

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Шамканов Данияр Салкарбекович, к.ф.-м.н., с.н.с. МИАН
Кузнецов Степан Львович, к.ф.-м.н., с.н.с. МИАН

КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Со школьной скамьи мы узнаём, что рассуждение, содержащее «логический круг», является некорректным. Чтобы подчеркнуть эту мысль, сами «логические круги» также называют «порочными», а о рассуждении говорят, что оно содержит «порочный круг». В нашем курсе по формальной логике мы познакомимся с дедуктивными системами, в которых удивительным образом можно встретить вполне законные и, при этом, формальные «круговые» (или циклические) доказательства. Более того, мы рассмотрим произвольные доказательства, в которых движение от заключения к посылкам может продолжаться бесконечно долго, не приходя к аксиомам. Мы планируем сосредоточиться на двух примерах дедуктивных систем, в которых можно встретить циклические доказательства: на логике доказуемости Гёделя–Лёба и на логике действий (логике алгебр Клини с делениями). От слушателей ожидается знакомство с классическим исчислением высказываний.

ПРОГРАММА

1. «Порочные круги» в доказательствах. Вывод противоречия в классической логике высказываний с помощью циклического доказательства.
2. Логика доказуемости Гёделя–Лёба GL : гильбертовское исчисление, теорема Соловея об арифметической полноте (без доказательства). Циклические выводы в логике GL . Логика GL как расширение логики $K4$ с помощью циклических выводов.
- 3.* Основы алгебраической логики: понятия упорядоченного моноида, решетки, булевой алгебры, теорема Стоуна о представлении булевых алгебр.
4. Нефундированные выводы в логике GL . Алгебраическая семантика логики GL с нефундированными выводами: бокс-фундированные алгебры Магари и теорема об алгебраической полноте.
- 5.* Класс бокс-фундированных алгебр Магари как обобщенное квазимногообразие. Свойства обобщенных квазимногообразий.
6. Окрестностная семантика логики GL . Теорема Эсакия-Симмонса о связи окрестностных GL -шкал и разреженных топологических пространств. теорема о представлении бокс-фундированных алгебр Магари. Следствие: характеристика бокс-фундированных алгебр Магари. *Полнота относительно ординальных топологических пространств.
7. Исчисление секвенций для логики GL с нефундированными выводами (без правила сечения). Семантическое доказательство (окрестностной) полноты исчисления секвенций. Преобразование нефундированного доказательства в циклическое. Следствие: окрестностная полнота логики GL и замкнутость относительно нефундированных доказательств. *Два различных синтаксических доказательства интерполяционного свойства Линдона.

8. Решётки Клини с делениями (РКД), их эквациональные теории (логика действий ACT и инфинитарная логика действий ACT_{ω}).
9. Π_1^0 -полнота эквациональной теории ACT_{ω} *-непрерывных РКД. Σ_1^0 -полнота эквациональной теории ACT всех РКД.
10. Исчисление с нефундированными выводами для ACT_{ω} , устранимость сечения. ACT как циклический фрагмент этого исчисления, неустранимость сечения в нём. Правило «индукция в середине» и соответствующее циклическое исчисление.
11. Разрешимость эквациональной теории алгебр Клини (без делений). Циклическое гиперсеквенциальное исчисление для этой теории, с устранимым сечением.
- 12.* Обзор других систем, допускающих циклические и нефундированные выводы.

Пункты, отмеченные звёздочкой, необязательны и могут быть изложены кратко либо опущены при чтении курса, в зависимости от подготовки и интересов слушателей. Сказанное не относится к звёздочке в составе термина «*-непрерывный».