Киселев Денис Дмитриевич, д.ф.-м.н. denmexmath@yandex.ru
Всероссийская академия внешней торговли
Министерства экономического развития Российской Федерации (ВАВТ)

Стандартные базисы Гребнера-Ширшова и смежные вопросы (курс лекций)

Светлой памяти Виктора Николаевича Латышева

Теория стандартных базисов Гребнера-Ширшова – красивый раздел алгебры, зародившийся в 50-е/60-е годы прошлого века и получивший мощное развитие благодаря системам компьютерной алгебры. Классическое применение стандартных базисов – алгоритм решения систем нелинейных алгебраических уравнений, представляющий собой далеко идущее обобщение классического метода Гаусса исключения переменных в системах линейных алгебраических уравнений.

Целью курса является знакомство слушателей со стандартными базисами и их применением для решения систем нелинейных алгебраических уравнений, для построения алгебр с универсальными свойствами (например, алгебры Грассмана, тензорного произведения алгебр, универсальной обертывающей алгебры), для решения ряда других алгоритмических вопросов.

Курс будет состоять предположительно из 12-14 лекций.

Примерная программа курса

1. Обзор: массовые проблемы, алгоритмически неразрешимые проблемы, в том числе проблема остановки алгоритма и 10-я проблема Гильберта. Алгоритмическая неразрешимость проблемы равенства слов в полугруппе. Алгоритмическая неразрешимость проблемы вхождения в идеал свободной ассоциативной алгебры.

2. Схемы симплификации, эквивалентность различных свойств: наличие канонизации, единственность минимальной вершины в графе Ньюмана, условие локального слияния, условие Черча-Россера, совпадение отношений связности и Черча–Россера.

3. Коммутативная полугруппа $[X] \cong \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ для $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и ее упорядочивания. Упорядочивания некоммутативной полугруппы $\langle X \rangle$.

4. Базис Гребнера идеала свободной ассоциативной алгебры и полиномиального идеала. Эквивалентность условий на порождающее множество: базис Гребнера; редуцируемость элементов идеала к нулю; H-представимость элементов идеала; представимость S-полиномов с "малым параметром"; свойство канонизации соответствующей линейной схемы симплификации.

5. Единственность редуцированного базиса Гребнера, его конечность в полиномиальном идеале, алгоритм Бухбергера. Теорема Левина о конечной порожденности идеала конечномерной свободной алгебры.

6. Базис Гребнера одностороннего идеала свободной ассоциативной алгебры, его конечность в конечно порожденных идеалах, теорема П. Коэна о том, что они являются свободными модулями над алгеброй.

7. Построение алгебр с универсальными свойствами с помощью базиса Гребнера: свободная коммутативная алгебра, алгебра Грассмана, тензорное произведение алгебр, свободное произведение алгебр, универсальная обертывающая алгебра для алгебры Ли.

8. Поднятие собственных идеалов и роста на целые расширения конечнопорожденных коммутативных алгебр.

9. Индуктивные утверждения "о линейных заменах переменных" и "достраивании нулей идеалов", используемые в алгоритме решения систем нелинейных алгебраических уравнений с помощью базисов Гребнера.

10. Базис Гребнера и теорема Гильберта о нулях, лемма о нормализации. Размерность Крулля полиномиального идеала и рост факторалгебры по нему.

11. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений с помощью базиса Гребнера.

12. Вид приведённой системы нелинейных алгебраических уравнений в "общем случае", оценки сложности построения редуцированного базиса Гребнера полиномиального идеала.

13. Порождающие модуля сизигий конечной системы полиномов.

14. Алгоритмы, основанные на стандартных базисах: распознавание делителей нуля по модулю полиномиального идеала, распознавание алгебраической зависимости по модулю полиномиального идеала, задание пересечения полиномиальных идеалов, критерий эквивалентности систем нелинейных алгебраических уравнений, критерий конечности числа решений системы нелинейных алгебраических уравнений.

15. Существование универсального базиса Гребнера для любого упорядочивания.

Литература по курсу

[1] В. Н. Латышев, *Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы*, МГУ, М., 1988.

[2] И. В. Аржанцев, *Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений*, МЦНМО, М., 2003.

[3] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши, *Идеалы, многообразия, алгоритмы*, Мир, М., 2000.

[4] B. Sturmfels, *Grobner Bases and Convex Polytopes*, RI: AMS, Providence, 1995.