МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА»
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

Девятая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Самара, Россия
21–26 августа 2021 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Ninth School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Samara, Russia
August 21–26, 2021

ABSTRACTS

Одобрено редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

САМАРА
Издательство Самарского университета
2021

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1
Д259

Д259 **Девятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Самара, Россия, 21–26 августа 2021 г.: тезисы докладов.** — Самара: Издательство Самарского университета, 2021. — 66 с.

ISBN 978–5–7883–1645–1

Сборник содержит тезисы докладов участников Девятой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», проводившейся в Самаре с 21 по 26 августа 2021 года. Сборник содержит научную информацию и адресован научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

ISBN 978–5–7883–1645–1 © Самарский университет, 2021

Предисловие

Девятая школа-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Самаре с 21 по 26 августа 2021 года. Организаторы: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Научно-учебная лаборатория алгебраических групп преобразований, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН), г. Москва. Информацию о предыдущих школах-конференциях см. на сайте `http://halgebra.math.msu.su/alg_conf/main.shtml`.

Программный комитет школы-конференции: И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), В.А. Артамонов (МГУ им. М.В. Ломоносова), Н.А. Вавилов (СПбГУ), М.Х. Гизатуллин (Самара), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), А.С. Клещёв (Университет Орегона, США), А.Н. Панов (Самарский университет), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), Е.Б. Фейгин (НИУ ВШЭ, Сколтех), В.И. Черноусов (Университет Альберты, Канада), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), К.А. Шрамов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: В.В. Сергеев (Самарский университет, председатель), А.А. Буханько (Самарский университет, заместитель председателя), А.Н. Панов (Самарский университет, заместитель председателя), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, заместитель председателя), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), М.В. Игнатьев (Самарский университет), В.В. Севостьянова (Самарский университет), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), С.А. Гайфуллин (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.И. Чистопольская (НИУ ВШЭ), М.А. Сурков (Самарский университет), М.С. Венчаков (Самарский университет).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Кристаллы и канонические базисы в теории представлений*
  (Глеб Алексеевич Кошевой, НИУ ВШЭ, Москва, Россия);

- *Дискретные группы, порождённые комплексными отражениями* (Владимир Леонидович Попов, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия);

- *Тэта-группы Винберга* (Дмитрий Андреевич Тимашёв, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия);

- *Полиномы Макдональда и представления алгебр токов* (Антон Сергеевич Хорошкин, НИУ ВШЭ, Москва, Россия).

Сборник содержит тезисы докладов участников школы-конференции.

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Фонда Саймонса и Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение №075–15–2019–1614).

Оргкомитет

Максимальные разрешимые алгебры Лейбница, нильрадикалом которых является квази-филиформная алгебра Лейбница

К.К. Абдурасулов, Ж.К. Адашев
Институт математики им. В.И. Романовского при АН РУз, Ташкент, Узбекистан
abdurasulov0505@mail.ru, adashevjq@mail.ru

Напомним, что для конечномерных алгебр Лейбница над полем характеристики нуль существует аналог разложения Леви: любая алгебра Лейбница разлагается в полупрямую сумму полупростой алгебры Ли и ее разрешимого радикала [1]. Поэтому, как и в случае Ли, основная проблема изучения алгебр Лейбница сводится к разрешимым.

Целью данной работы является описание разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикалом которых является естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Лейбница, и с максимальной размерностью дополняющего пространства к нильрадикалу. А именно, естественным образом градуированные квази-филиформные алгебры Лейбница в любой конечной размерности над $\mathbb{C}$ изучена в работе [2]. Отметим, что с точностью до изоморфизма существует пять таких алгебр первого типа, две из которых зависят от параметра, и восемь алгебр второго типа, одна из которых зависит от параметра. Естественным образом градуированные квази-филиформные алгебры Ли были классифицированы в [3]. Здесь существует шесть семейств, два из которых разложимые, то есть разлагаются в прямую сумму идеалов, а также существуют некоторые частные случаи, которые появляются только в малых размерностях.

Определение 1. Алгебра Лейбница L называется квазифилиформной, если $L^{n-2} \neq \{0\}$ и $L^{n-1} = \{0\}$, где $n = \dim L$.

Теорема 1 [2]. Если L — естественным образом градуированная квазифилиформная алгебра Лейбница, то она изоморфна одной алгебре неизоморфных семейств

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma): \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+\alpha e_2, & [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n, \quad [e_{n-1},e_{n-1}]=\gamma e_n, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma): \begin{cases} [e_1,e_1]=e_2, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_3]=-e_4+\beta e_2, & [e_1,e_i]=-e_{i+1}, & 4\le i\le n-1,\\ [e_3,e_3]=\gamma e_2, & [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^i\alpha e_n, & 3\le i\le n-1, \end{cases}$$

где $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ является базисом алгебры, и в алгебре $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ если n нечётное, то $\alpha\in\{0,1\}$, а если n чётное, то $\alpha=0$.

Следующая теорема описывает максимальные размерности дополняющих пространств до $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Предложение 1. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикал которой является естественным образом градуированной квазифилиформной нелиевой алгеброй Лейбница. Тогда максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу не более двух.

Мы даем описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалами $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ такими, что размерность дополняющих подпространств максимальна.

Теорема 2. Не существует разрешимой алгебры Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$, у которой максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна единице.

Теорема 3. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна двум. Тогда R изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$R^1_{n+2}(0,\beta,0):$

$$\begin{cases} [e_i,x]=ie_i, & 1\le i\le n-2, \quad [e_n,x]=e_n, \quad [x,e_1]=-e_1, \quad [x,e_n]=\beta e_n,\\ [e_{n-1},y]=e_{n-1}, & [e_n,y]=e_n, \quad [y,e_{n-1}]=\beta e_{n-1}, \quad [y,e_n]=\beta e_n, \quad \beta\in\{-1,0\}, \end{cases}$$

$R^2_{n+2}(0,1,1):$

$$\begin{cases} [e_1,x]=e_1-e_{n-1}, & [e_2,x]=2e_2-2e_n, \quad [e_i,x]=ie_i, \quad 3\le i\le n-2,\\ [x,e_1]=-e_1+e_{n-1}, & [e_1,y]=e_{n-1}, \quad [e_2,y]=2e_n, \quad [e_{n-1},y]=e_{n-1},\\ [e_n,y]=2e_n, & [y,e_1]=-e_{n-1}, \quad [y,e_{n-1}]=-e_{n-1}, \end{cases}$$

$R^3_{n+2}(1,0,0):$

$$\begin{cases} [e_1,x]=e_1-e_{n-1}, & [e_2,x]=e_2-e_n, \quad [e_i,x]=(i-1)e_i, \quad [e_n,x]=2e_n,\\ [x,e_1]=-e_1+e_{n-1}, & [e_1,y]=e_{n-1}, \quad [e_2,y]=e_2+e_n, \quad [e_i,y]=e_i,\\ [e_{n-1},y]=e_{n-1}, & 3\le i\le n-2, \end{cases}$$

где учтено, что каждая разрешимая алгебра имеет свои умножения нильрадикала, а остальные произведения равны нулю.

Теорема 4. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ и максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна единице. Тогда R изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$H^1_{n+1}(0,0,1),\ H^2_{n+1}(1,2,0),\ H^3_{n+1}(1,0,\gamma),\ H^4_{n+1}(1,-2,1),\ H^5_{n+1}(1,4,2).$$

Приведём классификацию разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ и двумерным дополняющим векторным подпространством к нильрадикалу.

Теорема 5. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ и максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна двум. Тогда R изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$H^1_{n+2}(0,0,0),\ H^2_{n+2}(0,1,0),\ H^3_{n+2}(0,2,1),\ H^4_{n+2}(1,0,0),\ H^5_{n+2}(1,1,0),\ H^6_{n+2}(1,2,1).$$

Заключение. Таким образом, из вышеизложенного и полученных результатов видно, что классификация разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалами $\mathcal{L}(1,-1,0)$, $\mathcal{L}(1,0,0)$, $\mathcal{G}(1,1,0)$, $\mathcal{G}(1,2,1)$, у которых размерность дополняющего пространства равна единице, остаётся открытой проблемой. Для других алгебр проблема была решена.

Список литературы

[1] D.W. Barnes. On Levi's theorem for Leibniz algebras. Bull. Aust. Math. Soc. **86** (2012), no. 2, 184–185.

[2] L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. J. Symbolic Comput. **44** (2009), no. 5, 527–539.

[3] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán. Naturally graded quasi-filiform Lie algebras. J. Algebra **256** (2002), no. 1, 221–228.

Локальное дифференцирование естественно градуированных квазифилиформных алгебр Лейбница

Ж.К. Адашев, Б.Б. Юсупов

Институт математики им. В.И. Романовского при АН РУз, Ташкент, Узбекистан

adashevjq@mail.ru, baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

В последние годы неассоциативные аналоги классических конструкций вызывают интерес в связи с их приложениями во многих областях математики и физики. Понятия локального и 2-локального дифференцирования также становятся популярными для некоторых неассоциативных алгебр, таких, как алгебры Ли и Лейбница.

Понятия локальных дифференцирований были введены в 1990 г. Р.В. Кадисоном [11] и Д.Р. Ларсоном, А.Р. Сууром [12]. Позже, в 1997 году, П. Щемрл ввел понятия 2-локальных дифференцирований и 2-локальных автоморфизмов на алгебрах [10].

Основные проблемы, связанные с этими понятиями, состоят в том, чтобы найти условия, при которых все локальные (2-локальные) дифференцирования становятся (глобальными) дифференцированиями, и представить примеры алгебр с локальными (2-локальными) дифференцированиями, которые не являются дифференцированиями.

Исследование локальных дифференцирований на алгебрах Ли было начато в статье [1]. Ш.А. Аюпов и К.К. Кудайбергенов доказали, что любое локальное дифференцирование на полупростых алгебрах Ли является дифференцированием, и привели примеры нильпотентных конечномерных алгебр Ли с локальными дифференцированиями, не являющимися дифференцированиями. В [4] исследуются локальные дифференцирования разрешимых алгебр Ли и показано, что в классе разрешимых алгебр Ли существуют алгебры, допускающие локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями, а также алгебры, для которых каждое локальное дифференцирование является дифференцированием. Более того, доказано, что всякое локальное дифференцирование на конечномерной разрешимой алгебре Ли с модельным нильрадикалом и максимальной размерностью дополнительного пространства является дифференцированием. Ш.А. Аюпов, А.Х. Худойбердиев и Б.Б. Юсупов доказали аналогичные результаты о локальных дифференцированиях на разрешимых алгебрах Лейбница в своей недавней статье [5]. В [6] автор доказал, что любое локальное дифференцирование на разрешимых алгебрах Лейбница, нильрадикал которых является квазифилиформной алгеброй Лейбница максимальной длины с максимальной размерностью дополнительного пространства к нильрадикалу, является дифференцированием. Кроме того, исследуется аналогичная проблема, касающаяся 2-локальных дифференцирований таких алгебр.

В [2] исследуются локальные дифференцирования и автоморфизмы комплексных конечномерных простых алгебр Лейбница, и доказывается, что все локальные дифференцирования на конечномерных комплексных простых алгебрах Лейбница являются автоматически дифференцированными, и показано, что филиформные алгебры Лейбница допускают локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями. Результаты статьи [3] показали, что p -филиформные алгебры Лейбница, как правило, допускают локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.

В данной статье мы описываем локальные дифференцирования квазифилиформной алгебры Лейбница и показываем существование локального дифференцирования, которое не является дифференцированием.

Определение 1. Векторное пространство с билинейной скобкой $(L, [\cdot,\cdot])$ называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - \big[[x,z],y\big].$$

Для данной алгебры Лейбница $(L, [\cdot,\cdot])$ последовательность двусторонние идеалы рекурсивно определяются следующим образом:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1.$$

Эта последовательность называется нижним центральным рядом L.

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется нильпотентной, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $L^n = \{0\}$.

Легко видеть, что сумма двух нильпотентных идеалов нильпотентна. Следовательно, максимальный нильпотентный идеал существует всегда. Максимальный нильпотентный идеал алгебры Лейбница называется нильрадикалом алгебры.

Определение 3. Линейное отображение $d\colon L \to L$ алгебры Лейбница $(L, [\cdot,\cdot])$ называется дифференцированием, если для всех $x, y \in L$ выполняется условие:

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]\,. \tag{1}$$

Множество всех дифференцирований L обозначается $Der(L)$, оно является алгеброй Ли относительно коммутатора.

Для данного элемента x алгебры Лейбница L оператор правого умножения $\mathcal{R}_x\colon L \to L$, определенный как $\mathcal{R}_x(y) = [y, x], y \in L$, является дифференцированием. Фактически, алгебры Лейбница характеризуются этим свойством относительно операторов правого умножения. Такие дифференцирования называются внутренними.

Определение 4. Линейный оператор Δ называется локальным дифференцированием, если для любого $x \in \mathcal{L}$, существует дифференцирование $D_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (в зависимости от x) такой, что $\Delta(x) = D_x(x)$.

Ниже мы определим понятие квазифилиформной алгебры Лейбница.

Определение 5. Алгебра Лейбница L называется квазифилиформной, если $L^{n-2} \neq \{0\}$ и $L^{n-1} = \{0\}$, где $n = \dim L$.

Для n-мерной нильпотентной алгебры Лейбница L такой, что $L^{s-1} \neq \{0\}$ и $L^s = \{0\}$, положим $L_i = L^i/L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$ и $gr(L) = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_{s-1}$. Благодаря $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$ мы получаем градуированную алгебру $gr(L)$. Если $gr(L)$ и L изоморфны, $gr(L) \cong L$, мы говорим, что L *естественно градуирован.*

Пусть x — нильпотентный элемент множества $L \setminus L^2$. Для нильпотентного оператора правого умножения $\mathcal{R}_x$ определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, где $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, который состоит из размерностей жордановых блоков оператора $\mathcal{R}_x$. На множестве таких последовательностей рассмотрим лексикографический порядок, то есть $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \leq C(y) = (m_1, m_2, \ldots, m_t) \Leftrightarrow$ существует $i \in \mathbb{N}$ такое, что $n_j = m_j$ для любого $j < i$ и $n_i < m_i$.

Определение 6. Последовательность $C(L) = \max\limits_{x \in L \setminus L^2} C(x)$ называется характеристической последовательностью алгебры L.

Пусть L — n-мерная естественно градуированная квазифилиформная нелиевая алгебра Лейбница, имеющая характеристическую последовательность $(n-2, 1, 1)$ или $(n-2, 2)$. Первый случай (случай 2-филиформ) изучался в [9], а второй — в [8]. В [3] уже доказано, что p-филиформные алгебры Лейбница, как правило, допускают локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированиями.

Определение 7. Квазифилиформная нелиевая алгебра Лейбница L называется алгеброй типа I (соотв., типа II), если существует элемент $x \in L \backslash L^2$ такой, что оператор R_x имеет вид $\begin{pmatrix} J_{n-2} & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$ (соотв., $\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_{n-2} \end{pmatrix}$).

В следующей теореме, полученной в [8], приведена классификация естественно градуированных квазифилиформных алгебр Лейбница.

Теорема 1. Произвольная n-мерная естественно градуированная квазифилиформная алгебра Лейбница типа I изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр семейств:

$$\mathcal{L}_n^{1,\beta}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 1 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n, \ \beta \in \mathbb{C} \end{cases} \qquad \mathcal{L}_n^{2,\beta}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 1 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n, \ \beta \in \{0,1\} \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_n^{3,\beta}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 1 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n, \ \beta \in \{-1,0,1\} \end{cases} \qquad \mathcal{L}_n^{4,\gamma}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 1 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n, \ \gamma \ne 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_n^{5,\beta,\gamma}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 1 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n, \ (\beta, \gamma) = (1,1) \ \mathit{or} \ (2,4) \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n, \end{cases}$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис алгебры.

Теорема 2. Произвольная n-мерная естественно градуированная квазифилиформная алгебра Лейбница типа II изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных семейств алгебр: n чётное

$$\mathcal{L}_n^{1}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \end{cases} \qquad \mathcal{L}_n^{2}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_3] = e_2 - e_4, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 4 \le i \le n-1, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_n^{3}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_3, e_3] = e_2, \end{cases} \qquad \mathcal{L}_n^{4}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_1, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_3] = 2e_2 - e_4, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 4 \le i \le n-1, \\ [e_3, e_3] = e_2, \end{cases}$$

n нечётное, $\mathcal{L}_n^1, \mathcal{L}_n^2, \mathcal{L}_n^3, \mathcal{L}_n^4,$

$$\mathcal{L}_n^{5}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i e_n, \ 3 \le i \le n-1, \end{cases} \qquad \mathcal{L}_n^{6,\beta}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_3] = \beta e_2 - e_4, \ \beta \in \{1,2\}, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 4 \le i \le n-1, \\ [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i e_n, \ 3 \le i \le n-1, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_n^{7,\gamma}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_3, e_3] = \gamma e_2, \ \gamma \ne 0, \\ [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i e_n, \ 3 \le i \le n-1, \end{cases} \qquad \mathcal{L}_n^{8,\beta,\gamma}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_3] = \beta e_2 - e_4, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 4 \le i \le n-1, \\ [e_3, e_3] = \gamma e_2, \ (\beta, \gamma) = (-2,1), (2,1) \text{ или } (4,2), \\ [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i e_n, \ 3 \le i \le n-1, \end{cases}$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ является базисом алгебры.

Изучение естественно градуированной квазифилиформной алгебры Лейбница соответствующего типа из теорем 1 и 2 можно упростить следующим образом (см. [7]).

Предложение 1. Пусть L — естественно градуированная квазифилиформная алгебра Лейбница, тогда она изоморфна одной из алгебр следующих неизоморфных семейств

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma):\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+\alpha e_2, & [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n, \quad [e_{n-1},e_{n-1}]=\gamma e_n,\end{cases}$$

$$\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\leq i\leq n-1,\\ [e_1,e_3]=-e_4+\beta e_2, & [e_1,e_i]=-e_{i+1}, & 4\leq i\leq n-1,\\ [e_3,e_3]=\gamma e_2, & [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^i\alpha e_n, & 3\leq i\leq n-1,\end{cases}$$

где $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ – базис алгебры; более того, в алгебре $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ если n нечетно, то $\alpha\in\{0,1\}$, если n четно, то $\alpha=0$.

Теперь мы изучаем локальные дифференцирования на алгебрах $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Теорема 3. Алгебры $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ допускают локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированиями.

Список литературы

[1] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Local derivation on finite dimensional Lie algebras. Linear Algebra and its Applications **493** (2016), 381–398.

[2] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.A. Omirov B. Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society **43** (2020), 2199-–2234.

[3] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.B. Yusupov. Local and 2-local derivations of p-filiform Leibniz algebras. Journal of Mathematical Sciences **245** (2020), no. 3, 359–367.

[4] Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev. Local derivations on solvable Lie algebras. Linear and Multilinear Algebra **69** (2021), 1286–1301.

[5] Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev, B.B. Yusupov B. Local and 2-local derivations of Solvable Leibniz algebras. International Journal of Algebra and Computation **30** (2020), no. 6, 1185–1197.

[6] Sh.A. Ayupov, B.B. Yusupov. Local and 2-local derivation on solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length. Karakalpak Scientific Journal **3** (2020), no. 1, 4–15.

[7] L.M. Camacho, E.M. Cañete, J.R. Gómez, B.A. Omirov. Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length. Siberian Mathematical Journal **52** (2011), no. 5, 840–853.

[8] L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. Journal of Symbolic Computation **44** (2010), no. 5, 527–539.
[9] L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov. Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras. Communications in Algebra **38** (2010), no. 10, 3671–3685.
[10] P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proceedings of the American Mathematical Society **125** (1997), 2677–2680.
[11] R.V. Kadison. Local derivations. Journal of Algebra **130** (1990), 494–509.
[12] D.R. Larson, A.R. Sourour. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **51** (1990), no. 2, 187–194.

$3j$-символы для представлений алгебры $\mathfrak{gl}_n$

Д.В. Артамонов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
artamonov.dmitri@gmail.com

Пусть даны неприводимые конечномерные представления V, W, U алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$. Предположим, что в них выбраны базисы Гельфанда-Цетлина $\{v_\alpha\}$, $\{w_\beta\}$, $\{u_\gamma\}$. Тогда $3j$-символом называется набор чисел

$$\begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\alpha & w_\beta & u\gamma \end{pmatrix}^s \tag{1}$$

таких, что величина

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\alpha & w_\beta & u\gamma \end{pmatrix}^s v_\alpha \otimes w_\beta \otimes u\gamma$$

является $\mathfrak{gl}_n$-инвариантной. При этом $3j$-символы с одинаковыми внутренними индексами образуют линейное пространство. Индекс s индексирует базисные $3j$-символы с одинаковыми внутренними индексами.

Легко понять, что задача вычисления $3j$-символов в сущности эквивалентна задаче нахождения коэффициентов Клебша–Гордана, осуществляющих явное разложение тензорного произведения двух неприводимых представлений.

Последняя задача активно обсуждалась в работах, прежде всего связанных с приложениями в квантовой механики. До настоящего момента сложился такой взгляд на проблему явного нахождения коэффициентов Клебша–Гордана: эта задача легко решается для $n = 2$. Она решается явно, но очень сложно для $n = 3$, а при $n > 3$ можно лишь писать рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять эти коэффициенты алгоритмически. При этом считалось, что простых и явных формул не существует уже при $n \geqslant 3$.

Тем не менее, оставалась надежда получить такие формулы за счёт использования специальных функций, за счёт интерпретации разных частей возникающих формул геометрически (это, в частности, спрашивается в одной из задач Арнольда).

В докладе я расскажу о том, как явные и простые (и даже очень простые для случая $n = 3$) формулы для произвольного $3j$-символа получить всё-таки удается!

Ключевым фактом будет использование теории обобщённых A-гипергеометрических функций и систем дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют.

Для решения данной задачи будет использована реализация представления в пространстве функций на соответствующей группе Ли, а также построена новая реализация, называемая А-ГКЗ. В процессе решения этой большой задачи будут даны ответы на такие важные вопросы:

1. Какие функции отвечают векторам Гельфанда–Цетлина в этих реализация?

2. Какие функции задают инвариантные векторы в тройном тензорном произведении?

Явная формула для обратного автоморфизма алгебры Вейля

А.Д. Бережной

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

berezhnoyad@yandex.ru

Если задан автоморфизм φ некоторой алгебры A, то как, зная φ, получить φ^{-1}?

Например, если алгебра является кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{K}\left[\left[x_1, \ldots, x_n\right]\right]$, а φ является автоморфизмом этой алгебры, то явное описание φ^{-1} даёт формула Абьянкара [1]. Пусть $h_i\left(x_1, \ldots, x_n\right) := \varphi\left(x_i\right) = x_i + \ldots$[1], то есть $h_i(0) = 0$ и $\partial_{x_j} h_i(0) = \delta_{ij}$ — символ Кронекера, тогда для любого $F \in \mathbb{K}\left[\left[x_1, \ldots, x_n\right]\right]$ имеем:

$$\varphi^{-1}(F)\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial_{x_i}^{k_i}}{k_i!}\right) \left(F\left(x_1, \ldots, x_n\right) \left(\prod_{i=1}^{n} \left(x_i - h_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)^{k_i}\right)\right),$$

[1] Данное условие требуется для сходимости рядов.

где под $\mathbb{N}_0$ понимаются целые неотрицательные числа. В частности, эта формула будет верна и для автоморфизма кольца многочленов от n переменных, удовлетворяющих условиям.

Если же имеется автоморфизм φ кольца многочленов $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$, то можно использовать немного другую формулу, которая не накладывает никаких условий на сам автоморфизм, а именно если $h_i(x_1,\ldots,x_n) := \varphi(x_i)$, то тогда для любого многочлена $F(x_1,\ldots,x_n)$ имеем:

$$\varphi^{-1}(F)(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0^n}\left(\prod_{i=1}^n \frac{\Delta_i^{k_i}}{k_i!}\right) F(x_1,\ldots,x_n)\left(\prod_{i=1}^n (x_i - h_i(x_1,\ldots,x_n))^{k_i}\right),$$

где $\Delta_i(h) = \{h_1,\ldots,h_{i-1},h,h_{i+1},\ldots,h_n\} / \{h_1,\ldots,h_n\}$, под $\{h_1,\ldots,h_n\}$ понимается якобиан многочленов $h_1,\ldots,h_n$, то есть $\{h_1,\ldots,h_n\} = \det\left(\partial_{x_j} h_i\right)$. Можно сказать, что данная формула обобщает формулу Крамера для обращения линейного автоморфизма. Заметим, что дифференцирования Δ_i коммутируют между собой в соответствующей алгебре Ли, поэтому произведение дифференцирований от порядка сомножителей не зависит.

Рассмотрим теперь алгебру Вейля W_n, то есть ассоциативную алгебру над полем $\mathbb{K}$, порождённую $\partial_1,\ldots,\partial_n,x_1,\ldots,x_n$ со следующими соотношениями:

$$[\partial_i,\partial_j] = 0 \quad [\partial_i,x_j] = \delta_{ij} \quad [x_i,x_j] = 0.$$

Автоморфизм же алгебры Вейля, соответственно, должен сохранять все эти коммутационные соотношения.

Теорема 1. *Пусть φ — автоморфизм алгебры Вейля W_n, $p_i := \varphi(\partial_i)$, $q_j := \varphi(x_j)$. Тогда для любого элемента $F \in W_n$ имеем:*

$$\varphi^{-1}(F) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0^{2n}}\left(\prod_{i=1}^n \frac{\partial_i^{k_i}}{k_i!}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{N}_0^{2n}}\left(\prod_{i=1}^n \frac{(-p_i)^{l_i}}{l_i!}\right)\Delta_{1,\ldots,2n}^{k+l}(F)\left(\prod_{i=1}^n \frac{(-q_i)^{l_{i+n}}}{l_{i+n}!}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{k_{i+n}}}{k_{i+n}!}\right),$$

где

$$\Delta_{1,\ldots,2n}^{k} = \Delta_{1,\ldots,2n}^{k_1,\ldots,k_{2n}} = \prod_{i=1}^{2n}\Delta_i^{k_i},$$

$$\Delta_i(F) = \begin{cases}[F,q_i]\,, i\leqslant n,\\ [p_{i-n},F]\,, i>n.\end{cases}$$

Заметим, что элементы во всех произведениях между собой коммутируют, следовательно, все произведения в формуле корректно определены, аналогично все дифференцирования Δ_i между собой коммутируют. При этом сама формула при сужении её на кольцо многочленов совпадает с предыдущей формулой.

Список литературы

[1] H. Bass, E.H. Connell, D. Wright. The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse. Bulletin of the American Mathematical Society (New Series) **7** (1982), no. 2, 287–330.

Некоммутативные алгебраические моноиды на нормальных аффинных поверхностях

Б.И. Билич
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
`bilichboris1999@gmail.com`

Доклад основан на работе автора [1].

Мы классифицируем все двумерные нормальные некоммутативные аффинные алгебраические моноиды. Оказывается, что все такие моноиды являются торическими многообразиями. Мы построим биекцию между классами изоморфизма моноидов и множеством выпуклых конусов, удовлетворяющих некоторым свойствам. Более того, мы напишем явную формулу для соответствующих некокоммутативных коумножений на торических поверхностях. Для коммутативных моноидов всё это было сделано ранее в работе [2].

Список литературы

[1] B. Bilich. Classification of noncommutative monoid structures on normal affine surfaces, arXiv: `math.AG/2106.04884` (2021).
[2] S. Dzhunusov, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine surfaces. Forum Math. **33** (2021), no. 1, 177–191.

Носители характеров глубины 2 унитреугольной группы над конечным полем

М.С. Венчаков

Самарский университет, Самара, Россия

mihail.venchakov@gmail.com

Пусть $U = U_n$ — унитреугольная группа, то есть группа верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ с единицами на диагонали над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_n$ — её алгебра Ли, состоящая из верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали, а $\mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}_n^*$ — двойственное к ней пространство (оно естественно отождествляется с помощью формы следа с пространством нижнетреугольных матриц с нулями на диагонали). Группа U действует на алгебре Ли $\mathfrak{u}$ присоединённым образом; двойственное действие в пространстве $\mathfrak{u}^*$ называется *коприсоединённым.*

Согласно методу орбит А.А. Кириллова, орбиты коприсоединённого действия находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми комплексными конечномерными представлениями группы U (мы предполагаем, что $p = \operatorname{char} \mathbb{F}_q \geqslant n$). А именно, неприводимый характер $\chi = \chi_\Omega$, соответствующий орбите $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$, вычисляется по формуле

$$\chi(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\mu \in \Omega} \theta(\mu(\ln(g))),\ g \in U.$$

Здесь $\ln \colon U \to \mathfrak{u}$ — изоморфизм аффинных многообразий, действующий по стандартной формуле для логарифма, а $\theta \colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ — произвольный фиксированный нетривиальных гомоморфизм.

Классификация орбит для произвольного n является дикой задачей. С другой стороны, описание орбит максимальной размерности было получено ещё в самой первой работе Кириллова по методу орбит [1]. А именно, каждая такая орбиты является орбитой единственной линейной формы вида $f = \sum_{\alpha \in D_0} \xi(\alpha) e_\alpha$. Здесь $D_0 = \{(n-j+1, j),\ 1 \leqslant j \leqslant n_0 = [n/2]\}$, $\xi \colon D \to \mathbb{F}_q^\times$ — произвольное отображение, а $e_\alpha = e_{i,j}$ для $\alpha = (i, j)$ (в случае чётного n допускается также ситуация $\xi(n_0 + 1, n_0) = 0$). Явное описание соответствующих характеров (мы будем называть их характеры *глубины* 0) вытекает из результатов работы К. Андре [2]. Более точно, для каждого такого характера χ он описал явными уравнениями его *носитель*

$$\operatorname{Supp}(\chi) = \{g \in U \mid \chi(g) \neq 0\}$$

и вычислил значение характера χ на произвольном классе сопряжённости из носителя.

Орбиты предмаксимальной размерности были описаны в работе М.В. Игнатьева и А.Н. Панова [4]. Соответствующие им характеры были вычислены в работе М.В. Игнатьева [3]. В частности, к ним относятся характеры глубины 1, соответствующие орбитам линейных форм вида $f = \sum_{\alpha \in D_1} \xi(\alpha) e_\alpha$, где $D_1 = D_0 \cup \{(n-1,1),(n,2)\} \setminus \{(n,1),(n-1,2)\}$. Основной метод, использованный при доказательстве, — метод полупрямого разложения Макки [7] (см. также [6]). Этот метод сводит изучение неприводимых характеров группы вида $A \rtimes B$, где A абелева, к неприводимым характерам группы A и их централизаторов в группе B. Выбирая $A = \{g \in U \mid g_{i,j} = 0 \text{ при } i > j > 1\}$, $B = \{g \in U \mid g_{i,1} = 0 \text{ при } i > 1\} \cong U_{n-1}$, можем свести вычисление соответствующих характеров к характерам глубины 0, описание которых уже известно.

Следующим естественным шагом является рассмотрение характеров глубины 2, соответствующих орбитам линейных форм вида $f = \sum_{\alpha \in D_2} \xi(\alpha) e_\alpha$, где $D_2 = (D_0 \cup \{(n-1,1),(n-2,2),(n,3)\}) \setminus \{(n,1),(n-1,2),(n-2,3)\}$. Метод полупрямого разложения Макки позволяет свести вычисление таких характеров к характерам глубины 1, описание которых уже известно. Основной результат, который я представлю в докладе, заключается в явном описании носителей характеров глубины 2 с помощью уравнений. Доклад основан на совместной работе с М.В. Игнатьевым [5].

Список литературы

[1] А.А. Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН **17** (1962), 57–110.

[2] C.A.M. Andrè. Basic characters of the unitriangular group. J. Algebra **175** (1995), 287–319.

[3] M.V. Ignatyev. Subregular characters of the unitriangular group over a finite field J. Math. Sci. **156** (2009), no. 2, 276–291, arXiv: `math.RT`/0801.3079.

[4] M.V. Ignatyev, A.N. Panov. Coadjoint orbits of the group $\mathrm{UT}(7, K)$. J. Math. Sci. **156** (2009), no. 2, 292–312, arXiv: `math.RT`/0603649.

[5] M.V. Ignatev, M.S. Venchakov. The supports for characters of depth 2 of the unitriangular group, preprint.

[6] G.I. Lehrer. Discrete series and the unipotent subgroup. Compositio Math. **28** (1974), fasc. 1, 9–19.

[7] G.W. Mackey. Infinite dimensional group representations. Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 628–686.

Структурные теоремы с использованием функций МакКея

Г.В. Воскресенская
Самарский университет, Самара, Россия
galvosk@mail.ru

Мы используем классические обозначения теории модулярных форм, их можно найти в монографии [2]. Известна классическая структурная теорема теории модулярных форм:

$$S_k(\Gamma) = \eta^{24}(z) \cdot M_{k-12}(\Gamma), \ k \geqslant 12.$$

В 1985 году в работе [1] был получен полный список эта-произведений с мультипликативными коэффициентами целого веса. Имеется ровно 28 таких функций, их называют функциями МакКея, и знаменитая Δ-функция $\Delta(z) = \eta^{24}(z)$ является одной из них. В работе [3] было показано, что классическое точное рассечение для $S_k(\Gamma)$ замечательно обобщается на все функции МакКея. Любая из этих функций определяет точное рассечение пространства $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ для своего минимального уровня N. Обратно, при уровне $N \neq 3, 17, 19$ точное рассечение таких пространств возможно только функциями МакКея для соответствующих уровней. При $N = 3$ возможны две рассекающие функции в точном рассечении, одна из них — функция МакКея. При $N = 17, 19$ рассекающие функции в точном рассечении не являются даже эта-частными. Точное рассечение существует только для 29 значений уровней (для уровня 4 существует две функции МакКея). Но функция МакКея является также параболической формой для кратных уровней. В этом случае точное рассечение уже не имеет места, возникают дополнительные пространства, которые можно описать [4].

Теорема. Пусть
1) NM таково, что сравнения $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{NM}$ и $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{NM}$ не имеют решений;
2) k, l — чётные числа, $k \geqslant l + 8$;
3) $f(z)$ — функция МакКея веса l, минимального уровня N;
4)$\{g_1(z), \ldots, g_s(z)\}$ — базис ортогонального дополнения к пространству $\langle f(z) M_2(\Gamma_0(NM)) \rangle$ в пространстве $S_{l+2}(\Gamma_0(NM))$.
Тогда

$$S_k(\Gamma_0(NM)) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(NM)) \oplus W,$$

и базис пространства W состоит из функций $g_1(z)h(z),\ \ldots,\ g_s(z)h(z)$, где

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l+2\ (mod\ 4), \\ \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), & k \equiv l\ (mod\ 4). \end{cases}$$

Аналогичная теорема доказана для нечётного веса.

Список литературы

[1] D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay. Multiplicative products of $\eta-$functions. Contemp. Math. **45** (1985), 89–98.

[2] K. Ono. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[3] Г.В. Воскресенская. Точное рассечение в пространствах параболических форм с характерами. Мат. заметки **103** (2018), no. 6, 818–830.

[4] Г.В. Воскресенская. Функции Маккея в пространствах высших уровней. Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия **24** (2018), no. 4, 13–18.

О полных системах функций в биинволюции на алгебрах Ли

А.А. Гаража

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

garazha.alex.andr@gmail.com

Доклад частично основан на работе [2].

На всякой редуктивной комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определена каноническая пуассонова структура $\{\varphi, \psi\}(x) = (x, [d_x\varphi, d_x\psi])$, где φ и ψ — гладкие функции на $\mathfrak{g}$, а $d_x\varphi$ и $d_x\psi$ рассматриваются как элементы алгебры $\mathfrak{g}$, отождествлённой с $\mathfrak{g}^*$ при помощи инвариантного скалярного умножения. Кроме того, для каждого $a \in \mathfrak{g}$ определена пуассонова структура «с замороженным аргументом»: $\{\varphi, \psi\}_a(x) = (a, [d_x\varphi, d_x\psi])$.

В [1] описан подход, позволяющий работать с пуассоновыми структурами на языке линейной алгебры. Скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_a$ и $\{\ ,\ \}$ рассматриваются как кососимметрические билинейные формы f_a и f_x над полем $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ на пространстве $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ рациональных векторных полей на $\mathfrak{g}$, где элемент a фиксирован, а x — общий элемент. А именно, если φ и ψ являются многочленами, то $d\varphi$ и $d\psi$ можно рассматривать как элементы пространства $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$, и тогда $\{\varphi, \psi\}(x) = f_x(d\varphi, d\psi)$ и $\{\varphi, \psi\}_a(x) = f_a(d\varphi, d\psi)$.

Описанный подход можно использовать для решения одной из важных задач гамильтоновой механики — поиска полных семейств функций в биинволюции, то есть максимальных наборов функций, коммутирующих относительно обеих скобок Пуассона. Многочлены $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ задают полное семейство функций в биинволюции относительно $\{\ ,\ \}_a$ и $\{\ ,\ \}$ тогда и только тогда, когда их дифференциалы $d\varphi_1, \dots, d\varphi_s$ составляют базис билагранжева подпространства (то есть максимального подпространства, изотропного относительно обеих билинейных форм).

Таким образом, чтобы получить полное семейство функций в биинволюции, достаточно найти базис билагранжева подпространства и «проинтегрировать по x». В случае регулярного элемента $a \in \mathfrak{g}$ мы придём к методу сдвига аргумента Мищенко–Фоменко [3]. Вопрос о построении полной систем функций в биинволюции в случае сингулярного элемента $a \in \mathfrak{g}$ остаётся открытым.

В докладе для алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ будут построены полные системы функций в биинволюции для произвольного элемента a. Для алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ будут представлены частичные результаты — в случае полупростого элемента a будет построена полная система функций в биинволюции, а для некоторых «хороших» нильпотентных элементов a будет построена часть полной системы функций в биинволюции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №20–01–00515) и Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2019–1621.

Список литературы

[1] A.V. Bolsinov, P. Zhang. Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras. Transformation Groups **21** (2016), 51–86.
[2] А.А. Гаража. О каноническом базисе пары согласованных скобок Пуассона на алгебре матриц. Матем. сб. **211** (2020), no. 6, 95–106.
[3] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. Изв. АН СССР. Сер. матем. **42** (1978), no. 2, 396–415.

Ограниченная редукция ортогональных матриц над кольцом многочленов

П.Б. Гвоздевский
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
gvozdevskiy96@gmail.com

Доклад основан на работе автора [1].

В работе [2] Вассерштейн показал, что любую матрица из специальной линейной группы над кольцом многочленов $g \in \mathrm{SL}_r(C[x_1, \dots, x_n])$, где кольцо коэффициентов C имеет конечную размерность Крулля и $r \geqslant \max(3, \dim C + 2)$, можно привести к виду $\left(\begin{smallmatrix} g' & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $g' \in \mathrm{SL}_{r-1}(C[x_1, \dots, x_n])$ с помощью ограниченного числа (а именно $n(21n-79)/2 + 33nr + 4r - 4$) элементарных преобразований. Также он вывел отсюда аналогичный результат для симплектической группы.

В докладе будет рассказано о полученном автором аналогичном результате для расщепимой ортогональной группы — последнем оставшимся случае среди расщепимых классических групп. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть C — коммутативное кольцо конечной размерности Крулля. Пусть $A = C[x_1, \dots, x_n]$. Тогда для любого $r \geqslant \max(3, D+2)$, любая матрица из расщепимой ортогональной группы $O(2r, A)$ соотв. $O(2r+1, A)$ может быть приведена к матрице из подгруппы

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & O(2r-2, A) & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{соотв.} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & O(2r-1, A) & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

умножением слева на

$$N = n(11r-7) + \left(nD + \tfrac{r(r-1)}{2}\right)\left(\tfrac{r(r-1)}{2} + \lceil \tfrac{r-1}{2} \rceil + 8r - 2\right) + 10r - 10$$

соотв.

$$N = n(12r-8) + \left(nD + \tfrac{r(r-1)}{2}\right)\left(\tfrac{r(r-1)}{2} + \lceil \tfrac{r-1}{2} \rceil + 9r - 2\right) + 11r - 9$$

элементарных ортогональных преобразований.

Этот результат является эффективной версией ранней сюръективной стабилизацией ортогонального K_1-функтора, доказанной Суслиным и Копейко в работе [3].

Также будет рассказано о связи подобных теорем с доказательством свойства (T) Каждана для расщепимых групп над конечно порожденными кольцами.

Список литературы

[1] P. Gvozdevsky. Bounded reduction of orthogonal matrices over polynomial rings, arXiv: `math.GR/2106.12697v1` (2021).

[2] L.N. Vaserstein. Bounded reduction of invertible matrices over polynomial rings by addition operations. Preprint, `www.personal.psu.edu/lxv1/pm2.pdf` (2006).

[3] A.A. Suslin, V.I. Kopeiko. Quadratic Modules and Orthogonal Group over Polynomial Rings. J. Soviet Math. **20** (1982), no. 6, 2665–2691.

Структуры коммутативных алгебраических моноидов на нормальных аффинных поверхностях

Ю.И. Зайцева
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
`yuliazaitseva@gmail.com`

Доклад основан на совместной работе автора с Сергеем Джунусовым [3].

(Аффинным) алгебраическим моноидом называется неприводимое (аффинное) алгебраическое многообразие X с ассоциативным умножением $\mu\colon X \times X \to X$, которое является морфизмом алгебраических многообразий и обладает нейтральным элементом. Группа обратимых элементов $G(X)$ алгебраического моноида X является алгебраической группой, открытой в X. Согласно [4], каждый алгебраический моноид X, чья группа обратимых элементов $G(X)$ является аффинной алгебраической группой, является аффинным моноидом.

Пусть основное поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто и характеристики нуль. В коммутативном случае группа $G(X)$ распадается в прямое произведение $\mathbb{G}_m^r \times \mathbb{G}_a^s$, где через $\mathbb{G}_m = (\mathbb{K}^\times, \times)$ и $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ обозначены соответственно мультипликативная и аддитивная группы основного поля $\mathbb{K}$. Число r мы называем рангом коммутативного моноида X.

В работе [1] были изучены структуры коммутативных моноидов на аффинных пространствах $\mathbb{A}^n$, в частности, дана классификация таких структур в произвольной размерности n для рангов 0, $n-1$ и n и получена полная классификация коммутативных моноидов на $\mathbb{A}^n$ в размерности не выше 3. В работе с Сергеем Джунусовым некоторые из этих результатов обобщены на произвольные нормальные аффинные многообразия. Оказывается, что каждое аффинное алгебраическое многообразие, допускающее структуру моноида ранга 0, $n-1$ или n, является торическим, и структуры ранга $n-1$ описываются корнями Демазюра многообразия X. В частности, получена полная классификация структур коммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях. Отмечу, что в недавнем препринте [2] получена классификация структур некоммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях.

Я расскажу про полученные в [3] классификации, описывающие структуры коммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях на двух языках. Если задавать умножение $\mu\colon X \times X \to X$ с помощью коумножения $\mu^*\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$, то кроме естественного сложения на аффинных пространствах и коумножения $\mu^*\colon \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$, происходящего из торической структуры, имеется серия коумножений

$$\mu^*\colon \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^e + \chi^e \otimes 1)^{\langle p,u \rangle},$$

где через e обозначен один из корней Демазюра, соответствующих примитивному вектору p на луче конуса торического многообразия. Кроме того, структуру моноида на X можно задать с помощью структуры моноида на тотальном координатном пространстве $\bar{X}$ с помощью конструкции Кокса.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, S. Bragin, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. Commun. in Cont. Math. **22** (2020), no. 8, 1950064: 1–23.

[2] B. Bilich. Classification of noncommutative monoid structures on normal affine surfaces, arXiv: `math.AG/2106.04884` (2021)

[3] S. Dzhunusov, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine surfaces. Forum Math. **33** (2021), no. 1, 177–191.

[4] A. Rittatore. Algebraic monoids with affine unit group are affine. Transform. Groups **12** (2007), no. 3, 601–605.

Автоморфизмы инд-многообразий обобщённых флагов

М.В. Игнатьев[1]

Самарский университет, Самара, Россия

mihail.ignatev@gmail.com

Пусть V — счётномерное векторное пространство над полем комплексных чисел. *Обобщённым флагом* называется цепь вложенных подпространств $\mathcal{F}$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20–01–00091а.

в V такая, что каждое подпространство из $\mathcal{F}$ имеет в $\mathcal{F}$ непосредственного предшественника или непосредственного потомка (в смысле частичного упорядочения по включению). Мы будем обозначать через (F'_α, F''_α) пару (подпространство; его непосредственный потомок) = (непосредственный предшественник подпространство; само подпространство). Таким образом, набор подпространств из $\mathcal{F}$ можно записать в виде $\{(F'_\alpha, F''_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ для некоторого множества индексов $\mathcal{A}$, упорядоченного включениями пар. Мы требуем также, чтобы для любого ненулевого вектора $v \in V$ существовал единственный индекс $\alpha \in \mathcal{A}$, для которого $v \in F''_\alpha \setminus F'_\alpha$.

Базис E пространства V называется *совместимым* с обобщённым флагом $\mathcal{F}$, если существует сюръекция $\sigma\colon E \to \mathcal{A}$, удовлетворяющая условию $F'_\alpha = \langle e \in E \mid \sigma(e) < \alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, $F''_\alpha = \langle e \in E \mid \sigma(e) \leqslant \alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$. Несложно проверить, что любой обобщённый флаг обладает совместимым с ним базисом [1], см. также [3]. Обобщённый флаг $\mathcal{H}$ называется *слабо совместимым* с базисом E, если он совместим с каким-то базисом пространства V, отличающимся от E в конечном числе векторов. Возьмём такой обобщённый флаг $\mathcal{H}$ и предположим дополнительно, что существуют изоморфизм линейно упорядоченных множеств $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ и конечномерное подпространство $U \subset V$ такие, что $F + U = \varphi(F) + U$ и $\dim(F \cap U) = \dim(\varphi(F) \cap U)$ для любого $F \in \mathcal{F}$. В этом случае говорят, что обобщённый флаг $\mathcal{H}$ *E-соизмерим* с $\mathcal{F}$.

Обозначим через $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V)$ множество всех обобщённых флагов в V, E-соизмеримых с $\mathcal{F}$. Оно является (вообще говоря, бесконечномерным) инд-многообразием [1], см. также [3]. Понятно, что в в случае конечномерного пространства V такая конструкция приводит к обычному многообразию флагов, являющемуся однородным пространством алгебраической группы $\mathrm{SL}(V)$. Оказывается, что и в счётномерном случае наше инд-многообразие обобщённых флагов можно трактовать как однородное пространство финитарной инд-группы $\mathrm{SL}(V)$.

Нас интересует группа автоморфизмов инд-многообразия $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V)$. В конечномерном случае компонента единицы этой группы совпадает с проективной группой $\mathrm{PSL}(V)$ (за исключением некоторых специальных случаев), см., к примеру, [5]. Оказывается, что в счётномерном случае она оказывается значительно «больше». А именно, это будет группа Макки некоторой пары пространств с естественным спариванием.

Напомним, что группой Макки пары векторных пространств T, R с заданным невырожденным билинейным спариванием $T \times R \to \mathbb{C}\colon (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ называется группа $G(T, R) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(T) \mid \varphi^*(R) = R\}$ [4]. Здесь

$\mathrm{GL}(T)$ — группа всех обратимых линейных операторов на T, $\varphi^*\colon T^* \to T^*$ — двойственный оператор к оператору φ и R отождествляется с подпространством в T^* с помощью спаривания. Условимся также для произвольного счётномерного пространства B с выбранным базисом обозначать через B_* линейную оболочку двойственных линейных функций в B^*.

Для каждого подпространства $F \in \mathcal{F}$ выберем дополнительное подпространство U_F в V, натянутое на $U_F \cap E$, так, чтобы $U_{F_1} \supset U_{F_2}$ при $F_1 \subset F_2$. Обозначим теперь $V_E^{\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}((F_*)^* \oplus U_F)$, $V_{*E}^{\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}(F_* \oplus (U_F)^*)$. Ясно, что между этими пространствами есть естественное невырожденное спаривание. Обозначим через G соответствующую группу Макки. Она действует на инд-многообразии $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V)$ по правилу

$$\varphi \cdot \mathcal{H} = ((\varphi^*)^{-1}(\mathcal{H}^\perp))^\perp \cap V,\ \varphi \in G,\ \mathcal{H} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V).$$

Здесь $\mathcal{H} = \{H^\perp,\ H \in \mathcal{H}\}$, где $H^\perp = \{\lambda \in V_{*E}^{\mathcal{F}} \mid \lambda(H) = \{0\}\}$. Обозначим через $\mathrm{St}_{\mathcal{F}}$ стабилизатор обобщённого флага $\mathcal{F}$ в группе G. Пусть также $\mathrm{GL}(E, V)$ — группа обратимых линейных операторов на V, которые оставляют на месте все базисные векторы из E, кроме, быть может, конечного числа. Наконец, назовём обобщённый флаг $\mathcal{F}$ *симметричным*, если при очевидном изоморфизме $V \cong V_*$ он переходит в $\mathcal{F}^\perp$. Основной результат таков.

Теорема. *Если $\mathcal{F}$ не симметричен, то группа автоморфизмов инд-многообразия $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V)$ изоморфна проективной группе* $\mathrm{P}(\mathrm{GL}(E, V)\cdot\mathrm{St}_{\mathcal{F}})$. *Если же $\mathcal{F}$ симметричен, то она изоморфна группе* $\mathrm{P}(\mathrm{GL}(E, V) \cdot \mathrm{St}_{\mathcal{F}}) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Аналогичный результат имеется для инд-многообразий изотропных обобщённых флагов в пространстве с невырожденной формой. Доклад основан на совместной работе с И. Пенковым [2].

Список литературы

[1] I. Dimitrov, I. Penkov. Ind-varieties of generalized flags as homogeneous spaces for classical ind-groups. IMRN, no. 55 (2004), 2935–2953.

[2] M. Ignatev, I. Penkov. Automorphism groups of ind-varieties of generalized flags Transformation Groups, submitted, arXiv: `math.AG/2106.00989` (2021).

[3] M.V. Ignatyev, I. Penkov. Ind-varieties of generalized flags: a survey of results. Journal of Mathematical Sciences **248** (2020), 255–302, arXiv: `math.AG/1701.08478`.

[4] G.W. Mackey. On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), no. 2, 155–207.

[5] A. Onishchik. Transitive compact transformation groups. Math. Sb. (N.S.) **60** (1963), 447–485 English Transl.: AMS Transl. (2) **55** (1966), 5–58.

Неальтернирующие гамильтоновы формы характеристики 2

А.В. Кондратьева
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
alisakondr@mail.ru

Доклад посвящен неальтернирующим гамильтоновым формам с функциональными коэффициентами $\omega \in S\Omega$ над алгебраически замкнутым полем K характеристики 2. Здесь $S\Omega$ — комплекс симметрических дифференциальных форм (инвариантное определение дано в работе [1]). В [2] приводится условие, при котором форма сводится к виду $\omega = \omega(0)$. Более наглядный случай трёх переменных рассмотрен в работе [3].

Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис E, согласованный с флагом $\mathcal{F}$, m_1, …, m_n — соответствующий набор высот, $z_i = x_i^{(2^{m_i})}$. В докладе рассматриваются неальтернирующие гамильтоновы формы

$$\omega = \omega(0) + d\varphi + \sum_{i<j} b_{ij} dz_i dz_j,$$

где $\varphi \in \mathfrak{m}^{(2)} S\Omega^1$, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $O(\mathcal{F})$ (определение см. в [4]), $b_{ij} \in K$.

Теорема. Неальтернирующую гамильтонову форму ω можно привести к одному из следующих видов в зависимости от высот переменных:

$\omega(0)$ с матрицей $\mathrm{diag}(M_0, \ldots, M_0, M_1, \ldots, M_1, 1_s)$,

где $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\omega = dx_1dx_2 + dx_3dx_4 + \ldots + dx_{n-2}dx_{n-1} + dx_n^{(2)} + \sum b_{jn} dz_j dz_n$, если $n = 2k+1$,

$\omega = dx_1dx_2 + dx_3dx_4 + \ldots + dx_{n-1}dx_n + dx_n^{(2)} + \sum b_{j,n-1} dz_j dz_{n-1}$, если $n = 2k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0729–2020–0055).

Список литературы

[1] М.И. Кузнецов, А.В. Кондратьева, Н.Г. Чебочко. О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики 2. Матем. журнал. (НАН Казахстана) **16** (2016), no. 2, 54–65.

[2] M.I. Kuznetsov, A.V. Kondrateva, N.G. Chebochko. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in characteristic 2. I, arXiv: `math.RA/1812.11213` (2018).

[3] A.V. Kondrateva. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in three variables, arXiv: `math.RA/2101.00398` (2021)
[4] А.И. Кострикин, И.Р. Шафаревич. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики. Изв. АН СССР. Сер. матем **33** (1969), no. 2, 251–322.

Классификация неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2

А.В. Кондратьева, М.И. Кузнецов
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
`alisakondr@mail.ru`, `kuznets-1349@yandex.ru`

Доклад посвящён разработанной авторами общей теории неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли над полем характеристики 2. Эти алгебры Ли в некотором смысле аналогичны гамильтоновым супералгебрам Ли $H(n,m)$ нулевой характеристики. Над полем характеристики 2 мы рассматриваем в качестве исходной коммутативной алгебры (алгебры «функций») алгебру разделённых степеней $\mathcal{O}(\mathcal{F})$, соответствующую флагу пространства «переменных» $E = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, алгебру Ли специальных дифференцирований $W(\mathcal{F})$ (алгебра векторных полей), комплекс симметрических дифференциальных форм $S\Omega(\mathcal{F})$ и невырожденную замкнутую дифференциальную симметрическую форму

$$\omega = \sum_i \omega_{ii} dx_i^{(2)} + \sum_{i<j} \omega_{ij} dx_i dx_j,$$

$\omega_{ij} \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$.

Комплекс $S\Omega(\mathcal{F})$ имеет естественную структуры алгебры разделённых степеней над алгеброй $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. Алгебра Ли $\tilde{P}(\mathcal{F},\omega)$ гамильтоновых векторных полей в $W(\mathcal{F})$, сохраняющих форму ω, а также любая её подалгебра Ли, содержащая второй коммутант, называется неальтернирующей гамильтоновой алгеброй Ли. Применяя стандартный гамильтонов формализм, получаем изоморфизм неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли и алгебры Ли гамильтонианов, определённых с точностью до константы, относительно скобки Пуассона

$$\{f,g\} = \sum_i \overline{\omega}_{ii} \partial_i f \partial_i g + \sum_{i<j} \overline{\omega}_{ij} (\partial_i f \partial_j g + \partial_i g \partial_j f).$$

Здесь $\overline{\omega}_{ij}$ — матрица, обратная матрице формы ω.

Серия гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2 с простейшей симметрической скобкой Пуассона была построена Lei Lin [1]. Некоторые алгебры этой серии изоморфны алгебрам Капланского [2]. Неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли исследовались D. Leites, S. Bouarrouj, M. Messaoudene, P. Grozman, A. Lebedev, I. Schepochkina в направлении распространения идей и методов теории супералгебр Ли на случай алгебр Ли чётной характеристики (см. [3], [4]).

Авторы получили классификацию градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли, основанную на построенной теории инвариантов неальтернирующих симметрических билинейных форм характеристики 2 относительно группы автоморфизмов флага. Найдены размерности простых градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли. Доказывается, что фильтрованные деформации градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли соответствуют неальтернирующим гамильтоновым формам с полиномиальными коэффициентами. Отметим, что классические градуированные гамильтоновы алгебры Ли имеют фильтрованные деформации, которые соответствуют дифференциальным формам с неполиномиальными коэффициентами [5]. Кроме того, при достаточно общих условиях, например, когда высоты переменных больше 1, градуированные неальтернирующие гамильтоновы алгебры являются жёсткими относительно фильтрованных деформаций, в отличие от классических гамильтоновых алгебр. Доказывается инвариантность стандартной максимальной подалгебры. Даётся описание дифференцирований и автоморфизмов фильтрованных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли. Все результаты справедливы за исключением некоторых случаев, когда число переменных $n = 2$, 3 или 4.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18–01–00900/а, и Минобрнауки РФ (госзадание, проект №0729–2020–0055).

Список литературы

[1] L. Lin. Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n, m)$ of characteristic 2. Comm. Alg. **21** (1993), 399–411.

[2] I. Kaplansky. Simple Lie algebras of characteristic 2. Lect. Notes Math. **933** (1982), 127–129.

[3] S. Bouarrouj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, Divided power(co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan Matrix. Homology, Homotopy Appl. **12** (2010), 237–248.

[4] S. Bouarroudj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, I. Shchepochkina. New simple Lie algebras in characteristic 2. Math. Res. Notices **2009** (2015), 1–16.

[5] С.М. Скрябин. Классификация гамильтоновых форм над алгебрами разделенных степеней. Матем. сб. **181** (1990), 114–133.

Бесконечная транзитивность для простейших многообразий Калоджеро–Мозера

К.Г. Куюмжиян
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
karina@mccme.ru

Доклад основан на работе автора [6]. Рассмотрим алгебраическое многообразие X и группу всех его регулярных автоморфизмов. Нас интересует, для каких многообразий X можно перевести любые m точек в любые m других для любого натурального m. Такие многообразия достаточно редки. В частности, для такого X группа его регулярных автоморфизмов должна быть бесконечномерной.

Мы рассматриваем в качестве X простейшие многообразия Калоджеро–Мозера и доказываем, что для них выполняется свойство, указанное выше, причём достаточно вместо всей группы регулярных автоморфизмов взять только автоморфизмы определённого вида. Они образуют группу, изоморфную группе унимодулярных автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры от двух переменных. Берестом–Эшматовым–Эшматовым [3, Theorem 1] была доказана 2-транзитивность данного действия и сформулирована гипотеза, что данное действие является бесконечно транзитивным.

Определение. Многообразием Калоджеро–Мозера $\mathcal{C}_n$ называется

$$\mathcal{C}_n := \{(X, Y) \in Mat_n(\mathbb{C}) \times Mat_n(\mathbb{C}) : \ \mathrm{rk}([X, Y] + I_n) = 1\} /\!\!/ PGL_n(\mathbb{C}),$$

где $PGL_n(\mathbb{C})$ действует как $g.(X, Y) = (gXg^{-1}, gYg^{-1})$.

Многообразия (пространства) Калоджеро–Мозера важны в теории представлений. Известно, что $\mathcal{C}_n$ является гладким неприводимым аффинным алгебраическим многообразием размерности $2n$, см. Wilson [9]. Оно рационально, см. [9, Prop. 1.10] и [8, Remark 5]. На нём есть гиперкэлерова структура, см. [9, Section 8], [5, Theorem 1.22]. Оно является простейшим случаем колчанного многообразия Накаджимы. Это частичная компактификация интегрируемой системы Калоджеро–Мозера.

Определение. Обозначим через G подгруппу в группе автоморфизмов свободной алгебры $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$, порождённую преобразованиями двух видов:

$$(X, Y) \mapsto (X + p(Y), Y), \ p \text{ является многочленом от одной переменной}, \quad (1)$$

$$(X, Y) \mapsto (X, Y + q(X)), \ q \text{ является многочленом от одной переменной}. \quad (2)$$

Автоморфизмы этих двух видов называются треугольными. Группа G совпадает с группой унимодулярных автоморфизмов $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ (автоморфизм

$\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ называется унимодулярным, или симплектическим, если он сохраняет коммутатор $[x, y] = xy - yx$), см. [4, 8.10.Théorème], и также известно, что эта группа изоморфна группе автоморфизмов первой алгебры Вейля [7, Theorem 2].

Формулы (1) и (2) задают действие G на $Mat_n(\mathbb{C}) \times Mat_n(\mathbb{C})$. Это действие можно спустить на $\mathcal{C}_n$. Действительно, для корректности нужно проверить две вещи. Во-первых, формулы (1) и (2) согласованы с $PGL_n(\mathbb{C})$-действием. Во-вторых, получаемые точки принадлежат $\mathcal{C}_n$: $[X + p(Y), Y] = [X, Y] = [X, Y + q(X)]$, следовательно,

$$\mathrm{rk}([X + p(Y), Y] + I_n) = \mathrm{rk}([X, Y + q(X)] + I_n) = \mathrm{rk}([X, Y] + I_n) = 1.$$

Теорема[6]. Группа G действует на многообразии Калоджеро–Мозера $\mathcal{C}_n$ бесконечно транзитивно.

В основе доказательства лежит следующее наблюдение. Если у X-компонент рассматриваемых точек минимальные многочлены взаимно просты, то мы можем двигать данные точки независимо при помощи автоморфизмов вида (2) (и аналогично для Y-компонент).

Данный результат нельзя вывести из результатов о гибкости [1], поскольку в нашу уменьшенную группу автоморфизмов попадают не все однопараметрические унипотентные подгруппы, действующие на X.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), 767–823.

[2] I. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Sb. Math. **203** (2012), 3–30.

[3] Yu. Berest, A. Eshmatov, F. Eshmatov. Multitransitivity of Calogero–Moser spaces. Transform. Groups **21** (2016), 35–50.

[4] J. Dixmier. Sur les algèbres de Weyl. Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 209–242.

[5] P. Etingof. Calogero–Moser systems and representation theory. Zur. Lect. Adv. Math., 2007.

[6] K. Kuyumzhiyan. Infinite transitivity for Calogero–Moser spaces. Proceedings of the American Mathematical Society **148** (2020), 3723–3731.

[7] L. Makar-Limanov. On automorphisms of the Weyl algebra. Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 359–363.

[8] V. L. Popov. On infinite dimensional algebraic transformation groups. Transform. Groups **19** (2014), 549–568.
[9] G. Wilson. Collisions of Calogero–Moser particles and an adelic Grassmannian (with an Appendix by I. G. Macdonald). Invent. Math. **133** (1998), 1–41.

p-Подгруппы в трёхмерной группе Кремоны

К.В. Логинов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
loginov@mi-ras.ru

Доклад основан на работе [4]. Будем работать над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. *Группой Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ называется группа бирациональных автоморфизмов n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n$. При $n = 1$ эта группа изоморфна $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Начиная с $n \geqslant 2$, группа Кремоны становится достаточно сложным объектом для изучения. Один из способов понять её структуру состоит в том, чтобы исследовать её конечные подгруппы. При $n = 2$ такие подгруппы были классифицированы И.В. Долгачевым и В.А. Исковских в работе [2]. В размерности 3 ситуация становится более интересной, и полная классификация представляется недоступной. Тем не менее, можно получать классификационные результаты для некоторых классов конечных подгрупп, см. например [5] в случае простых групп. Также имеются различные результаты об ограниченности конечных подгрупп в группе Кремоны (см. [8]), показывающие, что далеко не всякая группа может быть реализована как подгруппа в ней.

Довольно естественно рассмотреть такой класс конечных групп как p-группы. Напомним, что p-группой называется группа порядка p^k, где p – простое число. Определим число $r(G)$, называемое *рангом* p-группы G, как наименьшее число порождающих элементов для G. Рассмотрим следующую задачу (см. [10]): оценить сверху ранг p-групп, вкладывающихся в группу Кремону $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$. Полное решение этой задачи для $n = 2$ было получено А. Бовилем [1].

В больших размерностях можно рассматривать более общую задачу и вместо группы Кремоны изучать группу бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ рационально связного многообразия X и её p-подгруппы. При $n = 3$ точная оценка на ранг p-подгрупп была получена для $p = 2$ и $p \geqslant 5$, см. теорему 3. Для $n = 3$, $p = 3$ в работе [3] оценка $r(G) \leqslant 4$ было получена по модулю трёх исключительных случаев. В работе [4] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть X — трехмерное рационально связное многообразие, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная 3-группа. Тогда $r(G) \leqslant 4$, и эта оценка точна.*

Следствие 2. *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ — конечная 3-группа. Тогда $r(G) \leqslant 4$, и эта оценка точна.*

Как следствие, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3 [6], [7], [9], [3], [11], [4]. *Пусть X — рационально связное многообразие размерности 3, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная p-группа. Тогда она может быть порождена не более, чем r элементами, где*

- $r = 6$ *при* $p = 2$,
- $r = 4$ *при* $p = 3$,
- $r = 3$ *при* $p \geqslant 5$.

Кроме того, эти оценки точны.

Оценка на ранг 3-групп в работе [4] получена без использования классификации трехмерных многообразий Фано, что может быть полезно для дальнейших обобщений.

Список литературы

[1] A. Beauville. p-Elementary subgroups of the Cremona group. J. Algebra **314** (2007), no. 2, 553–564.
[2] I.V. Dolgachev, V.A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I. Progr. Math. **269**, 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.
[3] A. A. Kuznetsova. Finite 3-Subgroups in the Cremona Group of Rank 3. Math. Notes **108** (2020), no. 5, 697–715.
[4] K. Loginov. A note on 3-subgroups in the space Cremona group 3, arXiv: `math.AG/2102.04522` (2021).
[5] Yu. Prokhorov. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. J. Algebraic Geom. **21** (2009), 563–600.
[6] Yu. Prokhorov. p-Elementary subgroups of the Cremona group of rank 3. In: Classification of algebraic varieties. EMS Ser. Congr. Rep., 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.
[7] Yu. Prokhorov. 2-Elementary subgroups of the space Cremona group. In: Automorphisms in birational and affine geometry. Springer Proc. Math. Stat. **79**, 215–229. Springer, Cham, 2014.

[8] Yu. Prokhorov, C. Shramov. Jordan property for Cremona groups. Amer. J. Math. **138** (2016), no. 2, 403–418.
[9] Yu. Prokhorov, C. Shramov. p-Subgroups in the space Cremona group. Mathematische Nachrichten **291** (2017), no. 8–9, 1374–1389.
[10] J.-P. Serre. A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. Moscow Math. J. **9** (2009), no. 1, 193–208.
[11] J. Xu. A remark on the rank of finite p-groups of birational automorphisms. Comptes Rendus Mathématique **358** (2020), no. 7, 827–829.

Зоноиды и зонотопы, связанные с неприводимыми представлениями компактных простых групп Ли

М.В. Мещеряков
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия
mesh@ math.mrsu.ru

В работе Э.Б. Винберга [1] доказано, что все конечномерные нормы в простых компактных алгебрах Ли $\mathfrak{G}$ инвариантные относительно присоединенного представления получаются как продолжения норм на подалгебрах Картана инвариантных относительно действия группы Вейля W. В силу известной теоремы выпуклости Б. Костанта проекции орбит $_\lambda$ присоединенного представления компактных групп Ли на подалгебры Картана суть выпуклые оболочки орбит $W\lambda$ группы Вейля. Целью нашего сообщения является рассмотрение классификации зонотопов среди многогранников $P(\lambda)$ вида $\operatorname{conv} W\lambda$ и выделение в классе орбитопов $\operatorname{conv}{}_\lambda$ выпуклых тел, называемых зоноидами (см. [2]). Эти выпуклые тела характеризуются тем, что их опорные функции являются преобразованиями Фурье положительных борелевских мер.

Теорема 1. *Многогранник $P(\lambda) = \operatorname{conv} W\lambda$ является зонотопом тогда и только тогда, когда числовые метки λ на диаграммах Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{G}$ ранга > 1 имеют следующий вид:*

для A_n $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n)$, где $\gamma > 0$;

для B_n $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}) + \alpha\omega_n$, где γ и α — неотрицательные вещественные числа, причём или $\gamma > 0$, или $\alpha > 0$;

для C_n $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}) + \alpha\omega_n$, где γ и α — неотрицательные числа, причём или $\gamma > 0$, или $\alpha > 0$;

для D_n $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-2}) + \alpha\omega_{n-1} + \kappa\omega_n$, где γ, α и κ — неотрицательные числа, причём или $\gamma > 0$, или $\alpha > 0$, или $\kappa > 0$;

для E_6 $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_6)$, *где* $\gamma > 0$;

для E_7 $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_7)$, *где* $\gamma > 0$;

для E_8 $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_3 + \ldots + \omega_8) + \alpha\omega_2$, *где* γ *и* α *— неотрицательные числа, причём или* $\gamma > 0$, *или* $\alpha > 0$;

для F_4 $\lambda = \gamma\omega_1 + \alpha(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)$, *где* γ *и* α *— неотрицательные числа, причём или* $\gamma > 0$, *или* $\alpha > 0$;

для G_2 $\lambda = \gamma\omega_1 + \alpha\omega_2$, *где* $\gamma > 0$ *и* $\alpha > 0$ *одновременно.*

Теорема 2. *Присоединенные орбитопы* $\operatorname{conv} O_\lambda$ *не являются зоноидами, кроме, возможно, случаев выбора* λ, *указанных в теореме* 1.

В случае алгебр Ли ранга 1 присоединенные орбитопы суть зоноиды, поскольку они являются евклидовыми шарами.

Гипотеза. *Единичные шары инвариантных норм, которые определяются орбитопами в простых компактных алгебрах Ли ранга больше, чем* 1, *не являются зоноидами.*

Другими словами свойство условной положительной определённости опорных функций выпуклых оболочек орбит групп Вейля, характеризующих зоноиды, не сохраняются при продолжении соответствующих норм с подалгебры Картана до инвариантных норм на всей компактной простой алгебре Ли.

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг. Инвариантные нормы в компактных простых алгебрах Ли. Функц. анализ и его прил. **2** (1968), no. 2, 89–90.

[2] Т. Боннезен, В. Фенхель. Теория выпуклых тел. — М.: Фазис, 2002.

Матрицы Картана и системы нелинейных уравнений в частных производных

Д.В. Миллионщиков

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

`mitia_m@hotmail.com`

В работе Шабата и Ямилова [1] были рассмотрены так называемые системы экспоненциального типа, то есть системы гиперболических уравнений в частных производных вида

$$u_{xy}(j) = \exp\left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk}u^k\right), \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

где a_{jk} — постоянные коэффициенты, а функции u^j зависят от переменных x и y.

Исследование систем вида (1) в работе [1] было основано на изучении и применении т.н. характеристических алгебр Ли. Шабатом и Ямиловым была высказаны две гипотезы о системах экспоненциального типа. Первая гипотеза состояла в том, что система (1) интегрируема по Дарбу (то есть допускает полные наборы независимых характеристических интегралов по обеим переменным) тогда и только тогда, когда она является прямой суммой нескольких систем экспоненциального типа, у которых матрицы M являются матрицами Картана простых алгебр Ли. Вторая гипотеза утверждала, что системы вида (1), не интегрируемые по Дарбу, но допускающие т.н. высшие симметрии, соответствуют вырожденным матрицам Картана (матрицам Картана аффинных алгебр Каца–Муди). Несмотря на то, что текст [1] так и остался в статусе препринта, данная работа послужила отправной точкой для большого количества исследований и публикаций на тему интегрирования систем экспоненциального типа.

Мы будем обсуждать методы нахождения явных формул для высших симметрий (инвариантов действия локальной группы Ли–Бэклунда) гиперболических систем экспоненциального типа, соответствующих вырожденным матрицам Картана. Доклад основан на результатах работ [2], [3].

Список литературы

[1] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт, Уфа, БФАН СССР, 1981.

[2] Д.В. Миллионщиков. Характеристические алгебры Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки. УМН **72** (2017), no. 6, 203–204.

[3] Д.В. Миллионщиков, С.В. Смирнов. Характеристические алгебры и интегрируемые системы экспоненциального типа. Уфимский математический журнал, **13** (2021), no.2, 44–73.

Центральные расширения и теорема Римана–Роха

Д.В. Осипов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, НИУ ВШЭ, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия

d_osipov@mi-ras.ru

Пусть S — гладкая проективная кривая над полем k. Пусть $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_S$-модулей ранга n на S (это есть пучок сечений векторного расслоения ранга n на S).

В этом случае хорошо известно локальное (адельное) представление для разности эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{F}) - n\chi(\mathcal{O}_S)$. Это представление получается при помощи выбора матриц перехода между тривиализациями локально свободного пучка $\mathcal{F}$ в общей точке кривой S и в пополнениях локальных колец замкнутых точек кривой S. При этом степень пучка $\mathcal{F}$ возникает из естественного гомоморфизма

$$GL_n(\mathbb{A}_S) \longrightarrow \mathbb{Z}\,,$$

где $\mathbb{A}_S = \prod'_{p \in S} K_p$ — кольцо аделей на кривой S, K_p — пополнение поля функций $k(S)$ на кривой S по дискретному нормированию, задаваемому замкнутой точкой $p \in S$. Более точно, степень пучка $\mathcal{F}$, которая совпадает с выписанной выше разностью эйлеровых характеристик, получается применением этого гомоморфизма к элементу из группы $GL_n(\mathbb{A}_S)$, задаваемому матрицами перехода для пучка $\mathcal{F}$.

Пусть теперь X — гладкая проективная поверхность над полем k. В этом случае имеется кольцо аделей Паршина–Бейлинсона $\mathbb{A}_X = \prod'_{x \in C} K_{x,C}$, где «двумерное» адельное произведение берется по всем парам $x \in C$: неприводимая кривая C на X и точка x на C. Кольцо $K_{x,C}$ есть конечное прямое произведение двумерных локальных полей, каждое из которых изоморфно полю $k'((u))((t))$, где k' — конечное расширение поля вычетов $k(x)$ точки x. Если точка x гладкая на C, то $K_{x,C}$ будет двумерным локальным полем.

Вместо указанного выше гомоморфизма из группы $GL_n(\mathbb{A}_S)$ в группу $\mathbb{Z}$ теперь существует каноническое центральное расширение

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{GL_n(\mathbb{A}_X)} \longrightarrow GL_n(\mathbb{A}_X) \longrightarrow 1\,.$$

Пусть $\mathcal{G}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей ранга n на X. Тогда выбор тривиализаций пучка $\mathcal{G}$ в пополнениях локальных колец схемных точек на X задает матрицы перехода, которые будут из группы $GL_n(\mathbb{A}_X)$.

В своем докладе я расскажу, как получить локальное (адельное) разложение для разности эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{G}) - n\chi(\mathcal{O}_S)$ при помощи матриц перехода из группы $GL_n(\mathbb{A}_X)$ для пучка $\mathcal{G}$ и при помощи указанного выше центрального расширения. Это локальное (адельное) разложение было получено в препринте [2]. При этом использовались результаты из статьи [1], где было получено локальное (адельное) разложение для второго числа Чженя $c_2(\mathcal{G})$ пучка $\mathcal{G}$ посредством адельных матриц перехода для пучка $\mathcal{G}$ и при помощи другого центрального расширения $\widehat{GL_n(\mathbb{A}_X)}$ группы $GL_n(\mathbb{A}_X)$ группой $\mathbb{Z}$, построенного из центрального расширения $\widetilde{GL_n(\mathbb{A}_X)}$.

Вычисления с адельными матрицами перехода для пучка $\mathcal{G}$ и центральным расширением $\widetilde{GL_n(\mathbb{A}_X)}$ можно проделать двумя разными способами. Сравнение полученных двух ответов приводит к теореме Римана–Роха для пучка $\mathcal{G}$ на поверхности X (без формулы Нётера).

Список литературы

[1] D.V. Osipov. Second Chern numbers of vector bundles and higher adeles. Bull. Korean Math. Soc. **54** (2017), no. 5, 1699–1718; arXiv: `math.AG/1706.07354`.

[2] D.V. Osipov. Central extensions and Riemann–Roch theorem on algebraic surfaces, arXiv: `math.AG/2105.14626` (2021).

Инварианты унипотентного радикала параболической подгруппы

А.Н. Панов[1]

Самарский университет, Самара, Россия

`apanov@list.ru`

Известно, что поле инвариантов для рационального действия произвольной унипотентной группы на аффинном многообразии рационально, то есть является чисто трансцендентным расширением основного поля [1]. Отметим, что здесь поле инвариантов является полем частных алгебры инвариантов. Ставится задача нахождения системы свободных образующих в поле инвариантов в явном виде.

Пусть K — поле характеристики нуль и P — параболическая подгруппа в полной линейной группе $G = \mathrm{GL}(n, K)$. Имеет место разложение $P = LU$ группы P в полупрямое произведение унипотентного радикала U и подгруппы Леви L. Подгруппа P определяется разбиением целочисленного отрезка $[1, n]$ на систему последовательных непересекающихся отрезков $[1, n] = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \ldots \sqcup I_\ell$. Линейное пространство $\mathcal{M} = \mathrm{Mat}(n, K)$ является прямой суммой $\mathcal{M} = \bigoplus_{1\leqslant k,m\leqslant n} \mathcal{M}_{km}$, где $\mathcal{M}_{km}$ натянуто на матричные единицы $E_{ij},\ \ (i, j) \in I_k \times I_m$. Унипотентная подгруппа U состоит из матриц $E + A$, где E — единичная матрица и A лежит в сумме подпространств $\mathcal{M}_{km}$, $k < m$.

Рассмотрим присоединённое представление $\mathrm{Ad}_g x = gxg^{-1}$ группы U в пространстве $\mathrm{Mat}(n, K)$. Определено представление группы U в алгебре $\mathcal{A}$ регулярных функций на $\mathrm{Mat}(n, K)$ по формуле $\rho_g f(X) = f(\mathrm{Ad}_g^{-1} X)$.. Это представление продолжается до действия U в поле $\mathcal{F}$ рациональных функций на $\mathrm{Mat}(n, K)$. Наша цель состоит в построении системы свободных образующих в поле инвариантов $\mathcal{F}^U$. Случай $U = \mathrm{UT}(n, K)$ был рассмотрен в работе [2].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20–01–00091а.

Для любого $i \in [1,n]$ обозначим $i' = n+1-i$. Соответственно, для любого подмножества $T \in [1,n]$ положим $T' = \{i'\colon i \in T\}$. Рассмотрим множество $\mathbb{S}$, состоящее из пар (i,j), для которых $i \in I_k,\ j \in I'_m,\ k \geqslant m$.

Пусть $\{x_{ij}\}$ — набор стандартных координатных функций на $\mathcal{M}$. Образуем матрицу $\mathbb{X} = (x_{ij})_{i,j=1}^n$. Рассмотрим присоединённую матрицу $\mathbb{X}^* = (x_{ij}^*)_{i,j=1}^n$. Имеем $\mathbb{X}\mathbb{X}^* = \mathbb{X}^*\mathbb{X} = \det(\mathbb{X})E$.

Разобьём $\mathbb{S}$ на два подмножества $\mathbb{S} = \mathbb{S}_0 \sqcup \mathbb{S}_1$, где $\mathbb{S}_0$ состоит из тех $(i,j) \in \mathbb{S}$, которые лежат на или выше антидиагонали. Соответственно, $\mathbb{S}_1$ — из тех $(i,j) \in \mathbb{S}$, которые лежат ниже антидиагонали.

Для любого $(i,j) \in \mathbb{S}_0$ определим многочлен $\mathcal{J}_{ij}$ как минор матрицы $\mathbb{X}$, определяемый системой столбцов $[1,j]$ и строк $\{i\} \cup [j'+1,n]$.

Пусть $(i,j) \in \mathbb{S}_1$. Образуем $(j \times j)$-матрицу

$$\mathbb{Y}_{ij} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{X}_{i',j} \\ -\,-\,-\,-\,-\,- \\ \mathcal{X}^*_{j-i',j} \end{array} \right),$$

где $\mathcal{X}_{i',j}$ — это блок из матрицы $\mathbb{X}$ со столбцами $[1,j]$ и последними i' строками, соответственно, $\mathcal{X}^*_{j-i',j}$ — это блок из матрицы $\mathbb{X}^*$ со столбцами $[1,j]$ и последними $j-i'$ строками. Для любого $(i,j) \in \mathbb{S}_1$ определим $\mathcal{J}_{ij} = \det \mathbb{Y}_{ij}$.

Теорема. Система многочленов $\{\mathcal{J}_{ij}\colon (i,j) \in \mathbb{S}\}$ свободно порождает поле инвариантов $\mathcal{F}^U$.

Эта теорема переносится на случай, когда G — ортогональная или симплектическая группа. В докладе будет построена система свободных образующих для поля инвариантов относительно действия унипотентного радикала произвольной параболической подгруппы на группе G сопряжением.

Список литературы

[1] K. Miyata. Invariants of certain groups. 1. Nagoya Math. J. **41** (1971), 69–73.
[2] К.А. Вяткина, А.Н. Панов. Поля U-инвариантов присоединённого представления группы $\mathrm{GL}(n,K)$. Мат. заметки **93** (2013), no. 1, 144–147.

Обобщённая гибкость аффинных конусов над кубическими поверхностями

А.Ю. Перепечко
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, МФТИ, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
a@perep.ru

Доклад основан на работе автора [7].

Действие группы называется бесконечно транзитивным, если оно транзитивно на m-наборах различных точек для произвольного натурального m. Обобщё нно гибкие аффинные алгебраические многообразия характеризуются следующим свойством: подгруппа автоморфизмов, порождённая унипотентными подгруппами, бесконечно транзитивно действует на открытом подмножестве. Для гибких многообразий это подмножество совпадает с множеством гладких точек. Мы обсудим примеры гибких многообразий, признаки гибкости аффинных конусов и докажем обобщённую гибкость аффинных конусов над кубическими поверхностями относительно произвольной поляризации (по очень обильному дивизору). В частности, мы рассмотрим цилиндрические подмножества кубических поверхностей и подразбиения их конуса эффективных дивизоров.

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Точка $p \in X$ называется *гибкой*, если касательное пространство T_pX порождено касательными векторами к орбитам действий аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(\mathbb{K})$ на X. Все $\mathbb{G}_a$-действия на X порождают *специальную группу автоморфизмов* $\mathrm{SAut}X \subset \mathrm{Aut}X$.

Многообразие X называется *гибким*, если все гладкие точки на X гибкие, и *обобщённо гибким*, если существует открытое подмножество в X, состоящее из гибких точек. Действие группы G на множестве S называется *бесконечно транзитивным*, если порождённое действие на упорядоченных m-наборах попарно различных элементов S транзитивно для любого $m \in \mathbb{N}$.

По знаменитой теореме [1, Theorem 0.1], следующие условия эквивалентны для аффинного многообразия X размерности $\geqslant 2$:

1. многообразие X является гибким;

2. группа $\mathrm{SAut}X$ действует транзитивно на подмножестве гладких точек $X_{\mathrm{reg}} \subset X$;

3. the group $\mathrm{SAut}X$ действует бесконечно транзитивно на X_{reg}.

Аналогичная теорема верна для обобщённой гибкости, если заменить X_{reg} на открытую $\mathrm{SAut}X$-орбиту, см. [1, Theorem 2.2]. Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени $\geqslant 4$ относительно произвольной очень обильной поляризации была подтверждена в [2], [5], [6].

Однако, аффинный конус X над поверхностью дель Пеццо степени 3 относительно (плюри)антиканонической поляризации не обладает $\mathbb{G}_a$-действиями, см. [3, Corollary 1.8], хотя конус относительно любой другой очень обильной поляризации — обладает, см. [4].

Нами был получен следующий результат [7, Theorem 7.1].

Теорема. Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени 3, поляризованная относительно очень обильного дивизора, не пропорционального антиканоническому. Тогда аффинный конус над Y является обобщённо гибким.

Мы обсудим примеры гибких многообразий, критерии гибкости аффинных конусов и доказательство этой теоремы. В частности, мы рассмотрим семейства цилиндров на кубических поверхностях и подразбиения конуса эффективных дивизоров, соответствующие инварианту Фуджиты.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), 767–823.
[2] I. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Sbornik: Math **203** (2012), no. 7, 923–949.
[3] I. Cheltsov, J. Park, J. Won. Affine cones over smooth cubic surfaces. Journal of the European Mathematical Society **18** (2016), no. 7, 1537–1564.
[4] I. Cheltsov, J. Park, J. Won. Cylinders in del Pezzo surfaces. International Mathematics Research Notices **2017** (2017), no. 4, 1179–1230.
[5] J. Park, J. Won. Flexible affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4. European Journal of Mathematics **2** (2016), no. 1, 304–318.
[6] A.Y. Perepechko. Flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 and 5. Functional Analysis and its Applications **47** (2013), no. 4, 284–289.
[7] A. Perepechko. Affine cones over cubic surfaces are flexible in codimension one. Forum Mathematicum **33** (2021), no. 2, 339–348.

Подалгебры алгебры Витта конечной коразмерности

А.В. Петухов
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
alex--2@yandex.ru

Общие слова. В моём докладе мне бы хотелось обсудить часть результатов моих совместных работ со Сьюзен Сьерра [1], [2], посвящённых (в качестве центральной темы) описанию примитивных идеалов для алгебр Витта и Вирасоро. Как следствие, мы получаем описание подалгебр Ли в алгебрах Витта и Вирасоро коразмерностей 1 (1 серия), 2 (3 серии), 3 (9 серий) (и, по факту, в докладе я хочу поговорить именно про них). Здесь хочется отметить, что а) наши методы позволяют перечислить подалгебры в алгебре Витта произвольной конечной коразмерности; б) описание подалгебр коразмерности 1 было получено в 2018 году Ондрусом и Виснером [3]. Отправной точкой служат следующие два утверждения: а) любая подалгебра конечной коразмерности в алгебре Вирасоро содержит центр алгебры Вирасоро; б) для всякой подалгебры $\mathfrak{k}$ алгебры Витта конечной коразмерности есть такой конечный набор точек $S \subset \mathbb{C}^{\times}$ (мы называем его носителем подалгебры) и число n, для которых $\mathfrak{k}$ содержится в алгебре Ли векторных полей с полюсами во всех точках S и содержит алгебру векторных полей, имеющих полюса во всех точках S порядка по крайней мере n.

Алгебра Витта и алгебра Вирасоро. Напомню, что *алгеброй Витта* W называется алгебра Ли алгебраических векторных полей $\mathbb{C}[t, t^{-1}]\partial_t$ на $\mathbb{C}^{\times}$; центральное расширение W, задаваемое формулами

$$[f\partial_t, g\partial_t] = (fg' - f'g)\partial_t + \mathrm{Res}_0(f'g'' - g'f'')z \quad (z \text{ централен}),$$

называется алгеброй Вирасоро.

Результаты

Подалгебры в W коразмерности 2			
	$\mathrm{sdeg}(\mathfrak{k})$	$f_{\mathfrak{k}}$	Дополнительные образующие
$W((t-x)(t-y))$	—	$(t-x)(t-y)$	—
$W^{2;1}_{x;\alpha}$	1	$(t-x)^3$	$(t-x)\partial + \alpha(t-x)^2\partial$
$W^{2;2}_{x;\alpha}$	2	$(t-x)^4$	$(t-x)\partial + \alpha(t-x)^3\partial$, $(t-x)^2\partial$

Подалгебры в W коразмерности 3			
	$\mathrm{sdeg}(\mathfrak{k})$	$f_{\mathfrak{k}}$	Дополнительные образующие или явное описание
$W(f_{\mathfrak{k}})$	–	$(t-x)(t-y)(t-z)$	–
$W^{3A}_{x,y;\alpha,\beta}$	–	$(t-x)^2(t-y)^2$	$(t-x)(t-y)(\alpha t+\beta)\partial$, $\alpha x+\beta, \alpha y+\beta \neq 0, x\neq y$
$W^{3B1}_{x,y;\alpha}$	–	$(t-x)^3(t-y)$	$W^{2;1}_{x;\alpha}\cap W(t-y)$, $x\neq y$
$W^{3B2}_{x,y;\alpha}$	–	$(t-x)^4(t-y)$	$W^{2;2}_{x;\alpha}\cap W(t-y)$, $x\neq y$
$W^{3C1}_{x;\alpha}$	$0,2$	$(t-x)^4$	$(t-x)^2\partial+\alpha(t-x)^3\partial$
$W^{3C2}_{x;\alpha,\beta}$	$1,2$	$(t-x)^4$	$(t-x)\partial+\alpha(t-x)^2\partial+\beta(t-x)^3\partial$
$W^{3C3}_{x;\alpha,\beta}$	$1,3$	$(t-x)^5$	$(t-x)\partial+\alpha(t-x)^2\partial+\beta(t-x)^4\partial$, $(t-x)^3\partial-\alpha(t-x)^4\partial$
$W^{3C4}_{x;\alpha,\beta}$	$1,4$	$(t-x)^6$	$(t-x)\partial+\alpha(t-x)^2\partial+\beta(t-x)^5\partial$, $(t-x)^3\partial-\alpha^2(t-x)^5\partial$, $(t-x)^4\partial-2\alpha(t-x)^5\partial$
$W^{3C5}_{x;\alpha,\beta}$	$2,3$	$(t-x)^5$	$(t-x)\partial+\alpha(t-x)^3\partial+\beta(t-x)^4\partial$, $(t-x)^2\partial+\frac{\alpha}{2}(t-x)^4\partial$

В таблицах используются следующие обозначения:

• описание $\mathfrak{k}$ дано в последней строчке и приводится или через набор дополнительных образующих, или через пересечение двух других подалгебр.

• α, β — это параметры, принимающие произвольные значения в $\mathbb{C}$ для всех случаев кроме $W^{3A}_{x,y;\alpha,\beta}$ (для этого случая релевантные условия для α, β даны в таблице);

• x, y, z — это параметры, принимающие произвольные значения в $\mathbb{C}^{\times}$, а ограничения на них (в тех случаях, когда они есть) даны в таблице.

Список литературы

[1] A.V. Petukhov, S.J. Sierra. Ideals in the enveloping algebra of the positive Witt algebra. Algebras and Representation Theory **23** (2020), no. 4, 1569–1599.

[2] A.V. Petukhov, S.J. Sierra. The Poisson spectrum of the symmetric algebra of the Virasoro algebra, arXiv: `math.RA/2106.02565`.

[3] M. Ondrus, E. Wiesner. Modules induced from polynomial subalgebras of the Virasoro algebra. J. Algebra **504** (2018), 54–84.

Лиевская структура многообразий разрешимых йордановых алгебр

А.В. Попов
Ульяновск, Россия
`klever176@rambler.ru`

Будем предполагать, что основное поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику.

Пусть L — произвольная алгебра Ли, G — алгебра Грассмана счетного ранга. Известно [1], [2], что пространство $J(L) = G \otimes L \oplus G_1$ с операцией умножения $\circ$, заданной правилами

$$(a \otimes g) \circ h = h \circ (a \otimes g) = a \otimes gh, \text{ если } g \in G_0,\ h \in G_1,$$

$$(a \otimes g) \circ (b \otimes h) = [a, b] \otimes gh, \text{ если } g, h \in G_1,$$

является йордановой алгеброй с тождествами

$$x^4 \equiv 0, \qquad (x_1 x_2)(y_1 y_2)(z_1 z_2) \equiv 0. \tag{1}$$

Более того, данная конструкция определяет мономорфизм $\mathcal{J}$ из решетки многообразий алгебр Ли в решетку многообразий йордановых алгебр, удовлетворяющих тождествам (1). А именно, пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр Ли и L — произвольная алгебра Ли, порождающая $\mathcal{V}$, то есть $\mathcal{V} = \mathrm{var}(L)$. Тогда $\mathcal{J}(\mathcal{V}) = \mathrm{var}(J(L))$.

Для многообразия разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ определим обёртывающее многообразие алгебр Ли $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ как наименьшее лиевское многообразие такое, что $\mathcal{W} \subset \mathcal{J}(\mathcal{L}(\mathcal{V}))$, где $\mathcal{W}$ — подмногообразие $\mathcal{V}$, состоящее из всех алгебр, удовлетворяющих тождествам (1).

Как оказывается, многие свойства произвольного многообразия разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ полностью определяются его обёртывающим многообразием $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. Ниже представлены некоторые из таких свойств.

1. Для произвольной алгебры A определим по индукции её сильно разрешимые степени $A^{((k))}$: $A^{((0))} = A$, $A^{((k))}$ — наименьший идеал A, содержащий в себе $A^{((k-1))}A^{((k-1))}$. Многообразие $\mathcal{V}$ сильно разрешимо, если для некоторого k любая алгебра A из $\mathcal{V}$ сильно разрешима индекса не более k, то есть $A^{((k))} = 0$.

   Теорема 1. Многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ сильно разрешимо тогда и только тогда, когда многообразие $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ разрешимо.

2. Многообразие $\mathcal{V}$ называется T-первичным, если произведение любых ненулевых T-идеалов (то есть идеалов, инвариантных относительно эндоморфизмов алгебры) в свободной алгебре данного многообразия не равно нулю.

   Теорема 2. Если многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ является T-первичным, то $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ также T-первично и, кроме того, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам (1).

3. **Теорема 3.** Многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ имеет экспоненциально ограниченный рост тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ имеет экспоненциально ограниченный рост.

Список литературы

[1] А.В. Попов. Йордановы алгебры лиева типа. Мат. труды **22** (2019), no. 1, 2019, 127–177.

[2] И.П. Шестаков. Альтернативные и йордановы супералгебры. Труды X Сибирской Школы «Алгебра и Анализ». Новосибирск, ИМ СО РАН, 1997, 157–169.

Димерные модели и q-разностные уравнения Пенлеве

Д.Е. Раченков

МФТИ, Москва, Россия

rachenkov.de@phystech.edu

В работе [5] Х. Сакай показал связь обыкновенных *уравнений Пенлеве* с геометрией рациональных поверхностей, ввёл понятие *дискретного уравнения Пенлеве* и его *динамик*. В этом подходе уравнению Пенлеве соответствует подсистема корней в $E_8^{(1)}$. Группа Вейля этой подсистемы отвечает симметриям уравнения, её подгруппа трансляций задаёт дискретное уравнение Пенлеве, а элементы этой подгруппы отвечают динамикам.

Симметрии дискретных уравнений Пенлеве можно описать иным способом. Берштейн, Гавриленко и Маршаков [1] предложили описание симметрий класса дискретных уравнений Пенлеве, а именно *q-разностных*, автоморфизмами некоторых *кластерных многообразий* (см. [3]). Доклад основан на дипломной работе автора под научным руководством М. Берштейна. В работе изучаются *колчаны*, связанные с этими кластерными многообразиями.

Почти все данные колчаны могут быть получены из *допустимых димерных моделей* (см. [4]). Автором исследуется связь q-разностных уравнений Пенлеве и димерных моделей и доказывается

Теорема. Для q-разностных уравнений Пенлеве типов $A_8^{(1)}$, $A_7^{(1)}$, $A_7^{(1)'}$, $A_6^{(1)}$, $A_5^{(1)}$ динамики реализуются композициями димерных преобразований, не меняющих димерную статсумму.

Используя результаты работы [6] и эту димерную реализацию, удаётся построить нетривиальные функторы автоэквивалентности на производной категории модулей над *якобиевой алгеброй* (см. [2]), соответствующей данной димерной модели. Такая категория оказываются эквивалентна $D^b(X)$, где X — тотальное пространство канонического расслоения некоторой поверхности дель Пеццо.

Список литературы

[1] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov. Cluster integrable systems, q-Painlevé equations and their quantization. J. High Energy Phys. **2018** (2018), no. 2, article number 77, 1–33.
[2] H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky. Quivers with potentials and their representations. I. Mutations. Selecta Math. (N.S.) **14** (2008), no. 1, 59–119.
[3] V. Fock, A. Goncharov. Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **103** (2006), 1–211.
[4] A.B. Goncharov, R. Kenyon. Dimers and cluster integrable systems. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4 **46** (2013), no. 5, 747–813.
[5] H. Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. Comm. Math. Phys. **220** (2001), no. 1, 165–229.
[6] J. Vitoria. Mutations Vs. Seiberg duality. J. Algebra **321** (2009), 816–828.

Каноническая билинейная форма и характеры Эйлера

А.Н. Сергеев
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
sergeevan@info.sgu.ru

Доклад основан на работе автора [1].

В докладе дана явная формула для канонической билинейной формы на кольце Гротендика конечномерных представлений супергруппы $GL(n,m)$. В качестве приложения приводится алгоритм дающий разложения характеров Эйлера в терминах неприводимых характеров.

Список литературы

[1] A.N. Sergeev Canonical bilinear form and Euler characters, arXiv: math.RT/2101.01370v3 (2021).

Об $\mathbb{A}^1$-фундаментальной группе групп Шевалле

С.С. Синчук
Санкт-Петербургский государственный университет, Исследовательская лаборатория им. П.Л. Чебышева, Санкт-Петербург, Россия
sinchukss@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с А. Лавреновым и Е. Воронецким, готовящейся к публикации. Цель нашей работы состоит в вычислении пучков $\mathbb{A}^1$-фундаментальных групп схем Шевалле–Демазюра $\mathrm{G}_{sc}(\Phi, -)$, где Φ — неприводимая система корней с простыми связями достаточно большого ранга.

Пусть A — регулярное кольцо конечной размерности Крулля, содержащее произвольное поле k. Напомним, что для A-схемы X пучок $\mathbb{A}^1$-гомотопических групп $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(X)$ определяется как $R \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{A}^1}}(S^n \wedge \mathrm{Spec}(R)_+, X)$, где через $\mathcal{H}_*^{\mathbb{A}^1}$ обозначена пунктированная нестабильная $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория над A. Из результатов работы [1] следует что для произвольной изотропной редуктивной групповой схемы G, определённой над A, пучок $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(G)$ совпадает с пучком -групп Каруби–Вилламайора $R \mapsto \mathrm{KV}_{n+1}(G, R)$. Напомним, что эти группы определяются как гомотопические группы с номером n от симплициальной группы $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(G) = G(R[\Delta^\bullet])$ (иногда также называемой сингулярной резольвентой).

Естественным вопросом представляется нахождение явного описания этих гомотопических групп. Так, в недавней работе [4] А. Ставрова показала, что группа $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(G)(A)$ совпадает с группой $K_1^G(A)$ (т.н. нестабильным K_1-функтором, промоделированным по G), при условии, что изотропный ранг группы G по крайней мере 2.

$\mathbb{A}^1$-фундаментальные группы изотропных групп остаются куда менее изученными объектами. Например, в [6] было показано, что группа $\mathrm{KV}_2(G, k)$ совпадает с мультипликатором Шура $\mathrm{H}_2(G(k), \mathbb{Z})$ в случае, когда поле k бесконечно. Данное вычисление опирается на теорему М. Вендта о гомотопической инвариантности кольца гомологий изотропных редуктивных групп, опирающейся, в свою очередь, на глубокий результат Б. Марго о структуре билдингов Брюа–Титса. В свою очередь, нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Равенство* $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(G)(A) = \mathrm{K}_2(\Phi, A)$ *выполняется в следующих случаях:*

- $\Phi = \mathsf{A}_\ell$ *для* $\ell \geqslant 4$;

- $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ *для* $\ell \geqslant 7$ *при дополнительном предположении* $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

Здесь через $\mathrm{K}_2(\Phi, A)$ обозначено ядро естественного гомоморфизма из группы Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, A)$ в группу точек односвязной схемы Шевалле–Демазюра $\mathrm{G}_{sc}(\Phi, A)$. Случай $\Phi = \mathsf{A}_\ell$ теоремы, по существу, является следствием результатов [5], в то время, как случай $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ опирается на недавние результаты авторов, в частности, на основной результат [2].

Ввиду [1], для доказательства Теоремы 1 достаточно доказать $\mathbb{A}^1$-инвариантность функтора $\mathrm{K}_2(\Phi, -)$, что, в некотором смысле, является аналогом для функтора K_2 известной проблемы Серра об описании проективных модулей над кольцами многочленов. Из факта $\mathbb{A}^1$-инвариантности для $\mathrm{K}_2(\Phi, -)$ можно получить явные задания для групп Шевалле над кольцами многочленов от многих переменных при помощи образующих и соотношений. Данные задания являются широким обобщением классических результатов о задании групп Шевалле над кольцом многочленов от одной переменной над полем, см., например, [3].

Список литературы

[1] A. Asok, M. Hoyois, M. Wendt. Affine representability results in $\mathbb{A}^1$–homotopy theory, II: Principal bundles and homogeneous spaces, Geom. Top. **22** (2018), no. 2, 1181–1225.

[2] A. Lavrenov, S. Sinchuk. A Horrocks-type theorem for even orthogonal K_2. Doc. Math. **25** (2020), 767–810.

[3] U. Rehmann. Präsentationen von Chevalleygruppen über $k[t]$, preprint, 1975.

[4] A. Stavrova. $\mathbb{A}^1$-invariance of non-stable K_1-functors in the equicharacteristic case, arXiv: `math.KT/1912.05424` (2019).

[5] M. Tulenbaev. The Steinberg group of a polynomial ring. Sb. Math. **45** (1983), no. 1, 139–154.

[6] K. Völkel, M. Wendt. On $\mathbb{A}^1$-fundamental groups of isotropic reductive groups, C. R. Math. **354** (2016), no. 5, 453–458.

Комбинаторное описание многочленов Шуберта для групп Вейля типов B, C и D

Е.Ю. Смирнов
НИУ ВШЭ, Независимый Московский университет, Москва, Россия
esmirnov@hse.ru

Классический результат А.Бореля гласит, что кольцо когомологий многообразия полных флагов $\mathrm{GL}(n)/B$ изоморфно фактору кольца многочленов от n переменных по идеалу, порождённому симметрическими многочленами без свободного члена. С другой стороны, в нем существует замечательный базис из классов Шуберта — классов замыканий орбит борелевской подгруппы. В 1970–80-х гг. И.Н. Бернштейн, И.М. Гельфанд и С.И. Гельфанд [1] и независимо А. Ласку и М.-П. Шютценберже [4] выписали набор явных полиномиальных представителей классов Шуберта, которые называются многочленами Шуберта и обладают рядом замечательных свойств. Они получаются комбинаторно как производящие функции некоторых диаграмм (конфигураций псевдолиний), называемых *pipe dreams*; отсюда, в частности, следует положительность их коэффициентов.

Ту же задачу можно рассмотреть и для многообразий флагов G/B других классических групп: $\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{Sp}(2n)$. Многочлены Шуберта для классических групп были определены С. Билли и М. Хайманом [2] в 1995 году; в 2011 г. Т. Икеда, Л. Михалча и Х. Нарусэ [3] получили их T-эквивариантные аналоги, т.е. представители классов Шуберта в кольце T-эквивариантных когомологий многообразия G/B. В докладе будет рассказано об аналогах pipe dreams для этих случаев, которые возникли в нашей совместной работе с А.А. Тутубалиной [5]. Если позволит время, я также упомяну связь pipe dreams с многогранниками Гельфанда–Цетлина.

Работа выполнена при поддержке фонда «Базис» и РФФИ, проект 20–01–00091–а.

Список литературы

[1] И.Н. Бернштейн, И.М. Гельфанд, С.И. Гельфанд. Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P. УМН **28** (1973), no. 3(171), 3–26.

[2] S. Billey, M. Haiman. Schubert polynomials for the classical groups. Journal of the American Mathematical Society **8** (1995), no. 2, 443–482.

[3] T. Ikeda, L.C. Mihalcea, H. Naruse. Double Schubert polynomials for the classical groups. Advances in Mathematics **226** (2011), no. 1, 840–886.

[4] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger. Polynômes de Schubert. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), no. 13, 447–450.
[5] E. Smirnov, A. Tutubalina. Pipe dreams for Schubert polynomials of the classical groups. Preprint, 36 p., arXiv: `math.CO/2009.14120` (2020).

Короткие SL_2-структуры на простых алгебрах Ли

Р.О. Стасенко
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
`theromestasenko@yandex.ru`

Известна классическая конструкция Титса–Кантора–Кёхера, позволяющая по простой йордановой алгебре J построить простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, имеющую вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(J) \oplus \mathfrak{sl}_2(J).$$

Теорема Титса–Кантора–Кёхера утверждает, что между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли, снабжёнными вышеуказанным разложением, существует взаимно однозначное соответствие.

Конструкцию Титса–Кантора–Кёхера можно интерпретировать как линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое разлагается на неприводимые представления размерностей 1 и 3. Естественным обобщением является следующее понятие. Пусть S — редуктивная алгебраическая группа. S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\Phi\colon S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

В докладе рассматриваются SL_2-структуры. SL_2-структуру назовем *короткой*, если представление Φ группы SL_2 разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3. При этом изотипное разложение представления Φ будет иметь вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\mathbb{C}^2 \otimes J_1\right) \oplus \left(\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2\right).$$

Конструкция Титса–Кантора–Кёхера получается при $J_1 = 0$. Доклад будет посвящён случаю $J_1 \neq 0$.

Аналогично теореме Титса–Кантора–Кёхера, будет установлено взаимно однозначное соответствие между простыми алгебрам Ли с короткой SL_2-структурой с $J_1 \neq 0$ и так называемыми простыми симплектическими тройками Ли–Йордана $(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2)$, где J_1 — симплектическое пространство, $\mathfrak{g}_0$ —

редуктивная подалгебра Ли в $\mathfrak{sp}(J_1)$, а J_2 — простая йорданова подалгебра симметрических операторов на J_1, причём алгебры J_2 и $\mathfrak{g}_0$ не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств в J_1. Будет дана полная классификация коротких SL_2-структур на простых алгебрах Ли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2019–1621, а также при поддержке гранта РФФИ № 20–01–00515 А.

Классификация структур супералгебр Хопфа на квантовой супералгебре Ли $U_q(sl(m,n))$

В.А. Стукопин
МФТИ, Москва, Россия
`stukopin@mail.ru`

Доклад основан на работах [1], [2].

В докладе будет дана классификация структур супералгебры Хопфа на квантовой супералгебре $U_q(sl(m,n))$ как в случае, когда параметр квантования является как корнем из единицы, так и в случае параметра квантования общего положения. Известно, что супералгебра Ли $sl(m,n)$ может быть задана разными матрицами Картана (или, что то же самое, разными диаграммами Дынкина), как и е квантование – квантовая супералгебра $U_q(sl(m,n))$. Но оказывается, что разным диаграммам Дынкина, вообще говоря, соответствуют неизоморфные квантовые супералгебры Хопфа. Мы даем классификацию возможных структур супералгебры Хопфа на заданной ассоциативной квантовой супералгебре $U_q(sl(m,n))$. Мы описываем также изоморфизмы между квантовыми ассоциативными супералгебрами типа $U_q(sl(m,n))$, как сохраняющими, так и меняющими структуру супералгебры Хопфа. Главную роль в таком описании играет квантовый группоид Вейля и его представление автоморфизмами квантовой супералгебры. Мы также получаем явные формулы для универсальных R-матриц и описываем связь между ними в терминах твистов, дающих представление элементов квантового группоида Вейля.

Список литературы

[1] A. Mazurenko, V.A. Stukopinю $\mathfrak{R}$-matrix for quantum superalgebra $\mathfrak{sl}(2|1)$ at roots of unity and its application to centralizer algebras, arXiv: `math.QA/1909.11613` (2019).

[2] A. Mazurenko, V.A. Stukopin. Classification of Hopf superalgebras associated with quantum special linear superalgebra at roots of unity using Weyl groupoid, arXiv: `math.QA/2006.06610` (2020).

Расстановки ладей в системах корней G_2 и F_4 и коприсоединённые орбиты

М.А. Сурков

Самарский университет, Самара, Россия

victorsumaev@yandex.ru

Пусть N — нильпотентная комплексная группа Ли, $\mathfrak{n}$ — её алгебра Ли, $\mathfrak{n}^*$ — двойственное пространство. Группа N действует на алгебре Ли $\mathfrak{n}$ с помощью присоединённого представления; двойственное представление в пространстве $\mathfrak{n}^*$ называется *коприсоединённым.* Согласно методу орбит А.А. Кириллова, орбиты коприсоединённого представления играют ключевую роль в теории представлений группы N [6].

Нас будет интересовать случай, когда N — унипотентный радикал борелевской подгруппы B простой комплексной алгебраической группы G. Полная классификация коприсоединённых орбит в $\mathfrak{n}^*$ является дикой задачей, поэтому особый интерес представляет изучение тех или иных важных классов или серий орбит. Почти все сколь-нибудь полно исследованные на сегодня орбиты относятся к так называемым орбитам, ассоциированным с расстановками ладей в системах корней.

Пусть Φ — система корней группы G, Φ^+ — множество положительных корней относительно B, $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — базис алгебры $\mathfrak{n}$, состоящий из корневых векторов, $\{e_\alpha^*,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$. *Расстановкой ладей* называется подмножество $D \subset \Phi^+$, состоящее из корней с попарно неположительными скалярными произведениями. Для любого отображения $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$ определим линейную форму $f_{D,\xi} = \sum_{\beta\in D} \xi(\beta) e_\beta^* \in \mathfrak{n}^*$; пусть $\Omega_{D,\xi} \subset \mathfrak{n}^*$ — её орбита. Мы будем говорить, что орбита $\Omega_{D,\xi}$ *ассоциирована* с расстановкой D. К примеру, в случае $\Phi = A_{n-1}$ все орбиты максимальной размерности ассоциированы с одной и той же ортогональной расстановкой ладей, называемой *каскадом Костанта.*

Назовём расстановку D *несингулярной*, если из того, что α и β лежат в D следует, что $\alpha - \beta \notin D$. Например, для $\Phi = A_{n-1}$ все расстановки являются несинуглярными.

Орбиты, ассоциированные с ортогональными расстановками ладей (в частности, с каскадами Костанта) подробно изучались в работах [2], [3], [7], [8]. В процессе изучения возникла следующая гипотеза.

Гипотеза. *Пусть D — несингулярная ортогональная расстановка ладей, ξ_1, ξ_2 — разные отображения из D в $\mathbb{C}^\times$. Тогда Ω_{D,ξ_1} и Ω_{D,ξ_2} не совпадают.*

Для $\Phi = A_{n-1}$ это следует из результатов А.Н. Панова [8]. Для остальных классических серий B_n, C_n, D_n доказательство гипотезы сводится, в сущности, к случаю A_{n-1}. В работе [6] М.В. Игнатьев и А.А. Шевченко доказали, что гипотеза верна при $\Phi = E_6$, E_7 или E_8 для некоторых (но не всех) расстановок ладей. Основной результат моего доклада звучит так.

Теорема. *Гипотеза верна для* $\Phi = G_2$ *или* F_4.

Для G_2 это несложное упражнение, а для F_4 требуется модификация аргумента из работы [6], которая, по сути, тоже сводит задачу к случаю A_{n-1}, где можно применить более сильные результаты К. Андре [1].

Доклад основан на совместной работе с М.В. Игнатьевым [4].

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075–02–2021–1393).

Список литературы

[1] C.A.M. Andrè. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group. J. Algebra **176** (1995), 959–1000.

[2] M.V. Ignat'ev. Orthogonal subsets of classical root systems and coadjoint orbits of unipotent groups. Math. Notes **86** (2009), no. 1, 65–80, arXiv: `math.RT/0904.2841`.

[3] M.V. Ignat'ev. Orthogonal subsets of root systems and the orbit method. St. Petersburg Math. J., **22** (2011), no. 5, 777–794; arXiv: `math.RT/1007.5220`

[4] M.V. Ignatev, M.A. Surkov. Rook placements in G_2 and F_4 and associated coadjoint orbits. Communications in Math., accepted; arXiv: `math.RT/2107.03221` (2021).

[5] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Centrally generated primitive ideals of $U(\mathfrak{n})$ for exceptional types. J. Algebra **565** (2021), 627–650, arXiv: `math.RT/1907.04219`.

[6] A.A. Kirillov. Lectures on the orbit method. Grad. Stud. in Math. **64**, AMS, 2004.

[7] B. Kostant. The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group, Moscow Math. J. **12** (2012), no. 3, 605–620.

[8] A.N. Panov. Involutions in S_n and associated coadjoint orbits. J. Math. Sci. **151** (2008), 3018–3031.

Группы автоморфизмов и когомологии Дольбо комплексных момент-угол многообразий

Г.В. Тароян
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
tgv628@yahoo.com

Доклад основан на работе автора под руководством Т.Е. Панова [1].

Пусть Σ — полный веер с m лучами в $\mathbb{R}^n$. Определим *универсальный торсор веера* Σ — квазиаффинное многообразие $U(\Sigma)$ — следующим образом:

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus \big\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \;\big|\; z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0 \iff \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \Sigma\big\}$$

Выберем на каждом из лучей веера Σ образующую ρ_i. Тогда определён *оператор веера*:

$$A_\Sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad e_i \mapsto \rho_i.$$

Рассмотрим вещественную группу Ли:

$$H_\Sigma = \exp(\ker A_\Sigma).$$

Пусть $m - n$ — чётное число, тогда на H_Σ можно ввести комплексную структуру. Фактор-многообразие

$$Z_\Sigma = U(\Sigma)/H_\Sigma$$

называется в этом случае *комплексным момент-угол многообразием*, ассоциированным с веером Σ.

Обозначим через $\widetilde{\mathrm{Aut}}(\Sigma)$ нормализатор в группе регулярных автоморфизмов многообразия $U(\Sigma)$ замыкания по Зарисскому группы H_Σ в комплексном торе $(\mathbb{C}^\times)^m$. Структура этой группы была подробна описана Д. Коксом в [2].

Теорема. Группа $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(Z_\Sigma)$ голоморфных автоморфизмов многообразия Z_Σ вписывается в естественную точную последовательность:

$$1 \to H_\Sigma \to \widetilde{\mathrm{Aut}}(\Sigma) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(Z_\Sigma) \to 1.$$

Список литературы

[1] Г. Тароян. Группы автоморфизмов и когомологии Дольбо комплексных момент-угол многообразий. Препринт, 2021.

[2] D. Cox. Erratum to “The homogeneous coordinate ring of a toric variety”. Journal of Algebraic Geometry **23** (2014), no. 2, 393–398.

Когомологии Галуа связных редуктивных групп над $\mathbb{R}$

Д.А. Тимашёв

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

timashev@mccme.ru

Когомологии Галуа служат универсальным инструментом для изучения алгебраических групп и их действий, определённых над алгебраически незамкнутым полем $\Bbbk$. Когомологии Галуа применяются в диофантовых задачах теории алгебраических групп, в классификации $\Bbbk$-форм различных объектов, таких, как конечномерные алгебры или квазипроективные многообразия, в описании $G(\Bbbk)$-орбит на множестве $\Bbbk$-точек $X(\Bbbk)$ алгебраического многообразия X с действием алгебраической группы G, определённым над $\Bbbk$, и т.п. Особый интерес представляют когомологии Галуа алгебраических групп над числовыми полями. Их вычисление по существу сводится к когомологиям Галуа над $\Bbbk = \mathbb{R}$ [4, Cor. 4.5], [2, Thm. 5.11].

Доклад посвящён вычислению (первых, неабелевых) когомологий Галуа связных линейных алгебраических групп над $\mathbb{R}$. Разложение Леви $G = G_{\mathrm{uni}} \rtimes G_{\mathrm{red}}$ линейной алгебраической группы G вместе с тривиальностью множества когомологий $H^1(\mathbb{R}, G_{\mathrm{uni}})$ сводит задачу к случаю редуктивной группы.

Пусть теперь G — связная редуктивная группа, определённая над $\mathbb{R}$. Выберем максимальный анизотропный тор $T_0 \subseteq G$ и рассмотрим единственный максимальный тор $T = Z_G(T_0)$, содержащий T_0. Положим

$$N_0 = \{n \in N_G(T_0) \mid n\bar{n}^{-1} \in T_0\}$$

(где черта обозначает операцию комплексного сопряжения на G). Группа N_0 действует на T_0 *скрученными сопряжениями*: $t \overset{n}{\mapsto} nt\bar{n}^{-1}$. Из основного результата работы [1] несложно вывести, что естественное отображение $H^1(\mathbb{R}, T) \to H^1(\mathbb{R}, G)$ задаёт биекцию

$$(T_0)_2/\widehat{W}_0 \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, G),$$

где $(T_0)_2$ — множество элементов порядка ≤ 2 в T_0, а $\widehat{W}_0$ — конечная факторгруппа группы N_0, эффективно действующая на T_0.

«Логарифмирование» этого действия приводит к кристаллографической группе $\widetilde{W}_0 = X_0^\vee \rtimes W_0$ движений евклидова пространства $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R}) = \operatorname{Lie} T_0(\mathbb{R})$, где $X_0^\vee$ — проекция решётки кохарактеров $X^\vee$ тора T в $\mathfrak{t}_0$, действующая на $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R})$ параллельными переносами, а группа $W_0 = N_0/(N_0 \cap T)$ действует ортогональными линейными преобразованиями. Таким образом, $T_0(\mathbb{R})/\widehat{W}_0$ отождествляется с $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R})/\widetilde{W}_0$.

Рассмотрим разложение в почти прямое произведение $G = G^{\mathrm{ss}} \cdot S$, где G^{ss} — полупростая часть, а S — связный центр группы G. Решётка $X_0^\vee$ содержит подрешётку конечного индекса $Q_0^\vee \oplus \Lambda_0^\vee$, прямые слагаемые которой суть проекции решётки кокорней $Q^\vee$ группы G и решётки кохарактеров $\Lambda^\vee$ тора S в $\mathfrak{t}_0$, соответственно. Группа $\widetilde{W}_{\mathrm{r}} = Q_0^\vee \rtimes W_0$ порождена отражениями, и её фундаментальная область есть декартово произведение

$$\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m \times \mathfrak{s}_0(\mathbb{R})$$

симплексов Δ_i, метрическая структура которых задаётся аффинными диаграммами Дынкина $\mathbb{R}$-простых факторов группы G^{ss}, и евклидова пространства $\mathfrak{s}_0(\mathbb{R}) = \mathfrak{t}_0(\mathbb{R}) \cap \operatorname{Lie} S$.

Мы описываем конечное подмножество

$$\mathcal{K}(G) \subset \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m \times \mathfrak{s}_0(\mathbb{R})/\Lambda_0^\vee,$$

$\widetilde{W}_0$-орбиты точек которого соответствуют $\widehat{W}_0$-орбитам в $(T_0)_2$. Точки множества $\mathcal{K}(G)$ параметризуются неотрицательными целочисленными отметками при вершинах вышеупомянутых аффинных диаграмм Дынкина и элементами некоторой конечной подгруппы компактного тора $\mathfrak{s}_0(\mathbb{R})/\Lambda_0^\vee$, удовлетворяющими условиям согласованности. В итоге мы получаем эффективное комбинаторное описание когомологий Галуа.

Теорема. $H^1(\mathbb{R}, G) \simeq \mathcal{K}(G)/F_0$, где $F_0 = X_0^\vee/(Q_0^\vee \oplus \Lambda_0^\vee)$ — конечная абелева группа с явно заданным действием на множестве $\mathcal{K}(G)$.

Доклад основан на совместной работе с М.В. Боровым, выполненной при финансовой поддержке РФФИ по гранту 20–01–00091 и Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2019–1621. Основные результаты для полупростого случая опубликованы в [3].

Список литературы

[1] М.В. Боровой. Когомологии Галуа вещественных редуктивных групп и вещественные формы простых алгебр Ли. Функц. анализ и его прил. **22** (1988), no. 2, 63–64.

[2] M. Borovoi. Abelian Galois cohomology of reductive groups. Mem. Amer. Math. Soc. **132**, no. 626, 1998.

[3] M. Borovoi, D.A. Timashev. Galois cohomology of semisimple groups via Kac labelings. Transform. Groups, 2021, published online, DOI: `10.1007/s00031-021-09646-z`.
[4] J.-J. Sansuc. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. J. Reine Angew. Math. **327** (1981), 12–80.

Положительные грассманианы, грассмановы ожерелья и колчанные грассманианы для циклических колчанов

Е.Б. Фейгин
НИУ ВШЭ, Сколтех, Москва, Россия
evgfeig@gmail.com

Положительные грассманианы $\mathrm{Gr}(k,n)_+$ над вещественными числами были определены и изучены А. Постниковым. В частности, им было построено клеточное разбиение $\mathrm{Gr}(k,n)_+$ и определён ряд комбинаторных объектов, которые параметризуют клетки. Одним из таких объектов являются грассмановы ожерелья — наборы подмножеств конечного множества, удовлетворяющие специальным условиям. Для каждой пары натуральных чисел $k<n$ мы строим комплексное алгебраическое многообразие $X(k,n)$, клетки которого также параметризуются грассмановыми ожерельями. Эти многообразия являются колчанными грассманианами для циклических колчанов. Мы изучаем алгебро-геометрические и комбинаторные свойства многообразий $X(k,n)$. В частности, мы описываем неприводимые компоненты $X(k,n)$ и устанавливаем связь между полиномами Пуанкаре $\mathrm{Gr}(k,n)_+$ и $X(k,n)$. Доклад основан на совместной работе с Мартиной Ланини и Александром Пютцем.

О феномене продолжения Гартогса в сферических многообразиях

С.В. Феклистов
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
sergeyfe2017@yandex.ru

Доклад посвящён обобщению классической теоремы Гартогса о стирании компактных особенностей [3] на случай некомпактных комплексных сферических многообразий.

Пусть $(X,\mathcal{O})$ — связное приведённое комплексное аналитическое пространство.

Определение. Будем говорить, что X допускает феномен Гартогса, если для любой области $D\subset X$ и любого компактного множества $K\subset D$ такого, что $D \setminus K$ связно, гомоморфизм ограничения $H^0(D, \mathcal{O}_X) \to H^0(D \setminus K, \mathcal{O}_X)$ является изоморфизмом.

Используется когомологический подход, который восходит к работе Ж.-П. Серра [4], а именно, изучается группа когомологий $H^1_c(X, \mathcal{O})$. Оказывается, что для некоторого класса комплексных пространств (в который входят сферические многообразия) верно, что пространство допускает феномен Гартогса в том и только том случае, когда указанная группа тривиальна.

Прежде, чем сформулировать основной результат, введём следующие обозначения. Со сферическим однородным пространством G/H можно связать следующие данные:

- конус нормирований: $\mathcal{V}$ — множество всех G-нормирований поля $\mathbb{C}(G/H)$;
- множество цветов: $\mathcal{D}$ — все B-стабильные простые дивизоры G/H (где B — борелевская подгруппа в G);
- весовая решётка: $\Lambda := \mathbb{C}(G/H)^{(B)}/\mathbb{C}^*$ (это подрешетка в решётке характеров $\mathfrak{X}(T)$ максимального алгебраического тора $T \subset B \subset G$).

Заметим, что каждое нормирование $v\colon \mathbb{C}(G/H) \to \mathbb{Z}$ задаёт точку $\chi(v) \in Hom(\Lambda, \mathbb{Z})$ и $\mathcal{V}\otimes\mathbb{R}$ является выпуклым полиэдральным конусом в $Hom(\Lambda, \mathbb{R})$.

Пусть теперь X' — некомпактное сферическое многообразие и пусть X'' — его компактификация, являющаяся сферическим многообразием. Будем рассматривать случай, когда аналитическое множество $X'' \setminus X'$ является связным.

Пусть $\mathcal{V}(X'')$ — множество простых G-стабильных дивизоров X''. Положим

$$X := X'' \setminus \bigcup_{D \subset X', D \in \mathcal{V}(X'')} D.$$

Каждому B-стабильному простому дивизору D в X (это в точности элемент множества $\mathcal{V}(X) \cup \mathcal{D}$) соответствует нормирование v_D и точка $a_D := \chi(v_D) \in Hom(\Lambda, \mathbb{R})$.

Пусть $C = \{\lambda \in \Lambda \otimes \mathbb{R} \mid \langle \lambda, a_D \rangle \geq 0 \forall D \in \mathcal{V}(X) \cup \mathcal{D}\}$ и $\mathfrak{X}_+$ — конус доминантных характеров тора T.

Тогда имеем следующий результат.

Теорема. Многообразие X' допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}_+ \cap C = 0$.

Доказательство основано на некоторых результатах о представлениях редуктивных групп в пространствах Фреше (см. [1, Глава 5]).

Отметим, что случай, когда X' является торическим многообразием, был изучен в работе [2].

Список литературы

[1] D. Akhiezer. Lie Group Actions in Complex Analysis. Aspects of Mathematics **27**. Springer, Vieweg + Teubner Verlag, 1995.
[2] S. Feklistov, A. Shchuplev. The Hartogs extension phenomenon in toric varieties. J. Geom. Anal. (2021), `https://doi.org/10.1007/s12220-021-00710-4`.
[3] Fr. Hartogs. Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen. Münch. Ber. **36** (1906), 223–242.
[4] J.-P. Serre. Quelques problemes globaux relatifs aux varietes de Stein. Coll. Plus. Var., Bruxelles, 1953, 57–68.

Разрешимые нелиевы суперaлгебры Лейбница, у которых нильрадикал есть супералгебра Ли максимального нильиндекса

А.Х. Худойбердиев, Х.А. Муратова
Институт математики им. В.И. Романовского при АН РУз, Ташкент, Узбекистан
khabror@mail.ru, xalkulova@gmail.com

Изучение разных обобщений алгебр Ли является важной задачей, и такие объекты на протяжение многих лет активно исследуется со стороны многих алгебраистов. Супералгебры Ли и алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли. Супералгебры Ли возникли из свойств суперсимметрии в математической физике, и они зарекомендовали себя как универсальный объект в современной алгебре. Алгебры Лейбница были введены как алгебры, у которых всякий оператор правого умножения является дифференцированием. Раз супералгебры Лейбница обобщают не только алгебры Лейбница, но и супералгебры Ли, то, естественно, их изучение должно проходить в некоторой степени параллельно исследованиям данных многообразий.

Основные понятия и систематическое изложение основ супералгебр Ли даны в монографии В.Г. Каца [4]. Простые, полупростые суперлагебры Ли изучены в работах В.Г. Каца, Ф.А. Березина, В.С. Ретаха, а разрешимые супералгебры Ли, у которых нильрадикалом является алгебра Гейзенберга, рассматривались в работе [5]. Для изучения нильпотентных супералгебр устанавливаются некоторые условия, такие, как индекс нильпотентности, характеристическая последовательность и т.д. Например, в работе [2] были классифицированы нильпотентные супералгебры Ли с максимальным индексом нильпотентности $n+m$, где n, m — размерности чётной и нечётной частей суперaлгебры соответственно.

Понятие супералгебры Лейбница впервые было введено в работе С. Альбеверио, Ш.А. Аюпова и Б.А. Омирова [1] в 2005 году, и в этой работе доказано, что $(n+m)$-мерная супералгебра Лейбница имеет максимальный индекс нильпотентности $n+m+1$. Далее, нильпотентные супералгебры Лейбница с нильиндексом $(n+m)$ получены в серии работ Б.А. Омирова, А.Х. Худойбердиева и других.

В данной работе классифицируются нелиевы разрешимые супералгебры Лейбница, у которых нильрадикалом является $(m+2)$-мерная супералгебра Ли с нильиндексом $m+2$, то есть с максимальным нильиндексом.

Определение 1. $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра $G = G_0 \oplus G_1$ называется супералгеброй Ли, если она снабжена произведением $[-,-]$, которое удовлетворяет следующим условиям:
1. $[x,y] = -(-1)^{\alpha\beta}[y,x]$, для любых $x \in G_\alpha$, $y \in G_\beta$;
2. $(-1)^{\alpha\gamma}[x,[y,z]] + (-1)^{\beta\alpha}[y,[z,x]] + (-1)^{\gamma\beta}[z,[x,y]] = 0$ для любых $x \in G_\alpha$, $y \in G_\beta, z \in G_\gamma$ (супертождество Якоби).

Определение 2. $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра $L = L_0 \oplus L_1$ называется супералгеброй Лейбница, если она снабжена произведением $[-,-]$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - (-1)^{\alpha\beta}\big[[x,z],y\big]$$

для всех $x \in L$, $y \in L_\alpha$, $z \in L_\beta$ (супертождество Лейбница).

В следующей теореме приведена классификация нильпотентной супералгебры Ли максимального нильиндекса.

Теорема 1 [2]. Пусть G — супералгебра Ли нильиндекса $n+m$. Тогда $n=2$, m нечётное и существует базис $\{e_1, e_2, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ супералгебры G такой, что умножения в этом базисе имеют следующий вид:

$$N_{2,m}\colon [y_i, e_1] = y_{i+1},\ 1 \leqslant i \leqslant m-1,\ [y_{m+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1}e_2,\ 1 \leqslant i \leqslant \frac{m+1}{2}.$$

Надо отметить, что разрешимые супералгебры Ли с нильрадикалом $N_{2,m}$ были классифицированы в работах [3] и [4] разными методами. Мы приведем классификацию разрешимых нелиевых супералгебр Лейбница, у которых нильрадикалом является супералгебра Ли максимального нильиндекса $N_{2,m}$.

Лемма 1. Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ — разрешимая супералгебра Лейбница, у которой нильрадикал изоморфен $N_{2,m}$ и L_0 – алгебра Ли. Тогда L является супералгеброй Ли.

Из Леммы 1 следует, что нелиева супералгебра Лейбница с нильрадикалом $N_{2,m}$ имеет нелиевую чётную часть, то есть L_0 — нелиева алгебра Лейбница.

Теорема 2. Пусть L — нелиева разрешимая супералгебра Лейбница такая, что $L^2 \cong N_{2,m}$. Тогда $\dim(L) = m+3$ и L изоморфна следующей супералгебре:

$$M\colon \begin{cases} [e_1, x] = -[x, e_1] = e_1, & \\ [x, x] = e_2, & \\ [y_i, e_1] = y_{i+1}, & 1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ [y_{m+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} e_2, & 1 \leqslant i \leqslant \dfrac{m+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (i - \dfrac{m+1}{2}) y_i, & 1 \leqslant i \leqslant m. \end{cases}$$

Список литературы

[1] S. Albeverio, Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov. On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. in Algebra **33** (2005), no. 1, 159–172.
[2] J.R. Gómez, Yu. Khakimdjanov, R.M. Navarro. Some problems concerning to nilpotent Lie superalgebras. J. Geom. and Phys. **51** (2004), no. 4, 473–486.
[3] A.Kh. Khudoyberdiyev, M. Ladra, Kh.A. Muratova. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is a Lie superalgebra of maximal nilindex. Bulletin of NUUz: Math. and Nat. Sci. **2** (2019), no. 1(1), 52–68.
[4] V.G. Kac. Lie superalgebras. Advances in Math. **26** (1977), no. 1, 8–96.
[5] L.M. Camacho, J.M. Fernandez-Barroso, R.M. Navarro. Solvable Lie and Leibniz superalgebras with a given nilradical. Forum Math. **32** (2020), no. 5, 1271–1288.
[6] M.C. Rodriguez-Vallarte, G. Salgado, O.A. Sánchez-Valenzuela. On indecomposable solvable Lie superalgebras having a Heisenberg nilradical. J. Algebra and its Appl. **15** (2016), no. 10, 1650190.

Бесконечная транзитивность для групп автоморфизмов плоскости, порождённых конечным набором аддитивных подгрупп

А.И. Чистопольская
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
achistopolskaya@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с Григорием Тарояном [1].

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 и $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Рассмотрим следующие группы автоморфизмов аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$:

$$H_a\colon (x, y) \mapsto (x + \alpha y^a, y) \ \text{ и } \ K_b\colon (x, y) \mapsto (x, y + \beta x^b), \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,.$$

Группа $\mathbb{G}$ действует на множестве X *бесконечно транзитивно*, если для любых двух наборов различных точек $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_m)$ множества X найдётся такой элемент $g \in G$, что $g.x_i = y_i$ для $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 1. Группа $\langle H_1, K_{d_1}, \ldots, K_{d_m}\rangle$ действует на $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ бесконечно транзитивно тогда и только тогда, когда $\mathrm{GCD}(d_1 - 1, \ldots, d_m - 1) = 1$.

Теорема 2. Группа $\langle H_{c_1}, \ldots, H_{c_s}, K_{d_1}, \ldots, K_{d_m}\rangle$ действует на $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ бесконечно тразнитивно тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{Z}\left\langle \begin{pmatrix}-1 & c_1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}-1 & c_s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d_1 & -1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}d_m & -1\end{pmatrix}\right\rangle = \mathbb{Z}^2.$$

Список литературы

[1] A. Chistopolskaya, G. Taroyan. Infinite transitivity for automorphism groups of the plane $\mathbb{A}^2$ generated by a finite collection of additive subgroups, preprint.

Эйлерово-симметричные проективные торические многообразия

А.А. Шафаревич
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
shafarevich.a@gmail.com

Пусть $Z \subset \mathbb{P}^n$ — проективное алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{C}$. Мы будем говорить, что гладкая точка $x \in Z$ является *эйлеровой*, если существует действие группы $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}^n$ такое, что выполнены следующие три условия:

- многообразие Z инвариантно относительно этого действия;

- точка x — изолированная в Z неподвижная точка относительно этого действия;
- индуцированное действие на T_xZ состоит из скалярных операторов.

Многообразие Z является *эйлерово-симметричным*, если существует открытое подмножество $U \subset Z$, состоящее из эйлеровых точек. В [1] Baohua Fu и Jun-Muk Hwang классифицировали эйлерово-симметричные многообразия и доказали, что на всех эйлерово-симметричных многообразиях существует аддитивное действие.

В своем докладе я приведу доказательство того, что в случае проективных торических многообразий верно и обратное: любое проективное торическое многообразие, допускающее аддитивное действие, является эйлерово-симметричным. Также я дам описание всех эйлеровых точек на проективных торических многообразиях.

Список литературы

[1] B. Fu, J.-M. Hwang. Euler-symmetric projective varieties, arXiv: `math.AG/1707.06764` (2017).

Многообразия Севери–Брауэра и их автоморфизмы

К.А. Шрамов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
`costya.shramov@gmail.com`

Многообразие Севери–Брауэра над полем $\Bbbk$ — это такое многообразие, что его расширение скаляров на алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$ изоморфно проективному пространству. Я расскажу про некоторые результаты о группах автоморфизмов таких многообразий. Во-первых, мы обсудим ограниченность конечных подгрупп в группах автоморфизмов многообразий Севери–Брауэра, соответствующих центральным простым алгебрам с делением, определённым над полем, которое содержит все корни из единицы, а также более общие теоремы о конечных подгруппах в алгебраических группах над такими полями. Во-вторых, я опишу классификацию конечных групп, которые могут действовать на нетривиальных поверхностях Севери–Брауэра над полями нулевой характеристики, и сформулирую некоторые открытые вопросы в этом направлении.

Содержание

Научное издание

Девятая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Самара, Россия
21–26 августа 2021 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Ninth School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Samara, Russia
August 21–26, 2021

ABSTRACTS

Тексты статей печатаются в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев
Технический редактор А.В. Ярославцева

Подписано в печать 17.08.2021.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,25.
Тираж 130 экз. Заказ №161.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА» (САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.