

Математические основания квантовой механики

Программа курса лекций Г.Г. Амосова

Математическая аксиоматика квантовой механики приводит к возникновению новой математической дисциплины – некоммутативной теории вероятностей. Как и в обычной теории вероятностей появляются понятия случайной величины, математического ожидания, дисперсии, ковариации и корреляции. Тем не менее, свойства таких привычных характеристик часто отличны от их классических аналогов.

1. Аксиоматика квантовой механики. Проекторы как квантовые события. Меры на решётке проекторов. Теорема Глизона. Квантовые состояния. Положительные операторнозначные меры. Квантовые измерения.

2. Случай проекторнозначных мер. Спектральная теорема. Квантовые наблюдаемые. Дискретный и непрерывный спектры. Как построить пространство волновых функций, отвечающих квантовой наблюдаемой. Квантовый осциллятор. Когерентные состояния.

3. Теорема Наймарка о дилатации положительных операторнозначных мер. Примеры положительных операторнозначных мер, не являющихся проекторнозначными в конечномерном и бесконечномерном пространствах. Ковариантные положительные операторнозначные меры. Теорема об общем виде ковариантной меры в конечномерном пространстве.

4. Распределение вероятностей для пары состояние-наблюдаемая. Математическое ожидание, дисперсия и ковариация наблюдаемой. Соотношение неопределённости Шрёдингера-Робертсона.

5. Случай квантовых наблюдаемых, являющихся линейными комбинациями операторов координаты и импульса. Квантование Вейля. Дробное преобразование Фурье и его связь с квантовым осциллятором.

6. Различные характеристические функции квантового состояния. Функция Вигнера, функция Хусими-Кано. Преобразование Радона. Симплектическая квантовая томограмма. Квантовые наблюдаемые как обобщённые функции на пространстве квантовых состояний.

7. Составные квантовые системы. Сепарабельные и сцепленные состояния. Проверка сцепленности состояния. Свидетели сцепленности.

8. Классические и квантовые корреляции. Неравенство Белла – Клаузера – Шимони. Граница Цирельсона. Пространственные и коммутационные корреляции. Опровержение гипотезы Цирельсона о совпадении классов корреляций.

9. Квантовые каналы. Разложение Крауса и его неединственность. Примеры квантовых каналов: кодирующий и измеряющий каналы, каналы разрушающие сцепленность, каналы Вейля.

10. Операторные системы (некоммутативные операторные графы). Связь с квантовыми каналами. Квантовые коды, исправляющие ошибки (квантовые антиклики). Передача информации с нулевой ошибкой. Квантовая суперактивация.

Литература.

1. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

2. Дж. Макки. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.

3. И. фон Нейман. Математические основания квантовой механики. М.: Наука, 1964.

4. А.С. Холево. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: МЦНМО, 2018.

5. А.С. Холево. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.