

Математические основания квантовой механики.

Программа курса лекций Г.Г. Амосова

В курсе будет показано, что аксиоматика квантовой механики приводит к возникновению особой математической дисциплины – квантовой (или некоммутативной) теории вероятностей. Эта теория хотя и использует терминологию классической теории вероятностей, но ни в коем случае не может быть к ней сведена. Тем не менее, такие понятия классической теории вероятностей как события, случайные величины, математическое ожидание, ковариации и корреляции широко используются в квантовой теории вероятностей и дают возможность понять, в чем эти две теории близки, а в чем принципиально отличаются.

1. Аксиоматика Макки квантовой механики. Квантовые состояния и измерения.
2. Проекторы как квантовые события. Меры на решетке ортогональных проекторов. Теорема Глисона. Квантовые состояния, ассоциированные с мерами на проекторах.
3. Положительные операторнозначные меры как квантовые случайные величины (обобщенные квантовые наблюдаемые, квантовые измерения). Формула Борна.
4. Случай проекторнозначных мер. Самосопряженные операторы. Спектральная теорема. Дискретный и непрерывный спектры. Пространство волновых функций $L^2(\mu)$, ассоциированных с квантовой наблюдаемой.
5. Рандомизация случайных величин. Теорема Наймарка о дилатации положительных операторнозначных мер.
6. Математические ожидания, дисперсии и ковариации квантовых случайных величин. Соотношение неопределенностей Шредингера-Робертсона для произведения дисперсий.
7. Тензорные произведения гильбертовых пространств. Составные квантовые системы. Сцепленные и сепарабельные состояния. Проверка сцепленности с использованием критерия Переса-Городецких. Свидетели сцепленности.
8. Классические и квантовые корреляции. Неравенство Белла-Клаузера-Хорна-Шимони. Граница Цирельсона.
9. Квантовые каналы передачи информации. Разложение Крауса. Каналы, кодирующие и декодирующие классическую и квантовую информацию. Теорема Холево о существовании меры, определяемой измерением квантового состояния.
10. Случай квантовых наблюдаемых, являющихся линейными комбинациями операторов координаты и импульса. Дробное преобразование Фурье.

11. Некоммутативные графы, ассоциированные с квантовыми каналами. Теорема об общем виде некоммутативного операторного графа в конечномерном случае. Некоммутативные графы, порождаемые положительными операторнозначными мерами (разложениями единицы). Ковариантные разложения единицы.

12. Передача информации с нулевой ошибкой. Квантовые коды, исправляющие ошибки. Квантовые антиклики.

Литература.

1. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
2. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
3. Дж. Макки. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.
4. И. фон Нейман. Математические основания квантовой механики. М.: Наука, 1964.
5. А.С. Холево. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980.
6. А.С. Холево. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
7. B.S. Cirel'son. Quantum generalizations of Bell's inequality. Lett. Math. Phys. 4:2 (1980) 93–100.
8. A.S. Holevo, Entanglement-Breaking Channels in Infinite Dimensions, Problems Inform. Transmission, 44:3 (2008), 171-184
9. E. Knill, R. Laflamme. Theory of quantum error-correcting codes. Phys. Rev. A 55 (1997) 900–911.
10. N. Weaver. "Quantum" Ramsey theorem for operator systems. Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017) 4595–4605.