Киселев Денис Дмитриевич, д.ф.-м.н. denmexmath@yandex.ru
Всероссийская академия внешней торговли
Министерства экономического развития Российской Федерации (ВАВТ)

Обратная задача теории Галуа: задача погружения (курс лекций)

Обратная задача теории Галуа – это красивый и весьма сложный раздел современной алгебры, суть которого состоит в выяснении условий для заданной конечной группы G, при которых для фиксированного поля k существует расширение Галуа полей K/k с группой Галуа G. Для случая числового поля k (конечного расширения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$) такая задача весьма далека от своего решения. В то же время, например, для случая числового одномерного локального поля k (конечного расширения поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$) решение имеется[1].

Цель данного курса – познакомить слушателей с одним из подходов к решению обратной задачи теории Галуа: задачей погружения, а также доказать, что для конечных групп нечетного порядка обратная задача теории Галуа имеет положительное решение над числовыми полями (в частности, над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$). Данный результат представляет собой частных случай теоремы И. Р. Шафаревича о реализуемости любой конечной разрешимой группы в качестве группы Галуа над произвольным числовым полем k, но будет получен гораздо более простыми средствами.

Предполагается знакомство слушателей с основами алгебраической теории чисел, когомологиями групп, группой Брауэра, теорией Галуа в рамках соответствия Галуа. Необходимые для курса результаты будут по необходимости напоминаться, но без доказательств.

Курс будет состоять предположительно из 12-14 лекций.

Примерная программа курса

1. Обзор необходимых результатов по когомологиям групп: определение, интерпретация в малых размерностях (классы скрещенных гомоморфизмов, классы групповых расширений с абелевым ядром, классы препятствий для расширений групп); точная последовательность когомологий, индуцированная короткой точной последовательностью G-модулей для группы G, гомоморфизмы подъема и ограничения, теорема Хохшильда-Серра о подъеме когомологий.

2. Обзор необходимых результатов по группе Брауэра $B(k)$ поля k: циклические алгебры над полем k, скрещенные k-алгебры, классы эквивалентности центрально-простых конечномерных k-алгебр; группа $B(K/k)$ классов эквивалентности центрально-простых конечномерных k-алгебр, распадающихся в расширении Галуа K/k, и изоморфизм $B(K/k) \cong H^2(\mathrm{Gal}(K/k), K^*)$. Индекс Шура центрально-простой конечномерной k-алгебры и порядок ее класса эквивалентности в группе $B(k)$: общий случай и случай числовых и одномерных локальных числовых полей. Теорема Хассе-Брауэра-Нетер-Альберта и точность последовательности
$$0 \longrightarrow B(k) \longrightarrow \bigoplus_{v\in S} B(k_v) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
для числового поля k и множества S всех точек этого поля.

3. Алгебры Галуа над полем и их строение.

[1] Для случая $p > 2$, а при $p = 2$ для случая $\sqrt{-1} \in k$.

4. Задача погружения: постановка, ее решение как алгебра Галуа. Сопутствующие задачи погружения, прямое умножение задач погружения, подъем и спуск задач погружения, присоединенные задачи погружения. Поле разложения для задачи погружения.

5. Условие согласности Д. К. Фаддеева-Х. Хассе как необходимое условие разрешимости задачи погружения и его эквивалентные формулировки. Поведение условия согласности при подъеме, спуске и прямом умножении задач погружения.

6. Задача погружения с абелевым ядром. Когомологическая интерпретация разрешимости задачи погружения. Брауэровские задачи погружения. Условие согласности для задачи погружения с абелевым ядром как условие разрешимости всех сопутствующих брауэровских задач.

7. Свободное нормальное расширение. Теорема Фаддеева-Шольца о разрешимости в смысле полей полупрямой задачи погружения над числовыми полями.

8. Обобщенное сплетение и теорема Кохендорфера-Фаддеева. Теорема Кохендорфера.

9. Теорема А. В. Яковлева о необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи погружения с абелевым ядром (над полем нулевой характеристики). Достаточность условия согласности для разрешимости задачи погружения с циклическим ядром A, для которого $8 \nmid |A|$.

10. Теорема Демушкина-Шафаревича о разрешимости задачи погружения с абелевым ядром над числовыми одномерными локальными полями при выполненном условии согласности. Условие согласности для задачи погружения с абелевым ядром над числовыми полями как условие разрешимости всех сопутствующих локальных задач.

11. Теорема А. В. Яковлева о необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи погружения с абелевым ядром над числовыми полями. Достаточные условия разрешимости задачи погружения с абелевым ядром над числовыми полями.

12. Универсально согласные расширения периода n: формулировки, критерии универсальной согласности.

13. Решение обратной задачи теории Галуа для конечных групп нечетного порядка над числовыми полями (частный случай теоремы И. Р. Шафаревича).

Литература по курсу

[1] В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука, М., 1990.

[2] Дж. Касселс, А. Фрелих (ред.), *Алгебраическая теория чисел*, Мир, М., 1969.

[3] Ю. В. Кузьмин, *Гомологическая теория групп*, Факториал, М., 2006.

[4] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985.

[5] Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, М., 1969.

[6] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966.

[7] I. Reiner, *Maximal orders*, Oxford, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **28**, Oxford Univ. Press, 2003.

[8] G. Malle, B. H. Matzat, *Inverse Galois theory*, Springer-Verlag, N.Y., 1999.