actively discussed in works by German mathematician F. Tröltzsch [1], [2] and his colleagues as well by Austrian scientist K. Kunisch [3]. It should be noted that control and tracking problems for other classes of distributed equations with memory have been intensively investigated by L. Pandolfi, who brought a considerable contribution into control theory for distributed systems including the development of the method of regularized extremal shift.

References

- [1] Buchholz R., Engel H., Kanimann E., Tröltzsch F. On the optimal control of the Schlögl-model // Comput. Optim. Appl. 2013. Vol. 56. No. 1. P. 153–185.
- [2] Casas E., Ryll C., Tröltzsch F. Sparse optimal control of the Schlögl and FitzHugh–Nagumo systems // Comput. Methods Appl. Math. 2014. Vol. 13. No. 1. P. 415–442.
- [3] Bretten T., Kunisch K. Riccati-based feedback control of the monodromian equations with the FitzHugh–Nagumo model // SIAM J. Control Optim. 2014. Vol. 52. No. 6. P. 4057–4081.

LOCAL DYNAMICS OF A SECOND-ORDER EQUATION WITH A DELAY AT THE DERIVATIVE

Maslenikov I. N. (Russia, Yaroslavl)
P. G. Demidov Yaroslavl State University
igor.maslenikov16@yandex.ru

Consider a second-order differential equation with delayed feedback, which is an implementation of the modified Ikeda equation with a time delay:

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \delta y = F \left(\frac{dy}{dt}(t - \tau) \right). \quad (1)$$

Here ε and δ are small and proportional parameters $0 < \varepsilon \ll 1$, $\delta = k\varepsilon$, τ is a delay parameter, real and positive. The function F is sufficiently smooth, such that $F(0) = 0$. Thus, equation (1) has a zero equilibrium state. Let study the local dynamics in the vicinity of the equilibrium state, in the phase space $C_{[-1,0]}^1$. Note, that the problem under consideration is singularly perturbed.

The characteristic quasi-polynomial of the linearized at zero equation (1) has the form:

$$\varepsilon \lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda \beta_1 e^{-\lambda}. \quad (2)$$

It is shown that for $|\beta_1| < 1$, the zero equilibrium state is stable, and for $|\beta_1| > 1$, it is unstable. In critical cases $\beta_1 = \pm 1$, the characteristic equation has an infinite number of roots tending to the imaginary axis at $\varepsilon \rightarrow 0$. Thus, the critical cases have infinite dimension.

To study the behavior of solutions in β_1 close to -1 , the solution of problem (1) is reduced in the case under consideration to a partial differential equation (3) with boundary conditions (4):

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + kV - \frac{k^2}{2} J^2(V) + \beta V + \beta_2 J \left(U_1 \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \beta_3 J \left(\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 \right), \quad (3)$$

$$\int_0^1 V(\tau, t) dt = 0, \quad V(\tau, t) \equiv -V(\tau, t + 1). \quad (4)$$

Theorem 1. Let $V_*(\tau, t)$ be a bounded with its derivatives solution (3) with boundary conditions (4), where $V_*(\tau, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)it} V_n(\tau)$, then

$$y(t) = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i \operatorname{Im}(\lambda_{n0} + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} + \dots)t} V_n(\varepsilon^2 t) + \varepsilon \frac{\beta_2}{k} \int_0^1 \dot{V}^2(t, \varepsilon^2 t) dt,$$

is asymptotic in the residual with an accuracy of $O(\varepsilon^3)$ uniformly over $t \geq 0$ by the solution of (1).

Problem (3), (4) is an analog of normal form. It's solution determine main terry of asymptotic approximate for solution of (1). To study the behavior of solutions in the case of a close $\beta_1 = 1$, the

solution of the problem (1) is reduced in the case under consideration to the differential equation (5) and the partial differential equation (6) with boundary conditions (7):

$$W^\tau(\tau) = (\varepsilon\beta - \frac{k}{4})W(\tau) - \frac{2}{3}\beta_2^2\sqrt{ki}W^2(\tau)\overline{W}(\tau) + \frac{3}{2}\beta_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}kW^2(\tau)\overline{W}(\tau), \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 t} + kV - \frac{k^2}{2}J^2(V) + \beta V + \beta_3 J\left(\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3\right), \quad (6)$$

$$\int_0^1 V(\eta, t)dt = 0, \quad V(\eta, t) \equiv V(\eta, t+1). \quad (7)$$

$J(V)$ denotes the primitive function V with a zero mean:

$$J^2(V) = J(J(V)), \quad (J(V))'_t \equiv V.$$

For $\varepsilon\beta < \frac{k}{2}$, the solution of equation (5) tends to zero.

Theorem 2. Let $\varepsilon\beta < \frac{k}{2}$, let $V_*(\eta, t)$ be a bounded with its derivatives solution (6), (7), and $V_*(\eta, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi nit}V_n(\eta)$, then

$$y(t) = \varepsilon^2 \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \dots)t} V_n(\varepsilon^2 t)$$

is asymptotic with respect to the residual with an accuracy of $O(\varepsilon^3)$ uniformly over $t \geq 0$ solution (1).

Theorem 3. Let $\varepsilon\beta > \frac{k}{2}$, let $W_*(\tau)$ is a stable solution (5), then

$$y(t) = \varepsilon^{\frac{1}{4}}(W_*(\varepsilon t)e^{i\sqrt{\varepsilon kt}} + \overline{W}_*(\varepsilon t)e^{-i\sqrt{\varepsilon kt}}) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

is a periodic stable solution (1).

A-FLOWS AND CHAOTIC LAMINATIONS¹⁵

Medvedev V. S. (Russia, Nizhniy Novgorod)

Laboratory of Dynamical Systems and Applications
National Research University Higher School of Economics
medvedev@unn.ac.ru

Zhuzhoma E. V. (Russia, Nizhniy Novgorod)

Laboratory of Dynamical Systems and Applications
National Research University Higher School of Economics
zhuzhoma@mail.ru

We consider two-dimensional basic sets of flows satisfying axiom A (A-flows) on a closed orientable 3-manifold M^3 . Such basic sets are one-dimensional chaotic laminations of topological dimension two. It was proved by authors that given any closed 3-manifold M^3 , there is an A-flow f^t on M^3 such that the non-wandering set $NW(f^t)$ consists of a non-orientable two-dimensional expanding attractor and trivial basic sets. In particular, there is a nonsingular A-flow f^t on a 3-sphere S^3 such that the non-wandering set $NW(f^t)$ contains an orientable two-dimensional expanding attractor. The natural question is what topological structure of basins of 2-dimensional expanding attractors. The main results are the following statements.

Theorem 1. Let f^t be an A-flow on an orientable closed 3-manifold M^3 such that the non-wandering set $NW(f^t)$ contains a 2-dimensional non-mixing attractor Λ_a . Then there is a compactification $M(\Lambda_a)$ of the basin $W^s(\Lambda_a)$ by the family of circles l_1, \dots, l_k such that

¹⁵The authors are supported by the grant RNF 22-21-00304.

- $M(\Lambda_a)$ is a closed orientable 3-manifold;
- the restriction $f^t|_{W^s(\Lambda_a)}$ is extended continuously to the structurally stable nonsingular flow \tilde{f}^t on $M(\Lambda_a)$ with the non-wandering set $NW(\tilde{f}^t) = \Lambda_a \cup_{i=1}^k l_i$ where l_1, \dots, l_k are the repelling isolated periodic trajectories of \tilde{f}^t ;
- the family $L = \{l_1, \dots, l_k\} \subset M(\Lambda_a)$ is a fibered link in $M(\Lambda_a)$.

Theorem 2. Let $\{l_1, \dots, l_k\} \subset M^3$ be a fibered link in a closed orientable 3-manifold M^3 . Then there is a nonsingular A-flow f^t on M^3 such that the non-wandering set $NW(f^t)$ contains a two-dimensional non-mixing attractor and the repelling isolated periodic trajectories l_1, \dots, l_k .

Corollary. Let $\{l_1, \dots, l_k\} \subset M^3$ be a fibered link in a closed orientable 3-manifold M^3 . Then there is a one-dimensional foliation \mathcal{F} on M^3 containing a chaotic laminations of topological dimension two such that \mathcal{F} has the compact isolated leaves l_1, \dots, l_k .

ON 2-DIMENSIONAL EXPANDING ATTRACTORS OF A-FLOWS¹⁶

Medvedev V. S. (Russia, Nizhniy Novgorod)
 Laboratory of Dynamical Systems and Applications
 National Research University Higher School of Economics
medvedev@unn.ac.ru

Zhuzhoma E. V. (Russia, Nizhniy Novgorod)
 Laboratory of Dynamical Systems and Applications
 National Research University Higher School of Economics
zhuzhoma@mail.ru

A-flows was introduced by S.Smale. This class of flows contains structurally stable flows including Morse-Smale flows and Anosov flows. Due to Smale's Spectral Theorem, the non-wandering set of A-flow is a disjoint union of closed transitive invariant pieces called basic sets. Important type of basic sets are expanding attractors introduced by R.Williams. The minimal topological dimension of expanding attractor for A-flows equals two. The natural question is what closed manifolds admits A-flows with 2-dimensional expanding attractors. The main results are the following statements.

Theorem 1. Given any closed 3-manifold M^3 , there is an A-flow f^t on M^3 such that the non-wandering set $NW(f^t)$ consists of a non-orientable two-dimensional expanding attractor and trivial basic sets.

Theorem 2. There is a nonsingular A-flow f^t on a 3-sphere S^3 such that the non-wandering set $NW(f^t)$ contains an orientable two-dimensional expanding attractor.

Theorem 3. Given any closed n -manifold M^n , $n \geq 4$, there is an A-flow f^t on M^n such that the non-wandering set $NW(f^t)$ contains an orientable two-dimensional expanding attractor.

GENERALIZED SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LIE ALGEBRA STRUCTURE

Miller B. M. (Russia, Moscow; Australia, Melbourne)
 IITP RAS
 Monash University
bmiller@iitp.ru

Consider the system described by the differential equation, which is affine in an unbounded control

$$\dot{X}(t) = B(X(t), t)w(t), \quad (1)$$

¹⁶The authors are partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of Science and Higher Education of the RF grant ag. № 075-15-2019-1931.

with control $w \in K$, where $K \in R^m$ is a convex cone. The control $w(t)$ corresponds to the controls which are unbounded in the norm but restricted in the integral sense so that $w(t)$ satisfies the constraint

$$\int_0^T \|w(t)\| dt \leq M < \infty. \quad (2)$$

with some constant M .

The equation in (1) is affine with respect to a control variable $w(t)$. This type of controls admits the generalized inputs such as δ – functions which could produce the jumps of phase variable $X(t)$ [1]. The general representation of solution is given by Theorem 2.14 [2].

Suppose that $f(x)$ and $g(x)$ are two smooth vector-fields in R^n .

Definition 1. The *product or the Lie bracket* $[f, g]$ of two smooth vector-fields in R^n will be defined as

$$[f, g](x) = f'_x(x)g(x) - g'_x(x)f(x),$$

where $f'_x(x)$, $g'_x(x)$ are $(n \times n)$ matrices of partial derivatives of the vector-field components. If $[f, g] = 0$, then the pair of the vector-fields f, g will be called *commutative*.

Theorem 1. In the commutative case that is if the columns of matrix function $B(x, t)$ satisfies $[B_i, B_j] = 0$ for all i, j the general solution of the system

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^N B_i(X(t))w_i(t) \quad (3)$$

with the initial condition $X(0) = x_0$, admits the representation

$$X(t) = \Phi_N(\xi_N(t), \Phi_{N-1}(\xi_{N-1}(t), \dots, \Phi(\xi_1(t), x_0) \dots)), \quad (4)$$

where

$$\xi_k = \int_0^t w_k(s) ds,$$

and $\Phi_k(t, y)$ is the solution of the differential equation

$$\dot{y}(t) = B_k(y(t)), \quad y(0) = y. \quad (5)$$

The same representation one can be obtained if the columns of matrix function $B(x, t)$ are in involution.

Definition 2. The set of the vector-fields $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$ will be called *involution* if the Lie brackets of any f_i, f_j are the linear combinations of $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$, i.e. there exists the set of constants $\{c_{i,j}^k, i, j, k = 1, \dots, N\}$ such that

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^N c_{i,j}^k f_k. \quad (6)$$

The set $\{c_{i,j}^k, i, j, k = 1, \dots, N\}$ will be called *the set of structural constants* of the Lie algebra $\mathcal{L}\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ generated by vector-fields $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$.

Theorem 3. If the columns of matrix function $B(x, t)$ are in involution the general solution of (3) admits representation (4), where functions $\vec{\xi}(t) = \{\xi_i(t)\}$ corresponding to controls $\vec{w}(t) = \{w_i(t)\}$ are the solution of the system

$$L(\vec{\xi})\dot{\vec{\xi}}(t) = \vec{w}(t), \quad \vec{\xi}(0) = 0, \quad (7)$$

where analytical functions $L^{i,j}$ depend on the structural constants of the Lie algebra $\mathcal{L}\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$.

To obtain the representation like (4) in a general case, when functions $\{f_i\}$ are in involution (see Def. 2), we need the following

Lemma 1. *Let $\Phi_i(\xi, y) \in R^N$, where $\xi \in R^1$, $y \in R^N$, be a solution of the differential equation*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_i(\xi, y) = f_i(\Phi_i(\xi, y)) \quad (8)$$

with the initial condition

$$\Phi_i(0, y) = y.$$

Suppose that the set of functions $\{f_i, i = 1, \dots, N\}$ satisfies (6), so they are in involution. Then for any $i, j = 1, \dots, N$ we have the relation

$$\frac{\partial \Phi_i(\xi, y)}{\partial y} f_j(y) = \sum_{k=1}^N \gamma_{ij}^k(\xi) f_k(\Phi_i(\xi, y)), \quad (9)$$

where $\gamma_{ij}^k(\xi)$ are the analytical functions depending on the structural constants of the Lie algebra $\mathcal{L}\{f_1, \dots, f_N\}$ only.

The detailed derivations of further relations are in [1], pp. 178–185, and in [2], pp. 236–244. Some examples of these methods applied to systems with involution properties are given in the above monographs.

References

- [1] Miller B. M. and Rubinovich E. Ya. Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.
- [2] Miller B. M. and Rubinovich E. Ya. Optimization of Dynamical Systems with Impulse Controls and Shocks (in Russian). M: LENAND, 2019.

ON DIFFERENTIAL EQUATIONS OF INTEGRABLE BILLIARD TABLES

Mironov A. E. (Russia, Novosibirsk)

Sobolev institute of mathematics

mironov@math.nsc.ru

We introduce a method to find differential equations for functions which define tables, such that associated billiard systems admit a local first integral. We illustrate this method in three situations: the case of (locally) integrable wire billiards, for finding surfaces in \mathbb{R}^3 with a first integral of degree one in velocities, and for finding a piece-wise smooth surface in \mathbb{R}^3 homeomorphic to a torus, being a table of an integrable billiard.

ON OPTIMIZATION OF COHERENT AND INCOHERENT CONTROLS
IN SOME OPEN QUANTUM SYSTEMS¹⁷

Morzhin O. V. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies
morzhin.oleg@yandex.ru

Pechen A. N. (Russia, Moscow)

apechen@gmail.com
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies
National University of Science and Technology “MISIS”

Control of quantum systems (e.g., individual atoms, molecules) is an important direction in modern quantum technologies [1–4]. Typically in experimental situations controlled systems are open. Environment is often considered as having deleterious effects on the dynamics. However, it also can be used for controlling the system. A powerful method of incoherent control for any N -level systems, including in combination with coherent control, was found and studied in [5]. In this case, spectral density of the environment, i.e., distribution of particles of the environment in their momenta and internal degrees of freedom, is used as the incoherent control function to manipulate the system. This spectral density is often considered as thermal (Planck distribution), but in general it can be any non-equilibrium non-negative function, possibly depending on time, of momenta and internal degrees of freedom of environmental particles. Numerical simulations were performed for an explicit example of four-level systems using global search optimization by genetic algorithms. Initially for this incoherent method it was not clear to what degree it allows for manipulating the system. In [6], a significant advance was achieved where it was shown that certain two-stage sequential in time combination of coherent and incoherent controls allows to approximately steer any initial density matrix (d.m.) to any given target d.m. This property approximately realizes controllability of open quantum systems in the set of all d.m. — the strongest possible degree of quantum state control. Also [6] gives a numerical example for the case with $N = 2$.

Based on [5, 6], the works [7–11] consider some one- and two-qubit ($N = 2, 4$) open quantum systems evolved via the Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad master equation $\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_S + \varepsilon H_{\text{eff},n(t)} + H_{u(t)}, \rho(t)] + \varepsilon \mathcal{L}_{n(t)}(\rho(t))$, $\rho(0) = \rho_0$ with N -order d.m. $\rho(t)$, simultaneous coherent u (it enters into the Hamiltonian) and incoherent n (in general, it enters into both the Hamiltonian (via Lamb shift) and the dissipative superoperator $\mathcal{L}_{n(t)}$) controls from various classes, with various objective functionals to be minimized / maximized and represented, e.g., by the squared Hilbert–Schmidt distance, $\|\rho(T) - \rho_{\text{target}}\|^2$, between the final d.m., $\rho(T)$, and a given target d.m., ρ_{target} , the Hilbert–Schmidt scalar product (mean value), $\langle \rho(T), \rho_{\text{target}} \rangle$, the Uhlmann–Jozsa fidelity, etc., with use of the Pontryagin maximum principle [11], Gabasov second order necessary condition for optimality [8], various iterative optimization methods. Also some modification of the two-stage method is constructed [10]. An important goal of the study is analysis of optimal control structures, trajectories, for such cases as singular controls. For accelerating such computations, e.g., multi-step gradient projection methods are under study. Moreover, such an objective functional can be extended for constraining the evolution of d.m. over the whole time interval.

References

- [1] Glaser S. J., Boscain U., Calarco T., Koch C. P., Köckenberger W., Kosloff R., Kuprov I., Luy B., Schirmer S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F. K. // *Eur. Phys. J. D.* 2015. Vol. 69. Art. No 279.
- [2] Tannor D. J. *Introduction to Quantum Mechanics: A Time Dependent Perspective.* Sausalito, CA, Univ. Science Books, 2007.
- [3] Brif C., Chakrabarti R., Rabitz H. // *New J. Phys.* 2010. Vol. 12. Art. No 075008.

¹⁷The talk represents the results partially supported by the RSF (project 22-11-00330), Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (projects 0718-2020-0025, 075-15-2020-788).

- [4] D'Alessandro D. Introduction to Quantum Control and Dynamics. 2nd Ed. 2021.
- [5] Pechen A., Rabitz H. // Phys. Rev. A. 2006. Vol. 73. Art. No 062102.
- [6] Pechen A. // Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84. Art. No 042106.
- [7] Morzhin O. V., Pechen A. N. // Int. J. Theor. Phys. 2021. Vol. 60. P. 576–584.
- [8] Morzhin O. V., Pechen A. N. // Phys. Part. Nucl. 2020. Vol. 51. P. 464–469.
- [9] Morzhin O. V., Pechen A. N. // Lobachevskii J. Math. 2021. Vol. 42. P. 2401–2412.
- [10] Morzhin O. V., Pechen A. N. // Proc. Steklov Inst. Math. 2022. (In preparation).
- [11] Morzhin O. V., Pechen A. N. // Lobachevskii J. Math. 2022. (In preparation).

SOME CONTROLLABLE AND UNCONTROLLABLE DEGENERATE
FOUR-LEVEL QUANTUM SYSTEMS

Myachkova A. A. (Russia, Dolgoprudny)
Moscow Institute of Physics and Technology
miachkova.aa@phystech.edu

Pechen A. N. (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
National University of Science and Technology "MISIS"
apechen@gmail.com

Establishing controllability of quantum systems is an important topic in quantum control [1,2,3,4,5]. In this talk, we discuss some our results on controllability of a class of four-level quantum systems with given free Hamiltonian and interaction Hamiltonian. The free Hamiltonian is a diagonal matrix $H_0 = \text{diag}(a, b, c, c)$, where a, b and c are not equal one to another, and the interaction Hamiltonian has the form

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_{13} & v_{14} \\ 0 & 0 & v_{23} & v_{24} \\ v_{13}^* & v_{23}^* & 0 & v_{34} \\ v_{14}^* & v_{24}^* & v_{34}^* & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

where matrix elements satisfy the additional constraint

$$v_{13}v_{23}^* + v_{14}v_{24}^* = 0. \quad (2)$$

We find some particular values of the parameters for which the system is controllable, and some values for which the system is not controllable.

For the controllable case, a basis of 16 matrices forming a Lie algebra was numerically constructed. In this case the algebra generated by all independent commutators iH_0, iV has dimension N^2 , and the system is controllable. During the proof and consideration of special cases we obtained a set of criteria, the satisfaction of which guarantees the controllability of the system. On the contrary, we show that for $|v_{13}| = |v_{23}|$ the system ceases to be controllable. The same happens if $v_{34} = 0$. For these cases, we conduct a study of the states for reducibility by searching for operators commuting with both H_0 and V .

References

- [1] Schirmer S. G., Fu H., and Solomon A. I. Complete controllability of quantum systems // Physical Review. A. 2001. Vol. 63. No 063410.
- [2] Ramakrishna V, Salapaka M. V, Dahleh M., et al. Controllability of molecular systems // Phys. Rev. A. 1995. Vol. 51. No 2. P. 960-966.
- [3] Turinici C. and Rabitz H. Wavefunction controllability in quantum systems // J. Math. Phys. 2003. Vol. 36. No 10.
- [4] Polack T., Suchowski H., and Tannor D. J. Uncontrollable quantum systems: A classification scheme based on Lie subalgebras. // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 79. No 053403.

- [5] Bloch M., Brockett R.W., and Rangan C. Finite controllability of infinite-dimensional quantum systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55, No 8. P.1797–1805.
- [6] Boscain U., Gauthier J.-P., Rossi F. and Sigalotti M. Approximate controllability, exact controllability, and conical eigenvalue intersections for quantum mechanical systems. // Commun. Math. Phys. 2013. Vol. 333, No 3.

EQUATIONS GENERATED BY THE FRACTIONAL HARDY–SOBOLEV INEQUALITY,
AND THEIR PERTURBATIONS¹⁸

Nazarov A. I. (Russia, Saint Petersburg)
PDMI RAS and St. Petersburg State University
al.il.nazarov@gmail.com

We consider linear and non-linear equations related to the fractional Hardy–Sobolev inequality. We prove nondegeneracy of ground state solutions to the basic equation and investigate existence and qualitative properties, including symmetry of solutions to some perturbed equations.

This talk is based on the joint paper with R. Musina [1].

References

- [1] Musina R., Nazarov A. I. Complete classification and nondegeneracy of minimizers for the fractional Hardy-Sobolev inequality, and applications // J. Diff. Eqs. 2021. Vol. 280. P.292–314.

SOLUTION OF THE 33RD PALIS-PUGH PROBLEM FOR GRADIENT-LIKE
DIFFEOMORPHISMS OF A TWO-DIMENSIONAL SPHERE¹⁹

Nozdrinova E. V. (Russia, Nizhny Novgorod)
Laboratory of Dynamical Systems and Applications
National Research University Higher School of Economics
maati@mail.ru

The problem of the existence of an arc with no more than a countable (finite) number of bifurcations connecting structurally stable systems (Morse-Smale systems) on manifolds is on the list of fifty Palis-Pugh problems under number 33. In 1976, S. Newhouse, J. Palis, F. Takens introduced the concept of a stable arc connecting two structurally stable systems on a manifold. Such an arc does not change its quality properties with a little perturbation. In the same year, S. Newhouse and M. Peixoto proved the existence of a simple arc (containing only elementary bifurcations) between any two Morse-Smale flows. For Morse-Smale diffeomorphisms given on manifolds of any dimension, examples of systems that cannot be connected by a stable arc are known. In this direction, the question naturally arises of finding an invariant that uniquely determines the equivalence class of the Morse-Smale diffeomorphism with respect to the relation of the connection by a stable arc. In the report we give an answer to the question for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere is obtained. We prove that there exists countable many of equivalence classes of such systems.

¹⁸ Author’s work was supported by the RFBR grant 20-01-00630.

¹⁹The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. №075-15-2019-1931.

CRITERION FOR THE EXISTENCE OF A CONNECTED CHARACTERISTIC SPACE OF ORBITS
IN A GRADIENT-LIKE DIFFEOMORPHISM OF A SURFACE²⁰

Nozdrinova E. V. (Russia, Nizhny Novgorod)
Laboratory of Dynamical Systems and Applications,
National Research University Higher School of Economics
maati@mail.ru

Tsaplina E. V. (Russia, Nizhny Novgorod)
Laboratory of Dynamical Systems and Applications,
National Research University Higher School of Economics
ktsaplina11@mail.ru

The classical approach to the study of dynamical systems is to single out a dual attractor-repeller pair, which are attractive and repulsive sets for all other trajectories of the system. If it is possible to choose a dual pair of attractor-repeller in such a way that the space of orbits in their complement (the characteristic space of orbits) is connected, then this creates the prerequisites for finding complete topological invariants of the dynamical system. Thus, the complete topological classification of Morse-Smale 3-diffeomorphisms is essentially based on the presence of a connected characteristic space of orbits associated with the choice of a one-dimensional dual attractor-repeller pair. The report will present a criterion for the existence of a connected characteristic space of orbits for gradient-like diffeomorphisms on surfaces, and also construct. Gradient-like diffeomorphism without a connected characteristic space on orientable and non-orientable surfaces of any kind.

ON ONE BIFURCATION OF LIOUVILLE TORI IN THE PROBLEM OF VORTEX DYNAMICS²¹

Palshin G. P. (Russia, Dolgoprudny)
Moscow Institute of Physics and Technology (national research university)
palshin.gp@phystech.edu

Consider one generalized model of vortex dynamics. The model includes two special cases: a model of N interacting *magnetic* vortices in ferromagnets [1] and a model of N *hydrodynamic* vortices in an ideal fluid [2]. The vortices are at positions $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$. They are characterized by constant intensities Γ_α and polarities λ_α , which take values $+1$ or -1 depending on magnetization directed up or down respectively. The ideal fluid case is reached under the condition of equality of polarities: $\lambda_1 = \dots = \lambda_N$.

In this work, a *restricted* model of three vortices is considered. The restriction consists in fixing one of the vortices at the origin of the Cartesian plane. Equations of motion of such a system can be written in Hamiltonian form:

$$H = \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} \ln \ell_1 + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} \ln \ell_2 + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\lambda_1 \lambda_2} \ln \ell_{12}, \quad \Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1)$$

where $\ell_\alpha = |r_\alpha|$ and $\ell_{\alpha\beta} = |r_\alpha - r_\beta|$. In addition, this system has an integral of the *angular momentum of vorticity* $F = \Gamma_1 \ell_1^2 + \Gamma_2 \ell_2^2$, so it is completely Liouville integrable system with two degrees of freedom.

The main role in the study of such dynamical systems is played by the *bifurcation diagram* Σ of the momentum mapping $\mathcal{F}(z) = (F(z), H(z))$. In the restricted system of three magnetic vortices in the case of equal intensities $\Gamma_1 = \Gamma_2$ and positive polarities $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a bifurcation diagram contains *one-into-three* tori bifurcation (Fig. 1). Here \mathbb{T}^2 denotes the presence of a two-dimensional Liouville torus in the preimage of the momentum mapping. Such a bifurcation was found in another generalized vortex model [3] (at equal vortex intensities) and in the integrable case of Goryachev-Chaplygin-Sretensky in the dynamics of a rigid body [4].

²⁰The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. №075-15-2019-1931.

²¹The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant no. 20-01-00399.

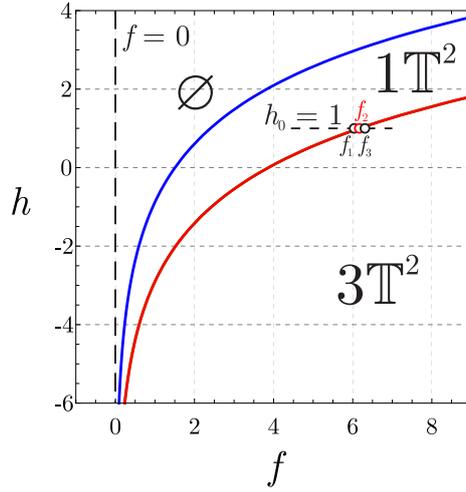


Fig. 1: Bifurcation diagram Σ for parameters $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

For the system (1) an explicit reduction to a Hamiltonian system with one degree of freedom was performed. The bifurcation of one torus into three occurs as follows: $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1) \rightarrow 3\mathbb{T}^2$. With the help of the reduced Hamiltonian level curves in Fig. 2, this bifurcation is clearly visible ($h_0 = 1$, $f_1 = 6.05$, $f_2 = 6.1665$, $f_3 = 6.3$).

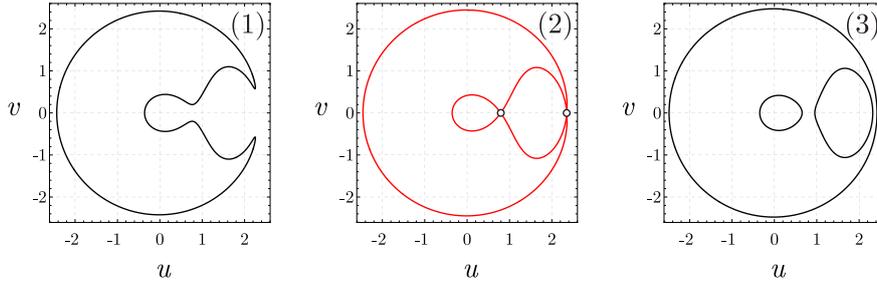


Fig. 2: Hamiltonian level lines corresponding to the one-into-three bifurcation

The author expresses his gratitude to Professor P. E. Ryabov for posing the problem and attention to this work.

References

- [1] Komineas S., Papanicolaou N. Gröbli solution for three magnetic vortices // J. Math. Phys. 2010. Vol. 51. No 4. P.042705.
- [2] Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine Angew Math. 1858. Vol. 55. P.25–55.
- [3] Ryabov P.E., Shadrin A.A. Bifurcation diagram of one generalized integrable model of vortex dynamics // Regul. Chaotic Dyn. 2019. Vol. 24. No 4. P.418–431.
- [4] Kharlamov M.P. Topological analysis of integrable problems of rigid body dynamics. Leningrad: Leningr. Gos. Univ. 1988.

ON RESOLVENT APPROXIMATIONS IN HOMOGENIZATION

Pastukhova S. E. (Russia, Moscow)
MIREA – Russian Technological University
pas-se@yandex.ru

In the space \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, we consider the equation of an arbitrary even order $2m \geq 4$

$$\begin{aligned} u^\varepsilon \in H^m(\mathbb{R}^d), \quad (A_\varepsilon + 1)u^\varepsilon = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ A_\varepsilon = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}^\varepsilon(x) D^\beta), \end{aligned} \quad (1)$$

with ε -periodic coefficients $a_{\alpha\beta}^\varepsilon(x) = a_{\alpha\beta}(y)|_{y=\varepsilon^{-1}x}$, $\varepsilon > 0$ is a small parameter. Here, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ is a multiindex of length $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$, $\alpha_i \geq 0$ are integers; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}$, $D_i = D_{x_i}$, $i = 1, \dots, d$; the coefficients $a_{\alpha\beta}(y)$ are real, measurable, 1-periodic ($Y = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ is a periodicity cell) and satisfy the conditions (C):

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(Y)} \leq \lambda_1, \quad \forall \alpha, \beta, |\alpha| = |\beta| = m,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta \varphi D^\alpha \varphi dx \geq \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \varphi|^2 dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

with some positive constants λ_0 and λ_1 .

It is well known [1] that the family $\{A_\varepsilon\}_\varepsilon$ G -converges to the limit operator \hat{A} of the same class (C) but with constant coefficients, namely, $\hat{A} = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta$. Recently, it was proved

[2] that $(A_\varepsilon + 1)^{-1} = (\hat{A} + 1)^{-1} + O(\varepsilon^2)$ in the operator norm in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Now, we find the following approximation for the resolvent $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ in the energy operator norm $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^d)}$:

$$(A_\varepsilon + 1)^{-1} = (\hat{A} + 1)^{-1} + \varepsilon^m K_m(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} K_{m+1}(\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (2)$$

where $K_m(\varepsilon)$ and $K_{m+1}(\varepsilon)$ are certain correctors.

As for the solution u^ε to (1), relation (2) means that

$$\|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad C = \text{const}(\lambda_0, \lambda_1, d),$$

where we set

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon^m \sum_{|\gamma|=m} N_\gamma(x/\varepsilon) \Theta^\varepsilon D^\gamma u(x) + \varepsilon^{m+1} \sum_{|\delta|=m+1} N_\delta(x/\varepsilon) \Theta^\varepsilon D^\delta u(x).$$

Here, $u = (\hat{A} + 1)^{-1} f$; $N_\gamma(y)$ and $N_\delta(y)$, for all indices γ , $|\gamma| = m$, and δ , $|\delta| = m + 1$, are solutions to the cell problems on Y ; Θ^ε is the appropriate ε -smoothing operator needed due to lack of regularity of data in (1), e.g., $\Theta^\varepsilon = S^\varepsilon S^\varepsilon$ and S^ε is the Steklov smoothing operator,

$$(S^\varepsilon \varphi)(x) = \int_Y \varphi(x - \varepsilon\omega) d\omega, \quad Y = [-1/2, 1/2]^d.$$

Asymptotic of type (2) was earlier [3] found under conditions (C) without assuming symmetry of coefficients $a_{\alpha\beta}$. In this case, the asymptotic turns to be more complicated in comparison with (2). Instead of the classical homogenized operator \hat{A} , we have here the new kind homogenized operator $\hat{A}_\varepsilon = \hat{A} + \varepsilon B$, where the operator $B = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m, |\delta|=m+1} D^\alpha b_{\alpha\delta} D^\delta$ has order $2m + 1$ and

the constant coefficients $b_{\alpha\delta}$ are calculated in terms of the afore-mentioned solutions N_γ and N_δ to the cell problems whereas the coefficients of \hat{A} are calculated only in terms of N_γ .

To prove all these results, we apply the approach proposed in [4], [5] (see also [6]).

References

- [1] Zhikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A., Ngoan H. T., Averaging and G -convergence of differential operators// Russian Math. Surveys 1979. Vol.34. No 5. P.69–147.
- [2] Pastukhova S. E. Approximation of resolvents in homogenization of higher order elliptic operators// J. Math. Sciences 2020. Vol. 251. No 6. P.902–925.
- [3] Pastukhova S. E. Improved approximations of resolvents in homogenization of higher order operators// J. Math. Sciences 2021. Vol. 259. No 2. P.230–243.
- [4] Zhikov V. V. On operator estimates in homogenization theory// Dokl. Math. 2005. Vol.72. P.535–538.
- [5] Zhikov V. V., Pastukhova S. E. On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russian Journal of Math. Physics 2005. Vol. 12. No 4. P.515–524.
- [6] Zhikov V. V., Pastukhova S. E. Operator estimates in homogenization theory// Russian Math. Surveys 2016. Vol.71. P.417–511.

GRAPE METHOD FOR OPEN QUANTUM SYSTEMS DRIVEN
BY COHERENT AND INCOHERENT CONTROLS²²

Petruhanov V. N. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
Moscow Institute of Physics and Technology
vadim.petrukhanov@gmail.com

Pechen A. N. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
National University of Science and Technology “MISIS”
Moscow Institute of Physics and Technology
apechen@gmail.com

Quantum control which studies methods for manipulation of individual quantum systems is an important tool necessary for development of quantum technologies [1]. Often in experimental circumstances controlled systems can not be isolated from the environment, so that they are open quantum systems. Moreover, in some cases the environment can be used for actively controlling quantum systems, as for example in incoherent control [2,3]. While in some cases the solution for the optimal shape of the control can be obtained analytically, often it is not the case and various numerical optimization methods are needed. Large class of methods are gradient-based numerical optimization algorithms, one of which is Gradient Ascent Pulse Engineering (GRAPE) developed originally for design of NMR pulse sequences [4] and later applied to various problems, e.g. [5,6].

In this talk, we consider generalization of GRAPE method to the case of open quantum systems driven by coherent and incoherent controls [7]. We obtain analytic expression for gradient of Mayer-type functional with respect to piecewise constant control for general N -level quantum systems. Then one-qubit system is considered in more details. In this case, the state of the system can be represented by vector in Bloch ball. Due to low dimension the corresponding 3×3 matrix exponentials can be analytically diagonalized; for that we compute eigenvalues of the right-hand side matrix of the system evolution equation. We find that in the case of constant coherent and incoherent controls $u \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{R}_+$, the half-plane $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (u, n)$ can be divided into two domains with different dynamics, similar to phase diagram. In suitable coordinates, the dividing these two domains curve is a plane cubic curve with cusp. We also illustrate the performance of the algorithm for the problem of steering the system from a given initial state to a given final state in a fixed time. Moreover, we compute gradient and Hessian (in the sense of Fréchet) of the objective functional with respect to controls in the functional space L^2 , i.e., without piecewise constant assumption on the controls.

References

- [1] Glaser S. J., Boscain U., Calarco T., Koch C. P., Köckenberger W., Kosloff R., Kuprov I., Luy B., Schirmer S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F. K. Training Schrödinger’s cat: quantum optimal control // *Eur. Phys. J. D.* 2015. Vol. 69. P.279.
- [2] Pechen A., Rabitz H. Teaching the environment to control quantum systems // *Phys. Rev. A.* 2006. Vol. 73. P.062102.
- [3] Pechen A. N. Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // *Phys. Rev. A.* 2011. Vol. 84. P.042106.
- [4] Khaneja N., Reiss T., Kehlet C., Schulte-Herbrüggen T., Glaser S. J. Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms // *Journal of Magnetic Resonance.* 2005. Vol. 172. P.296-305.
- [5] De Fouquieres P., Schirmer S. G., Glaser S. J., Kuprov I. Second order gradient ascent pulse engineering // *Journal of Magnetic Resonance.* 2011. Vol. 212. P.412-417.
- [6] Pechen A. N., Tannor D. J. Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps // *Israel Journal of Chemistry.* 2012. Vol. 52. P.467-472.

²²This talk presents the work partially funded by Russian Federation represented by the Ministry of Science and Higher Education under grant No.075-15-2020-788 and the Russian Science Foundation under grant No.22-11-00330.

- [7] Petruhanov V.N., Pechen A.N. Gradient ascent pulse engineering for open quantum systems driven by coherent and incoherent controls (in preparation).

SHADOWING IN THE NEIGHBORHOOD OF A HYPERBOLIC EQUILIBRIUM POINT
FOR FRACTIONAL PROBLEMS²³

Piskarev S. I. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
piskarev@gmail.com

This talk is devoted to the shadowing in the neighborhood of a hyperbolic equilibrium point u^* of the abstract semilinear fractional Cauchy problem

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad u(0) = u^0,$$

in a Banach space E , where D_t^α is the Caputo-Dzhrbashyan derivative ($0 < \alpha < 1$), the operator A generates an analytic and compact C_0 -semigroup $\exp(\cdot A)$ and the function $f(\cdot)$ is smooth enough [1,2]. We are considering existence of solution of the problem

$$D_t^\alpha v(t) = A_{u^*}v(t) + F_{u^*}(v(t)),$$

$$Pv(T) = Pv^+, (I - P)v(0) = (I - P)v^-.$$

We show that such a decomposition of the equation keeps the same structure under general approximation schemes. The main assumption of our results are naturally satisfied, in particular, for operators with compact resolvents and can be verified for finite element as well as finite difference methods.

References

- [1] Liu Ru, Piskarev Sergey. Approximation of semilinear fractional Cauchy problem: II. // Semigroup Forum. 2020. Vol. 101, P. 751–768.
[2] Liu Ru, Li Miao and Piskarev Sergey. Approximation of Semilinear Fractional Cauchy Problem. // Comput. Methods Appl. Math. 2015, Vol. 15, Issue 2, P. 203–212.
[3] Siegmund S., Piskarev S. Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations. // Nonlinear Dynamics (NODY), 2019, Vol. 95, Issue 1, P. 685–697.

NON-SINGULAR MORSE-SMALE FLOWS WITH THREE PERIODIC ORBITS
ON ORIENTABLE 3-MANIFOLDS²⁴

Pochinka O. V. (Russia, Nizhny Novgorod)
Laboratory of Dynamical Systems and Applications,
National Research University Higher School of Economics
olga-pochinka@yandex.ru

Shubin D. D. (Russia, Nizhny Novgorod)
Laboratory of Dynamical Systems and Applications,
National Research University Higher School of Economics
schub.danil@yandex.ru

The topological equivalence of non-singular Morse-Smale flows under assumptions of various generalities is considered in a number of papers. However, in the case of a small number of orbits, the

²³This work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation, project no. 20-11-20085.

²⁴The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. №075-15-2019-1931.

known invariants can be significantly simplified and, most importantly, the classification problem can be brought to realization by describing the admissibility of the obtained invariants. In a recent paper, an exhaustive classification of flows with two orbits on arbitrary closed n -manifolds was obtained. In this talk, a complete topological classification is obtained for flows with three periodic orbits given on orientable 3-manifolds.

A KNON AS A COMPLETE INVARIANT OF MORSE-SMALE 3-DIFFEOMORPHISMS
WITH FOUR FIXED POINTS²⁵

Pochinka O. V. (Nizhny Novgorod)

Laboratory of Dynamical Systems and Applications,
National Research University Higher School of Economics
olga-pochinka@yandex.ru

Talanova E. A. (Russia, Nizhny Novgorod)

National Research University Higher School of Economics
eltalanova@rambler.ru

Gradient-like flows on 3-manifolds with exactly four fixed points allow only lens spaces. This fact is a direct consequence of the existence of a Morse function with four critical points and Morse inequalities on the same 3-manifold. A similar question for gradient-like diffeomorphisms is open today. One of the approaches to solving this problem is to find a complete invariant of the topological conjugacy of the cascades under consideration and build a model representative in each conjugacy class based on the abstract invariant. With the help of such an algorithm Ch. Bonatti and V. Grines proved that the topological conjugacy of gradient-like 3-diffeomorphisms with a single saddle point is completely determined by the equivalence of Hopf knots on the manifold $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, which are the projection of a one-dimensional saddle separatrix. In this paper, a similar result is established for gradient-like 3-diffeomorphisms with exactly two saddle points and a single heteroclinic curve.

ATTAINABLE SET FOR A 2-STEP FREE CARNOT GROUP WITH POSITIVE CONTROLS²⁶

Podobryaev A. V. (Russia, Pereslavl-Zalessky)

A. K. Ailamazyan Program Systems Institute of RAS
alex@alex.botik.ru

We consider a control system on a 2-step free Carnot group with positive controls in the first layer of the corresponding Lie algebra. We suggest an approach to find the attainable set for such control system. This attainable set has a probability interpretation.

A 2-step free Carnot group of rank r is the set $G = \mathbb{R}^r \times \Lambda^2 \mathbb{R}^r$ equipped with the multiplication rule $(x, y) \cdot (x', y') = (x + x', y + y' + x \wedge x')$ for $x, x' \in \mathbb{R}^r$ and $y, y' \in \Lambda^2 \mathbb{R}^r$.

We consider the left-invariant control system

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = x \wedge u, \quad u = (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r, \quad u_1, \dots, u_r \geq 0.$$

Our goal is a description of the attainable set \mathcal{A} from the point $(0, 0)$ for this control system.

For any set of positive numbers (c_1, \dots, c_r) consider a *dilation* that is a map $D_{c_1, \dots, c_r} : G \rightarrow G$ such that $D_{c_1, \dots, c_r}(x, y) = (c_i x_i, c_i c_j y_{ij})$ for $i = 1, \dots, r, i < j$. Note that dilations preserve our control system. Denote by $\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \in \mathcal{A} \mid x = (1, \dots, 1)\}$ the section of the attainable set. Since \mathcal{A} coincides with the closure of the orbit of \mathcal{A}_1 with respect to dilations, then it is sufficient to describe the section \mathcal{A}_1 . Let us consider the set $\mathcal{B} = \frac{1}{2}((1, \dots, 1)^T + \mathcal{A}_1)$ instead of the set \mathcal{A}_1 .

²⁵The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. №075-15-2019-1931.

²⁶The work is supported by the Russian Science Foundation under grant 22-21-00877 (<https://rscf.ru/en/project/22-21-00877/>) and performed in Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences.

H. Abels and È. B. Vinberg [1] suggested a probability interpretation of the set \mathcal{B} . We give an alternative proof of the following theorem based on the geometric control theory [2].

Theorem 1. ([1]) *Let ξ_1, \dots, ξ_r be independent random variables such that $P(\xi_1 = \dots = \xi_r) = 0$. The points of the set \mathcal{B} have the coordinates $p_{ij} = \frac{1}{2}(y_{ij} + 1) = P(\xi_i < \xi_j)$.*

In paper [1] the attainable set \mathcal{A} was regarded as a 2-step nilpotent Lie semigroup of rank r and the set \mathcal{B} was described for $r = 3$ with the help of an algebraic method. The result implies some not obvious bounds for probabilities $P(\xi_i < \xi_j)$. But it seems that the method is unapplicable in more complex cases $r > 3$.

We propose a constructive and algorithmic approach for $r = 3$. The conjecture is that this method will be useful also for $r > 3$.

The idea is to consider the time-optimal problem on the group G and then to describe extremal trajectories that come to the boundary of the attainable set. These are optimal trajectories for a reduced problem. We find extremal trajectories with the help of the Pontryagin maximum principle [2,3]. Then, second order optimality conditions due to A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze [4] distinguish optimal trajectories. More exactly, we get the number of control switchings for different kinds of optimal trajectories (bang-bang, singular and mixed). This implies a parametrization of the boundary $\partial\mathcal{A}$. The answer is given in the terms of the set \mathcal{B} .

Theorem 2. (1) *The set \mathcal{B} for $r = 3$ is a curved polyhedron carved from the cube $[0, 1]^3$ with (p_{12}, p_{23}, p_{31}) -coordinates by the surfaces $p_{12} + p_{23}p_{31} = 1$, $(1 - p_{12}) + (1 - p_{23})(1 - p_{31}) = 1$ and surfaces obtained from these surfaces by any permutations of these variables.*

(2) *The vertices, edges and faces of \mathcal{B} correspond to the endpoints of the extremal trajectories of the time optimal problem with not more than 2, 3 and 4 switchings, respectively.*

Theorem 3. *The boundary of the set \mathcal{B} for $r = 4$ can be obtained by extremal trajectories of the time-optimal problem with not more than 8 switchings of the control.*

References

- [1] Abels H., Vinberg È. B. On free two-step nilpotent Lie semigroups and inequalities between random variables // J. Lie Theory. 2019. Vol. 29. No. 1. P. 79–87.
- [2] Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Vol. 87. Springer-Verlag. 2004.
- [3] Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Pergamon Press, Oxford. 1964.
- [4] Agrachev A. A., Gamkrelidze R. V. Symplectic geometry for optimal control. Nonlinear controllability and optimal control. Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. Vol. 133, P. 263–277. Dekker, New York. 1990.

ON RECONSTRUCTION PROBLEM FOR A QUASI-LINEAR STOCHASTIC EQUATION UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY²⁷

Rozenberg V. L. (Russia, Yekaterinburg)

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS

rozen@imm.uran.ru

We consider a stochastic differential equation with state-dependent diffusion:

$$dx(t, \omega) = (A(t)x(t, \omega) + B(t)u_1(t) + f(t)) dt + U_2(t)x(t, \omega) d\xi(t, \omega). \quad (1)$$

Here, $t \in T = [0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x(0, \omega) = x_0$ is a known deterministic or random (normally distributed) vector; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) is a probability space, $\xi(t, \omega) \in \mathbb{R}$ is a standard scalar Wiener process; $A(t)$, $B(t)$, and $f(t)$ are continuous matrix functions of dimension $n \times n$, $n \times r$, and $n \times 1$, respectively. Two external disturbances act on the system: vectors $u_1(t) \in \mathbb{R}^r$ and $u_2(t) \in \mathbb{R}^n$ (the main diagonal of a diagonal matrix $U_2(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$) with values from given convex compact sets; both functions are of

²⁷The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2022-874).

bounded variation. The input u_1 enters into the deterministic term and influences the mathematical expectation of the desired process, whereas the vector u_2 regulates the amplitude of random noises.

There exists a unique solution of equation (1) defined as a stochastic process satisfying corresponding integral identity containing the Ito integral for any t with probability 1. The problem under discussion is as follows. At discrete, frequent enough, times $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0 : l]$, the information on some number N of realizations of the stochastic process $x(\tau_i)$ is received, at that only q ($q \leq n$) first coordinates are measurable. It is required to design an algorithm for the dynamical reconstruction of unknown disturbances $u_1(t)$ and $u_2(t)$. The probability of an arbitrarily small deviation of approximations from the desired inputs in L_2 -metric should be close to 1 for sufficiently large N and the time discretization step $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$ concordant with N in an appropriate way.

The specific properties of equation (1) admit the reduction of the problem to an inverse problem for a nonlinear system of ordinary differential equations describing the mathematical expectation and covariance matrix of the desired process. To solve the latter problem, a finite-step ($l(N)$ identical steps) solving algorithm based on the approach within the theory of dynamic inversion [1] is designed.

In connection with the lack of incoming information, a block-identifier is introduced for the dynamical reconstruction of unmeasured coordinates to get the information on the whole phase state. This information is fed to a block-controller forming (by the feedback law) model controls to approximate real disturbances synchronously with the process. We denote the output of the algorithm by $(u_1^N(\cdot), u_2^N(\cdot))$ emphasizing the dependence of all its parameters on the number N of available trajectories of (1). In the report, we discuss new (comparing with previous results; see, for example [2]) assumptions on the structure of equation (1), which are sufficient to prove

Theorem. *The accuracy of the algorithm is estimated as*

$$P \left(\max_{i=1,2; n_1=r, n_2=n} \{ \|u_i^N(\cdot) - u_i(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^{n_i})} \} \leq h(N) \right) = 1 - g(N), \quad (2)$$

where $h(N)$, $g(N) \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$ and can be written explicitly.

The realization of the algorithm, the choice of its parameters, and the character of convergence in estimate (2) are illustrated by a model example.

References

- [1] Osipov Yu. S., Kryazhinskii A. V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London.: Gordon and Breach. 1995.
- [2] Rozenberg V. L. Reconstruction of random-disturbance amplitude in linear stochastic equations from measurements of some of the coordinates // Comput. Math. Math. Phys. 2016. Vol. 56. No. 3. P. 367–375.

ASYMPTOTIC MODELLING OF INTERFACES IN KIRCHHOFF-LOVE'S PLATES THEORY

Rudoy E. M. (Russia, Novosibirsk)

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS

rem@hydro.nsc.ru

In the present work, we consider a composite structure consisting of two plates glued together by a third one (adhesive layer) along some common interfaces. The structure is in equilibrium under the action of applied forces. The composite plate is fixed on the parts of the external boundary. The equilibrium problem (case of pure bending) is formulated as a variational one. Namely, a minimization of the energy functional over a set of admissible deflections of the composite plate in the space H^2 . It means that the deflections of each plates are described by biharmonic equations. And on the common boundaries the condition of equality of the deflections and their normal derivatives is satisfied. It is assumed that the elastic properties of the adhesive layer depend on its thickness ε as ε^N , $N \in \mathbb{R}$. Parameter ε is a small parameter of the problem. But the elastic properties of the glued plates do not depend on ε and remain constant.

The main goal of the work is to strictly mathematically justify the passage to the limit when ε tends to zero. It is shown that there are 7 limit problems in dependence on N . Moreover, for these 7 problems it is shown that the influence of adhesive on adherents can be replaced by interface.

References

- [1] Dumont S., Rizzoni R., Lebon F., Sacco E., Soft and hard interface models for bonded elements // Composites Part B: Engineering, 2018. V. 153. P. 480–490.
- [2] Geymonat G., Krasucki F., Lenci S., Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive // Mathematics and Mechanics of Solids, 1999. V. 4. P. 201–225.
- [3] Lebon F., Rizzoni R., Asymptotic behavior of a hard thin linear elastic interphase: An energy approach // International Journal of Solids and Structures, 2011. V. 48. P. 441–449.
- [4] Furtsev A., Rudoy E., Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates // International Journal of Solids and Structures, 2020. V. 202. P. 562-574.

PHASE TOPOLOGY OF ONE MODEL OF A LAGRANGE TOP WITH A VIBRATING SUSPENSION POINT²⁸

Ryabov P. E. (Russia, Moscow)

Financial University under the Government of the Russian Federation
Institute of Machines Science, Russian Academy of Sciences
PERyabov@fa.ru

Sokolov S. V. (Russia, Dolgoprudny)

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
Institute of Machines Science, Russian Academy of Sciences
sokolov.sv@phystech.edu

The report is devoted to the phase topology of one model of a dynamically symmetric rigid body in a homogeneous gravity field. One of the points of the body lying on the axis of symmetry (the suspension point) performs high-frequency periodic or conditionally periodic oscillations (vibrations) of small amplitude. Due to the presence of vibrations of the suspension point, the differential equations of motion of a rigid body describing its orientation relative to the coordinate system clearly depend on time. In the works of A. P. Markeev and O. V. Kholostova [1], [2], [3], a transformation is indicated that leads the original equations of motion written in the form of Euler-Poisson equations to an approximate system with respect to new variables, which also has the form of Euler-Poisson equations, but does not explicitly depend on time. It turns out that the resulting system of differential equations is a completely Liouville-integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom. Such a system can be subjected to bifurcation analysis and clearly demonstrate the problems of stability research based on the analysis of the type of singularities, namely, stable solutions correspond to elliptic non-degenerate singularities, and unstable solutions correspond to hyperbolic non-degenerate ones [4].

The report presents the analytical results of bifurcation analysis: an explicitly bifurcation diagram of the integral mapping is obtained as part of the discriminant of the fourth degree polynomial. As it turned out, such a polynomial participates in explicit integration. All phase variables are expressed in terms of elliptic Jacobi functions. All separating curves that form an atlas of bifurcation diagrams are found. It turned out that there are only five types of bifurcation diagrams, three of which are new compared to the classical case of the Lagrange top (without vibrational potential). The results of the study of the stability of equilibrium positions and regular precessions are clearly presented. As it turned out, both equilibrium positions in the presence of a vibrating suspension point can be unstable, which corresponds to the existence of focus singularities in this model [5]. The appearance of a “double pinched” torus in the considered mechanical system is unique (Fig. 1).

²⁸The work was partially supported by the Russian Science Foundation, grant no. 19-71-30012 and the Russian Foundation for Basic Research, grant no. 20-01-00399.

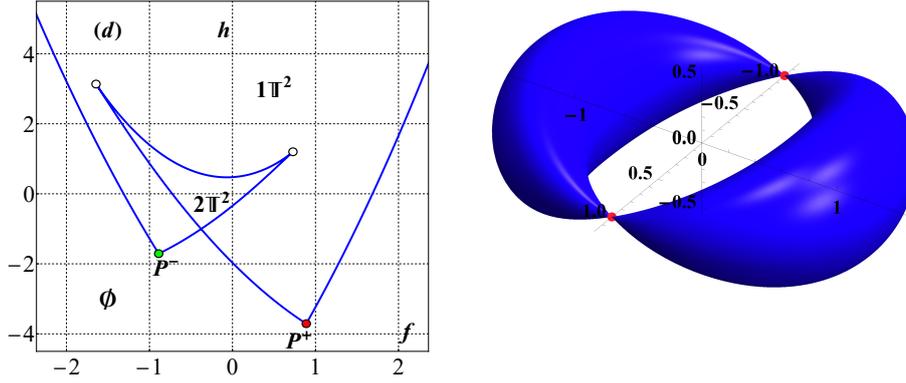


Fig. 1: The bifurcation diagram and the “doubly pinched” \mathbb{T}^2

References

- [1] Markeev A. P. On the theory of motion of a rigid body with a vibrating suspension, Doklady Physics, 2009, vol. 54, no. 8. pp. 392–396.
- [2] Markeev A. P. On the motion of a heavy dynamically symmetric rigid body with vibrating suspension point, Mechanics of Solids, 2012, vol. 47, no. 4. pp. 373–379.
- [3] Kholostova O. V. The dynamics of a Lagrange top with a vibrating suspension point, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1999, vol. 63, no. 5. pp. 741–750.
- [4] Bolsinov A. V., Borisov A. V. and Mamaev I. S., Topology and Stability of Integrable Systems, Russian Math. Surveys, 2010, vol. 65, no. 2. pp. 259–318.
- [5] Borisov A. V., Ryabov P. E. and Sokolov S. V., On the Existence of Focus Singularities in One Model of a Lagrange Top with a Vibrating Suspension Point, Doklady Mathematics, vol. 102, no. 3. pp. 468–471.

SELF-SIMILAR ERGODIC CONSTRUCTIONS, AND APPLICATIONS

Ryzhikov V. V. (Russia, Moscow)

Moscow State University

vryzh@mail.ru

We consider self-similar ergodic transformations and flows that preserve the sigma-finite measure. Their properties and spectra of induced Gaussian and Poisson dynamical systems are studied. As an application we prove that for any set $M \subset \mathbf{N}$, there is a Poisson suspension with spectral multiplicity set of the form $M \cup \{\infty\}$. It is shown that there is a Gaussian flow S_t such that the automorphism S_{p^n} has spectral multiplicities $\{1, \infty\}$ as $n \leq 0$, and $\{p^n, \infty\}$ as $n > 0$, its infinite tensor power T_t is so that automorphisms T_{p^n} have different spectral types for $n \leq 0$, but all automorphisms T_{p^n} , $n > 0$, are isomorphic.

References

- [1] V. V. Ryzhikov. Spectra of self-similar ergodic actions. arXiv:2203.07350

INVARIANT MEASURES FOR HAMILTONIAN FLOWS AND RANDOM WALKS IN INFINITELY
DIMENSIONAL PHASE SPACES

Sakbaev V. Zh. (Russia, Moscow)
Moscow Institute of Physics and Technology
fumi2003@mail.ru

We study the class of finite additive measures on the real separable Hilbert space E endowed with a shift-invariant symplectic form. Any measure from this class is invariant with respect to the group of symplectomorphisms preserving finite-dimensional symplectic subspaces (see [1]).

We study Hamiltonian flows in a real separable Hilbert space endowed with a symplectic structure. Measures on the Hilbert space that are invariant with respect to the group of symplectomorphisms preserving two-dimensional symplectic subspaces are investigated. These construction gives the opportunity to present a random Hamiltonian flow in phase space by means of a random unitary group in the space of functions that are quadratically integrable by invariant measure. The properties of mean values of random shift operators are studied. This presentation is applied to the studying of walks along the random Hamiltonian field on the symplectic space, its mean values and its distributions.

References

- [1] Glazatov V. A., Sakbaev V. Zh. Measures on Hilbert space invariant with respect to Hamiltonian flows // Ufa Math. J. 2022. Vol. 14. No 2. P.3–21.

STEADY STATES OF THE VLASOV EQUATION
WITH A LENNARD-JONES TYPE POTENTIAL

Salnikova T. V. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
tatiana.salnikova@math.msu.ru

We consider a system of mutually gravitating particles with possible collisions. As it is known, when pair collisions of an infinitely large number of gravitating particles are taken into account, the probability density function evolves in accordance with the Vlasov-Boltzmann-Poisson system of equations. The collisions can be described using the theory of inelastic interaction of solids with Newton's recovery coefficient for the relative velocity of colliding particles. In numerical implementation, the main difficulty of this approach is to track and refine a huge number of time moments of particle collisions.

As another approach, we suggest to add to the gravitational potential the potential of repulsive forces, similarly to the intermolecular Lennard-Jones forces. Numerical experiments show that when the Jacobi stability condition is satisfied, both models lead to a qualitatively identical character of evolution with the possible formation of stable configurations. [1] The probability density function is determined by the Vlasov kinetic equation with a modified gravitational potential called the Lennard-Jones type potential. The existence and nonlinear stability of steady states of the proposed dynamical model with a modified gravitational potential is under consideration.

Unlike many works on this topic for the gravitational and electromagnetic interactions of particles, there is no Poisson equation in our system. Using the energy-Casimir method ([2]), the existence of a large class of nonlinearly stable equilibrium solutions of this equation is proved. For this mathematical model it is shown that the total energy of the system has a minimizer under prescribed mass-Casimir constraint. This minimizer is a steady state, and its nonlinear stability is derived from its minimizing property.[3] This analytical study justifies the use of such mathematical model with the potential of Lennard-Jones type to describe the evolution of the relevant physical systems.

References

- [1] Salnikova T. V., Kugushev E. I. and Stepanov S. Ya. Jacobi stability of a many-body system with modified potential, *Doklady Mathematics*, 101, (2020), no.2, 154–157.
- [2] Rein G. *Collisionless Kinetic Equations from Astrophysics : The Vlasov-Poisson System*, Evolutionary Equations, Amsterdam : Elsevier, 2007.
- [3] Salnikova T. V. Existence and stability of equilibrium solutions of the Vlasov equation with a modified gravitational potential, *Doklady Mathematics*, 104, (2021), no.5, 277–281.

A NON-AUTONOMOUS MODEL INCORPORATING EFFECTS OF TOXICITY AND NUTRIENTS LEVEL ON PLANKTON DYNAMICS

Samares P. (India, Kalyani)
University of Kalyani
samaresp@yahoo.co.in

A mathematical model for the interacting dynamics of phytoplankton-zooplankton is proposed. The phytoplankton have ability to take refuge and release toxins to avoid over predation by zooplankton. The zooplankton are provided some additional food to persist in the system. The phytoplankton are assumed to be affected directly by an external toxic substance whereas zooplankton are affected indirectly by feeding on the affected phytoplankton. We incorporate seasonal variations in the model, assuming the level of nutrients, refuge and the rate of toxins released by phytoplankton as functions of time. Our results show that when high toxicity and refuge cause extinction of zooplankton, providing additional food supports the survival of zooplankton population and controls the phytoplankton population. Prey refuge and additional food have stabilizing effects on the system; higher values of the former results in extinction of zooplankton whereas phytoplankton disappear for larger values of the latter. Seasonality in nutrients level and toxins released by phytoplankton generates higher periodic solutions while time-dependent refuge of phytoplankton causes the occurrence of a period-three solution. The possibility of finding additional food for zooplankton may push back the ecosystem to a simple stable state from a complex dynamics.

SAFETY PROBLEM FOR TIME-VARYING DELAY SYSTEMS IN TERMS OF BARRIER FUNCTIONS

Sedova N. O. (Russia, Ulyanovsk)
Ulyanovsk State University
sedovano@ulsu.ru

We use the following notation: $R^+ = [0, +\infty)$, R^n is the n -dimensional space of vectors $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ with the norm $|x|$, $C = C([-r, 0], R^n)$ is the Banach space with the supremum-norm $\|\cdot\|$. For a continuous function $x(t) \in C([\alpha - r, \alpha + \beta], R^n)$ ($\alpha \in R^+$, $\beta > 0$) an element $x_t \in C$ is defined for any $t \in [\alpha, \alpha + \beta)$ by $x_t(s) = x(t + s)$, $-r \leq s \leq 0$, $\dot{x}(t)$ stands for the right-hand derivative.

We consider a time-varying nonlinear system with delay described by the equation

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

where $t \in R^+$, $x(t) \in R^n$, the (nonlinear) functional f meets the Caratheodory-type conditions from [1].

Let $X_0 \subset R^n$ be the set of initial states, and an open set $U \subset R^n$ be the set of unsafe states with $U \cap X_0 = \emptyset$.

The study of safety in the context of dynamical systems dates back to the 1940s (see [2]). Safety is the property that requires that solutions of the (1) starting inside the set X_0 will never reach the “unsafe” set U .

We define safety of a system in terms of the set S being *forward invariant*. We say that a set S is forward invariant if for all solutions of (1) starting from S remain in S for all $t \in I$ ($I \subset \mathbb{R}^+$ is an interval where the solution exists; sometimes the name *forward pre-invariant* is used to indicate that solutions may not exist for all $t \in \mathbb{R}^+$ [3]). So the safety with respect to the pair (X_0, U) is verified when a set $S \subset \mathbb{R}^n$ with $X_0 \subset S$ and $S \cap U = \emptyset$ is forward invariant. In this case S can be called the safety set. This motivates viewing set invariance in the context of safety.

Based on this approach, the concept of barrier functions (or safety functions) has been established that allows one to ensure the forward invariance. A *super level set* $S = \{x \in \mathbb{R}^n : B(x) \geq 0\}$ of a continuously differentiable function $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ can be used as a safety set if the conditions ensuring its invariance are satisfied. These conditions are usually formulated in terms of the derivative of the function B by virtue of the equation of dynamics. In this case, the function B is a barrier function.

Thus, the introduction of barrier functions suggests that stability analysis and control design methods based on Lyapunov functions can be appropriately transposed to address safety issues.

In [4] the authors extend the concept of safety to time delay systems by utilizing Lyapunov-Krasovskii functionals. In this study we use the Lyapunov-Razumikhin approach to guarantee the safety for (1). Razumikhin-type conditions are used when estimating the barrier function's derivative. Taking into account the time-dependence, it is possible to weaken the traditional sign definite estimate of the derivative.

References

- [1] Sedova N. O. On the principle of reduction for the nonlinear delay systems // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72. No. 9. P. 1864-1875.
- [2] Ames A. D. et al. Control barrier functions: Theory and applications // 2019 18th European control conference (ECC). IEEE, 2019. P.3420-3431.
- [3] Maghenem M. A., Sanfelice R. G. On the converse safety problem for differential inclusions: Solutions, regularity, and time-varying barrier functions // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022
- [4] Orosz G., Ames A. D. Safety functionals for time delay systems // 2019 American Control Conference (ACC). IEEE, 2019. P. 4374-4379.

ASYMPTOTIC SOLUTION FOR THE CAUCHY PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH TIME DISPERSION²⁹

Sergeev S. A. (Russia, Moscow)

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

sergeevse1@yandex.ru

The dispersion phenomenon for the wave propagation is well known. In many such problems the so-called time dispersion effects appear (for example Maxwell equations) which means that the dependancy on frequency can be non-polynomial.

We consider the following Cauchy problem

$$g^2(\hat{\omega})u = \langle \hat{p}, c^2(x)\hat{p} \rangle u, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

$$u|_{t=0} = V\left(\frac{x}{h}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t}u|_{t=0} = 0.$$

Here $h \ll 1$, $\hat{\omega} = -ih\frac{\partial}{\partial t}$, $\hat{p} = -ih\nabla$. Function $c(x)$ is smooth and bounded: $c_M \geq c(x) \geq c_m > 0$. Initial function $V(y)$ is smooth and fast decaying while $|y| \rightarrow +\infty$ with all derivations.

As for the function $g(\omega)$, we assume that it is smooth, odd and monotonically increasing not faster than some polynomial, and $g(\omega) \rightarrow \infty$ while $\omega \rightarrow \infty$. With small ω we have

$$g(\omega) = \omega + \frac{g_3}{6}\omega^3 + O(\omega^5),$$

²⁹This work was supported by the Russian Science Foundation, project number 21-11-00341.

where $g_3 > 0$. Also we suggest that $g''(\omega)$ is not zero for $\omega \neq 0$. Also we assume $g'(\omega) > 1$ with $\omega > 0$.

These conditions on the function $g(\omega)$ allow us to define the pseudo-differential operator $\tilde{g}(\omega^2) \equiv g^2(\hat{\omega})$ as function on operator $\hat{\omega}^2$. Then we can inverse this pseudo-differential operator and obtain the second-order Cauchy problem.

The task is the construction the asymptotic formulae for the solution of posted problem. The case is that in the approach described above it is necessary to evaluate the inverse function $g^{-1}(p)$. In order to obtain the constructive asymptotic formula for the solution we have to avoid evaluation of the inverse function. It can be done if we consider the extended phase space including time and frequency with the space variables and corresponding momenta.

SHORT-WAVE ASYMPTOTICS FOR EVOLUTIONARY EQUATIONS WITH ABRUPTLY VARYING COEFFICIENTS

Shafarevich A. I. (Moscow, Russia)
Moscow State University
shafarev@yahoo.com

We study Cauchy problems for hyperbolic coefficients with coefficients, depending in a singular way on a small parameter (weak limits of the coefficients are either discontinuous functions or delta-type distributions). We study short-wave asymptotics of these problems; the main attention is paid to the behavior of geometric objects (Lagrangian surfaces of complex vector bundles), corresponding to such solutions. In particular, we describe rearrangements of these geometric objects near the supports of singularities of coefficients.

References

- [1] Allilueva, A. I., Shafarevich, A. I. Maslov's Complex Germ in the Cauchy Problem for a Wave Equation with a Jumping Velocity. *Russ. J. Math. Phys.* 29, 1–10 (2022).
- [2] Allilueva, A. I., Shafarevich, A. I. Reflection and Refraction of Lagrangian Manifolds Corresponding to Short-Wave Solutions of the Wave Equation with an Abruptly Varying Velocity. *Russ. J. Math. Phys.* 28, 137–146 (2021).

BOUNDARY OPTIMAL CONTROL AND HOMOGENIZATION: CRITICAL CASE

Shaposhnikova T. A. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
shaposh.tan@mail.ru

We consider the homogenization of an optimal control problem in which the control v is placed on the part Γ_0 of the boundary and the spatial domain contains a thin layer of "small particles very close to the controlling boundary, and a Robin boundary condition is assumed on the boundary of those "small particles". We assume that the size of the particles and parameters involved in the Robin boundary condition are critical (and so they justify the occurrence of some "strange terms" in the homogenized problem and in the limit of the cost functional).

SINGULARITIES OF SOLUTIONS TO THE GAS DYNAMICS EQUATIONS
AND THE LINEAR WAVE EQUATION

Shavlukov A. M. (Russia, Ufa)
Institute of Mathematics with Computing Centre
aza3727@yandex.ru

Shown that the catastrophe germs of smooth mappings defining all three typical singularities of solutions to the system of isentropic gas flow equations coincide with germs of similar catastrophes of solutions to the linear wave equation with constant coefficients. A hypothesis is put forward that a similar "inheritance" should take place for typical singularities of solutions to systems of equations of an isentropic gas flow in spatially non-one-dimensional cases as well.

References

- [1] Rakhimov A. K. Singularities of Riemannian invariants. Functional Analysis and Its Applications. 1993. Vol. 27. No 1. P.39–50
- [2] Suleimanov B. I. Generic singularities in solutions of the shallow water equations // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 85. No 1. P.125–128.

EFFECTIVE METHODS FOR HITCHIN SYSTEMS

Sheinman O. K. (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
sheinman@mi-ras.ru

The Hitchin systems emerge as natural integrable systems on the moduli spaces of stable holomorphic vector bundles. Introduced by N.Hitchin in 1987, they have been applied in topological field theory later. Since then, the development splitted into two branches: the first one more in spirit of algebraic geometry (B.vanGeemen – E.Previato' 1996, C.Simpson, A.Zheglov), and the second one mainly in spirit of integrable systems (K.Gawedzki – P.Tran-Ngoc-Bich' 2000, A.Gorsky–N.Nekrasov–V.Rubtsov' 2001, I.M.Krichever' 2002). I will report on the progress in the second direction in my talk.

In [1] Krichever represented Hitchin systems in the form of the Lax-type equations $\dot{L} = [L, M]$ where L, M are meromorphic time-dependent matrix-valued functions on a Riemann surface Σ . They are assumed to have stationary and dynamical poles, with a special Laurent expansions at the latter. In a neighborhood of such dynamical pole γ

$$L(z) = \frac{\alpha_\gamma \beta_\gamma^T}{z - z_\gamma} + L_{0,\gamma} + O(z - z_\gamma) \tag{1}$$

where $\alpha_\gamma, \beta_\gamma \in \mathbb{C}^d$ are vector-columns, z is a local coordinate, z_γ is the coordinate of γ , the T means transposition, $\beta_\gamma^T \alpha_\gamma = 0$, α_γ is an eigenvector for $L_{0,\gamma}$. The set $\{\alpha_\gamma, \beta_\gamma, z_\gamma\}$ together with main parts of L in the stationary points are dynamical variables of the system.

Based on this representation, Krichever has constructed integrable hierarchies corresponding to a given L , developed their Hamiltonian theory and gave an outline of their integration by means of the technique of Inverse Spectral Problem. Later we had rebuilt the whole theory, except for the last point, for \mathfrak{g} -valued L, M where \mathfrak{g} is a semi-simple Lie algebra.

Nevertheless, an explicit description of Hitchin systems had not yet been obtained. In [2],[3] we propose a solution of the problem for a hyperelliptic curve using Separation of Variables. Let Σ be given by the equation $y^2 = P_{2g+1}(x)$, where P_{2g+1} is a degree $2g + 1$ polynomial, and y_i, x_i satisfy the relation $y_i^2 = P_{2g+1}(x_i)$.

Theorem 1. For $L \in \mathfrak{g}$ where $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1), \mathfrak{sp}(2n), \mathfrak{so}(2n+1)$

1°. Hamiltonians $H_{jk}^{(0)}, H_{js}^{(1)}$ of the Hitchin system are defined from the system of linear equations ($i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g} \cdot (g-1)$):

$$\lambda_i^d + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{d_j(g-1)} H_{jk}^{(0)} x_i^k + \sum_{s=0}^{(d_j-1)(g-1)-2} H_{js}^{(1)} x_i^s y_i \right) \lambda_i^{d-d_j} = 0 \quad (2)$$

where d_j are exponents of \mathfrak{g} , $g = \text{genus}(\Sigma)$, $d = n+1, 2n, 2n+1$ depending on \mathfrak{g} .

2°. the Poisson bracket is given by $\{\lambda_i, x_j\} = \delta_{ij} y_i$.

Action-angle variables are also found out explicitly.

We finally address the Inverse Spectral Problem in the case when L, M take values in a semi-simple Lie algebra. A conventional approach is as follows: take a spectral covering (spectral curve) $\Lambda \rightarrow \Sigma$ equipped with a divisor D ; take the matrix $\Psi(q)$, $q \in \Sigma$ whose columns are evaluations of the Baker–Akhieser vector-function, i.e. the vector-function having prescribed exponential singularities and D as a pole divisor, at preimages of q ; obtain L and M as follows:

$$L(q) = \Psi(q)\Lambda(q)\Psi(q)^{-1}, \quad M(q) = -\partial_t \Psi(q) \cdot \Psi(q)^{-1}. \quad (3)$$

It is a distinctive feature of the semi-simple case that the Baker–Akhieser function has unremovable dynamical poles. We propose a solution of the problem for the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2)$, and the L having double poles (the work in progress) instead of (1).

Theorem 2. There exists a unique Baker–Akhieser vector-function with time-independent pole divisor D and dynamical poles of the form $\psi(z) = \nu_\gamma \alpha_\gamma / (z - z_\gamma) + \mu_\gamma \alpha_\gamma + O(z - z_\gamma)$ ($\alpha_\gamma \in \mathbb{C}^2$ are given, $\mu_\gamma, \nu_\gamma \in \mathbb{C}$), giving L, M by means of (3).

References

- [1] Krichever I.M. Vector bundles and Lax equations on algebraic curves // Comm. Math. Phys. 2002, Vol. 229, P.229–269.
- [2] Sheinman O.K. Spectral curves of hyperelliptic Hitchin systems // Funct. Anal. Appl., 2019, 53:4, P.291–303; arXiv:1806.10178 [math-ph].
- [3] Borisova P.I., Sheinman O.K. Hitchin systems on hyperelliptic curves // Proceedings of Steklov Mathematical Institute, 2020, Vol. 311, P.22–35; arXiv:1912.06849 [math-ph].

ON SOME SOLUTIONS OF SEMILINEAR EQUATIONS IN \mathbb{R}^n WITH FRACTIONAL LAPLACIAN³⁰

Shcheglova A. P. (Russia, Saint Petersburg)

St. Petersburg Electrotechnical University

St. Petersburg University

apshcheglova@etu.ru

Let $n \geq 2$, and let $s \in (0, 1)$. Denote by $2_s^* = \frac{2n}{n-2s}$ the critical embedding exponent for the Sobolev–Slobodetskii space $H^s(\mathbb{R}^n)$. For $q \in (2, 2_s^*)$, we consider the equation

$$(-\Delta)^s u + u = |u|^{q-2} u \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where $(-\Delta)^s$ is the conventional fractional Laplacian in \mathbb{R}^n defined for any $s > 0$ by the Fourier transform

$$(-\Delta)^s u := F^{-1} (|\xi|^{2s} F u(\xi)).$$

Expanding on the variational method proposed in the work of Lerman, Naryshkin and Nazarov [1], we describe a method for constructing bounded solutions for equation (1) from the

³⁰The research was supported by RFBR grant 20-01-00630.

solutions of a same equation in a special type of domains with different operators of the fractional Laplacian.

Namely, let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a convex polyhedron. For a positive sequence $R \rightarrow +\infty$, we define a family of expanding domains $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : x/R \in \Omega\}$ and consider the problem

$$(-\Delta)_{\Omega_R}^s u + u = |u|^{q-2}u \quad \text{in } \Omega_R, \quad (2)$$

where $(-\Delta)_{\Omega_R}^s$ stands for some fractional Laplacian in Ω_R , such as spectral fractional Dirichlet or Neumann Laplacian, etc.

Lemma 1. *There exists a least energy solution u of (2), positive and smooth in Ω_R .*

Now we assume that the polyhedron Ω has the following property: the space \mathbb{R}^n can be filled with its reflections, colored checkerwise. Then we can extend the function u to the function \mathbf{u} in the whole space by reflections consistent with the boundary conditions of $(-\Delta)_{\Omega_R}^s$.

Theorem 1. *The function \mathbf{u} is a solution of the equation (1) in \mathbb{R}^n .*

In this way, we construct solutions of the equation (1) with various symmetries. Among them, there are: positive and sign-changing periodic solutions with various periodic lattices, quasi-periodic complex-valued solutions, breather-type solutions. These classes of solutions, apparently, were not studied earlier. In the local case, similar solutions are considered in [1]. However, some of our solutions are new even for $s = 1$.

This talk is based on joint work with Alexander Nazarov, see [2]. A part of our results was announced in the short communication [3].

References

- [1] Lerman L. M., Naryshkin P. E., Nazarov A. I. Abundance of entire solutions to nonlinear elliptic equations by the variational method // Nonlin. Analysis. 2020. Vol. 190. Paper N111590.
- [2] Nazarov A. I., Shcheglova A. P. Solutions with various structures for semilinear equations in \mathbb{R}^n driven by fractional Laplacian // arXiv:2111.07301
- [3] Nazarov A. I., Shcheglova A. P. New classes of solutions to semilinear equations in \mathbb{R}^n with fractional Laplacian // ZNS POMI. 2021. Vol. 508. P. 124–133. (Russian)

STUDY OF HYBRID PROJECTIVE SYNCHRONIZATION BETWEEN SIMPLE AND LU CHAOTIC SYSTEMS

Shukla V. K. (India, Basti)
Shiv Harsh Kisan P. G. College
vshukla1100@gmail.com

In this article, hybrid projective synchronization between two chaotic systems has been discussed. The Simple chaotic system is considered as drive system and Lu chaotic system is taken as response system. Nonlinear control method has been used to analyse the hybrid projective synchronization of fractional systems. For numerical simulations ABM method has been used and results obtained are presented graphically.

"ADIABATIC APPROXIMATION" IN STUDIES OF RESONANCE PHENOMENA IN THREE-BODY PROBLEM³¹

Sidorenko V. V. (Russia, Moscow)
Keldysh Institute of Applied Mathematics
vvsidorenko@list.ru

When studying resonance effects within the framework of three-body problem, it is useful to take into account the behavior of approximate integrals of motion, called adiabatic invariants (AI)

³¹The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 20-01-00312A).

[1,2]. The standard scheme of the adiabatic approximation in the investigations of mean motion resonances (MMR) as a first step involves averaging over the fastest dynamic process (i.e., over the orbital motion of the objects in commensurability). In averaged equations of motion one should take a subsystem that describes the process of “intermediate” time scale - the variation of the resonant angle. This subsystem can be interpreted as 1DOF Hamiltonian system, depending on other variables as slowly varying parameters. Consequently, the value of the “action” variable for this subsystem will be an adiabatic invariant (AI). Studying then the properties of level surfaces of AI in the subspace of the slowest variables, one can draw conclusions about the secular evolution of the orbits of celestial bodies in MMR. More delicate situation arises in the case of nonuniqueness of the resonant modes allowed by the system [3,4]. In particular, in this case it is necessary to identify regions in the phase space, where resonant modes can coexist, to compare the probabilities of the capture into different modes, and to analyze the possibility of a transition between these modes. Fortunately, the theory of AI allows to do almost all of this.

References

- [1] Wisdom, J. A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability // *Icarus*. 1985. Vol. 63. P. 272-286.
- [2] Neishtadt, A. I. Jumps of the adiabatic invariant on crossing the separatrix and the origin of the 3:1 Kirkwood gap // *Soviet Phys. Dokl.* 1987. Vol. 32, P. 571-573.
- [3] Sidorenko V. V., Neishtadt A. I., Artemyev A. V., Zelenyi L. M. Quasi-satellite orbits in the general context of dynamics in the 1:1 mean motion resonance: perturbative treatment // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2014. Vol. 120. P. 131-162.
- [4] Sidorenko V. V. Dynamics of "jumping" Trojans. Perturbative treatment // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2014. Vol. 130. P. 1-18.

TRANSIENT RESPONSE OF COLLINEAR GRIFFITH CRACKS IN A FUNCTIONALLY GRADED STRIP BONDED BETWEEN DISSIMILAR ELASTIC STRIPS UNDER SHEAR IMPACT LOADING

Singh R. (India, Varanasi)
 Indian Institute of Technology (BHU)
singhritika0711@gmail.com

This article analyses the interaction between a central and two symmetrically placed collinear Griffith cracks subject to transient response under anti-plane shear impact loading. The cracks are situated in a strip constituted by functionally graded material (FGM) bonded between two dissimilar elastic strips of equal thickness. The material properties of FGM are assumed to vary exponentially as a function of thickness [1]. Applying integral transforms, the boundary value problem reduces to a system of singular integral equations in the Laplace transformed domain. These equations are solved numerically using the Lobatto-Chebyshev collocation quadrature approach. The inverse Laplace transform is used to find the approximate expressions of dynamic stress intensity factors (DSIFs). The striking feature of the article is the study of phenomenal changes of shielding and amplification through dynamic stress magnification factor (DSMFs) at the tips of the cracks under the sudden impact loading applied at the upper material surface. The effects of impact load applied at different surfaces, positions of cracks' axis and the thickness of the strips of the composite material on the possibilities of cracks' arrest are depicted graphically for different particular cases.

References

- [1] Singh R. and Das S. Investigation of interactions among collinear Griffith cracks situated in a functionally graded medium under thermo-mechanical loading // *J. Therm. Stresses*. Vol. 44. P.433-455 (2021).

Tolchennikov A. A. (Russia, Moscow)
 Institute for problems in mechanics RAS
tolchennikov-aa@gmail.com

We consider the two-dimensional massless Dirac equation with a linear potential and localized right hand side:

$$x_1\sigma_0\psi + \sigma_1(-ih\psi_{x_1}) + \sigma_2(-ih\psi_{x_2}) = \psi^0 \left(\frac{x - x^0}{h} \right),$$

where $x^0 = (-a, 0)$, $a > 0$, $\psi^0(x)$ — smooth, fast-decaying function, $h \ll 1$, σ_j — Pauli matrices. The solution must satisfy the absorption limit principle. The talk will be devoted to the construction of an asymptotic solution as $h \rightarrow 0$. Using the method of [1], we can construct an asymptotic solution outside a neighborhood of a singular line $x_2 = 0$. Earlier in the paper [2], the asymptotics of the fundamental solution for singular ray $x_2 = 0, x_1 > 0$ was obtained.

This is joint work with S.Yu. Dobrokhotov and I.A. Bogaevsky.

References

- [1] A. Y. Anikin, S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, M. Rouleux, The Maslov canonical operator on a pair of Lagrangian manifolds and asymptotic solutions of stationary equations with localized right-hand sides // Dokl. Math., 96, 406–410 (2017).
- [2] I. A. Bogaevsky, Fundamental solution of the stationary Dirac equation with a linear potential // Theoretical and Mathematical Physics, 205, 1547–1563 (2020).

ON THE CONSTANCY OF THE GROUND-STATE SOLUTIONS TO THE FRACTIONAL SEMILINEAR NEUMANN PROBLEM³³

Ustinov N. S. (Russia, Saint Petersburg)
 St.Petersburg State University
ustinns@yandex.ru

Let $n \geq 1$, and let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with Lipschitz boundary. Assume that $s \in (0, 1)$, $2_s^* := 2n/(n - 2s)$ and

$$q \in \begin{cases} [1, 2_s^*] & \text{if } n \geq 2 \text{ or } n = 1 \text{ and } s < 1/2; \\ [1, \infty) & \text{if } n = 1 \text{ and } s = 1/2; \\ [1, \infty] & \text{if } n = 1 \text{ and } s > 1/2. \end{cases}$$

We consider the following fractional semilinear Neumann problem:

$$(-\Delta)_{S_p}^s u(x) + u(x) = u^{q-1}(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H^s(\Omega), \quad (1)$$

here $(-\Delta)_{S_p}^s$ stands for the s -th power of the conventional Neumann Laplacian in Ω in the sense of spectral theory. For the bounded domain Ω its quadratic form is defined by

$$\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s \langle u, \phi_j \rangle^2$$

with λ_j as eigenvalues and ϕ_j as orthonormal eigenfunctions of the Neumann Laplacian in Ω . The operator $(-\Delta)_{S_p}^s$ is called the *spectral Neumann fractional Laplacian*.

³²Supported by Russian Science Foundation under grant no 16-11-10282.

³³Supported by RFBR grant 20-01-00630A.

The ground–state solution to the problem (1) (up to multiplication by a constant) is an extremal function for the fractional embedding theorem $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$:

$$\inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s,q}^\Omega[u] := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2} := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\langle (-\Delta)_{S^p}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2} > 0. \quad (2)$$

For $q \in [1, 2_s^*)$, this embedding is compact, and therefore the ground–state solution to the problem (1) exists. Moreover, in [2] it was shown that, for $q = 2_s^*$, the ground–state solution to the problem (1) exists in any \mathcal{C}^2 domain Ω for $n \geq 3$ and $2s > 1$.

In this talk we discuss the problem of constancy of the ground–state solutions in (1). The simple fact here is that for $q \in [1, 2]$ such solution is unique and constant. For the interesting case $q > 2$ the answer depends on the domain size: for the family of domains $\varepsilon\Omega$, we prove that, for small dilation coefficients ε , the ground–state solution is also unique and constant, whereas for large ε , a constant function is not even a local minimizer in (2). We also discuss whether a constant function is a global minimizer in (2) if it is a local one.

For the local case $s = 1$ similar effects were established in [1] for the Neumann problem with p -Laplacian.

The talk is based on work [3].

References

- [1] Nazarov A. I., Scheglova A. P. On some properties of extremals in a variational problem generated by the Sobolev embedding theorem // Probl. Mat. Anal. 27 (2004), 109–136 (in Russian); J. Math. Sci. 120(2) (2004), 1125–1144 (in English).
- [2] Ustinov N. S. On solvability of a critical semilinear problem with the spectral Neumann fractional Laplacian // Algebra i Analiz 33(1) (2021), 194–212 (in Russian); St. Petersburg Math. J. 33(1) (2022), 141–153 (in English).
- [3] Ustinov N. S. On the constancy of the extremal function in the embedding theorem of fractional order // Funktsional. Anal. i Prilozhen. 54(4) (2020), 85–97 (in Russian); Funct. Anal. Appl. 54(4) (2020), 295–305 (in English).

TRAVELING WAVES IN A LONG TUBE

Vasyutkin S. A. (Russia, Novosibirsk)
 Novosibirsk State University
 Lavrentyev Institute of Hydrodynamics
s.vasyutkin@g.nsu.ru

Chupakhin A. P. (Russia, Novosibirsk)
 Novosibirsk State University
 Lavrentyev Institute of Hydrodynamics
alexander190513@gmail.com

The study of fluid flow in an elastic tube is of considerable interest both for fundamental hydrodynamics and for numerous applications: blood flow in vessels, fluid transport in pipelines, etc. An accurate description of this problem includes both finding the velocity and pressure of the fluid, displacements of the pipe walls and stresses in them, and finding the position of the walls. This is a problem with an unknown boundary, the conditions for the coupling of velocity and stresses are set on it. The complexity of this problem initiates the derivation and study of approximate models. One of the most common is the long tube model (one-dimensional model of hemodynamics), in which it is assumed that the length of the tube exceeds its cross-section. The introduction of a small parameter in the problem - the ratio of these quantities - allows us to move to an approximate model in which the velocity is averaged over the pipe section. A lot of works devoted to the one-dimensional model are devoted to both the mathematical side of the issue and physical applications [1,2]. The characteristic modes of motion in such a system are traveling waves, the study of which was started in [3].

In this case, the system of equations is reduced to a system of ordinary differential equations. The principle is the closure of this system by a kind of equation of state, which sets the dependence of pressure on the radial displacement of the pipe wall. The paper investigates solutions of the traveling wave type for a pipe given by a Coiter shell. In this model, the pressure is represented as a function of the displacement of the wall and the derivatives of this value. The report examines the influence of elastic and viscous factors on the behavior of the solution near the singular point of the corresponding dynamical system.

References

- [1] Sunchica Canich, Josip Tambacha, Giovanna Guidoboni, Andro Mikelich, Craig J. Hartley, Doreen Rosenstrauch, Modeling Viscoelastic Behavior of Arterial Walls and Their Interaction with Pulsatile Blood Flow. // SIAM Journal on Applied Mathematics, January 2006, Vol. 67, No. 1, pp. 164-193.
- [2] A.T. Il'ichev, S.I. Sumskoi, V.A. Shargatov, Unsteady Flows in Deformable Pipes: The Energy Conservation Law // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics volume 300, pages 68-77 (2018)
- [3] Barlukova, A. M., Cherevko, A. A., Chupakhin, A. P., Traveling waves of a one-dimensional model of hemodynamics. // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 55 (2014), no. 6, 917-926

INVERSE PROBLEMS FOR THE NONLINEAR STATIONARY EQUATIONS³⁴

Velisevich A V. (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
velisevich94@mail.ru

Lyubanova A. Sh. (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
lubanova@mail.ru

We study two inverse problems of recovering unknown coefficients in the higher and lower terms of the stationary diffusion equations. The first one is the inverse problem of identifying a constant coefficient in the higher term of a nonlinear equation.

Problem 1. For given functions $f(x)$, $g(x)$, $\beta(x)$, $h(x)$, $\psi_i(\rho)$, $i = 1, 2$, and a constant φ find the pair of function $u(x)$ and constant k satisfying the equation

$$k\{-\operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla\psi_1(u)) + m(x)u\} + g(x)\psi_2(u) = f(x), \quad (1)$$

the boundary condition

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(x), \quad (2)$$

and the condition of overdetermination

$$k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi_1(u)}{\partial\bar{N}} h \, ds = \varphi. \quad (3)$$

Here $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ is a bounded domain with a boundary $\partial\Omega$, $t \in (0, T)$, $\mathcal{M}(x) \equiv ((m_{ij}(x)))$ is a matrix of functions $m_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $m(x)$ is a scalar function,

$\frac{\partial}{\partial\bar{N}} = (\mathcal{M}(x)\nabla, \mathbf{n})$, \mathbf{n} is the unit vector of the outward normal to the boundary $\partial\Omega$.

The second inverse problem deals with the recovery of the coefficient in the lower term of a nonlinear equation.

Problem 2. For given functions $f(x)$, $\beta(x)$, $h(x)$, $r(u)$ and a constant μ find the pair of function $u(x)$ and constant k satisfying the equation

$$-\operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u) + m(x)u + kr(u) = f, \quad (4)$$

³⁴The reported study was funded by Russian Foundation of Basic Research [grant no. 20-31-90053].

boundary condition (2), and the condition of overdetermination

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} h(x) ds = \mu. \quad (5)$$

Under certain hypotheses on the input data the local existence and uniqueness of the strong solution of the above-stated inverse problems are established. The proof of existence is based on original approach developed by A. Sh. Lyubanova [1]. The approach relies on the method of reducing the inverse problem to an operator equation $Ak = k$ of the second type for the unknown coefficient k [2]. It is shown that the operator of this equation is a contraction on a set constructed with the use of the comparison theorems for elliptic equations. The contractibility of the operator A provides the uniqueness and stability of the solution.

Practical interest in such problems is due to the fact that in numerous applications the coefficients of equation (1) characterize the physical properties of the medium: thermal conductivity, permeability, absorption etc.

References

- [1] Lyubanova A. Sh. Identification of a constant coefficient in an elliptic equation. *Applicable Analysis*. 2008. V 87 No. 10-11. P. 1121-1128.
- [2] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*. New York: Marcel Dekker Inc. 2000.

HIGHER ORDER TRAPS IN QUANTUM CONTROL LANDSCAPES³⁵

Volkov B. O. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
borisvolkov1986@gmail.com

Pechen A. N. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
National University of Science and Technology "MISIS"
apechen@gmail.com

Quantum control is an important tool for modern quantum technologies [1]. A typical problem of quantum control can be formulated as the problem of maximizing the objective functional which is determined by the state of the quantum system. Trap is a point of local but not global optimum of the objective functional. Traps, if they would exist, could complicate the search for the global optima of the objective functional [2,3,4,5]. In this talk we provide a classification of traps, in which the n -th order trap is determined by the Taylor expansion of the objective functional up to the n -th order. Examples of n -th order traps in the landscape of the problem of maximizing the expectation of a quantum mechanical observable for multilevel quantum systems are found [6]. We then consider the problem of controlled generation of single-qubit phase shift quantum gates. It was previously known that for sufficiently long times traps for this quantum control problem do not exist. We show that control landscape for this problem for short times is also free of traps [7].

References

- [1] Glaser S.J., Boscain U., Calarco T., Koch C.P., Köckenberger W., Kosloff R., Kuprov I., Luy B., Schirmer S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F.K. Training Schrödinger's cat: Quantum optimal control // *Eur. Phys. J. D*. 2015. Vol. 69. P. 279.
- [2] Rabitz H. A., Hsieh M. M., Rosenthal C. M. Quantum optimally controlled transition landscapes // *Science*. 2004. Vol. 303. No 5666. P. 1998–2001.
- [3] Pechen A. N., Tannor D. J, Are there traps in quantum control landscapes? // *Phys. Rev. Lett*. 2011. Vol. 106. P. 120402.

³⁵The work is partially supported by the grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. 075-15-2020-788 and by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00330.

- [4] Pechen A. N., Tannor D. J, Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps // Israel Journal of Chemistry. 2012. Vol. 52. P. 467–472.
- [5] de Fouquieres P., Schirmer S. G., A closer look at quantum control landscapes and their implication for control optimization // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2013. Vol.16. No 3. P. 1350021.
- [6] Volkov B. O., Pechen A. N. et. al. (in preparation).
- [7] Volkov B. O., Morzhin O. V., Pechen A. N., Quantum control landscape for ultrafast generation of single-qubit phase shift quantum gates // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol. 54. No 21. P. 215303.

VECTOR BUNDLES AND THE RIEMANN–HILBERT PROBLEM
ON A RIEMANN SURFACE

Vyugin I. V. (Russia, Moscow)

IITP RAS

NRU HSE

ilyavyugin@yandex.ru

The classical Riemann–Hilbert problem asks: is it possible to construct a Fuchsian system on the Riemann sphere with prescribed singular points and a monodromy representation. The talk is devoted to a generalization of this problem to the case of a compact Riemann surface of an arbitrary genus g . We consider the statement proposed by H. Esnault and her co-authors, which asks the question of the existence of a logarithmic connection in a semistable bundle of degree zero. This problem was studied in the papers of H. Esnault, C. Hertling, E. Viehweg and A. Bolibruch, which we will mention in our talk. We answer to three questions related to this problem: we have given a stronger counterexample to the problem of constructing a connection in a semistable bundle than the counterexample in the paper of Esnault and Hertling (see [1]); we have described a class of bundles with a connection in which an arbitrary monodromy representation and a set of singular points can be realized; we study problems of solvability of this problem for completely reducible monodromy representations. The results presented in the talk are based on joint work with Lada Dudnikova.

References

- [1] Esnault H., Hertling C., Semistable bundles on curves and reducible representations of the fundamental group // arXiv preprint math/0101194 (2001).

DYNAMICS OF REGULAR TOPOLOGICAL FLOWS ON MANIFOLDS³⁶

Zinina S. Kh. (Russia, Saransk)

Ogarev Mordovia State University

kapkaevasvetlana@yandex.ru

Regular topological dynamical systems are defined as dynamical systems whose chain-recurrent set is topologically hyperbolic and consists of a finite number of fixed points and periodic orbits. For such systems, provides an exhaustive description of the behavior of invariant manifolds of chain components, both from the point of view of asymptotics and from the point of view of the topology of their embedding in the carrier manifold.

Also it is proved that for a regular flow without periodic orbits, given on a topological manifold of any dimension, there exists a (continuous) Morse energy function. The result obtained is an ideological continuation of the work of S. Smale [1], in which he established the existence of a smooth energy Morse function for any gradient-like flow on a manifold, and a partial solution of

³⁶This work is supported by the grant RFBR (project 20-31-90069) and by Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics BASIS (project 19-7-1-15-1).

the Morse problem on the existence of continuous Morse functions on any topological manifolds. Namely, a topological manifold admits a continuous Morse function if and only if it admits a regular topological flow without periodic orbits. This result was obtained in the present work within the framework of constructing a continuous Morse-Bott energy function for an arbitrary continuous regular flow on a topological manifold, and is an analogue of the theorem K. Meyer [2], who in 1968 constructed the Morse-Bott energy function for an arbitrary Morse-Smale flow on a smooth closed n -manifold.

Denote by G^t the class of regular flows. The dynamics of flows of the class G^t is close in its properties to the dynamics of Morse-Smale flows.

We prove the existence of a continuous energy function for any regular flow. This result are the ideological continuation of the works of S. Smale [1] and K. Meyer [2] on the existence of the Morse energy function for gradient-like flows and the Morse-Bott energy function for Morse-Smale flows, respectively.

A function φ is called a *continuous Morse-Bott function* if any connected component of the set Cr_φ is either a non-degenerate critical point or belongs to a non-degenerate critical submanifold.

Statement ([4], theorem). *Any regular topological flow $f^t : M^n \rightarrow M^n$ without periodic orbits has a continuous energy Morse function.*

The concept of a continuous Morse function was introduced by Morse back in 1959 in [5]. The question of the existence of a continuous Morse function on an arbitrary topological manifold is still an open question. The continuous Morse function generates a topological gradient-like flow on the manifold [6], then Statement is a partial solution of the Morse problem: a topological manifold admits a continuous Morse function if and only if it admits a topological flow with a finite hyperbolic chain-recurrent set.

Statement follows directly from a more general result.

Theorem 2. ([3], theorem 2). *Any regular flow $f^t \in G^t$ has a continuous energy Morse-Bott function whose critical points are either non-degenerate or form non-degenerate one-dimensional manifolds.*

References

- [1] S. Smale On gradient dynamical systems // Ann. of Math. (2). 1961. - Vol. 74. - P. 199–206.
- [2] K. R. Meyer Energy functions for Morse Smale systems // Amer. J. Math. - 1968. - Vol. 90. - P. 1031–1040.
- [3] O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina Construction of the Morse–Bott Energy Function for Regular Topological Flows // Regular and Chaotic Dynamics. - 2021. - Vol. 26, No. 4. - P. 350–369.
- [4] T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina On existence of Morse energy function for topological flows // Advances in Mathematics. - 2021. - Vol. 378. - 107518.
- [5] M. Morse Topologically non-degenerate functions on a compact n -manifold // J. Analyse Math. - 1959. - Vol. 7. - P. 189–208.
- [6] R. C. Kirby, L. C. Siebenmann Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations, (AM-88), Vol. 88. - Princeton University Press. - 2016.

ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Аваков Е. Р. (Россия, Москва)

Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН
eramag@mail.ru

Магарил-Ильяев Г. Г. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
georgii.magaril@math.msu.ru

На отрезке $[t_1, t_2]$ рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U \quad \text{для п. в. } t \in [t_1, t_2], \quad x(t_1) = x_1, \quad (1)$$

где $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$, U — непустое подмножество \mathbb{R}^r и $x_1 \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Пара $(x(\cdot), u(\cdot)) \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_1, t_2], \mathbb{R}^r)$ допустима для управляемой системы (1), если для нее выполняются условия (1). Функцию $x(\cdot)$ в этом случае называем *допустимой траекторией* для системы (1).

Пусть D — множество всех допустимых траекторий для управляемой системы (1) и \bar{D} — его замыкание. Определим *множество достижимости* для системы (1) относительно открытого множества $V \subset C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$:

$$R(t_2, V) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \exists x(\cdot) \in D : x(t_2) = \xi, x(\cdot) \in V \}.$$

Определение 2. Скажем, что управляемая система (1) локально управляема относительно функции $\hat{x}(\cdot) \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, если для любой окрестности V этой функции выполняется включение

$$\hat{x}(t_2) \in \text{int } R(t_2, V).$$

Функция $\hat{x}(\cdot)$ не обязана принадлежать D , но, очевидно, что $\hat{x}(\cdot) \in \bar{D}$.

Определение 3. Функция $\hat{x}(\cdot) \in \bar{D}$ называется траекторией геометрического локального инфимума, если существует окрестность V этой функции такая, что

$$\hat{x}(t_2) \in \partial R(t_2, V),$$

где ∂ обозначает границу множества. Ясно, что если $\hat{x}(\cdot) \in \bar{D}$, то либо система (1) локально управляема относительно функции $\hat{x}(\cdot)$, либо эта функция является траекторией геометрического локального инфимума.

Системе (1) и $k \in \mathbb{N}$ сопоставим следующую выпуклую управляемую систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) f(t, x, u_i(t)), \quad \bar{\alpha}(t) \in \Sigma^k, \quad \bar{u}(t) \in U^k \quad \text{для п. в. } t \in [t_1, t_2], \quad (2)$$

где $\Sigma^k = \{ \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \}$ и $\bar{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$.

Определение 4. Тройка $(x(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{\alpha}(\cdot))$, *допустима* для управляемой системы (2), если для нее выполнены условия (2) и $x(t_1) = x_1$.

Введем множество $\Lambda(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{\alpha}(\cdot))$ ненулевых функций $\psi(\cdot) \in AC([t_1, t_2], (\mathbb{R}^n)^*)$, для которых справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -\psi(t) \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i(t) f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}_i(t)), \\ \max_{u \in U} \langle \psi(t), f(t, \hat{x}(t), u) \rangle &= \langle \psi(t), \dot{\hat{x}}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{\alpha}(\cdot))$ — допустимая тройка для выпуклой системы (2) и $\Lambda(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{\alpha}(\cdot)) = \emptyset$. Тогда система (1) локально управляема относительно функции $\hat{x}(\cdot)$.

Теорема 2. Если функция $\hat{x}(\cdot)$ является геометрическим локальным инфимумом для системы (1), то $\Lambda(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{\alpha}(\cdot)) \neq \emptyset$ для любой допустимой для выпуклой системы (2) тройки $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{\alpha}(\cdot))$.

Теоремы 2 представляет собой семейство соотношений в виде принципов максимума. При этом, если $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — оптимальный процесс, то это семейство (при $k = 1$, $\hat{u}_1(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$ и $\hat{\alpha}_1(\cdot) = 1$) содержит классический принцип максимума Понтрягина в геометрической форме, а также и другие соотношения, которые, вообще говоря, дают дополнительную информацию об оптимальной процессе, и тем самым, как следует из примеров, данная теорема усиливает принцип максимума Понтрягина в геометрической форме.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_1 В ПЛОСКОЙ СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ ПРИ РЕЗОНАНСАХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА³⁷

Авдюшкин А. Н. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
avdyushkin.a.n@yandex.ru

Рассматривается движение частицы малой массы в поле гравитационных сил, возникающих со стороны двух массивных тел, движущихся по известным эллиптическим орбитам. Помимо сил гравитационного притяжения со стороны указанных тел на частицу также действуют репульсивные силы светового давления. Предполагается, что частица не оказывает влияние на движение этих тел. В данной постановке задачу о движении частицы называют ограниченной фотогравитационной задачей трёх тел. В данной задаче существует известный частный случай движения – коллинеарная точка либрации L_1 , когда частица всё время располагается между притягивающими центрами на одной с ними прямой. Точка либрации L_1 является положением относительного равновесия во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат.

Исследования устойчивости точки либрации L_1 в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел при резонансе четвёртого порядка проводились и ранее. В работах [1], [2] исследование выполнено в случае круговых орбит притягивающих тел. В [3] рассмотрен случай, когда притягивающие тела имеют равные массы и движутся по слабоэллиптическим орбитам.

В данной работе не накладываются ограничения на массы притягивающих тел, но предполагается, как и в работе [3], что они движутся по слабоэллиптическим орбитам. Проводится исследование устойчивости точки либрации L_1 для нерассмотренных ранее случаев резонансов четвёртого порядка. Предполагается, что в предельном случае круговой орбиты ($e = 0$) точка либрации устойчива в линейном приближении, а частоты ω_1 , ω_2 ($\omega_1 > \omega_2 > 0$) линеаризованной в окрестности точки либрации системы уравнений движения точно или приближённо удовлетворяют одному из следующих резонансных соотношений $4\omega_2 = 1$ или $2(\omega_1 + \omega_2) = 1$. На слабоэллиптической орбите наличие данных резонансов может приводить к неустойчивости точки либрации. Чтобы решить вопрос об устойчивости функция Гамильтона была разложена в ряд в окрестности точки либрации L_1 и при помощи последовательности канонических замен переменных была приведена к нормальной форме. На основании анализа коэффициентов полученных нормальных форм, используя методику, изложенную в [4], были получены области формальной устойчивости и области неустойчивости точки либрации.

Литература

- [1] Тхай В. Н. Устойчивость коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел при внутреннем резонансе четвертого порядка // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 610–615
- [2] Bardin B. S., Avdushkin A. N. Nonlinear stability analysis of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem // 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 1925 012018. doi:10.1088/1742-6596/1925/1/012018
- [3] Bardin B. S., Avdushkin A. N. Stability of the collinear point L_1 in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries // 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 927 012015. doi:10.1088/1757-899X/927/1/012015
- [4] Маркеев А. П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М. : Наука, 1978. 312 с.

³⁷Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №20-31-90064).

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПО НАПЕРЁД ЗАДАННОМУ СУЩЕСТВЕННОМУ СПЕКТРУ³⁸

Агафонкин Г. А. (Россия, Москва)

МГУ им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
agafgr.an@yandex.ru

Рассматривается самосопряженный оператор Шрёдингера в $L_2([0, \infty))$, определяемый формальным выражением

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \delta_{x_k},$$

$$D(H) = \{u \in W_2^2([0, +\infty) \setminus \{x_k, k \in \mathbb{N}\}) \cap C([0, +\infty)) : u(0) = 0\},$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ – возрастающая последовательность положительных чисел, а через δ_{x_k} обозначена дельта-функция с носителем в x_k . Мы покажем, что, варьируя значения a_k и x_k , в качестве существенного спектра оператора H можно реализовать любое наперед заданное замкнутое полуограниченное множество $S \subset \mathbb{R}$. При этом первообразная потенциала оказывается асимптотически (но не монотонно) растущей, и можно указать явные оценки скорости ее роста.

Та же техника может быть применена и в более простом случае для оператора

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]},$$

$$D(H) = \{u \in W_2^2([0, +\infty)) : u(0) = 0\},$$

со ступенчатым потенциалом (здесь, как обычно, χ_A означает характеристическую функцию множества A). Здесь в качестве существенного спектра удастся реализовать тот же класс множеств, что и в предыдущей задаче. Однако поскольку на существенный спектр такого оператора влияет только отрицательная часть потенциала, условия на a_k и x_k оказываются куда менее ограничительными.

Отметим, что в обеих задачах условия Дирихле в нуле могут быть заменены на условия Неймана; общий результат при этом остается прежним, а сами рассуждения претерпевают совсем незначительные изменения.

Литература

- [1] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [2] Simon B. A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems. // J.Func.Anal. 28, 1978. С. 377-385.
- [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.

³⁸Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20261)

ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ДИНАМИКИ:
ЦИКЛ СИСТЕМЫ РЁССЛЕРА

Азамов А. А. (Узбекистан, Ташкент)

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз
abdulla.azamov@gmail.com

Абдуганиев А. А. (Узбекистан, Ташкент)

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз
aaaaz@mail.ru

В настоящее время в теории динамических систем широко используется компьютерный эксперимент, главным образом как эвристический инструмент для выявления свойств, в особенности в случае размерности 3. Более того, сформировалась ветвь теории динамических систем, называемая вычислительной динамикой (Computational Dynamics). Абсолютное большинство публикаций о системе Лоренца предъясвляет ее свойства, получаемые на основе вычислительных экспериментов. Безусловно, если в последующем приводится доказательство на уровне строгости, принятом в математике, то никаких вопросов не возникают. Однако доля результатов, установленных таким способом, ничтожно мала. В тех случаях, когда целью исследования является практическое применение, такое положение допустимо. Если же речь идет о теоретических исследованиях, то каждый вывод без доказательства должен быть сформулирован в виде гипотезы, а теоремы снабжаться дедуктивным доказательством.

С этой точки зрения, на наш взгляд, до сих пор отсутствует строгое доказательство наличия хаотической траектории в системах Лоренца и Рёсслера. Объёмистая статья В. Такера [1], где утверждается факт совпадения геометрического аттрактора с аттрактором системы Лоренца, содержит существенный пробел.

Основной элемент вычислительной динамики состоит в приближенном решении задачи Коши $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \xi$ одним из одношаговых методов, т.е. в виде рекуррентной последовательности $x_{n+1} = x_n + hF(x_n, h)$, $x_0 = \xi$.

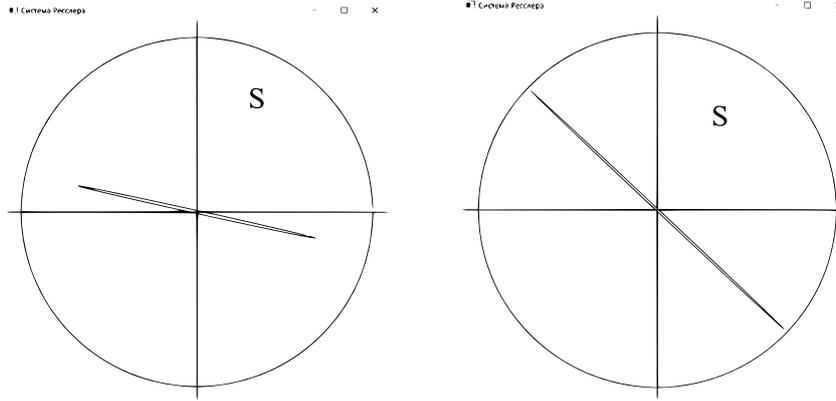
Вывод о поведении истинного решения $x(t)$ этой задачи Коши делается, как правило, исходя из оценки вида $|x(nh) - x_n| \leq Ch^k$, из которого вытекает, что приближенное решение можно сделать сколь угодно близким к точному решению (постоянная C зависит от данных задачи Коши, длины отрезка времени T , от компактной области, где лежит дуга траектории на отрезке времени $[0, T]$ и всегда содержит множитель e^{LT} , L – постоянная Липшица). Но такой оценки недостаточно для обоснования результатов компьютерного эксперимента. Дело в том, что вычислить последовательность x_n , за исключением несколько членов, на самом деле невозможно. При численном решении из-за округлений получается другая последовательность y_n . Если точность арифметических операций, выполняемых на компьютере, равна $10^{-\Delta}$, то имеет место оценка вида $|x(nh) - y_n| \leq Ch^{-1}10^{-\Delta}$.

Поэтому пока не будут установлены оценки принципиально другого вида, для утверждения о том, что при достаточно малых h свойства $x(t)$ окажутся такими же, какие наблюдаются у последовательности y_n , нет оснований.

В качестве демонстрации вышеизложенного рассматривается задача о существовании замкнутой траектории в системе Рёсслера:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - c).$$

На рисунке показано отображение Пуанкаре при $a = b = 0.1$, $c = 1$ и $c = 0.9$, построенное с помощью численного решения. В первом случае строго доказывается, что отображение Пуанкаре имеет неподвижную точку, в то же время для случая $c = 0.9$ этого не удается.



Литература

- [1] Tucker W. A. Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem // Found. Comput. Math., 2002, №2, pp. 53-117

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ БЕГУЩИХ ВОЛН В ПОЛНОСВЯЗНОЙ ЦЕПИ РЕЛЕЙНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ МЭКИ-ГЛАССА³⁹

Алексеев В. В. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
vladislav.alexeev.yar@gmail.com

Зеленова В. К. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
verzelenowa12@gmail.com

Преображенская М. М. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
 Центр интегрируемых систем
rita.preo@gmail.com

Генератором Мэки-Гласса принято называть [1] электрический генератор, функционирование которого описывается уравнением Мэки-Гласса [2]

$$\frac{dV}{dt} = -bV + \frac{acV(t - \tau)}{1 + (cV(t - \tau))^\gamma}.$$

Здесь $V(t)$ — это функция напряжения, $a > 0$ — уровень насыщения нелинейности, $b > 0$ — RC -постоянная, $\tau > 0$ — запаздывание по времени, параметр $\gamma > 0$ определяет форму нелинейной функции, $c > 0$ — сила обратной связи. Мы рассматриваем полностью связанную цепь генераторов Мэки-Гласса, где каждый генератор связан с каждым:

$$\frac{dV_j}{dt} = -b_j V_j + \frac{a_j c_j (V_j(t - \tau) + \sum_{k=0, k \neq j}^m V_k(t - h_k))}{1 + (c_j (V_j(t - \tau) + \sum_{k=0, k \neq j}^m V_k(t - h_k)))^{\gamma_j}}, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Здесь $V_j(t)$ — напряжения в электрической цепи Мэки-Гласса, $a_j > 0$ — уровни насыщения нелинейной функции, $b_j > 0$ — RC -постоянные, $h_j > 0$ — запаздывания по времени, параметры $\gamma_j > 0$ определяют форму нелинейной функции, $c_j > 0$ — сила обратной связи, $j = 1, \dots, m$, где m — количество генераторов.

Мы подменим систему дифференциально-разностных уравнений предельной, которая при этом по-прежнему обладает богатой динамикой и может рассматриваться в качестве самостоятельной модели генераторов. За счет полностью связанности цепи возникает большое количество (факториал от количества генераторов в цепи) сосуществующих режимов, построению которых посвящена настоящая работа.

³⁹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

Литература

- [1] Sano S., Uchida A., Yoshimori S., Roy R. Dual synchronization of chaos in Mackey-Glass electronic circuits with time-delayed feedback // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 016207.
 [2] Mackey M. C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. V. 197, No. 4300. P. 287–289.

ЗНАЧЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ВАСИЛЬЕВА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ТОРИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Аллёнов С. В. (Россия, Коломна)

Государственный социально-гуманитарный университет

allenov@list.ru

Вычисление инвариантов Васильева узлов по определению возможно только вручную, и практически не поддается программной реализации (т.к. по сути, является алгоритмической процедурой экспоненциальной сложности и требует обязательного привлечения других инвариантов). В работе проводятся вычисления инвариантов Васильева четвертого порядка для торических узлов, заданных диаграммами Гаусса, по стрелочным формулам, полученных автором в работах [1], [2], [3].

Замечено, что целочисленная последовательность 0, 3, 25, 98, 270, 605, 1183, 2100, 3468 ..., задающая инварианты четвертого порядка $(2, q)$ -торических узлов отсутствует в электронной энциклопедии целочисленных последовательностей. Такая регистрация была проведена под номером A180324 на ресурсе *oeis.org*.

Рассмотрим торические узлы $T(2, 2n + 1)$ образованные замыканием косы $\beta = (\sigma_1)^{2n+1}$ из двух нитей с нечетным числом пересечений, если число пересечений чётно, получается двухкомпонентное зацепление. Соответствующая диаграмма Гаусса узла $T(2, 2n + 1)$ состоит из $2n + 1$ пересекающихся стрелок со знаками минус.

$$\mathcal{G}(T(2, 2n + 1)) = \text{Diagram}$$

Инварианты Васильева узлов могут быть описаны стрелочными формулами вида: $V_n(K) = \langle P_n, \mathcal{G}(K) \rangle$, где $V_n(K)$ – инвариант Васильева порядка не выше n узла K , P_n – стрелочный полином порядка n (т.е. включает стрелочные диаграммы с не более чем n стрелками и хотя бы одну диаграмму с n стрелками), скобка $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задает способ подсчёта или функцию на диаграмме Гаусса узла.

Вычисления по стрелочным формулам, полученных автором приводят к результату: $V_4^1(T(2, 2n + 1)) = 0$, т. к. ни одна из стрелочных диаграмм формулы не вкладывается в диаграмму Гаусса узла $\mathcal{G}(T(2, 2n + 1))$. При вычислении $V_4^2(T)$ необходимо найти число вложений для двух стрелочных диаграмм в формуле, вложимых в $\mathcal{G}(T(2, 2n + 1))$. Отсюда получим: $V_4^2(T(2, 2n + 1)) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)^2$.

Распространяя по симметрии переменных полученные результаты на торические узлы $T(p, q)$ получаем формулы, которые согласуются с результатами работы [4]:

Утверждение. Если $T(p, q)$ – торический узел, то инварианты Васильева четвертого порядка вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} V_4^1(T(p, q)) &= 0; \\ V_4^2(T(p, q)) &= \frac{p^2 q^2 (p^2 - 1)(q^2 - 1)}{288}; \\ V_4^3(T(p, q)) &= \frac{(p^2 - 1)^2 (q^2 - 1)^2}{576}. \end{aligned}$$

В докладе будет рассмотрено несколько примеров серий узлов, для которых найдены значения инвариантов Васильева четвертого порядка по стрелочным формулам. Указана связь полученных значений с другими числовыми последовательностями.

Литература

- [1] Аллёнов С.В. Диаграммно-стрелочные формулы для инвариантов Васильева четвёртого порядка // Вестник Коломенского государственного педагогического института. 2007. № 2 (3). С. 15.
- [2] Аллёнов С.В. Явные формулы инвариантов Васильева четвёртого порядка для узлов // Современная математика и ее приложения. 2008. Т. 53. № 1. С. 29-38.
- [3] Аллёнов С.В. Диаграммно-стрелочные формулы инвариантов узлов четвёртого порядка // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 5. С. 1-17.
- [4] Alvarez M., Labastida J. M. F. Vassiliev invariants for torus knots // J. Knot Theory Ramifications. 1996. № 5. P. 779–803.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ НЕАВТОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ КРАТНОГО ВНЕШНЕГО РЕЗОНАНСА⁴⁰

Антипов А. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
antipant@mail.ru

Рассматривается неавтономная гамильтонова система с двумя степенями свободы, гамильтониан которой является 2π -периодической функцией времени t и аналитически зависит от малого параметра ε . Предполагается, что система близка к автономной, т.е. при $\varepsilon = 0$ гамильтониан явно от времени не зависит. В предельном случае, каноническая система имеет положение равновесия, которое при $\varepsilon \neq 0$ разрушается внешним периодическим воздействием. Если хотя бы одна из частот линеаризованной в окрестности положения равновесия системы близка к целому числу, то при ε не равном нулю имеет место резонанс в вынужденных колебаниях, который также называют внешним резонансом. При отсутствии внешнего резонанса каноническая система имеет единственное периодическое решение, рождающееся из положения равновесия. Это решение можно построить в виде сходящегося ряда по целым степеням малого параметра ε . В работах [1,2] было показано, что при наличии внешнего резонанса имеет место бифуркация периодических решений, рождающихся из положения равновесия, а сами эти решения представимы в виде рядов по дробным степеням ε .

В данной работе рассматривается неисследованный ранее случай кратного внешнего резонанса, когда частоты линейной системы относятся как 1:2, а наименьшая из них совпадает с частотой внешнего возмущения. Разработан конструктивный алгоритм, позволяющий построить указанные выше периодические решения при кратном резонансе указанного выше типа, а также исследовать вопрос об их бифуркации. На основе данного алгоритма получен явный вид асимптотических разложений для резонансных периодических движений по дробным степеням ε . Исследован вопрос о бифуркации данных периодических решений. Определено количество различных периодических решений и найдены области значений параметров, при которых они существуют, а также указаны условия их бифуркации. В качестве приложения рассмотрена задача о периодических движениях динамически симметричного спутника относительно центра масс в центральном гравитационном поле на слабоэллиптической орбите. Такие движения исследовались ранее в [3] при отсутствии внешнего резонанса и в [4,5] при наличии простого внешнего резонанса. В данной работе был рассмотрен случай кратного внешнего резонанса. В частности, были построены явные

⁴⁰Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00637.

асимптотические выражения, описывающие периодические движения спутника, рождающиеся из положения его относительного равновесия на круговой орбите. Была исследована бифуркация указанных периодических движений.

Литература

- [1] Маркеев А. П., Чеховская Т. Н. О резонансных периодических решениях Гамильтоновых систем, рождающихся из положения равновесия // ППМ. 1982. Вып. 46. С. 27–33.
- [2] Бардин Б. С. О ветвлении периодических решений системы, близкой к системе Ляпунова // ПММ. 1999. Т. 63. № 4. С. 538–547.
- [3] Сарычев В. А. Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // Космич. исслед. 1965. Т. 3. № 5. С. 667–673.
- [4] Чеховская Т. Н. Резонансные периодические движения осесимметричного спутника на эллиптической орбите // Космич. исслед. 1986. Т. 24. №1. С. 15–23.
- [5] Bardin B. S., Antipov A. A. On resonant periodic motions close to conical precession of a dynamically symmetric satellite in a weakly elliptic orbit // 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 927 012016.

МНОЖЕСТВО РАЗРЕЗА В СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧЕ НА ГРУППЕ КАРТАНА

Ардентов А. А. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
aaa@pereslavl.ru

Исследуется нильпотентная левоинвариантная субриманова задача в пятимерном пространстве с двумерным управлением, которую можно представить координатно как следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= u_1(t), \\ \dot{y}(t) &= u_2(t), \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{2}(-u_1(t)y(t) + u_2(t)x(t)), \\ \dot{v}(t) &= \frac{1}{2}u_2(t)(x^2(t) + y^2(t)), \\ \dot{w}(t) &= -\frac{1}{2}u_1(t)(x^2(t) + y^2(t)), \end{cases} \quad (1)$$

$$(x(0), y(0), z(0), v(0), w(0)) = (0, 0, 0, 0, 0), \quad (2)$$

$$(x(T), y(T), z(T), v(T), w(T)) = (x_1, y_1, z_1, v_1, w_1), \quad (3)$$

$$l(u_1, u_2) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

где T есть конечное время, $(x, y, z, v, w)(t) \in \mathbb{R}^5$ задаёт элемент группы Картана, а $(u_1, u_2)(t) \in \mathbb{R}^2$ определяет управление.

Задача (1)–(4) имеет наглядную геометрическую интерпретацию в виде обобщенной задачи Дидоны [1] и является единственной субримановой задачей на свободной нильпотентной группе глубины три и более, которая является интегрируемой по Лиувиллю [2,3]. Известно, что решения на плоскости (x, y) суть дуги эластик Эйлера, более того, достаточно малые дуги всех возможных эластик всегда являются оптимальными. Явная параметризация экстремальных решений на группе Картана в координатном виде приведена в работе [4].

В недавней работе [5] была доказана следующая теорема о единственности решения в ситуации общего положения.

Теорема 1. Если $z_1 \left(x_1 v_1 + y_1 w_1 - \frac{(x_1^2 + y_1^2) z_1}{2} \right) \neq 0$, тогда существует единственное решение задачи (1)–(4).

Данное исследование направлено на детальное изучение симметричных решений со следующими условиями:

$$z_1 \left(x_1 v_1 + y_1 w_1 - \frac{(x_1^2 + y_1^2) z_1}{2} \right) = 0. \quad (5)$$

Известно, что множество конечных точек, которое описывается условиями (5), содержит множество разреза, т.е. точки, в которых соответствующие геодезические (экстремальные решения ПМП) теряют свою оптимальность.

На данный момент множество точек (5) исследовано лишь численно. Некоторые свойства этого множества, обнаруженные в ходе численного исследования, доказаны аналитически.

В докладе будет уделено отдельное внимание кратным решениям. Доказано, что существует по крайней мере три различные формы эластик, которые доставляют решение бесконечной кратности в определённые точки множества (5). Одна из таких форм, в виде восьмёрки (лемнискаты Бернулли), была унаследована из субримановой задачи на группе Энгеля [6].

Литература

- [1] Сачков Ю. Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Матем. сб., 2006, Vol.197, No. 4, 123–150.
- [2] Bizyaev I., Borisov A., Kilin A., Mamaev I. Integrability and nonintegrability of sub-Riemannian geodesic flows on Carnot groups // RCD. 2016. Vol. 21. No 6. С. 759–774.
- [3] Локуциевский Л. В., Сачков Ю. Л. Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 5. С. 74–119.
- [4] Сачков Ю. Л. Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 9. Р. 63–90.
- [5] Ardentov A., Hakavuori E. Cut time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group // ESAIM: COCV. 2022. Vol. 28. No 12. 19 pages.
- [6] Ardentov A., Sachkov Yu. Maxwell Strata and Cut Locus in the Sub-Riemannian Problem on the Engel Group // RCD. 2017. Vol. 22. No 8. Р. 909–936.

ОБ ОСЛАБЛЕНИИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Асеев С. М. (Россия, Москва)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

aseev@mi-ras.ru

В докладе будет рассказано об одной новой задаче оптимального управления, включающей в свою постановку множество "нежелательных" состояний системы. В классической теории оптимального управления, наличие такого (открытого) множества нежелательных состояний обычно моделируется при помощи задания фазового ограничения, устанавливающего запрет на прохождение траекторий через это множество (см. [1]). В рассматриваемой задаче, нахождение траекторий в множестве нежелательных состояний возможно, но штрафует при помощи дополнительного интегрального члена в функционале цены, содержащего характеристическую функцию открытого множества нежелательных состояний. Данная задача тесно связана с задачей с фазовым ограничением, которая может рассматриваться, как ее предельный случай. В некоторых ситуациях рассматриваемая задача оказывается эквивалентной соответствующей задаче с фазовым ограничением.

В докладе будут представлены недавно полученные необходимые условия оптимальности первого порядка для рассматриваемой задачи (см. [2]) и рассмотрен иллюстрирующий пример.

Литература

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

- [2] Асеев С.М., Усиленное включение Эйлера–Лагранжа для одной задачи оптимального управления с разрывным интегрантом // Труды МИАН. 2021. Т. 315. С. 34–63.

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ В СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ахматов З. А. (Россия, Владикавказ)

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН
ahmatov1993@yandex.ru

Тотиева Ж. Д. (Россия, Владикавказ)

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН
jannatuaeva@inbox.ru

Представлена двумерная обратная задача последовательного определения двух неизвестных (ядра интегрального оператора и двумерной скорости распространения волн) для системы уравнений вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде. Восстановление неизвестных характеристик для сред с последствием, несомненно, является актуальной задачей с точки зрения приложений, так как становится возможным проводить анализ влияния памяти среды на ее характеристики. При этом требуется одновременно (или последовательно) находить коэффициент уравнения и ядро интегрального оператора. Для практических приложений более интересным является случай, когда характеристики среды зависят от двух и более переменных. Например, для геофизики одним из основных вопросов является количественная оценка горизонтальных неоднородностей в скоростях сейсмических волн. Накоплены факты, свидетельствующие о существовании внутри Земли неоднородностей по географическим координатам, или горизонтальных неоднородностей. К числу таких фактов относятся систематические отклонения годографов волн от усредненного годографа, асимметрия гравитационного и электромагнитного полей. При этом отклонения от годографов, отвечающих сферически-симметричному распределению скоростей упругих волн, достаточно малы [1]. В работе [2] рассмотрена одна модельная задача определения двумерного ядра интегро-дифференциального уравнения в среде со слабо горизонтальной неоднородностью, в которой развиты методы решения обратных задач из работы [3].

Рассмотрим при $x = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $x_3 > 0$ интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=2}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \int_0^t k(t - \tau) \sum_{j=2}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (x, \tau) d\tau, \quad (1.1)$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (1.2)$$

$$a(x_2, 0) \left[\frac{\partial u}{\partial x_3} (x, t) + \int_0^t k(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial x_3} (x, \tau) d\tau \right] \Big|_{x_3=+0} = -\delta(x_2) \delta'(t), \quad (1.3)$$

$u(x, t)$ – функция смещения, $a(x_2, x_3) > 0$ – коэффициент, описывающий скорость распространения волн в среде, $k(t)$ – функция памяти, учитывающая вязкие свойства среды; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $\delta'(\cdot)$ – производная $\delta(\cdot)$.

Прямая задача заключается в отыскании функции $u(x_2, x_3, t)$ из уравнения (1.1) при соответствующих начальных и граничных условиях (1.2), (1.3).

Обратная задача: определить коэффициент $a(x_2, x_3)$ и ядро интегрального оператора $k(t)$, $t > 0$, входящих в (1.1), если относительно решения задачи (1.1)–(1.3) известна дополнительная информация

$$F_{x_2}[u](x_3, t, \nu)|_{x_3=+0} = g(t, \nu), \quad t > 0, \nu \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

$g(t, \nu)$ – заданная функция, $F_{x_2}[u](x_3, t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_2, x_3, t) e^{-i(\nu x_2)} dx_2$ – образ Фурье функции $u(x, t)$ по переменной x_2 (здесь и далее i – мнимая единица).

Определение. Пара функций $a(x_2, x_3) \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, $k(t) \in C([0, \infty))$ называется решением обратной задачи (1.1)–(1.3), если соответствующее ей решение прямой задачи (1.1)–(1.3) $u(x, t)$ из класса обобщенных функций $D'(\mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R})$ удовлетворяет (1.4) для $g(t, \nu)$, принадлежащей классу $D'([0, \infty))$ для ненулевого фиксированного значения ν .

Предполагаем, что $a(x_2, x_3)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x_2 :

$$a(x_2, x_3) = a_0(x_3) + \varepsilon x_2 a_1(x_3) + O(\varepsilon^2), \quad (1.5)$$

где ε – малый параметр. В равенстве (1.5) будем считать $a_0(x_3)$ заданной положительной величиной. В работе построен метод нахождения $k(t)$ и $a_1(x_3)$ с точностью до величины $O(\varepsilon^2)$. Для этого оказалось достаточным задание функции $g(t, \nu)$ для одного ненулевого значения преобразования ν . Результатами исследования являются теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Литература

- [1] Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984.
- [2] Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р. Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13. № 2. С. 209–221.
- [3] Благовещенский А. С., Федоренко Д. А. Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 81–99.

О ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ В ЗАДАЧЕ ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ⁴¹

Бардин Б. С. (Россия, Москва)

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)
 Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)
 Институт машиноведения им. А. А. Благодярова Российской академии наук
bsbardin@yandex.ru

Анализ орбитальной устойчивости периодических движений консервативных систем удобно проводить при помощи введения локальных координат – переменных, описывающих поведение системы в малой окрестности исследуемого периодического движения. Это позволяет свести задачу об орбитальной устойчивости к задаче об устойчивости по Ляпунову положения равновесия периодической гамильтоновой системы. Для решения последней задачи можно применить хорошо развитые методы и конструктивные алгоритмы теории устойчивости гамильтоновых систем, основанные на методе нормальных форм и теории КАМ.

Переход от исходных (глобальных) переменных к локальным координатам часто является непростой задачей. Иногда локальные координаты удаётся ввести следующим образом. Сначала в явном виде строится каноническая замена переменных, позволяющая в области периодических движений на инвариантном двумерном многообразии ввести переменные действие-угол. Если такую замену удастся построить, то в качестве локальных координат, можно выбрать возмущение переменной действия и возмущения других канонических переменных, ортогональные к инвариантному многообразию, на котором лежит исследуемая периодическая траектория. Такой подход, в частности, применялся в задачах об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела. При применении данного подхода можно столкнуться с рядом технических затруднений,

⁴¹Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект №22-21-00729).

которые состоят как нахождении указанной выше канонической замены переменных, так и в построении разложения функции Гамильтона в ряд в окрестности невозмущенного периодического движения. Другой метод введения локальных координат был предложен в работе [1] и основан на построении линейной канонической замены переменных с периодическими коэффициентами. Этот метод даёт возможность обойти упомянутые выше технические затруднения и позволяет решать широкий круг задач об орбитальной устойчивости, но в ряде случаев его применение также может оказаться затруднительным из-за появления сингулярности в коэффициентах линейной замены.

В данной работе предлагается метод введения локальных координат при помощи построения нелинейной канонической замены переменных. Описан конструктивный алгоритм построения указанной замены переменных в виде рядов по степеням новых переменных – локальных координат. Данный метод позволяет избежать сингулярности при введении локальных координат и может применяться как при аналитическом, так и при численном анализе орбитальной устойчивости. В качестве приложения рассмотрены две задачи классической и небесной механики: задача об орбитальной устойчивости периодических движений тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Бобылева-Стеклова и задача об орбитальной устойчивости периодических движений динамически симметричного спутника на круговой орбите. Результаты исследования орбитальной устойчивости, полученные на основании предложенной методики, полностью согласуются и существенно дополняют результаты, полученные ранее в указанных задачах другими методами [2,3].

Литература

- [1] Маркеев А. П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // ПММ, 2002, Т. 66, Вып. 4, С. 929-928.
- [2] Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева-Стеклова // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 4. С. 535-550.
- [3] Markeev A. P., Bardin B. S. On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit // Cel. Mech. and Dyn. Astron. 85: 51–66, 2003.

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ⁴²

Бардин Б. С. (Россия, Москва)

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук
bsbardin@yandex.ru

Волков Е. В. (Россия, Москва)

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук
evvolkov94@mail.ru

Сухов Е. А. (Россия, Москва)

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)
sukhov.george@gmail.com

Рассматривается плоская круговая ограниченная задача четырёх тел в следующей постановке. Тело малой массы движется в гравитационном поле трёх основных притягивающих тел с массами m_1 , m_2 и m_3 , которые взаимодействуют по закону всемирного тяготения и движутся по круговым орбитам, образуя постоянную конфигурацию – равносторонний треугольник. Такое движение описывается хорошо известным частным решением Лагранжа задачи трех тел. Предполагается, что тело малой массы не влияет на движение трех основных тел, а параметры

⁴²Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект №22-21-00729).

задачи таковы, что указанное движение основных притягивающих тел устойчиво. Существуют такие движения тела малой массы, при которых оно образует с притягивающими телами конфигурацию неизменной формы и размеров, так называемую центральную конфигурацию. Центральной конфигурации соответствует положение относительного равновесия тела малой массы во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат. Эти положения равновесия будем называть точками либрации ограниченной задачи четырех тел. Устойчивость данных точек либрации означает устойчивость всей центральной конфигурации.

В настоящей работе рассматривается частный случай, когда два из основных тел имеют равные массы: $m_2 = m_3 \neq m_1$. В этом случае задача об устойчивости точек либрации была подробно исследована в работе [1].

В данной работе были построены семейства периодических движений тела малой массы, рождающиеся из устойчивых точек либрации, и исследована их орбитальная устойчивость в линейном приближении. Для значений параметров задачи из малой окрестности точек либрации указанные семейства были получены аналитически с использованием метода нормальных форм. Исследование задачи о существовании и орбитальной устойчивости семейств периодических движений при произвольных значениях параметров выполнялось при помощи алгоритма численного продолжения [2], который основан на методике, предложенной в [3], [4]. Результаты исследования представлены в виде диаграмм существования и орбитальной устойчивости рассматриваемых семейств периодических движений, построенной в пространстве параметров задачи.

Литература

- [1] Bardin B. S., Volkov E. V. Stability Study of a Relative Equilibrium in the Planar Circular Restricted Four-Body Problem // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 927, 2020.
- [2] Бардин Б. С., Сухов Е. А. Об алгоритме продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // Тез. докл. LIV Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц плазмы и оптоэлектроники / РУДН. Москва: 2018. С. 198–202.
- [3] Каримов С. Р., Сокольский А. Г. Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем // Препринт / ИТА АН СССР. № 9. 1990. С. 32.
- [4] Deprit A., Henrard J. Natural Families of Periodic Orbits // Astronomical Journal. 1967. Vol. 72. no. 2. P. 158–172.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ АНИЗОТРОПНОГО СУХОГО ТРЕНИЯ⁴³

Бардин Б. С. (Россия, Москва)

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)
Институт машиноведения им. А. А. Благодирова Российской академии наук
bsbardin@yandex.ru

Рачков А. А. (Россия, Москва)

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)
rachkova@mai.ru

Рассматривается механическая система, состоящая из твердого тела и подвижной внутренней массы. В начальный момент времени тело покоится на наклонной шероховатой плоскости, опираясь на нее одной из своих плоских граней. Подвижная масса совершает внутри тела относительное движение в вертикальной плоскости по окружности, центр которой совпадает с центром масс корпуса. Угловая скорость кругового движения внутренней массы

⁴³Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проекта № 19-11-00116).

постоянна. За счет перемещения внутренней массы и под действием силы тяжести тело может совершать поступательное прямолинейное движение по наклонной плоскости. В области контакта тела и опорной плоскости действуют силы сухого анизотропного трения.

В работах [1], [2], [3], [4] рассматривалось движение данной механической системы по горизонтальной шероховатой плоскости. В частности, в [1] был выполнен полный качественный анализ движения тела как в случае сухого, так и в случае вязкого трения. В случае анизотропного сухого трения в [4] были исследованы периодические режимы движения.

Уравнения движения корпуса по наклонной плоскости при наличии анизотропного трения содержат четыре параметра: коэффициенты трения при движении вверх (вперед) и вниз (назад), угол наклона опорной плоскости к горизонту и безразмерный параметр, зависящий от массовых, геометрических и кинематических характеристик системы.

В данной работе исследовались возможные режимы движения корпуса из состояния покоя при условии, что коэффициент трения при движении вверх по наклонной плоскости не превосходит коэффициента трения при движении вниз. Было установлено, что в зависимости от значений этих параметров возможны пять качественно различных случаев: 1) корпус не может начать движение из состояния покоя; 2) корпус может начать движение из состояния покоя вверх, но не может начать движение вниз; 3) корпус может начать движение из состояния покоя вниз, но не может начать движение вверх; 4) корпус может начать движение из состояния покоя как вверх, так и вниз; 5) в начальный момент времени корпус начинает двигаться вниз без остановок с нарастающей скоростью.

Показано, что в случаях 2), 3) и 4) движение корпуса является периодическим. В частности, в случае 2) корпус может совершать только поступательное движение вверх с остановками и периодами покоя. В случае 3) имеет место периодический режим, при котором корпус совершает поступательное движение вниз с остановками и периодами покоя. В случае 4) в зависимости от значений параметров задачи возможны несколько качественно различных периодических режимов движения. Дано подробное описание и получено аналитическое представление всех периодических режимов движения.

Литература

- [1] Бардин Б. С., Панёв А. С. О поступательном прямолинейном движении твердого тела, несущего подвижную внутреннюю массу // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 557-592.
- [2] Bardin B. S., Panev A. S. On the Motion of a Body with a Moving Internal Mass on a Rough Horizontal Plane // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2018. Vol. 14. no. 4. pp. 519-542.
- [3] Bardin B. S., Panev A. S. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle // Vibroengineering PROCEDIA, 2016. Vol. 8. pp. 135-141.

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЯХ В РАЗВИТИЕ ТЕХНОЛОГИЙ В ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

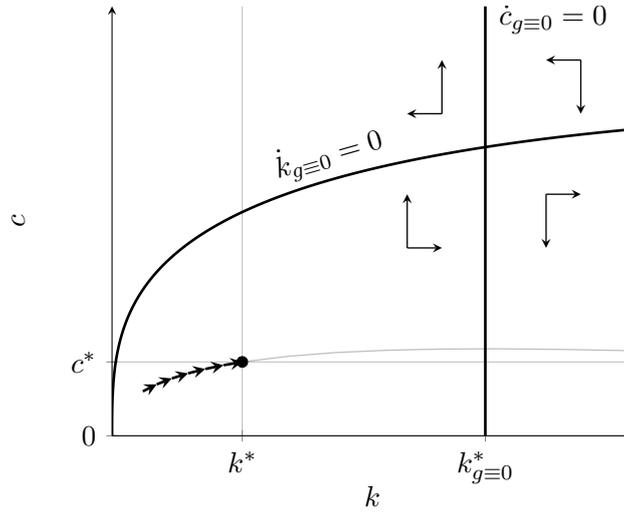
Беляков А. О. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”
Центральный экономико-математический институт РАН
a_belyakov@inbox.ru

В упрощённой постановке задачи [1] об оптимальных вложениях в технологический рост покажем, что не нужно вкладывать в технологии, а лишь в физический капитал, т.е. производить станки и оборудование, пока физический капитал не достигнет определённого уровня. А затем начать вкладывать в развитие технологий постоянную долю от выпуска.

Поставляемый населением поток труда в экономике считаем постоянным и нормируем к единице. Рассмотрим задачу центрального планировщика, максимизирующего дисконтированную с нормой $\rho > 0$ полезность потребителей в экономике

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(C(t)) dt \rightarrow \max_{C(\cdot), G(\cdot)}, \quad C(t) \geq 0, \quad G(t) \geq 0, \quad K(t) > 0$$



где скорость роста физического капитала K (чистые инвестиции)

$$\dot{K}(t) = F(K(t), A(t)) - C(t) - G(t), \quad K(0) = K_0 > 0,$$

– то, что остаётся от чистого выпуска F после частного потребления C и государственных трат G на увеличение человеческого капитала A , т.е. развитие технологий:

$$\dot{A}(t) = \gamma G(t), \quad A(0) = A_0 > 0,$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент эффективности инвестиций в человеческий капитал. Функцию $F(K, A)$ возьмём линейно однородной, и дифференцируемой по обоим переменным и с убывающими частными производными по каждой переменной. Будем предполагать что, потребители обладают постоянной положительной относительной несклонностью к риску $\theta = \frac{u''(C)C}{u'(C)}$ для всех $C > 0$.

Применив достаточные условия оптимальности Мангасаряна [2], удобно записать результат в удельных переменных

$$f(k) := \frac{F(K, A)}{A} = F(k, 1), \quad k := \frac{K}{A}, \quad g := \frac{G}{A}, \quad c := \frac{C}{A}.$$

Оптимальным решением при $k_0 < k^*$ будет динамика с нулевыми вложениями в человеческий капитал, $g(t) = 0$, при $t \in [0, T]$ согласно системе:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t), \quad k(0) = k_0, \quad (1)$$

$$\theta \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'(k(t)) - \rho, \quad c(T) = c^*, \quad (2)$$

до момента $T = T(k_0)$, когда удельный капитал и потребление достигнут рассчитанных из $f'(k^*) = (f(k^*) - f'(k^*)k)\gamma$ и $c^* = \left(\frac{1}{\gamma} + k^*\right) \frac{(\theta-1)f'(k^*) + \rho}{\theta}$ значений $k(T) = k^*$ и $c(T) = c^*$, где удельные вложения в человеческих капитал $g(\cdot)$ скачком увеличатся с нуля до $g^* = \frac{f'(k^*) - \rho}{\theta\gamma}$ и, как и остальные удельные переменные, $c(t) = c^*$ и $k(t) = k^*$, для всех $t > T$ останутся постоянными. Оптимальная траектория удельных капитала и потребления на фазовой диаграмме обозначена стрелками, ведущими в точку (k_*, c_*) , где вложения в человеческий капитал $G(t)$ возрастают с 0 до $g_* A_0 e^{\gamma g_*(t-T)}$.

Литература

- [1] Lucas, Robert E. Jr. On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics 22 (1988) 3-42.
- [2] Seierstad, A., Sydsæter, K. Optimal control theory with economic applications. Elsevier North-Holland, Inc. 1986.

ВНУТРЕННЕЕ РАССЕЯНИЕ АРНОЛЬДА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ

Богаевский И. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
bogaevsk@mccme.ru

В 1988 г. В. И. Арнольд нашёл нормальные формы некоторых особенностей уравнения эйконала, возникающих неустранимым образом в системах линейных уравнений, появляющихся во многих задачах математической физики [1]. В указанной работе рассматривались уравнения эйконала, описывающие коротковолновые асимптотики решений рассматриваемого класса систем. В этой ситуации для реализации особенностей Арнольда требуются условия типичности, которые редко встречаются в прикладных задачах. Например, в случае звуковых волн среда должна быть и неоднородной, и анизотропной.

Недавно обнаружилось, что обсуждаемые особенности встречаются в уравнениях эйконала, описывающих некоторые квазиклассические асимптотики. Один из примеров — безмассовое уравнение Дирака, описывающее распределение квазичастиц (электронов и дырок) в графене.

Литература

- [1] V.I. Arnold, On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles // J. Geom. Phys., 5, 305–315 (1988).

К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Богданов А. Н. (Россия, Москва)

НИИ механики МГУ
bogdanov@imec.msu.ru

Успехи в математическом моделировании ряда сложных задач, достигнутые с использованием асимптотических методов, к примеру, в приложении к газовой динамике [1], позволяют рассчитывать на дальнейшее плодотворное продвижение в этом направлении.

В аэромеханике естественным развитием классических постановок задач динамики ударных волн является математическое моделирование процессов распространения нелинейных возмущений через неоднородную среду – актуальных в связи с приложениями задач [2].

Полученная [3] из решения линеаризованной задачи связь скорости нелинейной волны с характеристикой неоднородности среды перед ее фронтом представляет интерес не только потому, что замечательно проста и для получения этой зависимости используются относительно простые методы: примененный для ее получения метод и способы определения точности и уточнения полученного результата могут служить методологическим руководством при применении асимптотических методов в задачах теории нелинейных уравнений в частных производных и материалом для дальнейшего развития указанных методов. Действуя решительно, можно получить ответ в достаточно сложной задаче (это правило автор воспринял через О. С. Рыжова).

Литература

- [1] Whitham G. V. Linear and Nonlinear Waves. John Wiley & Sons. 1974. 635 p. (Имеется перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.)
[2] Гласс И. И. Ударные волны и человек. – М.: Мир, 1977. 191 с.
[3] Богданов А. Н. Динамика ударных волн в средах с продольной стратификацией // Доклады РАН. Т. 491, с. 5-6.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА-КАПУТО

Бойко К. В. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
kvboyko@mail.ru

Пусть \mathcal{X} , \mathcal{Y} — банаховы пространства. Будем предполагать, что $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $L, M_1, M_2, \dots, M_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_n \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, D_{M_n} — область определения оператора M_n , на которой задана норма графика $\|\cdot\|_{D_{M_n}} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M_n \cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Будем предполагать также, что M_n $(L, 0)$ -ограничен [1].

Рассмотрим обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{j=1}^n D_t^{\alpha_j} M_j x(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $m - 1 < \alpha \leq m$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Y}$, $T > 0$, с начальными условиями

$$x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad l = 0, 1, \dots, m_n - 1, \quad (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1, \quad (2)$$

и условием переопределения

$$\int_0^T x(t) d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}. \quad (3)$$

Решением задачи (1)–(3) будем называть пару $(x(t), u)$, где функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2) с соответствующим $u \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее (3).

Если оператор M_n $(L, 0)$ -ограничен, то задача (1)–(3) эквивалентна системе двух задач на дополняющих друг друга подпространствах \mathcal{X}^0 и \mathcal{X}^1 :

$$\begin{aligned} D_t^\alpha v(t) &= \sum_{j=1}^n D_t^{\alpha_j} L_1^{-1} M_{j,1} v(t) + \varphi(t) L_1^{-1} u^1, \quad t \in [0, T], \\ v^{(l)}(0) &= v_l, \quad l = 0, 1, \dots, m - 1, \quad \int_0^T v(t) d\mu(t) = v_T, \\ D_t^{\alpha_n} w(t) &= - \sum_{j=1}^{n-1} D_t^{\alpha_j} M_{n,0}^{-1} M_{j,0} w(t) - \varphi(t) M_{n,0}^{-1} u^0, \quad t \in [0, T], \\ w^{(l)}(0) &= w_l, \quad l = 0, 1, \dots, m_n - 1, \quad \int_0^T w(t) d\mu(t) = w_T, \end{aligned}$$

где $v(t) = Px(t)$, $w(t) = P_0x(t)$, $v_l = Px_l$, $l = 0, 1, \dots, m - 1$, $w_l = P_0x_l$, $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $v_T = Px_T$, $w_T = P_0x_T$, $u^1 = Qu$, $u^0 = Q_0u$. Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_0 &= w_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m_n-1} X_{l,0}(t) w_l d\mu(t), \quad \chi_0 = - \int_0^T d\mu(t) \int_0^t X_0(t-s) M_{n,0}^{-1} \varphi(s) ds \\ \psi_1 &= v_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m-1} X_{l,1}(t) v_l d\mu(t), \quad \chi_1 = \int_0^T d\mu(t) \int_0^t X_1(t-s) L_1^{-1} \varphi(s) ds, \end{aligned}$$

для $t > 0$

$$X_{l,0}(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^0} \left(\lambda^{\alpha_n} I + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^{\alpha_j} M_{n,0}^{-1} M_{j,0} \right)^{-1} \times \\ \times \left(\lambda^{\alpha_{n-l-1}} I + \sum_{j=(n-1)_l}^{n-1} \lambda^{\alpha_j-l-1} M_{n,0}^{-1} M_{j,0} \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

при $(n-1)_l = \min\{j \in \{1, 2, \dots, n-1\} : l \leq m_j - 1\}$, $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$,

$$X_{l,1}(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^1} \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{j=1}^n \lambda^{\alpha_j} L_1^{-1} M_{j,1} \right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{j=n_l}^n \lambda^{\alpha_j-l-1} L_1^{-1} M_{j,1} \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

при $n_l = \min\{j \in \{1, 2, \dots, n\} : l \leq m_j - 1\}$, $l = 0, 1, \dots, m - 1$,

$$X_0(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^0} \left(\lambda^{\alpha_n} I + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^{\alpha_j} M_{n,0}^{-1} M_{j,0} \right)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$X_1(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^1} \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{j=1}^n \lambda^{\alpha_j} L_1^{-1} M_{j,1} \right)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Теорема 1. Пусть $L, M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, $M_n \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ($L, 0$)-ограничен, $M_j P = Q M_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$. Тогда задачи (1)–(3) корректна в том и только в том случае, когда существуют $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$. При этом решение имеет вид $u = \chi_0^{-1} \psi_0 + \chi_1^{-1} \psi_1$.

Литература

- [1] Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28. №3. С. 85–104.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Бойков И. В. (Россия, Пенза)

Пензенский государственный университет

boikov@pnzgu.ru

Исследуется устойчивость решений систем линейных и нелинейных параболических уравнений с запаздываниями.

Исследованию устойчивости решений параболических уравнений посвящена обширная литература [1]–[3].

Имеется ряд прикладных задач, в частности, в экологии и в иммунологии, которые моделируются системами уравнений в частных производных параболического типа с запаздываниями. Это является стимулом для исследования устойчивости решения этих систем.

Предлагается несколько методов исследования устойчивости решений систем параболических уравнений. Один из методов исследования заключается в следующем.

При изложении метода исследования ограничимся рассмотрением линейной системы уравнений

$$\frac{\partial u_i(t, x_1, x_2)}{\partial t} = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u_k(t - \eta_{ij}, x_1, x_2)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^2 b_{ij} u_j(t - \eta_{ij}, x_1, x_2), \quad (1)$$

$$u_i(t, x_1, x_2) = \varphi_i(t, x_1, x_2), -\eta \leq t \leq 0, i = 1, 2. \quad (2)$$

Будем считать, что функции $u_i(t, x_1, x_2), \partial u_i(t, x_1, x_2) | \partial t, i = 1, 2$, суммируемы с квадратом по пространственным переменным.

К начальной задаче (1)-(2) применяется преобразование Фурье по пространственным переменным и исследуется устойчивость системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами ω_1, ω_2 и с запаздываниями в спектральной области.

Полученные достаточные условия устойчивости в спектральной области трансформируются в достаточные условия устойчивости решений начальной задачи, выраженной через коэффициенты уравнения (1).

Литература

- [1] Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. -М.: Наука, 1987. 232 с.
- [2] Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений.- Пенза: Издательство Пензенского государственного университета. 2008. 244 с.
- [3] Кащенко С.А., Логинов Д.О. Устойчивость решений уравнений параболического типа с медленно меняющимися коэффициентами// Динамические системы, 2018, том 8(36), №3, с. 245 - 262.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бойков И. В. (Россия, Пенза)

Пензенский государственный университет
i.v.boikov@gmail.com

Руднев В. А. (Россия, С.Петербург)

С.Петербург государственный университет
v.rudnev@spbu.ru

Бойкова А. И. (Россия, Пенза)

Пензенский государственный университет
allaboikova@mail.ru

Гиперсингулярные интегральные уравнения находят широкое применение как при моделировании различных явлений в физике и технологиях, так и при исследовании различных классов уравнений математической физики. В частности, метод граничных интегральных уравнений позволяет приводить эллиптические, параболические и гиперболические уравнения к различным классам гиперсингулярных интегральных уравнений. Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений известны только для очень узкого класса уравнений, и, следовательно, первоочередной задачей является развитие приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов и решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

Приближенным методом вычисления гиперсингулярных интегралов посвящено большое число работ, в которых предложены различные методы. Достаточно подробные обзоры работ, выполненных в этом направлении, представлены в [1], [2], [3]. Несмотря на активное развитие этого направления, в настоящее время отсутствуют численные методы вычисления многих классов гиперсингулярных, полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегралов.

Аналогичная картина складывается и в направлении, связанном с численными методами решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Опубликовано большое число работ, посвященных различным численным методам решения отдельных классов гиперсингулярных интегральных уравнений, преимущественно первого рода.

Достаточно подробные обзоры этих работ содержатся в [1], [4]. Необходимо отметить, что в большинстве работ рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения с особенностями второго порядка. Численные методы решения полигиперсингулярных

интегральных уравнений и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений начали развиваться в последние декады.

Данная работа посвящена приближенным методам вычисления гиперсингулярных, полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегралов и приближенному решению интегральных уравнений с перечисленными выше интегралами.

Дан обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов. Представлены численные методы вычисления гиперсингулярных и полигиперсингулярных интегралов.

Предложены и обоснованы приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений с особенностями третьего и четвертого порядков. Приведены численные примеры, иллюстрирующие эффективность построенных алгоритмов.

Литература

- [1] Вайникко, Г.М. Вайникко, Г.М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения // Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М: Янус-К, 2001. 508 с.
- [2] Бойков И. В., Айкашев П. В. Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. №1. С. 66-84.
- [3] Boykov, I., Roudnev, V., Boykova, A. Approximate Methods for Calculating Singular and Hypersingular Integrals with Rapidly Oscillating Kernels. *Axioms* 2022, 11, 150. <https://doi.org/10.3390/axioms11040150>
- [4] Boykov I. V. Approximate Methods for Solving Hypersingular integral Equations. In the book "Topics in Integral and Integro-Difference Equations. Theory and Applications. Editors Harenfra Singh, Hemen Dutta, Marcelo M. Cavalcanti. 2021. PP. 63-102.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ПЕРЕМЕННОЙ

Бортаковский А. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
asbortakov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления гибридной системой, непрерывное движение которой чередуется с дискретными изменениями (переключениями), при которых меняется пространство состояний. Смена размерности пространства состояний происходит, например, при изменении количества управляемых объектов, что характерно, в частности, для задач управления группами подвижных объектов переменного состава. Моменты переключений заранее не заданы. Они определяются в результате минимизации функционала, при этом не исключаются процессы с мгновенными многократными переключениями [1]. Доказаны необходимые условия оптимальности управления такими системами. Из-за наличия мгновенных многократных переключений и управлений переключениями эти условия отличаются от известных [2-4].

1. Постановка задачи. Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени t_1, \dots, t_N : $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$. Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad t \in T_i = [t_i, t_{i+1}), \quad i \in \mathcal{N},$$

а в моменты переключений – дискретно:

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь: $x_i(t) \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ – состояние системы после i -го переключения, $u_i(t) \in U_i \subseteq \mathbb{R}^{p_i}$ – управление непрерывным движением, $v_i \in V_i \subseteq \mathbb{R}^{q_i}$ – управление i -м переключением, \mathcal{N} – множество номеров ненулевых (по длине) промежутков T_i .

Начальное состояние системы задано $x_0(t_0) = x_0$, а конечное – удовлетворяет терминальному условию $\Gamma(t_F, x_N(t_F)) = 0$. Задача может быть дополнена промежуточными ограничениями.

На множестве допустимых процессов $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ задан функционал

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) dt + \sum_{i=0}^N g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i) + F_N(t_F, x_N(t_F)), \quad (1)$$

где g_i^0 – неотрицательная функция, а $t_{N+1} = t_F$. Количество N и моменты переключений t_1, \dots, t_N заранее не заданы и могут отличаться у разных процессов.

Требуется найти наименьшее значение функционала (1) и оптимальный процесс $d^* \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается.

2. Условия оптимальности. Введем функции Гамильтона – Понтрягина (ГП) для непрерывного движения и переключений соответственно:

$$\begin{aligned} H_i(\psi_i, t, x_i, u_i) &= \psi_i f_i(t, x_i, u_i) - f_i^0(t, x_i, u_i), \\ \widehat{H}_i(\psi_i, t, x_{i-1}, v_i) &= \psi_i g_i(t, x_{i-1}, v_i) - g_i^0(t, x_{i-1}, v_i). \end{aligned}$$

Теорема. Пусть оптимальный процесс имеет N переключений в моменты t_1, \dots, t_N : $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$. Тогда существуют функции $\psi_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, N$, и такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$, неравные нулю одновременно, что выполняются:

1) дифференциальные уравнения:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t))}{\partial x_i}, \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N};$$

2) рекуррентные уравнения:

$$\psi_{i-1}(t_i) = \frac{\partial \widehat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial x_{i-1}}, \quad i \in \mathcal{N};$$

3) условия трансверсальности:

$$\{F_N t[t_F] - H_N[t_F]\} \delta t_F + \{F_N x_N[t_F] + \psi(t_F)\} \delta x_{NF} = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_N t[t_F] \delta t_F + \Gamma_N x_N[t_F] \delta x_{NF} = 0$;

4) условие максимума функции ГП по управлению непрерывным движением

$$H_i(\psi_i(t), x_i(t), u_i(t)) = \max_{u_i \in U_i} H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i)$$

почти всюду на T_i , $i \in \mathcal{N}$;

5) условия неположительности вариации функции ГП по управлению переключениями:

$$\frac{\partial \widehat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial v_i} \delta v_i \leq 0$$

для любых допустимых вариаций δv_i , $i = 1, \dots, N$;

6) условие скачка функции ГП:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \{ & H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), u_i(t_i)) - H_i(\psi_{i-1}(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), u_i(t_i)) - \\ & - \frac{\partial \widehat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial t} \} - \lambda_i + \lambda_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N; \end{aligned}$$

7) условия дополняющей нежесткости: $\lambda_i(t_{i-1} - t_i) = 0$, $i = 1, \dots, N+1$;

8) условия неотрицательности: $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, N+1$.

В формулировке теоремы аргумент t , заключенный в квадратные скобки, означает, что функция вычислена на оптимальном процессе в указанный момент времени.

Доказательство теоремы приведено в [1].

Литература

- [1] Бортаковский А. С. Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Изв. РАН. ТИСУ. 2022. № 1. С. 28-40.
- [2] Sussmann H. J. A Maximum Principle for Hybrid Optimal Control Problems // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
- [3] Boltyanski V. G. The Maximum Principle for Variable Structure Systems // Int. J. on Control. 2004. V. 77. № 17. P. 1445-1451.
- [4] Дмитрук А. В., Каганович А. М. Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями // Нелинейная динамика и управление. Вып.6. М: Физматлит, 2008. С. 101-136.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Бритвина Л. Ю. (Россия, Великий Новгород)

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

lyubov.britvina@novsu.ru

Метод интегральных преобразований широко применяется не только для решения различных задач математической физики, но при моделировании биологических систем, цифровой обработке сигналов, при анализе временных рядов, является мощным математическим инструментом. Особенно активно интегральные преобразования и обобщение операционных методов используется при решении задач радиотехники, электротехники, цифровой электроники и т.д.

Классическая схема метода интегральных преобразований начала формироваться еще в XIX веке при формировании теории преобразований Фурье и Лапласа. Ее реализацию можно найти в многочисленной литературе, в частности можно упомянуть книги И. Снеддона, Я.С. Уфлянда, В.А. Диткина, А.П. Прудникова, Н.Дж. Трантера, Р.В. Черчилля. Впоследствии эволюция вычислительной техники и изучение дискретных преобразований позволило применять метод для решения сложных прикладных задач.

Другое направление развития метод интегральных преобразований получил после введения понятия обобщенной свертки. В данном исследовании мы используем подход В.А. Какичева [1] к определению и конструированию обобщенных сверток. На его основе можно построить различные сверточные конструкции (см., например, [2]-[3]), в докладе возможности подхода демонстрируются на примере интегрального преобразования Ханкеля. Полученные конструкции позволяют по-новому взглянуть на метод интегральных преобразований и исследовать задачи, содержащие дифференциальный оператор Бесселя.

Литература

- [1] Какичев В. А. Полисвертки. Определения, примеры, сверточные уравнения. Конспект лекций. Таганрог: ТРТУ, 1997.
- [2] Britvina L. Hankel Generalized Convolutions with the Associated Legendre Functions in the Kernel and Their Applications // In: Kravchenko, V., Sitnik, S. (eds) Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. Birkh?user, Cham, 2020. pp. 49-66.
- [3] Britvina L. E. Generalized convolution with two parameters for the Hankel transform and related integral operators // Integral Transforms and Special Functions. 2016. 28 (1). pp. 1-14.

Булатов В. В. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
internalwave@mail.ru

Владимиров Ю. В. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
vladimyura@yandex.ru

Важным механизмом возбуждения внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах является их генерация источниками возмущений различной физической природы: естественного (движущиеся возмущения атмосферного давления, обтекание неровностей рельефа океана, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров. В частности, касательное напряжение ветра, создаваемое движущимся ураганом, может формировать на океанической поверхности структуру в виде движущейся воронки с почти радиальной симметрией. Как показывают результаты мониторинга Мирового океана, движущиеся возмущения морской поверхности являются одним из основных природных механизмов генерации интенсивных ВГВ. Аналитические результаты решений задач о генерации ВГВ представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные представления требуют разработки численных и асимптотических методов их исследования. При математическом моделировании генерации ВГВ, возбуждаемых нелокальными источниками возмущений, наиболее распространенными являются два способа. Первый заключается в численном решении системы уравнений гидродинамики, описывающей ВГВ, к недостаткам которого следует отнести ограниченность области пространства, в котором возможно численное решение задачи. При изучении дальнего распространения ВГВ прямые численные расчеты нецелесообразны, так как в дальней зоне волновые поля относительно малы по амплитуде и обычно их можно описать посредством линейных уравнений. Кроме того, эффектами вязкости, вращения среды и её сжимаемости пренебрежимо малы и не сказываются на дальнем распространении ВГВ. Поэтому волновое поле в дальней зоне можно описать сравнительно простыми аналитическими формулами. Распространение диспергирующих ВГВ в стратифицированных средах и создаваемые ими волновые картины на больших расстояниях от источников возмущений (много больших его характерных размеров) практически не зависят от их формы и определяется только законом дисперсии и скоростью источника. Поэтому второй способ состоит в том, чтобы заменить функцию, описывающую форму нелокального источника, функцией, имеющее достаточно простое аналитическое представление. Решена задача о построении аналитических решений, описывающих генерацию ВГВ от нелокального источника возмущений, который движется на поверхности стратифицированной среды конечной глубины. Использовано модельное распределение формы источника, обладающее радиальной симметрией, которое качественно верно описывает основные пространственно-временные характеристики природных источников генерации ВГВ в океане. Полученное решение представляет собой сумму волновых мод. Изучены два способа аналитического представления решения. Первый метод – разложение решения в ряд по собственным функциям основной спектральной задачи уравнения внутренних волн. Второй метод основан на теореме Миттаг-Леффлера о разложении мероморфных функций для случая простых полюсов. Приведены результаты численных расчетов ВГВ, иллюстрирующих два метода аналитического представления решений. Показано, что поля ВГВ на больших расстояниях от движущегося нелокального источника (много больших его размеров) практически не зависят от его формы и определяется законом дисперсии и скоростью источника. Форма источника определяет свойства возбуждаемых волновых полей только в ближней зоне.

⁴⁴Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект 20-01-00111А.

Литература

- [1] Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Волны в стратифицированных средах. // М.: Наука, 2015.
 [2] Булатов В. В. Новые задачи математического моделирования волновой динамики стратифицированных сред. // М.: Издательство ОНТО-ПРИНТ, 2021.

ГРАДУИРОВАННАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА И ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИГМА-ФУНКЦИИ

Бухштабер В. М. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

buchstab@mi-ras.ru

Стационарное уравнение Кортевега–де Фриза (кратко КдФ) $u''' = 6u'u$ определяет семейство полиномиальных гамильтоновых систем в \mathbb{C}^2 , зависящее от одного параметра. Это семейство эквивалентно динамической системе в \mathbb{C}^3 с градуированными координатами $x_{1,1}$, $x_{2,1}$ и $x_{3,1}$, $|x_{s,1}| = s+1$, решение которой можно задать в виде $x_{1,1} = \wp$, $x_{2,1} = \wp'$, $x_{3,1} = \wp''$, где $\wp = \wp(z, \lambda)$ – функция Вейерштрасса однородной неособой эллиптической кривой

$$y^2 = x^3 + \lambda_4 x + \lambda_6, \quad |x| = 2, \quad |y| = 3, \quad |\lambda_{2s}| = 2s.$$

При этом λ_4 задает параметр семейства, а λ_6 задает значение гамильтониана. Этот классический результат следует из теоремы Вейерштрасса об униформизации эллиптической кривой. В координатах пространства \mathbb{C}^3 данная кривая задается в виде пересечения двух гиперповерхностей, которые представляют собой поверхности уровня значений однородных полиномов $\lambda_4 = \lambda_4(x_{1,1}, x_{3,1})$ и $\lambda_6 = \lambda_6(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1})$.

Начиная с 1995 года, в цикле работ В.М. Бухштабера, Д.В. Лейкина и В.З. Энольского была построена теория сигма-функций $\sigma(z, \lambda)$ неособых гиперэллиптических кривых

$$y^2 = x^{2g+1} + \lambda_4 x^{2g-1} + \dots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2}, \quad |x| = 2, \quad |y| = 2g + 1, \quad |\lambda_{2s}| = 2s,$$

где $z = (z_1, \dots, z_{2g-1})$, $\lambda = (\lambda_4, \dots, \lambda_{4g+2})$. Поле мероморфных функций на якобиане такой кривой порождается всеми логарифмическими производными функции $\sigma(z, \lambda)$ порядка 2 и выше. Приложения теории сигма-функций существенно используют вычисление алгебраической структуры этого поля.

В докладе будет описана градуированная иерархия КдФ, зависящая от бесконечного набора параметров a_4, a_6, \dots , $|a_{2k}| = 2k$, и для каждого $g = 1, 2, \dots$ введены стационарные g -уравнения этой иерархии.

Например, стационарное 2-уравнение имеет вид

$$u^{(5)} = 10uu'' + 20u'u'' - 30u^2u' - 16a_4u'. \quad (1)$$

Каждое стационарное g -уравнение определяет семейство полиномиальных гамильтоновых систем в \mathbb{C}^{2g} , зависящее от g параметров. Это семейство эквивалентно динамической системе в \mathbb{C}^{3g} с градуированными координатами

$$x_{1,2k-1}, x_{2,2k-1}, x_{3,2k-1}, \quad k = 1, \dots, g, \quad |x_{s,2k-1}| = s + 2k - 1, \quad s = 1, 2, 3,$$

Каждый параметр семейства является однородным полиномом от этих координат. Например, $4a_4 = x_{3,1} - 6x_{1,1}^2 - 4x_{1,3}$.

В случае $g = 2$ уравнение (1) задает в \mathbb{C}^6 динамическую систему

$$\begin{aligned} x'_{1,1} &= x_{2,1}, & x'_{2,1} &= x_{3,1}, & x'_{3,1} &= 4(x_{1,1}x_{2,1} + x_{2,3}), \\ x'_{3,1} &= x_{2,3}, & x'_{2,3} &= x_{3,3}, & x'_{3,3} &= 4(x_{1,1}x_{2,3} + x_{2,1}x_{1,3}). \end{aligned}$$

В докладе будет показано, что если параметры $\{a_{2k}\}$ заданы рекурсией

$$2a_{2k+2} = \lambda_{2k+2} - \sum_{i=1}^{k-2} a_{2i+2}a_{2k-2i}, \quad k \geq 3,$$

с начальными условиями $2a_4 = \lambda_4$, $2a_6 = \lambda_6$, то для любого $g \geq 1$ параметрическая иерархия КдФ определяет в \mathbb{C}^{3g} динамическую систему, решение которой можно задать в виде $x_{1,2k-1} = \wp_{1,2k-1}$, $x_{2,2k-1} = \wp'_{1,2k-1}$, $x_{3,2k-1} = \wp''_{1,2k-1}$, $k = 1, \dots, g$, где $f' = \frac{\partial f}{\partial z_1}$ и

$$\wp_{1,2k-1} = \wp_{1,2k-1}(z, \lambda) = -\frac{\partial^2 \ln \sigma(z, \lambda)}{\partial z_1 \partial z_{2k-1}}, \quad k = 1, \dots, g.$$

При этом набор $(\lambda_4, \dots, \lambda_{2g+2})$ задает параметры семейства динамических систем в \mathbb{C}^{2g} , а набор $(\lambda_{2g+4}, \dots, \lambda_{4g+2})$ задает значения гамильтонианов этих систем. Этот результат тесно связан с описанием якобиана неособой гиперэллиптической кривой рода g как g -мерного подмногообразия в \mathbb{C}^{3g} , заданного в виде пересечения $2g$ гиперповерхностей. Эти гиперповерхности представляют собой поверхности уровней значений однородных полиномов $\lambda_{2k} = \lambda_{2k}(x_{i,j})$, $k = 2, \dots, 2g + 1$.

В результате мы получаем, что для любого $g \geq 2$ функция $u = 2\wp_{1,1}(z, \lambda)$ гиперэллиптической кривой рода g удовлетворяет иерархии из g уравнений. Эта иерархия начинается с уравнения КдФ $4\dot{u} = u''' - 6uu'$, где $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial z_3}$ и $u' = \frac{\partial u}{\partial z_1}$, и заканчивается стационарным g -уравнением.

Литература

- [1] В. М. Бухштабер, *Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега-де Фриза.*, Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016, 191–215.
- [2] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski, D. V. Leykin, *σ -functions: old and new results.*, Integrable Systems and Algebraic Geometry, LMS Lecture Note Series N459, v.2, Cambridge Univ. Press, 2019, 175–214.
- [3] В. М. Бухштабер, А. В. Михайлов, *Интегрируемые полиномиальные гамильтоновы системы и симметрические степени плоских алгебраических кривых.*, УМН, 76:4(460) (2021), 37–104.
- [4] Е. Ю. Бунькова, В. М. Бухштабер, *Параметрическая иерархия Кортевега-де Фриза и гиперэллиптические сигма-функции.*, Функци. анализ и его прил., 56:3 (2022), в печати.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОРОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИДКИХ СРЕД ГОЛОВНОГО МОЗГА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОЦЕФАЛИИ⁴⁵

Валова Г. С. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
galinayankova2703@gmail.com

Черевко А. А. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
cherevko1@ngs.ru

Богомякова О. Б. (Россия, Новосибирск)

Международный томографический центр СО РАН
bogom_o@tomo.nsc.ru

Тулупов А. А. (Россия, Новосибирск)

Международный томографический центр СО РАН
taa@tomo.nsc.ru

Одним из специфических для мозга явлений является течение цереброспинальной жидкости (ЦСЖ, ликвор). Некоторые неврологические заболевания изменяют характер

⁴⁵Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 22-11-00264.

течения ЦСЖ, что, в свою очередь, может привести к изменениям в головном мозге. Одним из таких заболеваний является гидроцефалия, при которой желудочки головного мозга увеличиваются, что приводит к смещению и сдавливанию мозговой ткани. Это состояние хорошо описано с точки зрения клинических проявлений, но его причины развития плохо изучены.

В работе изучается влияние взаимодействия жидких сред головного мозга на смещение стенки желудочков и перивентрикулярное давление с помощью усовершенствованной математической модели многофазной пороупругой для паренхимы головного мозга. Математическое моделирование было выполнено на основании МРТ данных четырех добровольцев (МТЦ СО РАН) в двумерном приближении.

Взаимодействие жидких сред в данной модели описывается набором из четырех числовых коэффициентов взаимодействия. На основе результатов численных расчетов качественно описан характер влияния коэффициентов взаимодействия на среднее смещение стенки желудочков и перивентрикулярное давление. Проведено исследование локализации мест максимального смещения стенки желудочков в зависимости от коэффициентов взаимодействия. Обнаружено, что во всех рассмотренных случаях на стенке желудочков одинаковым образом локализуются зоны, соответствующие различному состоянию здоровья: сжатие желудочков, норма, гидроцефалия. Также для количественного изучения влияния на среднее смещение стенки желудочков значений параметров взаимодействия для каждого из четырех добровольцев была построена множественная линейная регрессия. В результате статистического анализа было обнаружено преобладающее влияние капиллярно-ликворного звена. А также найдены наборы коэффициентов взаимодействия, которые соотносятся с такими патологическими состояниями как: нормотензивная гидроцефалия, внутричерепная гипертензия и заместительная вентрикуломегалия на фоне длительной гипоперфузии [3].

Литература

- [1] Tully B., Ventikos Y. Cerebral water transport using multiple-network poroelastic theory: application to normal pressure hydrocephalus. // J. Fluid Mech. 2011. P. 188-215.
- [2] Янькова Г. С., Черевко А. А., Хе А. К., Богомякова О. Б., Тулупов А. А. Исследование развития гидроцефалии с использованием моделей пороупругости // ПМТФ. 2020. Т. 61. №. 1. С. 17-29.
- [3] Valova G., Bogomyakova O., Tulupov A., Cherevko A. Influence of interaction of cerebral fluids on ventricular deformation: A mathematical approach // PLOS ONE. 2022. 17. №. 2. P. e0264395.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ⁴⁶

Васильев В. Б. (Россия, Белгород)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
vvv57@inbox.ru

Авторский подход к теории краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладкой границей основан на двух постулатах – это локальный принцип и принцип факторизуемости [1] эллиптического символа в граничной точке. Абстрактная схема исследования с использованием локального принципа изложена в работах автора [2,3]. Здесь мы опишем некоторые дальнейшие исследования, связанные с этим подходом.

1. Локальная ситуация и предельный переход. Модельное уравнение в конусе $C \subset \mathbb{R}^m$ имеет вид

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad x \in C, \quad (1)$$

где $A : H^s(C) \rightarrow H^{s-\alpha}(C)$ – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

⁴⁶Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ. проект FZWG-2020-0029.

Конус C может иметь некие параметры, вот примеры, в двумерном случае конус $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$ с раствором a , в трехмерном случае $C_+^{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + |x_2|, a, b > 0\}$ с двумя параметрами a, b . Естественно возникает вопрос, если имеется решение уравнения (1), что можно ожидать, когда параметры стремятся к предельным значениям 0 и ∞ . Некоторые случаи разобраны в [4].

2. Дискретный вариант и аппроксимация. Можно ввести дискретные аналоги пространств $H^s(C)$ и рассмотреть дискретный аналог уравнения (1). В частности, в случае дискретного полупространства $h\mathbb{Z}_+^n, h > 0$, описана картина разрешимости дискретного вневлога уравнения (1) и показано, что дискретное решение обладает аппроксимационными свойствами при малых значениях h . Аналогичные результаты получены для дискретного квадранта.

Литература

- [1] Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: УРСС, 2010.
- [2] Vasilyev V. Elliptic operators and their symbols // Demonstr. Math. 2019. V. 52. P. 361–369.
- [3] Vasilyev V. Operator symbols and operator indices // Symmetry. 2020. V. 12. No 64. P. 1–12.
- [4] Vasilyev V. V. On certain 3-dimensional limit boundary value problems // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. No 5. P. 917–925.
- [5] Васильев В.Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 160. С. 18–27.

УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА-ЭЙНШТЕЙНА И ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

Веденяпин В. В. (Россия, Москва)

ФИЦ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
vicveden@yahoo.com

Петров А. Г. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

В классических работах (см. [1]) уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна из классического принципа наименьшего действия [2-9] а также их гидродинамических и Гамильтон-Якобиевых следствий [2-4, 9]. Ускоренное расширение Вселенной, отмеченное Нобелевской премией по физике в 2011 году, вызывает пристальное внимание. Общепринятым объяснением сейчас является добавление лямбда-члена Эйнштейна в релятивистское действие. И хорошо известно, что в нерелятивистской теории это соответствует добавлению отталкивающего квадратичного потенциала [20-28]. Мы изучаем решение типа Фридмана [2-4] (модель Милна-Маккри) и точки Лагранжа с таким потенциалом [4].

Литература

- [1] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
- [2] Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Доклады РАН. 2020. Т. 495. С. 9-13.
- [3] V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, V. M. Chechetkin, The generalized Friedman model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equations system // European Physical Journal Plus. 136. No 670 (2021).
- [4] В.В. Веденяпин, В.И. Паренкина, А.Г. Петров, Чжан Хаочэнь. Уравнение Власова-Эйнштейна и точки Лагранжа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. No 23. 23с.
- [5] Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. No 3. С. 468-480.

- [6] Веденяпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер.матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
- [7] Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН. 2013, том 47, С. 5–17.
- [8] Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations (Elsevier Insights, 2011).
- [9] В.В. Веденяпин, В.И. Парёнкина, С.Р. Свирцевский. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, ЖВМ и МФ. 2022. Т. 62. № 6. С. 146-150.

ОСЦИЛЛЯТОР С ПАМЯТЬЮ КАК МОДЕЛЬ ДВУМОДОВОГО ДИНАМО⁴⁷

Водинчар Г. М. (Россия, Паратунка)

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН
gvodinchar@ikir.ru

Казаков Е. А. (Россия, Паратунка)

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН
mifstjohn@gmail.com

Генерация крупномасштабных магнитных полей космических объектов успешно описывается в рамках теории гидромагнитного динамо [1]. В реальных космических динамо-системах наблюдаются сложные динамические режимы осциллирующего типа и эффекты памяти (эредитарности).

Доклад посвящен интегро-дифференциальной системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= \left[D - \int_0^t K\left(\frac{t-\tau}{p}\right) x(\tau)y(\tau) d\tau \right] x - y. \end{aligned} \quad (1)$$

Эта система может рассматриваться как модель двумодового динамо с памятью [2]. Фазовые переменные x и y имеют смысл переменных амплитуд тороидальной и полоидальной мод магнитного поля. Интегральный член описывает эредитарную обратную связь в динамо-системе – подавление турбулентного генератора актуальным и прошлыми значениями спиральности поля. Неотрицательное ядро $K(s)$ оператора подавления затухает на бесконечности. Положительные σ , D , p – управляющие параметры.

Нулевая точка покоя системы (1) устойчива при $0 < D < 1$ и неустойчива при $D > 1$, поэтому динамо «работает» при $D > 1$.

Теорема 1. При ограниченном ядре $K(s)$ и произвольных начальных условиях система (1) имеет единственное решение на промежутке $[0; +\infty)$.

Для некоторых классов ядер с экспоненциальной асимптотикой удастся исключить интегральный член из системы (1) и свести ее к дифференциальной за счет расширения размерности фазового пространства, а именно, справедлива

Теорема 2. Если ядро $K(s)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами, то (1) равносильна системе дифференциальных уравнений порядка k , где $3 \leq k \leq 3n - 2$, с неявно заданными начальными условиями на все дополнительные фазовые переменные.

Теорема 3. При дифференцируемом ядре $K(s)$ система (1) равносильна уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + \sigma) \frac{dx}{dt} + 4Ax^3 - 2Bx = 0, \quad (2)$$

⁴⁷Работа выполнена по проекту РНФ 22-11-00064 «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

где $A = K(0)/8$, $2B = \sigma(D - 1) - \int_0^t J_{\sigma p}(t - \tau)x^2(\tau) d\tau$, $J_{\sigma p}(s) = \frac{1}{2p}K'(s) + \sigma K(s)$.

Уравнение (2) формально можно рассматривать как осциллятор с эрдитарным «потенциалом» $U = Ax^4 - Bx^2$. Это позволяет интерпретировать различные динамические режимы системы (1) с точки зрения теории осцилляторов.

Для численного исследования системы (1) разработана неявная разностная схема, объединяющая неявный метод Рунге-Кутты 2 порядка для дифференциальной части и формулу Симпсона для интегральной. Разработана программа моделирования. В случае ядра $K(s) = e^{-s}$ система (1) равносильна классической системе Лоренца. Это использовалось для верификации схемы и программного кода.

Результаты численного моделирования показали, что при варьировании параметров в системе (1) и осцилляторе (2) возникают все динамические режимы, типичные для реальных космических динамо-систем.

Литература

- [1] Зельдович Я. Б., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике. М.-Ижевск: РХД, 2006.
- [2] Vodinchar G. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$ -Dynamo // Mathematics. 2020. Vol. 8. № 11. 2065.

ТЕОРЕМЫ О ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ БИНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ⁴⁸

Воронин С. М. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
voron@csu.ru

Черепанова Е. А. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
gloomson13@mail.ru

Бинарное дифференциальное уравнение (BDE — binary differential equation [1]) — это неявное дифференциальное уравнение вида

$$F := ap^2 + 2bp + c = 0, \quad (1)$$

где $p = \frac{dy}{dx}$, а функции $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$ определены в окрестности точки $(0, 0)$. В исследовании уравнения (1) возникают значительные проблемы, когда все три коэффициента одновременно обращаются в нуль

$$a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0. \quad (2)$$

Два бинарных уравнения будем называть аналитически (формально) эквивалентными, если некоторая локальная аналитическая (формальная) замена координат $(x, y) \mapsto (X, Y)$ переводит решения одного уравнения в решения другого.

Топологическая классификация (типичных) уравнений (1), (2) исследовалась в [1]. Однако гладкая и аналитическая (и даже формальная) классификации таких уравнений к настоящему времени изучены мало.

Учитывая известные результаты о жесткости для вырожденных особых точек аналитических векторных полей на плоскости, см. [3], была сформулирована аналогичная гипотеза для BDE:

Гипотеза. (о жесткости BDE) Для типичных BDE (1), (2) их формальная эквивалентность влечет аналитическую.

⁴⁸Работа выполнена при поддержке РФФИ и ВАНТ (проект № 21-51-54003).

Пока гипотеза эта не доказано, однако некоторые частные результаты все-таки установить удалось.

Будем рассматривать комплексную версию BDE (1), (2): $(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0)$, $p \in \mathbb{C}$, a, b, c — голоморфные в $(\mathbb{C}^2, 0)$ функции, удовлетворяющие условию (2).

Тогда типичное BDE (1) определяет в $(\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbb{C}$ гладкую гиперповерхность M_F (поверхность уравнения). Контактные плоскости $dy = pdx$ высекают на поверхности уравнения голоморфное поле направлений. Рассмотрим слоения \mathcal{F}_F поверхности уравнения M_F на фазовые кривые этого поля направлений.

Лемма 1. [2] Для типичного BDE (1), (2):

1. Поверхность уравнения M_F продолжается до комплексного подмногообразия $\mathbb{M}_F \subset (\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbb{C}P^1$, содержащего сферу $\mathbb{P} = (0, 0) \times \mathbb{C}P^1$;

2. Слоение \mathcal{F}_F продолжается до комплексно-аналитического слоения $\tilde{\mathcal{F}}_F$ подмногообразия \mathbb{M}_F , сфера \mathbb{P} является слоем этого слоения.

Слоение $\tilde{\mathcal{F}}_F$ окрестности $(\mathbb{M}_F, \mathbb{P})$, сферы \mathbb{P} , определенное в лемме 1 по BDE (1), (2) будем называть слоением, индуцированным этим BDE.

Два слоения $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{M}, \mathbb{P})$ и $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{M}}, \tilde{\mathbb{P}})$ будем называть аналитически эквивалентным, если существует голоморфизм некоторой окрестности $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$ сферы \mathbb{P} на некоторую окрестность $\tilde{\mathbb{M}}' \subset \tilde{\mathbb{M}}$ сферы $\tilde{\mathbb{P}}$, переводящий слои (ограничения на \mathbb{M}') слоения $\tilde{\mathcal{F}}$ в слои (ограничения на $\tilde{\mathbb{M}}'$) слоения $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$. Отметим, что аналитически эквивалентные BDE соответствуют аналитически эквивалентные индуцированные слоения [2].

Теорема 1. (о жесткости слоений, индуцированных BDE) Из формальной эквивалентности типичных BDE (1), (2), следует аналитическая эквивалентность индуцированных слоений.

Литература

- [1] Bruce J. W., Tari F. On binary differential equations // Nonlinearity. 1995. 8. С.255-271.
- [2] Черепанова Е.А., Воронин С.М. Аналитическая нормализация слоений индуцированных бинарными уравнениями // Тезисы докладов Международной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Уфа, 2021): Аэтерна, 2021. С. 76-78.
- [3] Воронин С.М. Орбитальная аналитическая эквивалентность вырожденных особых точек голоморфных векторных полей на комплексной плоскости // Труды МИАН. 1997. Т. 213. С. 35-55.

СФЕРИЧЕСКАЯ СХЕМА ПОТОКОВ С КОНЕЧНЫМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ЦЕПНО РЕКУРРЕНТНЫМ МНОЖЕСТВОМ⁴⁹

Галкин В. Д. (Россия, Нижний Новгород)

Международная лаборатория динамических систем и приложений,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
vgalkin@hse.ru

Починка О. В. (Россия, Нижний Новгород)

Международная лаборатория динамических систем и приложений,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
olga-pochinka@yandex.ru

В настоящей работе рассмотрены потоки с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством без гетероклинических пересечений на произвольных замкнутых n -многообразиях. Для таких потоков доказано существование дуального аттрактора и репеллера, разделенных $(n-1)$ -мерной сферой, являющейся секущей для блуждающих траекторий в дополнении к аттрактору и репеллеру. Такое представление динамики рассмотренных потоков

⁴⁹Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

позволяет получить топологический инвариант, названный сферической схемой потока, и состоящий в совокупности разноразмерных сфер, являющихся пересечением секущей сферы с инвариантными седловыми многообразиями.

О ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НЕРАВЕНСТВАХ
ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА⁵⁰

Гарманова Т. А. (Россия, Москва)

МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
garmanovata@gmail.com

Для получения точных оценок в неравенствах для промежуточных производных в пространстве Соболева $\mathcal{H} := \dot{W}_p^n[0; 1]$ ($1 < p < \infty$) важное значение имеет задача об описании наименьших возможных величин в неравенствах вида

$$|f^{(k)}(a)| \leq A_{n,k,p}(a) \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad a \in (0; 1), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

При этом возникает вопрос о явном виде функций, которые в \mathcal{H} задают функционалы $f \mapsto f^{(k)}(a)$ ($0 \leq k \leq n-1$).

В работе получено полное описание класса сплайнов $Q_{n,k}$ таких, что для произвольной функции $f \in \mathcal{H}$ выполнено

$$f^{(k)}(a) = \int_0^1 f^{(n)}(x) Q_{n,k}^{(n)}(x, a) dx.$$

Показано, что эти сплайны зависят от n произвольных констант $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$, которые, вообще говоря, зависят от p и от a .

Теорема 1.

$$A_{n,k,p}(a) = \min_{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}} \|Q_{n,k}^{(n)}\|_{L_{p'}[0;1]}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Также показано, что для $\hat{Q}_{n,k}^{(n)}(x) = \operatorname{argmin} \|Q_{n,k}^{(n)}\|_{L_{p'}[0;1]}$ существуют функции $\hat{f} \in \mathcal{H}$, для которых достигается равенство

$$|\hat{f}^{(k)}(a)| = A_{n,k,p}(a) \left(\int_0^1 |\hat{f}^{(n)}(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad a \in (0; 1), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Теорема 2. *Функции \hat{f} имеют вид:*

$$\hat{f} = |\hat{Q}_{n,k}^{(n)}(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn} \hat{Q}_{n,k}^{(n)}(x)$$

Далее исследуется связь указанной задачи при $p = 2$ и задачи при произвольном $1 < p < \infty$. В работе [1] получено описание функций $g_{n,k}(x, a)$, которые совпадают с $\hat{Q}_{n,k}(x, a)$ при $p = 2$.

Теорема 3.

$$\|\hat{Q}_{n,k}^{(n)}(x)\|_{L_{p'}[0;1]} = \min_{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}} \|g_{n,k}^{(n)}(x, a) - \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j\|_{L_{p'}[0;1]}.$$

Литература

- [1] Т.А.Гарманова, И.А.Шейпак, *Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева*//Труды Московского математического общества, 2019, т.80, вып. 2, 221-246.

⁵⁰Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20261)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ
РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Гладышев Ю. А. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
gladyshv.yua@yandex.ru

Лошкарева Е. А. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
losh-elena@yandex.ru

Обобщенной степенью $X^{(n)}C$ порядка n с коэффициентом C , порожденной оператором D , назовем элемент последовательности функций $X^{(n)}(x)C$ переменного x [1], связанных соотношением

$$DX^{(n)}(x, x_0) = nX^{(n-1)}(x, x_0), X^{(0)}C = C. \quad (1)$$

Например, если

$$D = \frac{d^2}{dx^2}, \quad (2)$$

то имеем последовательность

$$X^{(p)}C = p! \left(\frac{x^{2p}}{(2p)!} c_1 + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} c_2 \right). \quad (3)$$

Поскольку оператор (2) линейный можно говорить о многочленах и даже функциях как линейных комбинациях ОС. Например, имеем:

при $h > 0$ $\exp hX \cdot C = c_1 ch |\alpha| x + c_2 sh |\alpha| x$;

и при $h < 0$ $\exp \alpha X \cdot C = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$.

Отметим, что

$$D \exp \alpha X \cdot C = \alpha \exp \alpha X C. \quad (4)$$

Таким образом, e^{2X} при $\alpha > 0$ имеет монотонный характер, а при $\alpha < 0$ осциллирующий. Аналогично, если дано S переменных x_j и соответственно S операторов

$$D_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, j = \overline{1, S}, \quad (5)$$

то последовательность $X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} \dots X_S^{(p_S)} C$ связанная соотношением

$$D_j \prod_{j=1}^S X_j^{(p_j)} C = p_j \prod_{j=1}^S X_j^{(p_j - \delta_{ij})} C. \quad (6)$$

назовем обобщенной степенью, зависящей от S переменных. Все элементы последовательности можно умножить на одно и то же действительное число, что не меняет свойств (1), (5). В случае (4) для ОС имеем

$$X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} \dots X_S^{(p_S)} C = p_1! p_2! \dots p_S! \prod_{j=1}^S \left(\frac{x_j^{2p_j}}{(2p_j)!} c_{j1} + \frac{x_j^{2p_j+1}}{(2p_j+1)!} c_{j2} \right). \quad (7)$$

Относительно умножения на действительную константу h ОС система степенная образует линейное векторное пространство. Уравнение Лапласа при использовании при использовании операторов D_i из (4) можно записать

$$\sum D_i V = 0, \quad (8)$$

где $V(x_1, \dots, x_\delta)$.

Последовательность базисных решений (7) можно записать в символической форме $V_n = \left(\sum h_i X_i^{(l)}\right)^n$ при условии, что h_i действительные

$$\sum_1^S h_i = 0. \quad (9)$$

Метод поиска решений уравнений как линейной комбинации независимых переменных не является чем-то новым. Он применялся при построении системы сферических функций и введении спиноров [2].

В случае (8) соотношение относится не к числовым переменным, а к ОС.

Литература

- [1] Гладышев Ю. А. Формализм Бультрами-Берса и его приложения в математической физике. Калуга.: Из-во КГПУ им. К.Э. Циолковского, 1997.
 [1] Бринкман Г. Применение спинорных инвариантов в атомной физике. М.: ИИЛ, 1959.

РЕЖИМЫ ТИПА КЛАСТЕРНОЙ синхронизации и бегущих волн в одной системе сингулярно возмущенных уравнений

Глызин С. Д. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
glyzin@uniyar.ac.ru

Колесов А. Ю. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
kolesov@uniyar.ac.ru

Вводится в рассмотрение новая математическая модель нейронной сети с электрическими связями, представляющая собой сингулярно возмущенную систему дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. Излагаются некоторые методы исследования вопросов о существовании и устойчивости в этой системе релаксационных периодических движений. В случае диффузионных и симметричных полносвязных нейронных сетей устанавливается реализуемость в соответствующих математических моделях феномена, связанного с накоплением сосуществующих однотипных аттракторов (предельных циклов).

Предположим теперь, что имеется сеть из m , $m \geq 2$, нейронов с потенциалами $u_j = u_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Будем считать, что они электрически взаимодействуют между собой по принципу "каждый со всеми". Тогда согласно общепринятым представлениям о природе электрических синапсов приходим к системе вида

$$\dot{u}_j = \lambda f(u_j(t-1))u_j + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m d_{j,s}(u_s - u_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

которая и является одной из возможных математических моделей электрических синапсов (см. [1,2]). Однако, на наш взгляд, эта модель нуждается в некоторой модификации.

Суть упомянутой модификации состоит в том, что слагаемое в правой части (1), отвечающее за связь между нейронами с номерами s и j заменяется соотношением

$$d_{j,s} g(u_s/u_j) u_j, \quad d_{j,s} = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где функция $g(u) \in C^3(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет требованиям

$$g(u) < 0 \text{ при } u \in [-1, 1), \quad g(0) = -1, \quad g(u) > 0 \text{ при } u > 1, \quad g(1) = 0, \quad g'(1) > 0, \quad (3)$$

$$g(u) - b, \quad u g'(u), \quad u^2 g''(u), \quad u^3 g'''(u) = O(1/u) \text{ при } u \rightarrow +\infty, \quad b = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Модель (1), в этом случае, приобретает вид (см. также [3])

$$\dot{u}_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m d_{j,s} g\left(\frac{u_s}{u_j}\right) \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Модель (5) рассматривается в двух наиболее популярных случаях: $d_{s+1,s} = d_{s,s-1} = d = \text{const} \in \mathbb{R}$, $d_{j,s} = 0$ при $j \neq s+1, j \neq s-1$ — кольцо или цепочка осцилляторов (в зависимости от условий на границах изменения индекса s); и $d_{j,s} = d = \text{const} \in \mathbb{R}$ — симметричная полносвязная сеть.

Основным результатом работы в первом случае является доказательство сосуществования экспоненциально орбитально устойчивых автоволновых периодических режимов, число которых неограниченно растет с ростом m . Во втором случае доказано сосуществование и устойчивость периодических режимов двухкластерной синхронизации, число которых также неограниченно растет с ростом m .

Литература

- [1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 10. С. 1227-1244.
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. 2015. Т. 70. Вып. 3 (423). С. 3–76.
- [3] Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Периодические режимы группового доминирования в полносвязных нейронных сетях // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 775–798.

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ⁵¹

Годова А. Д. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет
sashka_1997_godova55@mail.ru

Федоров В. Е. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет
kar@csu.ru

В работе исследуются интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с операторами, представляющими собой композицию операторов свертки и дифференцирования. Получены условия однозначной разрешимости для таких задач. Подобными методами в работах [1–3] исследовались различные дробные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.

Пусть \mathcal{X} — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, т. е. A — линейный ограниченный оператор, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$. Определим интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля

$$D^{m,K}x(t) := D^m(J^Kx)(t) := D^m \int_0^t K(t-s)x(s)ds,$$

где D^m — производная порядка m . Рассмотрим задачу типа Коши

$$(J^Kx)^{(k)}(0) = x_k \in \mathcal{X}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

для уравнения

$$(D^{m,K}x)(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (2)$$

где $f : (0, T] \rightarrow \mathcal{X}$.

⁵¹Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

Решением задачи (1), (2) называется функция $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{X}$, такая, что $J^K x \in C^{m-1}(\mathbb{R}_+; \mathcal{X}) \cap C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{X})$, условия (1) и равенство (2) для $t \in (0, T]$ выполняются.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$, существует преобразование Лапласа \widehat{K} , которое является однозначной аналитической функцией в $\Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > R_0, |\arg \mu| < \pi\}$ при некотором $R_0 > 0$ и удовлетворяет условию

$$\exists \chi > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall \lambda \in \Omega_{R_0} \quad \|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} > c|\lambda|^{\chi-1}, \quad (3)$$

при этом для всех $\lambda \in \Omega_{R_0}$ существует $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $f \in C((0, T]; \mathcal{X}) \cap L_1(0, T; \mathcal{X})$. Тогда для всех $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}$ существует единственное решение задачи (1), (2), при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} X_k(t)x_k + \int_0^t X_{m-1}(t-s)f(s)ds,$$

где

$$X_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \lambda^{m-1-k} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$\gamma := \gamma_R \cup \gamma_{R,+} \cup \gamma_{R,-}$ — положительно ориентированный контур, $\gamma_R := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, $\gamma_{R,+} := \{re^{i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $\gamma_{R,-} := \{re^{-i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $R > R_0$.

Пример 1. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $K_\alpha(s) := \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I$, тогда $J^{K_\alpha} := J^\alpha$ — оператор дробного интегрирования Римана — Лиувилля порядка α , $D^{m, K_{m-\alpha}} := {}^{RL}D^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля порядка α [3].

Пример 2. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$, $K(s) = s^{-\beta} E_{\alpha, 1-\beta}(as^\alpha) I$, где $E_{\alpha, 1-\beta}$ — функция Миттаг-Леффлера. Тогда преобразование Лапласа $\widehat{K}(\lambda) = \lambda^{\alpha+\beta-1}(\lambda^\alpha - a)^{-1} I$ удовлетворяет условию (3) с $\chi \in (0, \beta)$ и обратимо при $|\lambda| > a^{1/\alpha}$.

Литература

- [1] Fedorov V. E., Phuong T. D., Kien B. T., Boyko K. V., Izhberdeeva E. M. A class of distributed order semilinear equations in Banach spaces // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. V. 5. No. 3. P. 342–351.
- [2] Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M. Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan —Nersesyan derivative in Banach spaces // Symmetry. 2021. V. 13. No. 6. 1058.
- [3] Федоров В. Е., Туров М. М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62. № 5. С. 925–942.

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ И СХОДИМОСТЬ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ q-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Гонцов Р. Р. (Россия, Москва)

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
gontsovrr@gmail.com

Горючкина И. В. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
igoruyuchkina@gmail.com

Предлагается достаточное условие сходимости формального *обобщённого* степенного ряда (ряда по комплексным степеням независимой переменной), удовлетворяющего алгебраическому q -разностному уравнению произвольного порядка. Результат формулируется с использованием геометрического свойства, относящегося к полугруппе показателей степени такого ряда. Данная полугруппа конечно порождена, и в зависимости от того, расположены ли все её образующие в некоторой открытой полуплоскости в \mathbb{C} или нет, выделяются две различные ситуации. В последнем случае возникает феномен малых знаменателей, и

наше исследование сходимости формального обобщённого степенного ряда, удовлетворяющего алгебраическому q -разностному уравнению, продолжает соответствующие исследования сходимости *классических* степенных рядов [1],[2], а также напоминает исследование вопроса линеаризации диффеоморфизма $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ с диагональной линейной частью [3].

Литература

- [1] Siegel C. L. Iteration of analytic functions // Ann. Math. 1942. V. 43. № 4. P. 607–612.
- [2] Di Vizio L. An ultrametric version of the Maillet–Malgrange theorem for nonlinear q -difference equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. V. 136. № 8. P. 2803–2814.
- [3] Sternberg S. Infinite Lie groups and the formal aspects of dynamical systems // J. Math. Mech. 1961. V. 10. № 3. P. 451–474.

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛОННЫ ПРИ УСЛОВИЯХ МОНОТОННОСТИ

Гончаров В. Ю. (Россия, Москва)
 МАИ (НИУ)
fulu.happy@gmail.com

Рассмотрим задачу

$$(p(x)y''(x))'' + \mu y''(x) = 0, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0 \quad (1)$$

о потере устойчивости жестко фиксированной колонны.

Здесь предполагается, что

$$p \in L^\infty(0, 1), \quad p_{\min} \triangleq \operatorname{vrai} \min_{x \in (0,1)} p(x) > 0,$$

а сама задача (1) рассматривается в обобщённом смысле.

Хорошо известно, что задача (1) имеет счетное множество собственных чисел μ_k таких, что

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty,$$

причем каждое собственное значение μ_k может быть простым или двукратным.

В работе исследуются осцилляционные свойства собственных функций задачи (1).

Для собственной функции $y(x)$ задачи (1) будем выделять следующие осцилляционные свойства:

- (O₁) $y(x)$ на интервале $(0, 1)$ сохраняет знак, обладает в точности двумя точками перегиба и одним экстремумом;
- (O₂) $y(x)$ на интервале $(0, 1)$ меняет знак, а именно имеет единственный нуль, который является простым, а также обладает в точности тремя точками перегиба, одним максимумом и одним минимумом;
- (O_k) для $k \geq 3$ собственная функция $y(x)$ имеет на интервале $(0, 1)$ не более $k - 1$ нулей с учетом кратности, в точности $k + 1$ точек перегиба и, кроме того, при $k = 2s$ меняет знак.

Перейдём к формулировкам основных утверждений работы.

Теорема. Пусть $p(x)$ является монотонной на $(0, 1)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- (M₁) все собственные значения μ_k являются простыми;

(M₂) если выполняется неравенство

$$\frac{p_{\min}}{p_{\max}} \geq \frac{1}{4\chi_{[k/2]}^2 + 1}, \quad (2)$$

где $\{\chi_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ — последовательность всех положительных корней уравнения $\operatorname{tg} \chi = \chi$, упорядоченных по возрастанию, то собственная функция $y_k(x)$, отвечающая собственному числу μ_k , обладает осцилляционным свойством (O_k);

(M₃) если $p \in AC(0, 1)$, то для $s \in \mathbb{N}$ собственная функция $y_{2s-1}(x)$, отвечающая собственному числу μ_{2s-1} , обладает осцилляционным свойством (O_{2s-1}).

Будем говорить, что $p(x)$ является симметричной функцией порядка m , если она является симметричной функцией на каждом из интервалов $(0, 1)$, $(0, \frac{1}{2})$, \dots , $(0, 2^{1-m})$.

Теорема. Пусть $s = (2r - 1)2^{d-2}$, где $r, d \in \mathbb{N}$, и $m \leq d$, а функция $p(x)$ является симметричной порядка m и невозрастающей на $[0, 2^{-m}]$.

Через $z_{2s-1}(x)$ обозначим собственную функцию задачи (1), обладающую осцилляционным свойством (O_{2s-1}).

Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) функция $z_{2s-1}(x)$ не меняет знака на интервале $(0, 1)$;
- (ii) если $p \in AC(0, 1)$ и $p(x)$ строго убывает на $(0, 2^{-m})$, то $z_{2s-1}(x)$ сохраняет знак на интервале $(0, 1)$.

В частности, если $m \in \{1, 2\}$, то утверждения (i) и (ii) справедливы для каждого $s \in \mathbb{N}$.

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ БАЛКИ

Гончаров В. Ю. (Россия, Москва)

МАИ (НИУ)

fulu.happy@gmail.com

Муравей Л. А. (Россия, Москва)

МАИ (НИУ)

l_muravey@mail.ru

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (u^\nu(x)y''(x))'' &= \lambda u(x)\rho(x)y(x), \\ y(0) = (uy'')(0) &= y(1) = (uy'')(1) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

о поперечных колебаниях шарнирно закреплённой балки.

Будем предполагать, что

$$\begin{aligned} u &\in U \triangleq \{v \in L^\infty(0, 1) : v_{\min} \leq v(x) \leq v_{\max}\}, \\ \rho &\in L^\infty(0, 1), \quad \operatorname{vrai} \min_{x \in (0, 1)} \rho(x) > 0, \end{aligned}$$

рассматривая задачу (1) в обобщённом смысле.

Здесь u — распределение площади поперечных сечений, ρ — переменная плотность балки, а $\nu > 0$ характеризует тип сечений балки.

Наименьшее положительное собственное значение задачи (1), обозначаемое в дальнейшем через $\lambda_1[u]$, соответствует наименьшей частоте собственных колебаний балки, а отвечающая ему собственная функция y задаёт распределение прогибов.

Частоты собственных колебаний балки определяют безрезонансные полосы частот, внутри которых частоты прикладываемых к балке внешних возмущений не оказывают нежелательного воздействия.

В связи с этим в приложениях [1] возникает задача расширения безрезонансного интервала частот в пространстве допустимых параметров конструкции, которая для наименьшей частоты колебаний означает её максимизацию.

Для распределения $u \in U$ масса балки определяется формулой

$$M[u] = \int_0^1 \rho(x)u(x) dx.$$

Задав максимальное значение $m > 0$ для массы балки, определим множество допустимых распределений площади поперечных сечений:

$$\mathcal{U} = \{u \in U : M[u] \leq m\}.$$

В работе исследуется задача определения оптимальной формы балки, максимизирующей наименьшую частоту собственных колебаний: найти распределение $\hat{u} \in \mathcal{U}$ такое, что

$$\lambda_1[\hat{u}] = \sup_{u \in \mathcal{U}} \lambda_1[u]. \quad (2)$$

Аналогичные (2) задачи оптимального проектирования балок в классе неотрицательных непрерывных функций без ограничений на минимальное и максимальное значение площади поперечных сечений исследовались в [2, 3].

Основной результат работы заключён в следующем утверждении.

Теорема. *Существует единственная оптимальная форма $\hat{u} \in \mathcal{U}$, максимизирующая наименьшую частоту собственных колебаний $\lambda_1[\cdot]$ на множестве \mathcal{U} .*

Существование оптимальной формы для случая $0 < \nu \leq 1$ было установлено ранее в работе [4].

В докладе также планируется обсудить сформулированную задачу оптимального проектирования для других краевых условий.

Литература

- [1] Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
- [2] Niordson F. On the Optimal Design of a Vibrating Beam // Quarterly of Applied Mathematics. 1965. Vol. 23. No. 1. Pp. 47–53.
- [3] Karihallo B. L., Niordson F. Optimum Design of Vibrating Cantilevers // Journal of Optimization Theory and Applications. 1973. Vol. 11. No. 6. Pp. 638–654.
- [4] Goncharov V. Yu. Existence criteria in some extremum problems involving eigenvalues of elliptic operators // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2016. Vol. 9. No. 1. Pp. 37–47.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ⁵²

Гранильщикова Я. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносов
yasya.granilshchikova@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальный оператор L , определённый выражением

$$L(y) = \alpha(x)y'(x) + y'(-x) + g(x)y(x) + r(x)y(-x), \quad x \in [-1; 1]$$

на области $\mathcal{D}(L) = \{y \in W_2^1([-1, 1]) \mid U_0(y) = 0\} \subset L_2([-1; 1])$, где краевое условие

$$U_0(y) = y(-1) - hy(1) = 0.$$

⁵²Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-11-20261

Функция $\alpha(x)$ – вещественнозначная, такая что

$$\alpha(x) \in AC[-1, 1], \quad \alpha'(x) \in L_\infty[-1, 1],$$

и либо $|\alpha(x)| \geq 1$ для всех $x \in [-1; 1]$ и $\alpha(x) \neq \alpha(-x)$ при $|\alpha(x)| = 1$, либо $|\alpha(x)| < 1$ и $\alpha(x) = \alpha(-x)$ для всех $x \in [-1; 1]$. Функции $g(x)$, $r(x)$ существенно ограничены, константа h предполагается комплексной.

Рассмотрим спектральную задачу для оператора L :

$$L(y) = \lambda y, \quad U(y) = 0. \quad (1)$$

Работа посвящена изучению вопроса базисности по Риссу собственных функций оператора L в пространстве $L_2([-1; 1])$. Рассмотрены два подхода к доказательству базисности: операторный и через сведение к системе.

Первый заключается в том, чтобы выделить задачи специального вида, для которых собственные функции находятся явно. Для них базисность по Риссу доказывается по определению: они представляются в виде комбинации ограниченных и обратимых операторов, применённых к некоторому ортонормированному базису. Затем при помощи теории возмущений ([1]) задача обобщается.

Другой способ - свести задачу к системе уравнений, не содержащих инволюцию, как это проделано, к примеру, в [2]. Полученная система приводится к виду, для которого уже рассматривался вопрос базисности по Риссу собственных функций ([3]).

В обоих методах существенную роль играет определение регулярного краевого условия. Оба подхода дают следующее утверждение.

Теорема 1. *В принятых ограничениях на $\alpha(x)$ собственные функции задачи (1) с произвольными существенно ограниченными коэффициентами $g(x)$, $r(x)$ и регулярным краевым условием составляют безусловный базис со скобками в пространстве $L_2([-1; 1])$, при этом в скобки следует объединять только асимптотически сближающиеся собственные значения.*

Доклад основан на совместной работе с А. А. Шкаликовым.

Литература

- [1] Шкаликов А. А. Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром // Успехи матем. наук. 2016. **71**, вып. 5. 113–174.
- [2] Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференц. уравнения. 2008. **44:2**. 203-212.
- [3] Shkalikov A. A. Regular Spectral Problems of Hyperbolic Type for a System of First-Order Ordinary Differential Equations // Matematicheskie Zametki, 2021, Vol. 110, No. 5, pp. 796-800.

О СОЕДИНИМОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ЛОМАНЫМ НА ГРУППАХ КАРНО

Грешнов А. В. (Россия, Новосибирск)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

greshnov@math.nsc.ru

Пусть G – группа Карно, X_1, \dots, X_n – ее базисные горизонтальные левоинвариантные векторные поля [1], [2]. Горизонтальной k -ломаной, соединяющей точки $u, v \in G$, мы назовем объединение отрезков интегральных линий векторных полей $\sum_{i=1}^n a_i^j X_i$, $j = 1, \dots, k$, $\forall a_i^j = const$, последовательно соединяющих пары точек M_{j-1} и $M_j = \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i^j X_i\right)(M_{j-1})$, $M_0 = u$, $M_k = v$. Мы решаем задачу о нахождении минимального числа N_G такого, что любые две точки группы Карно можно было бы соединить горизонтальной l -ломаной, где $l \leq N_G$. Данная задача тесно связана с доказательством теоремы Рашевского–Чоу, см. [1], [2]. В докладе мы обсудим решения данной задачи на конкретных примерах групп Карно, а также применения полученных результатов к некоторым задачам анализа и геометрии.

Литература

- [1] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian. Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 2007.
- [2] Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge Univ. Press: Cambridge, 2020.

О ТОПОЛОГИИ НЕСУЩИХ МНОГООБРАЗИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ С ХАОТИЧЕСКОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ⁵³

Гринес В. З. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

vgrines@yandex.ru

Доклад посвящен изучению топологии замкнутых гладких многообразий M^n , допускающих A -дiffeоморфизмы $f : M^n \rightarrow M^n$, то есть диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме А С. Смейла:

- неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f является гиперболическим;
- множество периодических точек f плотно в $NW(f)$.

Согласно С. Смейлу, $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения непересекающихся инвариантных замкнутых множеств, каждое из которых содержит транзитивную орбиту. Эти множества называются базисными.

Если размерность некоторого базисного множества Λ диффеоморфизма f больше единицы и совпадает с размерностью несущего многообразия M^n ($n > 1$), то Λ единственно и совпадает со всем многообразием M^n . В этом случае диффеоморфизм f является диффеоморфизмом Аносова.

Согласно Дж. Фрэнксу и Ш. Ньюхаусу, если размерность каждого слоя неустойчивого или устойчивого слоения диффеоморфизма Аносова, заданного на многообразии M^n , равна единице, то M^n является n -тором.

Если размерность базисного множества Λ A -диффеоморфизма f равна $n - 1$, то, согласно Р. Плыкину, Λ является либо аттрактором, либо репеллером. Более того, если Λ является растягивающимся аттрактором или сжимающимся репеллером, то он имеет локальную структуру произведения Канторова множества и $(n-1)$ -диска. Автор доклада и Е. В. Жужома доказали, что если неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма f содержит ориентируемый растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер) коразмерности один, то несущее многообразие M^n является n -тором. Недавно они (вместе с В. Медведевым) доказали, что если неблуждающее множество A -диффеоморфизма f состоит из $k \geq 2$ растягивающихся аттракторов и сжимающихся репеллеров коразмерности один, то несущее многообразие M^n гомеоморфно связной сумме k копий тора \mathbb{T}^n и $m \geq 0$ копий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, где m зависит от свойств аттракторов и репеллеров.

Для $n = 3$, в докладе описывается топологическая структура замкнутых ориентируемых 3-многообразий, допускающих структурно устойчивые диффеоморфизмы, неблуждающие множества которых состоят из базисных множеств размерности два.

Если $n = 2$, то поверхность M^2 любого рода допускает структурно устойчивый диффеоморфизм f , неблуждающее множество которого содержит одномерный аттрактор или репеллер. Кроме того, существует глубокая взаимосвязь между динамикой A -диффеоморфизмов, родом несущей поверхности и действием диффеоморфизма в фундаментальной группе поверхности.

В докладе обсуждается применение вышеописанных результатов к топологической классификации A -диффеоморфизмов на многообразиях.

⁵³Подготовка доклада поддержана лабораторией динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Для знакомства с основными понятиями и результатами, используемыми в докладе, полезно использовать обзоры, статьи и книги [1-7].

Литература

- [1] V. Grines and E. Zhuzhoma. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. Amer. Math. Soc., vol. 357, no. 2, pp. 617-667, 2005.
- [2] V. Grines, D. Mints. On interrelations between trivial and nontrivial basic sets of structurally stable diffeomorphisms of surfaces // Chaos. 2021. Vol. 31. No. 2. Article 023132.
- [3] V. Grines, D. Mints. On decomposition of ambient surfaces admitting A-diffeomorphisms with non-trivial attractors and repellers // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2022, 42 (7) : 3557-3568.
- [4] V. Grines, E. Kurenkov. Diffeomorphisms of 2-manifolds with one-dimensional spaciouly situated basic sets // Izv. Math., 84:5 (2020), 862-909.
- [5] V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka. Dynamical Systems on 2-and 3-Manifolds // Springer–Switzerland, 2016.
- [6] V. Grines, E. Zhuzhoma. Surface laminations and chaotic dynamical systems. Moscow–Izhevsk, 2021.
- [7] V. Grines, O. Pochinka, E. Zhuzhoma. Rough diffeomorphisms with basic sets of codimension one // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 225. No. 2. P. 195-219.

ВОЗМУЩЕНИЯ НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНОГО ТОРА⁵⁴

Гринес В. З. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
vgrines@yandex.ru

Минц Д. И. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
dmitriimints@gmail.com

Чилина Е. Е. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
k.chilina@yandex.ru

Негиперболические алгебраические автоморфизмы двумерного тора не являются структурно устойчивыми отображениями, поэтому предсказать динамику сколь угодно малых возмущений таких отображений невозможно. В настоящем докладе приведены отображения, которые являются возмущениями негиперболических автоморфизмов двумерного тора посредством их суперпозиции с гомотопными тождественному градиентно-подобными диффеоморфизмами. Показано, что полученные отображения являются структурно устойчивыми и их динамические свойства определяются свойствами возмущаемых автоморфизмов.

Рассмотрим диффеоморфизмы M_ε и L_ε двумерного тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, зависящие от параметра $\varepsilon \in (-1, 1)$ и заданные формулами:

$$M_\varepsilon : \begin{cases} \bar{x} = h_\varepsilon(x) \pmod{1} \\ \bar{y} = h_\varepsilon(y) \pmod{1} \end{cases}, L_\varepsilon : \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2}h_\varepsilon(2x) \pmod{1} \\ \bar{y} = h_\varepsilon(y) \pmod{1} \end{cases}, \text{ где}$$

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z)\right), & z \in (k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}) \ (k \in \mathbb{Z}) \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{Z})$. Тогда отображение $\hat{A}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$\hat{A} : \begin{cases} \bar{x} = ax + by \pmod{1} \\ \bar{y} = cx + dy \pmod{1} \end{cases}, \text{ называется алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.}$$

⁵⁴Работа подготовлена в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021– 2022 гг, а также при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Если собственные значения матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм \hat{A} называется гиперболическим. В противном случае автоморфизм \hat{A} называется негиперболическим.

Известно, что каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора посредством алгебраического автоморфизма задается в точности одной из следующих матриц:

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Обозначим через $Per_f(z)$ период точки z относительно отображения f , а через Ω_f неблуждающее множество f . Пусть f – гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности M^2 периода n . Положим $\mathcal{B}_f = \{z \in M^2 | Per_f(z) < n\}$.

Пусть $f_{\varepsilon, A} = M_\varepsilon \circ \hat{A}$, $g_{\varepsilon, A} = L_\varepsilon \circ \hat{A}$, где $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда верны следующие утверждения. Отображения $f_{\varepsilon, A_2(0)}$, f_{ε, A_3} , f_{ε, A_5} являются градиентно-подобными диффеоморфизмами и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$, $\Omega_{f_{\varepsilon, A_3}} \subset \mathcal{B}_{\hat{A}_3}$, $\Omega_{f_{\varepsilon, A_5}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_5}$. Множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A}}$ совпадает с множеством Ω_{M_ε} и $Per_{f_{\varepsilon, A}}(z) = Per_{\hat{A}}(z)$ для любого $z \in \Omega_{f_{\varepsilon, A}}$ и $A \in \{A_2(0), A_3, A_5\}$.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда верны следующие утверждения. При $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $f_{\varepsilon, A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из m гетероклинических орбит. При $m = 2l - 1$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $g_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $g_{\varepsilon, A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из $4m$ гетероклинических орбит.

ЗЕРКАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ ПАРЫ ПО БЕРГЛУНДУ–ХЮБШУ–ХЕННИНГСОНУ И ИХ НЕКОММУТАТИВНЫЕ АНАЛОГИ

Гусейн-Заде С. М. (Россия, Москва)

МГУ им. М. В. Ломоносова

sabir@mccme.ru

Двойственность Берглунда–Хюбша–Хеннингсона — первая систематическая попытка конструирования зеркально-симметричных моделей Ландау–Гинзбурга. Входными данными для (орбиформной) модели Ландау–Гинзбурга является пара (f, G) , состоящая из квазиоднородного многочлена f от нескольких переменных и конечной группы сохраняющих его линейных преобразований. В конструкции Берглунда–Хюбша–Хеннингсона в качестве f участвуют, так называемые, обратимые многочлены, а в качестве G подгруппы групп их диагональных симметрий. (Квазиоднородный многочлен f называется *обратимым*, если количество мономов в нем равно количеству n переменных, т.е. $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n x_j^{E_{ij}}$, $a_i \neq 0$ и $\det(E_{ij}) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать что $a_i = 1$.) По паре (f, G) описанного вида строится двойственная пара (\tilde{f}, \tilde{G}) . (При этом $\tilde{f}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n x_j^{E_{ji}}$.) Двойственные пары (f, G) и (\tilde{f}, \tilde{G}) обладают рядом “зеркально симметричных” свойств (например, симметрией ряда орбиформных инвариантов, простейшим из которых является орбиформная эйлерова характеристика).

Двойственность Берглунда–Хюбша–Хеннингсона была обобщена на пары вида (f, \hat{G}) , где f — обратимый многочлен, а \hat{G} — полупрямое произведение $G \times S$ группы G диагональных симметрий многочлена f и группы S перестановок координат, сохраняющих f и G . Конструкция основана на идее А. Такахаши и поэтому называется двойственностью Берглунда–Хюбша–Хеннингсона–Такахаши. Оказывается, что двойственные пары могут

претендовать на зеркальную симметричность только при выполнении специальных ограничений на группу S перестановок координат: так называемое условие четности. Для удовлетворяющих условию четности двойственных пар в некоторых случаях была доказана симметричность таких инвариантов, как орбиформальная эйлерова характеристика, орбиформальная дзета-функция монодромии, орбиформальная E-функция. Более того, имеются указания на то, что рассматриваемые инварианты разбиваются на слагаемые (или множители), соответствующие классам сопряженности элементов группы S и обладающие теми же симметриями.

Доклад основан на совместных результатах с В.Эбелингом.

ГЕЛЬДЕРОВСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ЧАСТИ ОБЛАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО (p, q) -ЛАПЛАСИАНА

Гусейнов С. Т. (Азербайджан, Баку)

Механико-Математический Факультет, Бакинский государственный университет
sarvanhuseynov@rambler.ru

Рассмотрим в области $D \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, семейство эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon = \operatorname{div}(\omega_\varepsilon a(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = 0. \quad (1)$$

с положительным весом $\omega_\varepsilon(x)$ и показателем $p(x)$. Здесь $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$, действительная симметрическая матрица с измеримым элементами. Предполагается, что относительно коэффициентов оператора L выполнены условия

$$\mu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a(x) \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} |\xi|^2, \quad \mu \in (0, 1]. \quad (2)$$

Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$, $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ и

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon \omega(x), & \text{если } x \in D^{(1)}, \\ \omega(x), & \text{если } x \in D^{(2)}, \\ \varepsilon \in (0, 1] \end{cases} \quad (3)$$

$$p(x) = \begin{cases} q, & \text{если } x \in D^{(1)}, \\ p, & \\ 1 < q < p, & \end{cases} \quad (4)$$

где $\omega(x)$ -вес, удовлетворяющий A_p -условию Макенхаупта.

Кроме того, предполагается, что в открытых шарах B_{R_0} достаточно малого радиуса R_0 с центром на гиперплоскости Σ для почти всех точек x из полушара $B_{R_0} \cap \{x : x_n > 0\}$ выполнено неравенство

$$\omega(x) \leq \gamma \omega(x'), \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad (5)$$

где x' – точка, симметричная x относительно гиперплоскости Σ . Для определения решения уравнения (1) введем класс функций

$$W_{loc}(D) = \{u : u \in W_{loc}^{1,1}(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L_{loc}^1(D)\},$$

где $W_{loc}^{1,1}(D)$ – соболевское пространство функций, локально суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка.

Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W_{loc}(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_D \omega_\varepsilon(x) a(x) |\nabla u|^{p(x)-1} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad (6)$$

на пробных функциях $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Для показателя $p(\cdot)$, заданного равенством (4), гладкие функции плотны в $W_{loc}(D)$ (см. [1]), вследствие чего в интегральном тождестве (5) в качестве пробных функций можно брать финитные функции из $W_{loc}(D)$.

В работе [3] доказано, что для показателя p , заданного равенством (4), любое решение уравнения (1) при каждом фиксированном значении $\varepsilon \in (0, 1]$ в произвольной подобласти $\overline{D}' \subset D$ принадлежит пространству $C^\alpha(D')$ гёльдеровых в D' функций. Нас интересует вопрос о независимости показателя α от ε .

Рассмотрим семейство $\{u^\varepsilon(x)\}$ решений уравнений $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$, ограниченное в L^∞ равномерно по ε на компактных подмножествах D . Основной целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Существует постоянная $\alpha \in (0, 1)$, зависящая только от размерности пространства n констант μ, p, γ, q и веса ω , такая, что семейство $\{u^\varepsilon(x)\}$ компактно в $C^\alpha(D')$ в произвольной подобласти $\overline{D}' \subset D$.*

Литература

- [1] Жиков В.В. Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Москва: Известия АН СССР, Сер. Матем., -1986. т.50 вып. 4,-с.675-710.
- [2] Алхутов Ю.А., Гусейнов С.Т. Гёльдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения // -Москва: Дифференциальные уравнения, - 2009. т.45, №1, -с.54-59.
- [3] Acerbi, E., Fusco, N. A transmission problem in the calculus of variations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. -1991. v.2, no. 1. -p.1-16.

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Дмитрук А. В. (Россия, Москва)

Центральный экономико-математический институт РАН
МГУ им. М.В. Ломоносова
optcon@mail.ru

Осмоловский Н. П. (Польша, Варшава)

Институт системных исследований ПАН
Nikolai.Osmolovskii@ibspan.waw.pl

Рассматривается простейшая задача со смешанным ограничением:

$$J(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \dot{x} = f(x, u), \quad G(x, u) \leq 0, \quad (1)$$

где $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, функции J, f, G гладкие, и нас интересуют необходимые условия слабого минимума на некотором процессе $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$.

Если при $G(x, u) = 0$ всегда $G_u(x, u) \neq 0$, то смешанное ограничение *регулярно*, и сопряженная переменная должна удовлетворять обычному уравнению $-\dot{\psi} = \psi f_x(\hat{x}, \hat{u}) - \lambda G_x(\hat{x}, \hat{u})$ и условию стационарности по управлению $\psi f_u(\hat{x}, \hat{u}) - \lambda G_u(\hat{x}, \hat{u}) = 0$, где $\lambda \in L_1[t_0, t_1]$, $\lambda(t) \geq 0$ и $\lambda(t)G(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$ (см. напр. [1]).

Для общей задачи с *нерегулярными* смешанными ограничениями необходимые условия слабого минимума получены А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиним [2, 3]. Для задачи (1) они состоят в следующем. Введем *множество фазовых точек*

$$\mathcal{N} := \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} : G(x, u) = 0, \quad G_u(x, u) = 0\}.$$

Пусть $\text{clm}(\hat{u})$ есть замыкание графика функции $\hat{u}(t)$ по мере Лебега, а $\text{clm}(\hat{u})(t)$ есть соответствующее ему многозначное отображение $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Определим множество

$$D := \{t \in [t_0, t_1] : (\hat{x}(t), \text{clm}(\hat{u})(t)) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что оно замкнуто. Зададим на нем многозначную функцию

$$S(\hat{x}(t), \text{clm}(\hat{u}(t))) := \{ G_x(\hat{x}(t), u) : u \in \text{clm}(\hat{u}(t)), (\hat{x}(t), u) \in \mathcal{N} \}.$$

Теорема. Пусть процесс $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ доставляет слабый минимум. Тогда найдутся множители: число $\alpha_0 \geq 0$, функция $\lambda \in L_1[t_0, t_1]$, такая что п.в. $\lambda(t) \geq 0$ и $\lambda(t)G(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$, функция ограниченной вариации $\psi(t)$, мера $d\eta \in C^*[t_0, t_1]$, $d\eta \geq 0$, сосредоточенная на множестве D , и $d\eta$ -измеримая ограниченная функция $s(t) \in \text{conv} S(\hat{x}(t), \text{clm}(\hat{u}(t)))$ п.в. по $d\eta$, для которых выполнены:

$$\begin{aligned} &\text{условие нетривиальности} \quad \alpha_0 + \|\lambda\|_1 + d\eta([t_0, t_1]) > 0, \\ &\text{сопряженное уравнение в терминах мер:} \end{aligned} \quad (2)$$

$$d\psi = -\psi f_x(\hat{x}, \hat{u}) dt + \lambda G_x(\hat{x}, \hat{u}) dt + s d\eta, \quad (3)$$

условия трансверсальности

$$\psi(t_0 - 0) = \alpha_0 J_{x_0}, \quad \psi(t_1 + 0) = -\alpha_0 J_{x_1}, \quad (4)$$

и обычное условие стационарности по управлению

$$\psi f_u(\hat{x}, \hat{u}) - \lambda G_u(\hat{x}, \hat{u}) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, основное отличие от регулярного случая состоит в том, что теперь $\psi(t)$ это функция ограниченной вариации, и в сопряженном уравнении присутствует дополнительный член, соответствующий возможным скачкам $\psi(t)$ на множестве D . Направления этих скачков $s(t)$ лежат в выпуклой оболочке множества $S(\hat{x}(t), \text{clm}(\hat{u}(t)))$; значения функции $s(t)$ вне D не играют роли.

Подробное доказательство теоремы дается в [4].

Литература

- [1] Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Мехмат МГУ. 2004. <https://kafedra-opu.ru/node/139>.
- [2] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. М.: Наука. Ин-т хим. физики. 1971.
- [3] Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М.: Физматлит, 2001.
- [4] Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Local minimum principle for an optimal control problem with a nonregular mixed constraint // SIAM J. Control Optim., (to appear).

МОМЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Завьялова Т. В. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский технологический университет

«Московский институт стали и сплавов»

Zavyalova.tv@misis.ru

В работе рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, параметры которой зависят от полумарковского случайного процесса:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, y(t))x, \quad (1)$$

где $x(t)$ – n -вектор, $A(t, y(t))$ – матрица, размерности $n \times n$, зависящая от полумарковского конечнозначного случайного процесса $y(t)$. Такие системы называют системами со случайной

структурой. Полумарковский случайный процесс сочетает в себе свойства марковских цепей с дискретным временем и однородных марковских цепей с непрерывным временем. Определение и свойства полумарковских процессов подробно описаны в работах [1], [2]. Таким образом, поведение системы (1) полностью описывается случайным марковским процессом $\{x(t), y(t)\} \in R^{n+m}$ с известной плотностью распределения.

Будем предполагать, что в случайный момент времени τ система (1) переходит скачкообразно из состояния $y(\tau - 0) = y_i$ в состояние $y(\tau + 0) = y_j$. Время пребывания системы (1) в состоянии y_i случайно и зависит от состояния, в которое система переходит y_j . Тогда естественным является предположение и о скачкообразном изменении вектора $x(t)$ согласно соотношению:

$$x(\tau + 0) = \left(K_{ij} + \sum_{s=1}^N \xi_s Q_s \right) \cdot x(\tau - 0), \quad (2)$$

где K_{ij} – матрица размерности $n \times n$, зависящая от полумарковского процесса, Q_s матрицы, размерности $n \times n$, ξ_s – независимые случайные величины, для которых $M\xi_s = 0$, $D\xi_s = 1$.

Для системы дифференциальных уравнений (1) и условием скачка (2) выводятся интегральные уравнения для моментов первого и второго порядков. Полученные результаты обобщают результаты исследования моментных уравнений системы (1), (2), полученные в работе [3] на случай, когда параметры системы зависят от полумарковского случайного процесса.

Литература

- [1] Тихонов В. И. Миронов В. А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977.
- [2] Королук В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – Изд. «Наукова думка», Киев – 1976.
- [3] Завьялова Т. В., Кац И. Я., Тимофеева Г. А. Об устойчивости движения стохастических систем со случайным условием скачка фазовой траектории // Автоматика и телемеханика. – М. – 2002. – № 7 С.33-43.

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДЕННОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА – КАПУТО

Захарова Т. А. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет
tanya_1997_smirnova@mail.ru

Федоров В. Е. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет
kar@csu.ru

Пусть \mathcal{X} , \mathcal{Y} – банаховы пространства, D_t^β – производная Герасимова – Капуто, $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ – банахово пространство всех линейных операторов, непрерывно действующих из \mathcal{X} в \mathcal{Y} , $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ – множество всех линейных операторов с плотными в пространстве \mathcal{X} областями определения, действующих в \mathcal{Y} . Пусть $L, M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ имеют области определения D_L, D_M соответственно, $\ker L \neq \{0\}$, обозначим через $\rho^L(M)$ множество таких $\mu \in \mathbb{C}$, что отображение $\mu L - M : D_L \cap D_M \rightarrow \mathcal{Y}$ инъективно, при этом $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1} L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $L, M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, X – открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$, $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$. Решением на отрезке $[t_0, t_1]$ задачи Шоултера – Сидорова

$$(Lx)^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1} x(t), D_t^{\alpha_2} x(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x(t)) \quad (2)$$

будем называть такую функцию $x : [t_0, t_1] \rightarrow D_M \cap D_L$, что $Lx \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, $D_t^\alpha Lx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, $Mx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, выполняются условия (1), при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняются включения $(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)) \in X$ и равенство (2).

Определение [1, 2]. Пусть $L, M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Пара (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geq 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая постоянная $K = K(\theta, a) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\max\{\|R_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Введем обозначения $\ker R_\mu^L(M) := \mathcal{X}^0$, $\ker L_\mu^L(M) := \mathcal{Y}^0$. Через \mathcal{X}^1 (\mathcal{Y}^1) обозначим замыкание образа $\text{im}R_\mu^L(M)$ ($\text{im}L_\mu^L(M)$) в норме пространства \mathcal{X} (\mathcal{Y}), а через L_k (M_k) — сужение оператора L (M) на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{Y}^k$), $k = 0, 1$. Обозначим $\bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{Z}^n$. Используя начальные данные y_0, y_1, \dots, y_{m-1} , определим

$$\tilde{y}(t) := y_0 + \frac{(t-t_0)}{1!}y_1 + \dots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}y_{m-1}, \quad \tilde{y}_k := D_t^{\alpha_k}|_{t=t_0}\tilde{y}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим $V := X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$.

Теорема 1. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, $\text{im}QN_1 \subset \text{im}L$, $L_1^{-1}QN_1 \in C(V; D_{L_1^{-1}M_1})$ локально липшицево по \bar{x} , $y_k \in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1, L_1^{-1}\tilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Теорема 2. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, V — открытое множество в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$, где $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, $QN_1 \in C(V; D_{M_1L_1^{-1}})$ локально липшицево по \bar{x} , $y_k \in D_{M_1L_1^{-1}}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1, L_1^{-1}\tilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Литература

- [1] Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т. 16. №2. С. 93–107.
- [2] Романова Е. А., Федоров В. Е. Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т.23. №4. С. 58–72.

СЛОЖНОСТЬ КЛЕТОЧНЫХ МУЛЬТИПЛЕКСОРОВ С ПОВТОРЯЮЩИМИСЯ ВХОДАМИ

Зизов В. С. (Россия, Москва)
ВМК МГУ им М.В. Ломоносова
vzs815@gmail.com

Модель клеточных схем (**КС**) впервые была предложена в 1967 году С.С. Кравцовым в работе [1], в которой для неё был получен порядок функции Шеннона. Модель **КС** является математической моделью интегральных схем (ИС), учитывающей особенности физического синтеза. Аналогичная математическая модель в зарубежных источниках была описана в 1980 году К.Д. Томпсоном в работе [2]. Для исследований, связанных с ИС, модель является

основополагающей. В исследовании Г. Биларди, М. Працчи, Ф.П. Препарат [3] показано, что модель плоских схем Томпсона является удовлетворительным приближением для ИС в случае монокристаллических систем, и более того, она остаётся точным приближением для отдельных компонентов ИС в случаях, когда модель не может верно отразить все особенности проектируемых систем.

Как в теоретических исследованиях, так и при синтезе ИС, часто применяется мультиплексорная функция алгебры логики (ФАЛ). Обычно соответствующие схемные реализации ФАЛ, называемые мультиплексорами, являются составной частью более сложных схем, схем выбора из памяти и комбинационных блоков. Этим обусловлена необходимость их оптимизации по ряду характеристик: задержке, мощности, площади, и пр. Функционал площади схемы естественным образом возникает в модели клеточных схем.

Ранее в работе [4] были показаны асимптотические верхние и нижние оценки для площади схем, реализующих дешифратор порядка n без повторяющихся входов. Более того, данные оценки совпадают в первом члене разложения, имеют вид $n2^{n-1}(1 + O(\frac{1}{n}))$. В настоящей работе устанавливаются асимптотические верхние оценки площади схем с повторяющимися входами, реализующих мультиплексорную ФАЛ порядка n , вида $2^n \log(n) + O(2^n)$.

Длинные клеточные схемы – это выделенный класс клеточных схем, который характеризуется следующими свойствами. Данными **КС** реализуется одна существенная ФАЛ либо семейство ФАЛ, выходы которых расположены либо на одной, либо на двух заранее выбранных сторонах, и входы которых могут повторяться сколь угодно большое число раз.

Определение 1. Сложностью ФАЛ (системы ФАЛ) $f(x_1, \dots, x_n)$ с n значимыми переменными в модели клеточных схем с повторными входами называется минимальная площадь клеточной схемы Σ с произвольным числом повторений произвольных входов, реализующей f .

$$A_R(f) = \min_{\Sigma} A_R(\Sigma)$$

Теорема 1. (о повторном мультиплексоре). Для сложности схемы S , реализующей мультиплексорную ФАЛ μ_n , в модели **КС** с повторными входами верна верхняя оценка

$$A_R(S) \leq 2^n \log_2(n) + O(2^n)$$

Следствие 1. Из теоремы 1 следует

$$A_R(\mu_n) \leq 2^n \log_2(n) + O(2^n)$$

Литература

- [1] Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука. – 1967. – Т. 19 – С. 285-292.
- [2] Thompson C.D. A complexity theory for VLSI. – 1980.
- [3] Bilardi G., Pracchi M., Preparata F. A critique of network speed in VLSI models of computation // Solid-State Circuits, IEEE Journal of. – 1982. – Т. 17. – С. 696-702. DOI: 10.1109/JSSC.1982.1051799.
- [4] Ложкин С. А., Зизов В. С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162 №3. – С. 322-334. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334.

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА,
СОХРАНЯЮЩЕЕ ВИДОВУЮ СТРУКТУРУ БИОСООБЩЕСТВА

Иванова А. С. (Россия, Петрозаводск)

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН

ФИЦ «Карельский научный центр РАН»

a_s_ivanova@bk.ru

Кириллов А. Н. (Россия, Петрозаводск)

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН

ФИЦ «Карельский научный центр РАН»

krllw1812@yandex.ru

Предполагается, что ареал обитания двух видов, хищников и жертв, состоит из нескольких участков, причем жертвы не покидают участки, а хищники мигрируют между участками. Перед популяцией хищников возникают две основные задачи: выбора участка и определения момента времени ухода с участка. Согласно классическому результату теории оптимального фуражирования (the Marginal Value Theorem, MVT, [1]), популяция покидает участок в момент времени, при котором средняя скорость потребления энергии максимальна. Реальное время, проведенное популяцией на участке, чаще существенно отличается от прогнозируемого с помощью MVT. В [2] предложен подход для оценивания времени, проведенного популяцией на участке, основанный на пищевой привлекательности участка, которая введена одним из авторов и является функцией вида

$$n(t) = \Lambda + \int_0^t x_2(\tau) (x_1(\tau)/x_2(\tau) - \lambda) d\tau, \quad (1)$$

где $t = 0$ — момент времени появления хищников на участке; $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ — численности жертв и хищников, соответственно; $0 < \Lambda, \lambda$ — пороговые постоянные. Величина $x_1/x_2 - \lambda$ характеризует избыток ($x_1/x_2 > \lambda$) или недостаток ($x_1/x_2 < \lambda$) пищевого ресурса, приходящегося на одного хищника. За счет интеграла происходит накопление избытка или недостатка пищевого ресурса. На важность рассмотрения величины x_1/x_2 при описании динамики популяций обратили внимание Р. Ардити и Л. Гинзбург в [3]. За счет множителя x_2 под интегралом учтен принцип «стада себялюбцев», предложенный У. Гамильтоном в [4] для объяснения одновременности миграции особей популяции. Для начала миграции недостаток пищевого ресурса должен накапливаться в течение некоторого времени, когда накопление достигает порогового значения, популяция покидает участок. Предполагается, что при $n > \Lambda$ хищники находятся на участке, а при $n(t) < \Lambda$ — вне участка. Продифференцировав (1) и учитывая, что динамика взаимодействующих популяций описывается системой Лотки – Вольтерра с управлением, получим

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2 - u_1), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u_2), \quad \dot{n} = x_1 - \lambda x_2, \quad (2)$$

где $a, b, k, m > 0$, u_1, u_2 — интенсивности изъятия особей жертв и хищников, соответственно, $0 \leq u_1 < a, 0 \leq u_2$. Постановка задачи: найти периодическое управление $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$, при котором $n(t) \geq \Lambda, t \geq 0$.

Пусть изъятие начинается при $t = 0$, причем из (1) следует, что $n(0) = \Lambda$. Введем множества: $\Pi = \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{a}{b}\}$, $K_1 = \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, x_2 > \frac{a}{b}\}$, $K_2 = \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 < \frac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{a}{b}\}$, $\varepsilon > 0$. Для каждого из введенных множеств предложен свой способ управления, сохраняющий видовую структуру биосообщества участка. Пусть $x_{10} = x_1(0), x_{20} = x_2(0)$. Тогда для $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in \Pi$ построено периодическое управление, доказана периодичность соответствующего решения системы (2). Для $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda) \in K_1 \cup K_2$ найдено управление, при котором $n \geq \Lambda$. Причем для $M_0 \in K_1$ доказана теорема, дающая условие периодичности соответствующей траектории системы (2).

Литература

- [1] Charnov E. L. Optimal Foraging, the Marginal Value Theorem // Theoretical population biology. 1976. Vol. 9. № 2. P. 129–136.
- [2] Кириллов А. Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6. № 2. С. 318–336.
- [3] Arditi R., Ginzburg L. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // Journal of Theoretical Biology. 1989. Vol. 139. P. 311–326.
- [4] Hamilton W. Geometry for the selfish herd // Journal of the Theoretical Biology. 1971. Vol. 31. P. 295–311.

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗЬЮ

Ивановский Л. И. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
leon19unknown@gmail.com

Рассмотрим краевую задачу с дополнительной внутренней связью во втором краевом условии:

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \quad (1)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha u(x_0, t). \quad (2)$$

Здесь $u(x, t)$ — гладкая функция при $t \geq 0$ и $x \in [0, 1]$, α и γ — действительные числа, а параметр $x_0 \in [0, 1]$. Для задачи (1), (2) можно выделить два способа потери устойчивости нулевого состояния равновесия — дивергентный, когда в спектре устойчивости появляется нулевое значение, и колебательный, соответствующий случаю перехода выхода комплексно сопряженных собственных значений с левой комплексной полуплоскости на мнимую ось. Задача исследования состояла в изучении характера потери устойчивости нулевого решения краевой задачи (1), (2), т.е. в поиске критических значений параметров α , γ и x_0 и получении асимптотических формул для режимов, ответвляющихся от нулевого состояния равновесия.

Получить критические значения параметров с использованием одного лишь аналитического аппарата довольно затруднительно. В связи с этим, исследование осуществлялось численным способом.

В результате исследования были найдены значения параметров α , γ и x_0 , при которых происходят различные бифуркации нулевого состояния равновесия краевой задачи (1), (2). При значениях параметра α , близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия в одном случае и циклов в другом.

Литература

- [1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики // ТМФ. 2020. Т. 203. №1. С. 10–25.
- [2] Rudyi A. S. Theoretical Fundamentals of the Method for Thermal Diffusivity Measurements from Auto-Oscillation Parameters in a System with a Thermal Feedback // International Journal of Thermophysics. 1993. Vol. 14, No. 1. P. 159–172.
- [3] Rudyi A. S. Self-excited oscillations in a parabolic system with nonlinear external feedback // Tech. Phys. 1997. Vol. 42, No. 5. P. 561–563.
- [4] Ивановский Л. И. Динамика одной системы диффузионно связанных дифференциальных уравнений с дополнительной внутренней связью // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. №3 (55). С. 15–30.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ⁵⁵

Игнатъев М. Ю. (Россия, Саратов)
Саратовский госуниверситет
ignatievmu@sgu.ru

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$y' = \rho B y + x^{-1} A y + q(x) y, \quad x \in (0, \infty) \quad (1)$$

со спектральным параметром ρ , где $A, B, q(x)$ – $n \times n$ – матрицы, $n > 2$, $q_{jk}(\cdot) \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$, $p > 2$, $q_{jj} = 0$, матрицы A, B постоянны и удовлетворяют следующим условиям.

Условие А. Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и таковы, что $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $\operatorname{Re} \mu_1 < \operatorname{Re} \mu_2 < \dots < \operatorname{Re} \mu_n$ и $\operatorname{Re} \mu_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$.

Условие В. Матрица B диагональна: $B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$, элементы b_1, \dots, b_n – различные ненулевые комплексные числа, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Кроме того, $\sum_{j=1}^n b_j = 0$.

Определение. Обозначим через R_1, \dots, R_n (зависящую от ρ) перестановку чисел b_1, \dots, b_n такую, что $\operatorname{Re} \rho R_1 < \operatorname{Re} \rho R_2 < \dots < \operatorname{Re} \rho R_n$, через f_1, \dots, f_n – соответствующую перестановку векторов e_1, \dots, e_n стандартного базиса в \mathbb{C}^n . k -м решением типа Вейля назовём решение $\Psi_k(\cdot, \rho)$ системы (1), удовлетворяющее условиям:

$$\Psi_k(x, \rho) = O(x^{\mu_k}), \quad x \rightarrow 0, \quad \Psi_k(x, \rho) = \exp(\rho x R_k)(f_k + o(1)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Обозначим

$$\Sigma := \bigcup_{(k,j): j \neq k} \{z : \operatorname{Re}(z b_j) = \operatorname{Re}(z b_k)\}.$$

Всюду далее S – произвольный открытый сектор с вершиной в начале координат, лежащий в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Пусть $c(z) = (c_1(z), \dots, c_n(z))$ и $e(z) = (e_1(z), \dots, e_n(z))$ суть фундаментальные матрицы невозмущенной системы

$$\frac{dy}{dz} = B y + z^{-1} A y, \quad z \in S,$$

такие что

$$e_k(z) = \exp(z R_k)(f_k + o(1)), \quad z \rightarrow \infty, \quad c_k(z) = z^{\mu_k}(h_k + o(1)), \quad z \rightarrow 0,$$

где h_k – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению μ_k . Будем говорить, что в секторе S выполнено *условие информативности*, если для каждого $k = 2, \dots, n$ $\det(e_1(z), \dots, e_{k-1}(z), c_k(z), \dots, c_n(z)) \neq 0$. В этом случае для системы (1) с $q = 0$ k -е решение типа Вейля существует и единственно при всех $\rho \in S$ и всех $k = 2, \dots, n$.

Целью настоящего исследования является построение и изучение решений типа Вейля для системы (1) с произвольной $q(\cdot)$. Для этой цели применяется метод, основанный на привлечении тензорно-значных решений некоторых вспомогательных дифференциальных систем [1], [2]. Ключевую роль играет следующий результат.

Теорема 1. Пусть в секторе S выполнено условие информативности. Зафиксируем произвольное $k \in \{2, \dots, n\}$.

Тогда: для всех ρ таких, что $\Delta_k(\rho) \neq 0$, k -е решение типа Вейля существует и единственно; при каждом фиксированном $x \in (0, \infty)$ вектор $\Psi_k(x, \rho)$ есть единственное решение линейной системы:

$$F_{k-1}(x, \rho) \wedge \Psi_k(x, \rho) = F_k(x, \rho), \quad \Psi_k(x, \rho) \wedge T_k(x, \rho) = 0.$$

⁵⁵Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10001, <https://rscf.ru/project/21-71-10001/>.

Здесь $T_k(x, \rho)$, $F_k(x, \rho)$, $k = 1, \dots, n$ – фундаментальные тензоры, определяемые как в работе [2], $\Delta_k(\rho)$, $k = 2, \dots, n$ – характеристические функции, определяемые равенством $F_{k-1}(x, \rho) \wedge T_k(x, \rho) = \Delta_k(\rho)e_1 \wedge \dots \wedge e_n$.

Литература

- [1] Beals R., Deift P. and Tomei C. Direct and inverse scattering on the line. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1988.
- [2] Ignatyev M. Spectral analysis for differential systems with a singularity // Results in Mathematics. 2017. Vol. 71. P. 1531–1555.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЕМ НА ОБРАЗ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА⁵⁶

Ижбердеева Е. М. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
elizaveta.izhberdeeva@gmail.com

Плеханова М. В. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
Южно-Уральский государственный университет
mariner79@mail.ru

Судгаймер Е. А. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
katya.kaldaeva.00@mail.ru

Пусть D^{σ_n} – дробная производная Джрбашьяна – Нерсисяна, ассоциированная с последовательностью $\{\alpha_k\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, X открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq 0$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, оператор $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$ нелинейный.

Рассмотрим начальную задачу для нелинейного уравнения

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\sigma_0}x(t), D^{\sigma_1}x(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}}x(t)) + f(t), \quad (1)$$

$$D^{\sigma_k} Px(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Функция $x \in C((t_0, t_1]; D_M) \cap C((t_0, t_1]; \mathcal{X})$ является решением задачи (1),(2) на $[t_0, t_1]$, если $Mx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, $D^{\sigma_k}x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $D^{\sigma_n}Lx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{X})$, для всех $t \in (t_0, t_1]$ элементы $(t, D^{\sigma_0}x(t), D^{\sigma_1}x(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}}x(t))$ принадлежат множеству X и выполнено равенство (1) при условии (2).

Предположим, что $\text{im}N \subset \mathcal{Y}^1$. Тогда функция $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ может быть задана как часть оператора N без потери общности. Далее строка над символом будет обозначать набор из n элементов с номерами от 1 до n , например, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Теорема 1. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, X – открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N \in C^2(X; \mathcal{X})$, $\text{im}N \subset \mathcal{Y}^1$, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $(D^{\sigma_n}H)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in C((0, T]; \mathcal{X})$ для $l = 0, 1, \dots, p$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}H)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in C([0, T]; \mathcal{X})$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$, $l = 0, 1, \dots, p$. Тогда на отрезке $[t_0; t_1]$ существует единственное решение задачи (1),(2).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k x_1}{\partial t^k}(s, t_0) = x_{1k}(s), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad s \in \Omega, \quad (3)$$

$$x_i(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times [t_0, t_1], \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

⁵⁶Работа выполнена при поддержке Гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2708.2022.1.1).

$$\begin{aligned}
D^{\sigma_n} \Delta x_1 &= x_1 + h_1(s, D^{\sigma_0} x_1, D^{\sigma_0} x_2, D^{\sigma_0} x_3, \dots, D^{\sigma_{n-1}} x_1, D^{\sigma_{n-1}} x_2, D^{\sigma_{n-1}} x_3) + f_1(s, t), \\
D^{\sigma_n} \Delta x_3 &= x_2 + f_2(s, t), \\
0 &= \Delta x_3 + f_3(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times [t_0, t_1],
\end{aligned} \tag{5}$$

где $D_t^{\sigma_k}$ дробная производная Джрбашьяна – Нерсесяна по переменной t .

Обозначим через A оператор Лапласа с областью определения $H_0^2(\Omega) := \{z \in H^2(\Omega) : z(s) = 0, s \in \partial\Omega\} \subset L_2(\Omega)$, $\{\varphi_k\}$ – ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций с соответствующими собственными значениями $\{\lambda_k\}$ оператора A , пронумерованными в порядке возрастания с учетом их кратностей.

Сведем задачу (3)–(5) к задаче (1), (2), подобрав пространства $\mathcal{X} = H_0^{2+2j}(\Omega) \times H^{2j}(\Omega) \times H_0^{2+2j}(\Omega)$, $\mathcal{Y} = (H^{2j}(\Omega))^3$, где $j > \frac{d}{4} - 1$, $H_0^{2+2j}(\Omega) := \{z \in H^{2+2j}(\Omega) : z(s) = 0, s \in \partial\Omega\}$ и операторы

$$L = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}).$$

Теорема 2. Пусть $h_1 \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{3n}; \mathbb{R})$, для некоторого $T > t_0$, $f_1 \in C([t_0, T]; H^{2j}(\Omega))$, $f_i \in C^m([t_0, T]; H^{2j}(\Omega))$, $i = 2, 3$, $D^{\sigma_n} f_3 \in C^m([t_0, T]; H^{2j}(\Omega))$, $x_{1k} \in H_0^{2+2j}(\Omega)$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда для некоторого $t \in (t_0; T]$ существует единственное решение задачи (3)–(5) на отрезке $[t_0; t_1]$.

Литература

- [1] Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M. Local unique solvability of a quasilinear equation with the Dzhrbashyan – Nersesyan derivatives. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. (In Print)

ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Иноземцев А. И. (Россия, Липецк)

Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского
inozemcev.a.i@gmail.com

Частным интегралом называется интегральный оператор с интегрированием по части переменных аргумента функции. Линейный частно-интегральный оператор включает в себя всевозможные наборы переменных интегрирования, в том числе «крайние операторы» K_0 – оператор умножения на функцию и интегральный оператор. Линейное частно-интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид

$$u(x) = \lambda (Ku)(x) + f(x) = \lambda \left(\sum_{\alpha} K_{\alpha} u \right) (x) + f(x), \tag{1}$$

где многомерные частно-интегральные операторы K_{α} определены равенствами

$$(K_{\alpha} u)(x) = \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(x; t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha}, \tag{2}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ($m \leq n$) – мультииндекс из натуральных не совпадающих чисел от 1 до n , $D_{\alpha} = (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \dots \times (a_{\alpha_m}, b_{\alpha_m})$.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p_i \geq 1$. Анизотропное пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$, определенное нормой $\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}}$, является банаховым пространством. Обозначим $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – сопряженный к \mathbf{p} мультииндекс, т.е. $\frac{1}{p_{\alpha_i}} + \frac{1}{q_{\alpha_i}} = 1$.

В работе [1] показана ограниченность норм итераций $K_\alpha^j u$ в анизотропном пространстве Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$, причем выполняется неравенство

$$\|K_\alpha^j u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \prod_{i=1}^j \|k_\alpha\|_{L_{(q_\alpha; p_\alpha, p_{\bar{\alpha}}^j q_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)} \|u\|_{L_{(p_\alpha; p_{\bar{\alpha}}^{j+1})}(D_\alpha, \bar{\alpha})},$$

из которого следует, что для принадлежности функции $K_\alpha^j u$ пространству $L_{\mathbf{p}}(D)$ достаточно принадлежности функций $k_\alpha(x, t_\alpha)$ и $u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\bar{\alpha}})$ пространствам $L_{(q_\alpha; p_\alpha, p_{\bar{\alpha}}^j q_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)$ и $L_{(p_\alpha; p_{\bar{\alpha}}^{j+1})}(D_\alpha, \bar{\alpha})$ соответственно, где $p_\alpha = (p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_m})$, $p_{\bar{\alpha}}^j = (p_{\bar{\alpha}_1}^j, \dots, p_{\bar{\alpha}_{n-m}}^j)$. При бесконечных итерациях $j \rightarrow \infty$ и $p_i \geq 1$ получим $u \in L_{(p_\alpha; \infty)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$, $k_\alpha \in L_{(q_\alpha; p_\alpha, \infty)}(D_\alpha \times D)$, т.к. мультииндекс α пробегает все подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, то для ограниченности оператора K_α и их итераций достаточно $u \in L_{(\infty, \dots, \infty)}(D) = L_\infty(D)$ и $k_\alpha \in L_{(1; \infty)}(D_\alpha \times D)$. Из (2) следует, что $K_\alpha u \in L_\infty(D)$, тогда из неравенства Минковского следует

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{L_\infty(D)} &= \left\| \sum_\alpha K_\alpha u \right\|_{L_\infty(D)} \leq \sum_\alpha \|K_\alpha u\|_{L_\infty(D)} \leq \\ &\leq \sum_\alpha \left(\|k_\alpha\|_{L_{(1; \infty)}(D_\alpha \times D)} \|u\|_{L_\infty(D)} \right) \leq \|u\|_{L_\infty(D)} \sum_\alpha \|k_\alpha\|_{L_{(1; \infty)}(D_\alpha \times D)}. \end{aligned}$$

Если $|\lambda| \sum_\alpha \|k_\alpha\|_{L_{(1; \infty)}(D_\alpha \times D)} < 1$, то в силу теоремы Банаха оператор $A = \lambda K + f$ является сжимающим и уравнение (1) имеет единственное решение.

В [1] доказаны существование и единственность частно-интегрального уравнения (1) в случае $K = K_\alpha$ в виде операторного ряда Неймана. В случае оператора $K = \sum_\alpha K_\alpha$, включающем операторы K_0 (умножение на функцию) и $K_{1, \dots, n}$ (интегральный оператор), справедлива

Теорема. Пусть $k_\alpha \in L_{(1; \infty)}(D_\alpha \times D)$, $f \in L_\infty(D)$, и пусть $|\lambda| < 1/M$, где $M = \sum_\alpha \|k_\alpha\|_{L_{(1; \infty)}(D_\alpha \times D)}$, тогда в $L_\infty(D)$ существует предел $\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r$

функциональной последовательности $\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^r \lambda^i K^i f(x)$. Оператор Φ действует ограниченно из $L_\infty(D)$ в $L_\infty(D)$ и удовлетворяет неравенству $\|\Phi\|_{L_\infty(D)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$. Тогда существует и единственное решение уравнения (1) в виде ряда Неймана $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K^m f$, причем $\|\varphi\|_{L_\infty} \leq \frac{\|f\|_{L_\infty}}{1 - |\lambda|M}$.

В евклидовом пространстве \mathbb{R}_2 для непрерывных функций и ядер и при отсутствии в (1) оператора K_0 исследование линейных частно-интегральных уравнений Фредгольма выполнено А.С. Калитвиным [2].

Литература

- [1] Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I. Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces // Journal Of Mathematical Sciences. – Springer. – 2021. – Vol. 255. – № 6. – P. 715-725.
- [2] Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА
В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ⁵⁷

Калинин А. В. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
avk@mm.unn.ru

Тюхтина А. А. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
kalinmm@yandex.ru

В работе рассматривается иерархия квазистационарных приближений для системы уравнений Максвелла в зависимости от характерных пространственно-временных масштабов и коэффициентов системы [1-3]. В рамках этой иерархии изучаются постановки задач о создании электромагнитных полей заданной конфигурации, которые формулируются как задач оптимального управления с операторными ограничениями, обусловленными физическими особенностями явления. Исследуются задачи финального наблюдения для новых квазистационарных неклассических формулировок [4,5], в частности, рассматривается обратная задача для глобальной электрической цепи в атмосфере Земли [6].

Литература

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, Физматлит, 1982.
- [2] Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [3] Larsson J. Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 2007. V. 75. N 3. P. 230–239.
- [4] Калинин А. В., Тюхтина А. А. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах // ЖВМ и МФ. 2020. Т.60, № 8. С. 121–134.
- [5] Kalinin A. V., Tyukhtina A. A. Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23 - 27, 2020, Revised Selected Papers. Communications in Computer and Information Science, v.1413. Springer, 2021. P. 77–92.
- [6] Мареев Е. А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. № 5. С. 527-534.

О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РОМАНОВСКОГО
С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин В. А. (Россия, Липецк)
Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского
kalitvin@mail.ru

К интегральному уравнению Романовского с частными интегралами

$$x(t, s) = \lambda \int_a^b m(t, s, \sigma) x(\sigma, t) d\sigma \equiv \lambda(Mx)(t, s) \quad (1)$$

с непрерывной на $[a, b] \times [a, b] \times [a, b]$ заданной функцией m и некоторой константой $\lambda > 0$ приводится задача двухсвязных марковских цепей. Задачи многосвязных марковских цепей приводятся к интегральным уравнениям Романовского с неизвестной функцией, зависящей от n переменных [1].

⁵⁷Работа поддержана научно-образовательным математическим центром "Математика технологий будущего" (Соглашение № 075-02-2022-883).

Особенность уравнения (1) заключается в том, что у неизвестной функции под знаком интеграла сначала переставляются переменные, а затем производится интегрирование по одной из переменных. В силу этого оператор M в уравнении (1) — не интегральный и не вполне непрерывный. Уравнение (1) с непрерывным ядром изучено В.И. Романовским в [1] с применением методов, аналогичных методу Фредгольма. Более общие классы линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами изучены в [2].

Найти точное решение интегральных уравнений Романовского удаётся в редких случаях. Поэтому в работе изучается приближённое и численное решение частично интегрального уравнения Романовского

$$x(t, s) = \int_a^b m(t, s, \sigma)x(\sigma, t)d\sigma + f(t, s) \equiv (Mx)(t, s) + f(t, s). \quad (2)$$

Будем рассматривать уравнение (2) с заданными непрерывными функциями $f(t, s)$ и $m(t, s, \sigma)$, где $t, s, \sigma \in [a, b]$.

Одна из схем приближенного решения уравнения (2) предложена В.И. Романовским в [1] и ее можно применить для численного решения этого уравнения.

Отрезок $[a, b]$ разобьем на равные части длиной δ точками $t_i = s_i = \sigma_i$ ($i = 0, \dots, n$; $t_0 = s_0 = \sigma_0 = a, t_n = s_n = \sigma_n = b$). Пусть $x_{kl} = x(t_k, s_l), f_{kl} = f(t_k, s_l), m_{hkl} = m(t_k, s_l, \sigma_h)$. Через Δ обозначим определитель системы линейных алгебраических уравнений

$$x_{kl} = f_{kl} + \delta \sum_{h=1}^n x_{hk} m_{hkl} \quad (k, l = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Если $n \rightarrow \infty$, то система (2) аппроксимирует уравнения (2), а ее решение стремится к решению уравнения (2) [1]. То есть, численное решение уравнения (2) может быть найдено по формуле (3). Заметим, что решение (3) находится при условии $\Delta \neq 0$. При достаточно больших n это условие означает, что $1 \notin \sigma(M)$ ($\sigma(M)$ – спектр оператора M).

Другой метод численного решения уравнения (2) основан на численном решении системы интегральных уравнений Фредгольма с параметром t

$$\begin{cases} y(t, s) = \int_a^b k(t, s, \sigma)y(t, \sigma)d\sigma - \int_a^b l(t, s, \sigma)z(t, \sigma)d\sigma + g(t, s), \\ z(t, s) = \int_a^b l(t, s, \sigma)y(t, \sigma)d\sigma - \int_a^b k(t, s, \sigma)z(t, \sigma)d\sigma + h(t, s) \end{cases} \quad (4)$$

при условии $y(t, s) = y(s, t), z(t, s) = -z(s, t)$.

Например, система (4) с приведённым дополнительным условием получается из уравнения (2) с применением обозначений $y(t, s) = \frac{1}{2}(x(t, s) + x(s, t)), z(t, s) = \frac{1}{2}(x(t, s) - x(s, t)), g(t, s) = \frac{1}{2}(f(t, s) + f(s, t)), h(t, s) = \frac{1}{2}(f(t, s) - f(s, t)), k(t, s, \sigma) = \frac{1}{2}(m(t, s, \sigma) + m(s, t, \sigma)), l(t, s, \sigma) = \frac{1}{2}(m(t, s, \sigma) - m(s, t, \sigma))$.

С применением квадратурных формул система (4) с дополнительным условием заменяется системой линейных алгебраических уравнений. Например, при использовании формулы левых прямоугольников отрезок $[a, b]$ разбивается на n равных частей точками $t_i = s_i = \sigma_i = a + ih$, где $h = (b - a)/n, i = 0, 1, \dots, n$, а система (4) заменяется системой

$$\begin{cases} y_{ij}(n) = h \left(\sum_{p=0}^{n-1} k_{ijp} y_{ip}(n) - \sum_{p=0}^{n-1} l_{ijp} z_{ip}(n) \right) + g_{ij}, \\ z_{ij}(n) = h \left(\sum_{p=0}^{n-1} l_{ijp} y_{ip}(n) - \sum_{p=0}^{n-1} k_{ijp} z_{ip}(n) \right) + h_{ij}, \end{cases} \quad (5)$$

где $g_{ij} = g(t_i, s_j), h_{ij} = h(t_i, s_j), k_{ijp} = k(t_i, s_j, \sigma_p), l_{ijp} = l(t_i, s_j, \sigma_p)$ ($i, j, p = 0, 1, \dots, n - 1$).

Последняя система (5) решается при каждом фиксированном $i = 0, 1, \dots, n - 1$, т.е. её решение сводится к решению n систем линейных алгебраических уравнений [3]. Так как при

каждом фиксированном $t \in [a, b]$ система (4) есть система линейных интегральных уравнений с вполне непрерывными интегральными операторами, то при $n \rightarrow \infty$ решение $(y_{ij}^{(n)}, z_{ij}^{(n)})$ системы (5) стремится к (y_{ij}, z_{ij}) , где $y_{ij} = y(t_i, s_j)$, $z_{ij} = z(t_i, s_j)$.

Проверка дополнительного условия сводится к оценке малости числа

$$\delta = \max_{ij} (|y_{ij} - y_{jj}| + |z_{ij} + z_{jj}|).$$

Если δ достаточно мало, то приближённые значения решения уравнения (2) в точках (t_i, s_j) ($i, j = 0, 1, \dots, n-1$) вычисляются по формуле

$$x(t_i, s_j) = y(t_i, s_j) + z(t_i, s_j) \quad (i, j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Непосредственное применение квадратурных формул к уравнению (2) с непрерывными заданными функциями $f(t, s)$ и $m(t, s, \sigma)$ осложняется тем, что оператор M в уравнении (2) не является вполне непрерывным, а известные обоснования метода механических квадратур для интегральных уравнений Фредгольма используют полную непрерывность интегральных операторов, определяющих такие уравнения. Однако, если $1 \notin \sigma(M^2)$, то метод механических квадратур применяется не к уравнению (2), а к эквивалентному ему обратимому уравнению

$$x(t, s) = (M^2x)(t, s) + (Mf)(t, s) + f(t, s) \quad (6)$$

с вполне непрерывным интегральным оператором M^2 . При этом используется формула

$$\int_a^b \int_a^b z(t, s) dt ds = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \gamma_{ijPQ} z(t_i, s_j) + r_{PQ}(z), \quad (7)$$

где $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_P \leq b$, $a \leq s_1 < s_2 < \dots < s_Q \leq b$. Предполагается, что квадратурный процесс (7) сходится, т.е. для любой непрерывной функции $f \in C(D)$ выполняется условие

$$r_{PQ}(z) = \int_a^b \int_a^b z(t, s) dt ds - \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \gamma_{ijPQ} z(t_i, s_j) \rightarrow 0 \quad \text{при } P, Q \rightarrow \infty.$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$x(t, s) = \int_a^b \int_a^b k(t, s, \sigma, \sigma_1) x(\sigma_1, \sigma) d\sigma_1 d\sigma + g(t, s), \quad (8)$$

где $k(t, s, \sigma, \sigma_1) = m(t, s, \sigma)m(\sigma, t, \sigma_1)$, а функция $g(t, s)$ определяется равенством $g(t, s) = \int_a^b m(t, s, \sigma) f(\sigma, t) d\sigma + f(t, s)$.

Полагая в (8) $t = t_p$, $s = s_q$ и заменяя интеграл по формуле

$$\int_a^b \int_a^b k(t_p, s_q, \sigma, \sigma_1) x(\sigma_1, \sigma) d\sigma_1 d\sigma = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \gamma_{ijPQ} k_{pqij} x(t_i, s_j) + r_{pqPQ},$$

где $k_{pqij} = k(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r_{pqPQ} — остаток, получим систему, после отбрасывания остатков в уравнениях которой будем иметь систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p, s_q) ($p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q$):

$$x_{pq} = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \gamma_{ijPQ} k_{pqij} x_{ij} + g(t_p, s_q) \quad (p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q), \quad (9)$$

где $x_{ij} = x(t_i, s_j)$. В силу [3] справедлива

Теорема. Пусть выполнены условия: 1) при каждом P и Q коэффициенты γ_{ijPQ} формулы (7) положительны и существует такое число G , что $\gamma_{ijPQ} \leq G$; 2) процесс (7) сходится; 3) $x_0 \in C$ — решение уравнения (8).

Тогда при достаточно больших P и Q система (9) имеет решение

$$x_{pq}(p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q), \quad \max_{1 \leq p \leq P, 1 \leq q \leq Q} |x_{pq} - x_0(t_p, s_q)| \rightarrow 0 \text{ при } P, Q \rightarrow \infty,$$

а скорость сходимости оценивается неравенствами

$$c_1 R_{PQ} \leq \max_{1 \leq p \leq P, 1 \leq q \leq Q} |x_{pq} - x_0(t_p, s_q)| \leq c_2 R_{PQ},$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные,

$$R_{PQ} = \max_{1 \leq p \leq P, 1 \leq q \leq Q} |r_{PQ}(z_{pqPQ})|, \quad z_{pqPQ}(t, s) = k(t_p, s_q, t, s)x_0(t, s).$$

Приближение $x_{pq}(t, s)$ к решению $\tilde{x}(t, s)$ уравнения (8) можно определить равенством

$$x_{pq}(t, s) = hg \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \gamma_{ijPQ} k(t, s, t_i, s_j) x_{ij} + g(t, s).$$

Другие алгоритмы численного решения уравнения (2) могут быть построены с использованием метода итераций или метода Ньютона-Канторовича. Эти методы могут быть также применены для решения нелинейных уравнений Романовского с частными интегралами.

Приведенные схемы численного решения уравнения Романовского хорошо реализуются с применением языка программирования python.

Литература

- [1] Romanovskij V. I. Sur une classe d'equations integrales lineares // Acta Math., 1932. — Vol. 59. — P. 99–208.
- [2] Калитвин А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007. 195 с.
- [3] Вайникко Г. М. Возмущенный метод Галёркина и общая теория приближённых методов для нелинейных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967. - Т. 7, № 4. - С. 723-751.
- [4] Калитвин В. А. Некоторые методы численного решения частично интегрального уравнения Романовского // Материалы Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2018". Воронеж: Издательско - полиграфический центр "Научная книга 2018. С. 229–233.

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ⁵⁸

Калманович В. В. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского
v572264@yandex.ru

Сергина Е. В. (Россия, Калуга)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Калужский филиал
evfs@yandex.ru

Ранее нами был предложен метод решения одномерной задачи теплопроводности в многослойной среде с непрерывными условиями согласования функции температуры и потока между слоями [1-3], а также при неидеальном тепловом контакте слоев с условиями согласования третьего типа [4]. Этот метод состоит в совместном использовании матричного метода, аппарата обобщенных степеней Берса [5] и метода Фурье. Такой подход позволил в единой аналитической форме получить решение задачи для процесса теплопроводности как в многослойной среде с плоскими слоями, так и в среде, обладающей осевой или центральной симметрией.

⁵⁸Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271).

В настоящей работе получены некоторые оценки сходимости решений указанными методами задачи теплопроводности для различных теплофизических и геометрических параметров слоев при идеальном тепловом контакте.

Литература

- [1] Kalmanovich V.V., Kartanov A. A., Stepovich M. A. On some problems of modelling the non-stationary heat conductivity process in an axisymmetric multilayer medium // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1902. 012073.
- [2] Gladyshev Y. A., Kalmanovich V. V., Loshkareva E. A. On the use of complex functions in solving non-stationary problems of heat conductivity in a multilayered medium by the Fourier method // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1479. 012006.
- [3] Гладышев Ю. А., Калманович В. В. О решении задачи теплопроводности в многослойной среде с фазовыми переходами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 192. С. 46-54.
- [4] Калманович В. В. О построении решения задачи теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом между слоями // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 2 (51). С. 43-52.
- [5] Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 56. P. 67-93.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ И ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Канатников А. Н. (Россия, Москва)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
skipper@bmstu.ru

Рассматриваются динамические системы, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений, автономных и неавтономных. Один из методов качественного анализа таких систем состоит в построении множеств в фазовом пространстве системы (называемых локализирующими), которые содержат все инвариантные компактные множества системы [1].

Построение локализирующих множеств дает много информации о качественных свойствах системы. В частности, локализирующие множества позволяют выделить в фазовом пространстве области, в которых поведение траекторий определяется некоторым типичным сценарием. Вне локализирующего множества поведение траекторий достаточно простое, в то время как в локализирующем множестве концентрируется вся сложная динамика системы.

Пусть с помощью локализирующей функции $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ для системы $\dot{x} = f(x)$, где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, построено локализирующее множество $\Omega(\varphi)$, определяемое неравенством $\varphi_{\text{inf}} \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\text{sup}}$ [1]. Точки дополнения $\Omega^c(\varphi)$ к множеству $\Omega(\varphi)$ можно разделить на две группы. К точкам I рода отнесем те точки $x \in \Omega^c(\varphi)$, в которых $\varphi(x) > \varphi_{\text{sup}}$, $\dot{\varphi}(x) > 0$ или $\varphi(x) < \varphi_{\text{inf}}$, $\dot{\varphi}(x) < 0$ (здесь $\dot{\varphi}(x)$ обозначает производную функции φ в силу системы). Остальные точки в $\Omega^c(\varphi)$ отнесем к точкам II рода.

Теорема 1 [2]. Пусть траектория γ системы $\dot{x} = f(x)$ проходит через точку $x_0 \in \Omega^c(\varphi)$ I рода. Тогда эта траектория остается в множестве $\Omega^c(\varphi)$ при $t > 0$ и уходит в бесконечность при $t \rightarrow +\infty$, т.е. $|\gamma(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Теорема 2 [2]. Пусть траектория γ системы проходит через точку $x_0 \in \Omega^c(\varphi)$ II рода. Тогда поведение траектории при $t \rightarrow +\infty$ подчиняется одному из следующих сценариев:

- 1) остается в множестве $\Omega^c(\varphi)$ и при $t \rightarrow +\infty$ уходит в бесконечность;
- 2) траектория остается в множестве $\Omega^c(\varphi)$ и при $t \rightarrow +\infty$ стремится к границе локализирующего множества, а ее ω -предельное множество является инвариантным замкнутым подмножеством универсального сечения;
- 3) траектория покидает множество $\Omega^c(\varphi)$, переходя в локализирующее множество $\Omega(\varphi)$, и остается в нем;

4) траектория переходит в множество $\Omega(\varphi)$, затем покидает его и, не возвращаясь, уходит в бесконечность.

В случае неавтономной динамической системы $\dot{x} = f(t, x)$ под инвариантным множеством понимается такое подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ фазового пространства системы, что для любой точки $x_0 \in M$ существует фазовая траектория системы, проходящая через точку x_0 в некоторый момент времени t_0 , целиком содержащаяся в M .

Для неавтономной системы получены результаты, аналогичные теоремам 1 и 2 для автономной системы, но они достигаются при дополнительных условиях на поведение $\dot{\varphi}(t, x)$ производной локализирующей функции в силу системы [3].

Литература

- [1] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 211 с.
- [2] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Локализирующие множества и поведение траекторий // Доклады академии наук. 2016. Т. 470, № 2. С. 133–136.
- [3] Канатников А. Н. Локализирующие множества и поведение траекторий неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 11. С. 1465–1475.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

Карачик В. В. (Россия, Челябинск)

Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

karachik@susu.ru

Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина задачи. В [1,2,3] приведен явный вид функции Грина для бигармонического и 3-гармонического уравнения в единичном шаре. Явный вид функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре построен в работе [4]. В настоящей заметке приводится представление решения задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре через решения задач Дирихле для уравнения Лапласа аналогично работе [5].

Рассмотрим следующую задачу Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре $S \subset \mathbb{R}^n$

$$\Delta^m u(x) = 0, \quad x \in S, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \psi_0(s), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\partial S} = \psi_{m-1}(s), \quad s \in \partial S. \quad (1)$$

Для построения решения этой задачи необходимы предварительные обозначения. Введем специальные полиномы вида

$$H_s(\lambda) = \frac{1}{(2s)!!} \lambda(\lambda - 2) \cdots (\lambda - 2s + 2), \quad s \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

и определим факториальную степень монома в форме $\lambda^{[m]} = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - m + 1)$. Кроме этого, введем операцию дифференцирования полинома $P(\lambda)$ в виде

$$P^{(0)}(\lambda) \equiv P(\lambda), \quad P^{(k)}(\lambda) \equiv (P^{(k-1)}(\lambda))^{(1)} = P^{(k-1)}(\lambda + 1) - P^{(k-1)}(\lambda). \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть гармонические функции $q_k(x)$ являются решениями следующей задач Дирихле для уравнения Лапласа в S

$$\Delta q_k(x) = 0, \quad x \in S; \quad q_k \Big|_{\partial S} = \psi_k(s), \quad s \in \partial S,$$

где $\psi_k \in C^{2m-1-k+\varepsilon}(\partial S)$, $k = 0, \dots, m-1$, $\varepsilon > 0$. Тогда для существования решения задачи Неймана (1) необходимо и достаточно выполнение условия (см. также [6])

$$\sum_{j=0}^{m-1} h_m^{(j+1)} q_j(0) = 0,$$

где $h_m^{(j)}$ – коэффициенты из представления

$$h_m(\lambda) \equiv \lambda(\lambda-2)\dots(\lambda-2m+2) = \sum_{j=0}^{m-1} h_m^{(j)} \lambda^{[j]}.$$

Решение задачи Неймана (1) может быть представлено в виде

$$u(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t} + C,$$

где C – произвольная постоянная,

$$v(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1-\Lambda; |x|^2-1) q_j(x),$$

полином $K_{m-1}(\lambda; |x|^2-1)$, определяется равенством,

$$K_{m-1}(\lambda; |x|^2-1) = \sum_{k=0}^{m-1} (|x|^2-1)^k H_k(\lambda),$$

полиномы $H_k(\lambda)$ находятся из (2), а производная $H_k^{(j)}(\lambda)$ берется в смысле (3).

Литература

- [1] Karachik V. V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. V. 64. No 9. P. 1500–1521.
- [2] Карачик В. В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 87–105.
- [3] Карачик В. В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. 2012. Т. 5:4. С. 527–546.
- [4] Begerh H., Vu T. N. H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. 2006. 255. P. 13–34.
- [5] Карачик В. В. Представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре через функцию Грина // Челябинский физико-математический журнал, 2020. Т. 5:4-1. С. 391–399.
- [6] Карачик В. В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Математические заметки. 2014. Т. 96. № 2. С. 228–238.

БИФУРКАЦИИ В УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Каценко И. С. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

iliyask@uniyar.ac.ru

Рассмотрим сингулярно возмущенное уравнение второго порядка с запаздыванием

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + \sigma(\varepsilon) \dot{x} + k(\varepsilon)x = f(x(t-\tau(x)), \dot{x}(t-\tau(x)), \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$, f и $\tau \geq 0$ достаточно гладкие функции. Пусть $f(0,0,\varepsilon) = 0$, тогда $x \equiv 0$ является состоянием равновесия. Рассмотрим некоторую малую (но не зависящую от ε) окрестность нуля. Пусть для всех x из этой окрестности $\tau(x)$ ограничена постоянной M : $0 \leq \tau(x) \leq M$.

Поставим задачу исследовать устойчивость нуля в фазовом пространстве $C^1_{[-M,0]}$ при достаточно малых ε и описать происходящие бифуркации.

Отметим, что уравнение (1) получается из уравнения с большим запаздыванием

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = g(x(t - T\tau(x)), \dot{x}(t - T\tau(x))) \quad (T \gg 1).$$

Тогда $\varepsilon = T^{-1}$, $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon a$, $k(\varepsilon) = b$, $f(x, y, \varepsilon) = g(x, \varepsilon y)$.

В случае, когда запаздывание постоянно $\tau(x) \equiv T$, задача обсуждалась в [1], а случай, когда дополнительно $f(x, y, \varepsilon) = f(x, \varepsilon y)$ – в [2]. Некоторые результаты для случая, когда запаздывание зависит от искомой функции (state-dependent delay), изложены в [3].

Бифуркационные ситуации возникают, когда при малых ε в спектре линеаризованной задачи нет точек с положительной и отделенной от мнимой оси вещественной частью, и при этом есть точки сколь угодно близкие к мнимой оси. Наибольший интерес представляют ситуации, в которых количество таких точек сколь угодно велико. Будем говорить, что такие критические случаи имеют бесконечную размерность.

В бесконечномерных критических случаях можно выделить две основных ситуации. В первой из них все критические точки спектра стремятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к мнимой оси. Во второй – предел каждой точки находится в левой комплексной полуплоскости, т.о. при уменьшении ε к нулю точки спектра сначала подходят к мнимой оси, а затем отходят от нее. При этом, при достаточно малых значениях параметра ε , всегда в любой малой окрестности мнимой оси найдется сколь угодно много точек спектра.

В критических случаях построены специальные нелинейные уравнения – нормальные и квазинормальные формы – которые не зависят от малого параметра либо зависят от него регулярно. Их решения определяют главные части асимптотического приближения решений (1). Как правило, квазинормальные формы представляют собой нелинейные параболические уравнения с периодическими или антипериодическими краевыми условиями.

Литература

- [1] Каценко И. С. Локальная динамика дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием у первой производной // Матем. Заметки. 2017. Т. 1-101. №2. С. 318–320.
- [2] Каценко С. А. Уравнение Гинзбурга – Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. №3. С. 457–465.
- [3] Голубенец В. О., Каценко И. С. Локальная динамика сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с запаздыванием, зависящим от состояния // Матем. Заметки. 2022. Т. 111. №5. С. 795–799.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШУМПЕТЕРОВСКОГО ЦИКЛА ВНЕДРЕНИЯ ТЕХНОЛОГИИ

Кириллов А. Н. (Россия, Петрозаводск)

Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр Российской академии наук»
krllv1812@yandex.ru

Саонов А. М. (Россия, Петрозаводск)

Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр Российской академии наук»
sazon-tb@mail.ru

На основе результатов, полученных в [1],[2], предлагается модель шумпетеровского цикла внедрения новой технологии. Шумпетеровская динамика описывает процесс эндогенного

технологического развития, основанный на концепции Й. Шумпетера, согласно которой в основе экономического развития лежит взаимодействие процессов имитации и инновации [3].

Рассматривается экономическая система (отрасль, корпорация), в которой предприятия могут находиться на одном из двух уровней технологического развития, низком (уровень 1) и высоком (уровень 2). Пусть $c_i(t)$ — суммарный капитал на уровне i , $i = 1, 2$, в момент времени t . Полагаем, что динамика (c_1, c_2) задается системой

$$\dot{c}_1 = \frac{c_1}{\lambda_1}(V - c_1 - c_2) + \mu c_2, \quad \dot{c}_2 = \frac{c_2}{\lambda_2}(V - c_1 - c_2) - \mu c_2 + \varphi c_1, \quad (1)$$

где V — емкость экономической ниши, $\varphi \in [0, 1)$ — доля средств, которую предприятия на уровне 1 тратят на развитие производства на уровне 2 в единицу времени, $\lambda_i > 0$ — удельная себестоимость товара на уровне i , $\mu \in [0, 1)$ — интенсивность амортизации. Пусть, S_{11} — система (1), в которой $\varphi > 0, \mu > 0$, S_{10} — система (1) при $\varphi > 0, \mu = 0$, S_{01} — система (1) при $\varphi = 0, \mu > 0$.

Предлагаемая модель представляет собой систему с переключениями между тремя подсистемами S_{11}, S_{10}, S_{01} каждая из которых, как показано, имеет глобально устойчивое равновесие.

Опишем кратко процесс переключения между подсистемами. Глобальная устойчивость равновесий с экономической точки зрения означает стагнацию, которую позволяют преодолевать переключения между подсистемами. Изначально, при появлении новой технологии, динамика капитала описывается системой S_{10} . Далее, вследствие появления амортизационных издержек, происходит переключение к системе S_{11} в момент пересечения положительной полутраекторией прямой $c_1 = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малая постоянная. После этого возможны два случая: успешное внедрение технологии или неудачное внедрение. Для описания этих случаев рассмотрим равновесие (c_1^*, c_2^*) системы S_{11} . Если $c_2^* > \delta$, где $\delta > 0$ некоторое пороговое значение, то полагаем, что технология внедрена успешно, $c_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и происходит переключение к системе S_{10} . В противном случае, новая технология не внедрена, происходит переключение к системе S_{01} , после чего $c_2(t) \rightarrow 0$, поскольку $(V, 0)$ — глобально устойчивое равновесие системы S_{10} . В качестве линии переключения используется прямая $c_2 = \frac{\varphi}{\mu} c_1$, что имеет экономическое обоснование. В представленном исследовании разработано формальное описание представленного выше процесса переключения. Доказано существование замкнутых траекторий. Показано, что шумпетеровскому циклу соответствует гибридная символическая динамическая система.

Переключения между системами позволяют описать процесс ухода экономической системы от равновесного состояния в результате взаимодействия процессов инноваций и имитаций при внедрении новых технологий. Модель отражает глобальную цикличность экономического процесса внедрения новой технологии, не сводящуюся к локальным стационарным процессам.

Литература

- [1] Kirillov A. N., Sazonov A. M. The global stability of the Schumpeterian dynamical system // Bulletin of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2020. V. 16. Iss. 4. P. 348–356.
- [2] Kirillov A. N., Sazonov A. M. The dynamics of the economic evolution with the capital depreciation // Differential Equations and Control Processes. 2020. No. 2. P. 118–130.
- [3] Schumpeter J. Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung. Leipzig: Duncker und Humblot, 1912.

ОБОВЩЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ
С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Клово А. Г. (Россия, Таганрог)
Южный федеральный университет
klovo_ag@mail.ru

Илюхин А. А. (Россия, Таганрог)
Южный федеральный университет
iliukhin@sfnedu.ru

Куповых Г. В. (Россия, Таганрог)
Южный федеральный университет
kupovykh@sfnedu.ru

Аннотация. Рассмотрены задачи на собственные значения, в которых налагаются дополнительные условия во внутренних точках. При этом на всем отрезке соответствующий оператор является положительно определенным и самосопряженным. Решения получены в явном виде с помощью обобщенных тригонометрических систем.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектр, обобщенные тригонометрические системы, внутренняя граница, собственные значения.

Abstract. Eigenvalue problems are considered, in which additional conditions are imposed at internal points. Moreover, on the entire interval, the corresponding operator is positive definite and self-adjoint. Solutions are obtained explicitly using generalized trigonometric systems.

Keywords: differential operator, spectrum, generalized trigonometric systems, inner boundary, eigenvalues.

Введение. В работе [1] при решении прочностных задач элементов конструкций использовались некоторые свойства функций, модуль четвертой производной которой равен самой этой функции. В статье [2] дифференциальные свойства таких функций обобщены на системы произвольного порядка и введено понятие обобщенной тригонометрической системы (ОТС). На основе этих результатов в работах [3]-[4] установлены матричные свойства квадратичных форм функций ОТС и показана эффективность использования таких систем в решении ряда прикладных задач.

Определение функций ОТС. Обобщенной тригонометрической системой порядка называется набор n , $n \in N$ функций, которые, за исключением последней, при дифференцировании последовательно переходят друг в друга и равны 0 при $x = 0$. При этом последняя функция при $x = 0$ равна 1 и при взятии производной эта функция для систем первого типа (*o.t.c.* $[n; 1]$) переходит в первую функцию, а для систем второго типа (*o.t.c.* $[n; 2]$) – в первую функцию со знаком минус. Показано, что исследованные свойства ОТС зависят от четности или нечетности порядка системы, а также от ее типа.

Задачи с дополнительными условиями во внутренних точках. Системы четного порядка использованы при решении спектральных задач для операторов четного порядка, выше второго. Установлена положительная определенность и самосопряженность соответствующих линейных операторов не только в случае стандартных граничных условий, но и в при наличии дополнительных условий во внутренних точках области. Рассмотрим, например, в области D на оси абсцисс с внешней границей Γ и внутренней границей γ спектральную задачу

$$X^{IV}(x) = \lambda X(x), \quad (1)$$

$$X''(x)|_{x \in \Gamma} = X'''(x)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (2)$$

$$X(x)|_{x \in \gamma} = 0. \quad (3)$$

Под решением задачи (1)-(3) мы понимаем функцию $X(x)$, удовлетворяющую (1) во внутренних точках области D , в точках внешней границы Γ условию (2), в точках внутренней границы γ условию (3) и условиям непрерывности производных $\frac{dX(x)}{dx}$, $\frac{d^2X(x)}{dx^2}$ в области $D \cup \gamma$ (условиям согласования).

Доказано, что при таких условиях и определениях оператор $L = \frac{d^4}{dx^4}$ продолжает оставаться положительно определенным и самосопряженным. При этом в ряде случаев решение поставленной задачи получено в явном виде [4].

Литература

- [1] Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л., изд. АН СССР, 1931.
- [2] Клово А. Г. Задачи на собственные значения для одного линейного параметризованного оператора. Деп. ВИНТИ № 5428-80, 24 дек. 1980, 34с.
- [3] Клово А. Г., Илюхин А. А., Куповых Г. В., Ляпунова И. А. Обобщенные тригонометрические системы и спектральные задачи с дополнительными внутренними граничными условиями // Известия ЮФУ. Технические науки. № 4, 2021. С.178-191.
- [4] Клово А. Г., Илюхин А. А., Куповых Г. В. Применение обобщенных тригонометрических систем в спектральных задачах. // Материалы XII Международной научно-технической конференции Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование (ИУСМКМ-2021) в рамках VII Международного научного форума Донецкой народной республики к 100-летию ДОННТУ. г. Донецк, ДОННТУ-2021, с. 105-109.

СПОСОБЫ ФОРМИРОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ В СИСТЕМАХ С КОМПЛЕМЕНТАРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Кобзев А. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых
kobzev42@mail.ru

Повышение точности систем автоматического управления – одно из основных требований к системам автоматического управления, работающих в условиях широкого спектра возмущающих воздействий. Для построения таких САУ используются методы оптимального и адаптивного управления, динамические полиномиальные регуляторы, регуляторы с наблюдателями состояний и с динамической коррекцией движения. Одним из перспективных направлений здесь также может рассматриваться комплементарное управление управляющего воздействия. При этом в управляющее воздействие для прямого контура системы вводится дополнительная составляющая, которая подается на вход основного контура. Принципиальная особенность такого управления – при этом не изменяются внутренние параметры системы и показатели качества свободных переходных процессов. Эффективная область применения – системы и объекты, у которых имеется взаимосвязь возмущения с управляющим воздействием.

Комплементарное управление основано на четвертой модифицированной форме инвариантности [1]. В функции ошибки вводится дополнительная составляющая в управляющее воздействие для парирования дополнительного (нерасчетного) возмущения $\Delta f(p)$ или для перехода на новую траекторию движения. Необходимо ошибку, обусловленную составляющей $\Delta f(p)$, скомпенсировать дополнительным управлением $\Delta g(p)$. Иначе, имеем функции управления и возмущения в виде

$$g(p) = g_0(p) + \Delta g(p); \quad f(p) = f_0(p) + \Delta f(p).$$

При этом возможны два простых, но принципиально разных способа формирования дополнительных составляющих в законе управления [2]. Первый способ предусматривает формирование дополнительной, автономной составляющей в уже сформированное управляющее воздействие. В контуре формирования дополнительного управления (адаптации) с передаточной функцией $K(p)$ вводятся интегрирующие звенья с кратностью интегрирования (степенью астатизма этого звена), пропорциональным степени производным управляющего воздействия. Это характерно для двух последовательно соединенных систем, где вторая воспроизводит движение первой (системы слежения за подвижными объектами). Второй способ состоит в коррекции программной траектории при ее разложении в интерполяторе на управляющие для приводов воздействия (технологические системы, мобильные роботы).

Здесь степень астатизма звена адаптации всегда первого порядка, а его выходной сигнал перемножается с сигналом уставки соответствующей производной управляющего воздействия. В обоих случаях первичной переменной в алгоритмах является ошибка от нерасчетного дополнительного возмущения. Для ее выделения из текущей ошибки системы используется эталонная модель и модели по ошибке управляющего и возмущающего воздействий, основанные на коэффициентах ошибок. Исследования показали зависимость коэффициента передачи контура адаптации в функции ошибки от возмущения. При возмущении, описываемого стационарными случайными воздействиями, используется аппарат описания случайных стационарных процессов и соответствующее ему описание САУ. Здесь требуется проведение дополнительных исследований.

В контурах формирования дополнительного управления весьма эффективно применение нейросетевых регуляторов. Рассматривается подход к проектированию адаптивного интеллектуального регулятора коррекции управляющего воздействия в динамических системах на основе нейросетевого регулятора с онлайн-обучением [3]. Методика синтеза нейросетевого регулятора предусматривает следующую последовательность процедур: 1. *Выбор топологии сети*, определены требования и процедуры по выбору число нейронов, скрытых слоев, структура связей и пр. 2. *Выбор функции активации нейронов*. Лучшую сходимость процесса обучения обеспечивает применение сигмоидальной и экспоненциальной функций активации (программой предусмотрены сигмоидальная, логарифмическая, экспоненциальная, синусоидальная). 3. *Определение весов нейронов*. Для начальной инициализации весов нейронной для беспрепятственного распространения значений активации и градиента по сети дисперсия выбирается близкой или равной единице. 4. *Выбор алгоритма обучения*. Рекомендуется использовать алгоритм обратного распространения ошибки. 5. *Определение дискретизация в сети*; дискретность можно в первом приближении вычислить, как отношение времени переходного процесса внутреннего контура системы к числу нейронов в скрытом слое.

Литература

- [1] Игнатьев М. Б. Об инвариантности голономных автоматических систем // Теория инвариантности в системах автоматического управления. – М.: Наука, 1964. С. 115-125.
- [2] Кобзев А. А. Парирование внутренних и внешних возмущений в системах с комплементарным управлением // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим (Суздаль, 2020) // Владимир: ВлГУ, 2020. С. 73-74.
- [3] Кобзев А. А., Лекарева А. В., Сидорова О. С. Анализ алгоритмов обучения нейронной сети // Современные наукоемкие технологии. – 2021. – № 6 (часть 1). С. 23-28.

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ В НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Козлов В. В. (Россия, Москва)

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

kozlov@pran.ru, vkozlov@mi-ras.ru

Рассматривается круг вопросов, связанных с точным интегрированием уравнений движения механических систем в непотенциальном силовом поле (часто называемых циркуляционными). Подход к интегрированию основан на теореме Эйлера-Якоби-Ли: если n -число степеней свободы, то (с учётом сохранения фазового объёма) для точного интегрирования необходимо иметь ещё $2n - 2$ первых интегралов и полей симметрий, находящихся в некоторых естественных отношениях. Указаны случаи движения в непотенциальном поле, интегрируемые с помощью разделения переменных. Обсуждаются геометрические свойства систем с ненётеровыми полями симметрий. Указаны примеры существования неприводимых полиномиальных интегралов третьей степени по импульсам. Рассмотрена задача об условиях существования однозначных полиномиальных интегралов циркуляционных систем с двумя степенями свободы и торическим пространством положений. Показано, что в типичном случае уравнения движения вообще не допускают непостоянных полиномиальных интегралов.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С КОЭФФИЦИЕНТАМИ–РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Конечная Н. Н. (Россия, Архангельск)

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова

n.konechnaya@narfu.ru

Рассмотрим дифференциальное выражение вида

$$l(y) := y^{(n)} + (a_1 + p_1(x))y^{(n-1)} + (a_2 + p_2'(x))y^{(n-2)} + \dots + (a_n + p_n'(x))y,$$

где a_1, a_2, \dots, a_n и λ — комплексные числа, p_1, p_2, \dots, p_n — комплекснозначные измеримые на $R_+ (:= [0, +\infty))$ функции, а все производные понимаются в смысле теории распределений. Пусть далее

$$|p_1| + (1 + |p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^n |p_j| \in L^1_{loc}(R_+).$$

В докладе будет представлена конструкция, позволяющая при выполнении этого условия определить, в каком смысле следует понимать уравнение $l(y) = \lambda y$. Будет установлено, что главный член асимптотики при $x \rightarrow +\infty$ фундаментальной системы решений этого уравнения определяется, как и в классическом случае, по корням многочлена

$$Q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n - \lambda,$$

если функции p_1, p_2, \dots, p_n удовлетворяют определенным условиям интегрального убывания на бесконечности.

Теорема 1. Пусть в уравнении $l(y) = \lambda y$ число λ отлично от a_n , а функции p_1, p_2, \dots, p_n такие, что

$$x^{m-1} (|p_1| + (1 + |p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^n |p_j|) \in L^1(R_+),$$

m — наибольшее из чисел, равных кратностям корней многочлена $Q(z)$.

Тогда уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет фундаментальную систему решений y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, такую, что если z_1 — корень многочлена $Q(z)$ кратности $l_1 \leq m$, то это уравнение имеет подсистему фундаментальных решений y_j , $j = 1, 2, \dots, l_1$, такую, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливы равенства

$$y_j(x) = e^{z_1 x} x^{j-1} (1 + o(1)).$$

Таковую же асимптотику имеет и другая подсистема фундаментальных решений y_j , $j = l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2$, отвечающая корню z_2 многочлена $Q(z)$ кратности l_2 , и т.д.

В докладе также будет рассмотрен случай, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \lambda = 0$, а именно, будет изложено доказательство следующей теоремы:

Теорема 2. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2'(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n'(x)y = 0.$$

Пусть функции p_1, p_2, \dots, p_n такие, что

$$|p_1| + (1 + x|p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^n x^{j-2} |p_j| \in L^1(R_+).$$

Тогда это уравнение имеет фундаментальную систему решений y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, такую, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливы равенства

$$y_j(x) = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} (1 + o(1)).$$

Доклад основан на совместной с профессором К.А. Мирзоевым работе [1].

Литература

- [1] Конечная Н. Н., Мирзоев К. А. Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 106. №1. С. 74–83.

К ЗАДАЧЕ ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ВХОДОМ В \mathfrak{R}_+^2

Корнеева О. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
korneevaolya@bk.ru

Мастерков Ю. В. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
jura.masterkov@yandex.ru

Рассматривается система:

$$\dot{x} = f(x) + uBx, \quad x \in \mathfrak{R}_+^2, u \in \mathfrak{R}. \quad (1)$$

Определение. Система (1) называется вполне управляемой в $\mathfrak{R}_+^2 \doteq (x_1, x_2) : x_i \geq 0$, если для любых двух точек $x^1, x^2 \in \mathfrak{R}_+^2$ найдутся время $\tau \geq 0$ и измеримое управление $\tilde{u} : [0, \tau \rightarrow \mathfrak{R}]$ такие, что разрешима краевая задача

$$\dot{x} = f(x) + \tilde{u}Bx, \quad x(0) = x^1, x(\tau) = x^2. \quad (1)$$

Причем $x_i(t) \doteq x_i(t, \tilde{u}(\cdot)) \geq 0$ для всех $t \in [0, \tau]$.

Предполагается, что компоненты вектор-функции $f_i(x)$ есть однородные функции степени s , т.е. $f_i(kx_1, kx_2) = K^s f_i(x_1, x_2)$.

Получены необходимые и достаточные условия вполне управляемости системы (1).

Литература

- [1] Бутковский А. Г. Теория и метод фазового портрета динамических систем с управлением // Автоматика и телемеханика. – 1985. – №. 12. – С. 43-53.

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ $n \times n$ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА⁵⁹

Косарев А. П. (Россия, Москва)

МГУ им. М. В. Ломоносова
ruterminals@gmail.com

Рассматривается $n \times n$ система дифференциальных уравнений вида

$$y' = \lambda A(x)y + B(x)y, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $A(x) = \text{diag} \{ \gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x) \}$, $\gamma_i(x) \neq \gamma_j(x)$ при $i \neq j$, $\gamma_i(x) \neq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, все элементы матриц A и B могут принимать комплексные значения, λ - комплексный большой параметр. Наша задача - получить асимптотическое поведение фундаментальной матрицы решений для системы (1). Отдельно рассмотрим два варианта гладкости коэффициентов:

- $A(x), B(x) \in L_1[0, 1]$,
- $A(x), B(x) \in W_1^k[0, 1]$, $k \geq 1$.

⁵⁹Работа поддержана грантом РФФИ No 20-11-20261

В первом случае метод по существу повторяет идею статьи [1], во втором используется принципиально другой подход, который позволяет явно выписать коэффициенты асимптотического разложения по степеням λ^{-1} с точностью до $o(\lambda^{-k})$.

Перед формулировкой основного результата определим матрицы

$$E(x, \lambda) = \text{diag}\{e^{\lambda \int_0^x \gamma_1 dt}, \dots, e^{\lambda \int_0^x \gamma_n dt}\}, \quad M(x) = \text{diag}\{e^{\int_0^x b_{11} dt}, \dots, e^{\int_0^x b_{nn} dt}\}.$$

Теорема. Пусть элементы матриц $A(x), B(x)$ принадлежат пространству $L_1[0, 1]$. Тогда в каждом секторе Π , в котором все величины $\text{Re}\{\lambda(\gamma_j(x) - \gamma_i(x))\}$ сохраняют свой знак для всех $x \in [0, 1]$, существует фундаментальная матрица $Y(x, \lambda)$ системы (1), имеющая представление

$$Y(x, \lambda) = M(x)(I + R(x, \lambda))E(x, \lambda), \quad (2)$$

где $R(x, \lambda)$ - голоморфная матриц-функция в секторе Π при достаточно больших $|\lambda|$, причем

$$\|R(x, \lambda)\|_{C[0,1]} = o(1), \quad o(1) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Pi.$$

Если дополнительно элементы матриц $A(x), B(x)$ принадлежат пространству $W_1^k[0, 1]$ при некотором $k \geq 1$ (т.е. первые $k - 1$ производных абсолютно непрерывны), то фундаментальную матрицу $Y(x, \lambda)$ можно выбрать такой, что $R(x, \lambda)$ допускает представление

$$R(x, \lambda) = \frac{R^1(x)}{\lambda} + \dots + \frac{R^k(x)}{\lambda^k} + o(1)\lambda^{-k},$$

где $o(1)$ - бесконечно малая функция равномерно по $x \in [0, 1]$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Pi$.

Матриц-функции R^m последовательно вычисляются по формулам

$$q_{ij} := b_{ij} e^{\int_0^x b_{jj}(t) - b_{ii}(t) dt}, \quad p_{ij}^l := \sum_{s=1, s \neq i}^n q_{is}(t) r_{sj}^l(t), \quad l = 1, \dots, k,$$

$$r_{ij}^1 = \frac{q_{ij}}{\gamma_j - \gamma_i}, \quad i \neq j, \quad r_{ii}^1 = \int_0^x p_{ii}^1(t) dt,$$

$$r_{ij}^{m+1} = \frac{-\frac{d}{dx} r_{ij}^m + p_{ij}^m}{\gamma_j - \gamma_i}, \quad i \neq j, \quad r_{ii}^{m+1} = \int_0^x p_{ii}^{m+1}(t) dt, \quad m = 1, \dots, k - 1.$$

В частности, эта теорема включает в себя два наиболее востребованных случая. В первом случае функции на диагонали $A(x)$ коллинеарны, то есть $A(x) = \rho(x)D$, где $\rho(x) > 0$, $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, $0 \neq d_j \in C$, $d_i \neq d_j$ при $i \neq j$. В этом случае прямые $\text{Re}\{\lambda(d_j - d_i)\}$ разбивают комплексную плоскость на не более чем $n^2 - n$ секторов Π_μ , в каждом из которых верно представление (2). Во втором случае функции на диагонали $A(x)$ неколлинеарны, но лежат на одной прямой, то есть $A(x) = \text{diag}\{a_1(x), \dots, a_n(x)\}$, $a_1(x) < \dots < a_n(x)$, $a_i(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]$. В этом случае представление (2) верно для левой и правой полуплоскостей.

Доклад основан на совместной работе с А. А. Шкаликовым.

Литература

- [1] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Матем. сб. 2020. Т. 211. №11. С. 129–166.

ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЫНКА

Котюков А. М. (Россия, Москва)

Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова
amkotyukov@mail.ru

Павлова Н. Г. (Россия, Москва)

Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова
natasharussia@mail.ru

Доклад посвящен приложению теории накрывающих отображений к исследованию существования положения равновесия в динамической модели рынка. Получены достаточные условия существования положения равновесия в динамической модели “спрос-предложение”, в которой отображения спроса и предложения восстановлены по эластичностям спроса и предложения по цене. Достаточные условия получены как следствия результатов теории накрывающих отображений, в частности, теорем о точках совпадения накрывающего и липшицевого отображений.

Литература

- [1] Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии Наук, 2007. Т. 416. №2. С. 151–155.
- [2] Арутюнов А. В. Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения, 2014. Т. 48. Вып. 1. С. 89–93.

УСРЕДНЕННАЯ КРУГОВАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ: ВНУТРЕННИЙ ВАРИАНТ, НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ⁶⁰

Красильников П. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
krasil06@rambler.ru

Доброславский А. В. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
a.dobroslavskiy@gmail.com

Классическая задача об эволюции кеплеровских элементов орбиты спутника в поле притяжения Солнца и Юпитера (астероидный вариант) хорошо изучена ([1]-[5]). Тем не менее, открытыми остаются существенные вопросы: вопрос о существовании аналитического представления дважды усредненной силовой функции задачи, вопрос о построении фазовых портретов колебаний высоких приближений, учитывая наличие кривых неаналитичности [4] усредненной силовой функции.

Итак, рассматривается задача об эволюции эллиптической орбиты астероида P под действием притяжения центральной точки S и гравитационных возмущений от Юпитера J , который движется относительно S по круговой орбите радиуса r_J и имеет массу m_J . Усредненная силовая функция задачи имеет вид

$$W = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f m_J}{|r - r_J|} d\lambda_J d\lambda,$$

где r – радиус - вектор астероида в гелиоцентрической системе координат, λ_J, λ – долготы тела J и астероида P .

Получено явное аналитическое выражение для усредненной силовой функции W в виде степенного ряда по (a/r_J) при условии выполнения неравенства $a(1+e) < r_J$ (внутренний вариант задачи):

$$W = \frac{f m_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2k},$$

⁶⁰Исследования поддержаны грантом РФФ № 22-21-00560 и выполнены в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

$$D_k = (1 + e)^{2k+2} P_{2k}(0) \left(P_{2k}(0) P_{2k}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2k + 2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \sum_{n=1}^k (-1)^n A_{2n}^{(2k)} \cos 2n\omega \right)$$

$$A_m^{(2k)} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 2k + 2; 1 - m, 1 + m; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{(2k - m)!}{(2k + m)!} P_{2k}^{(m)}(0) P_{2k}^{(m)}(\cos i) \quad (m \leq 2k).$$

Здесь $F_{2,1}, F_{3,2}^{reg}$ – гипергеометрические функции Гаусса и Клаузена, $P_{2k}^{(m)}$ – присоединенная функция Лежандра, a, e, i, ω – оскулирующие большая полуось, эксцентриситет, угол наклона и аргумент перицентра невозмущенного кеплеровского эллипса астероида.

Получено также явное выражение для ряда Фурье усредненной функции. Численно показано, что ряд Фурье и степенной ряд, описывающие функцию W , расходятся вдоль кривых неаналитичности, которые впервые были описаны в статье [4]. Однако, те же самые вычисления показали, что ряды являются асимптотическими по Пуанкаре: первые тридцать членов ряда Фурье приближают функцию W с высокой степенью точности, степенной ряд гарантирует высокую степень приближения по 10-ти членам ряда. Следовательно, можно использовать аналитическое приближение функции W в виде суммы первых 10-ти членов степенного ряда.

На основе известной редукции задачи к одной степени свободы [5] построены фазовые портреты колебаний в плоскости e, ω во втором, третьем и четвертом приближениях по малому параметру (a/r_J) .

Литература

- [1] Von Zeipel H. Recherches sur le mouvement des petites planètes. Ark. Matematik Astronomi och Fysik 1916-1917. 11 (1); 12 (9); 13 (3)
- [2] Лидов М. Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5–45
- [3] Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. Astronomical Journal. 1962. Vol. 67, No. 9. P. 591–598
- [4] Lidov M. L., Ziglin S. L. The analysis of restricted circular twice-averaged three body problem in the case of close orbits Celestial Mechanics. 1974. Vol. 9, No. 2. P. 151–173
- [5] Вашковьяк М. А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. 1. Качественное исследование. Космические исследования. 1981. Т. 19, No 1. С. 5–18

О ПРОСТОЙ ДУГЕ, СОЕДИНЯЮЩЕЙ 3-ДИФФЕОМОРФИЗМ С РАСТЯГИВАЮЩИМСЯ АТТРАКТОРОМ И АНОСОВСКИЙ ДИФФЕОМОРФИЗМ

Круглов Е. В. (Россия, Нижний Новгород)

Научно-исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
kruglov19@mail.ru

Представленные результаты получены в сотрудничестве с В.З. Гринесом и О.В. Починкой.

В докладе рассматриваются А-диффеоморфизмы с двумерным растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером) на трёхмерных замкнутых многообразиях. В.З. Гринесом и Е.В. Жужомой (2002) доказано, что для исследуемых диффеоморфизмов многообразии M^3 гомеоморфно тору \mathbb{T}^3 , а Е.В. Жужома и В.С. Медведев (2002) установили, что на трехмерном торе не существует грубых диффеоморфизмов с указанными свойствами при условии, что двумерный растягивающийся аттрактор (репеллер) является неориентируемым, поэтому без ограничения общности рассмотрим структурно устойчивый диффеоморфизм $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ такой, что его неблуждающее множество содержит растягивающийся аттрактор Λ топологической размерности 2. Аттрактор Λ является ориентируемым. Так как для произвольной точки $x \in \Lambda$ $\dim W^s(x) = 1$, то множество $W^s(x) \setminus x$ состоит из двух компонент связности. Точка $x \in \Lambda$ называется граничной, если одна из этих компонент связности не пересекается с Λ . Обозначим эту компоненту $W^{s\emptyset}(x)$.

Множество Γ_Λ всех граничных точек множества Λ не пусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на ассоциированные пары (p, q) точек одинакового периода. Структура множества $T(f)$ неблуждающих точек диффеоморфизма f , не принадлежащих Λ , впервые описана В.З. Гринесом и Е.В. Жужомой (2002). А именно, для каждой ассоциированной пары (p, q) граничных точек существует натуральное число k_{pq} такое, что подмножество T_{pq} множества $T(f)$ состоит из k_{pq} периодических источников $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_{pq}}$ и $k_{pq} - 1$ периодических седловых точек $P_1, \dots, P_{k_{pq}-1}$, чередующихся на простой дуге $l_{pq} = W^{s\emptyset}(p) \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s(P_i) \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}} W^s(\alpha_i) \cup W^{s\emptyset}(q)$.

Дугой диффеоморфизмов называется однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n, t \in [0, 1]$, составляющих гладкое отображение $\Phi : M^n \times [0, 1] \rightarrow M^n$ такое, что $\Phi|_{M^n \times \{t\}} = \varphi_t$. Дуга φ_t называется *простой*, если она содержит лишь конечное число бифуркационных точек и все бифуркации являются элементарными (типичный седло-узел или флип).

Наличие простой дуги, связывающей любой грубый диффеоморфизм с растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером) коразмерности 1, действующий на замкнутом n -мерном, $n \geq 4$, многообразии, анонсировано Е.В. Жужомой и В.С. Медведевым (2003), при этом отмечается, что в случае, когда размерность несущего многообразия равна трём, препятствием для аналогичного вывода служит возможность наличия диких одномерных сепаратрис у изолированных седловых периодических точек. В.З. Гринесом, Е.В. Кругловым, Т.В. Медведевым и О.В. Починкой (2020) доказано, что как одномерные сепаратрисы изолированных периодических седловых точек диффеоморфизма f , так и пучки одномерных сепаратрис, примыкающих к одному и тому же источнику, являются ручными. В.З. Гринесом, Е.В. Кругловым и О.В. Починкой (2020) построена простая дуга, соединяющая структурно устойчивый 3-диффеоморфизм с растягивающимся аттрактором и ДА-диффеоморфизм.

Теорема 1. *Для любого структурно устойчивого диффеоморфизма замкнутого трехмерного многообразия M^3 , неблуждающее множество которого содержит двумерный растягивающийся аттрактор, существует простая дуга, соединяющая его с ановосским диффеоморфизмом.*

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ

Кулешов А. С. (Россия, Москва)

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
kuleshov@mech.math.msu.su

Гаджиев М. М. (Россия, Москва)

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
maruta-jr@yandex.ru

Рассматривается задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в свободном молекулярном потоке частиц. Показано, что уравнение движения тела обобщают классические уравнения Эйлера-Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и представляются в форме классических уравнений Эйлера-Пуассона в случае, когда поверхность тела, обтекаемого потоком частиц, представляет собой сферу. Обсуждаются вопросы существования первых интегралов в рассматриваемой задаче

Рассмотрим задачу о движении твердого тела в потоке частиц вокруг неподвижной точки. Будем предполагать, что поток частиц представляет собой свободный молекулярный поток постоянной плотности ρ , частицы которого движутся поступательно с постоянной абсолютной скоростью

$$-v = v_0 \gamma,$$

где γ – единичный вектор, направленный вдоль набегающего потока. Тепловым движением молекул в потоке пренебрегаем.

Получим выражение для момента, действующего на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц. Обозначим через O неподвижную точку твердого тела. Распределение скоростей в твердом теле определяется формулой Эйлера

$$u_M = [\omega \times \overrightarrow{OM}],$$

где M – произвольная точка твердого тела. Если обозначить угол между векторами ω и \overrightarrow{OM} через α , то

$$|u_M| = |\omega| |\overrightarrow{OM}| \sin \alpha \leq |\omega| |\overrightarrow{OM}|.$$

Предположим, что величина скорости набегающего потока v_0 существенно превосходит произведение характерного значения угловой скорости твердого тела и характерного расстояния от неподвижной точки до любой из точек твердого тела, то есть

$$\frac{|\omega| |\overrightarrow{OM}|}{v_0} \ll 1. \quad (1)$$

Пусть частицы взаимодействуют с телом абсолютно неупруго, то есть после столкновения скорость частицы по отношению к телу равна нулю. Пусть поверхность тела выпукла. Расположим перпендикулярно вектору v плоскость Π . Удобно поместить эту плоскость на некотором расстоянии от точки O позади (по отношению к вектору v) тела. Проекция тела на плоскость Π вдоль вектора v (ортогональная проекция) является некоторой плоской фигурой S_0 . Тогда с учетом предположения (1) момент, действующий на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц, можно представить в виде:

$$M_O = -\rho v_0^2 S(\gamma) [\gamma \times c(\gamma)]. \quad (2)$$

Здесь $S(\gamma)$ – площадь фигуры S_0 , а $c(\gamma) = \overrightarrow{O'G}$ – вектор, соединяющий точку O' – проекцию неподвижной точки O на плоскость Π , с центром масс G однородной пластины, имеющей форму фигуры S_0 . Таким образом, уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц имеют вид:

$$\mathbb{J} \dot{\omega} + [\omega \times \mathbb{J} \omega] = -\rho v_0^2 S(\gamma) [\gamma \times c(\gamma)], \quad \dot{\gamma} + [\omega \times \gamma] = 0, \quad (3)$$

где $\mathbb{J} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела относительно неподвижной точки O .

Можно рассматривать систему уравнений (3) как возможное обобщение классических уравнений Эйлера-Пуассона.

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ОБОБЩЕННОГО НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ⁶¹

Куликов А. Н. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
anat_kulikov@mail.ru

Куликов Д. А. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
kulikov_d_a@mail.ru

Одним из самых известных нелинейных уравнений с частными производными можно считать комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау. В оригинальном его варианте [1] оно имеет следующий вид

$$u_t = \gamma u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + ib)u_{xx}, \quad a > 0, \gamma, c, b \in \mathbb{R}.$$

⁶¹Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

Обычно, его дополняют периодическими краевыми условиями. В ряде работ (см., например, [2]) была предложена следующая модификация такого уравнения

$$u_t = \gamma u - (1 + ic)uV(u) + (a + ib)u_{xx}, \quad V(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, x)|^2 dx. \quad (1)$$

Уравнение (1), его естественные обобщения получили название нелокального уравнения Гинзбурга-Ландау (НУГЛ). К таким версиям НУГЛ приводит математическая модель такого явления как ферромагнетизм.

Рассматривается один из возможных вариантов НУГЛ

$$u_t = \gamma u - (1 + ic)uV(u) + (a + ib)u_{xx} + (p + iq)u_x, \quad a > 0, \gamma, c, p, q, b \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Уравнение (2) будет изучаться вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (3)$$

а также начальными условиями

$$u(0, x) = f(x). \quad (4)$$

Анализ начально-краевой задачи (2), (3), (4) показал, что при $f(x) \in \mathbb{H}_0$ (пространству 2π периодических комплекснозначных функций, которые принадлежат $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$) она глобально разрешима (имеет решение при всех $t > 0$). Соответствующие решения допускают представления в явном виде, который использует функциональные ряды. Более того, все решения начально-краевой задачи (2), (3), (4) при $t > 0$ имеют непрерывные частные производные любого порядка.

Пусть $a_n = \gamma - an^2 - qn$, $b_n = -bn^2 + pn$, где $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим через \mathbb{Z}_{1+} подмножество тех $m \in \mathbb{Z}$, для которых $a_m > 0$ и $a_m \neq a_n$, $m \in \mathbb{Z}_{3+}$, если существует пара m, k , для которых $a_m = a_k > 0$. Краевая задача (2), (3) имеет одномерные инвариантные многообразия $A_m : u_m(t, x) = \eta_m \exp(i\sigma_m t + imx + i\varphi_m)$, $\varphi_m \in \mathbb{R}$, где $\eta_m = \sqrt{a_m}$, $\sigma_m = b_m - ca_m$, $m \in \mathbb{Z}_{1+}$, а также трехмерные инвариантные многообразия $B_{m,k} : u_{m,k}(t, x) = \eta_m \exp(i\sigma_m t + imx + i\varphi_m) + \eta_k \exp(i\sigma_k t + ikx + i\varphi_k)$, где $\eta_m^2 + \eta_k^2 = a_m$ ($a_k = a_m$), $\sigma_m = b_m - ca_m$, $\sigma_k = b_k - ca_k$, $\varphi_k, \varphi_m \in \mathbb{R}$, $m, k \in \mathbb{Z}_{3+}$.

Краевая задача (2), (3) имеет глобальный аттрактор (см. определение из [3]) A , где $A = \{0\} \cup A_+ \cup B_+$, $A_+ = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_{1+}} A_m$, $B_+ = \bigcup_{m, k \in \mathbb{Z}_{3+}} B_{m,k}$, $\{0\}$ – нулевое состояние равновесия.

Случай $a = q = 0$ заслуживает отдельного анализа. При $p = q = 0$ аналогичные вопросы были изучены в работе [4].

Литература

- [1] Aronson I. S., Kramer L. The world of complex Ginzburg-Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 99-143.
- [2] Elmer F. J. Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcations and stability // Physica D. 1988. V. 30. № 3. P. 321-341.
- [3] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New-York, Springer-Verlag, 1997.
- [4] Kulikov A., Kulikov D. Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg-Landau equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. V. 44. № 15. P. 11985-11997.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ГЛУБОКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Кушнер А. Г. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
kushner@physics.msu.ru

Мухина С. С. (Россия, Москва)

Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН
sveta.mukhina.1998@mail.ru

Файзуллина Э. Р. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
faizullina.er14@physics.msu.ru

Уравнения одномерной фильтрации суспензии в пористой среде (уравнения глубокой фильтрации) имеют вид (см. [1])

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - h(v)u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = h(v)u. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь t — время, x — пространственная координата (направление возрастания соответствует направлению фильтрации), u , v — концентрации жидкой и твердой фаз соответственно, а функция $h(v)$ представляет собой коэффициент фильтрации.

Заменой переменных система (1) сводится к симплектическому гиперболическому уравнению Монжа–Ампера вида

$$u_{q_1 q_2} = h(u_{q_2})u_{q_1}. \quad (2)$$

Этому уравнению отвечает эффективная дифференциальная 2-форма (см. [2])

$$\omega = 2h(p_2)p_1 dq_1 \wedge dq_2 - dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2,$$

Заметим, что внешний дифференциал формы ω не равен нулю:

$$d\omega = 2h(p_2)dq_1 \wedge dq_2 \wedge dp_1 + 2p_1 h'(p_2)dq_1 \wedge dq_2 \wedge dp_2 \neq 0.$$

Поэтому, согласно [2], уравнение (2) не может быть приведено к волновому уравнению $u_{q_1 q_2} = 0$ с помощью симплектического преобразования. Однако один из тензорных инвариантов (форм Лапласа) уравнения (2) нулевой, а другой имеет вид

$$\lambda = -h''(p_2)(h(p_2)p_1 p_2 dq_1 \wedge dq_2 - h(p_2)p_1 dq_1 \wedge du + p_1 dq_1 \wedge dp_2).$$

Поэтому уравнение (2) контактно эквивалентно волновому уравнению тогда и только тогда, когда $h''(p_2) = 0$, т.е. когда функция h линейна (см. [3].) Построенное нами контактное преобразование позволяет найти общее решение системы (1) для линейных функций h .

Теорема. Система уравнений глубокой фильтрации

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha v + \beta)u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = vu \end{cases} \quad (1)$$

имеет общее решение

$$u = \frac{A'(t-x)}{\alpha B\left(-\frac{x}{\alpha}\right) - \alpha A(t-x)}, \quad v = \frac{-\alpha\beta A(t-x) + \alpha\beta B\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + B'\left(-\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha^2\left(A(t-x) - B\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)}. \quad (2)$$

Здесь A и B — произвольные функции.

Литература

- [1] J. P. Herzog, D. M. Leclerc, and P. Le Goff. Flow of Suspensions through Porous Media – Application to Deep Filtration // *Ind. Eng. Chem.* 62 (5), 8–35 (1970)
- [2] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. Contact geometry and nonlinear differential equations. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, 101. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.
- [3] Kushner, A. G. A contact linearization problem for Monge-Ampère equations and Laplace invariants // *Acta Appl. Math.* 101 (1–3), 177–189 (2008)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ТОЧКИ ШАРНИРНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ⁶²

Лазарев Н. П. (Россия, Якутск)

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова
nyurgun_lazarev@mail.ru

Шарин Е. Ф. (Россия, Якутск)

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова
ef.sharin@s-vfu.ru

Семенова Г. М. (Россия, Якутск)

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова
sgm.08@yandex.ru

Рассматривается модель о равновесии неоднородной пластины Тимошенко, контактирующей с жестким препятствием. Предполагается, что пластина содержит два тонких жестких включения. При этом включения соединены шарнирным образом. Меняя координаты точки соединения включений получаем семейство соответствующих вариационных задач. Относительно указанного семейства формулируется задача оптимального управления с функционалом качества, определенным с помощью произвольного непрерывного функционала, заданного на подходящем пространстве Соболева. Управление задается параметром координаты точки соединения включений. Установлена разрешимость задачи оптимального управления, а также непрерывная зависимость решений от указанного параметра. При доказательстве строится последовательность тестовых функций, принадлежащих разным множествам допустимых функций, которая сходится в подходящем смысле к произвольной наперед выбранной тестовой функции [1].

Литература

- [1] Лазарев Н. П., Шарин Е. Ф., Семенова Г. М. Оптимальное управление расположением точки шарнирного соединения жестких включений в задаче о равновесии пластины Тимошенко // *Челяб. физ.-матем. журн.* 2021. Т. 6. №3 С. 278–288.

РЕДУКЦИЯ СИСТЕМ ШЛЕЗИНГЕРА К ЛИНЕЙНЫМ СИСТЕМАМ ЖОРДАНА-ПОХГАММЕРА

Лексин В. П. (Россия, Коломна)

Государственный социально-гуманитарный университет
lexin_vp@mail.ru

Рассмотрим набор функциональных квадратных комплексно-значных матриц $B_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$ размера p , определенных в окрестности $U \subset \mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}^n \setminus$

⁶²Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки РФ (НИР № FSRG-2020-0006).

$\cup_{1 \leq i < j \leq n} \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i - z_j = 0\}$ некоторой точки $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \in U$ комплексного линейного пространства \mathbb{C}^n . Мы будем исследовать решения системы Шлезингера

$$d B_i(z) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n [B_i(z), B_j(z)] \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}, \quad (1)$$

с некоторыми начальными условиями $B_i(z^0) = B_i^0$. Здесь $[B_i, B_j] = B_i B_j - B_j B_i$ – это обычные коммутаторы матриц, а $\frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$, $1 \leq i < j \leq n$ – мероморфные дифференциальные 1-формы на \mathbb{C}^n . Системы Шлезингера (1) являются нелинейными матричными системами уравнений Пфаффа. Хорошо известно [1,2,3], что система (1) является вполне интегрируемой системой Пфаффа в окрестности U точки z^0 и любое ее решение $(B_1(z), B_2(z), \dots, B_n(z))$ мероморфно продолжается на все универсальное накрытие дополнения \mathbb{C}_*^n . Также хорошо известно, что при $p = 2$ и $n = 4$ решение система Шлезингера [1] в классе матриц с нулевым следом редуцируется к решению уравнения Пенлеве VI (которое в свою очередь можно редуцировать, при подходящих параметрах, к любому из уравнений Пенлеве I–V и в общем случае, решение уравнения Шлезингера выражается через трансцендентные Пенлеве. Трансцендентные Пенлеве входят в более сложный класс функций, с точки зрения теории Галуа [4], чем гипергеометрические функции. Мы в классе верхне-треугольных матриц $B_i(z)$ $i = 1, 2, \dots, n$, в котором будем решать системы Шлезингера, укажем редукцию этих систем, при некоторых дополнительных ограничениях на собственные числа рассматриваемых матриц, к линейным пфаффовым системам. При этом полученные линейные пфаффовы системы имеют решения не сложнее, с точки зрения теории Галуа, чем гипергеометрические функции. Все выше сказанное суммируется в следующем утверждении

Теорема. *Рассмотрим систему Шлезингера в классе верхне-треугольных матриц $B_i(z) = (b_i^{r,s}(z))$, $b_i^{r,s}(z) = 0$, $r > s$, $i = 1, 2, \dots, n$ с постоянными диагональными элементами $b_i^{k,k}(z) = \lambda_i^k$. Пусть для каждого i диагональные элементы λ_i^k образуют арифметическую прогрессию с одной и той же разностью Δ для всех i . Тогда в классе таких матриц система Шлезингера (1)*

1) *редуцируется к набору линейных систем Пфаффа*

$$d b_i^{r,s}(z) = (s - r)\Delta \sum_{j=1, j \neq i}^n (b_i^{r,s}(z) - b_j^{r,s}(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \quad (2)$$

2) *редуцированная система (2) имеет базис решений представленный гипергеометрическими интегралами*

$$b_i^{r,s}(z) = \beta_i \int_{\gamma_j} \prod_{k=1}^n (t - z_k)^{\beta_i^{r,s}}, \frac{dt}{t - z_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где параметры $\beta_i^{r,s}$ имеют значения $\beta_1^{r,s} = \dots = \beta_n^{r,s} = (s - r)\Delta$, а петли γ_j в плоскости комплексной переменной t , по которой ведется интегрирование выбираются таким образом, чтобы они не проходили через точки z_i , $i = 1, \dots, n$ и чтобы подинтегральное выражение было однозначным (например, петли Похгаммера).

Литература

- [1] Болибрух А.А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М: МЦНМО, 200 с., 2009.
- [2] Dragovich V., Gontsov R. R. and Schramchenko V. Triangular Schlesinger systems and superelliptic curves. Physica D: Nonlinear Phenomena, V.424, October 2021, 132947
- [3] Лексин В.П. Многомерные системы Жордана-Похгаммера и их приложения. Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 138–147.
- [4] Umemura H. Invitation to Galois theory. in: Differential Equations and Quantum Groups, ed. Laniel Bertrand at all.EMS. 2007.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА РИМАНА

Литвинов В. Л. (Россия, Москва, Сызрань)

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Самарский государственный технический университет, филиал в г. Сызрань

vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. Метод Римана рассматривается применительно к решению задачи, описывающей свободные продольные колебания неограниченного неоднородного стержня. Математическая постановка задачи включает дифференциальное уравнение в частных производных относительно искомой функции смещения и неоднородные начальные условия. Решение производится в безразмерных переменных в аналитическом виде. Получено сравнительно простое выражение для продольных колебаний неоднородного стержня, что позволяет использовать полученные результаты для анализа колебаний одномерных неоднородных технических объектов.

1. Введение.

Одномерные неоднородные системы широко распространены в технике: канаты грузоподъемных установок [1], гибкие звенья передач [2, 3], стержни твердого топлива [1], бурильные колонны и т.д. Наличие неоднородностей связано с переменной скоростью распространения волн в механических объектах и вызывает значительные затруднения при описании таких систем.

В данной статье используя метод Римана [4] находится аналитическое решение задачи о продольных колебаниях неограниченного неоднородного стержня.

2. Постановка задачи.

Дифференциальное уравнение, описывающее продольные колебания неограниченного неоднородного стержня, имеет вид [1, 4]:

$$U_{tt}(x, t) - a^2(x, t)U_{xx}(x, t) = 0. \quad (1)$$

Начальные условия

$$U(x, 1) = f(x); \quad (2)$$

$$U_t(x, 1) = F(x). \quad (3)$$

В задаче (1)–(3) обозначено: $U(x, t)$ — продольное смещение точки стержня с координатой x в момент времени t ; $a(x, t) = x/t$ — переменная скорость распространения продольных волн в стержне.

Введем в задачу (1)–(3) новые переменные:

$$\xi = xt; \quad \tau = \frac{t}{x}.$$

Прямая $t = 1$ в новых переменных будет иметь вид равнобочной гиперболы (см. рисунок).

На рисунке обозначено: $C(\xi_0, \tau_0)$ — фиксированная точка; Ω — область, ограниченная контуром, состоящим из дуги AB кривой l и двух характеристик CA и BC , параллельных осям координат.

После преобразований получим

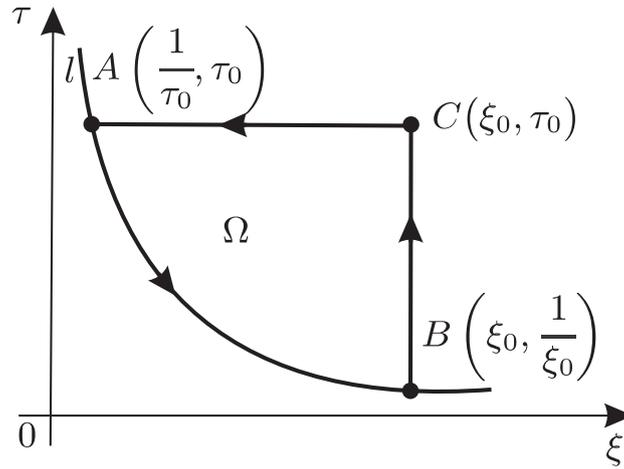
$$U_{\xi\tau}(\xi, \tau) - \frac{1}{2\xi}U_{\tau}(\xi, \tau) = 0. \quad (4)$$

Начальные условия

$$U_{\xi} \Big|_{\xi\tau=1} = \frac{1}{2}f'(\xi) + \frac{1}{2\xi}F(\xi); \quad (5)$$

$$U_{\tau} \Big|_{\xi\tau=1} = -\frac{\xi^2}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2}F(\xi); \quad (6)$$

$$U \Big|_{\xi\tau=1} = f(\xi). \quad (7)$$



3. Решение задачи.

Для решения задачи (4)–(7) используем метод Римана [4]. Формула Римана для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$U(\xi_0, \tau_0) = \frac{(U(\xi, \tau)V(\xi, \tau))_B + (U(\xi, \tau)V(\xi, \tau))_A}{2} + \frac{1}{2} \int_{AB} ((V(\xi, \tau)U_\xi(\xi, \tau) - U(\xi, \tau)V_\xi(\xi, \tau) - V(\xi, \tau)U_\xi(\xi, \tau)/\xi) d\xi - (V(\xi, \tau)U_\tau(\xi, \tau) - U(\xi, \tau)V_\tau(\xi, \tau)) d\tau). \quad (8)$$

Согласно указанному методу функция Римана $V(\xi; \tau; \xi_0, \tau_0)$ должна удовлетворять уравнению, сопряженному (4)

$$V_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \frac{1}{2\xi}V_\tau(\xi, \tau) = 0 \quad (9)$$

и условиям

$$V(\xi, \tau_0; \xi_0, \tau_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}; \quad (10)$$

$$V(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0) = 1 \quad (11)$$

на характеристиках CA и BC соответственно.

Из (9), (10) и (11) следует, что функция Римана имеет вид:

$$V(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}. \quad (12)$$

Подставляя (5)–(7) и (12) в формулу (8) получим:

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left(f(\xi) + \sqrt{\xi\tau} f\left(\frac{1}{\tau}\right) + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \int_{\xi}^{\frac{1}{\tau}} \frac{f(\xi) - 2F(\xi)}{\xi^{3/2}} d\xi \right). \quad (13)$$

При выводе (13) учтено, что

$$U(B) = f(\xi_0); \quad U(A) = f\left(\frac{1}{\tau_0}\right); \quad V(B) = 1; \quad V(A) = \sqrt{\xi_0\tau_0}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(xt) + tf\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{\sqrt{xt}}{2} \int_{xt}^{\frac{x}{t}} \frac{f(z) - 2F(z)}{z^{3/2}} dz \right). \quad (14)$$

4. Заключение.

В случае однородного стержня решение (14) совпадает с классическим, что говорит о корректности полученных результатов.

Применение метода Римана позволило получить сравнительно простое выражение для продольных колебаний неоднородного стержня, что позволяет использовать полученные результаты для анализа колебаний одномерных неоднородных технических объектов.

Литература

- [1] В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов, Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография, СамГТУ, Самара. (2020).
- [2] В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов, Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах, Изв. РАН. Сер. мех. тв. тела, No. 2, 70–77 (2018).
- [3] В. Л. Литвинов, Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений, Тр. ин-та мат. и мех. УрОРАН, 26, No. 2, 188–199 (2020).
- [4] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, Уравнения в частных производных математической физики, Высшая школа, М. (1970).

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Литвинова К. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
vladlitvinov@rambler.ru

Литвинов В. Л. (Россия, Москва, Сызрань)

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Самарский государственный технический университет, филиал в г. Сызрань
vladlitvinov@rambler.ru

До настоящего времени задачи о продольно-поперечных колебаниях объектов с движущимися границами решались в основном при линейной постановке, не учитывался энергетический обмен через движущуюся границу и взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями [1-5, 7, 8]. В редких случаях учитывалось действие сил сопротивления внешней среды [6]. Реальные же технические объекты намного сложнее, например, при увеличении интенсивности колебаний большое влияние на колебательный процесс оказывают геометрические нелинейности объекта.

В связи с интенсивным развитием численных методов появилась возможность более точного описания сложных математических моделей продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами, учитывающих большое число факторов, влияющих на колебательный процесс.

В работе поставлена новая нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний струны с движущейся границей, в которой учтена геометрическая нелинейность, вязкоупругость, энергетический обмен через границу. Получены граничные условия в случае наличия взаимодействия между частями объекта слева и справа от движущейся границы.

Произведена линеаризация полученной модели. При этом соблюдается принцип однородности: в частном случае малых колебаний полученные линейные модели совпали с классическими, что свидетельствует о корректности полученных результатов. Полученная математическая модель позволяет описывать колебания большой интенсивности струны с движущейся границей.

Литература

- [1] Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины // Наук. думка, Киев, 1962, 332 стр.
- [2] Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77-80.
- [3] Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками // Физматлит, М., 2001, 320 стр.
- [4] Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159-161.
- [5] Литвинов В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 188-199.
- [6] Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2015. Т. 19, №2. С. 382-397.
- [7] Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография / В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 100 с.
- [8] Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. С. 70-77.

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА—КИПРИЯНОВА И НЬЮТОНОВ B -ПОТЕНЦИАЛ С ОСОБЕННОСТЬЮ НА КОНУСЕ В \mathbb{R}_n

Ляхов Л. Н. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет

levnlya@mail.ru

Булатов Ю. Н. (Россия, Елец)

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

y.bulatov@bk.ru

Рощупкин С. А. (Россия, Елец)

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

roshupkinsa@mail.ru

Δ_B -Оператором Лапласа—Киприянова будем называть оператор $\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\alpha_i}$, где $B_{-\alpha_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\alpha_i > -1$. В сферических координатах $x = r\Theta$ ($\Theta \in \mathbb{R}_n$, $|\Theta|=1$) в работе [1] доказано, что $\Delta_B = B_{n+|\alpha|-1} + \frac{1}{r^2} \Delta_{B,\Theta}$ при этом $n+|\alpha| > 0$. Присутствие в этой формуле операторов Бесселя с отрицательным параметром $\alpha_i \in (-1, 0)$ позволяет произвольно менять размерность евклидова пространства путем введения *скрытых переменных со сферической симметрией*. Например, в области $x_i > 0$ для произвольного m и $y \in \mathbb{R}_m$ получим: если $|\alpha|=0$, то $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_i, x') = \sum_{i=1}^m B_{\alpha_i} f(|y|, x')$. В частности, оператор Лапласа—Киприянова с дробным параметром $|\alpha|=n-1+\{|\alpha|\}$ окажется промежуточным между операторами Лапласа в \mathbb{R}_n и в \mathbb{R}_{n+1} в том смысле, что $\lim_{\{\alpha\} \rightarrow 0} \Delta_{B\alpha} = \Delta_n$ и $\lim_{\{\alpha\} \rightarrow 1} \Delta_{B\alpha} = \Delta_{n+1}$ (см. [1]).

Пусть $(u, v)_\alpha = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} dx$, где $\alpha_i > -1$, \mathbb{R}_n^+ — евклидово n -полупространство точек с координатами $x_i > 0$ в \mathbb{R}_n . Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим подпространство пробных функций Л. Шварца, состоящее из четных по каждому аргументу x_i функции. Соответствующее пространство обобщенных функций обозначим S'_{ev} . Фундаментальным решением Δ_B -оператора называется обобщенная функция $\mathcal{E} \in S'_{ev}$, такая, что $(\mathcal{E}, \Delta_B \varphi)_\alpha = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Фундаментальное решение оператора Δ_B с положительными α_i известны [3], [4].

Теорема. Пусть $\alpha = (-\beta, \gamma) = (-\beta_1, \dots, -\beta_m; \gamma_1, \dots, \gamma_{n-m})$, $-\beta_i \in (-1, 0)$, $\gamma_i \geq 0$, $m \geq 1$. При $1 < n + |\alpha| < 2$ фундаментальное решение Δ_B -оператора с особенностью на конусе $|x| = |y|$ имеет вид $\mathcal{E}_{\Delta_B}(|x|, |y|) = \frac{T^{|y|}|x|^{2-n-|\alpha|}}{(n+|\alpha|-2)|S_1(n)|_\alpha}$, где $T^{|y|}$ — обобщенный сдвиг Пуассона — Левитана [2]: $T^\tau u(t) = C(\gamma) \int_0^\pi u\left(\sqrt{t^2 + \tau^2 - 2t\tau \cos \beta}\right) \sin^{\gamma-1} \beta \, d\beta$, $\gamma > 0$, а $|S_1(n)|_\alpha$ — площадь нагруженной сферы.

Пусть $f(|x|) \in S'_{ev}$ регулярная обобщенная функция. Тогда $\Delta_B(\mathcal{E}, T^{|y|}f(|y|))_\alpha = f(|x|)$. Выражение $U(|x|) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(|y|) (T^{|x|}|x|^{2-n-|\alpha|}) y^\alpha dy$ будем называть B -потенциалом Ньютона

(на конусе $|x| = |y|$). Теперь отметим, что в случае $\alpha_i > 0$ и $n + |\alpha| > 2$ интегралы типа B -потенциалов с особенностью в произвольной точке $\overline{\mathbb{R}_n^+}$ известны, см. [3], [4]. Здесь нас интересует случай $\alpha_i > -1$ и $1 < n + |\alpha| < 2$, возникающий при наличии хотя бы одного оператора Бесселя с отрицательным параметром $-\beta_1 \in (-1, 0)$ в операторе Лапласа — Киприянова. Следуя [5], введем функциональное пространство Лебега $L_{p,\nu}^\alpha$ с дополнительным весом $(1 + |x|^2)^{-\nu/2}$. Имеет место следующее утверждение (типа первой теоремы Соболева о потенциалах, см. [5], с. 241).

Пусть $f(x) \in L_{p,\nu}^\alpha(\mathbb{R}_n^+)$, $2 - n - |\alpha| < \frac{\nu p' - 1}{p' - 1}$. При $1 < n + |\gamma| < 2$ и $x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ справедлива оценка $|Uf(x)| \leq C \|f\|_{L_{p,\nu}^\alpha} (1 + |x|^2)^{\frac{2-n-|\alpha|}{2}}$.

Интеграл Uf является непрерывной функцией от x .

Если функция f финитная, то указанное неравенство справедливо при $\nu = 0$.

Литература

- [1] Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для b -гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56. — № 12. — С. 1610–1620. DOI 10.1134/S0374064120120055.
- [2] Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // УМН. 1951. т. VI, вып. 2 (42). С. 102–143.
- [3] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. Москва : Наука, 1997 — 199 с.
- [4] Ляхов Л. Н. Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B -оператором Бесселя / Л. Н. Ляхов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2012. — Т. 278. — С. 148.
- [5] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука 1974. С. 808.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДОЛГОСРОЧНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Мастерков Ю. В. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет

Jura.masterkov@yandex.ru

Задачи планирования производственных процессов являются важной частью развития экономики. В данном случае рассматривается вопрос об оптимизации работы бензоколонки. Точнее о снабжении бензоколонки топливом. Предполагается, что емкости для хранения каждого типа топлива ограничены величиной z_0 и для того, чтобы пополнить каждую емкость, необходимо прервать обслуживание клиентов по данному виду топлива на время $\delta > 0$, т.е. потерять прибыль, упущенную за время загрузки. Требуется спланировать пополнение запасов топлива за время $T \gg \delta$ так, чтобы минимизировать упущенную выгоду. Плотность потока клиентов $\rho(t) \geq 0$ строится на основе статистических данных по аналогичным периодам прошлых лет и по этой плотности строится функция скорости потребления $f(t)$, которая ограничена сверху. Для простоты предполагается, что функция $f(t)$ является непрерывной на отрезке $[0, T]$. Прибыль, полученная от продажи топлива,

очевидно пропорциональна количеству проданного топлива и цене P средней корзины покупателя. Таким образом мы приходим к задаче:

$$S(T, k, t_1, t_2 \dots t_k) = P \left(\int_0^{t_1} f(t) dt + \int_{t_1+\delta}^{t_2} f(t) dt + \dots + \int_{t_{k-1}+\delta}^{t_k} f(t) dt + \int_{t_k+\delta}^T f(t) dt \right) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\int_{t_i}^{t_i+\delta} f(t) dt \leq z_0, \quad i \in \{1, 2 \dots k\}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq T. \quad (2)$$

Теорема 1. Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$, то существует решение задачи (1)(2).

Данная задача сводится к конечномерной задаче с ограничениями типа неравенств, для оптимального решения которой $\hat{k}; \hat{t}_1, \hat{t}_2 \dots \hat{t}_k$ выполнены стандартные условия стационарности по $t_i, i \in \{1, 2 \dots k\}$ и условия дополняющей нежесткости.

Однако сложность исследуемого вопроса состоит в том, что при изменении T (даже небольшом), решение может измениться скачком. Даже при достаточно хорошей (скажем T -периодической функции) результаты исследования на периоде нельзя распространить на промежутки $[0, nT]$. Далее: хотелось бы иметь хороший алгоритм решения данной задачи, который позволял бы в случае внезапного изменения условий (например резкого увеличения плотности потока $\rho(t)$) достаточно быстро перенастроить систему.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА С УПРАВЛЕНИЕМ В ПОЛУКРУГЕ⁶³

Маштакوف А. П. (Россия, Переславль-Залесский)

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук
alexey.mashtakov@gmail.com

Рассматривается следующая задача на плоскости. Даны точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, липшицева кривая $\bar{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$, соединяющая a_1 с a_0 , вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ и число $S \in \mathbb{R}$. Требуется найти кратчайшую липшицеву кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую a_0 с a_1 , монотонную в направлении \vec{v} , для которой замкнутая кривая $\gamma \cup \bar{\gamma}$ ограничивает в \mathbb{R}^2 область алгебраической площади S .

Введем декартовы координаты x, y на плоскости \mathbb{R}^2 с началом координат a_0 и направлением оси Ox вдоль вектора \vec{v} . Тогда $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (x_1, y_1)$, а кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, t_1]$ является решением следующей задачи быстрогодействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1, & x(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1 & (x, y, z) = q \in \mathbb{R}^3, \\ \dot{y} = u_2, & x(0) = 0, \quad x(t_1) = y_1 & u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad u_1 \geq 0, \\ \dot{z} = \frac{1}{2}(u_2 x - u_1 y), & z(0) = 0, \quad z(t_1) = S, & t_1 \rightarrow \min, \end{cases}$$

где управления u_i принадлежат классу $L^\infty([0, t_1], \mathbb{R})$.

Задача является левоинвариантной задачей быстрогодействия на группе Гейзенберга с множеством допустимых управлений — полукругом. Случай, когда множество допустимых управлений является целым кругом, представляет собой хорошо известную задачу Дидоны [1,2] — краеугольный камень субримановой геометрии [3].

Задача представляют интерес в геометрической теории управления [4], как модельный пример, в котором нулевое управление находится на границе множества управляющих параметров. Аналогичная задача быстрогодействия на группе движений плоскости $SE(2)$ с таким ограничением была исследована в недавней работе [5].

⁶³Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00877, <https://rscf.ru/project/22-21-00877/>) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Помимо интереса в теории актуальность задачи обусловлена приложениями в робототехнике и обработке изображений. Рассматриваемая управляемая система задает нильпотентную аппроксимацию для моделей мобильного робота, который может двигаться вперед и вращаться на искривленной поверхности. Оптимальные траектории используются для поиска выделяющихся кривых на изображениях.

Для задачи получены следующие результаты: найдено множество достижимости \mathcal{A} системы и доказано существование оптимальной траектории для граничных условий из \mathcal{A} ; из необходимого условия оптимальности — принципа максимума Понтрягина найдены экстремальные траектории; исследована оптимальность экстремальных траекторий; описана структура оптимального синтеза.

Теорема. *Множество достижимости управляемой системы имеет вид*

$$\mathcal{A} = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\} \cup \{q \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}.$$

Для любого $q \in \mathcal{A}$ существует единственная оптимальная траектория, приходящая в q . Оптимальная траектория на плоскости x, y состоит не более чем из трех сегментов следующего вида: 1) движение по прямой вдоль оси Oy ; 2) движение по дуге окружности; 3) движение по прямой вдоль оси Oy .

Часть результатов получена совместно с А.О. Чернышевым в ходе модуля «Современные методы теории информации, оптимизации и управления», Сириус, 2021.

Литература

- [1] Brockett R. W. Control theory and singular Riemannian geometry. In: Hilton P. J., Young G. S. (eds) New directions in applied mathematics. Springer, NY, 1982. P. 11–27.
- [2] Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголомные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динамические системы - 7, Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. направ. Т. 16. М.:ВИНИТИ, 1987. С. 5–85.
- [3] Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge: Cam. Un. Pr., 2019.
- [4] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М: Физматлит, 2005.
- [5] А. П. Маштаков, Задача быстрогодействия на группе движений плоскости с управлением в полукруге // Матем. сб. 2022. Т. 213. №4. С. 100–122.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИЛОГАРИФМОВ И АССОЦИИРОВАННЫХ С НИМИ ФУНКЦИЙ⁶⁴

Мирзоев К. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ

mirzoev.karahan@mail.ru

Сафонова Т. А. (Россия, Архангельск)

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ

t.Safonova@narfu.ru

Как известно, полилогарифмическая функция $Li_s(z)$ и ассоциированная с ней функция $Ti_s(z)$ порядка s от аргумента z определяются равенствами

$$Li_s(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^s} \quad \text{и} \quad Ti_s(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)^s},$$

где $z, s \in \mathbb{C}$, причём $|z| < 1$ (см., напр., [1, ch. 7, формулы 7.1 и 7.4]), а значения этих функций в точке $z = 1$ равны значениям дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и бета-функции Дирихле $\beta(s)$ соответственно, т.е. $Li_s(1) = \zeta(s)$ и $Ti_s(1) = \beta(s)$.

⁶⁴Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20261).

Нами в работах [2] и [3] предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории самосопряжённых дифференциальных операторов в пространстве $\mathcal{L}^2[0, 1]$, получать интегральные представления некоторых степенных рядов и специальных функций. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При $m = 1, 2, \dots$ и $z \in [-1, 1]$ справедливы равенства

$$Li_{2m+1}(z) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)!} \int_0^1 B_{2m+1}(x) \frac{z \sin 2\pi x}{1 - 2z \cos 2\pi x + z^2} dx,$$

$$Ti_{2m+1}(z) = (-1)^m \frac{\pi^{2m}}{4(2m-1)!} \int_0^1 E_{2m-1}(x) \operatorname{arctg} \frac{2z \cos \pi x}{1 - z^2} dx,$$

$$Ti_{2m}(z) = (-1)^m \frac{\pi^{2m}}{2(2m-1)!} \int_0^1 E_{2m-1}(x) \frac{(z^3 + z) \cos \pi x}{1 + 2z^2 \cos 2\pi x + z^4} dx,$$

а при $z \in (-1, 1]$ - равенство

$$Li_{2m}(z) = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} \int_0^1 (B_{2m}(x) - B_{2m}) \frac{z(\cos 2\pi x - z)}{1 - 2z \cos 2\pi x + z^2} dx,$$

где $B_n(x)$ и $E_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) - многочлены Бернулли и Эйлера соответственно, а $B_n = B_n(0)$ - числа Бернулли.

Отметим, что формулы для $Li_{2m}(z)$ и $Li_{2m+1}(z)$ при $z \in (-1, 1)$ были получены ранее в работе [4]. Кроме того, при $z = \pm 1$ приведённые выше формулы совпадают со следующими известными формулами для значений ζ -функции Римана и β -функции Дирихле в натуральных точках

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}, \quad \beta(2m+1) = (-1)^{m+1} \frac{(\pi/2)^{2m+1}}{2(2m)!} E_{2m},$$

$$\beta(2m) = \frac{(-1)^{m+1} (\pi)^{2m}}{4(2m-1)!} \int_0^1 \frac{E_{2m-1}(x)}{\cos \pi x} dx,$$

$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^{m+1} (2\pi)^{2m+1}}{2(2m+1)!} \int_0^1 B_{2m+1}(x) \operatorname{ctg} \pi x dx =$$

$$= \frac{(-1)^m (2\pi)^{2m+1}}{2(1 - 2^{-2m})(2m+1)!} \int_0^1 B_{2m+1}(x) \operatorname{tg} \pi x dx = \frac{(-1)^m (\pi)^{2m+1}}{4(1 - 2^{-2m-1})(2m)!} \int_0^1 \frac{E_{2m}(x)}{\sin \pi x} dx,$$

где E_n ($n = 1, 2, \dots$) - числа Эйлера.

Литература

- [1] Levin L., Polylogarithms and associated functions. New York. Oxford: Elsevier Science Ltd, 1981.
- [2] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Труды ММО. 2019. Т. 80. №2. С. 157–177.
- [3] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Математические заметки. 2019. Т. 106. №3. С. 470–475.
- [4] Cvijovic D. New integral representations of the polylogarithm function // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2007. V. 463. №2080. P. 897–905.

О ВЫРОЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСАХ И СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ⁶⁵

Морозов А. Д. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
kirill.morozov@itmm.unn.ru

Морозов К. Е. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
morozov@mm.unn.ru

В работе исследуется поведение решений систем, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым, при наличии малых квазипериодических по времени возмущений. Предполагается, что возмущенная автономная система, полученная из исходной усреднением правых частей по времени, имеет грубый предельный цикл. Вводится определение вырожденного резонанса и исследуется топология вырожденной резонансной зоны для четного [1] и нечетного порядков вырождения. Решается задача о синхронизации квазипериодических колебаний при прохождении инвариантного тора, соответствующего предельному циклу возмущенной автономной системы, через резонансную зону. Исследование основано на анализе специальной усредненной системы маятникового типа, которая определяет динамику в резонансной зоне. Для системы первого приближения определяются основные структуры фазового пространства и для каждой из них изучаются бифуркации квазипериодических решений, приводящие к синхронизации колебаний. Доказано существование интервалов синхронизации по параметру расстройки. Обнаружены новые эффекты, возникающие в резонансной зоне. В качестве примера исследуется уравнение типа Дуффинга-Ван дер Поля, в котором могут возникать вырожденные резонансы различного типа.

Литература

- [1] A. D. Morozov and K. E. Morozov , Synchronization of quasiperiodic oscillations in nearly Hamiltonian systems: The degenerate case, *Chaos* 31, 083109 (2021)

ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПОЛОТНА

Муравей Л. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
l_muravey@mail.ru

Романенков А. М. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
romanaleks@gmail.com

Ключевые слова: Гашение колебаний, гиперболические уравнения, автомодельные решения смешанных задач, оптимальные режимы.

1. Рассматривается следующая модель поперечных колебаний $w(x, t)$, связанных с движением бумажного полотна (см. [1]):

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (v_0^2 - c^2) \frac{d^2 w}{dx^2} = g(x, t) \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

где v_0 – вектор продольной скорости движения полотна, c – продольная скорость распространения возмущений в полотне, $g(x, t)$ – управляющая функция. При этом заданы граничные условия

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

⁶⁵Теоретическая часть работы поддержана Российским научным фондом (грант РНФ № 19-11-00280), практическая часть (исследование вырожденных резонансов в уравнении типа Дуффинга-Ван дер Поля при квазипериодическом возмущении) поддержана Минобрнауки РФ (проект № 0729-2020-0036).

и начальные возмущения

$$w(x, 0) = h_0(x), w_t(x, 0) = h_1(x), \quad x \in [0; l]. \quad (3)$$

2. Метод автомодельных решений однородной смешанной задачи (1)-(3).

Заметим, что для решения смешанной задачи обычным приемом устанавливается «закон сохранения энергии»:

$$E(t) = \int_0^l [w_t^2(x, t) + (c^2 - v_0^2) w_x^2(x, t)] dx \equiv Const. \quad (4)$$

При этом для вывода проблемы моментов требуется найти его решение в виде ряда стоячих волн, то есть, такую систему стоячих волн $v_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots$, что система $\{v_k(x, 0)\}_{k=1}^\infty$ была бы базисом Рисса в $L_2(-l, l)$. Показано, что

$$v_k(x, t) = \exp \left\{ \pm \frac{ik\pi}{cl} [(v_0^2 - c^2)t - v_0x] \right\} \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right), \quad (5)$$

причем базисность Рисса системы $\{v_k(x, 0)\}_{k=1}^\infty$ вытекает из работ [2-4].

3. О гашении колебаний движущегося полотна.

В работе мы будем предполагать, что управляющая функция $g(x, t)$ имеет вид

$$g(x, t) = u_0(t)\chi_0(x) + u_1(t)\chi_1(x), \quad (6)$$

где $\chi_0(x), \chi_1(x)$ – характеристическая функция двух узких непересекающихся отрезков, которые принадлежат отрезку $[0, l]$ и шириной 2ε . Введем минимизируемый функционал

$$J(t) = \int_0^l [w_t^2(x, t) + (c^2 - v_0^2)w_x^2(x, t)]dx + 2\lambda\varepsilon(u_0^2(t) + u_1^2(t)) \quad (7)$$

Положим $2\lambda\varepsilon = \mu$ и будем считать функции $u_k(t)$ кусочно-постоянными $u_k(t) = u_{kp}$, при $t_{p-1} < t < t_p$, $k = 0, 1, p = 1, 2, \dots, P$. Здесь P может принимать значения от 1 до N , где N – число шагов по времени, используемых при численном решении задачи. Таким образом, функционал J становится функцией значений u_{kp} .

Показано, что при $h_0(x) \in W_0^1(0, l)$, $h_1(x) \in L_2(0, l)$ найдётся такое минимальное время $t = T_0 = \frac{2lc}{(c^2 - v_0^2)}$ и такое оптимальное управление $g_0(x, t) \in L_2(0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T_0)$, что в момент времени T_0 проблема моментов имеет единственное решение $g_0(x, t)$, при котором энергия $E(t)$ системы (1)-(3) тождественно равна 0, то есть $w(x, T_0) \equiv 0, w_t(x, T_0) \equiv 0$. Таким образом, колебания струны за время T_0 гасятся полностью.

Литература

- [1] Banchuk N., Jeronen J., Neittaanmaki P., Saksa T., Tuovinen T., (2014) Mechanics of moving materials. Springer.
- [2] Muravey L. A. On the suppression on membrane oscillations// Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system". Moscow. 1990. P. 50-51.
- [3] Билалов Б. Т., Муравей Л.А. О гашении колебаний больших механических систем // Труды международного симпозиума Intels-96. С.-Петербург. Ч.П. 1996 с. 246-254.
- [4] Билалов Б. Т. О базисности системы $\{e^{i\alpha n x} \sin(n x)\}$ экспонент со сдвигом// ДАН РАН, т.345, №2, 1995. стр. 644-647.

Назайкинский В. Е. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

nazaikinskii@yandex.ru

Канонический оператор, созданный В. П. Масловым [1] в 1965 г., является одним из мощнейших средств построения глобальных квазиклассических асимптотик. Он основан на геометрическом объекте — лагранжевом многообразии Λ в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$. Канонический оператор действует на гладкие функции на Λ и переводит их в быстроосциллирующие функции на конфигурационном пространстве \mathbb{R}_x^n , зависящие от малого параметра $h > 0$. В практических расчетах важно, чтобы асимптотика была эффективной, т.е. позволяла исследовать задачу достаточно быстро и с достаточно скромными вычислительными затратами. Понятие эффективности зависит от имеющихся вычислительных средств и существенно изменилось с появлением систем технических вычислений *Wolfram Mathematica*, *MatLab* и им подобных, предоставляющих принципиально новые возможности оперативной реализации и визуализации вычислений. Классическое определение канонического оператора не всегда удовлетворяет требованиям эффективности, отчасти потому, что используемые им локальные координаты на лагранжевом многообразии априори никак не связаны с решаемой задачей. В докладе дан обзор современных версий и модификаций канонического оператора, позволяющих строить эффективные асимптотики. К соответствующим конструкциям относятся

- новые формулы, позволяющие записать канонический оператор в произвольных координатах на лагранжевом многообразии;
- представления канонического оператора в окрестности общих каустик в виде специальных функций (Эйри, Пирси и др.) сложного аргумента;
- в задачах с локализованными начальными данными — обобщения канонического оператора, позволяющие исследовать случаи, когда эффективные гамильтонианы (и, как следствие, лагранжевы многообразия) имеют особенность специального вида при $p = 0$ (сюда относятся, например, волновое уравнение, системы, гиперболические по Петровскому, псевдодифференциальное уравнение, описывающее волны на воде в линеаризованном приближении с учетом дисперсии и т. д.).

Доклад основан на результатах многолетней совместной работы С. Ю. Доброхотова, А. И. Шафаревича и автора, которые в основном обобщены в [2], [3], [4].

Литература

- [1] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
- [2] Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И. Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. №2. С. 53–96.
- [3] Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е. Лагранжевы многообразия и эффективные формулы для коротковолновых асимптотик в окрестности точки возврата каустики // Матем. заметки. 2020. Т. 108. №3. С. 334–359.
- [4] Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И. Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2021. Т. 76. №5(461). С. 3–80.

Никаноров С. О. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
nikanorovso@yandex.ru

Эластичность показывает, как реагирует один параметр (спрос, предложение) на изменение другого (цены, объемы продаж). Таким образом, при моделировании экономических процессов эластичность может быть использована для исследования, анализа и прогнозирования различных изменений экономической системы. Попытки использовать математику как инструмент исследования экономических процессов начались еще в XII веке. Первая математико-экономическая модель была опубликована в середине XIII века, автором данной модели был Франсуа Кернэ. С тех пор данная область математических исследований активно развивается и становится только более актуальной. Существуют различные виды математических моделей экономических процессов, во многом это зависит от начальных данных и целей исследования. Например, существуют модели рынка, в которых отображения спроса и предложения являются решением задачи на нахождение условного экстремума [1]. В других моделях спрос и предложения восстанавливаются с помощью известных статистических данных [2], [3]. $D(p, \dot{p}, t) : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ – отображение спроса. $S(p, \dot{p}, t) : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ – отображение предложения. В докладе представлены результаты исследования свойств эластичности по ценам в динамических моделях "спрос-предложение". В частности исследования вопросов вычисления точечной и дуговой эластичностей спроса и предложения по статистическим данным, восстановления отображений спроса и предложения с использованием найденных функций эластичности, а также применение полученных результатов для исследования математических моделей рынка. Одним из приложений полученных результатов является нахождение положения равновесия рынка и исследования его свойств. Исследования и вычисления проводились с использованием теории дифференциальных уравнений, результатов теории накрывающих отображений, а также численных методов.

Литература

- [1] Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Павлова Н. Г. «Равновесные цены как точка совпадения двух отображений». // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013 г. — Т. 53, №2.
- [2] Joonas Vauhkonen Cross-Price Elasticities in Fashion Retail Pricing (Master's thesis Espoo, April 16, 2018).
- [3] Harish Abbott, Udatta S. Palekar Retail replenishment models with display-space elastic demand (Department of Business Administration, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL 61820, United States).

СТРУКТУРА ЯДРА ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ

Николаев В. Г. (Россия, Великий Новгород)

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
vg14@inbox.ru

Пусть все собственные числа матрицы $J \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ лежат в верхней полуплоскости. Назовем комплексную ℓ -вектор-функцию $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$ аналитической по Дуглису [1] в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если выполнено уравнение $\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, $z \in D$.

Пусть контур $\Gamma = \partial D$. Рассмотрим следующую задачу Шварца [1], или задачу S . Требуется найти аналитическую по Дуглису в области D функцию $\phi(z)$ по граничному условию $\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = \psi(\omega)$, где вещественная ℓ -вектор-функция $\psi(\omega) \in C(\Gamma)$ задана.

Определение 1. Ядром $\operatorname{Ker} S$ задачи Шварца S в области D назовем решения $\phi(z)$ однородной задачи $\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = 0$.

Если ядро состоит только из постоянных векторов $\phi(z) \equiv ic$, $c \in \mathbb{R}^l$, то его назовем тривиальным. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Нетривиальное ядро задачи Шварца в произвольном эллипсе D состоит из вектор-полиномов.*

Теорема 2. *Пусть 2×2 -матрица J имеет кратное собственное число λ и недиагональную жорданову форму. В этом случае нетривиальное ядро задачи Шварца в эллипсе состоит из одного вектор-полинома $\phi_n(z)$ степени n .*

Пусть $\omega = \omega(t)$, $t \in [-\pi, \pi)$ — параметризация эллипса $\Gamma = \partial D$.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 2 вектор-полином $\phi_n(z) \in \text{Ker } S$. Тогда справедливо представление*

$$\text{Im } \phi_n(\omega(t)) = (a_1 \cos nt + b_1 \sin nt, a_2 \cos nt + b_2 \sin nt)^T. \quad (1)$$

Иными словами, разложение (1) не содержит $\cos lt, \sin lt$ при $l < n$.

Литература

- [1] Солдатов А. П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Совр. математика и ее приложения. 2010. Т. 67. № 68. С. 99–102.

ТОПОЛОГИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИ РАЗДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Николаенко С. С. (Россия, Москва)

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
nikostas@mail.ru

Одним из методов качественного анализа решений вполне интегрируемой гамильтоновой системы является изучение топологии её слоения Лиувилля, то есть слоения фазового пространства на совместные поверхности уровня первых интегралов системы (инвариантные торы Лиувилля и особые слои). А. Т. Фоменко и его школой [1] построена теория топологической классификации интегрируемых систем, одним из основных результатов которой является полное описание топологии слоения Лиувилля на 3-мерном инвариантном подмногообразии невырожденной интегрируемой системы с двумя степенями свободы. Соответствующий классифицирующий инвариант, называемый *меченой молекулой* (или *инвариантом Фоменко–Цишанга*), имеет структуру графа с числовыми метками. Рёбрам этого графа отвечают однопараметрические семейства регулярных слоёв, а вершинам – бифуркации слоения, так называемые *атомы*. Поиск этого инварианта для конкретной интегрируемой системы может оказаться весьма нетривиальной задачей, однако в ряде случаев он может быть выполнен алгоритмически. Одним из таких случаев является класс *алгебраически разделимых систем*. Систематический подход к изучению фазовой топологии таких систем был заложен М. П. Харламовым в [2]. Алгебраическое разделение означает, что гамильтоновы уравнения на каждом слое сводятся к системе уравнений Абеля

$$\dot{u}_i = \frac{\sqrt{P(u_i)}}{u_1 - u_2}, \quad i = 1, 2,$$

где P — многочлен с коэффициентами, зависящими от констант первых интегралов. При этом, что особенно важно, предполагается, что все фазовые переменные представляются как рациональные функции от радикалов вида $\sqrt{u_i - \alpha_j}$, где u_i — переменные разделения, α_j — корни многочлена P . Выражение фазовых переменных в таком виде позволяет понять структуру проекции каждого слоя на плоскость разделяющихся переменных $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$ и в явном виде описать топологию слоя и слоения в целом. При этом меченая молекула алгоритмически определяется некоторой \mathbb{Z}_2 -матрицей, которая, в свою очередь, однозначно задаётся формулами зависимости фазовых переменных от переменных разделения.

В качестве следствия приведём список *элементарных* бифуркаций, которые могут возникать в алгебраически разделимых системах (т.е. бифуркаций, отвечающих одному корню кратности 2 многочлена P).

Теорема 1. *Всякая элементарная компактная топологически устойчивая невырожденная 3-мерная бифуркация ливиллева слоения алгебраически разделимой системы имеет тип одного из атомов A , B , C_2 , P_4 , D_1 , A^* , A^{**} .*

Замечание. Подробное описание перечисленных в теореме атомов можно найти в [1]. Например, атом A соответствует вырождению двумерного тора в окружность, атом B – перестройке двух торов в один (см. рисунок).

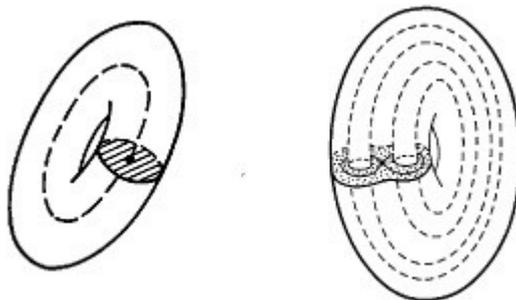


Рис. 1: Атомы A (слева) и B (справа)

Литература

- [1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. Ижевск: изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [2] Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам // Нелин. динамика. 2010. Т. 6. №4. С. 769–805.

ДИНАМИКА КОЛЕСНОГО АППАРАТА НА «МИКСТЕ» ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕС С ДОРОГОЙ

Новодерова А. П. (Россия, Москва)

МИРЭА — Российский технологический университет

an.novoderova@yandex.ru

Одной из частых причин нарушения безопасности движения служат дефекты дорожного покрытия. К ним относится «микст» [1, 2] — участок опорной плоскости, содержащий инородные вещества с другим коэффициентом трения: грязь, песок, гололед, лужа, разлитое масло и т. д. Доклад посвящен исследованию динамики заднеприводного колесного аппарата (рис. 1) при попадании на «микст» в ходе равномерного прямолинейного движения и формированию возможных алгоритмов работы системы активной безопасности. Исследование проводится с использованием методов фракционного анализа (разделения движений), теории возмущений и метода фазовой плоскости. Эти методы позволяют понизить порядок исследуемых уравнений, провести их аналитическое исследование, оценить погрешность и пределы применимости полученных результатов [1–3].

Показано, что движение аппарата на «миксте», при котором одно колесо ведущей задней оси попадает на участок с меньшим коэффициентом трения, а колеса передней оси, оставшиеся на участке с большим коэффициентом трения, сохраняют сцепление с опорной плоскостью [1, 2], может быть разбито на три этапа: 1) изменение скоростей точек контакта колес, сохранивших сцепление с опорной плоскостью, и угловой скорости выходного вала двигателя (в случае, когда хотя бы одно из колес ведущей оси сохраняет сцепление с опорной плоскостью) или изменение только угловой скорости выходного вала двигателя (в случае скольжения обоих колес ведущей оси); 2) медленное по сравнению с этапом 1 изменение поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата; 3) медленное по сравнению с этапом 2 изменение продольной скорости корпуса аппарата.

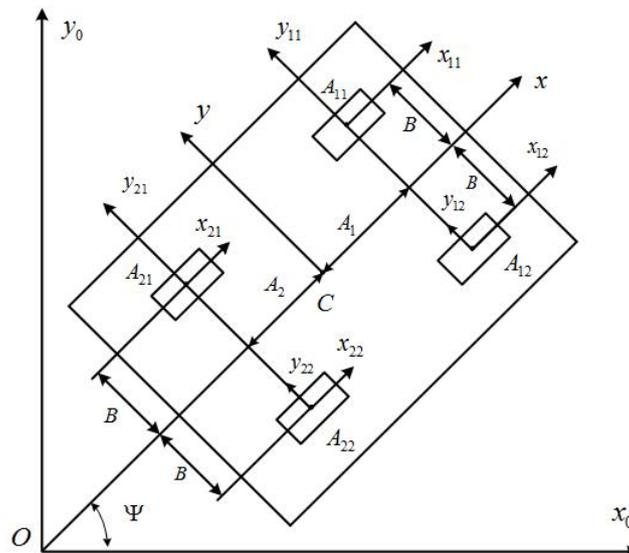


Рис. 1: Модель четырехколесного аппарата

К началу 2-го этапа движения на «миксте» корпус аппарата приобретает ненулевую угловую скорость (проведены аналитические оценки угловой скорости, показано, что учет трения вращения не влияет на полученные результаты). Показано, что колесо ведущей задней оси, оставшееся на участке с большим коэффициентом трения, сохраняет сцепление с опорной плоскостью или возобновляет сцепление с ней после скольжения. Занос развивается в случае, когда поперечные скорости микропроскальзывания колес отвечают быстрому убыванию стабилизирующих моментов.

Литература

- [1] Влахова А. В., Новодерова А. П. Занос колесного аппарата на «миксте» // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2020. № 5. С. 38–50.
- [2] Новожилов И. В., Павлов И. С., Фрольцов В. А. О поведении автомобиля на «миксте» // Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 61–67.
- [3] Влахова А. В., Новожилов И. В. О заносе колесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колес // Фундамен. И прикл. математика. 2005 Т. 11. вып. 7 С. 11–20.

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Овсянников В. М. (Россия, Москва)
 Российский университет транспорта
OvsyannikovVM@yandex.ru

Многие физические явления и инженерные процессы описываются уравнениями математической физики, использующей интегральное и дифференциальное исчисление. Между природными явлениями и описывающим их математическим аппаратом существует различие в том, что построение пространственной геометрической модели и временной модели движения производится конечно-разностными уравнениями с конечными величинами приращений координат Δx , Δy , Δz и времени Δt , а в описании дифференциальным уравнением приращения примут бесконечно малую величину. При совершении предельных переходов в дифференциальном и интегральном исчислении теряется часть информации, часть подробностей явления, хотя и приобретает простота описания.

Геометрическое описание объекта и его перемещения невозможно в терминах бесконечно малых величин. Все интервалы времени и координат конечны на этапах физического описания. Потом при описании явления или движения дифференциальными уравнениями происходит

обеднение информации. Известно высказывание Н. А. Слезкина: «Стягивание объема в точку лишает его некоторых физических свойств». Потерю информации при совершении предельных переходов отмечал еще Коши – один из создателей теории предельных переходов.

В природе движений жидкостей и газов возникают самопроизвольные явления в виде вибраций, генерации звука, которые умышленно в описание движения не закладывались. Можно рассматривать исчезающие при предельных переходах члены ошибками построений и без сожаления отбрасывать. А можно перейти на описание явлений дифференциальными уравнениями более высокого порядка по времени, получить информацию об этих самопроизвольных процессах, названных автоколебаниями, а потом решить, описывают ли они наблюдаемые нами явления.

Такое положение возникает для слагаемых высокого порядка малости уравнения неразрывности несжимаемой жидкости, выведенного Эйлером в 1752 г. [1], [2], [3], давшем обоснование для введения оператора дивергенции

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + (t - t_0) \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t - t_0)^2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Здесь u, v, w компоненты скоростей вдоль координатных осей x, y, z ; $t - t_0$ интервал времени деформации контрольной фигуры; $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ и $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ якобианы поля скорости второго и третьего порядков, соответственно.

Уравнение неразрывности входит в систему уравнений газовой динамики и гидродинамики, имеющей первый порядок дифференциальности по времени. В 2006 г. уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости было переписано автором для течения сжимаемой жидкости и газа [4], [5] введением переменной плотности ρ в таком виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + (t - t_0) \rho \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + \frac{(t - t_0)^2 \rho \partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0. \quad (1)$$

Появилась возможность использованием метода акустической аналогии Лайтхилла 1952-54 гг. вывести волновое уравнение с учетом членов высокого порядка малости уравнения неразрывности (1). Дифференциальными уравнениями более высокого порядка по времени, чем система уравнений гидрогазодинамики, являются волновые уравнения второго и третьего порядка дифференциальности по времени. Волновое уравнение второго порядка по времени получает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{c_0^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t - t_0) \rho_0^2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}. \quad (2)$$

Здесь c_0 – скорость звука, ρ_0 – термодинамическая плотность. В правую неоднородную часть волнового уравнения попали слагаемые с якобианами второго порядка, создающими периодические звуковые колебания и вибрации.

Волновое уравнение третьего порядка по времени [6] получается, если взять производную по времени от всех слагаемых волнового уравнения (2). При некоторых упрощающих условиях оно будет иметь вид

$$-\left(\frac{1}{c_0^2} \right) \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = \rho_0^2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}. \quad (3)$$

Его решение будет описывать возникновение очень крутого во времени подъема давления p по степенному закону третьего или даже четвертого порядка, если трехмерность течения будет нарастать линейно во времени. Этот подъем давления можно рассматривать, как гидравлический удар.

Таким образом, проводя несколько раз взятие производных по времени от полного уравнения неразрывности Эйлера и добавив полученные волновые уравнения к системе уравнений гидрогазодинамики, удастся сохранить и использовать в решениях члены высокого порядка малости, получив новые более подробные результаты о характере движения

сжимаемых жидкостей и газов. На конференции DIFF-2020 решения [6] волновых уравнений (2), (3) рассматривались применительно к образованию волн давления в турбине Саяно-Шушенской ГЭС, когда в 2009 г. произошла авария с выбросом ротора в машинный зал. Сейчас мы обсудим аналогичные решения применительно к задаче сейсмологии и вулканологии.

В пространстве Земли под вулканом имеются обширные области, занятые жидкой расплавленной лавой. При участии жидкости в суточном вращательном движении Земного шара в ней, согласно волновому уравнению (2), генерируются волны давления, интенсивность которых пропорциональна 4-ой степени угловой скорости вращения [6]. Подобная генерация волн происходит в духовых музыкальных инструментах на поворотах воздушного канала. В гидравлической турбине колебательные решения волнового уравнения (2) приводят к раскачке оси вращения и увеличению амплитуды вибрации подшипника. Внутри Земного шара периодические волны могут приводить к местным колебаниям твердой упругой породы, ограничивающей пространство лавы, в перпендикулярном к перемещению жидкости направлению. На поверхности Земли эти волны проявляются, как сейсмические.

В гидравлической турбине одновременно с колебаниями оси колеблется диск с лопатками, появляется трехмерность течения, увеличивается в некоторые моменты времени скорость натекания высокоскоростного потока воды на лопатки. Волновое дифференциальное уравнение третьего порядка по времени (3) при ненулевой правой части создает волну гидравлического удара. Внутри Земного шара возникшие колебания твердой упругой породы, ограничивающей пространство лавы, приводят к более выраженной трехмерности движения лавы, возникновению гидравлического удара, согласно решению волнового уравнения (3), и извержению лавы.

Одним из признаков приближающегося извержения является подрастание вулкана по высоте на десяток миллиметров, измеряемое лазерной техникой. Это и есть демонстрация местного перемещения твердой упругой породы, ограничивающей пространство лавы.

Таким образом, предложено при записи системы уравнений гидрогазодинамики не исключать предельными переходами слагаемые высокого порядка малости из уравнения неразрывности, а дополнить систему уравнений гидрогазодинамики волновыми уравнениями (2), (3), учитывающими слагаемые высокого порядка малости, и получать более полное решение задачи.

Аппарат учета членов высокого порядка малости уравнения неразрывности, вычисленных Эйлером, может быть полезен для прояснения геометрической картины полостей с жидкой лавой, расположенных под вулканами.

Литература

- [1] Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. Т. 6 (1756 – 1757). P.271 – 311 = Opera omnia, ser. II.V. 13. P. 1-369.
- [2] Leonhardi Euleri. Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius. Edidit C.A. Truesdell. Lousanne. 1954.
- [3] Эйлер Л. Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН / Пер. с латинского Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. – 4-е изд., доп. – М.: Издательство «Спутник +», 2020. ISBN 978-5-9973-5524-1
- [4] Овсянников В.М. Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2020. Т.182. СС. 95-100. DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-95-100>
- [5] Ovsyannikov V. M. Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness - An Overview // Fluids 2021, vol. 6, 162. <https://doi.org/10.3390/fluids6040162>
- [6] Овсянников В. М. Возможности вибраций и возникновения ударной волны при вращательном движении жидкости. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. DIFF-2020. Тезисы докладов. Суздаль, 2020. С. 134-136. ISBN 978-5-93767-390-9

Панов А. В. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
gjd@bk.ru

Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial x} = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_2 \frac{v_1 - v_2}{\tau}, \quad \rho_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = \rho_2 \frac{v_1 - v_2}{\tau}, \\ \frac{\partial e_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial e_1}{\partial x} + \frac{p}{\rho_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{(v_1 - v_2)^2}{\tau} - \frac{\rho_2}{\rho_1} q(e_1, e_2), \\ \frac{\partial e_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial e_2}{\partial x} &= q(e_1, e_2), \end{aligned}$$

где ρ_1, ρ_2 — плотности первой и второй фазы, v_1, v_2 — скорости фаз, p — давление в первой фазе, e_1, e_2 — внутренние энергии фаз, $q(e_1, e_2)$ — функция, определяющая обмен энергией между фазами.

Данная система описывает динамику разреженной газовой смеси в неизотермическом случае [1]. Стационарные движения этой модели определяются динамической системой в \mathbb{R}^3 , которая имеет кривые особых точек. В докладе будет рассказано о фазовом портрете в окрестности некоторых кривых особых точек данной динамической системы.

Литература

- [1] Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.

О СТАБИЛИЗАЦИИ СЛАБЫХ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Панов Е. Ю. (Россия, Великий Новгород)
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
eugeniy.panov@novsu.ru

В полупространстве $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2 \cdot A(u) = 0, \quad (1)$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ и симметричная матрица диффузии $A(u) = (A_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ предполагаются лишь непрерывными. В (1) обозначено

$$D_x^2 \cdot A(u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_{ij}(u). \text{ Предполагается выполненным условие параболичности:}$$

$\forall u, v \in \mathbb{R}, u > v$ матрица $A(u) - A(v) \geq 0$ (неотрицательно определена). Эта матрица может иметь нетривиальное ядро, так что уравнение (1) является вырождающимся параболическим уравнением. В частном случае $A(u) \equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0. \quad (2)$$

Напомним (см. [1],[2]), что слабым энтропийным решением (э.р.) уравнения (1) называется функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$, удовлетворяющая энтропийному условию: $\forall k \in \mathbb{R}$

$$|u - k|_t + \operatorname{div}_x [\operatorname{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - D_x^2 \cdot [\operatorname{sign}(u - k)(A(u) - A(k))] \leq 0 \quad (3)$$

⁶⁶Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-20063.

в смысле распределений на Π . В случае законов сохранения (2) соотношение (3) сводится к известному энтропийному условию Кружкова [3]. Пусть $u = u(t, x)$ – слабое э.р. уравнения (1), периодическое по пространственным переменным с группой периодов $G: \forall e \in G \ u(t, x + e) = u(t, x)$ п.в. на Π . Нетрудно установить, что среднее значение u по пространственным переменным $m = \int_{\mathbb{T}} u(t, x) dx$ не зависит от времени t , здесь $\mathbb{T} = \mathbb{R}^n / G$ – соответствующий тор (или ячейка периодичности), снабжённый нормированной мерой Лебега dx . Основным результатом работы является следующее свойство стабилизации решения при больших временах:

Теорема 1. *Предположим, что $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}$*

функции $\varphi(u) \cdot \xi - cu, A(u)\xi \cdot \xi$ одновременно не постоянны

ни в какой окрестности m . (4)

Тогда

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow +\infty} u(t, \cdot) = m \text{ в } L^1(\mathbb{T}). \quad (5)$$

Как показано в [4], для более узкого класса (сильных) э.р. в смысле [5] (см. также [4],[6]) свойство стабилизации (5) верно при более слабом условии, что (4) выполнено только для “резонансных” направлений $\xi \in G', \xi \neq 0$, где G' – двойственная решётка к группе периодов G . Для доказательства Теоремы 1 используются установленные в [7] принципы локализации ультра-параболических N -мер, соответствующих последовательности, полученной из u путём масштабных преобразований независимых переменных.

Литература

- [1] Holden H., Karlsen K. H., Mitrović D., Panov E. Yu. Strong compactness of approximate solutions to degenerate elliptic-hyperbolic equations with discontinuous flux function // Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed. 2009. Vol. 29B. No 6. P. 1573–1612.
- [2] Panov E. Yu. Ultra-parabolic equations with rough coefficients. Entropy solutions and strong precompactness property // J. Math. Sci. 2009. Vol. 159. No 2. P. 180–228.
- [3] Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сборник. 1970. Т. 81. №2. С. 228–255.
- [4] Panov E. Yu. Decay of periodic entropy solutions to degenerate nonlinear parabolic equations // J. Differential Equations. 2020. Vol. 269. No 1. P. 862–891.
- [5] Chen G.-Q., Perthame B. Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. Vol. 20. P. 645–668.
- [6] Panov E. Yu. On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations // J. Differential Equations. 2021. Vol. 275. P. 139–166.
- [7] Panov E. Yu. Strong precompactness of bounded sequences under nonlinear ultraparabolic differential constraints // J. Math. Sci. 2018. Vol. 232. No 4. P. 516–538.

МЕТОД МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ И ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Постнов С. С. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

postnov.sergey@inbox.ru

Метод моментов, широко применяемый в теории управления для систем целого порядка, позволяет сводить задачу поиска оптимального управления к l -проблеме моментов [1],[2]. Оптимальность при этом может пониматься как минимальность нормы управления при заданном времени управления, либо как минимальность времени управления при заданном ограничении на норму управления. Также известно применение метода моментов в задаче оценки состояния динамической системы в условиях действия на неё внешних возмущений [1].

В настоящей работе исследуется возможность аналогичного применения метода моментов в задачах оптимального управления и оценки состояния для динамических систем, которые описываются линейными уравнениями дробного порядка:

$${}_0D_t^{\alpha_i} q_i(t) = a_{ik}q_k(t) + b_{ik}u_k(t) + f_i(t), i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь оператор дробного дифференцирования может пониматься в смысле Хильфера, Адамара, Эрдейи-Кобера, Капуто-Фабрицио, Атанганы-Балеану и др. Функции $q_i(t)$, $u_i(t)$ и $f_i(t)$ описывают соответственно состояние системы, управление и внешнее возмущение. Управление считается элементом пространства $L_p[0, T]$, $p > 1$.

При исследовании задачи оптимального управления системой (1) получены условия, при которых соответствующая l -проблема моментов является корректной и разрешимой. Эти условия связывают параметры оператора дробного дифференцирования с параметром p . Также получен ряд аналитических решений задачи оптимального управления. При исследовании задачи оценки состояния системы (1) также получены аналогичные условия корректности и разрешимости получаемой проблемы моментов и построено её аналитическое решение.

Кроме того, исследована возможность применения метода моментов для приближённого решения задачи оптимального управления для систем с распределёнными параметрами, которые описываются диффузионно-волновым уравнением:

$$r(x) {}_0D_t^\alpha Q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[w(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right] - q(x)Q(x, t) + f(x, t) + u(x, t), \quad (2)$$

где $Q(x, t)$ — состояние системы, $\alpha \in (1, 2)$, $t \geq 0$, $x \in [0, L]$, $(x, t) \in \Omega = [0, L] \times [0, \infty)$. Функция $Q(x, t)$ считается дифференцируемой на положительной полуоси по временной переменной и дважды дифференцируемой на отрезке $[0, L]$ по пространственной переменной. При приближённом решении задачи оптимального управления для системы (2) также получены условия корректности и разрешимости соответствующей проблемы моментов и построены её решения. Кроме того, исследовано влияние ограничения на норму управления на существование решения задачи быстродействия (когда оптимальность управления понимается как минимальность времени управления).

Литература

- [1] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [2] Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1965.

BURSTING ЭФФЕКТ В МОДЕЛИ ПЕРЦЕПТРОНА, ОПИСАННОЙ СИСТЕМОЙ РЕЛЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ⁶⁷

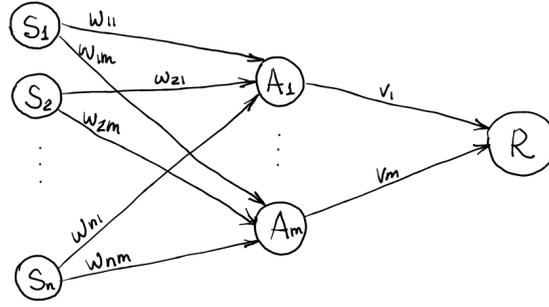
Преображенская М. М. (Россия, Ярославль)
 Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
 Центр интегрируемых систем
 rita.preo@gmail.com

Предложена феноменологическая модель нейронной сети в виде перцептрона [1]. Как это характерно для классического перцептрона, в модели участвуют три типа элементов: сенсорные, ассоциативные и реагирующие. Пусть их мембранные потенциалы обозначены соответственно $S_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), $A_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$), $R(t)$.

Предположим, что $A_j(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{A}_j(t) &= \lambda_A \left(\mathcal{F}(A_j(t-1)) + \mathcal{G} \left(\sum_{k=1}^n w_{jk} S_k(t) \right) \right) A_j(t), \\ \dot{R}(t) &= \lambda_R \left(\mathcal{F}(R(t-h)) + \mathcal{H} \left(\sum_{i=1}^m v_i A_i(t) \right) \right) R(t), \end{aligned} \quad (1)$$

⁶⁷Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00209).



где $S_i(t)$ — известные функции, $\lambda_A, \lambda_R > 0$ характеризуют скорость электрического процесса, константа w_{jk} — это вес k -й входящей функции для j -й ассоциативной, константа v_i — вес i -й ассоциативной функции, \mathcal{F} , \mathcal{G} и \mathcal{H} — релейные функции:

$$\mathcal{F}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & 0 < u \leq 1, \\ -\alpha, & u > 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\beta, & 0 < u \leq \theta_A, \\ 0, & u > \theta_A, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \xi, & 0 < u \leq \theta_R, \\ -\eta, & u > \theta_R, \end{cases}$$

параметры $\alpha, \beta, \theta_A, \xi, \eta, \theta_R > 0$ — константы. Функционирование каждого отдельного нейрона ассоциативного и реагирующего слоев описывается дифференциально-разностным уравнением

$$\dot{u} = \lambda \mathcal{F}(u(t-1))u,$$

которое обладает периодическим режимом с одним всплеском за период [2].

Связь между нейронами разных слоев предполагается однонаправленной и синаптической. Для моделирования химических синапсов используется подход, предложенный в [3], который основан на модификации идеи быстрой пороговой модуляции [4,5].

Bursting-эффектом называется явление характерное для нейродинамики, состоящее в следующем. Для мембранного потенциала перемежаются промежутки с несколькими подряд идущими всплесками и промежутки с относительно малыми значениями.

Основной результат работы состоит в получении для системы (1) режимов, в которых функции $A_j(t)$ — периодические с одним всплеском на периоде, а $R(t)$ — периодическая с bursting-эффектом. Причем такой сложности объекта из реагирующего слоя удастся добиться даже при достаточно простых входных функциях $S_j(t)$ (например, тождественных константах).

Литература

- [1] Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. Пер. с англ. Вильямс. 2016.
- [2] Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh. A modification of Hutchinson's equation // Comput. Math. Math. Phys. 2010. Vol. 50. No 12. P. 1990–2002.
- [3] Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. On a method for mathematical modeling of chemical synapses // Differential Equations. 2013. Vol. 49. No 10. P. 1193–1210.
- [4] Terman D. An introduction to dynamical systems and neuronal dynamics // In Tutorials in Mathematical Biosciences I: Mathematical Neuroscience. Berlin: Springer. 2005.
- [5] Somers D., Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation. Biol. Cybern. 1993. No. 68. P. 393–407.

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пулькина Л. С. (Россия, Самара)

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
louise@samdiff.ru

Гилев А. В. (Россия, Самара)

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
toshqaaa@gmail.com

В докладе рассматривается задача с нелокальными условиями для уравнения

$$u_{yy} - (au_x)_x - (bu_{xy})_x + cu = f(x, y),$$

которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска-Лява, так и как уравнение с доминирующей смешанной производной. Обратив на это внимание, естественно рассмотреть для него задачи с условиями на характеристиках. Считая $b \neq 0$ всюду в области $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, запишем уравнение, сделав незначительные преобразования, следующим образом

$$u_{xxyy} + (Au_x)_x + (Bu_y)_y + Cu = F(x, y)$$

и будем изучать для него задачу отыскания решения, удовлетворяющего условиям

$$\int_0^b K_1(x, y)u(x, y)dy = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x),$$
$$\int_0^a K_2(x, y)u(x, y)dx = \mu(y), \quad u_x(0, y) = \nu(y).$$

При выполнении ряда условий на входные данные существует единственное решение поставленной задачи $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, имеющее непрерывную в Ω смешанную производную u_{xxyy} . Для доказательства этого утверждения поставленная задача сведена эквивалентным образом к двум, одна из которых оказалась классической задачей Гурса для простейшего гиперболического уравнения второго порядка, а вторая — интегральным аналогом задачи Гурса для нагруженного уравнения. Разумеется, именно вторая из этих задач оказалась интересной, так как объединила в себе как интегральный аналог задачи Гурса для уравнения второго порядка, так и классическую задачу Гурса для нагруженного уравнения.

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ С НЕИЗОЛИРОВАННЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ТОЧКАМИ
ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Ремизов А. О. (Россия, Москва)

Московский физико-технический институт
alexey-remizov@yandex.ru

Этот обзорный доклад посвящен гладким векторными полям, стационарные (особые) точки которых не изолированы, а образуют подмногообразие фазового пространства, чаще всего подмногообразие коразмерности два. В локальных координатах такие поля записываются в виде

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = w, \quad \dot{z}_i = a_i v + b_i w, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$, $a_i = a_i(x, y, z)$, $b_i = b_i(x, y, z)$ — произвольные гладкие функции переменных $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Стационарные точки поля (1) задаются двумя уравнениями:

$$v(x, y, z) = 0, \quad w(x, y, z) = 0,$$

задающими подмногообразием W^c фазового пространства, которое почти всегда является центральным многообразием.

Поля такого типа возникают (устойчивым образом) во многих задачах анализа, геометрии, теории динамических систем, оптимального управления и др. разделах. Устойчивость заключается в том, что при малых возмущениях исходной задачи все функции v , w и a_i , b_i слегка меняются, подмногообразие W^c деформируется, но не исчезает и не распадается на части, так как функциональные связи между компонентами поля (1) остаются неизменными.

В докладе планируется рассказать несколько теорем о локальных нормальных формах векторных полей вида (1) и о некоторых их применениях (неявные дифференциальные уравнения, особенности геодезических потоков в псевдоримановых метриках переменной сигнатуры, задача оптимального управления).

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОМЫСЛА ДЛЯ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ⁶⁸

Родина Л. И. (Россия, Москва)

Московский институт стали и сплавов

LRodina67@mail.ru

Задачи оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными динамическими системами, начали вызывать интерес ученых, начиная с прошлого века. В настоящее время множество работ посвящено изучению влияния оптимального промысла на динамику и состав структурированных популяций, исследованию задач периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса и задач оптимальной эксплуатации популяции с диффузией, см. [1-3].

Рассмотрим модель популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n \geq 2$, то ресурс $x \in \mathbb{R}_+^n$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов x_1, \dots, x_n , либо разделен на n возрастных групп.

Таким образом, рассматривается эксплуатируемая популяция, заданная управляемой системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0), \end{aligned}$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что все решения системы $\dot{x} = f(x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях; для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ удовлетворяли условию квазиположительности (см. [4, с. 34]).

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$, $C_i \geq 0$ — стоимость ресурса i -го вида. Средней временной выгодой от извлечения ресурса назовем функцию

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

⁶⁸Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00293).

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*(\bar{u}, x(0))$ и, если выполнено равенство $H_*(\bar{u}, x(0)) = H^*(\bar{u}, x(0))$, то определим предел

$$H(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение системы $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Введем в рассмотрение функцию

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$$

в предположении, что для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ решения $\varphi(t, x)$ существуют при $t \in [0, d]$.

Теорема. Пусть функция $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ и $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, существует режим эксплуатации \bar{u}^* , при котором функция $H(\bar{u}, x(0))$ достигает наибольшего значения $H(\bar{u}^*, x(0)) = D(x^*)$.

Доказательство данного утверждения и построение управлений, при которых достигается наибольшее значение функции $H(\bar{u}, x(0))$, приведено в [5]. Результаты исследования проиллюстрированы на примерах различных моделей взаимодействия двух видов.

Литература

- [1] Беляков А. О., Давыдов А. А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 38–46.
- [2] Егорова А. В., Родина Л. И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 501–517.
- [3] Давыдов А. А. Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией // Труды МИАН. 2020. Т. 310, № 2. С. 135–142.
- [4] Кузенков О. А., Рябова Е. А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородского ун-та, 2007.
- [5] Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия вузов. Математика. 2022. № 1. С. 12–24.

ЗАДАЧА О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ С ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ⁶⁹

Рудаков И. А. (Россия, Москва)

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
rudakov_ia@mail.ru

Рассмотрим квазилинейное уравнение Эйлера-Бернулли с однородными граничными условиями на отрезке

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} + g(x, t)|u|^{p-2}u = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}; \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \quad (2)$$

$$u_x(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) - hu(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \quad (3)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t); \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

⁶⁹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0705-2020-0047).

В уравнении (1) и граничном условии (3) константы a, h являются положительными и

$$p > 2. \quad (5)$$

Будем предполагать выполнение следующих условий:

$$T = 2\pi \frac{b}{c}, \quad b, c \in \mathbf{N}, \quad \text{НОД}(b, c) = 1; \quad (6)$$

$$g(x, t) \in C^1(\Omega) \text{ и } T \text{ – периодична по } t; \quad (7)$$

$$g(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega; \quad (8)$$

$$a > 0, \quad (2a + 1)b/4 \notin \mathbf{N}. \quad (9)$$

Обозначим $\Omega = [0, \pi] \times \mathbf{R}/(T\mathbf{Z})$.

Теорема. Пусть выполнены условия (5)-(9). Тогда для любого $d > 0$ задача (1)-(4) имеет обобщенное решение

$$u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega),$$

такое, что $\|u\|_{L_p(\Omega)} \geq d$, $u_{xx}, u_{xxx} \in C(\Omega)$ и граничные условия (2),(3) выполнены в классическом смысле.

Литература

- [1] Yamaguchi M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications//Funkcialaj Ekvacioj. 1995. V. 38. P. 519-538.
- [2] Rudakov I. A. Problem on Periodic Vibrations of an I-beam with Clamped Endpoint in the Case of Resonance// Differential Equations. 2020. V. 56. № 3. P. 329–338. DOI: 10.1134/S0012266120030064
- [3] Rudakov I. A. Periodic vibrations of a beam with rigidly sealed ends//Journal of Mathematical Sciences, New York, Springer. 2021. V. 255, No. 6. P. 753-763. DOI 10.1007/s10958-021-05412-4

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рыбкина О. В. (Россия, Хабаровск)

Дальневосточный государственный университет путей сообщения

ribkina_ol@mail.ru

От того, насколько хорошо проработана модель угроз информационной безопасности, зависит эффективность применения контрмер защиты, повышение уровня защищенности, а также оптимизация затрат за счет устранения актуальных угроз. Однако данные, на которых строятся модели угроз, постоянно меняются, что приводит к тому, что ранее созданные модели устаревают и требуют обновления.

Вопросы математических моделей угроз безопасности информации, учитывающих динамику изучены не в достаточной мере. Наибольший интерес вызывают исследования в области теории дифференциальных уравнений. При разработке моделей безопасности угроз использование данной теории является достаточно новым направлением исследований и требует глубокого изучения. На сегодняшний день практически не существует адекватных динамических моделей. Таким образом, разработка динамических моделей является наиболее приоритетным направлением исследования [1].

В рамках данной темы были рассмотрены следующие вопросы:

- представлена модель угроз информационной безопасности, разработанная на основе математической модели военных действий Ланчестера [2];
- проиллюстрировано применение разработанного метода к оценке защищенности информационной системы;

- проведен качественный и численный анализ полученных результатов с помощью математической программной среды MathCAD;
- построена динамическая система с инвариантами для исследования модели Ланчестера угроз информационной безопасности;
- для построенной динамической модели применен переход к модели с управлением с целью сохранения определенного свойства модели (инвариантное управление).

В работе использовались методы теории дифференциальных уравнений, а также численные методы решения систем дифференциальных уравнений.

Кроме того, где это было возможно, проводилось сравнение полученных результатов с уже известными, например, сравнение поведения систем для полученных моделей с хорошо изученными моделями [3].

Литература

- [1] Дорогинина, О.В., Карачанская, Е.В. О математических моделях угроз безопасности информации // Информационные системы и технологии. 2020. № 3 (119). С. 113-123.
- [2] Рыбкина, О.В., Построение модели угроз безопасности информации на основе математической модели Ланчестера // Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке. 2021. Т. 1. С. 255-260.
- [3] Рыбкина, О.В., Карачанская, Е.В. Построение математической модели защиты информационной системы // Информационные системы и технологии. 2021. № 6 (128).

ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ⁷⁰

Савельева В. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
tchek@mail.ru

Чекин А. М. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
tchek@mail.ru

Чекина Е. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
chekina_ev@mail.ru

Рассматривается спутник, представляющий собой динамически симметричное твердое тело, центр масс которого движется по круговой орбите. Уравнения движения такого спутника относительно его центра масс допускают семейство частных решений, соответствующих плоским маятниковым колебаниям оси симметрии спутника в плоскости орбиты. Плоские периодические движения неустойчивы по отношению к возмущениям координат и скоростей, поскольку их период зависит от начальных условий. Однако представляет интерес исследование орбитальной устойчивости, т.е. устойчивости по отношению к пространственным возмущениям и возмущениям периода.

Данная задача была рассмотрена ранее в работе [1]. Было проведено детальное исследование устойчивости на основании разложения гамильтониана в ряд в окрестности невозмущенного движения до членов четвертой степени включительно. Неисследованными остались значения параметров, соответствующие кривым вырождения, на которых для получения выводов об устойчивости необходимо рассматривать члены шестой степени и выше в разложении функции Гамильтона.

⁷⁰Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете)

Одной из существенных трудностей данной задачи является введение локальных координат в окрестности периодической орбиты. В работе [2] предложен способ, в соответствии с которым локальные координаты могут быть введены нелинейной канонической заменой переменных, которая строится в виде степенных рядов по новой переменной (локальной координате). Данная методика существенно упрощает процесс введения локальных координат и позволяет получить явный вид разложения в ряд гамильтониана возмущенного движения до членов шестого и более высокого порядка.

В данной работе, следуя [2], были введены локальные координаты и получено разложение гамильтониана возмущенного движения в ряд до членов шестой степени включительно. В плоскости параметров задачи (амплитуды колебаний ψ_0 и инерционного параметра α) были построены диаграммы устойчивости (см. рис. 1), уточнены результаты работы [1] и проведено исследование устойчивости на двух вырожденных кривых γ_1 и γ_2 , которое ранее не проводилось.

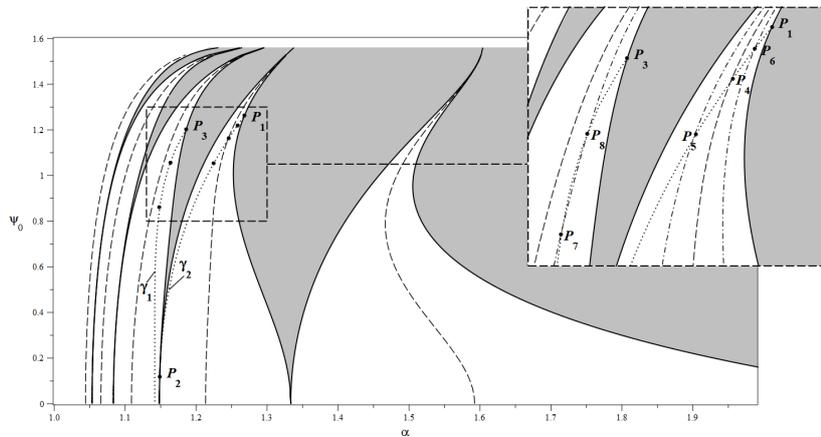


Рис. 1: Диаграмма устойчивости.

Литература

- [1] Markeev A.P., Bardin B.S. On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit. // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2003. Vol.85. No.1. P.51-66.
- [2] Bardin B.S. On a Method of Introducing Local Coordinates in the Problem of the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body. // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2020. Vol. 16. No.4. P. 581-594.

СУБРИМАНОВА СФЕРА КАРТАНА

Сачков Ю. Л. (Россия, Переславль-Залесский)

Институт программных систем РАН

yusachkov@gmail.com

Доклад посвящен структуре пересечения субримановой сферы на группе Картана с 3-мерным инвариантным многообразием основных симметрий.

Алгебра Картана — это свободная нильпотентная алгебра с 2-мя образующими глубины 3. В ней существует базис X_1, \dots, X_5 , в котором ненулевые скобки имеют вид $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_2, X_3] = X_5$. Соответствующая связная односвязная группа Ли G называется группой Картана.

На пространстве $\mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$ можно ввести закон умножения, превращающий это пространство в группу Картана: $G \cong \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$, в которой левоинвариантные по-

ля, порождающие алгебру Картана, имеют вид $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}$,
 $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}$.

Рассматривается следующая вариационная задача. Пусть на евклидовой плоскости заданы точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть также заданы число $S \in \mathbb{R}$ и точка $c \in \mathbb{R}^2$. Требуется соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы кривые γ_0 и γ ограничивали на плоскости область алгебраической площади S , с центром масс c . Эту геометрическую задачу можно переформулировать как задачу оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q = (x, y, z, v, w) \in G = \mathbb{R}^5, \quad (1)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (2)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

Это субриманова задача для субримановой структуры на \mathbb{R}^5 , заданной векторными полями X_1, X_2 как ортонормированным репером. Эта субриманова структура — единственная, с точностью до автоморфизма группы Картана, левоинвариантная субриманова структура с вектором роста $(2, 3, 5)$. Следовательно, можно считать, что $q_0 = (0, \dots, 0)$.

Основной объект доклада — сечение единичной субримановой сферы S с центром q_0 двумерным инвариантным многообразием основных симметрий $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \{q \in S \mid \varepsilon^1(q) = \varepsilon^2(q) = q\} = S \cap \{z = V = 0\}, \\ V(q) &= xv + yw - z(x^2 + y^2)/2, \end{aligned}$$

а также его фактор по группе вращений $\hat{S} = \tilde{S}/\text{SO}(2)$. Для этих объектов будут представлены результаты по следующим вопросам:

- Структура фактора \hat{S} ,
- Характеризация точек фактора \hat{S} ,
- Кратность точек фактора \hat{S} ,
- Регулярность фактора \hat{S} ,
- Аналитические свойства фактора \hat{S} ,
- Exp-log категория,
- Стратификация Уитни.

Литература

- [1] Сачков Ю. Л. Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, Математический сборник, 2003, 194 (9), 63–90.
- [2] Сачков Ю. Л. Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны, Мат. Сборник, 2006, Т. 197, № 2, С. 95–116.
- [3] Сачков Ю. Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, Мат. Сборник, 2006, Т. 197, № 4, С. 123–150.
- [4] Сачков Ю. Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, Мат. Сборник, 2006, Т. 197, N 6, С. 111–160.
- [5] Yu. L. Sachkov, Conjugate time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group, Journal of Dynamical and Control Systems, v 27, 709–751 (2021).
- [6] A. Ardentov, E. Hakavuori, Cut time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group, ESAIM: COCV 28 (2022) 12.

СУБЛОРЕНЦЕВА ЗАДАЧА НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Сачков Ю. Л. (Россия, Переславль-Залесский)

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук
yusachkov@gmail.com

Сачкова Е. Ф. (Россия, Переславль-Залесский)

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук
efsachkova@mail.ru

Рассматривается следующая сублоренцева задача на группе Гейзенберга:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1, \\ \dot{y} &= u_2, \\ \dot{z} &= -\frac{1}{2}u_1y + \frac{1}{2}u_2x, \\ q &= (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u_1 = \operatorname{ch} v, \quad u_2 = \operatorname{sh} v, \quad v \in \mathbb{R}, \\ q(0) &= 0, \quad q(t_1) = q_1, \\ t_1 &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Будут изложены следующие результаты:

- параметризация экстремальных траекторий,
- описание множества достижимости,
- оптимальный синтез.

Аналогичные результаты будут рассмотрены для группы $SO(3)$.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Семенов М. Е. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
mkl150@mail.ru

Соловьев А. М. (Россия, Воронеж)

АО «Концерн «Созвездие»
darkzite@yandex.ru

Борзунов С. В. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
sborzunov@gmail.com

Мелешенко П. А. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
melechp@yandex.ru

Как известно, моделирование сложных технических систем нередко требует привлечения методов описания нелинейностей гистерезисного типа. Такого типа нелинейности присущи многим физическим, физико-химическим, биологическим и экономическим процессам, что проявляется в силу внутренней структуры этих процессов, либо является следствием их динамических особенностей. Характеристики многих технических систем либо известны лишь с небольшой точностью, либо не могут быть оценены без разрушающего контроля. Более того, их параметры могут испытывать регулярные или нерегулярные изменения в зависимости от времени. В связи с этим возникает необходимость обобщения моделей гистерезисных преобразователей, учитывающих вероятностный характер параметров, их определяющих. Настоящая работа посвящена обобщению одной из известных моделей

гистерезиса – преобразователя Прейзаха, в которой параметры элементарных реле, его составляющих, являются случайными величинами.

В классическом подходе к описанию гистерезисных нелинейностей, развитом М. А. Красносельским и А. В. Покровским [1], гистерезисные операторы трактуются как преобразователи, определенные на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: “вход-состояние” и “состояние-выход”.

Обозначим через $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ гистерезисный преобразователь, отвечающий неидеальному реле с пороговыми числами α и β , где $x_0 \in \{-1, 1\}$ – начальное состояние преобразователя, t_0 – начальный момент времени. Пространством состояний неидеального реле является двухэлементное множество $\{-1, 1\}$. Входом системы является непрерывная при $t \geq t_0$ функция $u(t)$, выходом – ступенчатая функция $x(t)$, определяемая операторным соотношением:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t). \quad (1)$$

По аналогии с классическим оператором Прейзаха, определим его стохастический дискретный аналог соотношением:

$$\xi_N[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)] = \sum_{j=1}^N \mu_j R[p_0, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, x_0, t_0]u(t), \quad (2)$$

где $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j$ – непрерывные случайные величины с заданным законом распределения, под понимается весовой множитель, совпадающий с площадью прямоугольника Q_{ij} с центром в т точке (α_j, β_j) со сторонами $\Delta\alpha_j$ и $\Delta\beta_j$.

Для того, чтобы осуществить переход к континуальному случаю, необходимо пропорционально уменьшить вклад индивидуального реле, когда их число (неидеальных реле) стремится к бесконечности [2]. Стохастическим оператором Прейзаха назовем преобразователь, сопоставляющий всякому непрерывному входу двухпараметрический случайный процесс, являющийся пределом сумм (2) при стремлении диагонали прямоугольника Q_{ij} к нулю. Заметим, что выходом стохастического аналога оператора Прейзаха является случайный процесс, который обладает свойством инвариантности порядка p , ($p > 1$), по отношению к последовательности разбиения множества $\{(\alpha, \beta) : \alpha < \beta\}$.

Литература

- [1] Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
- [2] Борзунов С. В., Семенов М. К., Сельвесюк Н. П., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. Стохастическая модель гистерезисного преобразователя с доменной структурой // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. №9. С. 60-86.

О ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ⁷¹

Серегина Е. В. (Россия, Калуга)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Калужский филиал
evfs@yandex.ru

Степович М. А. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
m.stepovich@mail.ru

Филиппов М. Н. (Россия, Москва)

Институт общей и неорганической химии им. Н. С. Курнакова РАН
fil@igic.ras.ru

Построена эффективная вычислительная схема с использованием проекционного метода Галеркина для решения двумерного нестационарного уравнения диффузии с переменным коэффициентом. Ранее [1, 2] показаны некоторые возможности использования этого метода для решения стационарного уравнения диффузии и получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному уравнению диффузии. Настоящая работа продолжает такие исследования. Рассмотрение проведено для нестационарного уравнения диффузии, описывающего зависимость от времени концентрации неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных внешним воздействием (заряженными частицами или электромагнитным излучением) в однородном полупроводнике, после прекращения действия внешнего источника [3, 4]:

$$\frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t} = D\Delta c(x, y, t) - \frac{c(x, y, t)}{\tau(t)}$$

с граничными условиями

$$c(x, y, 0) = n(x, y), \quad c(\pm\infty, y, t) = 0, \quad c(x, \pm\infty, t) = 0, \quad c(x, y, +\infty) = 0,$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Здесь $c(x, y, t)$ — зависимость концентрации ННЗ от времени, $n(x, y)$ — концентрация ННЗ в стационарном случае, до выключения внешнего воздействия, см. [3, 4], $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа, $D = \text{const}$ — коэффициент диффузии и $\tau = \tau(t)$ — зависимость времени жизни ННЗ от времени после выключения внешнего источника ННЗ (в отличие от рассмотренной ранее математической модели [3, 4], в которой τ была постоянной величиной). В настоящей работе рассмотрена математическая модель, описывающая два механизма рекомбинации неравновесных ННЗ при выключении внешнего воздействия [5], при этом зависимость числа неравновесных ННЗ от времени описывается двумя экспонентами.

Решение было получено в цилиндрической системе координат в виде частичной суммы ряда Фурье по модифицированным функциям Лагерра.

Литература

- [1] Макаренков А. М., Серегина Е. В., Степович М. А. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 5. С. 801–813.
- [2] Makarenkov A. M., Seragina E. V., Stepovich M. A. The Projection Galerkin Method for Solving the Time-Independent Differential Diffusion Equations in a Semi-Infinite Domain // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57, No. 5. P. 802–814.
- [3] Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, No. 2. P. 259–262.

⁷¹Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271).

- [4] Turtin D. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2020. Vol. 250, Issue 1. P. 166–174.
- [5] Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1990. 685 с.

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ⁷²

Солдатов А. П. (Россия, Москва)

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН
soldatov48@gmail.com

Обсуждаются достаточные условия выполнимости основной теоремы Фаддеева-Марченко. Приводится представление решения обратной задачи Штурма-Лиувилля на все оси, основанное на исследовании краевой задачи для функции Йоста и соответствующего ей сингулярного интегрального уравнения. Доказывается однозначная разрешимость этой задачи в соответствующих весовых классах Гельдера.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ УПРАВЛЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ⁷³

Субботина Н. Н. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
 УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
subb@uran.ru

Крупенников Е. А. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
 УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
krupennikov@imm.uran.ru

В докладе обсуждается новый метод решения задачи динамической реконструкции управлений (ЗДРУ) для динамических управляемых систем. Под ЗДРУ понимается задача построения аппроксимаций неизвестного управления по неточным дискретным замерам наблюдаемой траектории динамической системы, которая порождается этим управлением. Допустимые управления — измеримые функции, значения которых ограничены известным выпуклым компактом.

Предложенный авторами доклада новый подход [1,2] к решению ЗДРУ опирается на вспомогательные вариационные задачи для регуляризованных [3] интегральных функционалов невязки. Отличительная особенность подхода — использование выпукловогнутых функционалов. При этом во вспомогательных задачах ищутся лишь стационарные точки функционалов, а не экстремум.

На основании этого подхода разработан и обоснован алгоритм [1,2], позволяющий строить аппроксимации неизвестного управления, сходящиеся к искомому при условии выполнения определенных условий согласования параметров аппроксимации. Эффективность алгоритма обусловлена сведением решения ЗДРУ к интегрированию линейных ОДУ.

В докладе предлагается сравнение двух модификаций этого подхода. Суть модификаций заключается в разной постановке вспомогательных вариационных задач. А именно — рассматриваются различные краевые условия.

Предложенный в работах [1,2] пошаговый алгоритм решения ЗДРУ на каждом шаге (т.е. на отрезке времени $[t_{i-1}, t_i]$) использует вспомогательные конструкции из задачи на поиск

⁷²Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20261)

⁷³Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

стационарных точек невыпуклого функционала

$$I(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[-\frac{\|x_i(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u_i(t)\|^2}{2} \right] dt, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где i — номер шага алгоритма, α — малый регуляризирующий (по Тихонову [3]) параметр. Функция $y^\delta(t)$ является гладкой интерполяцией дискретных замеров. Допустимые функции — непрерывно дифференцируемые пары $(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow R^n \times R^m$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, описывающим динамику системы, и краевым условиям для $x_i(\cdot)$ вида

$$x_i(t_{i-1}) = y_{i-1}^\delta. \quad (2)$$

Краевые условия для $u_i(\cdot)$ на первом шаге задаются из соображения выполнения условия $\dot{x}_1(0) = \dot{y}^\delta(0)$. На каждом последующем шаге используется специальный выбор краевых условий $(x_i(t_{i-1}), u_i(t_{i-1}))$, обеспечивающий построение точки $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$, близкой к стационарной точке функционала.

В докладе рассматривается также другой способ построения пары функций $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$. Они определяются как стационарные точки функционала (1) при краевых условиях вида (2).

Приводится качественный и количественный анализ результатов применения этих модификаций.

Литература

- [1] Субботина Н.Н., Крупенников Е.А. Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 208-220.
- [2] Субботина Н.Н., Крупенников Е.А. Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции. // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 315. 2021. С. 247-260.
- [3] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195-198.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПАНДЕМИИ (COVID-19)

Тахиров Ж. О. (Узбекистан, Ташкент)
Институт Математики АН РУз
prof.takhirou@yahoo.com

Анваржонов Б. (Узбекистан, Ташкент)
Институт Математики АН РУз
bunyodbek.anvarjonov@bk.ru

Математические прогнозы в борьбе с эпидемиями еще не достигли своего совершенства. Быстрое распространение, способы и процедуры, связанные с сдерживанием пандемии, требуют самого раннего понимания в поиске решений в соответствии с привычными, физиологическими, биологическими и экологическими аспектами жизни с более совершенным математическим моделированием и прогнозами. Эпидемиологические модели являются ключевыми инструментами в программах управления общественным здравоохранением, несмотря на высокий уровень неопределенности в каждой из этих моделей.

Во многих случаях предлагаются математические модели, состоящие из нелинейных систем ОДУ [1]. Но математическое моделирование с пространственными эффектами играет важную роль в характеристике и понимании распространения конкретного инфекционного заболевания. Понимание пространственного распределения COVID-19 необходимо для выяснения механизмов передачи и целенаправленных мер контроля [2].

Пространственная неоднородность неизбежна и может влиять на динамику передачи болезни. В дальнейшем большее внимание стало уделяться динамическим реакционно-диффузионным моделям эпидемий с пространственной неоднородностью [3,4]. В работе исследуется пространственно-неоднородная нелинейная модель реакции-диффузии

$$\begin{aligned} S_t(t, x) &= \nabla \cdot D_1(S) \nabla S(t, x) + A(x) - \beta(x) Ef(S) - \mu(x)S, \\ I_t(t, x) &= \nabla \cdot D_2(I) \nabla I(t, x) + \beta(x) Ef(S) - (\mu(x) + \alpha(x) + \rho(x))I, \\ E_t(t, x) &= \nabla \cdot D_3(E) \nabla E(t, x) + \theta(x)I(1 - E) + (\xi(x) + \gamma(x))E, \\ S(0, x) &= \varphi_1(x), \quad I(0, x) = \varphi_2(x), \quad E(0, x) = \varphi_3(x), \\ \frac{\partial}{\partial \nu} S(t, x) &= \frac{\partial}{\partial \nu} I(t, x) = \frac{\partial}{\partial \nu} E(t, x) = 0, \end{aligned}$$

где $t \geq 0, x \in \Omega, \Omega \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\varphi(x) (i = 1, 2, 3)$ — неотрицательные непрерывные по Гёльдеру ограниченные функции, а $\frac{\partial}{\partial \nu}$ представляет внешнюю нормальную производную на $\partial\Omega, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), n \geq 1$ — целое число. $S(t, x), I(t, x)$ и $E(t, x)$ — количество восприимчивых, инфицированных лиц, а также концентрация патогенов окружающей среды (вирусов или бактерий).

В пространственно-неоднородных средах сначала устанавливается корректность решений, в том числе неотрицательность и предельная ограниченность решений. Определяется базовый номер воспроизведения R_0 . Установлены пороговые критерии глобальной динамики модели.

Литература

- [1] Wang S. et al. Mathematical modeling of transmission dynamics of COVID-19. Big Data and Information Analytics // 2021. Vol. 6, pp. 12-25. DOI:10.3934/bdia.2021002.
- [2] Guo Z. G. et al. Spatial dynamics of an epidemic model with nonlocal infection. Appl. Math. Comput // 2020. Vol. 377, 125-158.
- [3] Luo Y. et al. Global dynamics in a reaction–diffusion multi-group SIR epidemic model with nonlinear incidence // Nonlinear Analysis: Real World Applications. V. 50, December 2019, 365-385.
- [4] Wang N. et al. Dynamics in a reaction -diffusion epidemic model via environmental driven infection in heterogenous space // Journal of Biological Dynamics. DOI: 10.1080/17513758.2021.1900428

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Трещев Д. В. (Россия, Москва)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

treschev@mi.ras.ru

Рассмотрим гамильтонову систему около положения равновесия или симплектическое отображение около неподвижной точки в фазовом пространстве размерности $2n$. Предположим, что система зависит от функционального параметра, являющегося функцией n переменных. Изучается возможность использовать функциональный параметр для получения системы, сопряженной линейной на открытом множестве.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Трусова Н. И. (Россия, Липецк)

Липецкий государственный педагогический университет

имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

trusova.nat@gmail.com

Многомерный частный интеграл по шару в \mathbb{R}_m от сферически симметричных функций по части переменных имеет вид

$$\int_{|t_\alpha| < R} k_\alpha(x; |t_\alpha|) u(|t_\alpha|, x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha, \quad x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}}) \in \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n-m}.$$

Сферическое преобразование координат интегрирования приводит к одномерному весовому частному интегралу

$$|S_1(m)| \int_0^R k(x; r) u(r, x_{\bar{\alpha}}) r^{m-1} dr.$$

В случае многоосевой сферической симметрии мы приходим к многомерному весовому частному интегралу

$$\prod_{i=1}^m |S_1(\ell_i)| \int_{r_1=0}^{\rho_1} \dots \int_{r_m=0}^{\rho_m} k_\alpha(r, x_{\bar{\alpha}}; r) u(r_1, \dots, r_m, x_{\bar{\alpha}}) \prod_{i=1}^m r_i^{\ell_i-1} dr,$$

где $m = \ell_1 + \dots + \ell_m$, $r_i = |x_i^{(\ell_i)}|$, $r = (r_1, \dots, r_m)$.

Наиболее общей формой такого вида частных интегралов определим выражением

$$\int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_m} k_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha, x_{\bar{\alpha}}) \prod_{i=1}^m t_{\alpha_i}^{\gamma_{\alpha_i}} dt_{\alpha_i}.$$

Весовым частно-интегральным оператором Вольтерра будем называть следующее выражение

$$(K_\alpha u)(x) = \int_0^{x_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha, x_{\bar{\alpha}}) t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha, \quad (1)$$

где $\gamma_\alpha > -1$ (см. [1]). Мультииндексы α и $\bar{\alpha}$ могут принимать значения 1 или 2.

Частно-интегральное уравнение Вольтерра второго рода с оператором (1) имеет вид

$$\varphi(x) - \lambda K_\alpha \varphi(x) = f(x). \quad (2)$$

Решение уравнения (2) находим по схеме, предложенной в [2], в весовом анизотропном пространстве Лебега $L_{\mathbf{p}}^\gamma(D)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}^\gamma(D)} = \left(\int_{D_3} \left(\int_{D_2} \left[\int_{D_1} |f(x)|^{p_1} x_1^{\gamma_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right)^{p_3/p_2} x_3^{\gamma_3} dx_3 \right)^{1/p_3},$$

где $D_i = (0, b_i)$.

Теорема 1. Пусть $p \geq 1$ и $r > 1$ — произвольное число и $1/p + 1/p' = 1$, $1/r + 1/r' = 1$, и пусть $k_\alpha \in L_{(p, pr, \infty)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha, \gamma_{\bar{\alpha}})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\bar{\alpha}}})$. Тогда решение уравнения (2) существует в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{x_\alpha} R(x; t_\alpha; \lambda) f(t_\alpha, x_{\bar{\alpha}}) t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha,$$

где резольвентное ядро $R(x; t_\alpha; \lambda)$ определяется с помощью ряда, составленного из итерированных ядер

$$R(x; t_\alpha; \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell k_\alpha^{(\ell+1)}(x; t_\alpha).$$

Имеет место оценка

$$\|k_\alpha^{(\ell+2)}\|_{L_p^\gamma(D \times D_{t_\alpha})} \leq \frac{C}{\sqrt[\ell]{\ell!}},$$

где константа C не зависит от ℓ .

Автор благодарен профессору Л.Н. Ляхову за поставленную задачу и выражает искреннюю благодарность за консультацию.

Литература

- [1] Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательными параметрами операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения. Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1-11.
- [2] Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Из-во иностранной литературы, 1960.

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ СТЕПЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Туманов С. Н. (Россия, Москва)

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

sergey.tumanov@yahoo.com

Рассматривается оператор

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha$$

в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием Дирихле при $c \in \mathbb{C}$, $|\arg c| < \pi$, $\alpha > 0$.

Оператор $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ имеет компактный обратный, спектр его дискретный, корневые подпространства одномерны [1].

При $0 < |\arg c| < \pi$ он не самосопряжён, более того, обладает плохими спектральными свойствами: норма резольвенты экспоненциально растёт при удалении от спектра [2]; растут нормы спектральных проекторов [3]. В этих условиях оператор не может быть подобным самосопряжённому, его собственные функции не образуют базиса Рисса в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Тем не менее, вопрос полноты его системы собственных функций (с.с.ф.) в $L_2(\mathbb{R}_+)$, вообще говоря, открыт.

Для $\alpha \geq 2$ задача о полноте с.с.ф. $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ вполне исследована [2,4]: система полна при всех $c \in \mathbb{C}$: $|\arg c| < \pi$.

При $\alpha \in (0, 2)$ полнота доказана для $|\arg c| < t_0(\alpha) = 2\pi\alpha/(\alpha + 2)$ [4]. В то же время, при $t_0(\alpha) \leq |\arg c| < \pi$ вопрос почти не изучен, так как является гораздо более сложной задачей. Соответствующие аргументы приводятся в работах [1,4].

Мы покажем, что существует $\Delta t = \Delta t(\alpha) > 0$ (непрерывно зависящее от α) такое, что с.с.ф. $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ полна при $|\arg c| < t_0(\alpha) + \Delta t(\alpha)$.

Сформулируем основной результат работы.

Для комплексных чисел $\zeta = |\zeta|e^{i \arg \zeta}$, $-\pi < \arg \zeta \leq \pi$ и вещественных β , через ζ^β будем обозначать главную ветвь: $\zeta^\beta = |\zeta|^\beta e^{i\beta \arg \zeta}$.

Для $\theta \in [t_0(\alpha), \pi) \cap [t_0(\alpha), \pi\alpha)$, положим

$$\zeta_0(\theta) = e^{i(t_0(\alpha) - \theta)/\alpha}, \quad Z_0(\theta) = (\sin t_0(\alpha) / \sin \theta)^{1/\alpha},$$

и определим функцию

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \Re \left\{ \int_0^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}} d\zeta - 2 \int_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}} d\zeta \right\} = \\ &= \Re \left\{ \int_{\zeta_0(\theta)}^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}} d\zeta - \int_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}} d\zeta \right\}, \end{aligned}$$

где интегрирование ведётся по отрезкам, а ветви корня выбрана так, чтобы

$$\Re \int_0^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}} d\zeta > 0, \quad \Re \int_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}} d\zeta > 0.$$

Теорема. Для любого $\alpha \in (0, 2)$ функция $\rho(\theta)$ имеет единственный ноль $\theta_0(\alpha)$ внутри интервала: $(t_0(\alpha), \pi) \cap (t_0(\alpha), \pi\alpha)$

$$\theta_0(\alpha) = t_0(\alpha) + \Delta t(\alpha), \quad \Delta t(\alpha) > 0.$$

Функция $\theta_0(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \in (0, 2)$.

При $|\arg c| < \theta_0(\alpha)$ с.с.ф. оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ полна в $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Литература

- [1] S. Tumanov. Completeness theorem for the system of eigenfunctions of the complex Schrödinger operator $\mathcal{L}_c = -d^2/dx^2 + cx^{2/3}$ // J. Funct. Anal., 2020, <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108820>
- [2] E. B. Davies. Wild spectral behaviour of anharmonic oscillators // Bull. Lond. Math. Soc., **32**:4, 2000, 432–438
- [3] B. Mityagin, P. Siegl and J. Viola. Differential operators admitting various rates of spectral projection growth // J. Funct. Anal., **272**:8, 2017, 3129–3175
- [4] А. М. Савчук и А. А. Шкаликов. Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функц. анализ и его прил., **51**:1, 2017, 82–98

О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА СФЕРЕ⁷⁴

Туницкий Д. В. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
dtunitsky@yahoo.com

Обозначим через g метрику на сфере \mathbb{S}^2 . Метрика g индуцирует на \mathbb{S}^2 меру $V = V_g$. Положим

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} u(m)v(m) dv.$$

Для краткости будем использовать сокращение *п. в.*, когда речь идет о выполнении каких-либо свойств почти всюду относительно меры V .

Предположим, что наряду с g на \mathbb{S}^2 задана еще одна метрика a . Пусть она измерима и существуют такие положительные числа a_0 и a_1 , что п.в.

$$a_0 g(\eta, \eta) \leq a(\eta, \eta) \leq a_1 g(\eta, \eta) \tag{1}$$

⁷⁴Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

при всех $\eta \in T^*\mathbb{S}^2$. Рассмотрим операторы d_a^* и d_g^* , формально сопряженные с оператором внешнего дифференцирования d относительно метрик a и g соответственно. В частности, $\langle a(du, v), 1 \rangle = \langle a(a, d_a^*v), 1 \rangle$ для всех дифференциальных k -форм u и $(k+1)$ -форм v , $k = 0, 1, \dots$, и $d_a^* = *d*$, где $*$ = $*_a$ – оператор Ходжа, индуцированный метрикой a . Определим на функциях $u \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = \Delta u + bu + d_g^*(uc), \quad (2)$$

где $\Delta = \Delta_a = d_a^* \circ d$ – геометрический лапласиан (оператор Лапласа – де Рама), а b и c – измеримые и ограниченные относительно метрики g векторное поле и линейная дифференциальная форма на \mathbb{S}^2 . Условие (1) означает, что оператор (2) равномерно эллиптивен на \mathbb{S}^2 .

Рассмотрим функцию

$$f : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \ni (x, r) \mapsto f(x, r) \in \mathbb{R},$$

которая удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной u , т.е. для любого $r \in \mathbb{R}$ найдется такая положительная постоянная $\mu_0 = \mu_0(r)$, что для $r_1, r_2 \in [-r, r]$ п.в.

$$|f(\cdot, r_1) - f(\cdot, r_2)| \leq \mu_0(r)|r_1 - r_2|. \quad (3)$$

Слабым решением уравнения

$$Lu = f + d_g^*h, \quad (4)$$

где h – измеримая ограниченная линейная дифференциальная форма на \mathbb{S}^2 , называется такая функция $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$, что $f(\cdot, u) \in L^2(\mathbb{S}^2)$ и

$$\mathcal{L}(u, v) = \langle f(\cdot, u), v \rangle + \langle h, dv \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)}$$

для всякой функции $v \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, где \mathcal{L} – непрерывная билинейная форма

$$\mathcal{L} : W^{1,2}(\mathbb{S}^2) \times C^\infty(\mathbb{S}^2) \ni (u, v) \mapsto \langle a(du, dv), 1 \rangle + \langle bu, v \rangle + \langle uc, dv \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} \in \mathbb{R}.$$

Поскольку оператор L (2) эллиптивен, то эволюционное уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + Lq = f + d_g^*h \quad (5)$$

параболично. Слабым или обобщенным решением уравнения (5) на полуинтервале $[0, T)$, $T \in (0, +\infty]$, принимающим начальное значение

$$q(0) = q_0, \quad (6)$$

$q_0 \in L^2(\mathbb{S}^2)$, называется такая функция $q \in W_{loc}(T; \mathbb{S}^2)$,

$$W(T; \mathbb{S}^2) = L^2(T; W^{1,2}(\mathbb{S}^2)) \cap L^\infty(T; L^2(\mathbb{S}^2)),$$

что $f(\cdot, q) \in L^2_{loc}([0, T) \times \mathbb{S}^2)$ и

$$\langle q(t), p(t) \rangle + \mathcal{L}_t(q, p) = \langle q_0, p(0) \rangle + \int_0^t \left(\langle f(\cdot, q(\tau)), p(\tau) \rangle + \langle h, dp(\tau) \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} \right) d\tau$$

для всякого $p \in C^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2)$ и $t \in [0, T)$, где

$$\mathcal{L} : W(T; \mathbb{S}^2) \times C^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2) \ni (q, p) \mapsto \int_0^t \left(\mathcal{L}(q(\tau), p(\tau)) - \langle q(\tau), p'(\tau) \rangle \right) d\tau \in \mathbb{R}.$$

Функция $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ называется *слабым субрешением (суперрешением)* уравнения (4), если $f(\cdot, u) \in L^2(\mathbb{S}^2)$ и для неотрицательных функций $v \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$

$$\mathcal{L}(u, v) \leq \langle f(\cdot, u), v \rangle + \langle h, dv \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} \quad \left(\mathcal{L}(u, v) \geq \langle f(\cdot, u), v \rangle + \langle h, dv \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} \right).$$

Функция $q \in W_{loc}(T; \mathbb{S}^2) \cap C(T; L^2(\mathbb{S}^2))$ называется *слабым субрешением (суперрешением)* задачи Коши (5), (6) на полуинтервале $[0, T)$, $T \in (0, +\infty]$, если $f(\cdot, q) \in L^2_{loc}([0, T) \times \mathbb{S}^2)$ и для всех неотрицательных функций $p \in C^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2)$

$$\langle q(t), p(t) \rangle + \mathcal{L}_t(q, p) \leq \langle q_0, p(0) \rangle + \int_0^t \left(\langle f(\cdot, q(\tau)), p(\tau) \rangle + \langle h, dp(\tau) \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} \right) d\tau$$

$$\left(\geq \langle q_0, p(0) \rangle + \int_0^t \left(\langle f(\cdot, q(\tau)), p(\tau) \rangle + \langle h, dp(\tau) \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} \right) d\tau \right), \quad t \in [0, T).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема (существование и единственность решения). Пусть метрика $a \in L^\infty((T^*\mathbb{S}^2)^{\otimes 2})$ удовлетворяет оценке (1), векторное поле $b \in L^\infty(T\mathbb{S}^2)$, линейные дифференциальные формы $c, h \in L^\infty(T^*\mathbb{S}^2)$, существует такое число $\mu \in \mathbb{R}$, что

$$\langle c, dv \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} + \langle \mu, v \rangle \geq 0$$

для любой неотрицательной функции $v \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, а функция $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$ и п.в. удовлетворяет условию Липшица (3). Если $q_{1,0}$ и $q_{2,0}$ – слабые субрешение и суперрешение задачи (5), (6) на $[0, T)$, $T \in (0, +\infty]$, и $q_{1,0}, q_{2,0} \in L^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2)$, то на $[0, T)$ существует единственное слабое решение q этой задачи, причем $q_{1,0}(t) \leq q(t) \leq q_{2,0}(t)$ п.в. при $t \in [0, T)$.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ В СЕКТОРЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ⁷⁵

Туров М. М. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет

turov_m_m@mail.ru

Федоров В. Е. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет

kar@csu.ru

Пусть D_t^β – дробная производная Римана – Лиувилля, \mathcal{Z} – банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов на \mathcal{Z} , $\mathbb{R}_+ := \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^n B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^r C_s J_t^{\beta_s} z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geq 0$, $A_j \in Cl(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l \in Cl(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s \in Cl(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, т.е. замкнутые линейные операторы с областями определения $D_{A_1}, D_{A_2}, \dots, D_{A_{m-1}}$, $D_{B_1}, D_{B_2}, \dots, D_{B_n}$, $D_{C_1}, D_{C_2}, \dots, D_{C_r}$ соответственно. Под решением уравнения (1) будем понимать такую функцию $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$, что

⁷⁵Работа выполнена при поддержке РФФ, проект 22-21-20095.

$J_t^{m-\alpha} z \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $J_t^{m-\alpha} z \in C^j(\mathbb{R}_+; D_{A_j})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $J_t^{m_l-\alpha_l} z \in C^{m_l}(\mathbb{R}_+; D_{B_l})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $J_t^{\beta_s} z \in C(\mathbb{R}_+; D_{C_s})$, $s = 1, 2, \dots, r$, и выполняется равенство (1) при $t \in \mathbb{R}_+$. Для уравнения (1) рассмотрим неполную задачу типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \quad k = m^*, m^* + 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

где m^* — так называемый дефект задачи типа Коши [1], который определяется набором чисел $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Обозначим

$$D := \bigcap_{j=1}^{m-1} D_{A_j} \cap \bigcap_{l=1}^n D_{B_l} \cap \bigcap_{s=1}^r D_{C_s},$$

$$R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j - \sum_{l=1}^n \lambda^{\alpha_l} B_l - \sum_{s=1}^r \lambda^{-\beta_s} C_s \right)^{-1} : \mathcal{Z} \rightarrow D.$$

Определение [2]. Набор операторов $(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_r)$ принадлежит классу $\mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если

- (i) D плотно в \mathcal{Z} ;
- (ii) при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0\}$, $p = 0, 1, \dots, m-1$ существуют операторы $R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j \right) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$;
- (iii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a)$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$, $p = 0, 1, \dots, m-1$

$$\left\| R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a| |\lambda|^{\alpha-1}}.$$

Теорема. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l-1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geq 0$, $A_j \in Cl(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l \in Cl(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s \in Cl(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, $(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_r) \in \mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$, $z_k \in D$, $k = m^*, m^* + 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), при этом оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p,$$

где

$$Z_p(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon, r_0}} \lambda^{m-\alpha} R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m-1+j-p} A_j \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

контур $\Gamma_{\varepsilon, r_0} := \Gamma_{\varepsilon, r_0}^+ \cup \Gamma_{\varepsilon, r_0}^- \cup \Gamma_{\varepsilon, r_0}^0$, $\Gamma_{\varepsilon, r_0}^0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_0 - \varepsilon| = r_0 > 0, \arg \lambda \in (-\theta_0 + \varepsilon, \theta_0 - \varepsilon)\}$, $\Gamma_{\varepsilon, r_0}^\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a_0 - \varepsilon) = \pm(\theta_0 - \varepsilon), |\lambda - a_0 - \varepsilon| \in [r_0, \infty)\}$, $\varepsilon \in (0, \theta_0 - \pi/2)$, $r_0 > 0$. При этом решение аналитически продолжимо в сектор $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2, t \neq 0\}$.

Литература

- [1] Федоров В. Е., Туров М. М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2021. Т.62, № 5. С. 1143–1162.
- [2] Fedorov V. E., Du W.-S., Turov M. M. On the unique solvability of incomplete Cauchy type problems for a class of multi-term equations with the Riemann — Liouville derivatives // Symmetry. 2022. Vol. 62, no. 1. P. 75.

О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЭФФЕКТА БОЛЬШОЙ ВОЛНЫ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ДИСКРЕТНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Филимонов А. М. (Россия, Москва)
Российский университет транспорта (МИИТ)
amfilimonov@yandex.ru

Как известно [1], [2], [3], в случае классической задачи о колебаниях нити с бусинами, рассматриваемой на неограниченном промежутке времени, возможен эффект большой волны. Этот эффект может возникнуть, если количество бусин возрастает, оставаясь простым числом, или степенью двойки. В этом случае колебания дискретной цепочки могут тем сильнее отличаться от колебаний непрерывной струны, чем больше число бусин упомянутого вида, ввиду возможности неограниченного (при $N \rightarrow \infty$) превышения значений решений над максимальной величиной начальных условий. Отметим, что, в отличие от эффекта локализации Андерсона [4], в эффекте большой волны массы всех бусин одинаковы (в эффекте Андерсона массы - одинаково распределенные независимые случайные величины, принимающие положительные значения [4]).

В свое время были предприняты попытки [5] перенесения эффекта локализации Андерсона на уравнение Шредингера с дискретной пространственной переменной. Так, в частности, в [5] была рассмотрена модель

$$i\dot{z}_j = z_{j+1} + \varepsilon_j z_j + z_{j-1}, \quad z_0(t) = z_N(t) = 0, \quad z_j = \alpha_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad i^2 = -1, \quad (1)$$

где ε_j - независимые, одинаково распределенные случайные величины, причем $-\varepsilon \leq \varepsilon_j \leq \varepsilon < \infty$, а $t \mapsto z_j(t)$ - аналог волновой функции.

Настоящая работа посвящена анализу возможности возникновения аналога эффекта большой волны в модели (1) при одинаковых значениях $\varepsilon_j = -2$. Основное отличие от механической дискретной цепочки состоит в наличии зависимостей (над кольцом целых чисел) между соответствующими частотами.

Решение задачи (1) может быть построено в явном виде

$$z_j(t) = e^{i2t} \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin\left(\frac{\pi k}{N} j\right) e^{-i2\omega_k t}, \quad \omega_k = \cos \frac{\pi k}{N}, \quad a_k = \frac{2}{N} \sum_{r=1}^{N-1} \alpha_r \sin\left(\frac{\pi k}{N} r\right).$$

Введем обозначение

$$d_j^N = \sum_{k=1}^{N-1} \left| a_k \sin\left(\frac{\pi k}{N} j\right) \right|.$$

Теорема 1. Пусть $\alpha_j = 1$ ($j = 1, \dots, N-1$), $N = 2^m$. Тогда

$$\sup_t |z_j(t)| = d_j^N. \quad (2)$$

Теорема 2. Справедлива следующая асимптотическая оценка

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_j^N = C \ln j + O(1), \quad (3)$$

где C - некоторая константа.

Из (2) и (3) следует, что при сделанных предположениях, существуют моменты времени t , в которые при $N = 2^m$ и $m \rightarrow \infty$ величина $|z_j(t)|$, неограниченно возрастает с ростом j , откуда и следует возможность появления эффекта большой волны в модели (1). Более подробный анализ показывает, что поскольку модуль решения является почти-периодической функцией, то таких моментов времени - счетное относительно плотное множество [6].

Литература

- [1] Filimonov A. M., Kurchanov P. F., Myshcis A. D. Some unexpected results in the classical problem of the strings with N beads when N is large. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris t. 313, Serie 1, 1991, p. 961 - 965.*

- [2] Filimonov A.M. Some unexpected results on the classical problem of the string with N beads. The case of multiple frequencies. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris t. 315, Serie 1*, 1992, p. 957-961.
- [3] Myshkis A.D., Filimonov A.M. About the string with beads. *Journal "Matematicheskaya Fizika, Analiz i Geometriya"* which will be devoted to Prof. V.A. Marchenko 80th Anniversary. 10, 3, 2003, p. 301-306.
- [4] Андерсон Ф. Локальные моменты и локализованные состояния. *Успехи физических наук*, т. 127, 1, 1979, с. 19 - 39.
- [5] Ishii K. Localization of Eigenstates and Transport Phenomena in the One-Dimensional Disordered Systems. *Progress in Theoretical Physics, Supplement*, v. 53, 1973, p. 77-138.
- [6] Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М., ГТТИ, 1953, 396 с.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГЕНЕРАТОРОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ РАЗРЕШАЮЩИХ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ⁷⁶

Филин Н. В. (Россия, Челябинск)

Челябинский Государственный Университет
nikolay_filin@inbox.ru

Федоров В. Е. (Россия, Челябинск)

Челябинский Государственный Университет
kar@csu.ru

Пусть \mathcal{Z} — банахово пространство, $Cl(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в \mathcal{Z} , действующих в пространство \mathcal{Z} . Обозначим $S_{\theta,a} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\}$ при $\theta \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, оператор $A \in Cl(\mathcal{Z})$ принадлежит классу $\mathcal{A}_{\{\omega_k\}}(\theta_0, a_0)$, если удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, что $\sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \left(\sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|}.$$

В [1] показано, что $A \in \mathcal{A}_{\{\omega_k\}}(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда существует аналитическое в секторе, симметричном относительно \mathbb{R}_+ , разрешающее семейство операторов.

Теорема. Пусть $\omega_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n > 2$, $A \in \mathcal{A}_{\{\omega_k\}}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$. Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Литература

- [1] Федоров В.Е., Филин Н.В. Линейные уравнения с дискретно распределенной дробной производной в банаховых пространствах // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2021. Т. 27, № 2. С. 264–280.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ ПЛАСТИН И БАЛОК С УСЛОВИЯМИ НЕПРОНИКАНИЯ

Фурцев А. И. (Россия, Новосибирск)

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
al.furtsev@mail.ru

В докладе будут представлены результаты исследования ряда краевых задач о контакте пластин и тонких балок, выполняющих роль препятствий по отношению к

⁷⁶Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и Вьетнамской академией науки и технологии, проект 21-51-54003.

пластинам. Согласно используемой модели, в исследуемых задачах речь идет о равновесии контактирующих пластин и балок, которые подвержены изгибу. При этом множество точек, в которых после изгиба происходит контакт, до решения является неизвестным. Одновременно при постановке задач на множестве возможного контакта задаются краевые условия, не допускающие механически нежелательное явление взаимного проникновения. С математической точки зрения указанные условия представляют собой односторонние ограничения в виде неравенств на неизвестные решения.

Основополагающий подход, применяемый для анализа исследуемых задач, состоит в использовании их вариационных постановок. Также исследована связь указанных вариационных постановок с краевыми задачами. Дальнейший анализ направлен на изучение зависимости решений от геометрических и механических параметров задач. Большое внимание уделено исследованию предельных переходов по малым параметрам, вопросам асимптотики функционалов энергии, дифференцируемости энергии, а также отысканию соответствующей производной.

Литература

- [1] Фурцев А. И. О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2017. Т. 17. No. 4. С. 94–111.
- [2] Фурцев А. И. Дифференцирование функционала энергии по длине отслоения в задаче о контакте пластины и балки // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 935–949.
- [3] Фурцев А. И. Задача о контакте пластины и балки при наличии сцепления // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. No. 2. С. 105–117.
- [4] Фурцев А. И. Задача об одностороннем контакте пластины Тимошенко и тонкого упругого препятствия // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 364–379.
- [5] Фурцев А. И. Производная энергии для конструкции, состоящей из пластины и тонкой балки // Математические заметки СВФУ. 2021. Т. 28. No. 2. С. 68–87.

О СИСТЕМАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНОВСКОГО ТИПА НА ПОЛУПРЯМОЙ⁷⁷

Хачатрян Х. А. (Армения, Ереван)
Ереванский Государственный Университет
khachatur.khachatryan@ysu.am

Рассматриваются системы интегральных уравнений Гаммерштейновского типа с монотонными нелинейностями. Такие системы возникают в различных областях естествознания. В частности, системы указанного характера встречаются в теории переноса излучения в неоднородных средах, в кинетической теории газов и в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии. Сперва мы будем исследовать соответствующие квазилинейные системы интегральных уравнений и докажем теорему существования однопараметрического семейства ограниченных нетривиальных решений. Затем будут изучены некоторые качественные свойства построенных решений. Далее, используя эти результаты, мы займемся исследованием системой интегральных уравнений с сильной нелинейностью на положительной полупрямой. Для этой системы мы докажем конструктивную теорему существования ограниченного решения и исследуем асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. В конце доклада приведем частные примеры соответствующих матричных ядер и нелинейностей для иллюстрации полученных результатов.

⁷⁷Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

Хлопин Д. В. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

khlopin@imm.uran.ru

Рассмотрим задачу управления на бесконечном промежутке:

$$\min \int_0^\infty f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau,$$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad y(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \text{Limsup}_{\theta \uparrow \infty} \{y(\theta)\} \subset \mathcal{C}_\infty.$$

Будем предполагать выполненными следующие гипотезы:

- (H0) \mathcal{C}_∞ и U замкнуты в \mathbb{R}^m и некотором конечномерном евклидовом пространстве;
- (H1) отображения $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $f_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны по (x, u) и борелевские по t ;
- (H2) у всякого борелевского управления $u \in B(\mathbb{R}_+; U)$ поле $(t, x) \mapsto f(t, x, u(t))$ удовлетворяет условию подлинейного роста, порождает при любом начальном условии $y(0) = \bar{x}$ единственное (на \mathbb{R}_+) решение $t \mapsto y(\bar{x}, u; \cdot)$, при этом $t \mapsto f_0(t, y(\bar{x}, u; t), u(t))$ локально суммируемо. Более того, у отображений $(t, x) \mapsto f(t, x, u(t))$ и $(t, x) \mapsto f_0(t, x, u(t))$ производные по x существуют, непрерывны по x и локально суммируемы по t .

Зададим функционал качества правилом:

$$J(\bar{x}, u; \theta) = \int_0^\theta f_0(t, y(\bar{x}, u; t), u(t)) dt \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^m, u \in B(\mathbb{R}_+; U), \theta \in \mathbb{R}_+.$$

В качестве критерия оптимальности выберем слабо обгоняющий критерий, а именно: будем говорить, что управление $\hat{u} \in B(\mathbb{R}_+; U)$ *слабо обгоняюще оптимально*, если

$$\limsup_{\theta \uparrow \infty} [J(x, u; \theta) - J(x, \hat{u}; \theta)] \geq 0 \quad \forall u \in B(\mathbb{R}_+; U).$$

Введем для всех $(x, \psi, u, \lambda, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m,*} \times U \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ гамильтониан

$$H(x, \psi, u, \lambda, t) = \psi f(t, x, u) - \lambda f_0(t, x, u).$$

Теорема. Пусть выполнены предположения (H0)–(H2). Пусть управление $\hat{u} \in B(\mathbb{R}_+; U)$ слабо обгоняюще оптимально.

Тогда найдется ненулевая пара $(\psi, \lambda) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{m,*}) \times \{0, 1\}$, удовлетворяющая условию максимизации гамильтониана

$$\sup_{v \in U} H(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), v, \lambda, t) = H(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), \hat{u}(t), \lambda, t)$$

и сопряженной системе

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), \hat{u}(t), \lambda, t)$$

для почти всех неотрицательных $t > 0$, а также условию трансверсальности

$$-\psi(0) \in N(x_0; \mathcal{C}_{\text{as}}) + \text{co} \limsup_{\substack{x_n \rightarrow x_0, \lambda_n \downarrow \lambda, \theta_n \uparrow \infty \\ J(x_n, \hat{u}; \theta_n) - J(x_0, \hat{u}; \theta_n) \rightarrow 0}} \left\{ \lambda_n \frac{\partial J}{\partial x}(x_n, \hat{u}; \theta_n) \right\}, \quad (1)$$

где $N(x_0; C_{as})$ — нормальный предельный конус Кларка в точке x_0 к множеству

$$C_{as} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{Limsup}_{\theta \uparrow \infty} \{y(x, \hat{u}; \theta)\} \subset C_\infty\}$$

тех позиций x , начиная с которых управление \hat{u} соблюдает терминальное условие.

Без условия трансверсальности необходимость принципа максимума Понтрягина хорошо известна; см. [1]. Особенность теоремы выше — не требующее никаких дополнительных асимптотических предположений необходимое краевое условие (1).

Отметим, что в ряде случаев условие (1) можно и упростить, например, при $C_\infty = \mathbb{R}^m$ нормальный конус в условии (1) становится нулевым и его можно опустить. Если градиенты по x от $J(x, \hat{u}; \theta)$ равномерно ограничены по (x, θ) , то можно присвоить $\lambda = 1$, в (1) заменить нормальный конус Кларка на нормальный предельный конус, дополнительно в верхнем пределе потребовав $x_n \in C_{as}$. Наконец, как показывает контрпример в [2], даже при очень мягких предположениях, без выпуклой оболочки условие (1) перестает быть необходимым для настолько слабого критерия как слабо обгоняющая оптимальность.

Литература

- [1] Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // *Econometrica*. 1974. Vol. 42. P.267–272.
- [2] Khlopin D.V. Necessary conditions in infinite-horizon control problem that need no asymptotic assumptions // arXiv preprint arXiv:1910.12092

О ПОВЫШЕННОЙ СУММИРУЕМОСТИ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ p -ЛАПЛАСА⁷⁸

Чечкина А. Г. (Россия, Москва)
МГУ имени М.В. Ломоносова
chekhina@gmail.com

В докладе представлены результаты, полученные совместно с Ю.А. Алхутовым.

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ такова, что $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ и множество $F \subset \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ замкнуто. Определим соболевское пространство функций $W_p^1(D, F)$ как пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F функций, по норме

$$\|v\|_{W_p^1(D, F)} = \left(\int_D |v|^p dx + \int_D |\nabla v|^p dx \right)^{1/p}.$$

Априори предполагается выполненным неравенство Фридрикса

$$\|v\|_{L_p(D)} \leq C \|\nabla v\|_{L_p(D)}. \quad (1)$$

Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = l \quad \text{в } D, \quad u = 0 \quad \text{на } F, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } G, \quad (2)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает внешнюю нормальную производную функции u , а l является линейным функционалом на $W_p^1(D, F)$.

Под решением задачи (2) понимается функция $u \in W_p^1(D, F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi dx$$

⁷⁸Работа поддержана грантом РНФ (проект 22-21-00292).

для всех пробных функций $\varphi \in W_p^1(D, F)$. Здесь $f = (f_1, f_2)$, а функции $f_i \in L_{p'}(D)$, где $p' = p/(p-1)$, участвуют в представлении функционала l . Такое представление функционала вытекает из (1) и теоремы Хана-Банаха.

Определим для компакта $K \subset \mathbb{R}^2$ емкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < 2$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \varphi|^q dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый круг радиуса r с центром в точке x_0 и в случае $1 < p \leq 2$ предполагается, что при $q = (p+1)/2$ выполнено следующее условие: для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \leq 1$ справедливо неравенство

$$C_q(F \cap \bar{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{2-q}, \quad (3)$$

в котором положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r .

Если $p > 2$, то предполагается, что множество F не пусто: $F \neq \emptyset$.

Теорема. Если $f \in L_{p'+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, то существует положительная постоянная $\delta < \delta_0$, зависящая только от δ_0 и p , такая, что для решения задачи (2) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{p'(1+\delta/p)} dx,$$

в которой константа C зависит только от p , δ_0 и величины c_0 из (3) при $1 < p \leq 2$, а при $p > 2$ только от p и δ_0 .

Во всех рассматриваемых случаях неравенство (1) выполнено, что влечет однозначную разрешимость задачи (2),

Аналогичные результаты для линейного эллиптического уравнения второго порядка получены в работах [1] и [2].

Литература

- [1] Ю. А. Алхутов, Г. А. Чечкин, Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона // Доклады РАН, Т. 497 (2, 2021). С. 3-6.
- [2] Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form // CR Mécanique, V. 349 (2, 2021). P. 299–304.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ САХАРНОГО ДИАБЕТА 1 ТИПА НА СОСУДЫ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Черевко А. А. (Россия, Новосибирск)
Институт гидродинамики СО РАН
cherevko@mail.ru

Валова Г. С. (Россия, Новосибирск)
Институт гидродинамики СО РАН

Акулов А. Е. (Россия, Новосибирск)
Институт цитологии и генетики СО РАН

Паршин Д. В. (Россия, Новосибирск)
Институт гидродинамики СО РАН

Тур Д. А. (Россия, Новосибирск)
Институт цитологии и генетики СО РАН

Сахарный диабет I типа (инсулинозависимый) – тяжелое аутоиммунное заболевание, при котором нарушенный иммунитет уничтожает клетки поджелудочной железы, отвечающие за производство инсулина. Течение заболевания характеризуется постепенным поражением

многих органов (в частности сердца, кровеносной системы, нервной системы, почек, органов зрения).

В кровоснабжении головного мозга важную роль играет Виллизиев круг - комплекс крупных артерий, распределяющий кровь на входе в мозговую кровеносную сеть. Хотя диабет вызывает в первую очередь поражение мелких сосудов (капилляров), но интересным и важным является вопрос о том, приводят ли изменения в функционировании кровеносной системы и адаптация к этим изменениям, к изменениям геометрии и гемодинамического режима Виллизиевого круга.

Для ответа на этот вопрос в работе использовалось сочетание экспериментальных методов и математического моделирования. В работе используется генетическая линия мышей NODSCID (ИЦиГ СО РАН). Данная линия мышей высокочувствительна к искусственно вызванному сахарному диабету I типа. Экспериментальная группа состояла из 15, а контрольная из 17 животных. Изменения в геометрии кровеносной системы по мере развития диабета отслеживалось с помощью томографических исследований на базе SPF-вивария ИЦиГ СО РАН. Для получения данных МРТ использовался томограф Bruker BioSpec с силой поля 11,7 Тл. После получения и обработки томографических данных гемодинамически значимые параметры определялись на основе математического моделирования. Течение крови описывалось уравнениями Навье-Стокса для трехмерного движения несжимаемой, вязкой жидкости. Статистический анализ полученных результатов показал, что у животных с сахарным диабетом длительностью 2 месяца наблюдаются более выраженные статистически значимые различия как в ангиоархитектонике так и в гемодинамике, чем у животных с сахарным диабетом длительностью 1 месяц. Это справедливо как для стационарного, так и для нестационарного моделирования.

Таким образом показано, что с увеличением продолжительности заболевания сахарный диабет I типа начинает влиять на гемодинамику и строение даже крупных сосудов головного мозга.

ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СВЕРТКИ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННЫХ СДВИГОВ⁷⁹

Чкалова Д. Г. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
darya.vasilchenkova@mail.ru

Кондакова Е. Н. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
kebox@mail.ru

Рассмотрим задачу построения точной квадратурной формулы для свертки вещественного ядра $w(x) \in L_1$ и тригонометрического многочлена $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \tau_k(x)$, $\tau_k(x) := a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $x, a_k, b_k \in \mathbb{R}$:

$$I(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cdot T_n(x-t) dt. \quad (1)$$

В качестве аппарата будем использовать амплитудно-фазовый оператор (АФО) – преобразование вида

$$H(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; x) := \sum_{j=1}^n X_j \cdot T_n(x - \lambda_j),$$

где λ_j, X_j – свободные вещественные параметры (некоторые X_j могут быть нулевыми). Порядок АФО не превышает n и равен числу слагаемых в $H(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; x)$, в которых

⁷⁹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90010.

$\exp(i\lambda_j)$ попарно различны, а $X_j \neq 0$. АФО введены и применялись в работах [1],[2],[3] для выделения из тригонометрических многочленов $T_n(x)$ гармоник и сумм гармоник, построения точных двусторонних оценок типа Фейера и Бернштейна для многочленов $T_n(x)$ и их производных.

Так, в работе [3] приведен численный алгоритм выделения с помощью АФО взвешенных гармоник. А именно, для набора вещественных весов $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ сумма взвешенных гармоник многочлена $T_n(x)$ имеет вид

$$\mathcal{T}(T_n, p; x) := \sum_{p_k \in p} p_k \tau_k(x). \quad (2)$$

Тогда задача о представлении (2) в виде АФО:

$$a_0 \cdot \sum_{j=1}^n X_j + \mathcal{T}(T_n, p; x) = H(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; x). \quad (3)$$

С помощью задачи (3) удалось получить точные квадратурные формулы для свертки (1) в случае четных и нечетных ядер $w(x)$. Объединяя эти формулы, получаем следующее представление (1) для произвольного ядра $w(x) \in L_1$:

$$I(x) + a_0(\omega - p_0) = H(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; x) + H(\tilde{T}_n, \{\tilde{X}_j\}, \{\tilde{\lambda}_j\}; x), \quad (4)$$

где $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) dx$, $\omega = \sum_{j=1}^n X_j$, $p_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) dx$; $\tilde{T}_n = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx - b_k \cos kx$ – многочлен, сопряженный к T_n ; $\{X_j\}, \{\lambda_j\}$ – параметры АФО для задачи (3) с весами $p_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \cos kx dx$; $\{\tilde{X}_j\}, \{\tilde{\lambda}_j\}$ – параметры АФО для задачи (3) с весами $p_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \sin kx dx$.

Приведем численный пример (с округлением коэффициентов до второго знака после запятой). Для ядра $w(x) = \sin(x - x^2)$ и произвольного многочлена $T_3(x)$ формула (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x - x^2) \cdot T_3(x - t) dt + 0.52 a_0 &= 0.15 (T_3(x - 2.76) + T_3(x + 2.76)) + 0.03 T_3(x) + \\ &+ 0.22 (\tilde{T}_3(x - 2.34) + \tilde{T}_3(x + 2.34)) + 0.23 \tilde{T}_3(x). \end{aligned}$$

Литература

- [1] Васильченкова Д. Г., Данченко В. И. Выделение гармоник из тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами // Алгебра и анализ. 2020. Т. 32. №2. С. 21–44.
- [2] Васильченкова Д. Г., Данченко В. И. Выделение нескольких гармоник из тригонометрических многочленов. Неравенства типа Фейера // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сб. ст., Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 101–115.
- [3] Danchenko V. I., Chkalova D. G. Bernstein-type estimates for the derivatives of trigonometric polynomials // Probl. Anal. Issues Anal. 2021. Vol. 10(28). №3. P. 31–40.

Шамолин М. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Известно [1, 2, 3], что наличие достаточного количества не только первых интегралов, но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт достаточно естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими (асимптотическими) предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [4, 5, 6].

Как показано ранее, задача о движении $(n + 1)$ -мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, т.е. в “потоке набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее n -мерное пространство”, приводит к системе на касательном расслоении к n -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В дальнейшем также разобраны задачи о движении точки по многомерным поверхностям вращения, в пространствах Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [5].

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким n -мерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Литература

- [1] Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912, 340 pp.
- [2] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. №5. С.763–766.
- [3] Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. №1(445). С. 117–148.
- [4] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
- [5] Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. №1. С. 105–111.
- [6] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. №1. С. 95–101.
- [7] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН. 2012. Т. 442. №4. С. 479–481.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ЭМБОЛИЗАЦИИ АРТЕРИОВЕНОЗНОЙ МАЛЬФОРМАЦИИ⁸⁰

Шарифуллина Т. С. (Россия, Новосибирск)
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
tatiana_06.08@mail.ru

Черевко А. А. (Россия, Новосибирск)
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
cherevko@mail.ru

Петренко И. А. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет
petrenko_irina@bk.ru

Остапенко В. В. (Россия, Новосибирск)
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
ostapenko@hydro.nsc.ru

Артериовенозная церебральная мальформация (АВМ) является врожденной патологией развития сосудов головного мозга, при которой артериальное и венозное кровеносные русла соединены напрямую клубком беспорядочно переплетенных вырожденных сосудов, минуя капиллярную сеть. Наиболее предпочтительным методом лечения данных патологий является эмболизация - это малоинвазивное хирургическое вмешательство, представляющее собой внутрисосудистое заполнение клубка патологических сосудов АВМ специальным жидким твердеющим веществом (эмболический агент) с целью блокирования кровотока через них. Данный способ хирургического вмешательства широко применяется, но до сих пор в некоторых случаях сопровождается интраоперационным разрывом сосудов мальформации. Целью работы является математическое моделирование данного процесса и построение на этой основе оптимизационного алгоритма эмболизации артериовенозной мальформации.

В данной работе для описания процесса эмболизации предлагается комбинированная модель, в которой наряду с течением крови и эмболического агента в АВМ учитывается окружающий патологию кровотоки. Процесс эмболизации моделируется как процесс многокомпонентной фильтрации, где вытесняемой фазой является кровь, а вытесняющей эмболический агент; полученные уравнения решаются численно с помощью монотонной модификации схемы CABARET [1].

Основная цель работы заключается в отыскании оптимального с точки зрения безопасности и эффективности сценария эмболизации артериовенозной мальформации. Целевой функционал и ограничения, возникающие в такой задаче оптимального управления, выбираются в соответствии с медицинскими показаниями. Управлением является зависящая от времени функция, определяющая объемный расход эмболического агента на входе в АВМ. Сформулирована и для специального закона подачи этого вещества численно решена задача оптимального управления эмболизацией методом роя частиц.

При изучении задачи оптимальной эмболизации использовались фильтрационные и гемодинамические характеристики, построенные с помощью приближения клинических данных, полученных во время мониторинга гемодинамических параметров во время нейрохирургических операций в НМИЦ им. Мешалкина [2].

Литература

- [1] Остапенко В. В., Черевко А. А. Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476. № 5. С. 518-522.
- [2] Cherevko A. A. et al. Modelling of the arteriovenous malformation embolization optimal scenario // Royal Society open science. 2020. Vol. 7. №. 7. P. 191992.

⁸⁰Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90096.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СТРУНЫ
СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ ВЕСОМ⁸¹

Шаров Е. Б. (Россия, Москва)

МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
eugeneshar@yandex.ru

Рассматривается задача

$$-y'' = \lambda \rho y, \quad x \in (0; 1) \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где вес $\rho(x) = \sum_{l=1}^{\infty} m_l \delta(x - x_l)$. Точки x_l и коэффициенты m_l выбираются специальным образом: первообразная P веса ($P' = \rho$ и производная понимается в обобщенном смысле) удовлетворяет уравнению самоподобия, т.е. является самоподобной функцией, а для произвольной функции $y \in \dot{W}_2^1[0; 1]$ отображение $y \mapsto \rho y$ является некомпактным мультипликатором из пространства $\dot{W}_2^1[0; 1]$ в двойственное пространство $\dot{W}_2^{-1}[0; 1]$. Коэффициенты m_l можно объединить в группы по $n - 1$ членов в каждой группе так, что выполнено равенство $m_{j+(n-1)k} = d^k m_j$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, $k = 0, 1, \dots$ ($d \neq 0$). Параметр самоподобия d называется *вертикальным масштабирующим множителем*. Такие веса называются n -звенными самоподобными весами. Стоит разделять задачу на две: с весом, у которого все коэффициенты m_i одного знака, и на задачу, когда не все m_i одного знака.

Теорема 1. Пусть коэффициенты m_i имеют один знак, тогда спектр задачи состоит из не более чем $n - 1$ отрезка непрерывного спектра. Может быть не более чем $n - 2$ собственных значений, не более одного в лакунах непрерывного спектра.

В случае, когда все скачки положительны, задача равносильна спектральной задаче для оператора, который подобен самосопряженному оператору в виде Якобиевой матрицы. В этом случае явно указаны границы непрерывного спектра и получен критерий появления собственных значений в лакунах.

В другом случае, когда не все m_i одного знака, задача равносильна спектральной задаче для оператора, который подобен J -самосопряженному оператору в виде комплексной симметричной Якобиевой матрицы.

Теорема 2. Пусть не все коэффициенты m_i имеют один знак, тогда непрерывный спектр задачи предствляет собой множество $\{\lambda \mid L_n(\lambda) \in [-2, 2]\}$ для некоторого многочлена $L_n(\lambda)$ с комплексными коэффициентами.

Явно указаны границы непрерывного спектра и получен критерий появления собственных значений в лакунах для случая "знакопостоянного" веса.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СТРУНЫ
С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ МАСШТАБИРУЮЩИМ МНОЖИТЕЛЕМ⁸²

Шейпак И. А. (Россия, Москва)

МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики
iasheip@mail.ru

Рассматривается задача

$$-y'' = \lambda \rho y, \quad x \in (0; 1) \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где вес $\rho(x) = \sum_{l=1}^{\infty} m_l \delta(x - x_l)$. Точки x_l и коэффициенты m_l выбираются специальным образом: первообразная P веса ($P' = \rho$ и производная понимается в обобщенном смысле) удовлетворяет уравнению самоподобия, т.е. является самоподобной функцией, а

⁸¹Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 20-11-20261)

⁸²Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 20-11-20261)

для произвольной функции $y \in \dot{W}_2^1[0;1]$ отображение $y \mapsto \rho y$ является некомпактным мультипликатором из пространства $\dot{W}_2^1[0;1]$ в двойственное пространство $\dot{W}_2^{-1}[0;1]$. Коэффициенты m_l можно объединить в группы по $n-1$ членов в каждой группе так, что выполнено равенство $m_{j+(n-1)k} = d^k m_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, $k = 0, 1, \dots$ ($d \neq 0$). Параметр самоподобия d называется *вертикальным масштабирующим множителем*. Такие веса называются n -звенными самоподобными весами. Спектральные свойства задачи сильно зависят от знака d .

Теорема 1. Пусть $d > 0$, тогда спектр задачи состоит из не более чем $n-1$ отрезка непрерывного спектра. Может быть не более чем $n-2$ собственных значений, не более одного в лакунах непрерывного спектра.

Явно указаны границы непрерывного спектра и получен критерий появления собственных значений в лакунах.

Случай отрицательного масштабирующего множителя существенно отличается от положительного.

Теорема 2. Пусть $d < 0$, тогда спектр задачи состоит из не более чем $2n-2$ отрезков непрерывного спектра. Может быть не более чем $2n-3$ собственных значения, не более одного в лакунах непрерывного спектра.

Явно указаны границы непрерывного спектра и получен критерий появления собственных значений в лакунах.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ⁸³

Шкалик А. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
ashkaliko@yandex.ru

Пучком операторов в спектральной теории называют операторный полином

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda A_m.$$

Здесь $A_j, 0 \leq j \leq m$, ограниченные или неограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Такие спектральные задачи возникают при разделении временной или пространственной переменной в уравнении

$$A_0 u + A_1 \frac{du}{dt} + \dots + A_m \frac{d^m u}{dt^m} = 0,$$

где $u = u(t)$ — функция со значениями в пространстве H . Постановка спектральных задач для пучков существенно зависит от природы соответствующего уравнения. В докладе будут сформулированы постановки задач для гиперболических и эллиптических уравнений и приведены общие теоремы для соответствующих им пучков. Здесь в качестве иллюстрации мы приведем некоторые результаты для относительно простого волнового (гиперболического) уравнения с демпфированием, для которого эти результаты являются новыми. Это уравнение и спектральная задача для него рассматривались в нескольких работах, в частности, в статье Д.И.Борисова и Р.Фрайтаса (Jour. Diff. Equations, **247** (2009). 3028-3039), где имеются подробные ссылки. Здесь выпишем только спектральную задачу, получающуюся после преобразования Лапласа этого уравнения:

$$v''_{xx} - (\lambda^2 + 2\lambda b(x) - q(x))v = 0, \quad x \in (0, 1),$$

где функция $v = v(x)$ подчинена краевым условиям $v(0) = v(1) = 0$. Эту задачу представим как задачу на собственные значения для пучка операторов в гильбертовом пространстве $H = L_2[0, 1]$:

$$L(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 I,$$

⁸³Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 20-11-20261.

где $Ay = -y'' + q(x)y$ — оператор Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле, B — оператор умножения на функцию b , I — тождественный оператор. Функции b и q для простоты считаем непрерывными.

Обозначим через W_D^2 подпространство коразмерности 2 в соболевском пространстве $W_2^2 = W_2^2[0, 1]$, состоящее из функций, подчиненных краевым условиям Дирихле. Через $H_{2\theta} = [W_2^2, L_2]_\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$ обозначим соответствующие интерполяционные пространства. Для простоты предположим, что все собственные значения $\{\lambda_k\}$ пучка $L(\lambda)$ простые (можно показать, что для этого пучка только конечному числу собственных значений могут отвечать жордановы цепочки) и им отвечают собственные функции $y_k = y_k(x)$. Минимум и максимум функции b обозначим через b_- и b_+ .

Теорема 1. Производные по Келдышу цепочки $y_k = \{y_k, \lambda_k y_k\}$ образуют безусловный базис в пространствах $\mathcal{H}_\theta = \mathcal{H}_\theta \oplus H_{\theta-1}$ при $\theta \in [1, 2]$. В частности, задача Коши для уравнения

$$L(d/dt)u(t) = 0, \quad u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi, \quad t \geq 0,$$

с начальными условиями $\{\varphi, \psi\} \in \mathcal{H}_2$ имеет единственное классическое решение, которое представляется рядом

$$u(t) = \sum_k c_k y_k(x) e^{\lambda_k t}.$$

Этот ряд безусловно сходится при $t \geq 0$ в пространстве H_2 и остается безусловно сходящимся в пространстве H_1 после дифференцирования по переменной t . Здесь c_k — числовые коэффициенты, которые выражаются явными формулами через операторы A и B .

Теорема 2. Все не вещественные собственные значения пучка $L(\lambda)$ лежат в полосе $-b_+ \leq \operatorname{Re} \lambda \leq -b_-$, число вещественных собственных значений конечно, причем в случае $b(x) \geq 0$ число положительных собственных значений пучка (индекс неустойчивости) совпадает с учетом кратности с числом отрицательных собственных значений оператора Штурма-Лиувилля A .

ЗАДАЧА СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ⁸⁴

Шуклина А. Ф. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет
isaf@csu.ru

Плеханова М. В. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет
mariner79@mail.ru

Пусть \mathcal{Z} — рефлексивное банахово пространство, \mathcal{U} — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, пространство управлений $\mathcal{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой $\|(u, v)\|_{\mathcal{U}}^2 = \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^2 + \|v\|_{\mathcal{Z}^m}^2$. Рассмотрим задачу смешанного управления

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + \sum_{k=1}^n N_k(t) D_t^{\alpha_k} z(t) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \quad (1)$$

$$z^{(k)}(t_0) = v_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

$$(u, v) = (u, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \quad (3)$$

$$J(z, u, v) = \|z - z_d\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \delta \|u - u_d\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^q + \delta_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k - v_{dk}\|_{\mathcal{Z}}^2 \rightarrow \inf, \quad (4)$$

⁸⁴Исследование выполнено при поддержке Гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

где \mathcal{U}_δ — множество допустимых управлений, $\mathcal{U}_\delta \subset \mathfrak{U}$, заданы $z_d \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $v_{dk} \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$, $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $q \geq 1$.

Решения задачи (1), (2) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \equiv \left\{ z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) : J_t^{m-\alpha} \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z}) \right\}.$$

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\alpha_n \leq m-1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, отображения $N_k : (t_0, T) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ измеримы и существенно ограничены на (t_0, T) , $k = 1, 2, \dots, n$; $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$. Предположим, что \mathcal{U}_δ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство \mathfrak{Y} , которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{Z}_1)$. Тогда при $\delta > 0$ задача (1) – (4) имеет решение $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\delta$.

Литература

- [1] Plekhanova M. V., Degenerate distributed control systems with fractional time derivative // Ural Mathematical Journal. 2016. С. 58–71.
- [2] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ⁸⁵

Щелчков К. А. (Россия, Ижевск)

Удмуртский государственный университет

incognitobox@mail.ru

Рассматриваются две дифференциальные игры двух лиц. Первая игра $\Gamma(x_0)$ описываемая системой вида

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v), \quad x(0) = x_0, \quad u \in U, \quad v \in V,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$, $U = \{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^l$ — множество значений управления преследователя, $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт — множество значений управления убегающего. Целью преследователя является приведение траектории системы в любую наперед заданную окрестность нуля за конечное время. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию, для построения которой разрешается использовать только информацию о значении фазовых координат в точках разбиения временного интервала. Управление убегающего — измеримая функция, для построения которой нет ограничений по доступной информации. В [1] получены достаточные условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит ε -поймка, которая означает перевод системы в сколь угодно малую окрестность нуля за конечное время. В настоящем исследовании рассматривается вспомогательная система $\dot{y} = w$, $w \in D_\rho(0)$, $y(0) = x_0$, $y \in \mathbb{R}^k$, где $D_\rho(0)$ — замкнутый шар радиуса ρ с центром в нуле. Пусть задано произвольное измеримое управление $w : [0, T] \rightarrow D_\rho(0)$ такое, что $\|y(t)\| \leq r$, $y(T) = 0$. При этом ρ не превосходит некоторого положительного числа. Считаем, что $r < \varepsilon_0$, ε_0 — радиус окрестности нуля, из каждой точки которой происходит ε -поймка. Показано, что в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε -поймка за время T с выполнением следующего условия: для любого $\delta > 0$ и любого $t \in [0, T]$ справедливо неравенство $\|x(t) - y(t)\| \leq \delta$.

Вторая игра $\Gamma(x_0, \dot{x}_0)$ описываемая системой вида

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, u) + g(x, \dot{x}, v), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad u \in U, \quad v \in V,$$

⁸⁵Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010 "Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем" и гранта РФФИ (проект 20-01-00293).

где $x, \dot{x} \in \mathbb{R}^k$. Здесь U, V , управление убегающего, ε -поймка определяются аналогично. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию, для построения которой разрешается использовать только информацию о значении фазовых координат и скорости в точках разбиения временного интервала. В [2] получены достаточные условия существования окрестности нуля $O_{\varepsilon_0}(0)$ такой, что для любых $x_0, \dot{x}_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0, \dot{x}_0)$ происходит ε -поймка. Аналогично, реализуется ε -поймка относительно системы вида $\ddot{y} = w, w \in D_\rho(0), y(0) = x_0, \dot{y}(0) = \dot{x}_0, y \in \mathbb{R}^k$.

Так как управление $w(\cdot)$ вспомогательной системы является произвольным с учетом указанных фазовых ограничений и краевых условий, то его можно выбрать оптимальным в соответствии с произвольным критерием качества. Относительная оптимальность понимается здесь как возможность ε -поймки при движении сколь угодно близко к некоторому оптимальному решению вспомогательной системы.

Литература

- [1] Щелчков К.А., Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 111–118. DOI: 10.20537/vm180110
- [2] Shchelchikov K. ε -Capture in Nonlinear Differential Games Described by System of Order Two // Dyn Games Appl (2021). <https://doi.org/10.1007/s13235-021-00393-0>

Научное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Тезисы докладов

Суздаль
30 июня – 5 июля 2022 г.

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка О. Корнеевой, Р. Тихомирова, А. Черниковой

Подписано в печать 20.06.2022
Формат 60x84/16. Бумага офсетная 80 г/м². Гарнитура Таймс.
Печать лазерная. Усл. печ. лист 12,09. Заказ № 8206. Тираж 200 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО «Аркам»
Владимир, ул. Кирова, д. 14г
Тел.: 8 (4922) 53-41-50
e-mail: print@arkprint.ru
www.arkprint.ru

<http://agora.guru.ru/diff-2022/>, diff@vlsu.ru

<http://agora.guru.ru/diff-2022>