

Введение в теорию дзета-функций (программа курса)

Лектор: Георгий Борисович Шабат

0. Определение дзета-функции коммутативного кольца конечного типа. Случаи кольца \mathbb{Z} целых чисел и кольца $\mathbb{F}_q[T]$ многочленов над конечным полем; разложение в произведение.

1. Дзета-функция Римана. Мероморфное продолжение и функциональное уравнение. Тривиальные и нетривиальные нули. Связь нетривиальных нулей с распределением простых чисел; гипотеза Римана.

2. Обзор основных понятий теории полей. Конечные, алгебраические, нормальные, сепарабельные расширения. Алгебраическое замыкание. Теория Галуа. Конечные поля \mathbb{F}_q и их замыкания $\overline{\mathbb{F}_q}$. Группа автоморфизмов поля $\overline{\mathbb{F}_q}$.

3. Обзор основных понятий алгебраической геометрии. Аффинные многообразия и кольца регулярных функций на них. Конечнопорождённые алгебры над полями. Идеалы, подмногообразия и точки. Проективные многообразия. Расширения основного поля. Многообразия над конечными полями.

4. Примеры вычислений дзета-функции Хассе-Вейля аффинных и проективных многообразий над конечными полями. Рациональность и разложение на множители. Связь с комплексной топологией многообразий. Примеры.

5. Обзор теорий когомологий алгебраических многообразий. Неподвижные точки эндоморфизмов и формула Лефшеца. Гипотезы Вейля; обзор их доказательства. Приложения.

6. Обобщения и аналоги рассмотренных дзета-функций. "Детерминанты" лапласианов и замкнутые геодезические на компактных римановых многообразиях. Мульти-дзета функции. Открытые проблемы.