8-я летняя школа-конференция по геометрическим методам математической физики

28 июня – 3 июля, 2021

Организации

Математический центр мирового уровня
"Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук"
(МЦМУ МИАН), г. Москва

Лаборатория геометрических методов математической физики
имени Н. Н. Боголюбова МГУ имени М. В. Ломоносова

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Конференция проводится при финансовой поддержке
Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН,
соглашение № 075-15-2019-1614) и Фонда Саймонса.

Названия и аннотации миникурсов

С.В.Болотин

Определитель Хилла периодической траектории

Аннотация: В 1886 году, изучая движение Луны, Хилл получил формулу, связывающую собственные значения матрицы монодромии периодической траектории с определителем бесконечной матрицы — гессиана функционала действия. Строгое доказательство формулы Хилла было дано Пуанкаре. Мы обсудим два многомерных обобщения формулы Хилла — для дискретных и непрерывных лагранжевых систем.

А.Ю.Буряк

Классификация интегрируемых уравнений в частных производных и пространства модулей алгебраических кривых

Аннотация: Мы будем рассматривать эволюционные уравнения в частных производных с одной пространственной переменной и, для простоты, с одной зависимой переменной. Оказывается, что имеется узкий класс таких уравнений, которые обладают бесконечным набором инфинитезимальных симметрий. Наличие такого набора иногда берут за определение интегрируемости уравнения. Стоит отметить, что загадочным образом многие уравнения в частных производных, встречающиеся в физике и геометрии, являются интегрируемыми. Задача классификации интегрируемых уравнений по формулировке элементарна, но является крайне сложной. В качестве главной цели лекций, я планирую рассказать про гипотезу Дубровина–Жанга–Лиу–Янга, которая явно описывает классификацию интегрируемых уравнений определённого вида с помощью топологии пространства модулей алгебраических кривых.

П.Г.Гриневич

Вполне неотрицательные грассманианы и их параметризация

Аннотация: В ряде задач математической физики возникают вещественные прямоугольные матрицы, все максимальные миноры которых неотрицательны, а также их факторы по левому действию группы обратимых матриц — вполне неотрицательные грассманианы. Другими словами, мы рассматриваем подмножество точек в многообразии Грассмана, все плюккеровы координаты которых неотрицательны. Из-за того, что между плюккеровыми координатами имеются квадратичные соотношения, геометрия указанной системы неравенств далеко не тривиальна.

Сравнительно недавно Александром Постниковым было получена параметризация тотально неотрицательных грассманианов в терминах специальных планарных графов с весами на них. Я планирую рассказать этот результат.

Предполагается, что слушатели знакомы с основными понятиями линейной алгебры. Все необходимые определения будут даны в лекциях.

А.В.Зорич

Случайные мультикривые на поверхностях, случайные поверхности в клеточку и подсчёт меандров на поверхностях

Аннотация: Я начну с результата Мариам Мирзахани об асимптотике числа простых замкнутых несамопересекающихся геодезических ограниченной длины на гиперболической поверхности. Формула Мирзахани использует корреляторы Виттена-Концевича (числа пересечение пси-классов). Я расскажу несколько слов о них тоже.

Я продолжу рассказ недавними результатами, полученных совместно с Элиз Гужар, Вансаном Делекруа и Петром Зографом. Мы доказали, что частоты, с которыми встречаются поверхности в клеточку фиксированного топологического типа, совпадают с частотами Мирзахани мультикривых соответствующего топологического типа.

Я закончу двумя приложениями. Во-первых, я укажу (в определённой постановке) асимптотику числа меандров и асимптотику числа ориентированных меандров на поверхности любого фиксированного рода. Во-вторых, я опишу, как устроена случайная мультикривая на поверхности большого рода и как устроена случайная поверхность в клеточку большого рода. Результаты для большого рода основаны на равномерной асимптотической формуле для корреляторов Виттена-Концевича, предсказанной Гужар, Делекруа, Зографом и докладчиком, и недавно доказанной Амолом Аггарвалом.

Лекции будут неформальными; в некоторых местах нестрогими и почти без доказательств, но я надеюсь сделать их доступными для широкой аудитории.

И.М.Кричевер

Геометрия пространств модулей кривых

Аннотация: Вещественно нормированные дифференциалы играют важную роль в различных задачах теории интегрируемых систем и теории их возмущений. Их происхождение можно проследить в спектральной теории периодических линейных операторов. Они нашли свое применение и в исследовании геометрии пространств модулей гладких алгебраических кривых. В докладе я расскажу об основных конструкциях связанных с вещественно нормированными дифференциалами, в частности о комбинаторном представлении пространства модулей кривых с парой отмеченных точек и сформулирую ряд открытых проблем.

Т.Е.Панов

Комплексная геометрия многообразий с действием тора

Аннотация: Торическая геометрия и топология даёт большое количество примеров многообразий с «нестандартными» комплексными структурами, т.е. некэлеровыми и даже не мойшезоновыми. Одним из основных классов таких примеров являются момент-угол-многообразия. Комплексное момент-угол-многообразие Z задаётся некоторым набором комбинаторно-геометрических данных, включающих полный симплициальный (но не обязательно рациональный) веер. В случае рациональных вееров многообразие Z является тотальным пространством голоморфного расслоения над торическим многообразием со слоем компактный комплексный тор. В этом случае инварианты комплексной структуры на Z, такие как когомологии Дольбо и числа Ходжа, могут быть описаны при помощи спектральной последовательности Бореля голоморфного расслоения.

В общем случае на комплексном момент-угол-многообразии Z имеется каноническое голоморфное слоение F, эквивариантное под действием алгебраического тора. Примеры момент-угол-многообразий включают многообразия Хопфа, Калаби–Экманна и их деформации. Пара (Z,F) из многообразия и голомофрного слоения также изучалась как модель для некоммутативных торических многообразий в работах Katzarkov, Lupercio, Meersseman, Verjovsky (arXiv:1308.2774) и Ratiu, Zung (arXiv:1705.11110).

Геометрия многообразий Z и слоений F весьма интересна и нестандартна. Основным инструментом для изучения геометрии комплексных момент-угол-многообразий Z является трансверсально кэлерова форма для слоения F. Такая форма существует при некоторых ограничениях на комбинаторные данные. Путём интегрирования

трансверсально кэлеровой формы доказывается, что любое кэлерово подмногообразие в момент-угол-многообразии Z лежит в листе слоения F. Для общего момент-угол-многообразия Z в своём комбинаторном классе все его подмногообразия являются момент-угол-многообразиями меньшей размерности, а значит число их конечно. Это влечёт, в частности, что Z не допускает непостоянных мероморфных функций, т.е. его алгебраическая размерность равна нулю.

Battaglia, Zaffran (arXiv:1108.1637) вычислили базисные числа Бетти для канонического голоморфного слоения на момент-угол-многообразии Z, соответствующем расщепляемому (shellable) вееру. Ими была высказана гипотеза, что кольцо базисных когомологий в случае произвольного симплициального веера имеет тот же вид, что и кольцо когомологий полного симплициального торического многообразия (даваемое теоремой Данилова–Юркевича). Мы доказываем эту гипотезу. Доказательство использует спектральную последовательность Эйленберга–Мура; ключевым утверждением здесь является формальность модели Картана для действия тора на Z.

Литература

T. Panov and Yu. Ustinovsky. Complex-analytic structures on moment-angle manifolds. Moscow Math. J. 12 (2012), no.1, 149–172.

Т.Е. Панов. Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях. УМН 68 (2013), вып. 3, 111–186.

V.M. Buchstaber and T.E. Panov. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, AMS, Providence, RI, 2015.

Taras Panov, Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky. Complex geometry of moment-angle manifolds. Math. Zeitschrift 284 (2016), no. 1, 309–333.

Hiroaki Ishida, Roman Krutowski and Taras Panov. Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds. Internat. Math. Research Notices, to appear, 2021. arXiv:1811.12038.

Д.В.Трещев

Антиинтегрируемый предел

Аннотация: Гамильтоновы системы с простейшей динамикой называются интегрируемыми. Антиподом интегрируемости является хаос. Хаос как понятие в теории динамических систем не имеет конкретного универсально понимаемого содержания и проявляется в различных формах. Одним из проявлений хаоса выступает наличие инвариантных множеств, динамика на которых изоморфна сдвигу Бернулли. Антиинтегрируемый предел представляет собой одну из ситуаций, когда сдвиг Бернулли можно обнаружить в системе относительно легко.

А.И.Шафаревич

Симплектическая геометрия, гамильтоновы системы и спектры квантовых операторов

Аннотация: Существуют разнообразные связи геометрических и топологических характеристик инвариантных множеств (вещественных или комплексных) классических гамильтоновых систем со спектральными свойствами соответствующих квантовых операторов. Будет рассказано о некоторых направлениях в этой области, включая ряд классических и современных результатов.