МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Материалы международной конференции,
посвящённой 80-летию академика РАН В. А. Садовничего

Том I

CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Proceedings of the international conference dedicated
to the 80th anniversary of academician V. A. Sadovnichy

Volume I

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2019

УДК 517
ББК 22.162:22.193
С56

DOI 10.29003/m978-5-317-06111-1

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) по проекту 19-01-20097 и попечительского Совета МГУ имени М. В. Ломоносова

С56 **Современные проблемы математики и механики.** Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. – Москва : МАКС Пресс, 2019.

ISBN 978-5-317-06133-3 e-ISBN 978-5-317-06111-1

Том I. – 436 с.

ISBN 978-5-317-06134-0

Книга составлена из коротких заметок, в которых представлены результаты исследований участников международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. В книге представлены 5 направлений математики и механики, в которых активно работал В. А. Садовничий. Эти направления совпадают с названиями секций конференции.

1. Теория операторов и функциональный анализ.
2. Дифференциальные уравнения.
3. Теория функций и вычислительная математика.
4. Геометрия и математическая физика.
5. Механика и математическое моделирование.

Книга состоит из 2-х томов. В первом томе представлены заметки, относящиеся к секциям 1–2, во втором томе – заметки, представленные в секциях 3–5.

Представленные в заметках результаты излагаются в авторской редакции. Книга предназначена для преподавателей, научных сотрудников и аспирантов и имеет цель ознакомления с современным состоянием научных исследований, проводимых в России и за рубежом по указанным направлениям.

Ключевые слова: теория операторов, спектральная теория, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, теория функций, математическая физика, механика, математическое моделирование.

ISBN 978-5-317-06134-0 (Т. I)
ISBN 978-5-317-06133-3

Организационный комитет конференции
Председатель: В.Н. Чубариков
Заместители председателя: Т.П. Лукашенко, А.Т. Фоменко, А.А. Шкаликов
Члены комитета: В.В. Александров, Е.Д. Алферова, А.И. Аптекарев, А.А. Владимиров, В.В. Власов, А.А. Левин, Е.С. Карулина, И.С. Ломов, А.Н. Попов, Т.В. Родионов, А.М. Савчук, А.П. Солодов, Я.Т. Султанаев, Д.В. Трещев

Программный комитет конференции
Председатель: В.Н. Чубариков
Заместители председателя: А.И. Шафаревич, А.А. Шкаликов
Члены комитета: Д.В. Георгиевский, В.Н. Денисов, А.О. Иванов, И.С. Ломов, Т.П. Лукашенко, А.М. Савчук, А.С. Шамаев

Organizing Committee
Chairman: V.N. Chubarikov
Vice chairmen: T.P. Lukashenko, A.T. Fomenko, A.A. Shkalikov
Members: V.V. Alexandrov, E.D. Alferova, A.I. Aptekarev, A.A. Vladimirov, V.V. Vlasov, A.A. Levin, E.S. Karulina, I.S. Lomov, A.N. Popov, T.V. Rodionov, A.M. Savchuk, A.P. Solodov, Ya.T. Sultanaev, D.V. Treschev

Program Committee
Chairman: V.N.Chubarikov
Vice chairmen: A.I. Shafarevich, A.A. Shkalikov
Members: D.V. Georgievskii, V.N. Denisov, A.O. Ivanov, I.S. Lomov, T.P. Lukashenko, A.M. Savchuk, A.S. Shamaev

Содержание

Секция 1

Теория операторов и функциональный анализ

О РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

А.Р. Абдуллаев, Е.А. Скачкова
skachkovaea@gmail.com

УДК 517.988.63

Для квазилинейного операторного уравнения с необратимым линейным оператором (резонансный случай) сформулированы эффективные теоремы существования хотя бы одного решения.

Ключевые слова: квазилинейное операторное уравнение, резонансная краевая задача, степень Брауэра.

Solvability of a quasilinear operator equation at resonance

For a quasilinear operator equation with a noninvertible linear operator (the resonance case), effective existence theorems for at least one solution are established.

Keywords: quasilinear operator equation, boundary value problem at resonance, Browder's degree.

Абдуллаев Абдула Рамазанович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Пермь, Россия); Abdullaev Abdula (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Скачкова Елена Александровна, старший преподаватель, Пермский государственный национальный исследовательский университет (Пермь, Россия); Elena Skachkova (Perm State University, Perm, Russia)

Рассмотрим уравнение
$$Lx = Fx + f \tag{1}$$
с линейным ограниченным оператором $L : X \to Y$ и непрерывным (вообще говоря нелинейным) оператором $F : X \to Y$, где X и Y — банаховы пространства и $f \in Y$.

Если краевая задача рассматривается в виде квазилинейного операторного уравнения (1), то в случае необратимости оператора L, задачу принято называть резонансной (или критическим случаем задачи). Эффективные условия разрешимости уравнения (1) в случае резонанса представляют значительный интерес для исследования конкретных классов резонансных краевых задач.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство n-мерных векторов $\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ с действительными компонентами α_i и нормой $|\cdot|$. Пусть $r > 0$. Обозначим через $B(r) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : |\alpha| < r\}$ открытый шар в R^n и пусть $\partial B(r) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : |\alpha| = r\}$ — его граница. Будем предполагать, что $L : X \to Y$ – нетеров оператор неотрицательного индекса. Через $\ker L$ и $\mathrm{im}\, L$ соответственно обозначим ядро и образ оператора $L : X \to Y$. Рассмотрим разложения пространств X и Y в прямые суммы $X = \ker L \oplus X_0$, $Y = \mathrm{im}\, L \oplus Y_0$ и пусть $P : X \to X$ и $Q : Y \to Y$ линейные ограниченные проекторы соответственно на $\ker L$ и $\mathrm{im}\, L$. Пусть далее для простоты $\mathrm{ind}\, L = 0$, $n = \dim \dim L$ и $J_1 : \mathbb{R}^n \to \ker L$ — фиксированный изоморфизм.

Рассмотрим вспомогательное отображение $\Phi_z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определённое для произвольного элемента $z \in X_0$ такое, что из $\Phi_z(\alpha) = 0$ следует, что $F(z + J_1\alpha) \in \mathrm{im}\, L$.

Конкретная конструкция отображения Φ_z зависит от специфики рассматриваемой краевой задачи и, в основном, определяется операторами P, Q и J_1. В частности, это отображение может быть определено равенством $\Phi_z(\alpha) = J_2 Q^c F(z + J_1\alpha)$, где $Q^c = I - Q$ – дополнительный проектор, $J_2 : Y_0 \to \mathbb{R}^n$ — изоморфизм. Для каждого $z \in X_0$ через $\deg(\Phi_z, B(r))$ обозначим степень Брауэра отображения $\Phi_z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ относительно шара радиуса $r > 0$ с центром в нуле.

Получены новые теоремы существования решения уравнения (1). Эти утверждения основаны на применении схемы исследования резонансных краевых задач, предложенной в работе [1].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*
1) *оператор F — вполне непрерывный;*
2) *существуют $a, b, \gamma \geqslant 0$ и $\gamma < 1$ такие, что $||Fx|| \leqslant a + b||x||^{\gamma}, x \in X$;*
3) *для каждого $z \in X_0$ существует $r \leqslant d||z||$, $r = r(z) > 0$ такое, что $\deg(\Phi_z, B(r)) \neq 0$.*
Тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно решение для любого $f \in \mathrm{im}\, L$.

Многие авторы применяют подобные теоремы существования для исследования на разрешимость периодических краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений и систем.

При применении утверждения теоремы 1 определённые трудности могут быть связны с проверкой условия 3). В этом случае могут быть использованы различные теоремы о степени отображения в конечномерных пространствах (см., например, [2]). Следующее утверждение в этом смысле является более удобным для применения.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1 и, кроме того, условие*
3') *для каждого $z \in X_0$ существует $r \leqslant d||z||$, $r = r(z) > 0$ такое, что для всех $\alpha \in \partial B(r)$ справедливо неравенство $< \Phi_z(\alpha), \alpha > \geqslant < \alpha, \alpha >$.*
Тогда уравнение (1) *имеет хотя бы одно решение для любого $f \in \operatorname{im} L$.*

Литература

1. *Абдуллаев А. Р., Скачкова Е. А.* Периодическая краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка. // Известия вузов. Математика. №12 (2013), 3-10.

2. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988. — 304 с.

О КОМПАКТНОСТИ И ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

О.Г. Авсянкин
avsyanki@math.rsu.ru

УДК 517.9

Рассматриваются интегральные операторы свертки в пространствах Морри. Получены достаточные условия компактности произведения оператора свертки и оператора умножения на существенно ограниченную функцию. Для оператора, являющегося суммой тождественного оператора и оператора свертки, получен критерий обратимости.

Ключевые слова: пространство Морри, оператор свертки, компактность, обратимость

On the compactness and invertibility of convolution operators in Morrey spaces

We consider integral convolution operators in Morrey spaces. We obtain the sufficient conditions of compactness for the product of the convolution operator and the operator of multiplication by an essentially bounded function. We also obtain the invertibility criterion of the operator, which is the sum of identity operator and the convolution operator.

Keywords: Morrey space, convolution operator, compactness, invertibility

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18–51–06005–Аз_а, 18–01–00094–А).

Авсянкин Олег Геннадиевич, д.ф.-м.н., зав. кафедрой, Южный федеральный университет (Ростов–на–Дону, Россия); Oleg Avsyankin (Southern Federal University, Rostov–on–Don, Russia)

1. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пространство Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ — это пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{r^\lambda} < \infty,$$

где $\mathbb{B}(x,r)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x.

Пространства $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ являются нетривиальными тогда и только тогда, когда $0 \leqslant \lambda \leqslant n/p$. Так как $L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, $L_{p,n/p}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$, то ниже всюду считаем, что $0 < \lambda < n/p$.

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор свертки

$$(H\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Известно (см. [1]), что оператор H ограничен в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

2. Обозначим через M_a оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. В пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ выделим два специальных класса функций.

Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $L_\infty^0(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = 0.$$

Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $\Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ функция

$$A(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in K} |a(x) - a(x-t)|$$

принадлежит классу $L_\infty^0(\mathbb{R}^n)$.

Известны достаточные условия предкомпактности множеств, лежащих в пространстве Морри (см. [2]). На этой основе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и $0 < \lambda < n/p$. Тогда*

1) если $a \in L_\infty^0(\mathbb{R}^n)$, то операторы M_aH и HM_a компактны в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $a \in \Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$, то коммутатор $M_aH - HM_a$ компактен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Подробное изложение результатов этого раздела можно найти в [3].

3. В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор $cI + H$, где $c \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор. Назовем символом этого оператора функцию $c + \widehat{h}(\xi)$, где $\widehat{h}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $h(t)$.

Теорема 2. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $0 < \lambda < n/p$. Для того чтобы оператор $cI + H$ был обратим в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$c + \widehat{h}(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n,$$

где $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, содержащую все операторы $cI + H$, где $c \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор. Заметим, что алгебра $\mathfrak{A}$ является коммутативной. Для алгебры $\mathfrak{A}$ строится символическое исчисление, т. е. каждому оператору $A \in \mathfrak{A}$ ставится в соответствие некоторая функция $\sigma_A(\xi) \in C(\dot{\mathbb{R}}^n)$, которую будем называть символом оператора A. На основе исследования пространства максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, доказано, что невырожденность символа $\sigma_A(\xi)$ является необходимым и достаточным условием обратимости оператора A.

Литература

1. *Burenkov V.I., Tararykova T.V.* Young's inequality for convolutions in Morrey-type spaces // Eurasian Math. J., **7**:2 (2016), 92–99.

2. *Chen Y., Ding Y., Wang X.* Compactness of Commutators for Singular Integral on Morrey Spaces // Canad. J. Math, **64**:2 (2012), 257–281.

3. *Авсянкин О.Г.* О компактности операторов типа свертки в пространствах Морри // Матем. заметки, **102**:4 (2017), 483–489.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ НОРМ В СУПЕРРЕФЛЕКСИВНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Н. Агаджанов

ashot_ran@mail.ru

УДК 517.982.22

В докладе приведены универсальные неравенства для норм в суперрефлексивных банаховых пространствах. Под универсальными неравенствами для норм понимаются неравенства справедливые для произвольной эквивалентной нормы на банаховом пространстве. Полученные неравенства для норм справедливы (при соответствующих значениях параметров) для пространств Лебега, Соболева, Бесова, Лизоркина-Трибеля и др.

Ключевые слова: суперрефлексивное банахово пространство, модули выпуклости и гладкости, финитная представимость

Some mathematical reasonings Some mathematical reasonings Some mathematical reasonings

The report presents universal inequalities for norms in superreflexive Banach spaces. By universal inequalities for norms, we mean inequalities valid for an arbitrary equivalent norm on a Banach space. The obtained inequalities for the norms are convincing (at the corresponding values of the parameters) for the spaces of Lebesgue, Sobolev, Besov, Lizorkin-Triebel, etc.

Keywords: superreflexive Banach space, modules of convexity and smoothness, finite representability

Агаджанов Ашот Николаевич, к.ф.-м.н., Федеральное государственное учреждение РАН ИПУ им. В.А. Трапезникова (Москва, Россия); Ashot Agadzhanov (Trapeznikov Institute of Control Scienses, Russian Academy of Scienses, Moscow)

Среди банаховых пространств суперрефлексивные занимают особое место. Это связано с тем, что важнейшее пространство современной математической физики и функционального анализа, а именно, пространство Лебега L^p и l^p, Соболева W_p^m, Бесова $B_{p,q}^s$, Лизоркина-Трибеля $F_{p,q}$ и др., при соответствующих значениях параметров являются суперрефлексивными.

Этот класс банаховых пространств был впервые введен Р. Джеймсом в начале 70-х годов прошлого века [1].

Приведем необходимые в дальнейшем определения.

Определение 1. *Банахово пространство Y называется финитно представимым в банаховом пространстве X (finite representation in X), если для любого $\lambda > 1$ и любого конечномерного подпространства $Y_0 \subset Y$ существует изоморфизм $T\colon Y_0 \to X$ такой, что*

$$\frac{1}{\lambda}||y||_Y \leqslant ||T_y|| \leqslant \lambda||y||_Y \qquad \forall y \in Y_0$$

Определение 2. *Банахово пространство X называется суперрефлексивным, если каждое банахово пространство финитно представимое в X является рефлексивным.*

Назовем модулем выпуклости банахова пространства X

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf\{1 - \frac{1}{2}||x+y||\colon ||x|| = ||y|| = 1, ||x-y|| \geqslant \varepsilon, 0 < \varepsilon \leqslant 2\}.$$

Модулем гладкости банахова пространства X назовем

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{||x+y|| + ||x-y||}{2} - 1\colon ||x|| = 1, ||y|| = \tau, \tau > 0\right\}.$$

Банахово пространство называют равномерно выпуклым относительно нормы $||\cdot||$, если $\delta_x(\varepsilon) > 0$ при $0 < \varepsilon \leqslant 2$.

Банахово пространство называют равномерно гладким относительно нормы $||\cdot||$, если $\lim_{\tau\to 0+}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$.

Пусть X — суперрефлексивное банахово пространство. Назовем неравенство для норм, определенных на X, универсальным если оно выполняется для всех норм эквивалентных заданной норме на X.

Фундаментальное значение в теории суперрефлексивных пространств занимают результаты П. Энфло [2] и Ж. Пизье [3].

П. Энфло доказал, что банахово пространство суперрефлексивно тогда и только тогда, когда на нем может быть определена равномерно выпуклая (равномерно гладкая норма).

Ж. Пизье усилил результат П. Энфло, в том отношении, что на суперрефлексивном банаховом пространстве может быть определена норма $|\cdot|$, модуль выпуклости которой удовлетворяет неравенству $\delta_{||}(\varepsilon) \geqslant L\cdot\varepsilon^q$, где $L > 0$ — константа, $2 \leqslant q < \infty$.

Приведем полученные результаты.

Лемма 1. *Пусть* $||\cdot||$ *— произвольная норма на суперрефлексивном пространстве* X. *Существует множество мощности континуума, состоящее из равномерно выпуклых норм* $|\cdot|_\Delta$, *которые* Δ*-изоморфны норме* $||\cdot||$, *то есть для любых* $u \in X$ *имеют место неравенства*

$$\frac{1}{1+\Delta}|u|_\Delta \leqslant ||u|| \leqslant (1+\Delta)|u|_\Delta.$$

Лемма 2. *Пусть* $||\cdot||$ *— произвольная норма на* X. *Существует множество мощности континуума, состоящее из равномерно гладких норм* $|||\cdot|||_\Delta$, *которые* Δ*-изоморфны норме* $||\cdot||$.

С помощью лемм 1 и 2 может быть доказана основная теорема.

Теорема 1. *Пусть* X *— суперрефлексивное банахово пространство и* $||\cdot||$ *— произвольная норма на* X. *Для любых* $u, v \in X$ *выполняются неравенства:*

$$||\lambda u+(1+\lambda)v|| \leqslant (1+\Delta)(\lambda||u||^{q_\Delta}+(1-\lambda)||v||^{q_\Delta}-W_1(q_\Delta,\lambda)\cdot c_\Delta\cdot||u-v||^{q_\Delta})^{1/q_\Delta}$$

$$||\lambda u+(1+\lambda)v|| \geqslant \frac{1}{1+\Delta}(\lambda||u||^{p_\Delta}+(1-\lambda)||v||^{p_\Delta}-W_0(p_\Delta,\lambda)\cdot d_\Delta\cdot||u-v||^{p_\Delta})^{1/p_\Delta}$$

Здесь $\Delta \in (p-1, 1)$, $p = \dfrac{\ln 2}{\ln 2\left(1-\varphi\cdot\delta_{||\cdot||_\Delta}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)}$, $\varphi = \dfrac{22}{5}$ *— константа Фигеля* [4], $c_\Delta = \dfrac{3\cdot\beta\cdot\ln^2 2}{16\cdot\pi^2\cdot\alpha^{q+\Delta}}\cdot\dfrac{\Delta}{(1+\Delta)\cdot 4^{q+\Delta}}$ $(\alpha > \beta > 1)$, $d_\Delta = c_\Delta^{\Delta+(1-p)}$,

$W_0(p_\Delta,\lambda) = \lambda^{p_\Delta}(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^{p_\Delta}$, $\quad W_1(q_\Delta,\lambda) = \lambda^{q_\Delta}(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^{q_\Delta}$,

$q_\Delta = q+\Delta$, $p_\Delta = p-\Delta$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $q = \max\{s\colon l^s$ *фин. представимы в* $X\}$.

Некоторые другие неравенства для норм в суперрефлексивных банаховых пространствах приведены в [5].

Литература

1. *James R.C.* Super-reflexive Banach spaces // Canad. J. Math. **24** (1972), 896-904.

2. *Enflo P.* Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm // Israel J. Math. **13** (1972), 281-288. 3. *Pisier G.* Martingales with values in uniformly convex spaces // Israel J. Math. **20** (1975), 326-350.

4. *Figiel T.* On the moduli of convexity and smoothness // Studia Math., **56** (1978), 121-155.

5. *Агаджанов А.Н.* Геометрия норм и неравенства в суперрефлексивных банаховых пространствах // ДАН, **421**:3 (2008), 295-298.

НЕГЛАДКИЕ СЕЧЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО ШАРА ПРОСТРАНСТВА $C(Q)$

А.Р. Алимов, И.Г. Царьков

alexey.alimov-msu@yandex.ru, igtsarkov@yandex.ru

УДК 517.518

Установлено, что в пространстве $C(Q)$ (Q — хаусдорфов компакт) существует двумерное подпространство, сдвиги которого имеют только негладкие пересечения с единичным шаром пространства.

Ключевые слова: геометрия банаховых пространств, сечение единичного шара

Nonsmooth sections of the unit ball in $C(Q)$

We show that in $C(Q)$ (Q is a Hausdorff compact set), there exists a two-dimensional subspace whose translates intersect the unit ball only by a nonsmooth set.

Keywords: Banach space geometry, section of the unit ball

Дается ответ на следующий вопрос. Существует ли собственное подпространство L пространства $C(Q)$ такое, что пересечение любого его сдвига $L+x$, $x \in B$, с единичным шаром B пространства $C(Q)$ всегда является негладким множеством? Гладкость выпуклого множества (тела $B \cap (L+x)$ в аффинном пространстве $L+x$) понимается в стандартном смысле: выпуклое тело называется гладким, если любая его граничная точка является точкой гладкости, т.е. в ней опорная гиперплоскость к нему единственна.

Ответ на данный вопрос оказывается отрицательным даже для двумерного подпространства L: существует такое двумерное подпространство $L \subset C[0,1]$, что любой его сдвиг дает негладкое множество при пересечении с единичным шаром пространства. Отметим, что согласно классической теореме Банаха – Мазура единичный шар B пространства $C[0,1]$ имеет гладкие центрально-симметричные сечения любой размерности, однако в поставленной выше задаче рассматриваются сечения, полученные сдвигом фиксированного подпространства L, так что существующие по теореме Банаха – Мазура гладкие сечения могут оказываются не параллельными подпространству L.

Теорема. *Для любого конечного $n \geqslant 2$ в пространстве $C(Q)$ (Q — хаусдорфов компакт, $\operatorname{card} Q > n$) существует n-мерное подпространство, любой сдвиг которого на вектор p, $\|p\| < 1$, пересекает шар B пространства $C(Q)$ по негладкому телу.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00332-а) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-6222.2018.1).

Алимов Алексей Ростиславович, д.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexey Alimov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia).

Царьков Игорь Германович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Igor’ Tsar’kov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia).

СИММЕТРИИ КОНФИГУРАЦИЙ В КВАЗИРЕШЕТКАХ

А.Б. Антоневич, А.Н. Бузулуцкая
antonevich@bsu.by, anna-glazl@yandex.ru

УДК 517.518

Введены подмножества квази-решетки, названные конфигурациями, которые могут служить моделями расположения атомов в веществе. Получено описание симметрий заданной конфигурации.

Ключевые слова: квазирешетка, симметрия, квазикристалл

On symmetry of configurations in quasi-lattises

The notion of configuration, as a subset of a quasi-lattise is given. A description of non-trivial symmetry of configuranitn obtained.

Keywords: quasi-lattice, symmetry, quasi-cristall

C^*-подалгебра $\mathcal{A}$ в алгебре $CB(\mathbb{R}^m)$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^m$ называется *квазипериодической* ранга N, если она порождена конечным числом N экспонент $e^{i2\pi<h_j,x>}, h_j \in \mathbb{R}^m, J = 1, \ldots, N$, где векторы h_j линейно независмиы над полем $\mathbb{Q}$. Как абстрактная C^*-алгебра она изоморфна алгебре $C_1(\mathbb{R}^N)$, состоящей из непрерывных функций на $\mathbb{R}^N$, периодических с периодом 1 по каждой переменной. Но свойства индивидуальных квазипериодических функций существенно отличаются от периодических.

Квазипериодические функции и квазипериодические алгебры представляют особый интерес в связи с многочисленными приложениями, в частности, в теории квазикристаллов [1, 2].

Подгруппа в $\mathbb{R}^m$, имеющая конечное число образующих, называется *квазирешеткой*. Квазирешетка, порожденная векторами h_j, называется *группой частот* рассматриваемой алгебры и обозначается $H(\mathcal{A})$.

Пространство $\mathbb{R}^m$ будем отождествлять с его образом L при заданном вложении $J : \mathbb{R}^m \to L \subset \mathbb{R}^N$. Множество функций

$$\mathcal{A}_L = \{u(x) : u \in C_1(\mathbb{R}^N, x \in L\},$$

являющихся сужениями на L периодических функций, есть квазипериодическая алгебра на $\mathbb{R}^m$, группа частот которой $H(\mathcal{A}_L)$ есть проекция группы $\mathbb{Z}^N$ на L. В частности, если подпространство L *вполне иррационально*, т.е. нет ненулевых векторов из $\mathbb{Z}^N$, ортогональных к L, то $\mathcal{A}_L$ имеет ранг N.

Любая квазипериодическая алгебра ранга N совпадает с одной из алгебр $\mathcal{A}_L$ при подходящем выборе вложения.

Удобно, следуя [1], при описанной конструкции называть $\mathbb{R}^m$ *физическим пространством*, $\mathbb{R}^N$ — *супер-пространством*.

Антоневич Анатолий Борисович, д.ф.-м.н., профессор, БГУ (Минск, Баларусь); Anatolij Antonevich, (Belarussian State University, Minsk, Belarus)

Бузулуцкая Анна Николаевна, к.ф.-м.н., системный аналитик, СООО "ХайКво Солюшенс"(Минск, Баларусь); Hanna Busulustkaya (HiQo Solutions, Ltd., Minsk, Belarus)

Тогда с процесс, описываемым квазипериодической функцией на $\mathbb{R}^m$, получается сужением на физическое пространство упорядоченного (периодического) процесса, происходящего в суперпространстве. Это часто упрощает исследование.

Особенностью квазикристаллов являтся то, что они обладают симметрией, запрещенной в теории кристалов. В связи этим изучался вопрос о симметрии квазирешеток, а именно об исследовании квазикристаллографических групп, определение которых дано С.П.Новиковым и А.П.Веселовым.

Пусть задана квазирешетка $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$. *Группа аффинной симметрии* квазирешетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ $\widetilde{G}$ есть группа $\widetilde{G}$, состоящая из таких аффинных преобразований $g(x) = Qx + b$ физического пространства $\mathbb{R}^m$, при которых $g(\Gamma) \subset \Gamma$.

Группа симметрии G есть подгруппа в $\widetilde{G}$, состоящая из изометрических преобразований, т.е. у которых матрица Q -ортогональная.

Фактор-группа G/Γ называется *линейной частью* .

Абстрактная группа называется *квазикристаллографической*, если она является группой симметрии какой-нибудь квазирешетки.

Каждая симметрия квазирешетки порождает автоморфизм соответствующей квазипериодической алгебры $\mathcal{A}$, поэтому описание таких симметрий связано с описанием автоморфизмов $\mathcal{A}$[3].

Заметим, что квазирешетка является всюду плотным множеством в $\mathbb{R}^m$ и не может описывать расположение атомов в веществе.

Конфигурацией будем называть подмножество $K \subset \Gamma$, состоящее из проекций на L точек из $\mathbb{Z}^N$, находящихся на расстоянии от L, меньшем заданного $d > 0$. Конфигурации возникают при рассмотрении аппроксимаций квазипериодических $\delta-$ функции, а именно, функция, аппроксимирующая квазипериодическую $\delta-$функции, отлична от нуля только в окрестностях точек из некоторой конфигурации. Конфигурация является дискретным множеством и может служить кандидатом на модель расположения атомов в твердом веществе. В общем случае расположение точек конфигурации не обладает каким-либо порядком, что можно считать моделью аморфного состояния вещества.

Но могут существовать симметрии конфигурации, которые описывают упорядоченность в расположении точек конфигурации.

Теорема 1. *Пусть квазипериодическая алгебра $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^m$ реализована с помощью вложения в $\mathbb{R}^N$ описанным выше образом и пусть K есть конфигурация, соответствующая этой реализации. Нетривиальная симметрия конфигурации K существует тогда и только тогда, когда существует перестановочная матрица U размерности $N \times N$, такая, что L есть подпространство в $\mathbb{R}^N$, инвариантное относительно действия U, на котором действие U нетривиально. При этом симметрия действует как сужение действия U на L.*

Литература

1. *Дынников И. А. Новиков С. П.* Топология квазипериодических функций на плоскости // УМН, **60**:1 (2005), 3-28.

2. *Ле Ты Куок Тханг, Пиунихин С. А. Садов В. А.* Геометрия квазикристаллов //УМН, **48**:1 (1993), 41-102.

3. *Antonevich A., Glaz (Buzulutskaya) A.* Quasi-peroidic Algebras and Their Physical Automorphisms. In book: Geometric Methods in Physics XXXV, Birkhauser, 2017, P. 3-10.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Н. Асхабов

askhabov@yanrex.ru

УДК 517.968

Методом весовых метрик (аналог метода Белицкого) в классе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций изучается интегро-дифференциальное уравнение вольтерровского типа с разностным ядром и степенной нелинейностью. Получены точные априорные оценки для решений этого уравнения. Использование этих оценок позволило доказать глобальную теорему существования и единственности решения. Показано, что решение может быть найдено методом последовательных приближений, для которых указаны оценки погрешности и скорости их сходимости к точному решению.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, степенная нелинейность, метод Белецкого.

Integro-differential equations of convolution type with power nonlinearity

The integro-differential equation of Volterra type with difference kernel and power nonlinearity is studied by the method of weight metrics (analog of the Bielicki method) in the class of non-negative continuous functions on the positive half-axis. Exact a priori estimates for the solutions of this equation are obtained. The use of these estimates allowed to prove the global theorem of existence and uniqueness of the solution. It is shown that the solution can be found by the method of successive approximations for which the error estimates and the rate of their convergence to the exact solution are given.

Keywords: integro-differential equation, power nonlinearity, Bielicki method.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001).

Асхабов Султан Нажмудинович, д.ф.-м.н., доцент, Чеченский государственный педагогический университет, Чеченский государственный университет (Грозный, Россия); Sultan Askhabov (Chechen Pedagogical State University, Chechen State University of Grozny, Russia)

Основным объектом исследования в данной работе является нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки

$$u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x k(x-t)u'(t)dt,\ u(0)=0,\ x>0,\ \alpha>1. \tag{1}$$

На ядро $k(x)$ накладывается условие:

$$k(x)\in C^1[0,\infty),\ k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),\ k(0)=0 \text{ и } k'(0)>0, \tag{2}$$

где $C^1[0,\infty)$ означает множество всех непрерывно дифференцируемых на полуоси $[0,\infty)$ функций.

Решения уравнения (1) разыскиваются в классе

$$Q_0^1=\{u(x):\ u(x)\in C^1(0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}.$$

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением (1) мы будем рассматривать интегральное уравнение

$$u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)dt,\ x>0,\ \alpha>1, \tag{3}$$

в конусе пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$:

$$Q_0=\{u(x):\ u(x)\in C[0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}.$$

Доказательство следующей леммы аналогично приведенному в [1, §17].

Лемма 1. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Если $u(x)\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (3), то функция $u(x)$ не убывает и дважды непрерывно дифференцируема при $x>0$.*

С помощью леммы 1 доказывается

Лемма 2. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Если $u(x)\in Q_0^1$ и является решением интегро-дифференциального уравнения (1), то $u(x)\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (3). Обратно, если уравнение (3) имеет решение $u(x)\in Q_0$, то $u(x)\in Q_0^1$ и является решением уравнения (1).*

Следующая лемма предоставляет точные априорные оценки решения уравнения (3), играющие важную роль при доказательстве основных результатов данной работы (теоремы 1 и 2).

Лемма 3. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Если $u(x)\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (3), то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам:*

$$F(x)\equiv\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)x\right]^{1/(\alpha-1)}\leqslant u(x)\leqslant\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k(x)\right]^{1/(\alpha-1)}\equiv G(x). \tag{4}$$

Пример ядра $k(x) = a \cdot x$, где $a > 0$ любое число, показывает, что нижняя и верхняя априорные оценки (4) неулучшаемы, так как в этом случае они совпадают и являются решением как интегрального уравнения (3), так и интегро-дифференциального уравнения (1).

Из Леммы 3 следует, что решения интегрального уравнения (3) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x) : u(x) \in C[0,\infty) \ \text{ и } \ F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\}\,.$$

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свёртки T:

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x k'(x-t)u(t)\,dt\right)^{1/\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Лемма 4. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T.*

Исследование интегрального уравнения (3) будет основано на принципе сжимающих отображений и для его применения нужно построить полное метрическое пространство. Введем в связи с этим следующий класс:

$$P_b = \{u(x) : u(x) \in C[0,b] \ \text{ и } \ F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\}\,,$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в (4), а $b > 0$ – произвольное число.

По аналогии с методом Белицкого (см., например, [3, с. 218]) введем во множестве функций P_b расстояние по формуле:

$$\rho_b(u_1,u_2) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}}, \quad \beta > 0. \tag{5}$$

Легко проверить (ср. [1, §17]), что множество P_b с метрикой ρ_b образует полное метрическое пространство.

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0,b)$ такое, что

$$k'(c) < \alpha \cdot k'(0). \tag{6}$$

Положим

$$\beta = \frac{1}{k'(0)} \sup_{c\leqslant x\leqslant b} \frac{k'(x) - k'(0)}{x}. \tag{7}$$

Справедлива следующая лемма (ср. [2]).

Лемма 5. *Пусть функция $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда для любого $x \in [0,b]$ справедливо неравенство:*

$$k'(x) \cdot e^{-\beta x} \leqslant k'(c), \tag{8}$$

где c и β определяются из условия (6) и равенства (7), соответственно.

Теорема 1. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда оператор T действует из P_b в P_b и является сжимающим, причем*

$$\rho_b(Tu_2,Tu_1) \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha \cdot k'(0)}\rho_b(u_2,u_1), \quad \forall u_1(x), u_2(x) \in P_b,$$

где число c определяется из условия (6).

Таким образом, на основании принципа сжимающих отображений и теоремы 1, используя связь между уравнениями (3) и (1), установленную в лемме 2, мы можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 2. *Если ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2), то интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет в Q_0^1 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение можно найти в полном метрическом пространстве P_b методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике (5). При этом справедлива оценка скорости сходимости:*

$$\rho_b(u_n, u^*) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho_b(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $q = k'(c)/\big[\alpha \cdot k'(0)\big] < 1$, а $u_0(x) \in P_b$ есть начальное приближение.

Литература

1. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. —М.: Физматлит, 2009.

2. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math., **36**:1 (1979), 61–72.

3. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. —М.: Мир, 1969.

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.Х. Бегматов, З.Х. Очилов

akrambegmatov@mail.ru, zarifjonochilov@mail.ru

УДК 517.946

В работе рассматривается новый класс задач интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Доказаны теоремы единственности и существования решения, получены оценки устойчивости и формула обращения в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность решения задачи интегральной геометрии.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость.

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Begmatov Akram Hasanovich (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Очилов Зарифжон Хусанович, к.ф.-м.н., доцент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Ochilov Zarifjon Xusanovich (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

The problem of integral geometry with a weight function of a special type

A new class of Volterra type integral geometry problems with a special-weight function is considered. Theorems of uniqueness and the existence of a solution are proved, stability estimates and the inversion formula in Sobolev spaces are obtained, thereby showing the weak incorrectness of the solution of the integral geometry problem.

Keywords: The problem of integral geometry, weak and strong incorrectness, uniqueness and stability

Интегральная геометрия - это интенсивно развивающая область современной математики. Она является одним из крупных направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа.

Приведем общую постановку задачи интегральной геометрии [1]. Задачами интегральной геометрии вольтерровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений вольтерра в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1].

Достаточно общие результаты по единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов, весовые функции и многообразия инвариантны относительно группы всех движений вдоль фиксированной гиперплоскости, получены В.Г. Романовым [3]. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [9-14]. Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [15-18].

Единственность решения значительно более широких классов задач интегральной геометрии в полосе, рассматриваемых как сильно некорректные, была установлена В.Г. Романовым (см.[4]). В работах А.Л. Бухгейма [5,6] получены формулы обращения для задачи восстановления функции через интегралы от неё по параболоидам в полупространстве $y > 0$, причем формула обращения, приведенная в [5], содержит только конечное число производных от данных. В [6] с помощью техники шкал банаховых пространств доказана теорема единственности решения задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с весовой функцией, аналитической по части переменных.

В своей работе [2] М.М. Лаврентьев показал единственность решения сильно некорректной задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с возмущением достаточно общего вида.

В статье рассматривается задача интегральной геометрии с весовой функцией специального вида по полуплоскости $y > 0$. Доказаны теоремы единственности и существования решения в классе гладких финитных функций, получены оценки устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, что показывает её слабую некорректность, а также формулы обращения.

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$(x,y)\in R^2, (\xi,\eta)\in R^2, \lambda\in R^1, \mu\in R^1$$

$$\Omega=\{(x,y), x\in R^1, y\in(0,1), l<\infty\}$$

$$\overline{\Omega}=\{(x,y), x\in R^1, y\in[0,1]\}$$

Постановка задачи. В полосе $\overline{\Omega}$ рассмотрим семейство кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин (x,y), произвольная кривая семейства $P(x,y)$ определяется соотношениями

$$P(x,y)=\{(\xi,\eta):\eta=(\xi-x+\sqrt{y})^2, 0\leqslant\eta\leqslant y, x-\sqrt{y}\leqslant\xi\leqslant x\}\cup$$

$$\cup\{(\xi,\eta):\eta=(x+\sqrt{y}-\xi)^2, 0\leqslant\eta\leqslant y, x\leqslant\xi\leqslant x+\sqrt{y}\}$$

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x,y)$, если для всех (x,y) из полосы $\overline{\Omega}$ известны интегралы от функции $u(\cdot)$ по кривым $P(x,y)$:

$$\int\limits_{x-\sqrt{y}}^{x} g(x-\xi)u(\xi,(\xi-x+\sqrt{y})^2)d\xi+\int\limits_{x}^{x+\sqrt{y}} g(x-\xi)u(\xi,(x+\sqrt{y}-\xi)^2)d\xi=f(x,y) \tag{1}$$

где $g(x-\xi)=\sqrt{\frac{\eta}{y}}\cdot\chi(x-\xi)$, $\chi(x-\xi)=\{\begin{array}{l}1,\text{если } x-\xi>0,\\ 0,\text{если } x-\xi<0.\end{array}$

Функция $u(x,y)$ - функция из класса u, которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в R^2_+ :

$$supp\ u\subset D=\{(x,y):-a<x<a, 0<a<\infty, 0<y<l, l<\infty\}$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех (x,y) из полосы $\overline{\Omega}$. Тогда решение задача 1 в классе U единственно, имеет место представление*

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_2(x-\xi,y-\eta)(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2})f(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{2}$$

и выполняется неравенство

$$\|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_1\|f\|_{W_2^{2,2}(\Omega)}$$

где C_1 - некоторая постоянная.

Литература

1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1972.

2. *Лаврентьев А.М., Шабат Б.В.*Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1986.

3. *Романов В.Г.* О восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых фокус неподвижен // Докл. АН СССР, **173**:4 (1967), 766-796.

4. *Романов В.Г.* О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн., **8**:5 (1967), 1206-1208.

5. *Бухгейм А.Л.* О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журн., **13**:1 (1972), 34-42.

6. *Бухгейм А.Л.* Об одной задаче интегральной геометрии // Мат. проблемы геофизики, **36**:4 (1973), 69-73.

7. *Бегматов Акрам Х.* Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа // Доклады РАН, **349**:3 (1996), 297-298.

8. *Бегматов Акрам Х.* Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн., **37**:3 (1996), 500-505.

9. *Бегматов Акрам Х.* Новые классы слабо и сильно некорректных задач интегральной геометрии // Второй Сиб. конгресс по прикл. и инд. математике. Тез. докл., ч. III. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1996, 298.

10. *Бегматов Акрам Х.* Некоторые новые классы задач интегральной геометрии. // Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики, **40** (1997), 30.

11. *Бегматов Акрам Х.* Вольтерровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журн., **38**:4 (1997), 723-737.

12. *Бегматов Акрам Х.* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершине // Доклады РАН, **358**:2 (1998), 151-153.

13. *Бегматов Акрам Х.* Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии // Доклады РАН, **386**:1 (2002), 1-3.

14. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией // Доклады РАН, **429**:3 (2009), 295-297.

15. *Begmatov Akram H., Muminov M.E., Ochilov Z.H.* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type // Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics, **3**:5 (2015), 113-120.

16. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии вольтеровского типа с весовой функцией специального вида. // Журнал Continuum: Математика. Информатика. Образование, **2** (2017), 11-15.

О ТОЧКАХ ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНДЕНШТРАУССА

Б.Б. Беднов
noriiii@inbox.ru

УДК 517.982.256, 515.124.4

В пространстве Линденштраусса множество точек Штейнера для произвольного конечного набора элементов характеризуется через пересечение метрических отрезков и пересечение шаров.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Линденштраусса, точка Штейнера, липшицева выборка

On Steiner points in the Lindenstrauss space

The set of Steiner points for an arbitrary finite set of elements is characterized by the intersection of metric segments and the intersection of balls in the Lindenstrauss space.

Keywords: Banach space, Lindenstrauss space, Steiner point, Lipschits selection

В действительном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ для произвольного набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$ из $n \geqslant 3$ его элементов определяется множество точек Штейнера

$$\mathrm{St}_n(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ s \in X \colon \sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf_{x \in X} \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| \right\}.$$

Точки Штейнера называют также точками Ферма, точками Ламе и медианами. Возникающее при этом отображение Штейнера $\mathrm{St}_n : X^n \to X$ пространства $X^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_k \in X\}$ с нормой $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_n = \|x_1\| + \ldots \|x_n\|$ в X может быть, вообще говоря, не однозначным и определенным не на всем X^n.

В случае гильбертова пространства X и $n = 3$ точка Штейнера $\mathrm{St}(x_1, x_2, x_3)$ существует и единственна: она лежит в плоскости точек x_1, x_2, x_3 и либо совпадает с одной из них (если в треугольнике $x_1x_2x_3$ есть угол, не меньший $120°$), либо совпадает с точкой Торричелли (из которой все стороны треугольника видны под углом $120°$).

Наиболее просто точки Штейнера находятся в пространстве L_1: для всякого набора функций $x_1, \ldots, x_n \in L_1(E, \mu)$ множество $\mathrm{St}_n(x_1, \ldots, x_n)$ состоит в точности из таких функций s, которые в μ-почти каждой точке $t \in E$ принимают значения, *средние* для чисел $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ (при нечетном n такая функция единственна).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-01-00333) и Программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ (НШ 6222.2018.1).

Беднов Борислав Борисович, к.ф.-м.н., переводчик-секретарь, МГУ имени М.В. Ломоносова, доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Borislav Bednov (Lomonosov Moscow State University, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Точки Штейнера могут не существовать уже для трехточечных множеств M_3 в банаховом пространстве X. Первый пример таких X и M_3 построил А.Л. Гаркави [1] в 1974 г. В то же время во всяком банаховом пространстве X, 1-дополняемом в своем втором сопряженном (в частности, в любом рефлексивном пространстве, а также в любом пространстве L_1) множество $\mathrm{St}_n(x_1,\ldots,x_n)$ непусто для любого набора точек x_k и любого натурального n (см., напр., [2]).

Пусть $m \geqslant 3$ — натуральное число. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством m.2.I.P. (m.2 Intersection Property), если всякие m попарно пересекающихся замкнутых шаров в X имеют непустое пересечение.

Действительные банаховы пространства, обладающие свойством m.2.I.P. для всякого $m \geqslant 3$, называются пространствами Линденштраусса или предуальными к L_1. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие.

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{St}(M_n)$ не пусто [3] для произвольного множества $M_n \subset X$, а само множество $\mathrm{St}(M_n)$ можно охарактеризовать [4] при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a и b в банаховом пространстве X есть множество $m[a,b] = \{x \in X : \|x-a\| + \|x-b\| = \|a-b\|\}$). Точнее, верна

Теорема [4]. *Пусть пространство X предуально к L_1. Для множества $M = \{x_1,\ldots,x_n\}$ из X имеет место формула*

$$|\mathrm{St}|(M) = \frac{1}{2}\max\left\{\sum_{j=1}^{k} L(N_j) : N_1 \cup \cdots \cup N_k = M\right\},$$

где максимум берётся по всем не менее чем двухточечным подмножествам $N_j \subset M$, причём если точка x_i имеет кратность p_i во множестве M, то x_i содержится в p_i различных множествах из $\{N_j\}_{j=1}^k$. Число $L(N_j)$ обозначает максимальную сумму длин рёбер цикла, обходящего все вершины из N_j по одному разу. При этом

$$\mathrm{St}(M) = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{St}(N_j^*, X) = \bigcap m[x_p, x_q],$$

где $\{N_j^*\}_{j=1}^k$ — такие не менее чем двухточечные подмножества множества M, для которых $\sum_{j=1}^k L(N_j^*) = 2|\mathrm{St}|(M)$, а последнее пересечение берётся по тем парам индексов p, q, для которых $x_p, x_q \in N_j^*$ соединены ребром в цикле с длиной $L(N_j^*)$, обходящем множество N_j^*, $j = 1,\ldots,k$.

Заметим, что для двухточечного множества N_j цикл состоит из одного ребра, посчитанного дважды.

В пространстве Линденштраусса величина $|\mathrm{St}|(x_1,x_2,x_3)$ равна полупериметру треугольника $x_1x_2x_3$. При этом расстояния от x_i до всех точек $s \in \mathrm{St}(x_1,x_2,x_3)$ одинаковы и равны $\rho_i = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Это значит, что $|\mathrm{St}|(x_1,x_2,x_3)$ есть пересечение шаров $B(x_i,\rho_i)$, $i = 1,2,3$. Для четырёх элементов пространства Линденштраусса $|\mathrm{St}|(x_1,x_2,x_3,x_4) = \max\{\|x_1-x_2\|+\|x_3-x_4\|, \|x_1-x_3\|+\|x_2-x_4\|, \|x_1-x_4\|+\|x_2-x_3\|\}$ и расстояния $\|x_i-s\|$ определены не однозначно при $s \in \mathrm{St}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Нетрудно доказать, что множества $\mathrm{St}(x_1,x_2,x_3)$ и $\mathrm{St}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ имеют непустое пересечение для произвольных элементов x_1,x_2,x_3,x_4 пространства Линденштраусса. Возможно, множества $\mathrm{St}(x_1,\dots,x_{n-1})$ и $\mathrm{St}(x_1,\dots,x_n)$ имеют непустое пересечение для каждого n и произвольных $x_1,\dots,x_n$ из предуального к L_1 пространства.

В пространстве Линденштраусса подмножество из $\mathrm{St}(x_1,\dots,x_n)$ можно получить как пересечение шаров $B(x_i,r_i)$ при условиях $r_1+\dots+r_n = |\mathrm{St}|(x_1,\dots,x_n)$ и $r_i+r_j \geqslant \|x_i-x_j\|$ (в силу свойства m.2.I.P.). При малых n такие радиусы позволяют предъявить липшицеву выборку из отображения Штейнера $\mathrm{St}_n : C[K]^n \to C[K]$ (в конечномерных пространствах Линденштраусса липшицева выборка из отображения Штейнера существует [5]).

Литература

1. *Гаркави А.Л., Шматков В.А.* О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб., **95(137)**:2(10) (1974), 272–293.

2. *Veselý L.* Generalized centers of finite sets in Banach spaces // Acta Math. Univ. Comenianae, **66**:1 (1997), 83–115.

3. *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб., **205**:4 (2014), 3–19.

4. *Беднов Б.Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб., **207**:8 (2016), 31–46.

5. *Беднов Б.Б., Бородин П.А., Чеснокова К.В.* Липшицевы выборки из отображения Штейнера // Матем. сб., **209**:2(2018), 3–21.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕР НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Александр А. Беляев

aabelyaev@fa.ru

УДК 517.982, 517.987, 517.54

Изучаются свойства аналитических мер на бесконечномерном локально выпуклом пространстве. Устанавливается, что мера является аналитической экспоненциального роста только тогда, когда её преобразование Фурье финитно в некотором смысле. Приводятся примеры таких мер.

Ключевые слова: бесконечномерный анализ, теория меры, аналитическое продолжение

Беляев Александр Афанасьевич, к.ф.-м.н., доцент, Финансовый университет при Правительстве РФ (Москва, Россия); Alexander Belyaev (Financial University under the Goverment of the Russian Federation, Moscow, Russia)

Analytic continuations of measures on infinite-dimensional space

The properties of analytic measures on an infinite-dimensional locally convex space are studied. It is established that a measure is an analytic exponential growth only when its Fourier transform is finite in some sense. Examples of such measures are given.

Keywords: infinite dimensional analysis, measure theory, analytic continuation

Доклад основан на совместных с О.Г. Смоляновым исследованиях аналитических мер на бесконечномерных пространствах, начатых в работе [2].

Пусть $Q-$ вещественное ЛВП и $P = Q'-$ сопряжённое пространство непрерывных линейных функционалов на Q. Обозначим Σ_P минимальную $\sigma-$ алгебру подмножеств пространства P, содержащую алгебру $Q-$цилиндрических подмножеств P, и через $M(\Sigma_P)$ банахово пространство всех конечных $\sigma-$аддитивных комплекснозначных мер на Σ_P, наделённое нормой $\|\mu\| = |\mu|(P)$, где $|\mu|-$ вариация меры μ [1]. Мера μ на Σ_P однозначно определяется своим преобразованием Фурье $\hat{\mu}$(см.[1]).

Назовём меру $\mu \in M(\Sigma_P)$ аналитической по направлению $h \in P$, если $\forall A \in \Sigma_P$ функция $\mu(A - th)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет аналитическое продолжение $\mu(A - zh)$ в область $U_{\mu,h,A} \subset \mathbb{C}$ (см. [2]).

Можно дать эквивалентное определение аналитичности меры, основанное на разложении функции $\mu(A - th)$ в ряд Тейлора (см. [3]).

Если для каждого $A \in \Sigma_P$ существует аналитическое продолжение функции $\mu(A-th)$ в область $U \subset \mathbb{C}$, то это продолжение $\mu_{zh}(A) = \mu(A-zh)$ является мерой, аналитически зависящей от $z \in U$.

Из аналитичности меры следует её бесконечная дифференцируемость по направлению h (определение и свойства дифференцируемых мер см. в [4,5]).

Пространство всех мер на Σ_P аналитических по направлению $h \in Q$ обозначим $M_h(\Sigma_P)$.

Лемма 1. *Пусть $h \in P$ и мера $\mu-$ аналитическая по направлению h. Тогда производная d_h меры μ по h также есть мера на Σ_P аналитическая по направлению h.*

Лемма 2. *Пусть $h \in P$ и мера $\mu-$ аналитическая по направлению h. Тогда для произвольной меры $\nu \in M(\Sigma_P)$ свёртка мер $\mu * \nu$ также есть мера на Σ_P аналитическая по направлению h.*

Будем говорить, что мера μ на Σ_P целая экспоненциального роста с показателем $R > 0$ по направлению $h \in P$, если $\mu-$ целая по направлению h и $\forall R_1 > R$, $\forall A \in \Sigma_P$ существует такая константа $C(h, R_1, A) > 0$, что

$$|\mu(A - zh)| \leqslant C(h, R_1, A)e^{R_1|Im(z)|} \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Пространство всех таких мер будем обозначать $AM_{h,R}(\Sigma_P)$. Пространство всех целых по направлению h мер экспоненциального роста с произвольным показателем $R > 0$ обозначим $AM_h(\Sigma_P)$.

Лемма 3. *Пусть $h \in P$, $R > 0$. Тогда $\mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$ тогда и только тогда, когда $\mu-$ целая по направлению $h \in P$ мера и выполнена оценка*

$$\|\mu_{zh}\| \leqslant 4e^{R|Im(z)|}\|\mu\| \ \ \forall z \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

Из леммы 3 следует, что $AM_{h,R}(\Sigma_P)-$ замкнутое подпространство банахова пространства $M(\Sigma_P)$.

Для любого $B \subset P$ поляра B° в Q определется равенством

$$B^\circ = \{q \in Q\colon |<q,p>| \leqslant 1 \ \ \forall p \in B\}.$$

Теорема 1. *Пусть $h \in P$, $R > 0$, $\mu \in M(\Sigma_P)$ и $\hat{\mu} = \mathcal{F}(\mu)$. Тогда*

$$\mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P) \Leftrightarrow supp(\hat{\mu}) \subset R \cdot \{h\}^\circ.$$

Отметим, что теорема 1 обобщает известную конечномерную теорему Пэли-Винера о распределениях с компактным носителем на случай мер на бесконечномерных пространствах. Иной подход к обобщению теоремы Пэли-Винера на случай квазимер на бесконечномерном пространстве можно найти в работе [6].

Следствие 1. *Пусть последовательность мер μ_n из $AM_{h,R}(\Sigma_P)$ сходится на каждом $A \in \Sigma_P$. Тогда существует предел μ последовательности μ_n в $M(\Sigma_P)$, и для каждого $z \in \mathbb{C}$ последовательность мер $(\mu_n)_{zh}$ сходится по вариации к мере $\mu_{zh} \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$. При этом $\forall \delta > 0$ указанная сходимость последовательность $(\mu_n)_{zh}$ равномерна по множеству*

$$V_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |Imz| \leqslant \delta\}.$$

Следствие 2. *Пусть $h \in P$ и $\mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$. Тогда для произвольной меры $\nu \in M(\Sigma_P)$ свёртка мер $\mu * \nu$ также есть мера из $AM_{h,R}(\Sigma_P)$.*

Следствие 3. *Пусть $h \in P$, $\mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$ и $T-$цилиндрический многочлен на P. Тогда $T \cdot \mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$.*

Можно показать, что, по крайней мере в том случае, когда P содержит некоторое плотное сепарабельное гильбертово подпространство, существует такая нетривиальная продакт-мера μ, что $\mu \in AM_h(\Sigma_P) \ \ \forall h \in H$, где $H-$плотное гильбертово подпространство P. Запас таких мер можно расширить с помощью следствий 2 и 3.

Отметим, что с помощью введенного понятия аналитической меры экспоненциального роста, в совместной с О.Г. Смоляновым работе [2] авторами было доказано существование фундаментального решения уравнения с постоянными коэффициентами в бесконечномерном пространстве при достаточно широких ограничениях.

Литература

1. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. — М.: ЛЕНАНД, 2015, 336 с.

2. *Беляев А.А., Смолянов О.Г.* Распределения и аналитические меры на бесконечномерных пространствах — Доклады Академии наук., **483**:1, (2018), с. 7-10.

3. *Бенткус В. Ю.* Эллиптичность бесконечномерного итерированного оператора Лапласа. I. — Литовский матем. сб., **19**:4, (1979), с. 13-28.

4. *Smolyanov O.G., Weizsaecker H.von.* Infinite dimensional analysis. — Quantum probability and related topics. , vol. 2, No. 1, (1999), p.51-78.

5. *Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры — Тр. ММО, **24** (1971), 133–174.

6. *Хренников А.Ю., Петерссон Х.* Теорема Пэли–Винера для обобщенных целых функций на бесконечномерных пространствах — Изв. РАН. Сер. матем., 652 (2001), 201–224.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕССЕЛЕВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ЛИЗОРКИНА–ТРИБЕЛЯ

Алексей А. Беляев

alexei.a.belyaev@gmail.com, belyaev-aa@rudn.ru

УДК 517.518.23

Мы рассматриваем проблему конструктивного описания мультипликаторов, действующих в шкале пространств Лизоркина–Трибеля, причём особое внимание уделяется случаю пространств бесселевых потенциалов. Применяя принцип равномерной локализации, мы показываем, что при естественных ограничениях в важных частных случаях может быть получение описание пространства мультипликаторов в терминах равномерно локализованных пространств Лизоркина–Трибеля. Это описание обобщают полученные ранее в совместных работах автора и А. А. Шкаликова результаты о мультипликаторах, действующих в пространствах бесселевых потенциалов.

Ключевые слова: мультипликаторы, равномерная локализация, пространства Лизоркина–Трибеля

Multipliers in Bessel potential and Lizorkin–Triebel spaces

We consider a problem of finding a constructive description of multipliers acting in the scale of Lizorkin–Triebel spaces with special attention being paid to the case of multipliers between Bessel potential spaces. We show that, since uniform localization principle holds true for Lizorkin–Tribel spaces, under natural assumptions the multiplier space can be described in terms of the uniformly localized Lizorkin–Tribel spaces in some important model cases. This description generalizes results about multipliers acting in Bessel potential spaces, obtained recently by the author and A. A. Shkalikov.

Keywords: multipliers, Lizorkin–Triebel spaces, uniform localization

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-6222.2018.1.

Беляев Алексей Александрович, к.ф.-м.н. (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова и Российский Университет Дружбы Народов, Москва, Россия); Alexei A. Belyaev, Ph.D. (Lomonosov Moscow State University and Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia)

Рассмотрим мультипликаторы, действующие между пространствами $A^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n)$ и $A^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)$, где в качестве $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ фигурирует или пространство Бесова $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$, или пространство Лизоркина–Трибеля $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$.

В важном частном случае $p = q$ эти шкалы совпадают и, более того, при нецелых значениях индекса гладкости s имеет место соотношение $B^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n) = W^s_p(\mathbb{R}^n)$, где $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева–Слободецкого. В другом важном модельном случае $q = 2$ мы получаем, что

$$F^s_{p,\,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n),$$

где $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесселевых потенциалов.

Последний случай был детально изучен в работах [1] и [2], где для описания мультипликаторов из одного пространства бесселевых потенциалов в другое была использована шкала равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Использование этой шкалы позволило найти конструктивное описание мультипликаторов, действующих между пространствами бесселевых потенциалов. А именно, были получены следующие результаты

Теорема 1. *Пусть $s_1,\ s_2 \geqslant 0$ и $p_1,\ p_2 > 1$. Пусть также $p_1 \leqslant p_2$, $s_1 - n/p_1 \geqslant s_2 - n/p_2$ и $s_1 - n/p_1 > 0$. Тогда*

$$M[H^{s_1}_{p_1}(\mathbb{R}^n) \to H^{s_2}_{p_2}(\mathbb{R}^n)] = H^{s_2}_{p_2,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть $s_1,\ s_2 \geqslant 0$ и $p_1,\ p_2 > 1$. Пусть также $p_1 \leqslant p_2$, причём или $s_1 \geqslant s_2,\ s_1 - n/p_1 > 0$, или $s_2 \geqslant s_1,\ s_2 - n/p_2^{'} > 0$. Тогда*

$$M[H^{s_1}_{p_1}(\mathbb{R}^n) \to H^{-s_2}_{p_2}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s_2}_{p_2,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s_1}_{p_1^{'},\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны (здесь и ниже для числа $p \in (1; +\infty)$ под p' понимаем число из $(1; +\infty)$, определённое соотношением $1/p + 1/p^{'} = 1$).

Локализационные свойства пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля принципиально отличаются. В случае пространств Лизоркина–Трибеля имеет место принцип равномерной локализации, гласящий, что на пространстве $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ можно ввести норму $\|\cdot\|_{s,\,p,\,q,\,(p)}$, эквивалентную стандартной норме этого пространства и заданную соотношением

$$\|u\|_{s,\,p,\,q,\,(p)} = \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \left(\|\eta_z \cdot u\|_{F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\, u \in F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n),$$

где $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$a)\ 0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n;\ \ b)\ \eta(x) = 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant 1;$$

$$c)\ \eta(x) = 0\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \geqslant 2,$$

и

$$\eta_z(x) = \eta(x-z) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Для пространств Бесова норма $\|\cdot\|_{s,\,p,\,q,\,(p)}$, заданная соотношением

$$\|u\|_{s,\,p,\,q,\,(p)} = \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \left(\|\eta_z\cdot u\|_{B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \ \forall\, u \in B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n),$$

строго слабее стандартной нормы $\|\cdot\|_{B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)}$ при $p > q$ и строго сильнее этой нормы при $p < q$ (смотреть [3]). При этом для пространств Бесова эти нормы эквивалентны только при $p = q$, но в этом случае, как отмечалось выше, $B^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n)$.

Мы изучаем соотношения между стандартными нормами на пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова и локализованными нормами

$$\|u\|_{s,\,p,\,q,\,(r)} = \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \left(\|\eta_z\cdot u\|_{A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}, \ \ r \in [1;\,+\infty),$$

$$\|u\|_{s,\,p,\,q,\,(\infty)} = \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \left(\|\eta_z\cdot u\|_{A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)}\right),$$

что позволяет установить теоремы вложения для мультипликаторов, действующих в пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова. Основное внимание уделяется той ситуации, когда возможно получить описание пространства мультипликаторов в терминах локализованных норм.

Следующая теорема представляет собой основной результат для мультипликаторов в пространствах Лизоркина–Трибеля в той ситуации, когда оба индекса гладкости этих пространств неотрицательны.

Теорема 3. *Пусть* $s_1 > \frac{n}{p_1}$, $s_2 \geqslant 0$, $p_1,\, p_2 > 1$, $q_1,\, q_2 \geqslant 1$, *причём* $p_1 \leqslant p_2$, $s_1 - \frac{n}{p_1} > s_2 - \frac{n}{p_2}$. *Тогда*

$$M[F^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n) \to F^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)] = F^{s_2}_{p_2,\,q_2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

и нормы этих пространств эквивалентны.

Ограничения, налагаемые в условиях этой теоремы, являются естественными в том смысле, что при отказе от любого из этих ограничений невозможно получить описание соответствующего пространства мультипликаторов в терминах его совпадения с некоторым пространством $F^\gamma_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \overset{def}{=} F^\gamma_{p,\,q,\,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Для доказательства Теоремы 3 используется следующее

Утверждение 1. *Пусть* $s_1,\, s_2,\, s_3 \in \mathbb{R}$, $p_1,\, p_2,\, p_3,\, q_1,\, q_2,\, q_3 > 1$. *Пусть также или* $p_1 < p_2$, *или* $p_1 = p_2$ *и* $q_1 \leqslant q_2$. *Тогда непрерывное вложение*

$$F^{s_3}_{p_3,\,q_3,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[F^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n) \to F^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такая константа $C > 0$, *что*

$$\|f\cdot \mathbf{g}\|_{F^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\cdot \|\mathbf{f}\|_{F^{s_3}_{p_3,\,q_3}(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{F^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Литература

1. *Belyaev A. A., Shkalikov A. A.* Multipliers in spaces of Bessel potentials: the case of indices of nonnegative smoothness // Math. Notes, **102**: 5 – 6 (2017), 632–644.

2. *Belyaev A. A., Shkalikov A. A.* Multipliers in Bessel potential spaces with smoothness indices of different sign // St. Petersburg Math. J., **30** (2019), 203–218.

3. *Bourdaud G.* Localisations des espaces de Besov // Stud. Math., **90** : 2 (1988), 153–163

О БАЗИСНОСТИ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

Б.Т. Билалов

b_bilalov@mail.ru

УДК 517.51

В работе рассматривается возмущенная система экспонент $\exp\left(i\left(n-\beta\, sign\, n\right)t\right), n \in Z$, где $\beta-$некоторый комплексный параметр. Находится необходимое и достаточное условие на параметр β, при выполнении которого эта система образует базис в пространстве Морри на интервале $(-\pi,\pi)$. Критерий базисности относительно параметра β этой системы в лебеговых пространствах получен в работах А.М.Седлецкого и Е.И.Моисеева. Отметим, что критерий базисности в пространствах Морри отличается от критерия базисности в лебеговых пространствах.

Ключевые слова: возмущенная система экспонент, базисность, пространство Морри

The basis property of a perturbed system of exponentials in Morrey-type spaces

The perturbed system of exponents $\exp\left(i\left(n-\beta\, sign\, n\right)t\right), n \in Z$, where β is some complex parameter is considered. A necessary and sufficient condition on the parameter β are obtained, under which this system forms a basis for Morrey space over the interval $(-\pi,\pi)$. A basicity criterion with respect to the parameter β of this system in Lebesgue spaces was obtained in the works of A.M. Sedletskii and E.I. Moiseev. We note that the basicity criterion in Morrey spaces differs from the basicity criterion in Lebesgue spaces.

Keywords: perturbed system of exponents, basis property, Morrey space

---

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики-Грант No EIF-BGM-4-RFTF-1/2017-21/02/1

Билалов Билал Тельман оглы, д.ф.-м.н., профессор, чл. корр. НАН Азербайджана Институт Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан); Bilal Bilalov (Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

Работа посвящена изучению базисности возмущенной системы экспонент

$$E_\beta \equiv \left\{e^{i(n-\beta\, sign\, n)t}\right\}_{n\in Z}, \tag{1}$$

в пространствах Морри на интервале $(-\pi,\pi)$, где $\beta \in C-$комплексный параметр.

Определим пространство Морри на единичной окружности $\gamma = \{z\in C : |z| = 1\}$ на комплексной плоскости C. Далее $\omega = int\gamma$ будет обозначать единичный шар в C.

Через $L^{p,\alpha}(\gamma), 1 \leqslant p < +\infty, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, будем обозначать нормированное пространство всех измеримых на γ функций $f(\cdot)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\gamma)} = \sup_B \left(|B\cap\gamma|_\gamma^{\alpha-1} \int_{B\cap\gamma} |f(\xi)|^p |d\xi| \right)^{1/p} < +\infty,$$

($|B\cap\gamma|_\gamma -$линейная мера пересечения $B\cap\gamma$), где sup берется по всем шарам с центром на γ и с произвольным положительным радиусом. Относительно этой нормы $L^{p,\alpha}(\gamma)$ является банаховым. Наряду с этим определим пространство $L^{p,\alpha}(-\pi,\pi)$, $1\leqslant p < +\infty, 0\leqslant \alpha \leqslant 1$, состоящего из измеримых на $(-\pi,\pi)$ функций $f(\cdot)$, с конечной нормой

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(-\pi,\pi)} = \sup_{I\subset[-\pi,\pi]} \left(|I|^{\alpha-1} \int_I |f(t)|^p |dt| \right)^{1/p} < +\infty,$$

где sup берется по всем интервалам $I\subset[-\pi,\pi]$. Нетрудно заметить, что соответствие $f(t) =: F\left(e^{it}\right), t \in (-\pi,\pi), F(\cdot) \in L^{p,\alpha}(\gamma)$, устанавливает изометрический изоморфизм между пространствами $L^{p,\alpha}(\gamma)$ и $L^{p,\alpha}(-\pi,\pi)$. Поэтому в дальнейшем эти пространства будем отождествлять и его будем обозначать через $L^{p,\alpha}$, а норму через $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.

Будем рассматривать подпространство $M^{p,\alpha}$ функций $f(\cdot)$, сдвиги которых непрерывны в $L^{p,\alpha}$, т.е. $\|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_{p,\alpha} \to 0, \delta\to 0$.

Для установления базисности системы экспонент (1) в пространствах Морри $M^{p,\alpha}$ применяется метод краевых задач. Этот метод требует установления базисности частей системы экспонент в пространствах Морри-Харди $MH_+^{p,\alpha}$ и ${}_{-1}MH_-^{p,\alpha}$.

Итак, рассмотрим систему $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+} \subset M_+^{p,\alpha}, 1 < p < +\infty, 0 < \alpha < 1$. Пусть $f\in M_+^{p,\alpha}-$произвольная функция. Совершенно очевидно, что $f \in L_p^+ = H_p^+/_\gamma$. Из базисности системы экспонент $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ в $M^{p,\alpha}$ (см. [1]) получаем разложение

$$f(t) = \sum_{n\in Z} f_n e^{int}. \tag{2}$$

Из сходимости ряда (2) к $f(\cdot)$ в $M^{p,\alpha}$ следует, что он сходится к $f(\cdot)$ и в L_p. А из включения $f\in L_p^+$ следует, что $f_n = 0, \forall n<0$. В результате получаем разложение в $M_+^{p,\alpha}$:

$$f(t) = \sum_{n\in Z_+} f_n e^{int},$$

т.е. произвольная функция из $M_{+}^{p,\alpha}$ разлагается в ряд по системе $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$. Из минимальности системы $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ в $M^{p,\alpha}$ непосредственно следует минимальность системы $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ в $M_{+}^{p,\alpha}$. В итоге получаем базисность системы $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ в $M_{+}^{p,\alpha}$. Совершенно аналогично доказывается базисность системы $\left\{e^{-int}\right\}_{n\in N}$ в ${}_{-1}M_{-}^{p,\alpha}$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Система* $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ $\left(\left\{e^{-int}\right\}_{n\in N}\right)$ *образует базис в пространстве* $M_{+}^{p,\alpha}$ *(в* ${}_{-1}M_{-}^{p,\alpha}$*),* $1<p<+\infty, 0<\alpha<1$.

Также справедлива

Теорема 2. *Пусть* $2Re\beta+\frac{\alpha}{p}\notin Z$. *Тогда система* E_β *образует базис в* $M^{p,\alpha}$, $1<p<+\infty$, $0<\alpha<1$, *тогда и только тогда, когда* $\left[2Re\beta+\frac{\alpha}{p}\right]=0$ *(*$[\cdot]$ *−целая часть). Ее дефект равен* $d\left(E_\beta\right)=\left[2Re\beta+\frac{\alpha}{p}\right]$. *При* $d\left(E_\beta\right)<0$, *она неполна, по минимальна в* $M^{p,\alpha}$; *при* $d\left(E_\beta\right)>0$, *она полна, но не минимальна в* $M^{p,\alpha}$.

Литература

1. *Bilalov B.T., Quliyeva A.A.* On basicity of exponential systems in Morrey-type spaces // International Journal of Mathematics, **25**:6 (2014), 10 pages.

2. *Bilalov B.T.* The basis property of a perturbed system of exponentials in Morrey-type spaces // Siberian Mathematical Journal, **60**: 2 (2019), 249–271.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Н.А. Бокаев, Ж.М. Онербек

bokayev2011@yandex.ru, onerbek.93@mail.ru

УДК 517.518

В настоящей работе вводится понятие глобального пространства типа Морри с переменным показателем. Приводятся достаточные условия ограниченности потенциала Рисса с постоянным и переменным показателями в этих пространствах.

Ключевые слова: глобальные пространства типа Морри с переменным показателем, потенциал Рисса, ограниченность оператора.

Бокаев Нуржан Адилханович, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Nurzhan Bokayev (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Онербек Жомарт Муратович, магистр. ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Zhomart Onerbek (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

On boundedness of the Riesz potential in the global Morrey type spaces with variable exponent

We introduce the global Morrey type spaces with variable exponent. We give sufficient conditions for the boundedness of Riesz Potential with constant and variable exponent in this spaces.

Keywords: the global Morrey type spaces with variable exponent, Riesz Potential, boundedness of operator.

Потенциал типа Рисса определяется равенством:

$$I^{\alpha(x)} f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy,$$

где $0 < \alpha(x) < n$. При $\alpha = const$ этот оператор совпадает классическим потенциалом Рисса I^{α} .

Пусть $p(x)$ измеримая функция на открытом множестве $\Omega \subset R^n$ со значениями $(1, \infty)$. Открытое множество Ω может быть и неограниченным. Предположим

$$1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty,$$

где $p_- = p_-(\Omega) = \inf_{x\in\Omega} p(x)$, $p_+ = p_+(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} p(x)$.

Пусть $P^{\log(\Omega)}$ — это множество функций $p(x)$, для которых

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C}{-ln|\, x-y|}, |x-y| \leqslant \frac{1}{2},$$
$$|p(x) - p(\infty)| \leqslant A_\infty \ln(2+|x|) \;\; x, y \in \Omega.$$

Обозначим через $L_{p(.)}(\Omega)$ пространство всех измеримых функций $f(x)$ на Ω, таких, что

$$J_{p(.)}(f) = \int_\Omega [f(x)]^{p(x)} dx < \infty,$$

где норма определяется следующим образом

$$||f||_{p(.)} = \inf \left\{ \eta > 0, J_{p(.)} \left(\frac{f}{\eta} \right) \leqslant 1 \right\}.$$

Пусть $w(x,r)$ - неотрицательная измеримая функция на $\Omega \times [0,l]$, где $\Omega \subset R^n$, $l = \operatorname{diam}\Omega, 1 \leqslant \theta < \infty$. Глобальные пространства Морри с переменным показателем $GM_{p(.),w(.),\theta}$ - это множество функций с конечной квазинормой:

$$\|f\|_{GM_{p(.),w(.),\theta}} = \sup_{x\in R^n} \left\| w(x,r)^{-1} r^{-\theta_p(x,r)} \|f\|_{L_{p(.)(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} < \infty,$$

где $B(x,r)$ — шар в n-мерном пространстве с центром в точке х и радиусом r. Пусть $\theta_{p(x,r)} = \frac{n}{p(x)}$, при $r \leqslant 1$; $\theta_{p(x,r)} = \frac{n}{p(\infty)}$, при $r > 1$.

Теорема 1. Пусть $p_1(x), p_2(x) \in P^{\log(\Omega)}$ и $0 < \alpha < n$, $\frac{1}{p_2(x)} = \frac{1}{p_1(x)} - \frac{\alpha}{n}$, $1 < \theta < \infty$, и пусть измеримые функции w_1, w_2 удовлетворяют условию:

$$\sup_{x\in R^n} \int_0^\infty {w_2}^{-\theta}(x,r) \int_r^\infty \left(w_1(x,t)\, t^{\theta_{p_1}(x,t) - \theta_{p_2}(x,t) - 1}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}} dt dr < \infty.$$

Тогда оператор I^α ограничен из $GM_{p_1(.),w_1(.),\theta}$ в $GM_{p_2(.),w_2(.),\theta}$.

Теорема 2. Пусть $p_1(x), p_2(x) \in P^{\log(\Omega)}$ и

$$\alpha_- = \inf_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0, (\alpha p)_+ = \sup_{x\in\Omega} \alpha(x)p(x) < n,$$

функции w_1, w_2 и удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\gamma(x) = A_\infty \alpha(x)[1-\frac{\alpha(x)}{n}]$. Тогда оператор $\frac{1}{(1+|x|)^{\gamma(x)}} I^{\alpha(.)}$ ограничен из $GM_{p_1(.),w_1,\theta}(.)$ в $GM_{p_2(.),w_2(.),\theta}$.

Для обобщенных пространств типа Морри $M_{p(.),w(.)}$ условия ограниченности потенциала Рисса в случае ограниченных множеств Ω получены в [1], а в случае неограниченных множеств Ω -получены в [2],[3]. Другие условия ограниченности классического потенциала Рисса I^α в глобальных пространствах типа Морри $GM_{p,w(.),\theta}$ с постоянным показателем р получены в работе [4].

Литература

1. *Almeida A., Hasanov J.J, Samko S.G.* Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces // Georgian Mathematical Journal, **15**:2 (2008), 195-208.

2. *Guliev V.S., Hasanov J.S, Samko S.G.* Boundedness of the maximal,potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces // Math.Scand., **107** (2010), 285-304.

3. *Guliev V.S., Samko S.G.* Maximal, potential, and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets // Journal of Mathematical Sciences, **193**:2 (2013), 228-247.

4. *Burenkov V.I., Guliyev V.S.* Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Riesz Potential in Local Morrey-type Spaces // Potential Anal. **30**. 2009. 211–249.

ОБ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ

Н.Ф. Валеев
valeevnf@yandex.ru

УДК 517.518

Рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля $\mathcal{L}[q]u := -u'' + q(x)u$ с разделенными граничными условиями.

Суть оптимизационной обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля заключается в следующем: для заданных собственных значений λ_k, $k = 1, ..., m$ и потенциала $q_0(x)$ требуется найти потенциал $q(x)$, ближайший к $q_0(x)$ в определенной норме, такой, что $\lambda_k(q) = \lambda_k$, $k = 1, ..., m$ для всех $k = 1, .., m$.

В статье доказано существование решения этой задачи.

Ключевые слова: спектральная теория, обратные спектральные задачи, нелинейные дифференциальные операторы

On inverse spectral problems with incomplete data

We consider an inverse optimization spectral problem for the Sturm-Liouville operator $\mathcal{L}[q]u := -u'' + q(x)u$ whith separated boundary conditions.

The essence of the inverse optimization spectral problem for the Sturm-Liouville operator is the following: for a given $q_0(x)$ and eigenvalues λ_k, $k = 1, ..., m$ potential $q(x)$ closest to $q_0(x)$ in a given norm, such that $\lambda_k(q) = \lambda_k$, $k = 1, ..., m$ for all $k = 1, ..., m$.

In the article we prove the existence of solutions to this problem.

Keywords: nonlinear differential equations, spectral theory,inverse spectral problems.

В работе обсуждаются обратные спектральные задачи для самосопряженных дифференциальных операторов (как в обычных, так и в частных производных) , в которых задаются лишь неполные спектральные данные, например, первые m собственных значений $\lambda_1 < ... < \lambda_m$.

Вследствие неполноты спектральных данных, такие задачи имеют неединственное решение и некорректны.

Мы предлагаем дополнить условия этих задач содержательными (с физической или геометрической точки зрения) и обоснованными условиями, которые в итоге приводят к новому классу обратных спектральных задач.

Математические постановки таких задач связаны с проблемой построения линейной колебательной системы $\mathbb{S}$ наиболее близкой к заданной линейной колебательной системе $\mathbb{S}_0$ (в какой-то норме) и такой, чтобы $\mathbb{S}$ обладал заданными значениями частот собственных колебаний. Далее эти задачи будем называть "Оптимизационными обратными спектральными задачами

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00250).

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., доцент, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Nurmukhamet Valeev (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Russia)

с неполными данными сокр. ООСЗНД (см.[5]). Отметим, что ООСЗНД тесно связана с многопараметрическими обратными спектральными задачами (см.[6])

В целом наш основной результат исследования ООСЗ состоит в построении нетривиальной связи между оптимизационными обратными спектральными задачами с неполными данными для эллиптических дифференциальных операторов и нелинейными дифференциальными операторами. А именно, нами установлено, что каждая оптимизационная обратная спектральная задача с неполными данными эквивалентна вполне определенному нелинейному дифференциальному оператору (см. подробнее в [3,4,5]).Эквивалентность этих задач, в частности, позволяет находить условия разрешимости как ООСЗ, так и соответствующих краевых задач для нелинейных операторов (см. подробнее в [4,5]).

В данном сообщении мы покажем характер связи ООСЗ с нелинейноми дифференциальноми операторами на примере оператора Штурма-Лиувилля и сформулируем новые утверждения о существовании решений ООСЗ.

Пусть задан самосопряженный оператор Штурма - Лиувилля $L(q)$, порожденный дифференциальным выражением вида

$$l_q y := -y'' + q(x)y, \quad x \in (0,1),$$

с краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(1) = 0$, где $q \in L^2(0,1)$– вещественная функция потенциала. Спектр оператора $L(q)$состоит из собственных значенний: $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < ... < \lambda_k(q) < ...$

Применительно к введенному выше оператору Штурма - Лиувилля $L(q)$ мы рассмотрим следующий модельный вариант оптимизационной обратной спектральной задачи:

$(\mathcal{P}^0)$ *Пусть заданы $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- спектральные данные задачи, вещественная функция $q_0 \in L^2(0,1)$. Требуется найти вещественный потенциал $\hat{q} \in L^2(0,1)$ такой, что:*

$$\lambda_k(\hat{q}) = \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, .., m;$$

и $||q_0 - \hat{q}||_{L^2} =$

$$= \min\{||q_0 - q||_{L^2} : \ \lambda_k^* = \lambda_k(q), \quad k = 1, 2, .., m; \ q \in L^2(0,1)\}.$$

Сформулированная задача связана с системой нелинейных дифференциальных операторов второго порядка, и для нее справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть задана функция потенциала $q_0 \in L^2(0,1)$ и произвольный упорядоченный набор чисел $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- спектральные данные задачи. Тогда существует функция $\hat{q} \in L^2(0,1)$ такая, что:*

$$L(\hat{q})u_k = -u_k'' + \hat{q}(x)u_k = \lambda_k^* u_k, \ u_k(0) = u_k(1) = 0, k = 1, ., m;$$

$$||q_0 - \hat{q}||_{L^2} = \min\{||q_0 - q||_{L^2} : \lambda_k^* = \lambda_k(q), k = 1, ., m; \ q \in L^2(0,1)\}.$$

решение ООСЗ $\hat{q}$ выражается формулой

$$\hat{q}(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k^2(x)$$

Вопрос количества (счетности,конечности или единственности) решений оптимизационной обратной спектральной задачи остается открытым, здесь же укажем одно достаточное условие единственности решения.

Теорема 2. *Пусть задан произвольный упорядоченный набор чисел $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- спектральные данные задачи функция потенциала $q_0 \in L^2(0,1)$ такая, что $\lambda_k(q_0) < \lambda_k^*$ для всех $k = 1, 2, .., m$. Тогда*

1) оптимизационная обратная спектральная задача имеет единственное решение $\hat{q} \in L^2(0,1)$. и $\hat{q}(x) = \sum_{j=1}^{m} u_j^2(x)$, где $\{u_j(x)\}_{j=1}^{m}$ слабое решение системы нелинейныйных уравнений

$$L(\hat{q})u_k = -u_k'' + \left(\sum_{j=1}^{m} u_j^2(x)\right) u_k = \lambda_k^* u_k, k = 1, .., m;$$

2) система нелинейных уравнений имеет единстенное решение.

Литература

1. *M. Gel'fand, B. M. Levitan.* On the determination of a differential equation from its spectral function // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya, **15**:4 (1951), 309-360.

2. *D. E. Edmunds, W. D. Evans.* Spectral theory and differential operators. Vol. 15. — Oxford: Clarendon Press, 1987.

3. *Y. Sh. Il'yasov, N.F. Valeev.* On inverse spectral problem and generalized Sturm nodal theorem for nonlinear boundary value problems // Ufa Math. J.,**10**:4 (2018), 122–128.

4. *Y. Sh. Il'yasov, N.F. Valeev.* On an inverse optimization spectral problem and a related nonlinear boundary value problem // Math. Zametki, **104**:4 (2018), 621-625.

5. *Y. Sh. Il'yasov, N.F. Valeev.* On nonlinear boundary value problem corresponding to N-dimensional inverse spectral problem // Journal of Differential Equations, **266**:8,2019, Pages 4533-4543

6. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.* Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады РАН. **426**:4 2009. С. 1–4.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

В.Б. Васильев
vbv57@inbox.ru

УДК 517.95, 517.983

Рассматриваются эллиптические псевдодифференциальные операторы на многообразиях, граница которых имеет особенности. Описываются достаточные условия фредгольмовости в пространствах Соболева–Слободецкого, основанные на локальном принципе и специальной факторизации эллиптического символа.

Ключевые слова: эллиптический оператор, символ, многообразие, фредгольмовость

Elliptic operators, equations and boundary value problems

We consider elliptic pseudo-differential operators on manifolds for which their boundaries have singularities. We describe sufficient conditions for Fredholm properties in Sobolev–Slobodetskii spaces based on the local principle and special factorization of an elliptic symbol.

Keywords: elliptic operator, symbol, manifold, Fredholm property

Мы рассматриваем псевдодифференциальные операторы A на m-мерном компактном многообразии M с краем. Предполагается, что на границе ∂M многообразия M имеются компактные подмногообразия M_k размерности $0 \leqslant k \leqslant m-2$, которые мы называем особыми. Сингулярные точки границы описываются разными типами *локальных представителей* оператора A [6]. Для простоты будем считать, что $M \subset \mathbb{R}^m$ – область в m-мерном пространстве и $A(x,\xi)$ – функция, определенная на $\mathbb{R}^{2m}$.

Локальные представители оператора выглядят следующим образом

$$A_{x_0} : u(x) \longmapsto \int\limits_{D_{x_0}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi\cdot(x-y)} A(\varphi(x_0),\xi)u(y)d\xi dy, \quad x \in D_{x_0}, \tag{1}$$

где $\varphi : U \to D_{x_0}$ – диффеоморфизм, причем каноническая область D_{x_0} имеет различный вид в зависимости от расположения точки x_0 на многообразии M. Здесь мы рассматриваем следующие типы канонических областей D_{x_0}: $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}, W^k = \mathbb{R}^k \times C^{m-k}$, где C^{m-k} – выпуклый конус в $\mathbb{R}^{m-k}$, не содержащий целой прямой.

Оператор A с таким набором локальных представителей (1) удобно рассматривать в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(M)$, локальными вариантами которых будут пространства $H^s(D_{x_0})$.

Определение 1. *Символом оператора A называется оператор-функция $A(x) : M \to \{A_x\}_{x\in M}$, которая представляет собой семейство*

Васильев Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, НИУ БелГУ (Белгород, Россия); Vladimir Vasilyev (Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia)

локальных представителей оператора A. Оператор A называется эллиптическим, если его символ представляет собой семейство обратимых операторов.

Если функция $A(x,\xi)$ удовлетворяет некоторым дополнительным гладкостным условиям и

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(x,\xi)| \leqslant c_1(1+|\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

то имеют место следующий вывод [6].

Теорема 1. *Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда он эллиптический.*

Обозначим $\varkappa_{n-1}(x)$ индекс факторизации [1] функции $A(x,\xi)$ в точке $x \in \partial M \setminus \cup_{k=0}^{m-2} M_k$, $\varkappa_k(x)$ – индексы k-волновой факторизации [2] относительно конуса C_x^{m-k} в точках $x \in M_k, k = 0,1,\cdots,n-2$ и предположим, что функции $\varkappa_k(x), k = 0,1,\cdots,n-1$, продолжаются по непрерывности на $\overline{M_k}$. Последнее требование связано с тем, что возможны ситуации, когда $M_k \cap M_{k-1} \neq \emptyset$.

Аналогично [1] в силу единственности волновой факторизации [2] можно убедиться, что функции $\varkappa_k(x), k = 0,1,\cdots,m-1$, не зависят от выбора локальной системы координат.

Теорема 2. *Предположим, что классический эллиптический символ $A(x,\xi)$ допускает k-волновую факторизацию относительно конусов C^{m-k} с индексами $\varkappa_k(x), k = 0,1,\cdots,m-2$, удовлетворяющими условиям:*

$$|\varkappa_k(x) - s| < 1/2, \quad \forall x \in M_k, \quad k = 0,1,\cdots,m-1. \tag{2}$$

Тогда оператор $A : H^s(M) \to H^{s-\alpha}(M)$ фредгольмов.

Если эллиптичность нарушается на подмногообразиях M_k, рассматриваются модификации оператора A с привлечением граничных или кограничных операторов [2]. В частности, это происходит, когда нарушается одно из условий (2).

В работах автора [3–5] рассмотрены конкретные краевые задачи для некоторых особенностей в случае нарушения условия (2).

Литература

1. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1973.

2. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — Москва: КомКнига, 2010.

3. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential operators, equations and boundary value problems // AIP Conf. Proc. **2037** (2018) 020028.

4. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems // Math. Meth. Appl. Sci. **41**:18 (2018) 9252–9263.

5. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opusc. Math. **39**:1 (2019) 109-124.

6. *Vasilyev V.B.* Operator symbols. ArXiv: 1901.06630v1 [math. FA]

УГЛОВЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

А.А. Владимиров
vladimirov@shkal.math.msu.su

УДК 517

Указывается основанный на представлении о тройках $\mathfrak{D}^+ \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{D}^-$ гильбертовых пространств аналог процедуры продолжения по Фридрихсу для ряда неполуограниченных операторных матриц.

Ключевые слова: оснащённое гильбертово пространство, операторная матрица, расширение симметрического оператора

Angular extensions of operator matrices

We use the notion of triples $\mathfrak{D}^+ \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{D}^-$ of Hilbert spaces to develop an analog of the Friedrichs extension procedure for a class of nonsemibounded operator matrices.

Keywords: triple of Hilbert spaces, operator matrix, extension of symmetric operator

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть дано некоторое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, разложенное в ортогональную прямую сумму $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ двух своих замкнутых подпространств. Пусть при этом дополнительно фиксированы четыре оператора $T_{11}^\circ\colon \operatorname{dom} T_{11}^\circ \to \mathfrak{H}_1$, $T_{12}^\circ\colon \operatorname{dom} T_{22}^\circ \to \mathfrak{H}_1$, $T_{21}^\circ\colon \operatorname{dom} T_{11}^\circ \to \mathfrak{H}_2$ и $T_{22}^\circ\colon \operatorname{dom} T_{22}^\circ \to \mathfrak{H}_2$, задающие симметрическую операторную матрицу

$$T^\circ \rightleftharpoons \begin{pmatrix} T_{11}^\circ & T_{12}^\circ \\ T_{21}^\circ & T_{22}^\circ \end{pmatrix}$$

с областью определения $\operatorname{dom} T_{11}^\circ \oplus \operatorname{dom} T_{22}^\circ$. Наконец, пусть симметрический оператор T_{11}° ограничен снизу, а симметрический оператор T_{22}° — сверху. Построенный таким образом оператор T° не является полуограниченным, и потому вопрос о построении (некоторых) его расширений не может непосредственным образом решаться на основе стандартной процедуры Фридрихса. Однако оказывается возможной следующая модификация указанной процедуры.

Зафиксируем два значения $\varkappa$, $\tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} (\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^\circ) \qquad & \langle (T_{11}^\circ - \varkappa) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1} \geqslant \|y\|_{\mathfrak{H}_1}^2, \\ (\forall y \in \operatorname{dom} T_{22}^\circ) \qquad & \langle (\tau - T_{22}^\circ) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_2} \geqslant \|y\|_{\mathfrak{H}_2}^2. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{D}_2$ пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T_{22}^\circ$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}_2} \rightleftharpoons \langle (\tau - T_{22}^\circ) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_2}^{1/2},$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01215.

Владимиров Антон Алексеевич, д.ф.-м.н., в.н.с., ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Москва, Россия); Anton Vladimirov (FRC CSC, Moscow, Russia)

через $T_{22}^{\bullet}$ — связанное с пространством $\mathfrak{D}_2$ фридрихсовское расширение оператора T_{22}°, а через $\mathfrak{D}_1$ — пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T_{11}^{\circ}$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}_1} \rightleftharpoons \left[\langle (T_{11}^{\circ} - \varkappa)y, y\rangle_{\mathfrak{H}_1} + \langle (\tau - T_{22}^{\bullet})^{-1} T_{21}^{\circ} y, T_{21}^{\circ} y\rangle_{\mathfrak{H}_2}\right]^{1/2}.$$

По построению, при этом существуют обладающие плотными образами непрерывные операторы вложения $I_1 \colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{H}_1$ и $I_2 \colon \mathfrak{D}_2 \to \mathfrak{H}_2$. Это позволяет ввести в рассмотрение тройку пространств $\mathfrak{D} \hookrightarrow^{I} \mathfrak{H} \hookrightarrow^{I^*} \mathfrak{D}^*$, где положено $\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2$ и $I \rightleftharpoons I_1 \oplus I_2$, а через $\mathfrak{D}^*$ обозначено пространство, сопряженное пространству $\mathfrak{D}$.

Предложение 1. *Оператор $I^* T^{\circ} I$ является ограниченным и обладает всюду определенным замыканием $T \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^*$.*

Отвечающий указанному замыканию $T \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^*$ (неограниченный) оператор $T^{\bullet} \rightleftharpoons (I^*)^{-1} T I^{-1}$ будет называться *угловым расширением* исходной операторной матрицы T°.

На языке угловых расширений может быть единообразным образом выражен ряд фактов теории операторных матриц, ранее получавшихся [1,2] как независимые. Основу для такого выражения составляют следующие два факта.

Предложение 2. *Пусть матрица T° самосопряжена в существенном, операторы T_{11}° и T_{22}° полуограничены (соответственно, снизу и сверху), а также выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:*

1. *Оператор T_{22}° самосопряжен в существенном, причем для некоторых γ, $\varkappa \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение*

$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^{\circ}) \qquad \|T_{21}^{\circ} y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (T_{11}^{\circ} - \varkappa)y, y\rangle_{\mathfrak{H}_1}.$$

2. *Для некоторых $\gamma, \varkappa, \tau \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} (\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^{\circ}) \qquad & \|T_{21}^{\circ} y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (T_{11}^{\circ} - \varkappa)y, y\rangle_{\mathfrak{H}_1}, \\ (\forall y \in \operatorname{dom} T_{22}^{\circ}) \qquad & \|T_{12}^{\circ} y\|_{\mathfrak{H}_2}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (\tau - T_{22}^{\circ})y, y\rangle_{\mathfrak{H}_2}. \end{aligned}$$

3. *Операторы T_{11}° и T_{22}° являются ограниченными.*

Тогда замыкание оператора T° является его угловым расширением.

Предложение 3. *Пусть отрезок $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T_{22}^{\bullet})$ таков, что отвечающий оператор-функции S вида*

$$S(\lambda) \rightleftharpoons T_{11} - \lambda I_1^* I_1 - T_{12}[T_{22} - \lambda I_2^* I_2]^{-1} T_{21}$$

оператор $S(\zeta^+) \colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1^*$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда спектр оператора $T^{\bullet}$ на полуинтервале $[\zeta^-, \zeta^+)$ чисто дискретен, причем его суммарная кратность равна разности отрицательных индексов инерции операторов $S(\zeta^+)$ и $S(\zeta^-)$.

Содержание доклада основано на материале работы [3].

Литература

1. *Langer H., Langer M., Tretter C.* Variational principles for eigenvalues of block operator matrices // Indiana Univ. Math. Jour., **51**:6 (2002), 1427-1459.

2. *Kraus M., Langer M., Tretter C.* Variational principles and eigenvalue estimates for unbounded block operator matrices and applications // Journ. of Comput. and Appl. Math., **171** (2004), 311-334.

3. *Владимиров А.А.* Теоремы о представлении и вариационные принципы для самосопряженных операторных матриц // Матем. заметки, **101**:4 (2017), 516-530.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ГЛАДКОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В.Е. Владыкина

vladykina@cosmos.msu.ru

УДК 517.928, 517.984

В работе рассматривается задача Штурма – Лиувилля в обобщенной форме с минимальными условиями на гладкость коэффициентов. Для этой задачи вводится понятие усиленно регулярных краевых условий. Для операторов, порождаемых соответствующими дифференциальными выражениями и усиленно регулярными краевыми условиями получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций.

Ключевые слова: Уравнение Штурма – Лиувилля, асимптотики собственных значений, асимптотики собственных функций, сингулярные коэффициенты

Spectral asymptotics of the Sturm – Liouville problem with minimal smoothness conditions for the coefficients

The paper deals with the Sturm – Liouville problem in a generalized form with minimal smoothness conditions for the coefficients. Asymptotic formulae are obtained for the eigenvalues and the eigenfunctions of the operators generated by the corresponding differential expressions and stronly regular boundary conditions.

Keywords: the Sturm – Liouville equation, asymptotics of the eigenvalues, asymptotics of the eigenfunctions, singuar coefficients

---

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Программы президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ- 6222.2018.1).

Владыкина Вероника Евгеньевна, без степени, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Veronika Vladykina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля в обобщенной форме:

$$-(r^2y')' + py' + qy = \lambda^2\rho^2 y, \qquad x \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где r и ρ — абсолютно непрерывные положительные функции, а p и q — комплекснозначные, причем

$$p \in L^1[a,b], \quad q \in W^{-1,2}[a,b]. \tag{2}$$

Последнее условие означает, что первообразная $u = \int q\,dx$, понимаемая в смысле теории распределений, принадлежит пространству $L^2[a,b]$.

Кроме того, предположим, что

$$\rho' u, ru, pu \in L_1[a,b], \quad \text{где } u = \int q\,dx. \tag{3}$$

В классическом случае, когда

$$r, \rho \in W^{2,1}[a,b], \quad q, p \in L^1[a,b],$$

с помощью замены уравнение (1) сводится к уравнению

$$-z'' + f(t)z = \lambda^2 z, \quad f \in L^1[0,h]$$

собственные функции и собственные значения которого при усиленно регулярных по Биркгофу краевых условиях хорошо известны (см. [1, гл. 2]).

В случае $r \equiv \rho \equiv 1$, $p = 0$ асимптотики собственных функций и собственных значений задачи (1) с краевыми условиями Дирихле были получены в работе [2].

Основным инструментом для получения асимптотических формул служит следующий результат, полученный в [3,4].

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3). *Тогда* $\forall s > 0$ *фундаментальные решения задачи* (1) *представимы в виде*

$$y_\pm(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right)(1 + \varphi_\pm(x,\lambda)).$$

Здесь функции $\varphi_\pm$ *аналитические в полуплоскости* $\Pi_s^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \operatorname{Im}\lambda \geqslant -s\}$ *при* $|\lambda| > R$ *и*

$$|\varphi_+(x,\lambda)| + |\varphi_-(x,\lambda)| = o(1) \quad \textit{при } |\lambda| \to \infty,\ \lambda \in \Pi_s^+,$$

равномерно по $x \in [a,b]$.*Полученные асимптотики можно почленно дифференцировать, если вместо производной рассматривать квазипроизводную*

$$y^{[1]} = y' - h(x)\frac{\rho}{r}y, \ \textit{ где } h = \int \frac{q}{r\rho}\,dx.$$

А именно

$$y_\pm^{[1]}(x,\lambda) = \pm i\lambda\sqrt{\frac{\rho}{r^3}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right)(1 + \psi_\pm(x,\lambda)),$$

где функции $\psi_\pm$ обладают тем же свойством, что и функции $\varphi_\pm$. Утверждение теоремы сохраняется, если вместо полуплоскости Π_s^+ рассматривать полуплоскость $\Pi_s^- = \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \operatorname{Im}\lambda \leqslant s\}$.

Эта теорема позволяет нам следуя [1, гл. 2] определить регулярные и усиленно регулярные краевые условия. Итак, назовем краевые условия

$$U_j(y) = \alpha_{j0}y(a) + \alpha_{j1}y^{[1]}(a) + \beta_{j0}y(b) + \beta_{j1}y^{[1]}(b) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

регулярными, если отличны от нуля числа θ_1, θ_{-1}, определенные следующим уравнением:

$$\begin{vmatrix} (p_{\nu_1}(a)\alpha_{1\nu_1} + sp_{\nu_1}(b)\beta_{1\nu_1})\omega_1^{\nu_1} & (p_{\nu_1}(a)\alpha_{1\nu_1} + \frac{1}{s}p_{\nu_1}(b)\beta_{1\nu_1})\omega_2^{\nu_1} \\ (p_{\nu_1}(a)\alpha_{2\nu_2} + sp_{\nu_2}(b)\beta_{2\nu_2})\omega_1^{\nu_2} & (p_{\nu_2}(a)\alpha_{2\nu_2} + \frac{1}{s}p_{\nu_2}(b)\beta_{2\nu_2})\omega_2^{\nu_2} \end{vmatrix} = \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s,$$

где $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right)$, $p_1(x) = \sqrt{\frac{\rho}{r^3}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right)$, $\omega_1 = i$, $\omega_2 = -i$. Если при этом $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$, будем называть условия усиленно регулярными.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3), *а краевые условия* (4) *— регулярные. Тогда собственные значения задачи* (1), (4) *образуют две последовательности*

$$\lambda_k'^2 = \left(\frac{2k\pi}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{i\ln_0 \xi'}{2k\pi} + o(1/k)\right),$$

$$\lambda_k''^2 = \left(\frac{2k\pi}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{i\ln_0 \xi''}{2k\pi} + o(1/k)\right),$$

где ξ', ξ'' — корни уравнения $\theta_1 s^2 + \theta_0 s + \theta_{-1} = 0$, возможно, совпадающие. При этом в случае $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$ все собственные значения, начиная с некоторого, простые, а в случае $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$ — простые или двукратные.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3) *и краевые условия* (4) *— усиленно регулярные. Тогда собственные функции задачи* (1), (4) *образуют две последовательности*

$$y_{1,k} = p_0(x)(-i)^{\nu_2}e^{i\lambda_k' t(x)}\left(\alpha_{2\nu_2}p_{\nu_2}(a) + \frac{1}{\xi'}\beta_{2\nu_2}p_{\nu_2}(b) + o(1)\right) - \\ - p_0(x)i^{\nu_2}e^{-i\lambda_k' t(x)}\left(\alpha_{2\nu_2}p_{\nu_2}(a) + \xi'\beta_{2\nu_2}p_{\nu_2}(b) + o(1)\right),$$

где $t(x) = \int\limits_a^x \frac{\rho}{r}$,

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right), \quad p_1(x) = \sqrt{\frac{\rho}{r^3}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right),$$

а формула для $y_{2,k}$ получается из формулы для $y_{1,k}$ заменой ξ' на ξ'' и λ_k' на λ_k''.

В частности для краевых условий Дирихле $y(a) = y(b) = 0$ получим:

$$\lambda_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{h^2}\left(1 + o(1/k)\right), \ y_k = \frac{1}{\sqrt{\rho(x) r(x)}} e^{\frac{1}{2}\int_a^x pr^{-2}} \sin\left(\frac{\pi k}{h}\int_a^x \rho r^{-1}\right) + o(1),$$

а для краевых условий Неймана $y^{[1]}(a) = y^{[1]}(b) = 0$ получим:

$$\lambda_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{h^2}\left(1 + o(1/k)\right), \ y_k = \frac{1}{\sqrt{\rho(x) r(x)}} e^{\frac{1}{2}\int_a^x pr^{-2}} \cos\left(\frac{\pi k}{h}\int_a^x \rho r^{-1}\right) + o(1),$$

Литература

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит. 2010

2. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами, Матем. заметки, **66**:6 (1999), 897-912.

3. *Shkalikov A. A., Vladykina V. E.* Asymptotics of the solutions of the Sturm—Liouville equation with singular coefficients // Math. Notes. **99**:5 (2015), 891-899.

4. *Владыкина В. Е.* Асимптотика фундаментальных решений уравнения Штурма–Лиувилля по спектральному параметру // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. № 1 (2019), 57-61.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В.В. Власов

vikmont@yandex.ru

УДК 517.968.72

Исследуются вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, которые могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения с частными производными по пространственным переменным. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными моделями линейной вязкоупругости, а также имеют ряд других важных приложений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, спектральный анализ, оператор-функция

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01215).

Власов Виктор Валентинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Victor Vlasov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Spectral analysis of linear viscoelasticity operator models

We consider the Volterra integro-differential equations with operator coefficients in Hilbert space that can be realized as partial integro-differential equations on space variables. These equations represent the general models of linear viscoelasticity and they have many other important applications.

Keywords: integro-differential equations, spectral theory, operator function

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными моделями линейной вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1], [2]) и имеют ряд других важных приложений. В частности, эти уравнения могут быть реализованы в виде следующей системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\rho\ddot{u}(x,t) - Lu(x,t) + \int\limits_0^t K_1(t-s)L_1 u(x,s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t K_2(t-s)L_2 u(x,s)ds = f(x,t),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, $t > 0$, среда заполняет ограниченную область $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, u удовлетворяет условиям Дирихле в области Ω с гладкой границей, $L_1 = \mu \cdot (\Delta u + \cdot \mathrm{grad}\ \mathrm{div} u)$, $L_2 = \lambda \cdot \mathrm{grad}\ \mathrm{div} u$, $Lu = (L_1 + L_2)u$ - оператор Ламе теории упругости, K_1, K_2 функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см., [1], [2]).

Эти результаты являются обобщением результатов, опубликованных в работе [3].

Литература

1. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М. : МАКС Пресс, 2016.

2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ линейных моделей вязкоупругости // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, **132** (2017), 25-29.

3. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc. **75** (2014), 185-204.

ЯВНЫЙ ВИД ТОЧНЫХ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА МАРКОВА – ФРИДРИХСА – КОЛМОГОРОВА

Т.А. Гарманова
garmanovata@gmail.com

УДК 517.518.23

Для функций из класса Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n [0;1]$ рассматривается вопрос о нахождении точных констант в неравенствах $|f^{(k)}(x)| \leqslant A_{n,k}(x)\|f\|_{\mathcal{H}}$. Для каждого натурального n и $k \leqslant n-1$ найден явный вид $A_{n,k}(x)$ в терминах гипергеометрических функций.

Ключевые слова: пространства Соболева, константы вложения, гипергеометрические функции

The explicit form of exact constants in Markov – Friedrichs – Kolmogorov-type inequalities.

For functions from the Sobolev class $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n [0;1]$ the problem of finding exact constants in inequalities $|f^{(k)}(x)| \leqslant A_{n,k}(x)\|f\|_{\mathcal{H}}$ is considered. For each natural n and $k \leqslant n-1$ the explicit form of $A_{n,k}(x)$ are found in terms of hypergeometric functions.

Keywords: Sobolev spaces, embedding constants, hypergeometric functions

Определим величины $A_{n,k}(x)$ как наименьшие возможные константы в неравенствах

$$\left|f^{(k)}(a)\right|^2 \leqslant A^2_{n,k}(a)\|f\|^2_{\mathcal{H}}, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Такие неравенства называются неравенствами типа Маркова-Фридрихса-Колмогорова. Точное значение

$$A_{n,k} := \sup_{x \in [0;1]} A_{n,k}(x),$$

называют константой вложения пространства Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n [0;1]$ в $\overset{\circ}{W}{}_\infty^k [0;1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Гарманова Татьяна Алексеевна, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Tatiana Garmanova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Целью данного исследования является установление явного вида функций $A_{n,k}(x)$, для всех $x \in (0,1)$ и натуральных n и $k \leqslant n-1$. Задача нахождения точных констант в неравенствах Маркова-Фридрихса-Колмогорова на отрезке $[-1,1]$ была рассмотрена в работах [1], [2]. В работе [1] были получены формулы для констант $A^2_{n,0}$, $A^2_{n,1}$ и $A^2_{n,2}$, а также установлена связь между константами вложения и первообразными полиномов Лежандра. В работе [2] получены локальные свойства функций $A^2_{n,k}(x)$ и предъявлены формулы для $A^2_{n,4}$ и $A^2_{n,6}$.

Смещенные полиномы Лежандра образуют ортогональную систему в пространстве $L_2[0;1]$ и определяются

$$P_n(x) := \frac{1}{n!}\left((x^2-x)^n\right)^{(n)}.$$

Первообразная порядка $m>0$ определяется

$$P_n^{(-m)} := \frac{1}{n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n-m)}.$$

Последовательно доказываются следующие факты.

Лемма 1. *Функции $A^2_{n,k}(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$A^2_{n,k}(x) = A^2_{n-1,k-1}(x) - \left(P_{n-1}^{(k-n)}(x)\right)^2(2n-1).$$

С увеличением k сложность вычисления $A^2_{n,k}(x)$ при помощи формулы, приведенной в Лемме 1, возрастает. Поэтому рассмотрим новый подход к описанию первообразных полиномов Лежандра и функций $A^2_{n,k}(x)$, использующий специальные функции.

Лемма 2. *Первообразные смещенных полиномов Лежандра порядка $k-n$ имеют вид*

$$P_n^{(k-n)}(t) = \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{k}{2},\, n-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\\ n-k+1\end{matrix};\, -4t\right],$$

где $t = x^2 - x$

С помощью лемм 1,2 и теоремы Клаузена, приведенной в книге [3], доказывается следующий основной результат.

Теорема 1. *Величины $A^2_{n,k}(x)$ имеют вид*

$$A^2_{n,k}(t) = \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k\\ n-k,\, 2n-2k\end{matrix};\, -4t\right],$$

где $t = x^2 - x$.

Литература

1. *Калябин Г.А.* Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n\,[0;1]$ // Труды МИАН, 2010, Т.269, 143–149.

2. *Мукосеева Е.В., Назаров А.И.* О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2014, т.425, 35–45.

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра (2-е изд.). М.: Наука, 1973.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О РЕЗОНАНСАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В.Л. Гейнц
valgeynts@gmail.com

УДК 517.518

Ядро резольвенты самосопряженного оператора Шредингера на оси или полуоси с потенциалом, убывающим быстрее экспоненты, может быть продолжено как мероморфная функция на $\mathbb{C}$; ее полюсы в замкнутой нижней полуплоскости называются резонансами [1]. В данной работе мы исследуем задачу восстановления потенциала по конечному набору резонансов и собственных значений и даем оценки устойчивости такого восстановления.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, спектральная теория, целые функции

The inverse resonance problem for the Schroedinger operator

The kernel of the self-adjoint Schroedinger operator on the line or on the half-line with the super-exponential decaying potential can be continued over $\mathbb{C}$ as a meromorphic function; its poles in the lower half-plane are called resonances [1]. In this work we consider the problem of the reconstruction of a potential from the finite set of resonances and eigenvalues and give some estimates on the stability of such reconstruction.

Keywords: differential equations, spectral theory, entire functions

Приведем стандартные сведения об операторе Шредингера на полуоси ([2, 3]). Пусть $q : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty.$$

Тогда оператор

$$H_q y = -y'' + qy,$$
$$Dom(H_q) = \{y \in L^2(0,\infty) : y, y' \in AC_{loc}[0,\infty),\ H_q y \in L^2(0,\infty),\ y(0) = 0\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01215.

Гейнц Валерий Леонидович, ассистент, Российский Университет Дружбы Народов (Москва, Россия); Valeriy Geynts (Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia)

самосопряжен. Его спектр:

$$\sigma(H_q) = [0, \infty) \cup \{-\mu_1^2, ..., -\mu_N^2\}, \ \mu_1 > \mu_2 > ... > \mu_N > 0.$$

Рассмотрим уравнение $-y'' + qy = z^2 y$. Для всех $z \in \overline{\mathbb{C}_+}$, где $\mathbb{C}_+ := \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, существует единственное решение $y_q(x, z)$, удовлетворяющее

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_q(x,z)}{\exp(ixz)} = 1,$$

и для всех $z \in \mathbb{C}$ существует единственное решение $s_q(x, z)$ такое, что

$$s_q(x,z) = x(1 + o(1)), \ x \to 0,$$
$$\frac{\partial s_q}{\partial x}(x,z) = 1 + o(1), \ x \to 0.$$

Резольвента оператора Шредингера H_q — интегральный оператор

$$\left(H_q - z^2\mathbf{1}\right)^{-1} f(x) = \int\limits_0^\infty R_q(x,t;z) f(t)dt,$$

где ядро

$$R_q(x,t;z) = \begin{cases} \dfrac{y_q(x,z)s_q(t,z)}{\psi_q(z)}, \ t \leqslant x, \\ \dfrac{y_q(t,z)s_q(x,z)}{\psi_q(z)}, \ t > x. \end{cases}$$

Лемма. *Если* $\int\limits_0^\infty |q(x)|e^{\alpha x}dx < \infty$, $\alpha > 0$, *то функция Йоста* $\psi_q(z)$ *имеет голоморфное продолжение в полуплоскость* $\Pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right) := \left\{z : Im(z) > -\frac{\alpha}{2}\right\}$; *если, более того,* $\int\limits_0^\infty |q(x)|e^{x^\gamma}dx < \infty$ *для некоторого* $\gamma > 1$, *то функция Йоста* $\psi_q(z)$ *продолжается до целой функции порядка, не превосходящего*

$$\rho(\gamma) := \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

и конечного типа.

Нули функции Йоста ψ_q, лежащие в нижней полуплоскости, называются резонансами.

Помимо классических обратных задач [4], большой интерес с физической точки зрения имеет задача о восстановлении потенциала по множеству нулей функции Йоста в круге $B(0, R) = \{z : |z| < R\}$. Соответственно, возникает вопрос о точности (устойчивости) такого восстановления. Устойчивость задачи востановления по полному набору нулей функции Йоста исследовалась в работах [5, 6], по конечному набору — в [7]. В данной работе получено усиление и обобщение результатов работы [7].

Теорема 1. *Пусть два потенциала* $q_j \in L^1(0, a)$, $j = 1, 2$, *удовлетворяют априорным условиям*

$$\|q_j\|_{L^1} \leqslant Q_1, \ \|q_2 - q_1\|_{L^p} \leqslant D_p.$$

Предположим, что круг $B(0,R)=\{|z|<R\}$ *содержит одинаковое количество нулей функций Йоста* ψ_{q_j}*, и* $\psi_{q_1}(0)=C\psi_{q_2}(0)$ *для некоторого* $C\neq 0$*, а внутри круга* $B(0,R)$ *нули* $\{z_n^{(j)}\neq 0\}_{n=1}^N$ *функций* ψ_{q_j} *удовлетворяют следующему условию близости:*

$$\left|\frac{1}{z_n^{(2)}}-\frac{1}{z_n^{(1)}}\right|<\varepsilon,\ n=1,...,N.$$

Пусть $\delta\in(0,1)$ *— произвольный параметр. Тогда существуют константы* R_0, C_1 *такие, что для* $R>R_0$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant a}\left|\int\limits_x^a(q_2(t)-q_1(t))dt\right|\leqslant\varphi_1(R,\varepsilon)+C_1R^{-(1-\delta)\frac{p-1}{3p-2}}(1+\chi_1(R));$$

если дополнительно

$$\int\limits_0^a q_1(t)dt=\int\limits_0^a q_2(t)dt,\ q_2-q_1\in AC[0,a],\ \|(q_2-q_1)'\|_{L^p}\leqslant D_p',$$

то существует константа C_2 *такая, что для* $1\leqslant r<\infty$

$$\|q_2-q_1\|_{L^r}\leqslant\psi_2(R,\varepsilon)+C_2R^{-\min\left\{\frac{r-1}{2r-1},\ \frac{p-1}{3p-2}\right\}(1-\delta)}(\ln(R))^{\frac{r-1}{r}}(1+\chi_2(R));$$

где $\varphi_k(R,\varepsilon)=O(\varepsilon)$ $(\varepsilon\to 0)$*,* $\chi_k(R)\to 0$ $(R\to\infty)$*,* R_0*,* C_k *зависят от набора* $(a,\delta,Q_1,p,D_p,D_p')$*.*

Техника доказательства этих оценок опирается на метод оператора преобразования [3, 7] и замечание 6 работы [8], использованное для оценок разности функций Йоста на конечном отрезке.

Литература

1. *Zworski M.* Resonances in physics and geometry // Notices Amer. Math. Soc, **46** (1999), 319-328.

2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т.2. — М: Мир, 1978.

3. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. — Киев: Наукова Думка, 1972.

4. *Chadan K., Sabatier P.C.* Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. — Springer-Verlag, 1977.

5. *Korotyaev E.L.* Inverse resonance scattering on the half line // Asymptot. Anal. **37**:3-4 (2004), 215-226.

6. *Korotyaev E.L.* Stability for inverse resonance problem // Int. Math. Res. Not. **73** (2004), 3927-3936.

7. *Marletta M., Shterenberg R., and Weikard R.* On the inverse resonance problem for Schroedinger operator // Comm. Math. Phys., **295**:2 (2010), 465-484.

8. *Гейнц В.Л., Шкаликов А.А.* Оценка отношения двух целых функций, нули которых совпадают в круге // Матем. заметки, **99**:6 (2016).

БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ИНВАРИАНТНЫХ КРИВЫХ И ДИСКРЕТНЫЕ АТТРАКТОРЫ ШИЛЬНИКОВА

С.В. Гонченко, А.Д. Козлов, К.Е. Морозов, К.А. Сафонов

sergey.gonchenko@mail.ru, safonov.klim@yandex.ru

УДК 517.938

Обсуждаются хорошо известные из приложений бифуркации удвоения замкнутых инвариантных кривых в случае ориентируемых и неориентируемых трехмерных отображений, а также рассматривается задача о сценариях возникновения дискретных аттракторов Шильникова, которые содержат неподвижную точку типа седло-фокус с двумерным неустойчивым многообразием.

Ключевые слова: замкнутая инвариантная кривая, бифуркация, аттрактор Шильникова.

Bifurcations of doubling closed invariant curves and discrete Shilnikov attractors

We discuss the well-known from applications bifurcations of doubling closed invariant curves in the case of orientable and nonorientable three-dimensional maps, and study scenarios for the emergence of discrete Shilnikov attractors that contain a saddle-focus fixed point with two-dimensional unstable manifold.

Keywords: closed invariant curve, bifurcation, Shilnikov attractor.

Пусть диффеоморфизм T, заданный на R^3, имеет гладкую замкнутую инвариантную кривую L. Различают два основных типа таких кривых: резонансные и эргодические. Для резонансной кривой число вращения ν одномерного отображения $T|_L$ рационально, $\nu = p/q$, и $T|_L$ имеет одинаковое число устойчивых и неустойчивых циклов периода q, точки которых чередуются на L. У гладкой эргодической кривой ν иррационально, и траектория любой точки всюду плотна на L. Охарактеризовать тип эргодической кривой L трехмерного отображения можно по спектру ее показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Один из ее показателей всегда нулевой, например, $\Lambda_1 = 0$. Тогда кривая L

- *устойчивая*, если $\Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$, *вполне неустойчивая*, если $\Lambda_2 > 0, \Lambda_3 > 0$ – при этом она *узлового типа*, если $\Lambda_2 \neq \Lambda_3$, и *фокусного типа*, если $\Lambda_2 = \Lambda_3$;

Гонченко Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Sergey Gonchenko (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

Козлов Александр Дмитриевич, м.н.с., ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Alexandr Kozlov (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

Морозов Кирилл Евгеньевич, аспирант, ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Kirill Morozov (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

Сафонов Клим Андреевич, студент, ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Klim Safonov (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

- *седловая*, если $\Lambda_2\Lambda_3 < 0$.

В случае, когда кривая L – седловая, у нее есть два двумерных инвариантных многообразия $W^s(L)$ и $W^u(L)$, устойчивое и неустойчивое соответственно, которые пересекаются по L трансверсально. По определению, кривая L является ω-предельной (α-предельной) для любой точки из $W^s(L)$ (из $W^u(L)$).

Лемма 1. *Пусть T имеет замкнутую эргодическую инвариантную кривую L. Тогда $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ – одновременно либо цилиндры, либо листы Мёбиуса.*

Хорошо известно, что замкнутые инвариантные кривые трехмерных отображений могут претерпевать бифуркации при изменении параметров. Некоторые такие бифуркации, приводящие к разрушению инвариантной кривой и возникновению хаоса, известны и в двумерном случае [1]. В трехмерном случае к ним можно добавить еще т.н. "бифуркации рассыпания" (когда исходная замкнутая инвариантная кривая распадается на несколько компонент связности) и некоторые другие. Для эргодических инвариантных кривых одной из наиболее известных и часто наблюдаемых в приложениях является бифуркация удвоения. Когда отображение T ориентируемо, такая бифуркация приводит к тому, что устойчивая кривая узлового типа становится седловой, у которой $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ – листы Мёбиуса, а в ее окрестности появляется замкнутая устойчивая инвариантная кривая двойной длины. В случае, когда отображение T неориентируемо, также могут наблюдаться бифуркации удвоения замкнутых инвариантных кривых, однако они имеют другую структуру.

Рассмотрим однопараметрическое семейство T_μ трехмерных неориентируемых отображений, обладающих гладкой эргодической замкнутой инвариантной кривой L_μ, которая при $\mu < \mu_0$ устойчива и имеет узловой тип, а при $\mu > \mu_0$ – седловая.

Теорема 1. *Предположим, что $T^2(\mu)$ вкладывается в поток в достаточно малой фиксированной окрестности кривой L_μ для всех близких к $\mu = \mu_0$ значений параметра μ. Тогда, при общих условиях, при $\mu > \mu_0$ кривая L_μ становится седловой, у которой $W^s_{loc}(L_\mu)$ и $W^u_{loc}(L_\mu)$ являются цилиндрами, а в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ, образующие цикл периода 2, т.е. $T(L^1_\mu) = L^2_\mu$ и $T(L^2_\mu) = L^1_\mu$.*

В качестве иллюстрации этой теоремы в докладе рассматривается задача о сценариях возникновения дискретных аттракторов Шильникова, т.е. странных аттракторов содержащих неподвижную точку типа седло-фокус с двумерным неустойчивым многообразием [2], в однопараметрических семействах неориентируемых трехмерных отображений Эно.

Литература

1. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983. — С. 3–26.

2. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная Динамика, 2012, т.8, № 1, с. 3–28.

ПСЕВДООБОБЩЕННЫЙ $\binom{\mu}{\nu}$-СДВИГ И ФОРМУЛА ПУАССОНА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ

К.С. Елецких
kostan.yeletsky@gmail.com

УДК 517.951

Рассматривается краевая задача для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Операторы Бесселя в уравнении, вообще говоря, разной размерности. Получено представление решения в виде формулы Пуассона со специальным псевдосдвигом.

Ключевые слова: уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу, оператор Бесселя, псевдообобщенный $\binom{\mu}{\nu}$-сдвиг, формула Пуассона

Pseudo-generalized $\binom{\mu}{\nu}$-shift and the Poisson formula for solving a boundary value problem for the Euler – Poisson – Darboux equation

The boundary value problem for the Euler—Poisson—Darboux equation is considered. Bessel operators in the equation, in general, of different dimensions. A representation of the solution in the form of a Poisson formula with a special pseudo-shift is obtained.

Keywords: Euler – Poisson – Darboux equation, Bessel operator, pseudo-generalized $\binom{\mu}{\nu}$-shift, Poisson formula

Рассматриваются сингулярные дифференциальные операторы Бесселя произвольных положительных размерностей β и γ:

$$B_\beta = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\beta}{t}\,\frac{d}{dt}\,, \quad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\,\frac{d}{dx}.$$

Пусть $k > 0$. В [1] решение задачи Коши для уравнения $B_{k,x}u(x,y) = B_{k,y}u(x,y)$, $\quad u|_{x=0} = \Phi(x)$ найдено в виде обобщенного сдвига Пуассона начального условия:

$$u(x,y) = T_x^y\Phi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \Phi(\sqrt{x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha})\,\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha. \quad (1)$$

Сдвиг T_x^y принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана.

Елецких Константин Сергеевич, ассистент, ЕГУ имени И.А. Бунина (Елец, Россия); Konstantin Yeletskikh (Bunin Yelets State University, Yelets, Russia)

В [2] рассмотрено подобное уравнение, но более общее чем (1), поскольку операторы Бесселя, входящие в него, имеют, вообще говоря, различные положительные размерности.

Теорема. *В области $\Omega = \{0 < x < 1, t \in (0,T)\}$ существует и единственно решение $u(x,t)$ следующей краевой задачи*

$$B_{\beta,\,t}u(x,t) = B_{\gamma,\,x}u(x,t), \quad \gamma{>}0, \;\; \beta{>}0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0. \tag{3}$$

Решение в виде ряда Фурье – Бесселя имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \quad X_n(x) = \frac{j_\nu(\lambda_n x)}{|j_\nu(\lambda_n)|}\,,$$

$$u_n(t) = \varphi_n \; j_\mu(\lambda_n t), \quad \varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(x)\; X_n(x)\, x^\gamma dx,$$

$\mu{=}\frac{\beta-1}{2}$, $\nu{=}\frac{\gamma-1}{2}$, $j_\nu(x) = 2^\nu\,\Gamma(1+\nu)\,\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}$, *а J_ν — функция Бесселя первого рода.*

Отметим, что рассмотренная выше функция j_ν является ограниченным (в начале координат) решением сингулярного уравнения Бесселя и определяется степенным равномерно сходящимся рядом

$$j_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\Gamma(\nu+1)}{m!\,\Gamma\,(m{+}\nu{+}1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \;\; j_\nu(0) = 1.$$

Спектральные значения параметра λ_n находятся как решения уравнения $j'(\lambda_n){=}0$.

Полученное решение можно записать соответствующей формулой Пуассона. Если $\beta \neq \gamma$, то это решение имеет вид

$$u(x,t) = \overset{\nu,\mu}{V_x^t} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \; j_{\frac{\beta+\gamma-2}{2}}(\lambda_n x)\,,$$

где псевдообобщенный $\overset{\nu,\mu}{V_x^t}$-сдвиг определен выражением:

$$\overset{\nu,\mu}{V_x^t}\, f(x) = \frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\;\Gamma(\nu+\mu)} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(\mu-\nu)} \cos^{\nu+\mu}\theta\, f(r)\, d\theta\,,$$

$$r = \sqrt{2\cos\theta\,(x^2\,e^{i\theta} + t^2 e^{-i\theta})}.$$

Отметим, что эта конструкция сдвига не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана.

При $\beta = \gamma$ решение краевой задачи находится по формуле Пуассона [2]

$$u(x,t) = T_x^t \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = T_x^t \varphi(x),$$

где T_x^t — обобщенный сдвиг Пуассона, тот же, что и в формуле (1). Но в отличие от работы [1] здесь требуется согласование начальнного и граничных условий.

По схеме, предложенной в [2], находится и неограниченное (при $t \to \infty$) решение задачи (2), (3). В этом случае граничные условия при ($x = 0$) имеют предельную форму. Неограниченное решение представляет собой фундаментальное решение оператора Эйлера—Пуассона—Дарбу и выражается через j-функцию Неймана, введенную в [3].

Результаты заметки получены в соавторстве с Л.Н. Ляховым.

Литература

1. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи матем. наук, **VI**:2 (42) (1951), 102–143.

2. *Ляхов Л.Н., Елецких К.С., Санина Е.Л.* О формулах Пуассона для краевых задач уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу // ПМА, **97** (2019), 83–91.

3. *Ляхов Л.Н.* Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с D_B-оператором Бесселя // Труды математического института им. В.А. Стеклова, **278** (2012), 148–160.

ПРОБЛЕМА РИССА – РАДОНА – ФРЕШЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛОВ И СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ МНОЖЕСТВ РАДОНОВСКИХ МЕР

В.К. Захаров, Т.В. Родионов

rodionovtv@mail.ru

УДК 517.987

Предложен критерий C_b-слабой компактности множеств положительных ограниченных радоновских мер на тихоновском пространстве, восходящий к критерию Прохорова для польского пространства. Для общего хаусдорфова пространства, где пространство C_b ограниченных непрерывных функций может быть тривиально и не разделять точки и замкнутые множества, предложен критерий S-слабой компактности, где S — равномерно замкнутое линейное пространство метаполунепрерывных функций. Эти результаты существенно опираются на решение проблемы Рисса – Радона – Фреше описания радоновских интегралов как линейных функционалов, полученное авторами ранее.

Ключевые слова: радоновская мера, свойство Прохорова, равномерная узкость, слабая компактность, теорема Рисса о представлении

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для ведущих научных школ РФ (проект НШ-6222.2018.1).

Захаров Валерий Константинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Valeriy Zakharov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Родионов Тимофей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Timofey Rodionov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Riesz – Radon – Frechet problem of characterization of integrals and weak compactness of sets of Radon measures

The paper presents some C_b-weak compactness criterion of a set of positive bounded Radon measures for a Tychonoff space similar to the well-known Prokhorov criterion. Since for a general Hausdorff space the classical space C_b of bounded continuous functions can be trivial and not separate points and closed sets, the S-weak compactness criterion is presented for this case, where S is the new uniformly closed linear space of metasemicontinuous functions. These results are esentially based on the solution of the Riesz – Radon – Frechet problem of characterization of Radon integrals as linear functionals obtained by the authors earlier.

Keywords: Radon measure, Prokhorov property, uniform tightness, weak compactness, Riesz representation theorem

Известный критерий Ю. В. Прохорова (1956) утверждает, что для слабой компактности замкнутого множества ограниченных радоновских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве $(T, \mathcal{G})$ относительно слабой топологии, порождённой на пространстве $\mathfrak{RM}_b$ ограниченных радоновских мер семейством C_b ограниченных непрерывных функций, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

(α^π) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество C, что $|\mu|(T \setminus C) < \varepsilon$ для всех $\mu \in M$ (*равномерная узкость*);

(β) $\sup(|\mu|T \mid \mu \in M) \in [0, \infty)$.

Эти условия достаточны для слабой компактности на тихоновском (вполне регулярном) топологическом пространстве [2, IX.5.5]. Однако, они не будут необходимыми даже в случае положительных мер [3, 4.5.3, 4.5.4].

В случае общего хаусдорфова топологического пространства не имеет смысла рассматривать C_b-слабую компактность, ввиду возможной тривиальности семейства C_b: оно может состоять из одних только постоянных функций. Поэтому В.К. Захаров рассмотрел в [4] слабую компактность относительно линейного пространства S *симметризуемых функций*, являющегося равномерным замыканием введённого Ф. Хаусдорфом линейного пространства $SC_b^u + SC_b^l$, состоящего из сумм $f + g$ ограниченных функций, полунепрерывных сверху и полунепрерывных снизу. S-слабая топология на $\mathfrak{RM}_b$ сильнее C_b-слабой топологии, но строго слабее тривиальной топологии сходимости на борелевских множествах, использованной в [3, 5.6.14]. Заменяя условие (α^π) более строгим условием *локально равномерной узкости*

(α^ζ) для любого $G \in \mathcal{G}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $C \subset G$, что $|\mu|(G \setminus C) < \varepsilon$ для всех $\mu \in M$,

получаем следующий критерий.

Теорема 1. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $M \subset (\mathfrak{RM}_b)_+$. *Замыкание* $\operatorname{cl} M$ *множества* M *в* S*-слабой топологии является* S*-слабо компактным тогда и только тогда, когда* M *обладает свойствами* (α^ζ) *и* (β).

Следствие. *Если $M \subset \mathfrak{RM}_b$ обладает свойствами (α^ζ) и (β), то его замыкание* $\mathrm{cl}\, M$ *в S-слабой топологии S-слабо компактно.*

В решении проблемы для тихоновского пространства используется следующее условие *хвостовой узкости*:

(α^z) для любой сети $(\mu_j \in M \mid j \in J)$ существует такая подсеть $(\mu_{j_i} \mid i \in I)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся компактное множество C и индекс $i_0 \in I$, для которых $\mu_{j_i}(T \setminus C) < \varepsilon$ при всех $i \geqslant i_0$.

Теорема 2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское пространство и $M \subset (\mathfrak{RM}_b)_+$. Множество M является C_b-слабо компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и обладает свойствами (α^z) и (β).*

Следствие. *Если $M \subset \mathfrak{RM}_b$ обладает свойствами (α^π) и (β), то его замыкание* $\mathrm{cl}\, M$ *в C_b-слабой топологии C_b-слабо компактно.*

Исторически оформились два способа доказательства достаточности в критериях слабой компактности множества M.

Первый способ связан с именами А. Д. Александрова [1], Ю. В. Прохорова [6], Ф. Топсо [7] и др. Он состоит в задании предельной радоновской меры $\mu_0 \in M$ для исходной сети $s \equiv (\mu_\varkappa \mid \varkappa \in K)$ посредством некоторой сложной прямой формулы, выражающей μ_0 через $\mu_\varkappa$.

Второй способ восходит к Н. Бурбаки [2]. Он состоит в переходе от сети мер s к сети интегралов $\sigma \equiv (\int \cdot\, d\mu_\varkappa \mid \varkappa \in K)$ в двойственном линейном пространстве C_b' всех линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве C_b. Далее используется теорема Алаоглу – Бурбаки о слабой компактности единичного шара в двойственном пространстве [5, теорема 7 (III.3)], согласно которой для сети σ существует предельный непрерывный функционал φ_0.

И, наконец, нужно использовать реализационную теорему Рисса – ... – Прохорова – Бурбаки о представлении функционала φ_0 в виде интеграла $\varphi_0 = \int \cdot\, d\mu_0$ по некоторой радоновской мере μ_0. Эта мера μ_0 и является предельной для сети s. В силу важности этой теоремы приведём её точную формулировку [2, IX.5.2].

Теорема (Рисс – ... – Прохоров – Бурбаки). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское пространство.*

1. *Если $\mu \in \mathfrak{RM}_b$, то функционал $\varphi = \int \cdot\, d\mu$ является линейным и* ***узким****, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество C, что из $f \in C_b$ и $|f| \leqslant \chi(T \setminus C)$ следует, что $|\varphi f| < \varepsilon$.*

2. *Если φ — узкий линейный функционал на C_b, то существует единственная ограниченная радоновская мера μ, такая что $\varphi = \int \cdot\, d\mu$.*

Данный способ Бурбаки используется в доказательстве теоремы 2.

Для доказательства же теоремы 1 используется подход Бурбаки, но с обобщением реализационной теоремы Рисса – ... – Прохорова – Бурбаки на случай хаусдорфова пространства [4].

Теорема (Рисс – ... – Прохоров – Бурбаки – Захаров). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство.*

1. *Если $\mu \in \mathfrak{RM}_b$, то функционал $\varphi = \int \cdot \, d\mu$ является линейным, поточечно (монотонно) σ-непрерывным и* ***локально узким****, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и любого $G \in \mathcal{G}$ существует такое компактное подмножество $C \subset G$, что из $f \in S$ и $|f| \leqslant \chi(G \setminus C)$ следует, что $|\varphi f| < \varepsilon$.*

2. *Если φ — локально узкий, поточечно (монотонно) σ-непрерывный, линейный функционал на S, то существует единственная ограниченная радоновская мера μ, такая что $\varphi = \int \cdot \, d\mu$.*

Приведённые реализационные теоремы являются частными случаями общей параметрической реализационной теоремы [8, 3.6.4], решающей проблему Рисса – Радона – Фреше характеризации радоновских интегралов как линейных функционалов.

Литература

1. *Александров А. Д.* Additive set functions on abstract spaces. III // Матем. сборник, **13**:3 (1943), 169-238.

2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. —М.: Наука, 1977.

3. *Богачёв В. И.* Слабая сходимость мер. — М: ИКИ, 2016.

4. *Захаров В. К.* Проблема Рисса – Радона характеризации интегралов и слабая компактность радоновских мер // Труды МИРАН, **248** (2005), 106-116.

5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М: Наука, 1984.

6. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теор. вероятностей и её применения, **1** (1956), 177-238.

7. *Topsøe F.* Compactness and tightness in a space of measures with the topology of weak convergence // Math. Scand. **34** (1974), 239-245.

8. *Zakharov V. K., Rodionov T. V., Mikhalev A. V.* Sets, Functions, Measures. Volume II: Fundamentals of Functions and Measure Theory (De Gruyter Studies in Mathematics, **68/2**). Berlin: Walter de Gruyter, 2018.

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА А. А. ДОРОДНИЦЫНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ СТРУНЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛОМ И ВЕСОМ

А.С. Иванов
andrew-ivanov95@yandex.ru

УДК 517.518

Цель данного доклада — обсуждение применимости метода Дородницына для вычисления первых собственных значений линейного операторного пучка с сингулярными коэффициентами из пространства $W_2^{-1}[0,\pi]$. Приближенное решение строится с использованием полученных автором ранее формул следов целых отрицательных порядков рассматриваемого пучка. Обсуждается вопрос существования решения, а также доказывается теорема о корректности метода путем обобщения теоремы, доказанной ранее В. А. Садовничим и соавторами.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, спектральная теория, линейный пучок

Of applicability of A. A. Dorodnitsyn's method for calulation of the first eigenvalues of the string with singular potential and weight

The main goal of the speech is the discussion of the applicability of Dorodnitsyn's method for calculation of the first eigenvalues of linear operator pencil with singular coefficients from $W_2^{-1}[0,\pi]$ space. An approximate solution is constructed using the formulas for traces of entire negative orders for a considered pencil obtained by the author earlier. The existence of a solution is discussed, and a theorem on the correctness of the method is proved by generalizing a theorem proved earlier by V. A. Sadovnichii and co-authors.

Keywords: differential equations, spectral theory, linear pencil

Рассматривается линейный операторный пучок

$$A(\lambda) = Ly - \lambda Py.$$

Здесь $Ly = -y'' + q(x)y$ — оператор Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом, P — оператор умножения на сингулярный вес ρ. Потенциал и вес рассматриваются из негативного пространства Соболева $W_2^{-1}[0,\pi]$. Через u и v обозначим обобщенные первообразные из $L_2[0,\pi]$ потенциала q и веса ρ соответственно.

В работе [1] А. А. Дородницын предложил метод приближенного вычисления первых собственных значений краевых задач Штурма–Лиувилля с весом. Метод существенно использовал суммы целых степеней величин, обратных к собственным значениям задачи. Значительно позже корректность метода была доказана В. А. Садовничим и совторами в работе [2]. Авторы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Иванов Андрей Сергеевич, аспирант МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Andrei Ivanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

доказывали сходимость построенного Дородницыным приближенного решения к собственным значениям задачи Штурма-Лиувилля с непрерыным и действительнозначным потенциалом и весом вида $\rho(x) = \rho_0(x)x^{\alpha}$, где $\alpha > -1$, предполагая абсолютную сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-1}$, где λ_j — собственные значения краевой задачи.

Для рассматриваемого сингулярного пучка автором совместно с А.М. Савчуком в работе [3] были получены оценки собственных значений.

Теорема 1. *Для любой функции $v \in L_2[0,\pi]$ величины $|\lambda_n|^{-1}$, где λ_n — собственные значения пучка $A(\lambda)$, удовлетворяют оценкам*

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{-1} \leqslant C \ln n, \qquad |\lambda_n|^{-1} \leqslant C\frac{\ln n}{n}.$$

В той же работе сформулирована теорема, дающая оценки на собственные значения пучка, если обобщенная первообразная v веса ρ рассматривается в шкале пространств $v \in W_2^{\theta}[0,\pi]$, $\theta \in [0,1]$.

Теорема 2. *Для любой функции $v \in W_2^{\theta}[0,\pi]$, $\theta \in [0,1]$ собственные значения пучка $A(\lambda)$ удовлетворяют оценке*

$$|\lambda_n| \geqslant C n^{1/p},$$

где $p > 1/(1+\theta)$ произвольно.

Полученные оценки влекут за собой абсолютную сходимость следов целых отрицательных порядков пучка $A(\lambda)$, начиная со 2, а именно величин $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-p}$, $p \geqslant 2$. Для следа порядка (-1) можно предполагать только условную сходимость. Отсутствие абсолютной сходимости для любого $P \in W_2^{-1}[0,\pi]$ доказывает пример из работы А. А. Владимирова [4], в которой автор строит неядерный мультипликатор из пространства $W_2^{-1}[0,\pi]$ в пространство $W_2^{-1}[0,\pi]$.

Позднее, в работе [5] автором были получены формулы следов целых отрицательных порядков для пучка $A(\lambda)$ в терминах веса ρ и интегрального ядра операторого L^{-1}.

В настоящем докладе обсуждаются вопросы применимости метода Дородницына для вычисления первых собственных значений рассматриваемого линейного пучка. Обсуждаются вопросы существования приближенного решения, решение строится с использованием полученных автором формул следов целых отрицательных порядков, а теорема о корректности метода обобщается на случай условно сходящегося следа порядка (-1).

Литература

1. *Дородницын А.А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН, **7**:6 (1952), 3-96.

2. *Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малеко Е.М., Попов А.Ю.* Корректность метода А. А. Дородницына приближенного вычисления собственных значений одного класса краевых задач // Дифференц. уравнения, **38**:4 (2002), 471-476.

3. *Иванов А.С., Савчук А.М.* След порядка (-1) для струны с сингулярным весом // Матем. заметки, **102**:2 (2017), 197-215.

4. *Владимиров А.А.* Некоторые замечания об интегральных характеристиках винеровского процесса // Дальневост. матем. журн., **15**:2 (2015), 156-165.

5. *Иванов А.С.* Следы высших отрицательных порядков для струны с сингулярным весом // Дифференц. уравнения, **54**:10 (2018), 1338-1348.

СВЕРТКИ В СОПРЯЖЕННЫХ К ВЕСОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О.А. Иванова

neo_ivolga@mail.ru

УДК 517.9

В топологическом сопряженном к счетному индуктивному пределу E весовых пространств Фреше целых функций многих комплексных переменных с помощью обычных сдвигов определено умножение — свертка. Полученная алгебра изоморфна коммутанту системы операторов частного дифференцирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов, действующих в E. В построенной алгебре аналитических функционалов в двух несмешанных случаях введена топология, с которой эта алгебра становится топологической и уже топологически изоморфна указанному коммутанту с соответствующей (естественной) операторной топологией.

Ключевые слова: весовое пространство целых функций, алгебра аналитических функционалов, коммутант, оператор свертки

Convolutions in duals of weighted spaces of entire functions

We define a multiplication — convolution in the dual of a countable inductive limit E of weighted Fréchet spaces of entire functions of several variables. This algebra is isomorphic to the commutant of the system of partial derivatives in the algebra of all continuous linear operators in E. In the constructed algebra of analytic functionals in two pure cases a topology is defined. With this topology the mentioned algebra is topological and it is now topologically isomorphic to the considered commutant with its natural operator topology.

Keywords: weighted space of entire functions, algebra of analytical functionals, commutant, convolution operator

Иванова Ольга Александровна, к.ф.-м.н., ст. преподаватель, Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия); Olga Ivanova (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)

В докладе идет речь о свертке в сопряженных к весовым пространствам целых (в $\mathbb{C}^N$) функций и представлениях соответствующих алгебр аналитических функционалов. Для непрерывных функций $v_{n,k} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ таких, что $v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$, определим весовое пространтво целых функций

$$E := \{f \in H(\mathbb{C}^N) \Big| \, \exists n \, \forall k : \sup_{z \in \mathbb{C}^N} (|f(z)| \exp(-v_{n,k}(z)) < +\infty\},$$

снабженное естественной топологией счетного индуктивного предела пространств Фреше. Веса $v_{n,k}$ удовлетворяют стандартным техническим условиям, обеспечивающим инвариантность E относительно операторов частного дифференцирования, сдвига, умножения на независимые переменные. Пространства подобного вида часто возникают при реализации различных функциональных пространств и их сопряженных посредством преобразования Фурье-Лапласа и его аналогов.

Пусть E' — пространство линейных непрерывных функционалов на E. Для $\varphi, \psi \in E$ стандартным образом определим свертку $\varphi \otimes \psi$:

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_t(\psi_z(f(t+z))), \ f \in E.$$

Обозначим символом $\mathcal{K}(\partial)$ коммутант системы $\{\partial_j : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ операторов частного дифференцирования в кольце всех линейных непрерывных операторов в E. Для функционала $\varphi \in E'$ введем оператор

$$A_\varphi(f)(z) := \varphi_t(f(t+z)), \ f \in E, \ z \in \mathbb{C}^N.$$

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Отображение $\omega : (E', \otimes) \to \mathcal{K}(\partial)$, $\omega(\varphi) := A_\varphi$, является алгебраическим изоморфизмом «на».*

Возникает естественный вопрос о топологических свойствах этого изоморфизма и свертки $\otimes$: при каких условиях $(E', \otimes)$ является топологической алгеброй, а ω — топологическим изоморфизмом? Мотивацией подобного исследования является то, что топологические небанаховы алгебры имеют широкое поле применений: при изучении операторов обобщенного интегрирования, в спектральной теории в пространствах аналитических функционалов, в теории операторов обобщенного сдвига, групп и алгебр Ли. Указанная топологичность полезна при решении различных аппроксимационных задач, при исследовании операторов свертки A_φ. В общей ситуации ω является топологическим изоморфизмом пространства E' со слабой топологией $\sigma(E', E)$ на $\mathcal{K}(\partial)$ со слабо-операторной топологией.

Оказалось, что независимость весов $v_{n,k}$ от n или от k является достаточным условием упомянутой топологичности, то есть нужное имеет место в несмешанных, “чистых” случаях. В таких ситуациях E является либо пространством Фреше, либо счетным индуктивным пределом банаховых пространств.

Теорема 2. *[2] Пусть $v_{n,k} = v_{n,1}$ или $v_{n,k} = v_{1,k}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$.*

(i) (E', λ) *с умножением* $\otimes$ *— топологическая алгебра. (При этом* λ *— некоторая топология проективного предела, соответственно, индуктивного предела последовательности банаховых пространств в* E'*. Она согласуется с двойственностью между* E' *и* E*.)*

(ii) $\omega : (E', \lambda) \to (\mathcal{K}(\partial), \mu)$ *— топологический изоморфизм "на". (При этом* μ *— некоторая естественная операторная топология в* $\mathcal{K}(\partial)$*).*

Роль топологичности рассматриваемой алгебры при изучении операторов свертки A_φ показывает, в частности,

Теорема 3. *[2] Предположим, что все многочлены содержатся в* E *и плотны в* E*. Пусть, кроме того, существует локально выпуклая топология* $\widetilde{\lambda}$ *в* E'*, согласующаяся с двойственностью между* E' *и* E*, такая, что* $(E', \widetilde{\lambda})$ *является топологической алгеброй с умножением* $\odot$*. Тогда* E' *с умножением* $\odot$ *не имеет делителей нуля.*

Следствие. *Пусть выполняются предположения теоремы 3. Тогда для любого* $\varphi \in E' \backslash \{0\}$ *множество* $A_\varphi(E)$ *плотно в* E*.*

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций // Уфимск. матем. журн., **9**:3 (2017), 38-49.

2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* О топологических алгебрах аналитических функционалов с умножением, определяемым сдвигами // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер., **24**:3 (2018), 14-22.

ОБОБЩЕННЫЕ ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИУВИЛЛЯ-ЛИЗОРКИНА И НЕКОТОРЫЕ ИХ СВОЙСТВА

М. Илолов

ilolov.mamadsho@gmail.com

УДК 517-983-5,517-968-7

Приводится сравнительный анализ операции свертки в пространствах обобщенных функций и операции дробного дифференцирования. На этой основе установлена связь между мультипликаторами и свертывателями в соответствующих функциональных пространствах. Полученные результаты могут найти применения при анализе линейных дифференциальных операторов с частными производными дробного порядка.

Ключевые слова: обобщенное лиувиллевское дифференцирование, функциональные пространства, мультипликатор, свертыватель, преобразование Фурье.

Илолов Мамадшо, д.ф.-м.н., профессор, Академия наук Республики Таджикистан (Душанбе, Таджикистан); Mamadsho Ilolov (Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Generalized fractional Liouville-Lizorkin derivatives and some of their properties

A comparative analysis of the convolution operation in spaces of generalized functions and the operation of differentiation is given. On this basis, a relationship is established between the multipliers and convolutors in the corresponding functional spaces. The obtained results can be used in the analysis of linear differential operators with partial derivatives of fractional order.

Keywords: generalized Liouville differentiation, functional spaces, multiplier, convolutor, Fourier transform.

Обозначим через $S(\mathbb{R}^n)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций убывающих на ∞ быстрее любой степени $|x|$. Для функции $u \in S(\mathbb{R}^n)$ определено преобразование Фурье

$$\hat{u} = (\mathcal{F})(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x)e^{i<\zeta,x>}dx, \zeta \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$u(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x) = \frac{1}{(2u)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\zeta)e^{-<\zeta,x>}d\zeta, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Существует стандартная процедура распространения операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ на $S^{'}(\mathbb{R}^n)$ -пространство обобщенных функций медленного роста.

Отметим, что классы $S(\mathbb{R}^n)$ плохо приспособлены для дробных интегралов и производных. Функции $I^{\alpha}_{\pm}\varphi$, $D^{\alpha}_{\pm}\varphi$ где $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ являются бесконечно дифференцируеммыми, но недостаточно "хорошо"ведут себя, вообще говоря, на бесконечности. В этой связи в [1] введено пространство $\Phi(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$, которое является инвариантным относительно дробного интегродифференцирования.

Рассмотрим n-мерный дробный интеграл Лиувилля

$$I^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{R^n_{+\dots+}} t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt, \tag{3}$$

где $R_{+\dots+}$ октант $\{t : t_1 \geqslant 0, \cdots t_n \geqslant 0\}, t^{\alpha-1} = t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}$.

Для интеграла (3) с учетом (2) при $0 \leqslant \alpha_k < 1, k = 1, \cdots n$ справедлива формула

$$\mathcal{F}I^{\alpha}\varphi = (-ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x), \tag{4}$$

где $(-ix)^{-\alpha} = (-ix_1)^{-\alpha_1}\cdots(-ix_n)^{-\alpha_n}, \varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Из формулы (4) следует, что требуемая инвариантность класса Φ будет иметь место, если функция $\varphi(t)$ этого класса будет иметь образы Фурье $\hat{\varphi}(x)$, тождественно аннулирующиеся на гиперплоскости $x_k = 0$.

Обозначим через Ψ подкласс пространства $S(\mathbb{R}^n)$, состоящий из функций, исчезающих вместе со всеми своими производными на гиперплоскостях $x_k = 0$.

$$\Psi = \{\psi(x) : \psi \in S(\mathbb{R}^n), (D^j\psi)(x_1 \cdots x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \cdots, x_n) = 0$$

$$j = 0, 1, 2, \cdots; k = 1, \cdots, n\}.$$

Прообразы Фурье функций из Ψ образуют пространство Лизоркина $\Phi = \Phi(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \hat{\varphi} \in \Psi\}$. Так как

$$\hat{\varphi}^j(x)\big|_{x_k=0} = \int_{\mathbb{R}^{n-i}} e^{i<x^I,t^I>}(t^I)^{j^I}dt^i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t^I, \zeta^{j_k})d\zeta,$$

где $t^I = (t_1, \cdots, t_{k-1}, t_{k+1}, \cdots, t_n), j^I = (j_1, \cdots, j_{k-1}, j_{k+1}, \cdots, j_n)$, то класс $\Phi(\mathbb{R}^n)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$, для которых равны нулю все моменты.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, \cdots, t_{k-1}, t_{k+1}, \cdots, t_n)\zeta^m d\zeta = 0, m = 0, 1, 2, \cdots$$

вдоль координатных осей, $k = 1, \cdots, n$.

Отметим также, что в пространстве Φ определена непрерывная операция сдвига $\tau_h(\varphi) = \varphi(x + h)$. Обозначим через Ψ' и Φ' сопряженные к Ψ и Φ пространства обобщенных функций, соответственно.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. Если функционал f типа функции $f(\zeta)$ является мультипликатором в пространстве Ψ', то функционал $D = \hat{f}$ -свертыватель в пространстве Φ' и имеет место формула

$$\widetilde{D * g} = \tilde{D} \cdot \tilde{g}.$$

В условиях теоремы $f(\zeta) = (i\zeta)^r = (i\zeta_1)^{r_1} \cdots (i\zeta_n)^{r_n}$. Вычислим прообраз $D^r = D^{r_1 \cdots r_n}$ этой функции. Для этой цели представим функцию $(i\zeta)^r$ в виде прямой суммы

$$(i\zeta)^r = (i\varepsilon_1)^{r_1} \times (i\zeta_2)^{r_2} \times \ldots \times (i\zeta_n)^{r_n}.$$

Ясно, что данная функция принадлежит $S^1(\mathbb{R}^n)$. По теореме о преобразовании Фурье прямого произведения имеем

$$(i\hat{\zeta})^r = (i\hat{\zeta}_1)^{r_1} \times (i\hat{\zeta}_2)^{r_2} \times \cdots \times (i\hat{\zeta}_n)^{r_n}.$$

При нецелых значениях $(i\zeta_{r_k})^{r_k}$ является многозначной функцией и имеет вид

$$(i\zeta_{r_k})^{r_k} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}rk} \cdot \zeta_k^{rk}, & \text{если } \zeta_k > 0, \\ e^{-i\frac{\pi}{2}rk} \cdot |\zeta_k^{rk}|, & \text{если } \zeta_k < 0. \end{cases}$$

Возьмем ветвь $(i\zeta_k)^{r_k} = e^{i\frac{\pi}{2}rk}(\zeta_k - i0)^{rk}$, и получим

$$(i\hat{\zeta_k})^{r_k} = \frac{1}{\Gamma(-r_k)} \cdot \frac{1}{\overset{+}{x}{}_k^{1+r_k}},$$

$$D^{r_1\cdots r_n}(x)=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma(-r_k)}\cdot\frac{1}{\overset{+}{x}{}_1^{1+r_1}}\times\frac{1}{\overset{+}{x}{}_2^{1+r_2}}\times\cdots\times\frac{1}{\overset{+}{x}{}^{1+r_n}},$$

где

$$\overset{+}{x}{}^{\gamma}=\begin{cases}x^{\gamma}, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Таким образом под дробной обобщенной производной Лиувилля будем понимать свертку обобщенной функции $f\in\Phi'$ с обобщенной функцией $D^{r_1\cdots r_n}x\in\Phi'$. Операторы $D^{r_1\cdots r_n}$ образуют аддитивную перестановочную группу по вектор-параметру $(r_1,\cdots,r_n)$ и при $r_k<0, k=1;h$, приводят к интегралу Римана-Лиувилля порядка $\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$.

В работах [2, 3] рассматриваются близкие по идее вопросы.

Литература

1. *П. И. Лизоркин* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Матем. сб., **60**:3 (1963), 325–353.

2. *К. Х. Бойматов, П. И. Лизоркин* Оценки роста решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения **25**:4 (1989), 578–588.

3. *Илолов М., Кучакшоев Х.С., Гулджонов Д.Н.* О дробных линейных уравнениях в банаховых пространствах Доклады Академии наук РТ,**61**:2 (2018), 113-119.

О НУЛЯХ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Н.С. Иманбаев

imanbaevnur@mail.ru

УДК 517.927

Исследуется распределение нулей целых функций специального вида, связанных со спектральными задачами.

Ключевые слова: нули целых функций, интегральное представление, спектр, асимптотика

On the zeros of a class of entire functions, having an integral representation

The question of the distribution of zeros of some specific kind of entire functions connected with spectral problems is studied.

Keywords: zeros of entire functions, integral representation, spectrum, asymptotics

Иманбаев Нурлан Сайрамович, к.ф.-м.н., профессор, Южно-Казахстанский государственный педагогический университет (Шымкент, Казахстан); Nurlan Imanbaev (South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan.)

Рассматривается вопрос распределения нулей целых функций вида

$$f(z) = 1 + Az + z^2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} \exp\big(\rho(\omega_j x + \omega_{j+1} y)\big) \cdot D(x,y)dxdy, \qquad (1)$$

где $\rho = \sqrt[3]{z}$, $\omega_j = \exp\left(\frac{2\pi i j}{3}\right)$, $i = \sqrt{-1}$, A-константа, $D(x,y)$ — абсолютно интегрируемая функция.

Исследование нулей целых функций вида (1), совпадающих с квазиполиномами, и их связь со спектральными задачами отражена в [1-4].

Теорема 1. *Пусть $D(x,y)$ абсолютно интегрируемая на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ функция. Если функция $D(x,y)$ непрерывна и отлична от нуля в окрестности квадрата, тогда нули функции $f(z)$, достаточно большие по модулю, могут быть только в секторах сколь угодно малого раствора ε*

$$\left|Argz \pm \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть величина $\omega_1 D(1,0) + D(0,1)$ отлична от нуля, тогда нули z_k функции $f(z)$ достаточно большие по модулю, принадлежащие сектору $|Argz - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, имеют асимптотику*

$$\sqrt[3]{z_k} = \left(\frac{-2ik\pi}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_2} \cdot \ln\left(\frac{\omega_1 D(1,0) + D(0,1)}{D(1,1)}\right)\right)$$

$$+O\left(\max\big(\ln k\omega(\sqrt{2}\frac{\ln k}{k}); 1\big)\right), \quad k >> 1,$$

где $\omega(\delta)$-модуль непрерывности функции $D(x,y)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть величина $D(1,0) + \omega_2 D(0,1)$ отлична от нуля, тогда нули z_k функции $f(z)$ достаточно большие по модулю, принадлежащие сектору $|Argz + \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, имеют асимптотику*

$$\sqrt[3]{z_k} = \left(\frac{2ik\pi}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1} \cdot \ln\left(\frac{D(1,0) + \omega_2 D(0,1)}{D(1,1)}\right)\right)$$

$$+O\left(\max\big(\ln k\omega(\sqrt{2}\frac{\ln k}{k}); 1\big)\right), \quad k >> 1,$$

Доказана следующая [5]:

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ имеет вид (1). Допустим, что функция $D(x,y)$ в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка по переменным x, y. Если $\omega_1 D(1,0) + D(0,1) \neq 0$ и $D(1,1) \neq 0$, то нули z_k функции $f(z)$ имеют ту же асимптотику, что и в теоремах 2, 3, остаточный член которых записывается в виде $O(1/k)$.*

В формулировках теорем 2, 3, числа, выраженные через логарифмы, можно включить в остаточные члены. В то же время в теореме 4 эти величины существенно уточняют асимптотику.

Литература

1. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех., **No.6** (1982), 41–51.

2. *Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белаббаси Ю.* О нулях целых функций одного класса // Труды семинара им. И.Г. Петровского, Вып. **8** (1982), 211–217.

3. *Седлецкий А.М.* Когда все нули целой функции экспоненциального типа лежат в криволинейной полуплоскости (необходимое условие) // Мат. сб., **186**:9 (1995), 125–134.

4. *Иманбаев Н.С., Кангужин Б.Е.* О нулях целых функций, имеющих интегральное представление // Известия НАН РК. Сер. физ-мат., **No.3** (1995), 47–52.

5. *Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.T.* On zeros of the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Advances in Difference Equations, **2013**:110 (2013), 1–5.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Х.К. Ишкин

ishkin62@mail.ru

УДК 517.984.4

Изучаются классы несамосопряженных операторов, сохраняющих некоторые спектральные свойства при малых возмущениях. Показано, что при относительно компактных возмущениях сохраняются свойства: принадлежность резольвенты классу Неймана–Шаттена, наличие хотя бы одного луча наилучшего убывания резольвенты, а при дополнительных условиях типа Данфорда–Шварца — базисность системы корневых векторов для суммирования методом Абеля– Лидского.

Ключевые слова: несамосопряженные операторы, спектральная неустойчивость, базисность для суммирования методом Абеля– Лидского

On the stability of some classes of non-self-adjoint operators

We study classes of non-self-adjoint operators that preserve certain spectral properties under small perturbations. We have shown that with relatively compact perturbations, the following properties are preserved: the Schatten–von Neuman property of the resolvent, the presence of at least one ray of the best decrease of the resolvent, and under additional conditions of Dunford–Schwarz type, the Abel-Lidskii basis property of root vectors.

Keywords: non-self-adjoint operators, spectral instability, Abel–Lidskii basis property

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-11-00002).

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Khabir K. Ishkin, professor (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространств, T_0 – плотно определенный в $\mathcal{H}$ замкнутый оператор с дискретным спектром. В работе [1] М. В. Келдыш получил широкие условия на возмущения, сохраняющие свойство полноты системы корневых векторов (СКВ) и асимптотику спектра самосопряженного оператора T_0 с резольвентой класса Неймана–Шаттена $\mathfrak{S}_p$. Как показывают многочисленные примеры (см. [2] и имеющиеся там ссылки), для операторов, не представимые в виде $T = T_0 + V$, где T_0 самосопряжен, V — T_0-компактен, теорема Келдыша не работает. Между тем такого рода операторы (далее — ДСО (далекие от самосопряженных операторы)) довольно часто возникают в различных разделах физики и механики (см., например, [2,3]). В связи с этим возникает задача среди ДСО выявить классы операторов, обладающих определенными свойствами, которые сохраняются при малых (в каком-либо смысле) возмущениях.

В настоящей заметке мы рассмотрим два таких класса. Как было отмечено, спектр ДСО не обязательно локализуется около вещественной прямой, потому может быть бесконечным в любом угле $\{\theta_1 < \arg\lambda < \theta_2\}$. В связи с этим будем говорить, что спектр T_0 *локализован около луча* $\arg\lambda = \alpha$ тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon > 0$

$$N(T_0, r) \sim N(T_0, \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon, r), \quad r \to +\infty,$$

где $N(T, \eta, \zeta, r)$ и $N(T, r)$ – число собственных значений оператора T соответственно в секторе $\{\eta < \arg\lambda < \zeta,\ |\lambda| < r\}$ и круге $\{|\lambda| < r\}$.

Далее обозначим через $S_{p,\alpha}$ множество плотно определенных в $\mathcal{H}$ операторов с резольвентой класса $\mathfrak{S}_p$ и со спектром, локализованным около луча $\arg\lambda = \alpha$. Луч $\arg\lambda = \varphi$ называют *лучом наилучшего убывания* резольвенты оператора T, если существуют $R > 0, C > 0$, что при всех $r > R$ $\|(T_0 - re^{i\varphi})^{-1}\| \leqslant Cr^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, $(-\infty, 0]$ – луч наилучшего убывания T_0^{-1} и оператор V компактен относительно T_0. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0, R_0 > 0$, такие, что при всех λ из $U_0 = \{\lambda :\ |\arg\lambda - \pi| \leqslant \varepsilon_0,\ |\lambda| \geqslant R_0\}$ оператор $R_\lambda := (T_0 + V - \lambda)^{-1}$ существует и принадлежит $\mathfrak{S}_p$. При этом каждый луч $\{\lambda = re^{i\alpha}\ (|\alpha - \pi| \leqslant \varepsilon_0\}$ является лучом наилучшего убывания R_λ.*

Прежде, чем сформулировать следующий результат, напомним, что означает понятие *базиса для суммирования методом Абеля–Лидского.* Предположим сначала, что все собственные числа $\{\mu_k\}$ оператора T содержатся в угле $\Theta = \{\mu :\ |\arg\mu| < \theta\}$. Пусть $\alpha \in (0, \pi/2\theta)$. Положим $\mu^\alpha = |\mu|e^{i\alpha\arg\mu}$, $\mu \in \Theta$. Тогда для любого $t > 0$ $e^{-\mu^\alpha t} \to 0$, $\Theta \ni \mu \to \infty$. Положим

$$S_k(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} e^{-\mu^\alpha t}(T - \mu)^{-1}d\mu,$$

где γ_k – положительно ориентированный контур, целиком лежащий в угле Θ и содержащий внутри себя μ_k. Если при любом $t > 0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k(t)$ сильно сходится к некоторому оператору $S(t)$ и для любого $f \in \mathcal{H}$ $\lim\limits_{t\to+0} S(t)f = f$, то говорят, что СКВ оператора T образует *базис для метода суммирования Абеля–Лидского порядка α.* Сформулированное понятие естественным образом обобщается на случай, когда оператор T удовлетворяет условиям:

(DS1) $T^{-1} \in \mathfrak{S}_p, p < \infty$;

(DS2) существуют лучи $\gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \arg\lambda = \varphi_k\}$ и $R > 0$ такие, что $|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leqslant \pi/p$, $\gamma_k \cap \{|\lambda| > R\} \subset \rho(T)$ и при некотором $N \geqslant -1$

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| = O(\lambda^N), \gamma_k \ni \lambda \to \infty,$$

(подробности см., в работе [4, п. 6.4]). Условия (DS1) – (DS2) впервые были введены Н. Данфордом и Дж. Шварцем [5, Глава XI, § 9].

Теорема 2. *Пусть оператор удовлетворяет условиям* $(DS1)$ – $(DS2)$ *с* $N = -1$ *и оператор* V T_0*-компактен. Тогда СКВ оператора* $T_0 + V$ *образует базис для суммирования методом Абеля–Лидского порядка* $p + \varepsilon$ *с произвольным* $\varepsilon > 0$.

Литература

1. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР, **77**:1 (1951), 11-14.
2. *Mennicken R., Möller M.* Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. — Amsterdam–London: Elsevier, 2003.
3. *Bagarello F., Gazeau J.P., Szafraniec F.H., Znojil M.* Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics: Mathematical Aspects. — Hoboken: John Wiley and Sons, 2015.
4. *Войтович Н.Н., Каценеленбаум В.З., Сивов А.Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. — Москва: Наука, (1977)
5. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. **2**. — Москва: ИЛ, 1966.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

С.И. Кадченко, А.В. Пуршева, Л.С. Рязанова

sikadchenko@mail.ru, avpursheva@gmail.com, ryazanova2006@rambler.ru

УДК 519.624.2

Разработан численный метод восстановления возмущающего потенциала оператора Штурма-Лиувилля, заданного на двухреберном геометрическом графе, по спектральным характеристикам возмущенного и соответствующего ему невозмущенного операторов. Метод был апробирован на последовательном графе. Результаты численных экспериментов показали хорошую точность и высокую вычислительную эффективность разработанного метода.

Ключевые слова: спектральная теория операторов, обратные спектральные задачи, собственные значения и собственные функции операторов.

Кадченко Сергей Иванович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, МГТУ им. Г.И. Носова (Магнитогорск, Россия); Sergey Kadchenko (Nosov Magnitogorsk State Technical Univesity, Magnitogorsk, Russia)

Пуршева Анастасия Викторовна, аспирант кафедры уравнений математической физики, ЮУрГУ(НИУ) (Челябинск, Россия); Anastasiia Pursheva (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

Рязанова Любовь Сергеевна, к.п.н., доцент, МГТУ им. Г.И. Носова, магистрант кафедры уравнений математической физики, ЮУрГУ(НИУ) (Магнитогорск, Челябинск, Россия); Lyubov Ryazanova (Nosov Magnitogorsk State Technical Univesity, Magnitogorsk, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

The numerical method for solving inverse spectral problems on a geometric graph

The numerical method had been developed for the reconstructing of perturbing potential of the Sturm-Liouville's operator given on a two-edge geometrical graph from the spectral characteristics of perturbed and corresponding unperturbed operators. The method was tested on the sequential graph. The results of a numerical experiments showed a good accuracy and a high computational efficiency of the developed method.

Keywords: operator's spectral theory, inverse spectral problems, eigenvalues and eigenfunctions of operators.

В работе В.А. Садовничего и В.В. Дубровского [1] были изложены идеи численного метода вычисления приближенных первых собственных значений возмущенных самосопряженных операторов. В последствии, используя эти идеи и метод Галеркина, удалось доказать следующую теорему [2]. При этом удалось снять ограничение на норму возмущающего потенциала.

Теорема 1. *Пусть L – дискретный полуограниченный снизу оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом H и удовлетворяет однородным граничным условиям, заданных для оператора L, то его приближенные собственные значения $\widetilde{\mu}_k$ находятся по формулам*

$$\widetilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \delta_n, \tag{1}$$

где $\delta_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\mu}_k(n-1) - \widetilde{\mu}_k(n)]$, $n \in N$.

В [2], [3] показано, что формулы (1) позволяют с большой вычислительной точностью находить приближенные собственные значения дискретных полуограниченных операторов. Используя (1), нами построен алгоритм численного решения обратных спектральных задач на геометрических графах. Рассмотрим двухреберный связный ориентированный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ – множество вершин, $\mathbf{E} = \{E_1, E_2\}$ – множество ребер. Каждое ребро имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$, $j = 1, 2$. Пусть на графе $\mathbf{G}$ задана вектор-функция $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, каждая компонента которой $u_j(s_j)$ отвечает соответствующему ребру E_j.

Рассмотрим на графе $\mathbf{G}$ обратную спектральную задачу в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbf{G}) = \{\mathbf{g} = (g_1, g_2),\ g_j \in L_2(0, l_j),\ j = 1, 2\}$ [4]

$$-\frac{d^2u_j}{ds_j^2} + p_j(s_j)u_j = \mu u_j, \quad u_j = u_j(s_j), \quad s_j \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \frac{du_1}{ds_1}\Big|_{s_1=0} = 0, \quad u_1(s_1) = u_2(0), \\ d_1\frac{du_1}{ds_1}\Big|_{s_1=l_1} - d_2\frac{du_2}{ds_2}\Big|_{s_2=0} = 0, \quad \frac{du_2}{ds_2}\Big|_{s_2=l_2} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

В H определено скалярное произведение [4]

$$(\mathbf{g},\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{2} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j ds, \quad \mathbf{g},\mathbf{h} \in \mathbf{G}. \tag{4}$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные значения прямой задачи (2)-(3), занумерованные в порядке неубывания их вещественных частей, а через $\{v_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующие им ортонормированные собственные функции, заданные на ребрах E_j графа $\mathbf{G}$ для случая, когда $p_j(s_j) \equiv 0$. Система собственных функций $\{v_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2(G)$.

Согласно теореме 1, собственные значения (2), (3) $\mu_k \ \ (k = \overline{1,\infty})$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mu_k = \int_0^{l_{max}} \Big[d_1\chi_1(s)\Big(-v''_{1k}(s) + p_1(s)v_{1k}(s)\Big)v_{1k}(s) + \\ + d_2\chi_2(s)\Big(-v''_{2k}(s) + p_2(s)v_{2k}(s)\Big)v_{2k}(s)\Big] ds + \delta_k, \end{aligned} \tag{5}$$

где $l_{max} = \max(l_1, l_2)$, $\chi_j(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, l_j], \\ 0, & s > l_j. \end{cases} \quad j = 1,2.$

Используя (4), запишем (5) в виде

$$\int_0^{l_{max}} \Big[d_1\chi_1(s)v_{1k}^2(s)p_1(s) + d_2\chi_2(s)v_{2k}^2(s)p_2(s)\Big] ds = \mu_k - \lambda_k - \delta_k, \quad k = \overline{(1,\infty)}.$$

На основе этих уравнений составим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$AP \equiv \int_0^{l_{max}} \widehat{K}(x,s)P(s)ds = f(x), \ c \leqslant x \leqslant d, \tag{6}$$

где A – оператор Фредгольма,

$$\widehat{K}(x_k, s) = \Big(K_1(x_k, s) \quad K_2(x_k, s)\Big), \quad P(s) = \begin{pmatrix} P_1(s) \\ P_2(s) \end{pmatrix},$$
$$f(x_k) = \mu_k - \lambda_k - \delta_k, \ x_k \in [c, d].$$

Пусть ядро $\widehat{K}(x,s)$ интегрального уравнения (6) непрерывно и замкнуто в $\Pi = [0, l_1] \times [0, l_2] \times [c, d]$, а $f(x) \in L_2[c,d]$, $P_j(s) \in W_2^1[0, l_j]$, $j = 1, 2$.

Точные значения функции $f(x)$ неизвестны, но известны ее приближенные значения $\widetilde{f}(x)$ такие, что $||f - \widetilde{f}||_{L_2[c,d]} < \delta$. Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (6) является некорректно поставленной. Введем в рассмотрение сглаживающий функционал Тихонова

$$\Phi_\alpha[P, \widetilde{f}] = ||AP - \widetilde{f}||^2_{L_2[c,d]} + \alpha\Omega[P]. \tag{7}$$

Элемент P_α ищется из условия, что функционал (7) достигает минимального значения. Система уравнений, определяющая экстремали функционала $\Phi_\alpha[P,\widetilde{f}]$, имеет вид

$$\begin{cases} \alpha[p_1^\alpha(t) - q(p_1^\alpha)''(t)] + \int\limits_0^{l_{max}} \Big[R_{11}(s,t)p_1^\alpha(s) + R_{21}(s,t)p_2^\alpha(s)\Big]ds = F_1(t), \\ \alpha[p_2\alpha(t) - q(p_2^\alpha)''(t)] + \int\limits_0^{l_{max}} \Big[R_{12}(s,t)p_1^\alpha(s) + R_{22}(s,t)p_2^\alpha(s)\Big]ds = F_2(t). \end{cases}$$

Здесь

$$\int\limits_0^{l_{max}} \Big[R_{mn}(s,t)p_m^\alpha(s)ds = \int\limits_0^{l_{max}} p_m^\alpha(s)ds\Big[\int_c^d K_m(x,s)K_n(x,t)dx\Big]ds,$$

$$F_m(t) = \int_c^d K_m(x,t)\tilde{f}(x)dx,$$

$m,n = 1,2$, $t \in [a,b]$, $q > 0$, α — параметр регуляризации.

Проведенные многочисленные вычислительные эксперименты по восстановлению значений функций $p_j(s)$ в узлах дискретизации в обратной спектральной задаче (2), (3), показали высокую вычислительную эффективность разработанной методики.

Литература

1. *Садовничий В.А., Дубровский В.В.* Замечание об одном новом методе вычислений собственных значений и собственных функций дискретных операторов // Труды семинара им. И.Г Петровского, №17 (1994), 244-248.

2. *Kadchenko, S.I.* A numerical method for inverse spectral problems / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование", **8**:3 (2015), 116-126.

3. *Kadchenko, S.I.* Spectral problems on compact graphs / S.I. Kadchenko, S. N. Kakushkinm G.A. Zakirova // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование", **10**:3 (2017), 156-162.

4. *Баязитова А.А.* Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование", **16**:192 (2010), 4-10.

ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В L^P

А.С. Калитвин
kalitvinas@mail.ru

УДК 517.968

Важнейшие свойства линейных интегральных уравнений связаны с их фредгольмовостью. Линейные уравнения второго рода с частными интегралами не являются фредгольмовыми даже в общем случае непрерывных ядер. В связи с этим изучается фредгольмовость линейных интегральных уравнений с частными интегралами в пространствах Лебега L^p.

Ключевые слова: операторы и уравнения с частными интегралами, фредгольмовость, обратимость

The Fredholm property of linear equations with partial integrals in L^p

The most important properties of linear integral equations are related to their Fredholm property. Linear equations of the second kind with partial integrals are not Fredholm even in the general case of continuous kernels. In this connection, we study the Fredholm property of linear integral equations with partial integrals in Lebesgue spaces L^p.

Keywords: operators and equations with partial integrals, Fredholm property, invertibility

К линейным уравнениям с частными интегралами приводятся задачи механики сплошных сред, теории упругих оболочек, дифференциальных и интегро - дифференциальных уравнений с частными производными и другие проблемы, причем решения уравнений понимаются в различных смыслах. Это приводит к необходимости изучения уравнений в пространствах, которые выбираются в зависимости от смысла понимаемых в уравнениях решений [1–4].

В [5] условия (критерии) фредгольмовости получены для интегральных уравнений с частными интегралами и ядрами из пространства непрерывных вектор-функций со значениями в L^1, однако при этих условиях соответствующие операторы, вообще говоря, не действуют в пространстве L^p. Поэтому в работе изучается фредгольмовость линейных интегральных уравнений с частными интегралами в пространствах Лебега L^p.

Пусть $[a,b]$ и $[c,d]$ — конечные отрезки, $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, $D = [a,b] \times [c,d]$, функции $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ измеримы на $D \times [a,b]$, $D \times [c,d]$, $D \times D$ соответственно.

Калитвин Анатолий Семенович, д.ф.-м.н., профессор, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского (Липецк, Россия); Anatolij Kalitvin (Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia)

В пространстве $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ изучается фредгольмовость линейных интегральных уравнений второго рода с частными интегралами

$$x(t,s)=\int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+\int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+$$
$$+f(t,s). \quad (1)$$

Пусть $p^{-1}+q^{-1}=1$. Будем предполагать, что

$$\int_a^b |l(t,s,\tau)|^q d\tau \leqslant \tilde{L}, \int_c^d |m(t,s,\sigma)|^q d\sigma \leqslant \tilde{M} \int_a^b\int_c^d |n(t,s,\tau,\sigma)|^q d\tau d\sigma \leqslant \tilde{N}, \quad (2)$$

и для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t_1-t_2| < \delta$, $|s_1-s_2| < \delta$

$$\int_a^b |l(t_1,s_1,\tau)-l(t_2,s_2,\tau)|^q d\tau < \epsilon, \int_c^d |m(t_1,s_1,\sigma)-m(t_2,s_2,\sigma)|^q d\sigma < \epsilon, \quad (3)$$

$$\int_a^b\int_c^d |n(t_1,s_1,\tau,\sigma)-n(t_2,s_2,\tau,\sigma)|^q d\tau d\sigma < \epsilon. \quad (4)$$

При сделанных предположениях линейные операторы

$$(Lx)(t,s)=\int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s)=\int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s)=\int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

действуют и непрерывны в $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ и в $C(D)$ [3], оператор

$$(L(s)x)(t)=\int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau)d\tau \ (c \leqslant s \leqslant d),$$

вполне непрерывен как оператор, действующий из $L^p([a,b])$ в пространство $C([a,b])$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, оператор

$$(M(t)x)(s)=\int_c^d m(t,s,\sigma)x(\sigma)d\sigma \ (a \leqslant t \leqslant b)$$

вполне непрерывен как оператор, действующий из $L^p([c,d])$ в пространство $C([c,d])$ непрерывных на отрезке $[c,d]$ функций [6]. При этом оператор-функции $L(s)$ и $M(t)$ непрерывны по норме операторов, действующих из $L^p([a,b])$ и $L^p([c,d])$ в пространства $C([a,b])$ и $C([c,d])$ соответственно [3, 4].

В дальнейшем линейное уравнение $x = Ax+f$ будем называть фредгольмовым в рассматриваемом банаховом функциональном пространстве, если линейный оператор A ограничен в этом пространстве, а оператор $I-A$, где I — единичный оператор, имеет замкнутое множество значений, конечные размерности ядра и коядра соответственно и равный нулю индекс.

Следующий пример показывает, что даже в простейшем случае линейное интегральное уравнение второго рода с гладкими ядрами не является фредгольмовым ни в $C(D)$ и ни в $L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Приме 1. *Однородное интегральное уравнение второго рода с частными интегралами*

$$x(t,s) = \int\limits_0^1 x(\tau,s)d\tau + \int\limits_0^1 x(t,\sigma)d\sigma \qquad (5)$$

не является фредгольмовым ни в пространстве $C(D)$ и ни в пространстве $L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, где $D = [0,1]\times[0,1]$.

Действительно, функция $x(t) \equiv 1$ является собственной функцией компактного в $C([0,1])$ и в $L^p([0,1])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ интегрального оператора

$$(\bar{L}x)(t) = \int\limits_0^1 x(\tau)d\tau,$$

соответствующей собственному числу 1, а ядро $\ker(\bar{L})$ этого оператора бесконечномерно. Тогда бесконечномерно ядро оператора $I-\bar{K}$, содержащее множество $1 \otimes \ker(\bar{L})$, следовательно, уравнение (5) не является фредгольмовым.

Теорема 1. *Если функции l, m, n удовлетворяют условиям (2)–(4), то в $L^p(D)$ фредгольмовость уравнений $(I-L)x = f$ и $(I-M)x = f$ равносильна их обратимости и обратимости в $L^p([a,b])$ и в $L^p([c,d])$ уравнений $(I-L(s))x(t) = f(t)$ $(s \in [c,d])$ и $(I-M(t))x(s) = f(s)$ $(t \in [a,b])$ соответственно, а фредгольмовость в $L^p(D)$ уравнения (1) равносильна обратимости в $L^p([a,b])$ и в $L^p([c,d])$ уравнений $(I-L(s))x(t) = f(t)$ $(s \in [c,d])$ и $(I-M(t))x(s) = f(s)$ $(t \in [a,b])$.*

Литература

1. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтер-ра-Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006.

2. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.

3. *Appell J.M., Kalitvin A. S., Zabrejko P.P.* Partial integral operators and integro - differential equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000.

4. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.

5. *Калитвин А.С.* Об одном классе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций // Дифференциальные уравнения, **42**:6 (2006), 1194-1200.

6. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАДИУСЕ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРА С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В.А. Калитвин

kalitvin@mail.ru

УДК 517.968

Рассматривается определение линейных операторов Вольтерра с многомерными частными интегралами. Приводятся условия обращения в нуль спектрального радиуса этих операторов в пространстве непрерывных функций и в пространствах L^p.

Ключевые слова: операторы Вольтерра с частными интегралами, спектральный радиус, свойство Андо

On spectral radius of Volterra operators with multidimensional partial integrals

The definition of Volterra linear operators with multidimensional partial integrals is considered. The conditions for the vanishing of the spectral radius of these operators in the space of continuous functions and in the spaces L^p are given.

Keywords: Volterra operators with partial integrals, spectral radius, Ando property

Пусть T и S — компактные множества положительной лебеговой меры в конечномерных пространствах, $D = T \times S$, $C(D)$ — пространство непрерывных функций на D, L, M, N, K— операторы

$$(Lx)(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \iint\limits_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,\ K = L + M + N,$$

где l, m, n — заданные измеримые на $D \times T$, $D \times S$, $D \times D$ действительные функции соответственно.

Функции l, m, n назовем ядрами Вольтерра, если в T и S заданы семейства замкнутых множеств $\{T(t) : t \in T\}$ и $\{S(s) : s \in S\}$, причем $t \in T(t)$, $s \in S(s)$, при $\bar{t} \in T(t)$ $T(\bar{t}) \subset T(t)$, при $\bar{s} \in S(s)$ $S(\bar{s}) \subset S(s)$ и выполнены следующие свойства:

а) для каждого $\delta > 0$ существуют конечные множества $T(\delta) = \{t_1, \cdots, t_p\}$, $S(\delta) = \{s_1, \cdots, s_q\}$ такие, что $mes(T(t_{i-1})\Delta T(t_i)) < \delta$ $(i = 1, \cdots, p)$, $T(0) = \emptyset$, $\cup_{i=1}^p T(t_i) = T$; $mes(S(s_{j-1})\Delta S(s_j)) < \delta$ $(j = 1, \cdots, q)$, $S(0) = \emptyset$, $\cup_{j=1}^q S(s_j) = S$, где Δ обозначает симметрическую разность множеств;

Калитвин Владимир Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского (Липецк, Россия); Vladimir Kalitvin (Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia)

б) $l(t,s,\tau)=0$ при $\tau\notin T(t)$, $m(t,s,\sigma)=0$ при $\sigma\notin S(s)$, $n(t,s,\tau,\sigma)=0$ при $\tau\notin T(t)$ или $\sigma\notin S(s)$.

Примеры ядер Вольтерра приведены в [1].

Через $r(K), r(L), r(M), r(N)$ обозначим спектральные радиусы операторов K, L, M, N.

Теорема 1. *Если операторы L, M, N с ограниченными ядрами Вольтерра действуют в $C(D)$, то $r(K)=r(L)=r(M)=r(N)=0$.*

Пусть $C(L^1(\Omega))$ — пространство непрерывных по $(t,s)\in D$ вектор-функций со значениями в $L^1(\Omega)$ и

$$n(t,s,\tau,\sigma)=\bar{n}(t,s,\tau,\sigma)\chi_{T(t)}(\tau), n(t,s,\tau,\sigma)=\bar{n}(t,s,\tau,\sigma)\chi_{S(s)}(\sigma),$$

$$l(t,s,\tau)=\bar{l}(t,s,\tau)\chi_{T(t)}(\tau), m(t,s,\sigma)=\bar{m}(t,s,\sigma)\chi_{S(s)}(\sigma), \tag{1}$$

где через $\chi_{T(t)}(\tau)$ и $\chi_{S(s)}(\sigma)$ обозначены характеристические функции множеств $T(t)$ и $S(s)$ соответственно.

Теорема 2. *Если $\bar{l}(t,s,\tau)\in C(L^1(T))$, $\bar{m}(t,s,\sigma)\in C(L^1(S))$, $\bar{n}(t,s,\tau,\sigma)\in C(L^1(D))$, L, M, N — операторы с ядрами Вольтерра (1) и $K=L+M+N$, то в $C(D)$ $r(K)=r(L)=r(M)=r(N)=0$.*

Пусть $u = mes\, T_1 + mes\, S_1$, где $T_1\subset T$ и $S_1\subset S$ —измеримые множества, и $\delta(A)=\overline{\lim_{u\to 0}}\|P_{D_1}AP_{D_1}\|$, где оператор $A\in\{K,L,M,N\}$, P_{D_1} — оператор умножения на характеристическую функцию χ_{D_1} множества $D_1=T_1\times S_1$, а норма оператора $P_{D_1}AP_{D_1}$ рассматривается как норма этого оператора, действующего в $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. Если $\delta(A)=0$, то говорят, что оператор A обладает свойством Андо.

Свойство Андо выполнено для оператора K, если оно выполнено для операторов L, M, N. Через $]K[,]L[,]M[,]N[$ обозначим операторы с ядрами $|l|, |m|, |n|$. Если меры на множествах T и S не содержат атомы, то действующий в $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ оператор $]K[$ обладает свойством Андо точно тогда, когда свойством Андо обладают операторы $]L[,]M[,]N[$, причем из свойства Андо для этих операторов вытекает свойство Андо для операторов K, L, M, N. Если ядра действующих в $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ операторов L, M, N ограничены, то операторы $]K[,]L[,]M[,]N[$ обладают свойством Андо. Другие условия, из которых следует свойство Андо, приведены в [2].

Так как $r(A)\leqslant\delta(A)$ [2], то равенство нулю спектрального радиуса операторов Вольтерра с частными интегралами в пространствах $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ вытекает из свойства Андо для этих операторов.

Теорема 3. *Если оператор Вольтерра $A\in\{K,L,M,N\}$ действует в $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ и обладает свойством Андо, то $r(A)=0$.*

В заключение отметим, что к линейным уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся задачи теории упругих оболочек, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными [2–4]. Условия равенства нулю спектрального радиуса операторов Вольтерра с одномерными частными интегралами приведены в [1, 2, 5], а операторов Вольтерра с многомерными частными интегралами — в [1].

Литература

1. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтер-ра-Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006.

2. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.

3. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

4. *Appell J.M., Kalitvin A. S., Zabrejko P.P.* Partial integral operators and integro - differential equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000.

5. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ИЗ ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА В ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ЛЕБЕГА

А.А. Калыбай, Р. Ойнаров

kalybay@kimep.kz, o_ryskul@mail.ru

УДК 517.983.34

Рассматривается интегральный оператор вольтеррового вида. Получены критерии его ограниченности из весового пространства Соболева в весовое пространство Лебега. При этом предполагается, что ядро оператора неотрицательное и удовлетворяет условию $Q_n, n \geqslant 0$.

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, весовое пространство Соболева, интегральный оператор, ограниченность

Boundedness of one class of integral operators from a weighted Sobolev space into a weighted Lebesgue space

A Volterra type integral operator is considered. Criteria of its boundedness from a weighted Sobolev space to a weighted Lebesgue space are obtained. In addition, it is assumed that the kernel of the operator is nonnegative and satisfies the condition $Q_n, n \geqslant 0$.

Keywords: weighted Lebesgue space, weighted Sobolev space, integral operator, boundedness

---

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом AP05130975 КН МОН РК.

Калыбай Айгерим Айсултанкызы, к.ф.-м.н., доцент, Университет КИМЭП (Алматы, Казахстан); Aigerim Kalybay (KIMEP University, Almaty, Kazakhstan)

Ойнаров Рыскул, д.ф.-м.н., профессор, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Ryskul Oinarov (The L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan)

Пусть $I=(a,b)$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. Пусть $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Пусть υ,ρ,u и ω неотрицательные на I функции такие, что υ^p, ρ^p, ω^p,u^r, $\rho^{-p'}$, $\omega^{-q'}$ локально суммируемы на I.

Обозначим через $W_p^1(u,\upsilon)\equiv W_p^1(u,\upsilon,I)$ пространство всех локально абсолютно непрерывных на I функций, для которых конечно норма

$$\|f\|_{W_p^1}=\|\rho f'\|_p+\|\upsilon f\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ - обычная норма пространства $L_p(I)$.

Через $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho,\upsilon)\equiv\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho,\upsilon,I)$ обозначим замыкание множества $\overset{\circ}{AC}(I)\cap W_p^1(\rho,\upsilon)$ по норме пространства $W_p^1(\rho,\upsilon)$.

Пусть $L_{p,\upsilon}\equiv L_p(\upsilon,I)$ пространство всех измеримых на I функций с конечной нормой $\|f\|_{p,\upsilon}\equiv\|\upsilon f\|_p$.

Рассмотрим ограниченность интегрального оператора

$$\mathcal{K}^+f(x)=\int\limits_a^x K(x,s)f(s)ds,\quad x\in I,\tag{1}$$

из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho,\upsilon)$ в $L_{q,}(\omega,I)$, т.е. выполнение неравенства

$$\|\omega\mathcal{K}^+f\|_q\leqslant C(\|\rho f'\|_p+\|\upsilon f\|_p),\quad f\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho,\upsilon).\tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $1<p\leqslant q<\infty$ *и ядро оператора (1) принадлежит классу* $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n\geqslant 0$. *Тогда для оператора (1) неравенство (2) выполнено тогда и только тогда, когда* $\max\{F_i^+,G_j^+\}<\infty$ *хотя бы при одной паре* (i,j), $\ i,j=1,2$; *при этом для наилучшей постоянной* $C>0$ *в (2) имеет место соотношение* $C\approx\max\{F_i^+,G_j^+\}$, $i,j=1,2$. *Здесь* $F_i^+=\sup\limits_{z\in I}F_i^+(z)$, $G_j^+=\sup\limits_{z\in I}G_j^+(z)$,

$$F_1^+(z)=\left(\int\limits_a^{\mu^-(z)}\rho^{-p'}(x)\left(\int\limits_z^b\left(\int\limits_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)}K(t,s)ds\right)^q\omega^q(t)dt\right)^{\frac{p'}{q}}dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$F_2^+(z)=\left(\int\limits_z^b\omega^q(t)\left(\int\limits_a^{\mu^-(z)}\left(\int\limits_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)}K(t,s)ds\right)^{p'}\rho^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{q}{p'}}dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$G_1^+(z)=\sup_{y\in\Delta_\mu^+(z)}\left(\int\limits_{\mu^-(z)}^{\mu^+(y)}\rho^{-p'}(x)\left(\int\limits_y^z\left(\int\limits_{\varphi^-(x)}^{t}K(t,s)ds\right)^q\omega^q(t)dt\right)^{\frac{p'}{q}}dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$G_2^+(z) = \sup_{y\in\Delta_\mu^+(z)} \left(\int\limits_y^z \omega^q(t) \left(\int\limits_{\mu^-(z)}^{\mu^+(y)} \left(\int\limits_{\varphi^-(x)}^{t} K(t,s)ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(x)dx \right)^{\frac{q}{p'}} dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

$\Delta_\mu^+(z) = [\varphi^-(\mu^-(z)), z]$.

Определение функции $\varphi^\pm, \mu^\pm$ и множества $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$ можно найти в [1].

Литература

1. *Ойнаров Р.* Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева // Известия РАН, серия математическая, **78**:4 (2014), 207–223.

ИЗМЕНЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ЗА СЧЕТ ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Б.Е. Кангужин

kanbalta@mail.ru

УДК 517.9, 517.43

С помощью дельта-образных возмущений в работе удается изменить начальную конечную часть спектра оператора Лапласа. В данной работе показано, что возмущение с точечным носителем можно выбрать так, чтобы изменилось только конечное число собственных значений исходного оператора

Ключевые слова: оператор Лапласа, задача Дирихле, максимальный оператор, дельта-образное возмущение, резольвента, спектр оператора

Change of the finite part of the spectrum of the Laplace operator due to delta-shaped perturbations

Using delta-shaped perturbations in the work it is possible to change the initial final part of the spectrum of the original operator. This paper shows that a point-supported perturbation can be chosen so that only a finite number of eigenvalues of the original operator changed.

Keywords: Laplace operator, Dirichlet problem, maximal operator, delta-shaped perturbation, resolvent, spectrum of the operator

---

Работа выполнена при частичной поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН Республики Казахстан (проект № AP05131292).

Кангужин Балтабек Есматович, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Baltabek Kanguzhin (al-Farabi Kazakh National University, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

В 1986 году В.А. Садовничий и В.А. Любишкин [1] исследовали поведение резольвент конечномерного возмущения дискретных операторов в зависимости от условий налагаемых на возмущения. При этом их конечномерные возмущения позволяют либо ослаблять, либо получать новые условия, налагаемые на возмущения. В данной работе в отличие от указанной работы В.А. Садовничего и В.А. Любишкина, конечномерному возмущению подвергается не исходный дискретный оператор, а обратный к нему оператор. Последнее обстоятельство позволяет интерпретировать такие возмущения, как дельтообразные возмущения исходного оператора. С помощью дельта-образных возмущений в работе удается изменить начальную конечную часть спектра исходного оператора. Подобные результаты по возмущению конечной части спектра оператора Штурма-Лиувилля исследованы в работах H. Hochstadt.

Пусть $d-$ натуральное число. В пространстве $\mathbb{R}^d$ возьмем односвязную область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $q_0 \in L_1(\Omega)$. Запишем неоднородное уравнение

$$-\Delta u(x) + q_0(x)u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

с условиями Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Оператор соответствующей задаче Дирихле (1)-(2) в пространстве $L_2(\Omega)$ обозначим через B_0. Считаем, что потенциал q_0 выбран так, что существует

$$B_0^{-1}f(x) = \int_\Omega G(x,t)f(t)dt. \tag{3}$$

Ядро интегрального оператора (3) называется функцией Грина краевой задачи Дирихле (1)-(2). Когда $q_0(x) = \overline{q_0(x)}$ оператор $B_0 = B_0^*$ и поэтому обладает следующими свойствами:

1) $G(x,t) = G(t,x), \quad x,t \in \Omega;$

2) Существует бесконечное число вещественных собственных значений

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \dots;$$

3) Система собственных функций $\{w_n(x)\}\infty_{n=1}$ оператора B_0 образует ортогональный базис пространства $L_2(\Omega)$.

В данной работе потенциал $q_0(x)$ заменим на другой потенциал $q(x) = q_0(x)+p(x)$ и соответствующий оператор обозначим через B_p. Основной результат работы - существуют функций $p(x)$ с $supp(p) = x^0$, где $x^0 \in int\Omega$, для которых собственные значения операторов B_0 и B_p совпадают. Известно, что при $d = 1$, $\Omega = (0,1)$ спектр оператора B_0 не изменяется при замене потенциала $q(x)$ на $q(1-x)$. В отличие от указанного случая, в настоящей работе возмущение $p(x)$ имеет точечный носитель. Здесь сохранение спектра оператора B_0 выполняется не за счет симметрии, а за счет других механизмов. Утверждения о сохранении собственных значений при $d = 1$ в случае многоточечных задач можно найти в работе [2]. В работах [3-5] исследуется возможность конечномерного возмущения спектра оператора. В данной работе показано, что возмущение $p(x)$ с точечным возмущением можно выбрать так, чтобы изменилось только конечное число собственных значений оператора B_0. В указанных работах [3-5] рассматривались только регулярные возмущения потенциала. В предлагаемом случае возмущение $p(x)$ представляет дельта-образную функцию. В 80-е годы на семинаре В.А. Садовничего результаты H. Hochstadt усиленно обсуждались с тем, чтобы перенести его результаты на случай одномерных дифференциальных операторов с нераспадающимися граничными условиями. Представленные в настоящей работе результаты можно интерпретировать как перенос некоторых результатов H. Hochstadt на операторы с условиями во внутренней точке. Представленные в работе результаты справедливы при всех $d \geqslant 1$. В то же время работы [3-5] посвящены случаю $d = 1$.

Литература

1. *Садовничий В.А., Любишкин В.А.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Функц. анализ и его прил., **20**:3 (1986), 55-65.

2. *Кангужин Б.Е.* Критерии Вайнштейна и регуляризованные следы в случае поперечных колебаний упругой струны с пружинами // Диференц. уравн., **54**:1 (2018), 9-14.

3. *Crum M.M.* Associated Sturm-Liouville systems // Quart. S. Math., **6** (1955), 121-127.

4. *Hochstadt H.* The Inverse Sturm-Liouville Problem // Communication on Pure and Applied Mathematics, **26** (1973), 715-729.

5. *Левитан Б.М.* Об определении оператора Штурма-Лиувилля по одному и двум спектрам // Изв. АН СССР, **42**:1 (1978), 185-199.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Н.Н. Конечная

n.konechnaya@narfu.ru

УДК 517.928

Доклад посвящен способу нахождения главного члена асимптотики решений некоторых линейных дифференциальных уравнений, когда независимая переменная x бесконечно большая, т.е. при $x \to +\infty$. При этом предполагается, что коэффициенты исходного уравнения являются суммами некоторых чисел и производных первого порядка в смысле теории распределений от некоторых функций, убывающих на бесконечности в интегральном смысле.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с коэффициентами – распределениями, квазипроизводные, асимптотика решений дифференциальных уравнений

Работа частично выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00250).

Конечная Наталья Николаевна, к.ф.-м.н., зав. кафедрой, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Natalia Konechnaya (Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk, Russia)

Asymptotics of solutions to linear differential equations with distribution coefficients

The report is devoted to the method of finding the principal term of the asymptotics of solutions to some linear differential equations, when the independent variable x is infinitely large, that is, with $x \to +\infty$. In this case, it is assumed that the coefficients of the original equation are sums of some numbers and first-order derivatives in the sense of the theory of distributions of certain functions decreasing at infinity in the integral sense.

Keywords: differential equations with distribution coefficients, quasi-derivatives, asymptotics of solutions to differential equations

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и λ – комплексные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – комплекснозначные измеримые на $R_+(:= [0, +\infty))$ функции, такие, что

$$|p_1| + (1 + |p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^{n} |p_j| \in L^1_{loc}(R_+).$$

В докладе будет представлена конструкция, позволяющая при выполнении этого условия определить, в каком смысле следует понимать уравнение вида

$$y^{(n)} + (a_1 + p_1(x))y^{(n-1)} + (a_2 + p_2'(x))y^{(n-2)} + \ldots + (a_n + p_n'(x))y = \lambda y,$$

где все производные понимаются в смысле теории распределений. Используя эту конструкцию, установлено, что главный член асимптотики при $x \to +\infty$ фундаментальной системы решений этого уравнения и их производных определяется, как и в классическом случае, по корням многочлена

$$Q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n - \lambda,$$

если функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ удовлетворяют определенным условиям интегрального убывания на бесконечности.

В докладе более подробно будет рассматрен случай, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \lambda = 0$, а именно, будет изложено доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Рассмотрим уравнение*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2'(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n'(x)y = 0.$$

Пусть функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *такие, что*

$$|p_1| + (1 + x|p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^{n} x^{j-2}|p_j| \in L^1(R_+).$$

Тогда это уравнение имеет фундаментальную систему решений $\{y_j\}$, $j = 1, 2, \ldots n$, *такую, что при* $x \to +\infty$ *справедливы равенства*

$$y_j^{[s]}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{j-1-s}}{(j-1-s)!}(1 + o(1)), & \text{если } s = 0, 1, \ldots, j-1, \\ x^{j-1-s}\, o(1), & \text{если } s = j, j+1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Доклад основан на совместной работе с Мирзоевым К.А. “Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка” // Математические заметки (в печати).

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.584, 517.518.34, 517.956.227

Исследуется спектральная задача с наклонной производной для оператора Лапласа в круге D. Установлены асимптотические свойства собственных значений и доказано свойство базисности со скобками в $L_2(D)$ системы корневых функций отмеченной задачи.

Ключевые слова: задача с наклонной производной, оператор Лапласа, собственные значения, корневые функции, базис Рисса, базис со скобками

The basis property of the root system functions of oblique derivative problem for the Laplace operator

We investigate a spectral problem with an oblique derivative for the Laplace operator in a disc D. The asymptotic properties of the eigenvalues and the basis property with brackets in $L_2(D)$ of the system of root functions are established.

Keywords: oblique derivative problem, Laplace operator, eigenvalues, root functions, Riesz basis, basis with brackets

Свойство полноты системы корневых функций эллиптических операторов с условием равенства нулю наклонной производной на границе области изучалось в [1, 2]. Вопрос о базисности таких систем долгое время оставался открытым. В 1994 году вышла статья [3], где было доказано отсутствие свойства базисности в $L_p(D)$ (при любом $1 < p < \infty$) у системы собственных и присоединённых функций задачи с наклонной производной для оператора Лапласа в круге D. Развивая результаты [3], мы показываем, что система корневых функций этой задачи образует базис со скобками в $L_2(D)$.

Работа выполнена при частичной поддержке программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013). Второй автор поддержан РФФИ (проект № 18-01-00236).

Костин Андрей Борисович, д.ф.-м.н., доцент, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Andrew Kostin (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

Шерстюков Владимир Борисович, д.ф.-м.н., доцент, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Vladimir Sherstyukov (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

В единичном круге $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ рассматривается спектральная задача

$$\Delta w + \mu^2 w = 0, \quad (x, y) \in D, \qquad \frac{\partial w}{\partial l} = 0, \quad (x, y) \in \partial D, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\mu^2 \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, l — направление, составляющее постоянный угол $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ с внешней нормалью к ∂D. Как показано в [3] (см. также [4]), все собственные значения $\lambda = \mu^2$ этой задачи описываются корнями уравнений

$$\mu\, J_n'(\mu) \cos\alpha + i\, n\, J_n(\mu) \sin\alpha = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

с функцией Бесселя $J_n(\mu)$ комплексной переменной μ. Из [1] следует, что система корневых функций задачи (1) полна в $L_2(D)$. Согласно [3] присоединённых функций у задачи нет, все собственные функции даются формулами

$$u_{n,\,k}(r, \varphi; \alpha) = e^{in\varphi}\, J_n(\mu_{n,\,k}(\alpha)\, r), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

а биортогональная система имеет вид (черта сверху означает комплексное сопряжение)

$$v_{m,\,j}(r, \varphi; \alpha) = e^{im\varphi}\, J_m(\overline{\mu}_{m,\,j}(\alpha)\, r), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Здесь $\mu_{n,\,k}(\alpha)$ — корни уравнения (2), выделенные условием $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$ и занумерованные в порядке возрастания модуля. Корень $\mu = 0$ учитывается только для $n = 0$, т. е. $\mu_{0,\,1} = 0$, а для всех остальных таких корней выполнено $\operatorname{Re}\mu_{n,\,k}(\alpha) > 0$. Как в [3], после нормировки систем (3) и (4) получим

$$\widehat{u}_{n,\,k}(r, \varphi; \alpha) = u_{n,\,k}(r, \varphi; \alpha)/I_{n,\,k}, \quad \widehat{v}_{m,\,j}(r, \varphi; \alpha) = v_{m,\,j}(r, \varphi; \alpha)/\,\overline{I}_{m,\,j}\,, \tag{5}$$

где

$$I_{n,\,k} = \sqrt{\pi}\, J_n(\mu_{n,\,k}(\alpha)) \sqrt{1 - n^2\, \mu_{n,\,k}^{-2}(\alpha) \cos^{-2}\alpha}, \quad I_{0,\,1} = \sqrt{\pi}, \tag{6}$$

а $\{\widehat{u}_{n,\,k}\}$ и $\{\widehat{v}_{m,\,j}\}$ с индексами $n, m \in \mathbb{Z}$; $k, j \in \mathbb{N}$, есть биортонормированная пара в комплексном пространстве $L_2(D)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\, u(r, \varphi)\, \overline{v(r, \varphi)}\, dr\, d\varphi \tag{7}$$

и нормой $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Таким образом, система (3) полна и минимальна в $L_2(D)$, но не образует базис в этом пространстве. В настоящей работе установлена базисность со скобками системы (3) в пространстве $L_2(D)$.

Пусть $H = L_2(D)$ — основное гильбертово пространство со скалярным произведением (7). Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$H_n = \big\{u \in L_2(D) \mid u(r, \varphi) = e^{in\varphi}\, U(r),\ U \in L_{2,r}(0, 1)\big\},$$

где $L_{2,r}(0, 1)$ обозначает комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g)_0 = \int_0^1 r f(r)\, \overline{g(r)}\, dr$.

Ясно, что $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — это система ортогональных подпространств H, причём $H = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} H_n$. Система $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис из подпространств гильбертова пространства H (см. [5]), но в отличие от стандартной ситуации в спектральной теории (см., например, [6, 7]), здесь $\dim H_n = \infty$.

Теорема 1. *Пусть значения $n \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ выбраны произвольно и фиксированы. Система*

$$\big\{\widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha)\big\}_{k\in\mathbb{N}}$$

является базисом Рисса подпространства H_n пространства $H = L_2(D)$.

Теорема 2. *При любом значении $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ система функций*

$$\big\{\widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha) \mid n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}\big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big\{\widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha)\big\}_{k\in\mathbb{N}},$$

определенных в (5), образует базис со скобками пространства $H = L_2(D)$. Именно, всякий элемент $u \in H$ раскладывается и притом единственным образом в ряд

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{n,\,k}\, \widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha) \right). \tag{8}$$

Здесь $u_n \in H_n$, и все ряды сходятся в H. Коэффициенты разложения (8) даются формулами

$$C_{n,\,k} = I_{n,\,k}^{-1} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r\, u(r,\varphi)\, \overline{v_{n,\,k}}(r,\varphi;\alpha)\, dr\, d\varphi,$$

где функции $v_{n,\,k}$ и числа $I_{n,\,k}$ заданы в (4) и (6) соответственно.

Важную роль в исследовании играют положительные корни уравнения $J_n'(z) = 0$. Упорядочим их по возрастанию, обозначим $j'_{n,\,k}$ и получим последовательность $0 < j'_{n,\,1} < j'_{n,\,2} < \ldots < j'_{n,\,k} < \ldots$.

Теорема 3. *Пусть значения $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in [0, \pi/2)$ фиксированы. Для корней $\mu_{n,\,k}(\alpha)$ уравнения (2) при $k \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mu_{n,\,k}(\alpha) = j'_{n,\,k} + \frac{in\,\mathrm{tg}\,\alpha}{j'_{n,\,k}} + \frac{n^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{2j'^3_{n,\,k}} + \frac{in^3\,\mathrm{tg}\,\alpha(3+\mathrm{tg}^2\,\alpha)}{3j'^3_{n,\,k}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{j'^5_{n,\,k}}\Big).$$

Краткое изложение представленных результатов см. в [8].

Литература

1. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. on Pure and Appl. Math., **15** (1962), 119-147.

2. *Моисеев Е. И.* О полноте собственных функций некоторых краевых задач // Докл. АН СССР, **226**:5 (1976), 1012-1014.

3. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной // Дифференц. уравнения, **30**:1 (1994), 128-143.

4. *Kostin A. B., Sherstyukov V. B.* On complex roots of an equation arising in the oblique derivative problem // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series **788** (2017) 012052 doi:10.1088/1742-6596/788/1/012052. P. 1-7.

5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.

6. *Агранович М. С.* О рядах по корневым векторам операторов, определяемых формами с самосопряженной главной частью // Функц. анализ и его прил., **28**:3 (1994), 1-21.

7. *Шкаликов А. А.* О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора // Теория функций и дифференциальные уравнения. Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. Тр. МИАН, **269** (2010), 290-303.

8. *Костин А. Б., Шерстюков В. Б.* Базисность системы корневых функций задачи с наклонной производной // Докл. АН, **482**:1 (2018), 12-15.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ВЕСОВОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.К. Кусаинова, Я.Т. Султанаев, Г. Мурат

leili2006@mail.ru, sultanaevyt@gmail.com, gulnar_18.01@mail.ru

УДК 517.951

Рассматривается самосопряженный оператор L, ассоциированный с замыканием в гильбертовом пространстве $L_{2,w}$ квадратичной формы $a_m[u,f] = \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|=m} \rho^2(x) D^\alpha u \overline{D^\alpha f} + \upsilon_m^2(x) u \overline{f} \Big) dx$, $f, u \in C_0^\infty(\Omega)$. Получены аппроксимативные оценки компактов $BH \cap \mathrm{L}^{-1}(BL_{2,\omega})$ для определенных весовых интерполяционных пространств H.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, интерполяционное пространство, поперечники компактов

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (грант AP 05133397).

Кусаинова Лейли Кабиденовна, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Leili Kussainova (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan)

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, БГПУ имени М. Акмоллы (Уфа, Россия); Yaudat Sultanaev (M. Akmolla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia)

Мурат Гульнар, докторант, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Gulnar Murat (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan)

Approximate estimates for one differential operator in a weighted Hilbert space

We consider a self-adjoint operator L associated with a closure in the Hilbert space $L_{2,w}$ of a quadratic form $a_m[u,f] = \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|=m} \rho^2(x) D^\alpha u \overline{D^\alpha f} + \upsilon_m^2(x) u\overline{f}\Big)dx,\ f,u \in C_0^\infty(\Omega)$. We obtain approximate estimates of the compacts $BH \cap \mathrm{L}^{-1}(BL_{2,\omega})$ for certain weighted interpolation spaces H.

Keywords: differential operator, interpolation space, widths of compacts

В работе приняты обозначения: BX — единичный шар в банаховом X, $L_{2,\omega}$ — пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_1 = \int_\Omega f\overline{g}\omega(x)dx,$$

$\omega(x) > 0$ п. в. в Ω, $\omega \in L_{loc}(\Omega)$, I^n — множество кубов $Q = Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon |y_j - x_j| < h/2; 1 \leqslant j \leqslant n\}$, $\upsilon_s(x) = \rho(x)h^{-s}(x)$ $(s > 0)$, ρ и $h(\cdot)$ — положительные функции, заданные в области Ω и удовлетворяющие условиям:

1) $0 < h(\cdot) \leqslant 1$,
2) для любого $x \in \Omega$ $\ Q(x) = Q_{h(x)}(x) \subset \Omega$,
3) существует такое $\varkappa > 1$, что

$$\varkappa^{-1} \leqslant \frac{\rho(y)}{\rho(x)}, \frac{h(y)}{h(x)} \leqslant \varkappa, \text{ если } y \in \widetilde{Q}(x) = \frac{3}{4}Q(x).$$

Положим $\upsilon_s(x) = \rho(x)h^{-s}(x)$, $(s > 0)$. Пусть $\{Q^j, j \in J\}$ - семейство Безиковича, выделенное из множества кубов $\{\widetilde{Q}(x), x \in \Omega\}$ [1, §1.1].

Обозначим через $H_p^s(\rho,\upsilon_s)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по порме

$$\|f; H_p^s(\rho,\upsilon_s)\| = \Big[\sum_{j\geqslant 1} \big(\rho^p(x^j)\|\psi_j f; H_p^s\|^p + \upsilon_s^p(x^j)\|\psi_j f\|_p^p\big)\Big]^{1/p}, 1 < p < \infty, \tag{1}$$

где

$$(J_s f)(x) = \Big(F^{-1}(1+\xi^2)^{s/2}Ff\Big)(x);\ \left(\xi^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2\right).$$

Нормы, заданные в $C_0^\infty(\Omega)$ посредством равенства вида (1), эквивалентны.

Пусть $\{A_0, A_1\}$ - интерполяционная пара банаховых пространств. Обозначим через $[A_0,A_1]_\theta$, $(A_0,A_1)_{\theta,q}$ $(0 < \theta < 1, 1 \leqslant q < \infty)$ интерполяционные прстранства, построенные методом комплексной инерполяции, методом вещественной интерполяции [2].

Теорема 1. *Пусть* $1 < s_1 < s_0,\ 1 < p < \infty,\ s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,\ 0 < \theta < 1,$ $\upsilon_i = \rho h^{-s_i}(\cdot)$. *Тогда*

$$\Big[H_p^{s_0}(\rho,\upsilon_0), H_p^{s_1}(\rho,\upsilon_1)\Big]_\theta H_p^s[\rho,\upsilon_s].$$

Для целого $m > 0$ $(m \in \mathbb{N})$ пространство H_p^m есть пространство Соболева W_p^m. Поэтому $H_p^m(\rho, \upsilon_m)$ есть весовое пространство Соболева $W^m(\rho, \upsilon_m)$ с эквивалентной нормой

$$\|u; W_p^m(\rho, \upsilon_m)\| = \Big(\int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=m} |\rho(x) D^\alpha u|^p + |\upsilon_m(x) u|^p\right) dx\Big)^{1/p}.$$

Для $s = [s] + \{s\}$ $(0 < \{s\} < 1)$ $W_p^s(\rho, \upsilon_s)$ определяется как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u; W_p^s(\rho, \upsilon_s)\| = \|\upsilon_s u; L_p(\Omega)\| +$$
$$+ \Big[\sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{\big|\rho(x)\big(D^\alpha u(y) - D^\alpha u(x)\big)\big|^p}{|y-x|^{n+\{s\}p}} dxdy\Big]^{1/p}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < m_1 < m_0$ *— целые,* $1 < p < \infty$, $pm_1 > n$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)m_0 + \theta m_1$ *— нецелое. Тогда*

$$\big(W_p^{m_0}(\rho, \upsilon_0), W_p^{m_1}(\rho, \upsilon_1)\big)_{\theta,p} = W_p^s(\rho, \upsilon_s).$$

Пусть $\mathcal{B}_x = \Big\{Q \in I^n, Q \subset \widetilde{Q}(x)\Big\}$, $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{B}_x$. Зададим на семействе $\mathcal{B}$ максимальный оператор

$$M^* f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{B},\ x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int |f|, \quad f \in L_{loc}(\Omega).$$

Положим

$$\Phi(x) = \rho^{-1}(x)\sqrt{M^*\omega(x)},$$
$$\Omega_{\lambda,m} = \{x \in \Omega : \Phi(x) h^m(x) > \lambda\},\ \lambda \geqslant 0,$$
$$\mathcal{K}_m(\lambda) = \int_{\Omega_\lambda} \Phi^{n/m}(x) dx.$$

Если $K_m = \mathcal{K}_m(0) < \infty$, то оператор L положительно определен и имеет компактный обратный оператор [3].

Пусть $\mathcal{F}$ — центрально-симметрическое и ограниченное подмножество в $L_{2,\omega}$, $\delta_k(\mathcal{F}) = \delta_k(\mathcal{F}, L_{2,\omega})$, $d_k(\mathcal{F}) = d_k(\mathcal{F}, L_{2,\omega})$ — линейный k-поперечник, соответственно k-поперечник по Колмогорову множества $\mathcal{F}$ [4, §1.5].

Запись $\omega \in A_1(\mathcal{B})$ будет означать, что

$$\sup_Q M^*\omega \leqslant c\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega,\ \forall Q \in \mathcal{B}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < m_1 < m_0$ *— целые,* $2m_1 > n$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)m_0 + \theta m_1$. *Пусть* L *— оператор, ассоциированный с формой* $a_{m_1}[\cdot,\cdot]$, $K_{m_i} < \infty$, $W_i = W_2^{m_i}(\rho, \upsilon_i)$, $(i = 0, 1)$. *Справедливы утверждения:*

a) Пусть s — нецелое, $W_s = (W_0, W_1)_{\theta,2}$, $\mathcal{F}_s = BW_s \cap \mathrm{L}^{-1}(BL_{2,\omega})$. Тогда

$$\sup_{k\geqslant 0}(k+1)^{s/n} d_k(\mathcal{F}_s) \leqslant c_1 K_0^{(1-\theta)m_0/n} K_1^{\theta m_1/n}.$$

b) Пусть $[H]_s = [W_0, W_1]_\theta$, $M_s = B[H]_s \cap \mathrm{L}^{-1}(BL_{2,\omega})$, $\omega \in A_1(\mathcal{B})$. Тогда

$$c_2^{-1}\lambda^{-n/m_0}\mathcal{K}_{m_0}(c_2\lambda) \leqslant \sum_{\delta(M_s)>\lambda} 1 \leqslant c_2\lambda^{-n/m_1}\mathcal{K}_{m_1}(c_2^{-1}\lambda).$$

Постоянные $c_l = c_l(\varkappa, n, p, m_0, m_1)$ $l = 1, 2$.

Литература

1. *Guzman M.* Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^n$. — Springer–Verlag, 1975.

2. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces. Differentiol Operators. — VEB Deutsch. Verlag. B., 1978.

3. *Айтенова М. С., Кусаинова Л.К.* Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложения весовых классов Соболева // Математический журнал. Алматы, **2**:1, 3–9, **2**:2 (2002), 7–14.

4. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — Издательство Московского университета, 1976.

О ПРОДОЛЖЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

З.А. Кусраева

zali13@mail.ru

УДК 517.9

Основной результат утверждает, что если E — сепарабельная решетка Фреше, а F — (локально телесная) топологическая векторная решетка с σ-интерполяционным свойством, любой положительный линейный оператор T_0 из мажорируемого подпространства $E_0 \subset E$ в F допускает продолжение до линейного положительного оператора T из E в F.

Ключевые слова: топологическая векторная решетка, сепарабельность, σ-интерполяционное свойство, мажорирующее подпространство, положительный оператор.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследования, проект N 18-31-00205

Кусраева Залина Анатольевна, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, РНОМЦ ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия); Zalina Kusraeva (Regional mathematical center of SFEDU, Rostov-on-Don, Russia; Southern Mathematical Institute VSC RAS)

On extension of positive operators

The main result: If E is a separable Frechet lattice, and F is a (locally solid) topological vector lattice with the σ-interpolation property, then any positive linear operator T_0 from a majorizing subspaces $E_0 \subset E$ to F can be extended to a linear continuous positive operator T from E to F.

Keywords: topological vector lattice, σ-interpolation property, majorizing subspace, separability, positive operator

Операторы из векторной решетки E в векторную решетку F обладают хорошими свойствами в том случае, когда F порядково полна. Так, например, классическая теорема Л. В. Канторовича утверждает, что если F порядково полна, то положительный линейный оператор, действующий из мажорирующего подпространства $E_0 \subset E$ в F, допускает продолжение на все E с сохранением линейности и положительности, см. [1]. Напомним, что подпространство E_0 называют *мажорируемым*, если для любого $x \in E$ найдется $y \in E_0$ такой, что $x \leqslant y$. В некоторых случаях возможно ослабить требование порядковой полноты F за счет предъявления к E некоторых дополнительных условий. В данной работе рассматривается именно такое взаимодействие условий сепарабельности E и σ-интерполяционного свойства F в задаче о продолжении положительных линейных операторов. Введем соответствующие понятия. Недостающие сведения можно найти в [1], [2], [3], [4]. Все рассматриваемые ниже векторные решетки считаются архимедовыми и вещественными.

Говорят, что архимедова векторная решетка F обладает *σ-интерполяционным свойством* (или *свойством Кантора*), если для любых последовательностей (x_n) и (z_n) в F, удовлетворяющих неравенству $x_n \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, существует $y \in F$ такой, что $x_n \leqslant y \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, см. [3; определение 1.1.7 (iv)] или [5; определение 146.6]. Эквивалентное условие состоит в том, что для любых двух счетных множество $U \subset F$ и $V \subset F$ таких, что $u \leqslant v$ для любых $u \in U$ и $v \in V$, существует элемент $y \in F$ для которого $u \leqslant y \leqslant v$, каковы бы ни были $u \in U$ и $v \in V$.

Пусть теперь векторная решетка E одновременно является топологическим векторным пространством. Назовем пространство E *топологической векторной решеткой*, если E *локально телесно,* т. е. если E обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из телесных множеств (см. [4]); используются также более громоздкие термины — *локально телесное пространство Рисса* [6] и *векторная решетка с локально телесной топологией линейного пространства* [2]). Напомним, что множество $A \subset E$ называют *телесным*, если $|y| \leqslant |x|$ и $x \in A$ влекут $y \in A$. *Решеткой Фреше* будем называть топологическую векторную решетку, если она метризуема и (метрически) полна. Иногда решетка Фреше предполагается локально выпуклой по определению (см., например, [4;стр. 296]), однако нам это дополнительное предположение не потребуется. Топологическое пространство называют *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Теперь имеются все ингредиенты, чтобы сформулировать основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть E — сепарабельная решетка Фреше, а F — локально телесная топологическая векторная решетка с σ-интерполяционным свойством. Пусть G — мажорируемое подпространство E. Тогда любой положительный линейный оператор T_0 из G в F допускает продолжение до линейного непрерывного положительного оператора T из E в F.*

Замечание 1. В доказательстве данной теоремы ключевой момент заключается во взаимодействии сепарабельности и σ-интерполяционного свойства. Эта идея впервые была реализована в работе Абрамовича и Викстеда [7] при доказательство одного варианта теоремы Хана — Банаха — Канторовича. Дальнейшее развитие представлено в обзоре Н. Данет и Р.-М. Данет [8], см. также [9], [10], [11].

Замечание 2. Теорема 1 усиливает результат Джинси Чена [9; теорема 7] в следующих направлениях. Во-первых, в [9] имеется дополнительное требование о том, что F обладает *свойством Фату*, т. е. в F имеется базис окрестностей нуля, состоящий из телесных порядково замкнутых множеств, см. [2; определение 23A]. Во-вторых, это условие возникло в связи со способом доказательства, использующим конструкцию *порядкового пополнения* векторной решетки, тогда как наши рассуждения опираются на метрическую полноту E и не нуждаются в порядковом пополнении. В третьих, доказательство из [9] завершается применением *трансфинитной индукциии* в форме леммы Цорна, в то время как мы ограничиваемся счетной формой аксиомы выбора. Таким образом, доказанная теорема выводится из аксиомы счетного выбора.

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators // Acad. Press Inc., London etc., 1985.—xvi+367 p.

2. *Fremlin D. H.* Topological Riesz Spaces and Measure Theory // Cambridge University Press, 1974.

3. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices // Berlin: Springer etc., 1991.—xvi+395 p.

4. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства // Москва: Мир, 1971.

5. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces // North Holland: Amsterdam etc., 1983.

6. *Aliprantis Ch. D., Burkinshaw O.* Locally Solid Riesz Spaces// Academic Press, New York, 1978. 7 *Abramovich Yu. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. // Quart. J. Math. Oxford, **44**:3 (1993), 257–270.

8 *Dănet N., Dănet R. M.* Extension Theorems and the Riesz Decomposition Property// Positivity, **7** (2003), 87–93.

9 *Chen J.* Extension theorems with the range space not necessarily Dedekind complete, Note di Matematica **26**:2 (2006), 153–160.

10 *Dănet N.* The Riesz decomposition property for the space of regular operators, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (2001), 539–542.

11 *Dănet R. M., Wong N. C.* Hahn-Banach-Kantorovich type theorems with the range space not necessarily (o)-complete // Taiwanese J. Math., **6**, (2002), 241–246.

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

А. А. Лобода
orion1312@yandex.ru

УДК 517.955.4

Для получения представлений решений используются аналитическое продолжение по параметру и равенство Парсеваля, аналитическое продолжение по аргументу и рандомизированная теорема Чернова, а также некоторые обобщения метода замены переменной.

Ключевые слова: Стохастическое уравнение Шрёдингера-Белавкина, стохастическое уравнение теплопроводности, аналитическое продолжение, формулы Фейнмана-Каца, интеграл Фейнмана

The methods for obtaining representations of solutions of Schrodinger's stochastic equations

To obtain representations of solutions, we use the analytic continuation with respect to the parameter and the Parseval's equality, analytical continuation of the argument and the randomized Chernov's theorem, and also some generalizations of the variable replacement method.

Keywords: Stochastic Schrodinger-Belavkin equation, stochastic heat conduction equation, analytic continuation, Feynman-Katz's formulas, Feynman's integral

Методы исследования детерминированных задач обобщаются на стохастический случай. В работе [1] доказана рандомизированная версия теоремы Чернова, позволяющая получить представление решения стохастического уравнения Шрёдингера рандомизированным интегралом Фейнмана путем построения фейнмановских аппроксимаций решения (формулы Фейнмана). Подробнее об этом методе см. [2].

В докладе применяется также аналитическое продолжение меры по параметру и равенство Парсеваля. Рассматривается задача Коши для евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера (уравнение теплопроводности):

$$d\Psi_\cdot(t)(q) = \left(\alpha \frac{d^2\Psi_\cdot(t)(q)}{dq^2} + \left(\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}|q|^2\right)\right) \times$$

$$\times \Psi(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q \Psi_\cdot(t)(q) dw(t), \Psi(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot), \tag{1}$$

где $\varphi_0(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^1),\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \mathrm{Re}\alpha \geqslant 0$.

Решение этой задачи Коши записывается в виде функционального интеграла (формула Фейнмана-Каца):

$$\Psi(t,\omega)(q) = \int_{C(0,t)} \exp\left\{\int_0^t \alpha V(q+\xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau\right\} \times$$

Лобода Артём Александрович, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Artyom Loboda (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$$\times \exp\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^t (q+\xi(\tau))dw(\tau)\right\}\varphi_0(q+\xi(t))w_{0t}^{\alpha}(d\xi). \qquad (2)$$

Формула доказывается с помощью формулы Ито, а сложность по сравнению с детерминированным случаем возникает из-за зависимости от времени белого шума (подробнее см. [3]). Затем используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть μ - это произведение меры Винера на $C(0,1)$ и функции ψ на $C(0,1)$, определяемой равенством $\psi(\xi) = e^{-\int_0^1 \lambda(\xi(t))^2 dt}$, $\lambda > 0$. Тогда преобразование Фурье $F\mu$ меры μ определяется равенством $F\mu(\eta) = e^{-\int_0^1\int_0^1 b(t,s)\eta(dt)\eta(ds)}$, где b - функция, зависящая от λ.*

Лемма требуется для вывода аналога представления Маслова-Чеботарева для задачи Коши (1). Далее применяется аналитическое продолжение по параметру и равенство Парсеваля. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Для решения $\Psi(t,\omega)(q)$ задачи Коши при $\alpha = i$ справедливо равенство*

$$\Psi(t,\omega)(q) = \int \exp\left\{\int_0^t iV(q+\xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau\right\}\times$$
$$\times \exp\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^t (q+\xi(\tau))dw(\tau)\right\}\varphi_0(q+\xi(\tau))F(d\xi),$$

где символ $\int ...F(d\xi)$ - это интеграл Фейнмана, определяемый как предел конечнократных интегралов (см. [4] и имеющиеся там ссылки).

Здесь V и φ_0 - преобразования Фурье счётно-аддитивных борелевских мер ν_1 и ν_2 на $\mathbb{R}^1$, $\lambda > 0$. Равенство Парсеваля используется для построения последовательности конечнократных интегралов, сходящейся к интегралу из теоремы 1.

Ещё один вариант аналитического продолжения впервые был предложен в работе [5]. Здесь речь идёт об аналитическом продолжении по аргументу (метод замены переменных). В докладе рассматривается представление решения задачи Коши (1) с помощью формулы Фейнмана-Каца (2). Если все функции, входящие в (1), допускают аналитическое продолжение в подходящую область, получается другое представление решения стохастического уравнения Шрёдингера функциональным интегралом. Для этого потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $\psi : [0,\infty) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ — решение уравнения $\psi(t)-\psi(0) = \int_0^t((\psi(\tau))'' - iV\psi(\tau))d\tau$, и для каждого $t \geqslant 0$ функция $x \mapsto \psi(t)(x)$ допускает аналитическое продолжение на область $\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{-i\alpha}, \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}),\ \rho > 0\}$, и продолжение по непрерывности на ее замыкание. Пусть функция $\varphi : [0,\infty) \to L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ ($L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ — комплексификация пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$) определяется так: $\varphi(t)(x) = \psi(t)(\sqrt{-i}x)$ $\quad(\sqrt{-i} = e^{-i\frac{\pi}{4}})$ Тогда функция φ - это решение уравнения $i\varphi(t) - i\varphi(0) = \int_0^t(-(\varphi(\tau))'' + V\varphi(\tau))d\tau$.*

Справедлива теорема (подробнее см. [6]).

Теорема 2. *Пусть* Ψ *- решение следующей задачи Коши*

$$d\Psi_\omega(t)(q) = \left(i\frac{d^2\Psi_\omega(t)(q)}{dq^2} + \left(iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right)\right) \times$$

$$\times \Psi_\omega(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi\omega(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot).$$

Тогда

$$\Psi(t,q_1) = \int \exp\left\{\int_0^t iV(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})d\tau + \int_0^t -i\frac{\lambda}{4}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})^2 d\tau\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\int_0^t i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})dB_\omega(\tau)\right\}\varphi_0(q_1 + \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_1(t))wf^{-1}(d\xi_1).$$

Здесь интеграл берётся по счётно-аддитивной мере, в отличие от представления решения из теоремы 1. Связь между двумя интегралами в докладе не рассматривается.

Метод замены переменной допускает некоторые обобщения. Рассматривается стохастическое уравнение Шредингера, где функции f определена на $(0,+\infty)$ и принимает значения в $L_2(\mathbb{R}^2)$ (это уравнение описывает квантовую динамику при непрерывном измерении координаты q_1).

$$if'(t) = (-\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2})f(t) + dW(t)\alpha q_1 f(t) \qquad (3)$$

Пусть f – решение уравнения (3). Пусть функция g принимает значения в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и определяется равенством $g(t)(q_1,q_2) = f(t)(\frac{q_1}{\sqrt{i}}, \sqrt{i}q_2)$. Тогда g-это решение уравнения теплопроводности

$$g'(t) = (+\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2})g(t) - idW(t)\alpha q_1 g(t) \qquad (4).$$

Если g – решение уравнения (4), то функция f, определенная равенством $f(t)(q_1,q_2) = g(t)(\sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}})$, будет решением уравнения (3).

Решение уравнения (4) можно представить формулой Фейнмана-Каца

$$g(t)(q_1,q_2) = \int_{C_{q_1,q_2}(0,t)} e^{\int_0^t -idW(\tau)\alpha\xi(\tau)d\tau}\omega(d\xi),$$

где $C_{q_1,q_2}(0,t)$ – пространство определенных на $[0,t]$ непрерывных функций, со значениями в $\mathbb{R}^2$, равных в нуле (q_1,q_2). Тогда функция f, определенная выше, - это решение уравнения (3).

Литература

1. *O. O. Obrezkov, O.G. Smolyanov, A. Truman.* The Generelized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula. // Doklady Mathematics, 2005. V. 71, N 1, P. 105-110.

2. *J. Gough, O.O. Obrezkov, O.G. Smolyanov.* SRandomized Hamiltonian Feynman integrals and Shcrödinger-Itô stochastic equations.// Izvestiya: Mathematics, 2005. V.69, N 6, P. 1081-1098.

3. *Лобода А. А.* Метод Ито доказательства формулы Фейнмана-Каца для евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера.//Дифференциальные уравнения, 2018. V. 54, N 4, P. 561–564.

4. *Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т.* Континуальные интегралы. — Второе издание М.: УРСС, 2015.

5. *Doss H.* ur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrődinger a Coefficients Analytiques.//Communications in Mathematical Physics, 1980. V. 73, P. 247-264.

6. *Лобода А. А.* Метод Досса для стохастического уравнения Шрёдингера — Белавкина.//Математические заметки, 2019. V. 106, N 2, в печати.

ОДНОМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин

levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru

УДК 517.9

Решается вопрос о связи представления преобразования Киприянова–Катрахова нечетных функций, определенных в $\mathbb{R}_1$ в виде преобразования Фурье специальных интегралов по прямым в $\mathbb{R}_2$.

Ключевые слова: преобразования Киприянова–Катрахова, оператор Бесселя, преобразования Фурье специальных интегралов.

One-dimensional Bessel transform of even and odd functions

The question of the connection between the representation of the Kipriyanov–Katrachov transformation of odd functions defined in $\mathbb{R}_1$ as the Fourier transform of special integrals over straight lines in $\mathbb{R}_2$.

Keywords: Kipriyanov–Katrachov transforms, Bessel operator, Fourier transforms of special integrals.

В работе [1] введено одно из преобразований Бесселя следующего вида

$$\mathcal{F}_B[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) - i\frac{x\xi}{\gamma+1} j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi) \right] x^{\gamma} dx, \qquad (1)$$

где $j_\nu(x) = \Gamma(\nu+1)J_\nu(x) \,/\, (x/2)^\nu$, $\nu > -1/2$, а J_ν функция Бесселя первого рода.

Ляхов Лев Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ВГУ (Воронеж, Россия); Lev Lyakhov (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Рощупкин Сергей Александрович, к. ф.-м. н, доцент кафедры математического моделирования и компьютерных технологий, ЕГУ имени И.А. Бунина (Елец, Россия); Sergey Roshchupkin (Bunin Yelets State University, Yelets, Russia)

В [2] введен следующий интегральный оператор

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int\limits_{\mathbb{R}_1}\mathcal{P}_x^\gamma\,\delta(p-x\xi)f(x)x^\gamma dx,\quad \mathbb{R}_1=\{-\infty<x<+\infty\}\,,\qquad(2)$$

называемый преобразованием Радона—Киприянова. Здесь $\mathcal{P}_x^\gamma$ оператор Пуассона [3].

$\mathcal{P}_x^\gamma f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(x\cos\alpha)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$, обладает свойством четности: если функция представлена в виде суммы четной и нечетно функций $f=f_{ev}+f_{od}$, то $\mathcal{P}_x^\gamma f(x)=\mathcal{P}_x^\gamma f_{ev}(x)$ и $\mathcal{P}_x^\gamma f(-x)=\mathfrak{P}_x^\gamma f(x)$.

Введем нечетный оператор Пуассона по формуле

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(x\cos\alpha)\cos\alpha\cdot\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha,$$

который обладает свойством $\mathcal{P}_x^\gamma(f_{ev}(x)+f_{od}(x))=\mathcal{P}_x^\gamma f_{od}(x)$ и $\mathcal{P}_x^\gamma f(-x)=-\mathcal{P}_x^\gamma f(x)$.

Полный оператор Пуассона определим равенством

$$\prod_x^\gamma f(x)=\mathfrak{P}_x^\gamma f(x)-i\mathcal{P}_x^\gamma f(x).\qquad(3)$$

При этом, если $f(x)$ четная функция, то $\prod_x^\gamma f(x)=\mathcal{P}_x^\gamma f(x)$ и если нечетная, то $\prod_x^\gamma f(x)=-i\mathfrak{P}_x^\gamma f(x)$. Пусть f—четная функция. Тогда, используя процедуру вращения $x\to\sqrt{z_1^2+z_2^2}$ и полагая $z_1=p$, можем записать

$$\mathcal{F}_B[f](\xi){=}2C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ip\xi}dp\int\limits_0^\infty f(\sqrt{p^2{+}z_2^2})z_2^{\gamma-1}dz_2{=}2C(\gamma)F_{p\to\xi}[R_{\gamma,ev}[f](p)](\xi),$$

где интеграл по прямой $\infty<p<\infty$ (от четной по p функции) представляет собой специальное *четное преобразование Радона*, обозначенное $R_{\gamma,ev}$.

Ясно что если четная функция f принадлежит классу основных функций Шварца, то

$$R_{\gamma,ev}[f](p)=\frac{2C(\gamma)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\langle p,\xi\rangle}F_B[f](p)dp=F_{\xi\to p}[F_{B,x\to\xi}[f](p)].$$

Если f нечетная функция, то имеет место другая формула

$$\mathcal{F}_B[f](\xi)=-2i\mathcal{F}_{B,od}[f](\xi)=-2\int\limits_0^\infty\left(\mathfrak{P}_x^\gamma e^{-ix\xi}\right)f(x)\,x^\gamma dx=$$

$$=2C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ip\xi}dp\int\limits_0^\infty f(\sqrt{p^2+z_2^2})\;\frac{p}{\sqrt{p^2+z_2^2}}\;z_2^{\gamma-1}dz_2\,dp=$$

$$= 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} [R_{\gamma,od}[f](p)\, dp,$$

где интеграл по прямой $\infty < p < \infty$ (от нечетной по p функции) представляет собой *специальное нечетное преобразование Радона*, обозначенное $R_{\gamma,ev}$.

Отсюда, для гладкой интегрируемой нечетной функции f, получим

$$R_{\gamma,od}[f](p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\, p}\ \mathcal{F}_{B,\xi\to p}\ [f](\xi)\ d\xi.$$

Полное специальное преобразование Радона определим в виде суммы четной и нечетной составляющих: $\mathfrak{R}_\gamma = \mathcal{R}_{\gamma,ev} + \mathcal{R}_{\gamma,od}$. Тогда

$$\mathcal{F}_B[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi}\ \mathfrak{R}_\gamma[f](p)\ dp\,, \quad \mathfrak{R}_\gamma[f](p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi}\ \mathcal{F}_B[f](\xi)\ d\xi\,.$$

Литература

1. *Киприянов И.А., Катрахов В.В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Матем. сборн. **104**:1 (1977), 49-68.

2. *Киприянов И.А., Ляхов Л.Н.* О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона // ДАН, **360**:2 (1998), 157-160.

3. *Левитан Б.М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // Успехи матем. наук, **VI**:2 (1951), 102-143.

О БАЗИСНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОПЕРАТОРУ ДИРАКА С РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.С. Макин

alexmakin@yandex.ru

УДК 517.984.52

На конечном интервале рассматривается спектральная задача для оператора Дирака с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями и комплекснозначным суммируемым потенциалом. Целью работы является нахождение условий, при которых система корневых функций образует обычный базис Рисса, а не базис Рисса со скобками

Ключевые слова: оператор Дирака, спектральное разложение, базисность

Макин Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МИРЭА (Москва, Россия); Alexander Makin (MIREA, Moscow, Russia)

On the Basis Property of Spectral Expansions of Dirac Operators with Regular Boundary Conditions

Spectral problem for the Dirac operator with regular but not strongly regular boundary conditions and complex-valued potential summable over a finite interval is considered. The purpose of this paper is to find conditions under which the root function system forms a usual Riesz basis rather than a Riesz basis with parentheses.

Keywords: Dirac operator, spectral expansion, basis property

На интервале $(0,\pi)$ рассмотрим систему Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

функции $P(x), Q(x) \in L_1(0,\pi)$, и двухточечными краевыми условиями

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0, \tag{2}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

коэффициенты a_{ij} – произвольные комплексные числа, причем строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через A_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы A. Краевые условия (2) называются регулярными, если

$$A_{14}A_{23} \neq 0 \tag{3}$$

и усиленно регулярными, если кроме (3) дополнительно выполняется условие

$$(A_{12} + A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} \neq 0.$$

Известно [1], что система корневых функций задачи (1), (2) с регулярными краевыми условиями полна в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0,\pi) \oplus L_2(0,\pi)$. В [2-5] было доказано, что в случае усиленно регулярных краевых условий система корневых функций задачи (1), (2) образует базис Рисса, а для регулярных, но не усиленно регулярных условий – базис Рисса со скобками.

Далее будем рассматривать только регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия, т.е. будем считать, что имеет место равенство

$$(A_{12} + A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} = 0.$$

Хорошо известно, что в этом случае спектр состоит из попарно сближающихся собственных значений $\lambda_n = \lambda_{k,1} = -\frac{i}{\pi}\ln z + 2k + \varepsilon_{k,1}$ при $n = 2k$, $\lambda_n = \lambda_{k,2} = -\frac{i}{\pi}\ln z + 2k + \varepsilon_{k,2}$ при $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_{k,j} \to 0$ $(j = 1,2)$ при

$k \to \pm\infty$, где $z = (A_{12} + A_{34})/(2A_{23})$. Если при всех k, таких что $|k| > k_0$, $\lambda_{k,1} = \lambda_{k,2}$, то спектр будем называть асимптотически кратным.

Следуя [6], регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия будем называть условиями периодического типа, если $A_{13} = A_{24} = 0, \quad A_{12} = A_{34}$. Условия периодического типа эквивалентны условиям, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $a \neq 0$. Если $a = -1$, то краевые условия (4) являются периодическими, а если $a = 1$, то антипериодическими.

Случай периодических и антипериодических краевых условий исследовался во многих работах. В частности, в [7] был построен пример потенциала $V(x)$, при котором соответствующее разложение по системе корневых функций расходится в пространстве $\mathbb{H}$.

Обозначим через Ψ множество пар функций $(P(x), Q(x)) \in L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)$ таких, что система корневых функций задачи (1), (4) образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$, $\overline{\Psi} = (L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)) \setminus \Psi$.

Теорема 1. *Множества Ψ и $\overline{\Psi}$ всюду плотны в $L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)$.*

Пусть краевые условия не являются периодическими, т.е. справедливо неравенство

$$|A_{13}| + |A_{24}| + |A_{12} - A_{34}| > 0. \tag{5}$$

Теорема 2. *При выполнении условия (5) система собственных и присоединенных функций задачи (1), (2) образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда спектр является асимптотически кратным.*

Литература

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.

2. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* The Dirac Operator with Complex-Valued Summable Potential // Math. Notes, **96**:5 (2014), 777-810.

3. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Современная математика. Фундаментальные направления, **58** (2015), 128-152.

4. *Lunyov A., Malamud M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators // J. Math. Anal. Appl., **441**:1 (2016), 57-103.

5. *Лунев А.А.,Маламуд М.М.* О базисности Рисса системы корневых векторов для (2×2) - системы типа Дирака // Докл. РАН, **458**:3, (2014) 255-260.

6. *Djakov P. , Mityagin B.* Unconditional Convergence of Spectral Decompositions of 1D Dirac operators with Regular Boundary Conditions // Indiana Univ. Math. J., **61**:1 (2012), 359-398.

7. *Джаков П., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // УМН, **61**:4 (2006), 77-182.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ НИЖНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

А.С. Мигаева, А.В. Перескоков

anastasiy_mi@mail.ru, pereskokov62@mail.ru

УДК 517.984, 517.958

Найдена асимптотика серии собственных значений и асимптотические собственные функции вблизи нижних границ резонансных спектральных кластеров, которые образуются около уровней энергии невозмущенного атома водорода.

Ключевые слова: спектральный кластер, квантовый метод усреднения, когерентное преобразование, ВКБ-приближение

Asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in electromagnetic field near the lower boundaries of spectral clusters

We obtain the asymptotics of the series of eigenvalues and the asymptotic eigenfunctions near the lower boundaries of the resonance spectral clusters formed near the energy levels of the unperturbed hydrogen atom.

Keywords: spectral cluster, quantum averaging method, coherent transformation, the WKB approximation

Рассмотрим задачу на собственные значения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ для нерелятивистского гамильтониана атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon E_1 x_1 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \tag{1}$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \qquad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3, а электрическое поле вдоль оси x_1 , $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Предположим, что напряженность электрического поля имеет вид $E_1 = \hbar e_1$, где $\hbar > 0$ - малый параметр, а число $e_1 > 0$ — любое. Кроме того, пусть параметры ε и $\hbar$ удовлетворяют условию $\varepsilon^{1/7} \ll \hbar$ и выполнено равенство $\hbar = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Задача об атоме водорода в электромагнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особенностью данной задачи

Мигаева Анастасия Сергеевна, студент, Национальный исследовательский университет “МЭИ” (Москва, Россия); Anastasia Migaeva (National Research University“MPEI”, Moscow, Russia)

Перескоков Александр Вадимович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Национальный исследовательский университет “МЭИ” (Москва, Россия); Alexander Pereskokov (National Research University «Higher School of Economics», National Research University“MPEI”, Moscow, Russia)

является наличие в гамильтониане одновременно и электрического, и магнитного полей, которые ортогональны друг другу. Это приводит к образованию около собственных значений невозмущенного атома водорода резонансных спектральных кластеров [1].

Особый интерес представляют состояния системы (1), отвечающие границам спектральных кластеров. В работе [2] на примере задачи об атоме водорода в магнитном поле был предложен общий метод построения асимптотики спектра вблизи границ кластеров, основанный на новом интегральном представлении асимптотических собственных функций. В данной работе этот метод будет применен к гамильтониану (1). Для нахождения асимптотики будут использованы неприводимые представления алгебры Карасева – Новиковой с квадратичными коммутационными соотношениями [3].

Произведем перенормировку спектральной задачи, затем дважды применим квантовый метод усреднения и выполним когерентное преобразование [1]. В результате приходим к однопараметрическому семейству дифференциальных уравнений Гойна

$$\frac{\overline{z}(\overline{z}^2+r\overline{z}+1)}{|m|^2}\frac{d^2\Phi}{d\overline{z}^2}-\frac{1}{|m|}\Big[(2\sqrt{a}-1-\frac{3}{|m|})\overline{z}^2+\frac{3(1-27e_1^4)}{f}(\sqrt{a}-$$

$$-1-\frac{2}{|m|})\overline{z}-1-\frac{1}{|m|}\Big]\frac{d\Phi}{d\overline{z}}+\Big[(\sqrt{a}-\frac{1}{|m|})(\sqrt{a}-1-\frac{1}{|m|})\overline{z}-$$

$$-\frac{1}{2f}(3(\sqrt{a}-1)(1+\frac{1}{|m|})-\frac{1}{|m|^2})+\frac{e_1^2}{f}(6-a+\frac{1}{|m|^2})+$$

$$+\frac{9e_1^4}{2f}(4a+9\sqrt{a}+3+\frac{9}{|m|}(\sqrt{a}-1)+\frac{5}{|m|^2})+\frac{n^4\xi}{4|m|^2}\Big]\Phi=0. \qquad (2)$$

Здесь числа

$$f=1+9{e_1}^2,\quad r=2-f+2/f,\quad a=n^2|m|^{-2},\quad m\in\mathbb{Z},\quad 5^{-1/2}n<|m|<n.$$

Уравнение (2) содержит параметр e_1, рост которого отвечает увеличению напряженности электрического поля, а также число ξ, которое определяет поправку к спектру. Собственными числами уравнения Гойна назовем такие значения параметра ξ, при которых это уравнение имеет полиномиальные решения в пространстве $\mathcal{P}[m,n]$ многочленов степени не выше $n-|m|-1$.

Далее для уравнения Гойна строится асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи в классе антиголоморфных функций с равными нулю характеристическими показателями в конечных особых точках и показателем $n-|m|-1$ в точке $\overline{z}=\infty$. Асимптотика искомого многочлена получается в результате проектирования асимптотического решения многоточечной спектральной задачи на пространство $\mathcal{P}[m,n]$.

Асимптотика решений уравнений Гойна (2) находится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений. При изменении параметра e_1 возникают различные случаи расположения особых точек и точек поворота на комплексной плоскости. Этим случаям отвечает различная глобальная структура линий Стокса.

Основным результатом данной работы является доказательство существования вблизи нижних границ спектральных кластеров серии собственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2}+\varepsilon m\sqrt{9e_1^2+1}+\frac{\varepsilon^2 n^2[n^2(1-14e_1^2-153e_1^4)+m^2(1+30e_1^2+27e_1^4)]}{2(9e_1^2+1)}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2 n^2(2k+1)}{\sqrt{9e_1^2+1}}\sqrt{n^2(-1+18e_1^2+81e_1^4)+m^2(5+18e_1^2-81e_1^4)}+$$

$$+O(\varepsilon^2 n^2)+O(\varepsilon^3 n^{10}), \qquad k=0,1,2,\dots. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon \to +0$, числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/7}$, $5^{-1/2}n < |m| < n$. Кроме того, параметр $e_1 > 0$, $e_1 \neq \sqrt{\sqrt{2}-1}/3$, $e_1 \neq \sqrt{\sqrt{6}+1}/3$.

Формула (3) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана – Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях. Отметим, что асимптотику (3), а также формулу для соответствующих асимптотических собственных функций получить стандартными методами, такими, как лучевой метод или теория комплексного ростка невозможно.

Литература

1. *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода // ТМФ, **142**:3 (2005), 530-555.

2. *Перескоков А.В.* Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров // Тр. ММО, **73**:2 (2012), 277-325.

3 *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ, **108**:3 (1996), 339-387.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СУММ НЕКОТОРЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

К.А. Мирзоев

mirzoev.karahan@mail.ru

УДК 517.927.25, 517.521.15, 517.589

Собственные значения и собственные функции некоторых операторов, порождённых симметрическими дифференциальными выражениями с постоянными коэффициентами и самосопряжёнными граничными условиями в пространстве квадратично интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, явно вычисляются, а резольвенты этих операторов являются интегральными операторами. Из спектральной теоремы следует, что для ядер резольвент этих операторов справедлива билинейная формула. Кроме того, каждое из этих ядер является функцией Грина некоторой самосопряжённой граничной задачи, и хорошо известна процедура её построения. Таким образом, для функций Грина этих задач справедливы формулы разложения в ряды по собственным функциям. В работе полученные этим способом тождества применяются для интегрального представления сумм некоторых степенных рядов и, в частности, для вычисления сумм некоторых сходящихся числовых рядов.

Ключевые слова: самосопряжённые краевые задачи, собственные значения и собственные функции, многочлены от операторов, функция Грина, интегральное представление степенных рядов.

About integral representation of the sums of certain power series

The eigenvalues and eigenfunctions of some operators generated by symmetric differential expressions with constant coefficients and self-adjoint boundary conditions in the space of Lebesgue-integrable functions on an interval are explicitly calculated, and the resolvents of these operators are integral operators. From the spectral theorem it follows that for the kernels of the resolvents of these operators the bilinear formula is valid. In addition, each of these kernels is a Green function of some self-adjoint boundary value problem, and the procedure for constructing it is well known. Thus, for the Green functions of these problems, the formulas of expansion in series in eigenfunctions are valid. In this paper, the identities obtained by this method are applied to the integral representation of the sums of some power series and, in particular, to the calculation of the sums of some convergent number series.

Keywords: self-adjoint boundary value problems, eigenvalues and eigenfunctions, polynomials of operators, Green function, integral representation of power series.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01215).

Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Karakhan Mirzoev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть S - самосопряжённый оператор, порождённый выражением

$$l_2[y] := -y''$$

и граничными условиями Дирихле

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$, и пусть $p_m(x)$ - многочлен степени $m \geqslant 1$ с вещественными коэффициентами. Рассмотрим оператор $p_m(S)$. Область определения $\mathcal{D}(p_m(S))$ этого оператора - это множество

$$\mathcal{D}(p_m(S)) = \{y|\ y^{(j-1)} \in AC[0,\pi];\ V_j(y) = 0,\ j = 1,\ldots,2m\}$$

где линейные формы $V_j(y)$ определяются равенствами

$$V_{j+1}(y) := y^{(2j)}(0),\ V_{j+m+1}(y) := y^{(2j)}(\pi), \quad j = 0,\ldots,m-1.$$

При этом если $y \in \mathcal{D}(p_m(S))$, то

$$p_m(S)y = p_m(-\frac{d^2}{dx^2})y =: l_{2m}[y].$$

Спектр $\sigma(p_m(S))$ этого оператора является дискретным и имеет вид

$$\sigma(p_m(S)) = \{\mu|\ \mu = \mu_{2m,k} := p_m(k^2),\ k = 1; 2; \ldots\}$$

при этом собственному значению $\mu_{2m,k}$ соответствует собственная функция

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx.$$

Предположим теперь, что число $\mu = 0$ является регулярной точкой оператора $p_m(S)$ (т.е. $0 \notin \sigma(p_m(S))$), и рассмотрим его резольвенту $R_\mu(p_m(S))$ при $\mu = 0$. Эта резольвента является интегральным оператором, и для его ядра $G(x,t)$ справедлива формула разложения по собственным функциям.

С другой стороны, ядро $G(x,t)$ является функцией Грина самосопряжённой граничной задачи

$$\begin{cases} l_{2m}[y] = f, \\ V_j(y) = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, 2m, \end{cases} \tag{1}$$

и хорошо известна процедура её построения через легко конструируемый определитель (см., напр., [1], часть вторая, гл. I, § 1.5), а именно,

$$G(x,t) = \frac{1}{\det D} \begin{vmatrix} g(x,t) & y_1(x) & \ldots & y_{2m}(x) \\ V_1(g) & & & \\ \vdots & & D & \\ \vdots & & & \\ V_{2m}(g) & & & \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где матрица $D := (V_s(y_l))_{s,l=1}^{2m}$, а значения форм $V_j(g)$ $(j = 1, \dots, 2m)$ находятся по формулам

$$V_{j+1}(g) = \left.\frac{\partial^{(2j)} g(x,t)}{\partial x^{(2j)}}\right|_{x=0}, \quad V_{j+m+1}(g) = \left.\frac{\partial^{(2j)} g(x,t)}{\partial x^{(2j)}}\right|_{x=\pi}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Таким образом, если многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1, 2, \dots$, то для функции Грина $G(x,t)$ задачи (1) справедливо тождество

$$G(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx \sin kt}{p_m(k^2)}.$$

Применяя далее это равенство и разложения в ряды Фурье функций

$$\ln(1 - 2z\cos 2x + z^2), \ \ \operatorname{arctg} \frac{2z \sin x}{1 - z^2}, \ \ \ln \frac{1 + 2z\sin x + z^2}{1 - 2z\sin x + z^2},$$

можно, доказать, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1, 2, \dots$ и пусть $G(x,t)$ — функция Грина, определяемая формулой (2). Тогда при $z \in [-1, 1]$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k p_m(k^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x,x) \ln(1 - 2z\cos 2x + z^2) dx,$$

а при $z \in (-1, 1]$ - равенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{p_m(k^2)} = 4 \int_0^{\pi/2} G(x,x) \frac{z^2 - z\cos 2x}{1 - 2z\cos 2x + z^2} dx.$$

Теорема 2. *Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1, 2, \dots$ и пусть $G(x,t)$ — функция Грина, определяемая формулой (2). Тогда при $z \in [-1, 1]$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1) p_m((2k-1)^2)} = \int_0^{\pi/2} G(x, \pi/2) \operatorname{arctg} \frac{2z \sin x}{1 - z^2} dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{p_m((2k-1)^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x, \pi/2) \frac{(z + z^3)\sin x}{1 - 2z^2 \cos 2x + z^4} dx$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1) p_m((2k-1)^2)} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} G(x, \pi/2) \ln \frac{1 + 2z\sin x + z^2}{1 - 2z\sin x + z^2} dx,$$

а при $z \in (-1, 1)$ *- равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{p_m((2k-1)^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x, \pi/2) \frac{(z - z^3)\sin x}{1 + 2z^2 \cos 2x + z^4} dx.$$

Доклад основан на совместных работах с Сафоновой Т.А. (см. [2] и [3]).

Литература

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1976.

2. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Докл. АН, **482**:5 (2018), 500-503.

3. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Математические заметки.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ МАРЦИНКЕВИЧА

Е.Д. Нурсултанов

er-nurs@yandex.ru

УДК 517.5

Приводятся новые интерполяционные теоремы для интегральных операторов, где условия ограничености операторов дается в терминах ядра оператора.

Ключевые слова: интерполяция, теорема Марцинкевича, интегральные операторы.

On the Marcinkiewicz interpolation theorem

New interpolation theorems for integral operators are given, where the conditions for the boundedness of operators are given in terms of the kernel of the operator.

Keywords: interpolation, Marcinkiewicz theorem, integral operators.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (проект № AP05132071).

Нурсултанов Ерлан Даутбекович, д.ф.-м.н., профессор, Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Астана, Казахстан); Erlan Nursultanov (Kazakhstan branch of Lomonosov Moscow State University, Astana, Kazakhstan)

Хорошо известна интерполяционная теорема Марцинкевича - Кальдерона.

Пусть $p_0 < p_1,\ \theta \in (0,1)$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Тогда для квазилинейного оператора T верна оценка

$$\|T\|_{L_p\to L_p} \leqslant C_{p_0,p_1,p,\tau} \left(\|T\|_{L_{p_0,\tau}\to L_{p_0,\infty}}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L_{p_1,\tau}\to L_{p_1,\infty}}\right)^{\theta},$$

где $0 < \tau \leqslant \infty$.

В докладе приводятся новые интерполяционные теоремы для интегральных операторов, где условия ограничености операторов дается в терминах ядра оператора. Данный подход позволяет расширить класс интегральных операторов для которых имеет место теоремы типа Марцинкевича - Кальдерона. Приводятся так же теоремы типа теорем экстраполяции для интегральных операторов.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

А.В. Павлов

a_pavlov@mirea.ru

УДК 517.518

Доказана регулярность двойного преобразования Лапласа в окрестности нуля для широкого класса функций. Из данного факта выводится перестановочность синус и косинус преобразований с точностью до знака.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, регулярность двойного преобразования Лапласа в окрестности нуля, перестановочность синус и косинус преобразований Фурье

The transform of Laplace and the transform of Fourier

The regularity of the double transform of Laplace is proved. From the fact we obtain, that the sine transform of Fourier from the cosine transform of Fourier is equal to the cosine transform from the sine transform of Fourier.

Keywords: the regularity of the transform of Laplace, transposition of the cosine and sine operators of Fourier

---

Павлов Андрей Валерианович, к.ф.-м.н., доцент, МИРЕА-РТУ (Москва, Россия); Andrey Valerianovich Pavlov (MIREA-RTU, Moscow, Russia)

Основным результатом является регулярность двойного преобразования Лапласа в окрестности нуля для некоторого класса функций (лемма 1 и теорема 1). Как следствие доказано совпадение по модулю применения операторов синус и косинус преобразований в разном порядке.

Результат, сформулированный в теореме 1, использует существенно другие методы [1-5] по сравнению с многочисленными работами И.И. Привалова на данную тему. В качестве введения автор приводит по его мнению интересный пример о неединственности разложения на элементарные дроби: $p[1/(p-1)-1/(p+1)] = 1/(p-1)+1/(p+1)$, $p/(p-1)^2 - p/(p^2-1) = 1/(p-1)^2 + 1/(p^2-1)$.

Мы будем использовать обозначения: $Lu(t)(\cdot)(x) = \int\limits_0^\infty e^{-xt}u(t)dt, x > 0$, $F^0_{\pm}u(t)(\cdot)(p) = \int\limits_0^\infty e^{\pm pit}u(t)dt$, $Cou(t)(\cdot)(x) = \int\limits_0^\infty \cos xtu(t)dt$, $Siu(v)(\cdot)(x) = \int\limits_0^\infty \sin xtu(t)dt, x \in (-\infty,\infty)$.

Нам понадобится условие Y1.

Условие Y1. Для функции $u(x)$ выполнено условие Y1, если функция $u(p)$ регулярна в области $\{|Re\,p| < a\} \bigcap \{|Im\,p| < a\}$ при некотором положительном $a > 0$, $u(0) = 0$, причем $\max\left[|u(p)|, |du(p)/dp|, |d^2u(p)/p^2|\right]|p^{2+\delta}| \to 0$, $p \to \infty$, $\delta > 0$, $\delta = const$; $Re\,u(s) = u(s)$, $s \in (-\infty,\infty)$.

Лемма 1. *Если для регулярной и однолистной в некоторой открытой окрестности нуля G функции $Q(p)$ имеет место равество*

$$l_1(p) + l_2(p) = L_1(p) + L_2(p) = Q(p), p = iy, y \in (0+\infty),$$

функции $l_1(p), L_1(p)$ регулярны в левой половине плоскости и непрерывны на мнимой границе, функции $l_2(p), L_2(p)$ регулярны в правой половине плоскости и непрерывны на мнимой границе, то равенство $l_1(p) + l_2(p) = L_1(p) + L_2(p) = Q(p)$ остается верным на всей мнимой оси внутри G.

Доказательство. Так как $l_1(p) + l_2(p)$ замыкается сама с собой после оборота по часовой стрелке вокруг нуля ввиду регурярности и однолистности $Q(p)$, и одновременно значения с верхней части мнимой оси совпадают с со значениями $L_1(p) + L_2(p)$ в правой полуплоскости, то значения в левой полуплоскости $l_1(p) + l_2(p)$ замыкаются со значениями $L_1(p) + L_2(p)$ на отрицательной части мнимой оси внутри G.

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Функция $LLu(x)(\cdot)(z)$, регулярна в области $\{z : |z| < \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$, если для $u(p)$ выпонено условие Y1.*

Теорема при $u_-(t) = u(t), t \in [0,+\infty), u_-(t) = -u(t), t \in (-\infty,0)$, вытекает из равенства

$$Q(y) = 2\pi u(y) = 2Re\,l_1(x) = l_1(p) + l_2(p) = L_1(p) + L_2(p) = 2Re\,L_1(y), p = iy,$$

$y \in [0,+\infty)$, при

$$l_1(p) = LF_+u(t)(\cdot)(p), l_2(p) = L_+F_-u(t)(\cdot)(p),$$

$$L_1(p) = LF_+u_-(t)(\cdot)(p), L_2(p) = L_+F_-u_-(t)(\cdot)(p).$$

Пользуясь леммой 1, получаем, что равенство выполнено при всех, в том числе отрицательных y, и пара $l_1(p) + l_2(p)$ является аналитическим продолжением пары $L_1(p) + L_2(p)$ через всю мнимую ось с одной половины плоскости на другую [3]. Мы воспользовались непрерывностью каждой из функций $l_1(p), l_2(p), L_1(p), L_2(p)$ на всей мнимой оси (с учетом формулы интегрирования по частям во внутренних интегралах, условия Y1 и равенства $u(0) = 0$). Регулярность данных функций в области их определения очевидна.

Ввиду общеизвестной регулярности [6] функций $l_1(p), L_1(p)$ при регулярной в окрестности всей действительной оси функции $u(p)$ получаем, что функции $l_2(p), L_2(p)$ тоже регулярны в некоторой открытой окрестности нуля.

Следовательно, сумма $l_1(p) + L_1(p) = 2LF^0_+u(t)(\cdot)(p) = 2(1/i)LLu(t)(\cdot)(ip)$ (после изменения порядка интегрирования) тоже регулярна в некоторой открытой окрестности нуля.

Теорема 1 доказана.

Как следствие теоремы 1 получаем, что во всей плоскости $l_1(p) - L_1(p) = L_2(p) - l_2(p) \equiv 0$. Ограниченность и стремление к нулю данных функций в области их определения, включая мнимую ось, очевидно следует из условия Y1. Как функции ,ограниченные во всей плоскости, данные разности равны нулевой константе [3].

Значения данной разности на мнимой оси равны $(SiCou(t)(\cdot)(p) + CoSiu(t)(\cdot)(p))i \equiv 0$, что доказывает в условиях теоремы 1 равенство по модулю применения операторов синус и косинус преобразований в разном порядке.

Литература

1. *Павлов А.В.* Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа // Мат. заметки, **90**:6 (2011), 792-796.

2. *Pavlov A.V.* About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier // Petrozavodsk: Issues of Analysis, **23**:1 (2016), 21 - 30.

3. *Lavrentiev M.A., Shabat B.V.* The methods of theory functions of complex variable. — Science: Moscow, 1987.

4. *Архипов Г.И., Чубариков В.Н.* О математических работах профессора А.А. Карацубы // Тр. МИАН, **218**, 1997, 7-19.

5. *Павлов А.В.* О перестановочности косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех., № 2 (2019), 46-49.

6. *Сорокин В.Н., Вшивцев А.С., Норин Н.В.* Решение спектральной задачи для уравнения Шредингера с вырожденным полиномиальным потенциалом четной степени// Теорет. и Мат. Физ., **109**:1 (1996), 107-123.

ПО СЛЕДАМ В.А. САДОВНИЧЕГО

А.С. Печенцов

pechentsovas@rambler.ru

УДК 517.927

В $L^2[0,+\infty)$ рассматривается оператор Штурма-Лиувилля, порождаемый выражением $l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + x + a\delta(x-b), \quad a > 0, \quad b > 0$, $\delta(x)$ — Дельта функция Дирака, и краевым условием $y(0) = 0$. Предъявлены формулы регуляризованных следов этого оператора.

Ключевые слова: собственные значения, асимптотика спектра, регуляризованные следы.

Following in the traces of V.A.Sadovnichy

We consider the Sturm-Liouville operator generated in the space $L^2[0,+\infty)$ by the expression $l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + x + a\delta(x-b), \quad a > 0, \quad b > 0,$ $\delta(x)$ is the Dirac delta function and the boundery condition $y(0) = 0$.We obtained the regularised trace formulas of this operator.

Keywords: the eigenvalues, asymptotics of the spectrum, regularized traces.

В 1971 году Виктор Антонович Садовничий [1] вычислил регуляризованные следы для сингулярного дифференциального оператора L в пространстве $L^2[0,\pi]$, заданного выражением

$$l(y) := -y''(x) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y(x) + p(x)y(x)$$

и краевым условием $y(\pi) = 0$. Функция $p(x)$ вещественнозначная, достаточно гладкая и финитная в окрестности нуля, $\nu \geqslant 1$.

Собственные значения λ_n оператора L имеют асимптотику:

$$\lambda_n = \left(n + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + c_0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx - \frac{1}{\pi^2}(\nu^2 - \frac{1}{4}).$$

Дзета-функция оператора L

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$$

Печенцов Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexandr Pechentsov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

регулярна в полуплоскости $\Re s > 1/2$ и имеет аналитическое продолжение в левую полуплоскость. Регуляризованный след оператора L порядка k, $k \in \mathbb{N}$, т. е. сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^k - A_k(n)\right),$$

($A_k(n)$-числа, определяемые асимптотикой собственных значений, обеспечивающие сходимость ряда), выражается через значение $Z(-k)$ аналитического продолжения дзета-функции оператора L.

Если положить $p(x) = 0$, то с.з. λ_n^0 являются нулями функции Бесселя $I_\nu(\sqrt{\lambda}\pi)$, для которых справедливо тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^0 - \left(n + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu}{12} - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8\pi^2}\left(4\nu^2 - 1\right)(\nu + 1)\,.$$

В настоящей работе, используя метод Лидского-Садовничего [2], получена формула регуляризованного следа порядка $-\sigma$, при $\Re\sigma > -1/2$, для оператора Эйри в пространстве $L^2[0, +\infty)$, возмущённого δ — функцией Дирака (теорема1). Получены тождества для нулей $-\lambda_n^0$ функции Эйри Ai ($\mathrm{Ai}(-\lambda_n^0) = 0$): при $m = 2, 3, ...,$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^0)^m} = \frac{1}{(m-1)!}\Big(\frac{\mathrm{Ai}'(-\lambda)}{\mathrm{Ai}(-\lambda)}\Big)_\lambda^{(m-1)}(0).$$

В частности при $m = 2$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^0)^2} = \frac{4\pi^2}{3^{1/3}\Gamma^4(1/3)},$$

где $\Gamma(z)$ — Гамма-функция Эйлера. В случае непрерывного спектра формула для следа разности двух сингулярных операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами, содержащими δ — функции Дирака получена в работе [3]. В $L^2[0, +\infty)$ рассматрим оператор $\mathcal{H}_{a,b}$ порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + x + a\delta(x - b)$$

и краевым условием Дирихле $y(0) = 0)$,a, b — положительные числа (см.[4,5,6]) Спектр оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ представляет собой множество корней целой функции [6]

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{Ai}(-\lambda)\Big(1 + \pi a \mathrm{Ai}(b - \lambda)\mathrm{Bi}(b - \lambda)\Big) - \pi a \mathrm{Ai}^2(b - \lambda)\mathrm{Bi}(-\lambda),$$

где Bi -другая функция Эйри, причём вронскиан функций Ai и Bi равен $\frac{1}{\pi}$. В комплексной плоскости λ сделаем разрез по отрицательной части действительной оси. Зафиксируем достаточно малое положительное число t_0 (

$0 < t_0 < \lambda_1^0$). Построим контур Γ, состоящий из интервала $(-\infty, -t_0)$, проходимого от $-\infty$ до $-t_0$, окружности $\gamma = t_0 \exp(i\phi)$, ϕ убывает от π до $-\pi$, интервала $(-\infty, -t_0)$, проходимого от $-t_0$ до $-\infty$. Рассмотрим интеграл

$$Z(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\sigma}\frac{\Delta'(\lambda)}{\Delta(\lambda)}d\lambda, \quad \text{где} \quad \lambda^{-\sigma} = \exp(-\sigma\ln\lambda).$$

Функцию $Z(\sigma)$ будем называть дзета-функцией оператора $\mathcal{H}_{a,b}$. При $\Re\sigma > 3/2$

$$Z(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-\sigma}.$$

Теорема 1. *При* $\Re\sigma > -1/2$ *справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{-\sigma} - (\lambda_n^0)^{-\sigma}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\sigma} d\ln\frac{\Delta(\lambda)}{\mathrm{Ai}(-\lambda)}.$$

Отметим также, что при $-1/2 < \Re\sigma < 0$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{-\sigma} - (\lambda_n^0)^{-\sigma}\right) = \frac{\sin(\sigma\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-\sigma} d\ln\frac{\Delta(-t)}{\mathrm{Ai(t)}}.$$

Литература

1. *Садовничий В.А.* О некоторых тождествах для собственных чисел сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Соотношения для нулей функций Бесселя // Вестник МГУ, Сер.1. Математика. Механика. 1971, 3, 77-86.

2. *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения, **1**:2 (1967), 52-59.

3. *Pechentsov A.* Trace of a Difference of Singular Sturm-Liouville Operators with a Potential Containing Dirac Functions // Russian Journal of Mathematical Physics, **20**:2 (2013), 230-238.

4. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, **66**:6 (1999), 897-912.

5. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами-распределениями // Труды московского математического общества, **64** (2003), 159-212.

6. *Печенцов А.С.* Распределение спектра одного сингулярного положительного оператора Штурма – Лиувилля, возмущенного δ-функцией Дирака// Дифференциальные уравнения, **53**:8 (2017), 1058-1063.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУРЬЕ – ЯКОБИ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

С.С. Платонов

ssplatonov@yandex.ru

УДК 517.518

Рассматриваются некоторые задачи теории приближения функций в весовых L_2-функциональных пространствах на полуоси $[0, +\infty)$ с использованием модулей гладкости, построенных на основе обобщенных сдвигов Якоби. Основным результатом является описание функциональных пространств типа Никольского в терминах наилучших приближений функциями с ограниченным спектром.

Ключевые слова: приближение функций, гармонический анализ Фурье – Якоби, обобщенные сдвиги Якоби, функциональные пространства типа Никольского

Fourier – Jacobi harmonic analysis and some problems of approximation

We study some problems of the approximation of functions in weighted L_2 function spaces on the half-axis $[0, +\infty)$ using the modulus of smoothness defined in terms of generalized Jacobi translations. We define function spaces of Nikol'skii type and describe them in terms of best approximations using as the approximation tool a class of functions with bounded spectrum.

Keywords: approximation of functions, Fourier – Jacobi harmonic analysis, generalized translations of Jacobi, function spaces of Nikol'skii type

Для любых значений параметров α, β ($\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$), функции Якоби $\Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$ образуют непрерывную ортогональную систему функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ относительно меры $(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}\,dt$. Гармонический анализ, связанный с этой ортогональной системой, называется гармоническим анализом Фурье – Якоби. Основными элементами гармонического анализа Фурье – Якоби являются дифференциальные операторы Якоби, интегральные преобразования Фурье – Якоби и обобщенные сдвиги Якоби. Многие задачи классического гармонического анализа имеют естественные аналоги для гармонического анализа Фурье – Якоби (см., например, [1]).

В [2] гармонический анализ Фурье – Якоби использовался для изучения некоторых задач теории приближения функций в весовых L_2 функциональных пространствах на полуоси $\mathbb{R}_+$. В качестве средства приближения использовался класс функций с ограниченным спектром, то есть класс функций, преобразования Фурье – Якоби которых являются функциями с

Платонов Сергей Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Россия); Sergei Platonov (Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia)

компактным носителем. Продолжая эту тематику, в настоящей работе определяются некоторые весовые функциональные пространства типа Никольского на $\mathbb{R}_+$ и получено их описание в терминах наилучших приближений функциями с ограниченным спектром.

Дифференциальный оператор Якоби определяется формулой

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\alpha,\beta} := \frac{d^2}{dt^2} + ((2\alpha+1)\operatorname{cth} t + (2\beta+1)\operatorname{th} t)\frac{d}{dt}. \tag{1}$$

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ функция Якоби $u(t) = \Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$ яляется единственным четным C^∞-решением дифференциального уравнения

$$\mathcal{B}u + (\lambda^2 + (\alpha+\beta+1)^2)u = 0$$

с начальным условием $u(0) = 1$.

Мы будем рассматривать функции на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ (все функции предполагаются комплекснозначными), но при необходимости считать, что функции продолжаются на всю ось $\mathbb{R}$ как четные функции.

Пусть $d\mu_{\alpha,\beta}(t) := (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}\,dt$ — мера на $\mathbb{R}_+$, $L^2_{\alpha,\beta} = L^2(\mathbb{R}_+, d\mu_{\alpha,\beta})$, $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ — норма в гильбертовом пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$. Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ — топологическое векторное пространство четных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ — пространство четных обобщенных функций на $\mathbb{R}$, то есть линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать $\langle f, \varphi\rangle$. Пространство $L^2_{\alpha,\beta}$ вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, если для $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ и $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ положить

$$\langle f, \varphi\rangle := \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\,\varphi(t)\,d\mu_{\alpha,\beta}(t).$$

Действие дифференциального оператора $\mathcal{B}$ расширяется с пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ на пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ по формуле

$$\langle \mathcal{B}f, \varphi\rangle := \langle f, \mathcal{B}\varphi\rangle, \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+).$$

В частности, действие оператора $\mathcal{B}$ определено для любой функции $f \in L^2_{\alpha,\beta}$, но при этом $\mathcal{B}f$ является, вообще говоря, обобщенной функцией.

Преобразование Фурье – Якоби $\mathcal{F} : f(t) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$, $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$, определяется формулой

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)\,\Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,d\mu_{\alpha,\beta}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

для функций $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ и по непрерывности продолжается на гильбертово пространство $L^2_{\alpha,\beta}$.

Функция $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ называется функцией с ограниченным спектром порядка $\sigma > 0$, если $\widehat{f}(\lambda) = 0$ при $\lambda > \sigma$. Множество всех таких функций обозначим $\mathcal{I}_\sigma^{(\alpha,\beta)}$. Функции из линейных подпространств $\mathcal{I}_\sigma^{(\alpha,\beta)} \subset L^2_{\alpha,\beta}$ являются естественным средством для построения теории приближений в гильбертовом пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$.

Операторы обобщенного сдвига Якоби T^s, $s \in \mathbb{R}_+$, в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$ определяются формулой

$$\mathcal{F}(T^s f)(\lambda) = \Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(s)\,\mathcal{F}(f)(\lambda),$$

где $f \in L^2_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье – Якоби, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Для любой функции $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ обобщенный модуль гладкости $\omega_k^{(\alpha,\beta)}(f;\delta)_2$ порядка k, $k \in \mathbb{N}$, определяется формулой

$$\omega_k^{\alpha,\beta)}(f;\delta)_2 := \sup_{0<h\leqslant\delta} \|(I-T^h)^k f\|_{\alpha,\beta}, \quad \delta > 0,$$

где I — тождественный оператор, $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ — норма в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$.

Наилучшее приближение функции $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ функциями из подпространства $\mathcal{I}_\sigma^{(\alpha,\beta)}$ определяется как

$$E_\sigma^{(\alpha,\beta)}(f)_2 := \inf\{\|f-g\|_{\alpha,\beta} : g \in \mathcal{I}_\sigma^{(\alpha,\beta)}\}.$$

Пусть $r > 0$ — действительное число и пусть k, s — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $2k > r - 2s > 0$. Обозначим через $H_2^{r(\alpha,\beta)}$ множество всех функций $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ таких, что $\mathcal{B}f, \mathcal{B}^2 f, \ldots, \mathcal{B}^s f \in L^2_{\alpha,\beta}$ и для некоторого числа $A_f > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_k^{(\alpha,\beta)}(\mathcal{B}^s f;\delta)_2 \leqslant A_f \delta^{r-2s}, \qquad \delta > 0.$$

Для $f \in H_2^{r(\alpha,\beta)}$ определим полунорму

$$h_2^{r(\alpha,\beta)}(f) := \sup_{\delta>0} \frac{\omega_k^{(\alpha,\beta)}(\mathcal{B}^s f;\delta)_2}{\delta^{r-2s}}.$$

Множество $H_2^{r(\alpha,\beta)}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H_2^{r(\alpha,\beta)}} := \|f\|_{\alpha,\beta} + h_2^{r(\alpha,\beta)}(f).$$

В следующей теореме пространство $H_2^{r(\alpha,\beta)}$ описывается в терминах наилучших приближений функциями из $\mathcal{I}_\sigma^{r(\alpha,\beta)}$.

Теорема 1. *Если $f \in H_2^{r(\alpha,\beta)}$, то для $\sigma \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$E_\sigma^{(\alpha,\beta)}(f)_2 \leqslant c_1 \,\frac{h_2^{r(\alpha,\beta)}(f)}{\sigma^r}.$$

Обратно, если $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ и для $\sigma \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$E_\sigma^{(\alpha,\beta)}(f)_2 \leqslant \frac{A}{\sigma^r},$$

где A — положительное число, которое не зависит от σ (но зависит от f), то $f \in H_2^{r(\alpha,\beta)}$ и

$$\|f\|_{H_2^{r(\alpha,\beta)}} \leqslant c_2\,(\|f\|_{\alpha,\beta} + A).$$

Здесь c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные, которые не зависят от f, но могут зависеть от k, r, s, α, β.

Литература

1. *Koornwinder T.H.* Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // R. A. Askey at all (eds), Special functions: Group Theoretical Aspects and Applications. — D. Reidel Publ. Comp., 1984 — 1-85.

2. *Platonov S.S.* Fourier-Jacobi harmonic analysis and some problems of approximation of functions on the half-axis in L_2 metric: Jackson's type direct theorems // Integral Transforms Spec. Funct., **30**:4 (2019), 264-281.

ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В.Е. Подольский

wpve@yandex.ru

УДК 517.984

Доказана суммируемость по Абелю формулы регуляризованного следа для возмущения гармонического осциллятора оператором умножения на ограниченную функцию из пересечения $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: спектральная теория, регуляризованный след

Regularized trace formula for perturbed harmonic oscillator

Abel summability proved for regularized trace formula for perturbing a harmonic oscillator by a multiplication operator on a bounded function from the intersection of $L_1(\mathbb{R})$ and $L_2(\mathbb{R})$.

Keywords: spectral theory, regularized trace

Подольский Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Podolskii (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Доклад посвящен обсуждению одной формулы теории регуляризованных следов для операторов с резольвентой из класса Гильберта-Шмидта и приложению этой формулы к возмущенному гармоническому осциллятору.

Теорема 1. *Пусть оператор A самосопряженный, дискретный, полуограниченный снизу и его резольвента принадлежит классу Гильберта-Шмидта. Оператор B ограничен. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные вектора оператора A, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его собственные числа, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $A+B$. Если при некотором $0<\beta<1$ выполнено*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2\beta-3} < +\infty$$

и

$$\sum_{\lambda_k=\left[\lambda_n+\lambda_n^{\beta}\right]+1}^{+\infty} |(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)| = O\left(\lambda_n^{2\beta-2}\right).$$

то верна формула

$$\lim_{t\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\Bigg(\mu_n-\lambda_n-(B\varphi_n,\varphi_n)- -\frac{t}{2}\left(\left(B^2\varphi_n,\varphi_n\right)-(\mu_n-\lambda_n)^2\right)\Bigg)=0.$$

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированные собственные функции оператора гармонического осциллятора*

$$-y''+x^2y,$$

действующего в $L_2(\mathbb{R})$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его собственные числа, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа возмущения гармонического осциллятора оператором умножения на ограниченную функцию $q(x)$. Если $q(x)\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, то верна следующая формула:

$$\lim_{t\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\Bigg(\mu_n-\lambda_n-(B\varphi_n,\varphi_n)\Bigg)=0. \tag{1}$$

При доказательстве теоремы 2 использованы оценки для собственных функций гармонического осциллятора [1], и некоторые оценки для спектра возмущенного гармонического осциллятора [2]. Отметим, что из результатов [2] немедленно следует, что если в условиях теоремы 2 считать дополнительно выполненным условие $q(x)\in L_2(\mathbb{R},(|x|+1)^2dx)$, то формула (1) выполнена без суммирования, указанный ряд будет абсолютно сходящимся.

Литература

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. ГИФМЛ, Москва, 1962.

2. *Челкак Д. С.* Асимптотика спектральных данных гармонического осциллятора, возмущенного потенциалом с конечной энергией. // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2003, т. 303, с. 223-271.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д.М. Поляков
DmitryPolyakow@mail.ru

УДК 517.927

Рассматривается несамосопряженный оператор четвертого порядка с матричными коэффициентами. Область определения этого оператора задается квазипериодическими краевыми условиями. Используя метод подобных операторов, для рассматриваемого оператора получены асимптотические формулы для собственных значений.

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, матричные коэффициенты, асимптотика собственных значений

Spectral asymptotics for fourth-order differential operator with matrix coefficients

We consider non-self-adjoint fourth-order operator with matrix coefficients. The domain of this operator is defined by quasiperiodic boundary conditions. Using the method of similar operators, we get asymptotic formulas of eigenvalues for this operator.

Keywords: fourth-order differential operator, matrix coefficients, asymptotic of eigenvalues

Через $L_2^k[0,1]$ обозначим пространство $L_2^k[0,1] = L_2([0,1],\mathbb{C}^k) = L_2[0,1]\times \cdots \times L_2[0,1]$ (k раз) со скалярным произведением

$$(f,g) = \sum_{j=1}^{k} \int_0^1 f_j(t)\overline{g_j(t)}\,dt,$$

где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k) \in L_2^k[0,1]$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k) \in L_2^k[0,1]$.

Целью настоящего доклада является изучение асимптотических формул для собственных значений несамосопряженного оператора четвертого порядка $L_\theta : D(L_\theta) \subset L_2^k[0,1] \to L_2^k[0,1]$, который определяется дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - \mathfrak{A}(t)y'' - \mathfrak{B}(t)y,$$

где $\mathfrak{A}(t) = (a_{pj}(t))_{p,j=1}^k$ и $\mathfrak{B}(t) = (b_{pj}(t))_{p,j=1}^k$ — матрицы размера $k\times k$, причем элементы этих матриц a_{pj} и b_{pj} принадлежат $L_2[0,1]$. Область определения $D(L_\theta) = \{y \in W_2^4([0,1],\mathbb{C}^k)\} \subset L_2^k[0,1]$ оператора L_θ задается квазипериодическими краевыми условиями $y^{(j)}(1) = e^{i\pi\theta}y^{(j)}(0)$, $j = 0,1,2,3$, где $\theta \in (0,2)$, $\theta \neq 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых — кандидатов наук (МК-1056.2018.1, соглашение № 075-02-2018-433).

Поляков Дмитрий Михайлович, к.ф.-м.н., Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН (Владикавказ, Россия); Dmitry Polyakov (Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of RAS, Vladikavkaz, Russia)

Через $\mathfrak{A}_0$ обозначим матрицу $\mathfrak{A}_0 = (a_{0,pj})_{p,j=1}^k$, где $a_{0,pj} = \int_0^1 a_{pj}(t)\,dt$. Всюду далее будем предполагать, что матрица $\mathfrak{A}_0$ подобна диагональной матрице.

Для изучения асимптотических формул для собственных значений дифференциальных операторов высших порядков с матричными коэффициентами применяются различные методы (см. [1] – [3]). В настоящей работе будет использоваться несколько иная техника. Эта техника основывается на работах [4] и [5]. Ее применение позволит уточнить, а в ряде случаев улучшить, известную до настоящего времени асимптотику собственных значений. Прежде чем сформулировать полученные результаты, дадим необходимое определение.

Определение. *Для любой ограниченной матрицы A, действующей в $\mathbb{C}^k$, ее среднее арифметическое собственных значений определяется как*

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j,$$

где λ_j — собственные значения матрицы A.

Теорема 1. *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, для которого спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup (\cup_{|n|\geqslant m+1}\sigma_n), \tag{1}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество и множества σ_n, $|n| \geqslant m+1$, не более, чем k-точечны. Тогда для среднего арифметического собственных значений $\widehat{\lambda}_n$ оператора L_θ справедливо следующее асимптотическое представление

$$\widehat{\lambda}_n = \pi^4(2n+\theta)^4 + \frac{\pi^2(2n+\theta)^2}{k}\sum_{j=1}^{k}\mu_j + \mathcal{O}(|n|), \quad |n| \geqslant m+1,$$

где μ_j, $j = 1,\dots,k$, — собственные значения матрицы $\mathfrak{A}_0$.

В связи с тем, что собственные значения матрицы $\mathfrak{A}_0$ могут быть кратными, то в данном случае мы можем говорить только о среднем арифметическом собственных значений. Однако, если сделать некоторые дополнительные предположения, то можно выписать и асимптотику собственных значений.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 собственные значения μ_j, $j = 1,\dots,k$, матрицы $\mathfrak{A}_0$ являются простыми, то имеет место следующая асимптотика*

$$\widetilde{\lambda}_{n,j} = \pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2\mu_j + \mathcal{O}(|n|), \quad j = 1,\dots,k, \quad |n| \geqslant m+1.$$

Асимптотические формулы, полученные в теоремах 1 и 2, уточняют соответствующие результаты из [3, Theorems 1,2] в части остаточного члена.

Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев. Пусть матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ оператора L_θ имеют размер 1×1 и состоят каждая из одного элемента a и b соответственно, причем $a, b \in L_2[0,1]$. Тогда имеет место следующая

Теорема 3. *Оператор L_θ является оператором с дискретным спектром и существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что его спектр представим в виде (1). Собственные значения $\widetilde{\lambda}_{n,1}$, $|n| \geqslant m+1$, допускают следующую асимптотику*

$$\widetilde{\lambda}_{n,1} = \pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 - \\ - (2n+\theta)^2 \sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{n\}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s}a_{s-n}}{(2s+\theta)^4-(2n+\theta)^4} + \frac{|n|\gamma_n}{(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2},$$

где (γ_n) — некоторая суммируемая последовательность и a_s, $s \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции a.

Отметим, что применяемая техника позволяет получить асимптотику собственных значений также и в периодическом или антипериодическом случае. Пусть $\theta \in \{0,1\}$ и $k=1$. Тогда матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ вновь размера 1×1 с элементами a, b из $L_2[0,1]$. Исследование спектральных свойств рассматриваемого оператора L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, представляет самостоятельный интерес (см. [5] и [6] и используемую там литературу). Отметим, что в [6] изучался оператор произвольного порядка.

По сравнению с [5, Теорема 1] и [6, Theorems 1, 2], в следующей теореме уточняется вид второго приближения, а также формула остаточного члена.

Теорема 4. *Оператор L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, является оператором с дискретным спектром и существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что его спектр представим в виде (1). Причем $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек не превосходящим $2m+1$, а множество σ_n определяется как $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_n^+\}\cup\{\widetilde{\lambda}_n^-\}$. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^\mp$, $n \geqslant m+1$, оператора L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, допускают следующее асимптотическое представление*

$$\widetilde{\lambda}_n^\mp = \pi^4(2n+\theta)^4 - 2(2n+\theta)^2 \sum_{s=1, s\neq n}^{\infty} \frac{(2s+\theta)^2(a_{n-s}a_{s-n} + a_{n+s+\theta}a_{-n-s-\theta})}{(2s+\theta)^4-(2n+\theta)^4} \mp \\ \mp (2n+\theta)^2\Big(\pi^2 a_{-2n-\theta} - 2\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq n, s\neq -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{s-n}a_{-n-s-\theta}}{(2s+\theta)^4-(2n+\theta)^4}\Big)^{1/2}\cdot \\ \cdot\Big(\pi^2 a_{2n+\theta} - 2\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq n, s\neq -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s}a_{n+s+\theta}}{(2s+\theta)^4-(2n+\theta)^4}\Big)^{1/2} + \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 + n\widetilde{\gamma}_n,$$

где $(\widetilde{\gamma}_n)$ — некоторая суммируемая последовательность.

Кроме того, из теорем 3 и 4 легко получить асимптотику собственных значений оператора L_θ, $\theta \in [0,2)$, в случае когда функции a и b являются гладкими или вещественными. Эти результаты улучшают известные ранее (см. [5, Теорема 2]).

Литература

1. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И.Г. Петровского, 9 (1983), 190-229.

2. *Лужина Л.М.* Регулярные спектральные задачи в пространствах вектор-функций // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. мех., 1 (1988), 31-35.

3. *Veliev O.A.* Unifrom convergence of the spectral expansion for a differential operator with periodic matrix coefficients // Bound. Value Probl., (2008), 2008: 628973.

4. *Баскаков А.Г., Поляков Д.М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Матем. сб., **208**:1 (2017), 3-47.

5. *Поляков Д.М.* Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями // Алгебра и анализ, **27**:5 (2015), 117-152.

6. *Veliev O.A.* On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions // Israel J. Math., **176** (2010), 195-207.

МЕРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ С НЕОБЫЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В.В. Рыжиков

vryzh@mail.ru

УДК 517.9

Существует сохраняющий меру поток на пространстве Лебега, спектральная мера σ которого обладает следующими свойствами:

(i) она непрерывна и сингулярна относительно меры Лебега на группе $\mathbf{R}$;

(ii) для некоторого множества направлений в $\mathbf{R^2}$ проекции меры $\sigma \times \sigma$ на фиксированную прямую вдоль этих направлений являются $(1-1)$-отображениями, а образы меры суть сингулярные меры на прямой;

(iii) для бесконечного множества направлений в $\mathbf{R^2}$ проекции меры $\sigma \times \sigma$ на прямую являются $(\infty - 1)$-отображениями, причем образы меры $\sigma \times \sigma$ эквивалентны мере Лебега на прямой.

Ключевые слова: функциональный анализ, спектральные меры унитарных потоков

Measures of the dynamical origin with unusual properties

There is a measure-preserving flow on Lebesgue space whose spectral measure σ has the following properties:

(i) it is continuous and singular with respect to the Lebesgue measure on the group $\mathbf{R}$;

(ii) for some set of directions in $\mathbf{R^2}$ the projections of the measure $\sigma \times \sigma$ onto a fixed line along these directions are $(1-1)$-maps, and the images of the measure are singular measures on the line;

(iii) for another uncountable set of directions in $\mathbf{R^2}$ the projections of the measure $\sigma \times \sigma$ along these directions onto this line are $(\infty - 1)$-maps, and the images of the measure $\sigma \times \sigma$ are equivalent to the Lebesgue measure.

Keywords: functional analysis, spectral measures of unitary flows

---

Рыжиков Валерий Валентинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Valery Ryzhikov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Эргодическая теория является одним из источников разнообразных примеров унитарных представлений. Предлагаются унитарные потоки динамического происхождения, обладающие следующими свойствами.

Теорема 1. *Для любого $N \geqslant 2$ найдется унитарный поток T_t такой, что при $1 \leqslant m < n \leqslant N$ спектр тензорного произведения $T_{mt} \otimes T_{nt}$ простой и сингулярный, а при $n > N$ спектр произведения $T_t \otimes T_{nt}$ является счетнократным лебеговским.*

Спектральная мера σ такого потока при фиксированном N обладает свойствами:

(i) мера σ непрерывна и сингулярна относительно меры Лебега на группе $\mathbf{R}$, ее носитель есть $\mathbf{R}$;

(ii) проекции меры $\sigma \times \sigma$ вдоль векторов (m, n), $1 \leqslant m < n \leqslant N$, на диагональ в $\mathbf{R^2}$ являются $(1-1)$-отбражениями, а образы этой меры суть сингулярные меры на прямой;

(iii) для бесконечного множества направлений в $\mathbf{R^2}$ проекции меры $\sigma \times \sigma$ на диагональ являются $(\infty - 1)$-отбражениями, причем образы меры $\sigma \times \sigma$ эквивалентны мере Лебега на прямой.

Кроме того спектральные меры предлагаемых потоков взаимно сингулярны со своими сверточными степенями (примеры таких потоков появились в [1]). Построение эргодических потоков, обеспечивающих нужные эффекты, является модификаций конструкций автоморфизмов из работы [2]. Используя технику "вынуждения перемешивания"[3], можно добиться того, что спектральная мера потока обладает всеми упомянутыми свойствами и при этом является мерой сингулярной мерой, преобразование Фурье которой стремится к нулю на бесконечности. Напомним, что сингулярная мера на окружности, у которой коэффициенты Фурье стремятся к нулю, предложена в [4] (автор признателен А.А. Приходько, обратившего его внимание на этот факт).

Литература

1. *Степин А.М.* Спектральные свойства типичных динамических систем // Изв. АН СССР, Сер. матем.,**50**:4 (1986), 801-834.

2. *Ryzhikov V.V.* Spectral properties and approximations of joinings for infinite rank-one actions // ArXiv e-prints, arXiv:1902.03215 (2019).

3. *Рыжиков В.В.* Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1 // Матем. сб., **198**:5 (2007), 137-159.

4. *Menshov D.E.* Sur l'unicité du développement trigonométrique // C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A-B, **163** (1916), 433-436.

КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.С. Рыхлов

RykhlovVS@yandex.ru

УДК 517.927.25

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается класс не исследованных ранее нерегулярных пучков дифференциальных операторов n-го порядка, порожденных однородным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями, l из которых берутся в нуле, а $n-l$ в единице. Предполагается, что характеристики пучка лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах k и $n-k$. Исследуются достаточные условия кратной полноты в пространстве $L_2[0,1]$ корневых функций пучков этого класса. В частности, показано, что при условии $n-k<l<k$ имеет место $(n-k)$-кратная полнота с возможным конечным дефектом.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, распадающиеся краевые условия, корневые функции, кратная полнота корневых функций

Multiple completeness of root functions of non-regular pencils of differential operators with constant coefficients and separating boundary conditions

In the space $L_2[0,1]$ we consider a class of not previously investigated irregular pencils of differential operators of the n-th order generated by a homogeneous differential expression with constant coefficients and separating boundary conditions, l of which are taken at the end of 0, and $n-l$ at the end of 1. It is assumed that the characteristics of the pencils lie on two rays emanating from the origin in the quantities k and $n-k$. Sufficient conditions for multiple completeness the space $L_2[0,1]$ of root functions of the pencils from this class are investigated. In particular it is shown that under the condition $n-k<l<k$ $(n-k)$-fold completeness the system of root functions with possible a finite defect is took place.

Keywords: pencil of ordinary differential operators, separating boundary conditions, root functions, multiple completeness the system of root functions

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением n-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)},\ p_{js}\in\mathbb{C},\quad p_{n0}\neq 0,\quad p_{0n}\neq 0, \tag{1}$$

Рыхлов Виктор Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия); Victor Rykhlov (Chernyshevsky State University of Saratov, Saratov, Russia)

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0,\ i=\overline{1,l},\ \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0,\ i=\overline{l+1,n}, \quad (2)$$

где λ, α_{ijs}, $\beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, определения корневых функций (к.ф.), m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n$) полноты к.ф., характеристического определителя, характеристического многоугольника и т. п. из [1].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная полнота системы к.ф. этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$. Историю вопроса можно посмотреть, например, в [1–4].

В [2] рассмотрен случай, когда характеристики пучка расположены на двух лучах, исходящих из начала. В теореме 1 из [2] получены достаточные условия кратной полноты системы к.ф. для вроде бы более общего класса пучков вида (1)–(2) в случае полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий (то есть, когда не только $2l \geqslant n$, но и $2l < n$ в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$). Но, несмотря на то, что краевые условия (2) являются частным случаем полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий из [2], тем не менее, теорема 1 о полноте из [2] не может быть непосредственно применена к случаю распадающихся краевых условий (2), так как не все параметры в формулировке теоремы 1 из [2] определены для распадающихся краевых условий (2).

Видоизменив доказательство теоремы 1 из [2], удалось получить достаточные условия кратной полноты и в случае распадающихся краевых условий (см. [4]), но, к сожалению, не во всех случаях. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем необходимые обозначения.

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ характеристического уравнения (характеристики) $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала, в количествах k и $n-k$ ($0 \leqslant k \leqslant n$). Не нарушая общности можно считать, что корни расположены следующим образом при $|\varphi| < \pi/2$:

$$\omega_n e^{i\varphi} < \omega_{n-1} e^{i\varphi} < \cdots < \omega_{k+1} e^{i\varphi} < 0 < \omega_1 e^{-i\varphi} < \omega_2 e^{-i\varphi} < \cdots < \omega_k e^{-i\varphi}, \quad (3)$$

В случае одного луча ($k=n$ или $k=0$) считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$.

Обозначим $[q]_+ = \max\{0,q\}$, $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[p,q]_+ = \max\{p,q\}$ и положим при $j=\overline{1,n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s}\omega_j^{\nu},\ i=\overline{1,l}; \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s}\omega_j^{\nu},\ i=\overline{l+1,n}.$$

Используя эти обозначения, введем условия:

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \neq 0, \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} \neq 0 \,\text{при}\, n-k \leqslant l; \quad (4)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \neq 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} \neq 0 \text{ при } n-k \geqslant l; \quad (5)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} \neq 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} \neq 0,\ \text{при } k \leqslant l; \tag{6}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \neq 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} \neq 0 \text{ при } k \geqslant l. \tag{7}$$

Отметим, что в граничном случае $n-k=l$ условия (4) и (5) совпадают. Аналогично, в граничном случае $k=l$ совпадают условия (6) и (7).

Теорема 1. *Если $[k,n-k]_+ \leqslant l$ и выполняются условия (4) и (6), то при $m \leqslant 2(n-l)$ система к.ф. пучка $L(\lambda)$ m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным дефектом, не превышающим числа $d_1 := \sum\limits_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$.*

Теорема 2. *Если $[k,n-k]_- \geqslant l$ и выполняются условия (5) и (7), то при $m \leqslant 2l$ система к.ф. пучка $L(\lambda)$ m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным дефектом, не превышающим числа $d_2 := \sum\limits_{i=1}^{l} [m-1-\varkappa_i]_+$.*

Граничный случай в теоремах 1 и 2 сформулируем в отдельной теореме. Это соответствует случаю регулярного пучка.

Теорема 3. *Если $[k,n-k]_- = [k,n-k]_+ = l$ или, что эквивалентно, $n=2k=2l$ и выполняются условия (4) (или (5)) и (6) (или (7)), то система к.ф. пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным дефектом, не превышающим числа $[d_1,d_2]_-$ в случае, если по-крайней мере для одного $i=\overline{1,n}$ выполняется неравенство $\varkappa_i > n-1$, и с нулевым дефектом в противном случае.*

Показано, что в случае

$$[k,n-k]_- < l < [k,n-k]_+, \tag{8}$$

который исключен из рассмотрения в теоремах 1–3, используемое доказательство не проходит. Это случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, то есть такой сильной нерегулярностью (см. [1]), которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий α_{ijs} и β_{ijs}.

Использование другого подхода из [1], позволяет получить достаточные условия кратной полноты к.ф. и в случае (8). Считаем далее для определенности, что $n=k<k$.

Пусть множество Ω состоит из 0, ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n, всевозможных сумм этих точек, содержащих по два, по три различных слагаемых и так далее, n слагаемых. Обозначим $M = \operatorname{conv}\Omega$. Граница M — это параллелограмм $ABCD$. Здесь $A=0$ и $B=\omega_1+\cdots+\omega_k$ — крайние левая и правая точки на луче, исходящем из начала, под углом φ, $C=\omega_1+\cdots+\omega_n$ и $D=\omega_{k+1}+\cdots+\omega_n$, причем прямая CD параллельна прямой AB. Через M_Δ, как и в [1], обозначим характеристический многоугольник пучка $L(\lambda)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (4), (9) ($n-k<l<k$) и характеристический многоугольник M_Δ пучка (1)–(3) касается сторон AB и CD многоугольника M. Тогда система к.ф. этого пучка $(n-k)$-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.*

Литература

1. *Рыхлов В.С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ, **1(26)** (2015), 69-86.

2. *Rykhlov V.S.* Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Math., **72**:1-2 (2017), 281-301.

3. *Рыхлов В.С.* О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН, **63**:2 (2017), 340-361.

4. *Рыхлов В.С.* О кратной полноте корневых функций нерегулярных пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // ТВИМ, **4(41)** (2018), 90-112.

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРНОЙ ГРУППЫ, ПОРОЖДАЕМОЙ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ ДИРАКА

А.М.Савчук, И.В.Садовничая

artem_ savchuk@mail.ru, ivsad@yandex.ru

УДК 517.984.52, 517.927.25,

Для одномерного оператора Дирака $\mathcal{L}$, определенного на конечном отрезке дифференциальным выражением $B\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y}$ с суммируемым комплекснозначным потенциалом и регулярными по Биркгофу краевыми условиями, построена операторная группа $\exp\{it\mathcal{L}\}$, $t \in \mathbb{R}$. Доказано, что группа корректно определена в любом пространстве $(L_p[0,\pi])^2$, $p \in (1,\infty)$, и $(W_2^\theta[0,\pi])^2$, $\theta \in [0,1/2)$.

Ключевые слова: спектральная теория, полугруппы операторов

On properties of operator exponent generated by 1-D Dirac system

For the one-dimensional Dirac operator $\mathcal{L}$ defined on a finite segment by a differential expression $B\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y}$ with summable complex-valued potential and Birkhoff-regular boundary conditions, the operator group $\exp\{it\mathcal{L}\}$, $t \in \mathbb{R}$ is constructed. It is proved that the group is correctly defined in any space $(L_p[0,\pi])^2$, $p \in (1,\infty)$, and $(W_2^\theta[0,\pi])^2$, $\theta \in [0,1/2)$.

Keywords: spectral theory, operator semigroups

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01215).

Савчук Артем Маркович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Artem Savchuk (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Садовничая Инна Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Inna Sadovnichaya (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть

$$\ell(\mathbf{y}) = \mathrm{B}\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y},$$

где $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \mathbf{y}_2(x) \end{pmatrix}$, $x \in [0, \pi]$,

— дифференциальное выражение, порождающее вместе с краевыми условиями U в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$ одномерный оператор Дирака. Матрицу $P(x)$ — потенциал оператора $\mathcal{L}$ будем считать комплекснозначной и суммируемой, т.е. $p_j \in L_1[0, \pi]$. Мы будем рассматривать краевые условия вида

$$U\mathbf{y} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \big(y_1(0)\mathbf{y}_2(0)\big) + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ \mathbf{y}_2(\pi) \end{pmatrix} = 0,$$

требуя при этом регулярность их по Биркгофу. А именно, мы будем предполагать, что определитель J_{13}, составленный из первого и третьего столбцов матрицы $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$ краевых условий, отличен от нуля, так же, как и определитель J_{24}. Оператором Дирака назовем оператор

$$\mathcal{L}_{P,U}\mathbf{y} = \ell(\mathbf{y}), \quad \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi] : \ell(\mathbf{y}) \in \mathbb{H},\ U\mathbf{y} = 0\}.$$

При этом мы здесь и далее через $W_p^n[0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$, обозначаем классические пространства Соболева и для краткости пишем $\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi]$, понимая под этим, что y_1, $y_2 \in W_1^1[0, \pi]$.

Определенный таким образом оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ мы будем называть регулярным оператором Дирака. Известно (см., например, [1]), что при таких условиях оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ является замкнутым (неограниченным) оператором в $\mathbb{H}$ с непустым резольвентным множеством. Известно также, что его спектр состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, лежащих в некоторой горизонтальной полосе $\{|\mathrm{Im}\lambda| < \alpha\}$. Систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ мы обозначим $\mathbf{y}_{n\,n\in\mathbb{Z}}$ (алгоритм нумерации чисел λ_n и выбора векторов $\mathbf{y}_n$ мы опишем чуть позже).

Наша цель — построить сильно непрерывную операторную группу $U(t) = \exp\{it\mathcal{L}_{P,U}\}$, $t \in \mathbb{R}$. Мы покажем, что эта группа определена не только в пространстве $\mathbb{H}$, но и в пространствах Соболева $\mathbb{H}^\theta$, $0 < \theta < 1/2$, и в пространствах $(L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in (1, \infty)$. Кроме того, будет получено представление $U(t) = U_0(t) + V(t)$, где $U_0(t)$ — группа, порожденная невозмущенным оператором.

Часто нам будет удобно предполагать потенциал $P(x)$ внедиагональным: $p_1(x) \equiv p_4(x) \equiv 0$. Общий случай сводится к внедиагональному с помощью преобразования подобия.

Утверждение 1(см. [2]). *Пусть $P(x)$ — произвольная матрица размера 2×2 с элементами $p_j \in L_1[0, \pi]$, $j = 1, 2, 3, 4$, а матрица $\mathcal{U}$ задает регулярные краевые условия. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} + \gamma I$, где*

$$\widetilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{p}_2(x) \\ \widetilde{p}_3(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{p}_2(x) = p_2(x)e^{i(\psi(x)-\varphi(x))}, \qquad \widetilde{p}_3(x) = p_3(x)e^{i(\varphi(x)-\psi(x))},$$
$$\varphi(x) = \gamma x - \int_0^x p_1(t)dt, \qquad \psi(x) = \int_0^x p_4(t)dt - \gamma x,$$
$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (p_1(t)+p_4(t))dt,$$
$$\widetilde{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \epsilon u_{13} & \epsilon u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & \epsilon u_{23} & \epsilon u_{24} \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t)-p_4(t))dt\right). \tag{1}$$

Оператор $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом и теми же краевыми условиями будем называть невозмущенным оператором Дирака. Его спектр можно найти явно.

Утверждение 2 (см. [2]). *Спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений, которые можно записать двумя сериями $-\frac{i}{\pi}\ln z_0+2n$ и $-\frac{i}{\pi}\ln z_1+2n$, $n\in\mathbb{Z}$, где z_0 и z_1 — корни квадратного уравнения*

$$J_{23}z^2 - [J_{12}+J_{34}]z - J_{14} = 0, \tag{2}$$

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\operatorname{Im} z \in (-\pi,\pi]$. В случае, если дискриминант квадратного уравнения (2) равен нулю, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны.

В дальнейшем мы будем нумеровать эти собственные значения одним индексом $n\in\mathbb{Z}$, объединяя две серии в одну:

$$\lambda_n^0 = \begin{cases} \varkappa_0 + n, & \text{для четных } n, \\ \varkappa_1 + n, & \text{для нечетных } n, \end{cases}$$
$$\text{где}\quad \varkappa_0 = -\frac{i}{\pi}\ln z_0, \quad \varkappa_1 = -\frac{i}{\pi}\ln z_1 - 1,$$

причем $-1 < \operatorname{Re}\varkappa_0 \leqslant \operatorname{Re}\varkappa_1 + 1 \leqslant 1$. В случае $\operatorname{Re}\varkappa_0 = \operatorname{Re}\varkappa_1 + 1$ для определенности будем считать, что $\operatorname{Im}\varkappa_0 \leqslant \operatorname{Im}\varkappa_1$.

Утверждение 3 (см. [1]). *Собственные значения регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ можно занумеровать с учетом кратности так, что $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$ при $n\to\pm\infty$.*

Далее считаем, что собственные значения занумерованы именно так. Конечно, данное условие задает нумерацию не единственным образом, а именно, с точностью до перенумерации конечного числа собственных значений. Мы зафиксируем одну (какую-то) нумерацию.

Условие отличия от нуля дискриминанта квадратного уравнения (2) выделяет из множества регулярных краевых условий класс условий, которые мы будем называть сильно регулярными. Таким образом, краевые условия сильно регулярны, если $(J_{12}+J_{34})^2 + 4J_{23}J_{14} \neq 0$. Регулярные условия, для которых данное выражение обнуляется, будем называть слабо регулярными. Оператор Дирака с внедиагональным потенциалом P и сильно регулярными (слабо регулярными) краевыми условиями U будем называть сильно регулярным (соответственно, слабо регулярным). В случае потенциала P общего вида будем называть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ сильно регулярным (слабо регулярным), если таковы краевые условия $\widetilde{U}$, определенные в (1).

В случае сильной регулярности все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ однократны, а собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ однократны при $|n| > N$ для некоторого N. Соответствующие собственные функции мы нормируем условием $\|\mathbf{y}_n\|_{\mathbb{H}} = 1$. В слабо регулярном случае число кратных собственных значений может быть бесконечно. В любом случае для каждого кратного собственного значения мы строим систему максимальных цепочек присоединенных функций (каноническую по Келдышу систему собственных и присоединенных функций). Легко видеть, что таких цепочек может быть максимум две, но их длина может быть какой угодно. Собственные функции мы нормируем условием $\|\mathbf{y}_n\|_{\mathbb{H}} = 1$.

Теорема 1(см. [1] и [2]). *Для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в пространстве $\mathbb{H}$. В слабо регулярном случае эта система является базисом Рисса со скобками, причем объединять функции системы надо парами $\{\mathbf{y}_{2k}, \mathbf{y}_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.*

Биортогональную систему будем обозначать $\mathbf{z}_n$. Несложно видеть, что эта система составлена из корневых функций сопряженного оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$ и также является базисом Рисса.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. *Для любого регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ определена сильно непрерывная в $\mathbb{H}$ операторная группа $U(t) = \exp\{it\mathcal{L}_{P,U}\}$, $t \in \mathbb{R}$. Эта группа допускает представление*

$$U(t)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (x, \mathbf{z}_n) e^{it\lambda_n} \mathbf{y}_n. \tag{3}$$

В слабо регулярном случае сходимость ряда понимается в смысле

$$\lim_{K\to+\infty} \sum_{k=-K}^{K} \left((x, \mathbf{z}_{2k}) e^{it\lambda_{2k}} \mathbf{y}_{2k} + (x, \mathbf{z}_{2k+1}) e^{it\lambda_{2k+1}} \mathbf{y}_{2k+1} \right).$$

Ряд (3) сходится в $\mathbb{H}$ безусловно.

Через $\mathbb{H}^\theta$ обозначаем далее пространства Соболева $W_2^\theta \times W_2^\theta$ с дробным индексом гладкости $\theta \in [0,1]$. При этом $\mathbb{H}^0 = \mathbb{H}$, а $\mathbb{H}^1$ совпадает с классическим соболевским пространством. Известно, что $\mathbb{H}^\theta = [\mathbb{H}, \mathbb{H}^1]_\theta$ (комплексный метод интерполяции). Через $\mathbb{H}_U^\theta$ обозначаем интерполяционную шкалу $\mathbb{H}_U^\theta = [\mathbb{H}, \mathbb{H}_U^1]_\theta$, $\theta \in (0,1)$, где $\mathbb{H}_U^1$ — подпространство в $\mathbb{H}^1$ функций, удовлетворяющих краевым условиям U. Известно, что $\mathbb{H}^\theta = \mathbb{H}_U^\theta$ при всех $\theta \in [0, 1/2)$, а при $\theta \in [1/2, 1]$ коразмерность подпространства $\mathbb{H}_U^\theta$ равна 2.

Теорема 3. *Пусть $P \in L_\mu$ для некоторого $\mu \in [1,2)$. Тогда сильно непрерывная операторная группа $U(t)$ определена рядом (3) в пространстве $\mathbb{H}_U^\theta$ для любого $\theta \in [0, 3/2 - 1/\mu)$, а при $\mu = 2$ — для любого $\theta \in [0,1]$.*

Литература

1. *A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov* The Dirac Operator with Complex–Valued Summable Potential // Math. Notes. 2014.**96** №5. P. 3–36.

2. *А. М. Савчук, И. В. Садовничая* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Совр. математика. Фунд. направления. 2015. **58** С. 128–152.

О БАЗИСНОСТИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М.А. Садыбеков

sadybekov@math.kz

УДК 517.984.62

Рассмотрена спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на интервале $(0, \pi)$ с двухточечными краевыми условиями общего вида. Для случая, когда комплекснозначный коэффициент $q(x) \in L_1(0, \pi)$ удовлетворяет условию симметрии $q(x) = q(\pi - x)$, дано полное описание свойств базисности в $L_2(0, \pi)$ корневых функций двухточечных краевых задач в терминах коэффициентов краевого условия.

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля, двухточечная краевая задача, собственные функции, корневые функции, безусловный базис

On basicity of root functions of boundary value problems for Sturm-Liouville operator with symmetric potential

We consider a spectral problem for the Sturm-Liouville operator with two-point boundary conditions of the general form. For the case when the complex-valued coefficient $q(x) \in L_1(0, \pi)$ satisfies the symmetry condition $q(x) = q(\pi - x)$ we give a complete description of the basicity properties in $L_2(0, \pi)$ of root functions of the two-point boundary value problems in terms of the coefficients of the boundary condition.

Keywords: Sturm-Liouville problem, two-point boundary value problem, eigenfunctions, root functions, unconditional basis

В работе [1] В.А. Садовничий со своим учеником Б.Е. Кангужиным исследовали зависимость спектра от коэффициентов краевых условий для дифференциального оператора четного порядка с определенной симметрией коэффициентов оператора. Ими впервые показано, что при определенных условиях спектр оператора не зависит от некоторых коэффициентов краевого условия. В частности, как следствие, было показано, что спектр задачи для уравнения

$$Ly \equiv -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = by(\pi), \ y'(0) = y'(\pi), \tag{2}$$

при симметричном коэффициенте

$$q(x) = q(\pi - x), \quad 0 < x < \pi, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН Республики Казахстан (грант AP05133271).

Садыбеков Махмуд Абдысаметович, д.ф.-м.н., профессор, Генеральный директор Института математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Makhmud Sadybekov (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

не зависит от коэффициента $b \neq -1$ краевого условия (2) и совпадает со спектром периодической краевой задачи.

Основываясь на этом результате, в настоящем докладе мы покажем, что для случая, когда комплекснозначный коэффициент $q(x) \in L_1(0,\pi)$ удовлетворяет условию симметрии (3), может быть дано полное описание свойств базисности корневых функций двухточечных краевых задач для уравнения (1) в терминах коэффициентов краевого условия.

Отметим, что симметрия коэффициента играет важную роль в спектральной теории. Например, в [2] показано, что все вольтерровые краевые задачи для уравнения (1) задаются условиями $y(0) = \alpha y(\pi)$, $y'(0) = -\alpha y'(\pi)$ при $\alpha^2 \neq 1$. При $\alpha \neq 0$ условие симметрии (3) является критерием вольтерровости этой задачи.

Для дифференциального уравнения (1) мы рассматриваем двухточечные краевые условия общего вида

$$\begin{cases} U_1(y) = a_{11}y'(0) + a_{12}y'(\pi) + a_{13}y(0) + a_{14}y(\pi) = 0, \\ U_2(y) = a_{21}y'(0) + a_{22}y'(\pi) + a_{23}y(0) + a_{24}y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $U_1(y)$ и $U_2(y)$ – линейно независимые формы с комплексными коэффициентами.

По своим спектральным свойствам краевые условия (4) традиционно разделяют на 4 основных типа:
1) усиленно регулярные;
2) регулярные, но не усиленно регулярные;
3) нерегулярные;
4) вырожденные.

Известно, что в первом случае система корневых функций задачи (1), (4) всегда является базисом Рисса в $L_2(0,\pi)$. Этот результат независимо доказан в книге Данфорд Н. и Шварц Дж. (1966), В.П. Михайловым (1962) и Г.М. Кесельманом (1964).

В третьем случае, как впервые было показано Stone M.H. в 1927 году, она никогда не образует даже обычного базиса в $L_2(0,\pi)$. Решение вопроса о базисности корневых функций для четвертого случая краевых условий дано в недавней работе А.С. Макина 2018 года. Им доказано, что никакая система корневых функций задачи (1), (4) с вырожденными краевыми условиями не образует даже обычного базиса в $L_2(0,\pi)$.

Также хорошо известно, что во втором случае, в зависимости от конкретного вида краевых условий и функции $q(x)$, система корневых функций задачи может обладать или не обладать свойством базисности в $L_2(0,\pi)$. Впервые В.А. Ильин построил пример двух операторов с одними и теми же (регулярными, но не усиленно регулярными) краевыми условиями и сколь угодно близкими (в любой метрике) бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, которые имеют принципиально различные свойства: у одного имеется базис из корневых функций, у другого – нет. В частности, отсюда следует, что проблема базисности корневых функций для задач с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями, вообще говоря, не может быть решена в терминах коэффициентов краевого условия. Однако, как показано А.А. Шкаликовым в 1979 году [3], корневые функции задачи можно объединить парами так, что соответствующие двумерные подпространства образуют базис Рисса из подпространств (и безусловный базис со скобками).

Таким образом, благодаря исследованиям многих математиков, проблема базисности системы корневых функций задачи (1), (4) сведена к исследованию случая регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий. Как было показано в [4], все такие краевые условия могут быть представлены в одном из двух видов

$$\begin{cases} y'(0) + (-1)^{\theta} y'(\pi) + \beta_0 y(0) + \beta_1 y(\pi) = 0, \\ \alpha y(0) + (-1)^{\theta}(1-\alpha) y(\pi) = 0; \end{cases} \tag{5}$$

или

$$\begin{cases} \alpha y'(0) + (-1)^{\theta}(1-\alpha) y'(\pi) + \beta_0 y(0) + \beta_1 y(\pi) = 0, \\ y(0) + (-1)^{\theta} y(\pi) = 0; \end{cases} \tag{6}$$

где $\theta = 0$ или $\theta = 1$, а коэффициенты α, β_0 и β_1 – произвольные комплексные числа. Если $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$, то не уменьшая общности можно считать, что отличны от нуля следующие определители

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \alpha & (-1)^{\theta}(1-\alpha) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ 1 & (-1)^{\theta} \end{vmatrix} \neq 0,$$

составленные из коэффициентов краевых условий (5) и (6) соответственно.

Основным результатом доклада являются следующие теоремы о базисности нормальной системы корневых функций задач (1), (5) и (1), (6).

Теорема 1. *Пусть $q(x) \in L_1(0,\pi)$ и удовлетворяет условию симметрии (3). Тогда если $\alpha = 1/2$, то нормальная система корневых функций образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. При этом:*
(а) Если $|\beta_0| = |\beta_1| = 0$, то спектр задачи является асимптотически двукратным, а корневые подпространства состоят из двух собственных функций.
(б) Если $|\beta_0|+|\beta_1| > 0$, то спектр задачи асимптотически простой и задача может иметь не более, чем конечное число присоединенных функций.

Теорема 2. *Пусть $q(x) \in L_1(0,\pi)$ и удовлетворяет условию симметрии (3). Тогда если $\alpha \neq 1/2$, то нормальная система корневых функций не образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. При этом:*
(а) Если $|\beta_0| = |\beta_1| = 0$, то спектр задачи является асимптотически двукратным, а корневые подпространства состоят из одной собственной и одной присоединенной функций. Нормальная система корневых функций образует безусловный базис в $L_2(0,\pi)$.
(б) Если $|\beta_0|+|\beta_1| > 0$, то спектр задачи асимптотически простой и задача может иметь не более, чем конечное число присоединенных функций. Нормальная система корневых функций образует базис Рисса из подпространств, но не образует безусловного базиса в $L_2(0,\pi)$.

Доклад основан на результатах совместных исследований с Т.Ш. Кальменовым и Б.Н. Бияровым.

Литература

1. *Садовничий В.А., Кангужин Б.Е.* О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Докл. АН СССР, **267**:2 (1982), 310–313.

2. *Бияров Б.Н., Джумабаев С.А.* Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля// Матем. заметки, **56**:1 (1994), 143–146.

3. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. **34**:5 (1979), 235–236.

4. *Оразов И., Садыбеков М.А.* Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. мат. журнал. **53**:1 (2012), 180–186.

ОБ ОПЕРАТОРЕ СВЕРТКИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НИКОЛЬСКОГО–БЕСОВА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

К.К. Садыкова, Н.Т. Тлеуханова

sadkelbet@gmail.com, tleukhanova@rambler.ru

УДК 517.5

В работе исследуется ограниченность нормы оператора свертки в анизотропных пространствах Никольского-Бесова с доминирующей смешанной производной.

Ключевые слова: оператор свертки, анизотропные пространства Бесова, анизотропные пространства Соболева.

On the convolution operator in anisotropic Nikolsky-Besov spaces with a dominant mixed derivative.

The paper studies the boundedness of the norm of the convolution operator in anisotropic Nikol’skii-Besov spaces with the dominant mixed derivative.

Keywords: convolution operator, anisotropic Besov spaces, anisotropic Sobolev spaces

---

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (проект № AP05132590).

Садыкова Келбет Курмановна, докторант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Kelbet Sadykova (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Тлеуханова Назерке Тулековна, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Nazerke Tleukhanova (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Пусть $\mathbb{T}^n=[0,1)^n$ – n-мерный тор, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{1}<\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_n)<\boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{0}<\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)\leqslant\boldsymbol{\infty}$. Следуя работе [1] определим пространство $B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{T}^n)$ как множество рядов $f=\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n}a_m e^{2\pi i(m,x)}$ (вообще говоря, расходящиеся), для которых конечна величина

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{T}_n)}=\left(\sum_{k_n=0}^{\infty}\cdots\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j k_j}\|\Delta_k(f)\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\cdots\right)^{\frac{1}{q_n}}<\infty,$$

где $\Delta_k(f)(x)=\sum\limits_{\substack{2^{k_j-1}\leqslant|m_j|<2^{k_j}\\ j=1,\ldots,n}}a_m e^{2\pi i(m,x)}$, $k\in\mathbb{Z}^n_+$, $(m,x)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i x_i$.

При $q=\infty$ величины $\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $\left(\int\limits_{\mathbb{T}}f^q\right)^{\frac{1}{q}}$ будем понимать соответственно как $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}|b_k|$, $ess\sup\limits_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|$.

Будем говорить, что ряд $f(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}a_k e^{2\pi i(k,x)}$ является элементом пространства $W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$ (см. [1]), если найдется функция $f^{\boldsymbol{\alpha}}\in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}\bar{k}^{\alpha}a_k e^{2\pi i(k,x)}$, здесь $\bar{k}^{\alpha}=\prod\limits_{j=1}^{n}\bar{k}_j^{\alpha}$, $\bar{k}_j=\max\{|k_j|,1\}$, $j=1,\ldots,n$,

$$\|f\|_{W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}\overset{def}{=}\|f^{\alpha}\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Определим понятие свертки для элементов этих пространств.

Пусть $f(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}a_k e^{2\pi i(k,x)}$ и $g(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}b_k e^{2\pi i(k,x)}$ тригонометрические ряды. Под сверткой этих рядов будем понимать ряд

$$(f*g)(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}a_k b_k e^{2\pi i(k,x)}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{1}\leqslant\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{r}<\infty$, $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}+\mathbf{1}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$. *Предположим, что* $f\in W^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$, $g\in W^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^n)$. *Тогда* $f*g\in W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^n)$ *и*

$$\|f*g\|_{W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^n)}\leqslant\|f\|_{W^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}\|g\|_{W^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{1}\leqslant\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{r}<\boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$, $\mathbf{0}<\mathbf{h},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}\leqslant\boldsymbol{\infty}$, $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{h}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\eta}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\xi}}$. *Предположим, что* $f\in B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)$, $g\in B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)$. *Тогда* $f*g\in B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{qh}}(\mathbb{T}^n)$ *и*

$$\|f*g\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{qh}}(\mathbb{T}^n)}\leqslant C\|f\|_{B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)}\|g\|_{B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$, $1 \leqslant \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r} < \infty$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$. *Предположим, что* $f(x)$ *и* $g(x)$ *– измеримые функции на* $\mathbb{T}^n$, *такие что* $f \in B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)$, $g \in B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)$. *Тогда* $f * g \in B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{qh}}(\mathbb{T}^n)$ *и*

$$\|f * g\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{qh}}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C\|f\|_{B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)}\|g\|_{B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)},$$

где $\dfrac{1}{\mathbf{h}} \leqslant \dfrac{1}{\boldsymbol{\eta}} + \dfrac{1}{\boldsymbol{\xi}}$.

Литература

1. *Nursultanov E.D.* Interpolation theorems for anisotropic function spaces and their applications // Dokl. Math., **69**:1 (2004), 16–19.

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В GRAND-ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В.Ф. Салманов, В.С. Мирзоев

valid.salmanov@mail.ru

УДК 517.51

В работе вводится одно подпространство Grand- пространства Соболева и изучается базисность системы экспонент в этом подпространстве.

Ключевые слова: система экспонент, базисность, Grand-пространство Соболева

Basicity of system of exponent in the Grand Sobolev spaces

In this paper, we introduce one subspace of the Grand Sobolev space and study the basis property of the system of exponents in this subspace.

Keywords: system of exponents, basis property, Grand Sobolev space

Салманов Валид Фатали оглы, к.ф.-м.н., доцент, Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Индустрии; Институт Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан); Valid Salmanov (Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

Мирзоев Видади Сультаеага оглы, к.ф.-м.н., доцент Институт Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан); Vidadi Mirzoyev (Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

Пусть $1 < p < +\infty$. Пространство измеримых на $(a, b) \subset R$ функций f таких, что

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|b-a|} \int_a^b |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty, \tag{1}$$

называют $L_{p)}\,(a, b)$ Grang-пространством Лебега [1] . Аналогично вводится пространство Grand- Соболева [2] $W^1_{p)}\,(a, b) = \{f : f, f' \in L_{p)}\,(a, b)\}$ с нормой

$$\|f\|_{W_{p)}} = \|f\|_{p)} + \|f'\|_{p)}. \tag{2}$$

Известно что, это не сеперабельное Банахово пространство. Обозначим через $\tilde{G}W^1_{p)}\,(a, b)$ множество всех функций из $W^1_{p)}\,(a, b)$ для которых $\|\hat{f}'(\cdot + \delta) - \hat{f}'(\cdot)\| \to 0$, при $\delta \to 0$, где

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), t \in (a, b), \\ \\ 0, t \notin (a, b) \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{G}W^1_{p)}\,(a, b)$ является многообразием в $W^1_{p)}\,(a, b)$. Пусть $GW^1_{p)}\,(a, b)$ является замыканием $\tilde{G}W^1_{p)}\,(a, b)$ относительно нормы (2).

Теорема 1. *Система* $t \cup \{e^{int}\}_{n\in Z}$ *образует базис в пространстве* $GW^1_{p)}\,(-\pi, \pi)$.

Литература

1. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal., **119** (1992), 129-143.

2. *Donofrio L., Sbordone C., Schiattarella R.* Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs // J. Fixed Point Theory Appl., **13** (2013), 309-340.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛИЛОГАРИФМОВ И АССОЦИИРОВАННЫХ С НИМИ ФУНКЦИЙ

Т.А. Сафонова

t.Safonova@narfu.ru

УДК 517.927.25, 517.521.15, 517.589

В работе средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, порождённых симметрическим дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и самосопряжёнными граничными условиями в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[a,b]$, получено интегральное представление некоторых степенных рядов и некоторых специальных функций таких, как полилогарифмы и ассоциированные с ними функции.

Ключевые слова: функция Грина, полилогарифмы и ассоциированные с ними функции, интегральное представление степенных рядов

About integral representation of polylogarithms and functions associated with them

In this paper, using the spectral theory of ordinary differential operators generated by a symmetric differential expression with constant coefficients and self-adjoint boundary conditions in the Hilbert space $\mathcal{L}^2[a,b]$, an integral representation of some power series and some special functions such as polylogarithms and associated functions is obtained.

Keywords: Green function, polylogarithms and associated functions, integral representation of power series

Как известно, полилогарифмическая функция $Li_j(z)$ и ассоциированная с ней функция $Ti_j(z)$ порядка j от аргумента z определяются равенствами

$$Li_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^j} \quad \text{и} \quad Ti_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)^j},$$

где z, $j \in C$, причём $|z| < 1$ (см., напр., [1], ch. 7, § 7.1, formula 7.1 и 7.4).

В работе [2] получено интегральное представление функций $Li_{2m}(z)$ и $Li_{2m+1}(z)$ при $m = 1, 2, \ldots$ и $z \in (-1, 1]$, а именно

$$Li_{2m}(z) = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} \int\limits_0^1 (B_{2m}(x) - B_{2m}) \frac{z(\cos 2\pi x - z)}{1 - 2z\cos 2\pi x + z^2} dx$$

и

$$Li_{2m+1}(z) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)!} \int\limits_0^1 B_{2m+1}(x) \frac{z \sin 2\pi x}{1 - 2z\cos 2\pi x + z^2} dx,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00250).

Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Tatyana Safonova (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

где $B_n(x)$ и B_n, $n = 1, 2, \ldots$, - многочлены и числа Бернулли соответственно.

Цель данной работы - получение аналогных тождеств для функций $Ti_{2m}(z)$ и $Ti_{2m+1}(z)$.

Пусть T - самосопряжённый оператор, порождённый в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ выражением

$$l_2[y] = -y''$$

и граничными условиями Дирихле-Неймана

$$y(0) = y'(\pi) = 0,$$

и пусть $p_m(x)$ - многочлен с вещественными коэффициентами степени $m \geqslant 1$. Рассмотрим оператор $p_m(T)$. Область определения $\mathcal{D}(p_m(T))$ этого оператора определяется равенством

$$\mathcal{D}(p_m(T)) = \{y|\ y^{(j-1)} \in AC[0, \pi];\ W_j(y) = 0,\ j = 1, \ldots, 2m\},$$

где линейные формы $W_j(y)$ таковы, что

$$W_{j+1}(y) := y^{(2j)}(0),\ W_{j+m+1}(y) := y^{(2j+1)}(\pi), \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Кроме того, если $y \in \mathcal{D}(p_m(T))$, то

$$p_m(T)y = p_m(-\frac{d^2}{dx^2})y =: l_{2m}[y].$$

Спектр $\sigma(p_m(T))$ этого оператора, очевидно, является дискретным и имеет вид

$$\sigma(p_m(T)) = \{\nu|\ \nu = \nu_{2m,k} := p_m((k - 1/2)^2),\ k = 1, 2, \ldots\},$$

а собственному значению $\nu_{2m,k}$ соответствует собственная функция

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k - 1/2)x, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Предположим теперь, что ноль является регулярной точкой оператора $p_m(T)$ (т.е. $0 \notin \sigma(p_m(T))$), и рассмотрим его резольвенту $R(p_m(T))$ в этой точке. Хорошо известно, что эта резольвента является интегральным оператором, и для его ядра $K(x, t)$ - функции Грина задачи

$$\begin{cases} l_{2m}[y] = f \\ W_j(y) = 0,\ j = 1, \ldots, 2m \end{cases}, \tag{1}$$

вычисляемой по известной процедуре (см., напр., [3], часть вторая, гл. I, §1.5), справедлива формула

$$K(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k - 1/2)x \sin(k - 1/2)t}{p_m((k - 1/2)^2)}.$$

Далее используя это равенство и формулу разложения функции

$$\operatorname{arctg}\frac{2z\sin x}{1-z^2} \quad z\in[-1,1]$$

в ряды Фурье, можно доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m((k-1/2)^2)\neq 0$ при $k=1,2,\ldots$, $K(x,t)$ - функция Грина задачи (1). Тогда при $z\in[-1,1]$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)p_m((k-1/2)^2)}=2\int\limits_0^{\pi/2}K(x,\pi-x)\operatorname{arctg}\frac{2z\sin x}{1-z^2}dx \qquad (2)$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{p_m((k-1/2)^2)}=4\int\limits_0^{\pi/2}K(x,\pi-x)\frac{(z^3+z)\sin x}{1-2z^2\cos 2x+z^4}dx. \qquad (3)$$

Рассмотрим далее частный случай $p_m(x)=x^m$. В этом случае несложно показать, что справедливо равенство

$$K(x,\pi-x)=(-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m-1}}{2(2m-1)!}E_{2m-1}(x/\pi+1/2),$$

где $E_{2m-1}(x)$, $m=1,2,\ldots$ - многочлены Эйлера. Учитывая это тождество в равенствах (2) и (3), заключаем, что справедливо следующее следствие теоремы 1.

Следствие 1. *При $z\in[-1,1]$ справедливы тождества*

$$Ti_{2m+1}(z)=(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{4(2m-1)!}\int\limits_0^1 E_{2m-1}(x)\operatorname{arctg}\frac{2z\cos\pi x}{1-z^2}dx$$

и

$$Ti_{2m}(z)=(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{2(2m-1)!}\int\limits_0^1 E_{2m-1}(x)\frac{(z^3+z)\cos\pi x}{1+2z^2\cos 2\pi x+z^4}dx.$$

Доклад основан на совместных работах с проф. Мирзоевым К.А. (см. [2] и [4]).

Литература

1.*Levin L.* Polylogarithms and associated functions. — New York. Oxford: Elsevier Science Ltd, 1981.

2.*Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Докл. АН, **482**:5 (2018), 500-503.

3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1976.

4. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Математические заметки.

О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.Н. Сивкин
sivkin96@yandex.ru

УДК 517.518

В работе изучаются базисные свойства корневых векторов оператора $A = T + B$, где B - несамосопряжённый оператор, локально p-подчинённый самосопряжённому оператору T с дискретным спектром. Доказана теорема о базисности со скобками корневых векторов оператора $T + B$.

Ключевые слова: возмущения линейных операторов, условия p-подчинения, базисы со скобками, спектральная теория

Eigenfunctions basis property perturbations of self-adjoint operators

In this paper we study the basis properties of the root vectors of the operator $A = T + B$, where B is a non-self-adjoint operator, locally p-subordinated to the self-adjoint operator T with a discrete spectrum. We find conditions which guarantee that root vectors of $T + B$ form a Riess basis with parenthesis.

Keywords: perturbations of self-adjoint operators, p-subordination conditions

Пусть $T = T^*$ - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(H)$. Предположим, что T имеет дискретный неотрицательный спектр, и его собственные значения $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ пронумерованы с учётом геометрической кратности. Полную ортонормированную систему собственных векторов оператора T, отвечающую этим собственным значениям, обозначим через $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. В этой работе предполагаем, что справедливо следующее ограничение роста собственных значений:

$$ck^{\alpha} < \mu_k < Ck^{\alpha}, \tag{1}$$

для некоторых постоянных c, C, и $\alpha \geqslant 1$ - порядок оператора T.

На оператор-возмущение B накладываем следующие условия:

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(B), \tag{2}$$

$$\|B\varphi_k\| \leqslant b\mu_k^p,\ 0 \leqslant p \leqslant 1 - \alpha^{-1}, \tag{3}$$

где b - постоянная, не зависящая от k.

Основной результат состоит в следующем:

Теорема. *При выполнении вышеозначенных условий система собственных и присоединённых векторов оператора $T + B$ образует базис со скобками пространства H.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Сивкин Владимир Николаевич, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sivkin Vladimir (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Изложим план доказательства. Сначала мы покажем, что *оператор $T+B$ корректно определён на пространстве H, и система его корневых векторов полна в H. При этом спектр оператора $T+B$ дискретен, и для $\forall\delta>0$ лишь конечное число собственных значений возмущённого оператора A лежит вне сектора $\{|\arg\lambda|<\delta\}$.*

На втором шаге будем использовать свойство проекторов Рисса, которое позволяет выразить операторы проектирования на корневые подпространства через резольвенту:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A-\lambda)^{-1}d\lambda = P,$$

где Γ - это замкнутый контур в комплексной плоскости, не проходящий через точки спектра. P - это проектор на корневые подпространства, отвечающие собственным значениям, находящимся внутри контура.

На этом шаге проводим рассуждения, следуя работе [2]. Вводим мероморфную операторозначную функцию

$$G(\lambda)=(\lambda-A)^{-1}-(\lambda-T)^{-1}=(\lambda-A)^{-1}B(\lambda-T)^{-1}.$$

Зададим контуры интегрирования $\{Q_{r_n}\}$. Каждый контур - это треугольник, ограниченный с двух сторон лучами вида $\{t\pm it, t\in R_+\}$, третья сторона которого - это часть вертикальной прямой $Re\lambda=r_n$.

Тогда, из вышеуказанных равенств, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_n} G(\lambda)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} G(\lambda)d\lambda=\sum_{k=1}^{n}(P_k-P_k^0),$$

где γ_k - граница области $Q_k\setminus\bar{Q}_{k-1}$, а P_k, P_k^0 - проекторы Рисса, отвечающие спектру операторов A и T внутри $Q_k\setminus\bar{Q}_{k-1}$.

Так как сумма ортогональных проекторов сильно сходится к единичному оператору, то для доказательства теоремы достаточно доказать оценку

$$\int_{\partial Q_n} G(\lambda)fd\lambda\leqslant C\|f\|,\forall f,$$

где постоянная C не зависит от вектора f и номера контура интегрирования n.

Таким образом, что исходная задача свелась к проведению оценок интегралов по треугольникам Q_n.

На третьем шаге показываем, что интеграл по их боковым сторонам ограничен, а именно, показываем, что интеграл от $G(\lambda)$ по лучам $\{t\pm it\}$ ограничен.

Основная трудность - найти точки на вещественной оси, через которые нужно проводить вертикальные отрезки, на которых можно провести нужные оценки.

Определение. *Назовем возрастающую последовательность* $\{t_l\}$ *обзорной для последовательности* $\{\mu_k\}$, *если для пары натуральных* k, m *таких, что* $\mu_m < t_k < \mu_{m+1}$ *будет справедлива оценка*

$$|\mu_{m-l} - t_k| \geqslant C|l|m^{\alpha-1}, \forall l \in Z. \tag{4}$$

То есть, обзорная последовательность состоит из точек, относительно которых исходная последовательность ведёт себя регулярно, то есть вблизи этих точек нет кластеров.

Лемма. *Для последовательности* μ_k, *для которой справедливы оценки (1), (4) существует обзорная последовательность.*

На шаге 4 используем приём искусственной лакуны Маркуса-Мацаева. Рассматриваем последовательность расширяющихся полос $\{Re\lambda \in (t_k - at_k^p, t_k + at_k^p)\}$ *Оказывается, если спектра в этих полосах нет, то оценка проводится легко.*

В общем случае используется приём создания искусственной лакуны. Строим конечномерное исправление T' оператора T, у которого в полосах не содержится спектра, и доказываем для него. Затем переходим к исходным операторам T и $T+B$. *На шаге 5 доказываем следующее утверждение: в полосах будет равномерно ограниченное число точек спектра этих операторов, причём они будут сосредоточены вблизи вещественной прямой, на расстоянии не более, чем* ct_k^p, *где* $c = const$. Доказательство опирается на формулу Вайнштейна-Ароншайна, связывающую число собственных значений оператора в области и приращение аргумента некоторой мероморфной функции вдоль границы.

На шаге 6 в последний раз разбиваем задачу на случаи. В первом случае проводим оценку интеграла в полосах, но вне параболы $\{|\sigma| < ic\sigma^p\}$, *это делается просто. Во втором случае находим вертикальный отрезок внутри параболы, наиболее удалённый от точек спектра.* Для того, чтобы найти вертикальный отрезок с ограниченной величиной $G(\lambda)$ на нём, воспользуемся леммой №6.5 работы [2], которая позволяет оценить мероморфную функцию сверху всюду, кроме кружков фиксированного суммарного радиуса ε.

Представленные в этом сообщении результаты получены совместно с проф. А.А. Шкаликовым.

Литература

1. *Шкаликов А.А.* О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора // Тр. МИАН, (2010).

2. *Шкаликов А.А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром // УМН, **71**:5 (2016), 113-174.

3. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.

4. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.

5. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов.// УМН, **26**:4 (1971), 15-41.

6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.

7. *Маркус А.С.* О разложении по корневых векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // ДАН СССР, **142**:3 (1962), 538-541.

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СПЛЕТЕНИЯ

Н.А. Сидоров
sidorovisu@gmail.com

УДК 517.988

Дан обзор результатов в проблеме анализа появления свободных параметров в разветвляющихся решениях общих нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Рассмотрен прием упрощения уравнения разветвления, позволяющий строить такие решения в окрестностях точек ветвления, методом двухступенчатых итераций. Используются результаты наших работ (Матем. сб., **192**: 7 (2001), 107-124, Матем. сб., **186**: 2 (1995), 129-141).

Ключевые слова: нелинейные уравнения, разветвляющиеся решения, банаховы пространства

On parametric families of branching solutions of nonlinear equations under interlacing conditions

The analysis of the appearance of free parameters in branching solutions of general non-linear equations in Banach spaces is continued. A new technique to simplify the branching equation is proposed.

Keywords: nonlinear equations, branching solutions, Banach spaces

Рассматривается уравнение

$$Bx = R(x, \lambda). \tag{1}$$

Здесь $B, D \in E_1 \to E_2-$ замкнутый линейный Фредгольмов оператор с плотной в E_1 областью определения, $\dim N(B) = n \geqslant 1$, $R(0,0) = 0$, $R_x(0,0) = 0$. Известно [3], что решения нелинейных уравнений (1) могут зависеть от одного или нескольких свободных числовых параметров. Эти параметры в разных задачах имеют разный смысл и могут принадлежать как ограниченной области евклидова пространства, так и неограниченной области. Приводится анализ появления свободных параметров при построении малых разветвляющихся решений $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ уравнения (1) в условиях существования линейных операторов $S \in L(E_1)$, $K \in L(E_2)$ сплетаемых операторами B и R, т.е. удовлетворяющих условию

$$BS = KB, \;\; R(Sx, \lambda) = KR(x, \lambda), \;\; \forall x, \lambda.$$

Сидоров Николай Александрович, д.ф.-м.н., профессор, ИГУ (Иркутск, Россия); Nikolay Sidorov (Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

Демонстрируется, что результаты работ [1, 2, 3] лежат в основе ряда общих теорий существования и итерационных методов построения параметрически семейство решения уравнения (1) в окрестностях точек бифуркации.

Литература

1. *Сидоров Н.А., Абдуллин В. Р.*Сплетаемые уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений // Матем. сб., **192**: 7 (2001), 107–124.

2. *Сидоров Н.А.* Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами // Матем. сб., **186**: 2 (1995), 129–141.

3. *Логинов Б.В., Сидоров Н.А.* Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова–Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации // Матем. сб., **182**: 5 (1991), 681–691.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова

ellkid@gmail.com

УДК 517.518

Доклад будет посвящен обзору полученных авторами результатов по исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами.

Ключевые слова: спектр, индексы дефекта, дифференциальные операторы

Spectral properties of differential operators with oscillating coefficients

The report will be devoted to a review of the spectral properties of the differential operators with oscillating coefficients obtained by the authors.

Keywords: spectrum, deficiency indexes, differential operators

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-01-00250).

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, БГПУ им.Акмуллы (Уфа, Россия); Yudat Sultanaev (Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Ufa, Russia)

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., доцент, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Nurmukhamet Valeev (Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Назирова Эльвира Айратовна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Elvira Nazirova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Предполагается обсудить спектральные свойства дифференциальных операторов (индексы дефекта и характер спектра) с колеблющимися коэффициентами , а так же ряд новых методов и подходов к исследованию асимптотических свойств решений сингулярных дифференциальных уравнений.

Асимптотические формулы для фундаментальной системы решений дифференциального уравнения содержат важную информацию об индексах дефекта минимального оператора L_0, порожденного соответствующим дифференциальным выражением, а так же о качественных спектральных свойствах самосопряженных расширений этого оператора. При этом к настоящему времени каких-либо широких классов дифференциальных операторов с коэффициентами, отличными от регулярных, для которых были бы получены асимптотические формулы фундаментальной системы решений, нет.

В связи с этим интересны любые достаточно содержательные классы коэффициентов линейного дифференциального выражения произвольного порядка, для которых удается строить асимптотики решений при больших значениях аргумента или спектрального параметра, и исследовать спектральные свойства порождаемых этими дифференциальными выражениями операторов.

В статье [1] получены результаты для уравнения Штурма-Лиувилля для класса потенциалов, содержащих осцилляцию. Модельным примером такого уравнения является уравнение вида:

$$-y'' + x^{\alpha}(1 + \sin x^{\beta})y = \lambda y, \quad \beta > \alpha/2 + 1. \tag{1}$$

Для решений данного уравнения удается выписать асимптотические формулы решений при $x \to \infty$, а затем применить полученные асимпотики для изучения спектральных свойств соответствующего минимального дифференциального оператора. Метод исследования таких уравнений основан на переходе к уравнению Риккати, распространить такой подход на уравнения более высоких степеней затруднительно.

В статье [2] была предпринята попытка применить к уравнению Штурма-Лиувилля с колеблющимся потенциалом подход, основанный на модификации метода Левинсона, который заключается в переходе к системе дифференциальных уравнений, ряде матричных преобразований полученной системы и дальнейшем переходе к системе интегральных уравнений. Удалось получить результаты для уравнения (1) при более жестком условии $\beta > \alpha + 1$, однако сам метод исследования может быть применен к уравнениям любого порядка.

В работе [3] был предложен принципиально новый подход к изучению асимптотического поведения при $x \to \infty$ решений сингулярного двучленного уравнения вида:

$$-\frac{d^n}{dx^n}y + \lambda q(x)y = 0$$

с нерегулярно растущим при $x > 0$ потенциалом $q(x)$ на модельном примере уравнения 4-го порядка с осциллирующим потенциалом:

$$-\frac{d^4}{dx^4}y + \lambda^4(h(x) + q(x))y = 0,$$

где $h(x)$ –функция, содержащая осцилляцию, например, $h(x) = (1+x)^\alpha \sin(x^\beta)$, $q(x) = (1+x)^\alpha$, $\beta > 3\alpha/8 + 3/2$. Идея метода заключается в серии матричных преобразований соответствующей системы дифференциальных уравнений, переход к которой осуществляется с помощью введения квазипроизводных, с использованием матричного тождества Хаусдорфа.

В ряде работ авторов доклада данный метод получил развитие. Например, в работе [4] построены асимптотические формулы при $x \to \infty$ для фундаментальной системы решения уравнения с промежуточным осциллирующим коэффициентом $h(x)$ и коэффициентом $q(x)$ из стандартного класса функций, регулярных по Титчмаршу-Левитану:

$$ly = y(4) - \lambda(h(x)y)' - q(x))y = \lambda y.$$

Так же исследованы индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0, порожденного ly.

В работе [5] разработанный метод матричных преобразований реализован для получения асимптотики фундаментальной системы решений для следующего класса дифференциальных уравнений:

$$y(2n) - (q(x) + h(x))y = 0,$$

где $q(x)$ — регулярный потенциал, а $h(x)$ — быстро осциллирующее возмущение вида:

$$h(x) = \sum a_k(x) S_k(\phi(x)),$$

$S_k(t)$ — осциллирующие функции, $\phi(x)$, $a_k(x)$ — достаточно гладкие монотонные функции.

В дальнейшем планируется продолжить исследования подобных классов дифференциальных операторов и их спектральных свойств.

Литература

1. *Valeev N. F. , Sultanaev Y.T.* On the deficiency indices of a Sturm-Liuville operator with a rapidly oscillating perturbation // Doklady mathematics, **62**:2 (2000), 271–273.

2. *Макина Н.К., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т.* О методах исследования асимптотического поведения сингулярных дифференциальных уравнений // Математические заметки, **196**:2 (2014), 627–632.

3.*Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т.* О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал, **7**:3 (2015), 9–15.

4. *Valeev N.F., Eskermesuly A., Sultanaev Y.T.* On the deficiency index of a differential operator with fast oscillating coefficients // Mathematical Notes, **100**:3–4 (2016), 486–490.

5. *Валеев Н.Ф., Мякинова О.В., Султанаев Я.Т.* Об асимптотике решений сингулярного дифференциального уравнения n-го порядка с нерегулярными коэффициентами // Математические заметки, **104**:4 (2018), 626–631.

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ю.А. Тихонов

mihelson1994@yandex.ru

УДК 517.983.5

В данной работе рассматривается абстрактное интегродифференциальное уравнение второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве с неограниченными некоммутирующими операторными коэффициентами. Данное уравнение может быть сведено к системе интегродифференциальных уравнений первого порядка. В данной работе установлены результаты о классической корректной разрешимости полученной системы, а также получены оценки нормы решения.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения, полугруппы операторов.

On classic solvability of system of integrodifferential equations, arising in theory of viscoelasticity

In the present work an integrodifferential equation of the second order in separable Hilbert with unbounded non-commuting operator coefficients is considered. This equation is reduced to the system of integrodifferential equations of the first order. In the present work we obtain a result on classical correct solvability of this system and introduce the norm estimate of the solution.

Keywords: integrodifferential equations, operator semigroups.

В данной работе изучаются вопросы, связанные с корректной разрешимостью абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными некоммутирующими операторными коэффициентам в гильбертовом пространстве. Рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + \alpha A u(t) - B^* \rho(t) + \int_0^t K(t-s) A u(s) ds = f(t), \\ \dot{\rho}(t) + B u(t) = 0, \ t > 0, \\ u(+0) = \varphi_0, \ \rho(+0) = \psi_0, \end{cases} \tag{1}$$

где функции $u(t)$ и $\rho(t)$ принимают значения в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H; A – положительно определённый самосопряжённый оператор, имеющий компактный обратный; оператор B – замкнутый, A-компактный в смысле Като; α – коэффициент внутреннего трения Кельвина-Фойгта. Ядро вольтерровой свёртки задаётся рядом:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t},$$

сходящимся в нуле.

Тихонов Юрий Андреевич, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Yury Tikhonov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Уравнения вида (1) являются абстрактными моделями интегродифференциальных уравнений, описывающих вязкоупругие баротропные жидкости. Исследованию интегродифференциальных уравнений, имеющих аналогичный вид при $\alpha = 0$ и $K(t)$, являющимся конечной суммой экспонент, посвящены работы [1]. В этих работах установлена классическая разрешимость (1), экспоненциальное убывание решений и их асимптотика при некоторых дополнительных предположениях на правую часть.

Отметим, если формально продифференцировать первое равенство в (1) и подставить $\dot\rho(t)$ из второго уравнения получим уравнение второго порядка:

$$\ddot u(t) + \alpha A\dot u(t) + B^*Bu(t) + K(0)Au(t) + \int_0^t \dot K(t-s)Au(s)ds = g(t), \qquad (2)$$

$$u(+0) = \varphi_0,\ \dot u(+0) = \varphi_1.$$

которое является абстрактной моделью одномерных малых колебаний вязкоупругого стержня. Результаты о корректной разрешимости интегродифференциального уравнения в пространствах Соболева с весом подробно описаны в монографии [2]. Спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом уравнения (2), с дополнительным операторным слагаемым в правой полуплоскости проведён в работе [3], а в статье [4] для этой оператор-функции получена локализация собственных чисел положительного, нейтрального и отрицательного типов, когда $K(t) = 0$. В случае, когда $B = 0$, а $K(t)$ – ряд убывающих экспонент, спектральный анализ символа уравнения (1) проведён в левой полуплоскости в работе [5].

Главный результат данной работы состоит в установлении классической разрешимости системы уравнений (1) при $\alpha > 0$ и $K(t)$, представимого в виде ряда из экспонент, а также оценки нормы решения.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_0 \in Dom(A)$, $\psi_0 \in Dom(B^*)$, $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ тогда существуют и единственные функции $u(t), \rho(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, удовлетворяющие (1).*

Если, кроме того, $B^*B \geqslant \delta > 0$, то существуют $\omega, d > 0$, что справедлива оценка:

$$\|u\|_H^2 \leqslant d_0 e^{-2\omega t}(\|\varphi_0\|_H^2 + \|\psi_0\|_H^2) + \|f(t)\|_{C[0,t]}^2 .$$

Литература

1. *Д. А. Закора* Модель сжимаемой жидкости Максвелла // СМФН **63**:2 (2017), 247-265.

2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений.. — Москва: МАКС Пресс, 2016. – 488 с.

3. *А. И. Милославский* О спектре неустойчивости операторного пучка // Математические заметки **49**:4 (1991), 88-94.

4. *А. А. Шкаликов, Р. О. Гринив* О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением // Математичексие заметки **56**:2 (1994), 840-851.

5. *А. В. Давыдов, Ю. А. Тихонов* Исследование моделей Кельвина-Фойгта, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференциальные уравнения **54**:12 (2018), 1663-1677.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФЕЙНМАНА ПО ПРОСТРАНСТВУ ТРАЕКТОРИЙ

Е.Т. Шавгулидзе, А.К. Кравцева
shavgulidze@bk.ru, k-anna-k@mail.ru

В работе построено асимптотическое разложение аналитического интеграла Фейнмана от экспоненты с полиномом четвёртого порядка в показателе по пространству непрерывных траекторий с закреплёнными границами. Полученные результаты могут быть использованы для вычисления асимптотики интегралов, описывающих решения эволюционных уравнений.

Пусть Q — вещественное гильбертово пространство, $p_k\colon Q\times\ldots\times Q\to\mathbb{R}$ — k-линейные непрерывные симметричные формы, $k=1,2,3,4$, p_0 — комплексное число, t — положительное число. Определим функционал $v\colon Q\to\mathbb{R}$ формулой $v(q)=\sum\limits_{i=0}^{4}p_i(q,\ldots,q)$ и, используя линейность функционалов p_i, продолжим функционал v на $Q^{\mathbb{C}}$. Пусть после сдвига на вектор $z_0\in Q$ сумма многочленов p_i переходит в сумму многочленов q_k: $v(q+z_0)=\sum\limits_{i=0}^{4}p_i(q+z_0,\ldots,q+z_0)=\sum\limits_{i=0}^{4}q_k(z_0,\underbrace{q,\ldots,q}_{k})$. Предположим, что $p_4(q,q,q,q)>0$ для любых $q\in Q$, $q\neq 0$. Пусть $\widehat{l}(q)=(p_4(q,q,q,q))^{1/4}$, $\widehat{l}(x_1+x_2)\leqslant\widehat{l}(x_1)+\widehat{l}(x_2)$ для любых $x_1,x_2\in Q$. Определим операцию свёртки формулой $(f*g)(\tau)=\frac{1}{t}\int\limits_{-t}^{t}f(\tau_1)g(\tau-\tau_1)d\tau_1$. Обозначим за ϕ функцию, определяемую равенством $\phi(\tau)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\delta}}\cos\Big(\dfrac{\pi n\tau}{t}\Big)$. Пусть $\widehat{T}$ — самосопряжённый положительно-определённый ядерный оператор; функция $z_0\colon[0,t]\to Q^{\mathbb{C}}$ имеет вид $z_0(\tau)=(g_0*\phi)(\tau)$, где $g_0\in L_2([0,t],Q^{\mathbb{C}})$, и

$$\sum_{j=1}^{4}j\int\limits_0^t p_j((u*\phi)(\tau),\underbrace{z_0(\tau),\ldots,z_0(\tau)}_{j})d\tau+$$

$$+2\int\limits_0^t(\widehat{T}^{-1}z_0'(\tau),(u*\phi)(\tau))d\tau=0$$

для любых $u\in L_2([0,t],Q)$;

Шавгулидзе Евгений Тенгизович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Eugeniy Shavgulidze (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Кравцева Анна Константиновна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anna Kravtseva (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$\phi_1(\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2-2\delta}} \cos\left(\dfrac{\pi n \tau}{t}\right)$; оператор T определяется формулой $Th = \widehat{T}(h * \phi_1)$, где $h = u * \phi$, $u \in L_2([0,t], Q)$. И пусть

$$F(\lambda) = \int\limits_E \exp\left\{-i\lambda \int\limits_0^t v(x(\tau))d\tau - \frac{i\lambda}{2} \int\limits_0^t (\widehat{T}^{-1}x'(\tau), x'(\tau))d\tau\right\} dx,$$

$$\text{где } E = \left\{\begin{matrix} x \in C([0,t], Q) \\ x(0) = x(t) = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Тогда при некоторых условиях на q_k, z_0 и δ существуют операторы A и B, действующие на некотором подпространстве пространства $E^{\mathbb{C}}$ такие, что при $\lambda \to \infty$ функции $F(\lambda)$ соответствует асимптотический ряд

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma(z_0)}} \exp\left\{-i\lambda \int\limits_0^t \left(v(z_0(\tau)) + \frac{1}{2}(\widehat{T}^{-1}z_0'(\tau), z_0'(\tau))\right) d\tau\right\} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m! \lambda^m} \mathrm{Tr}T\left(\mathrm{Tr}T\left(\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{Tr}T\left(\exp\left\{-i\lambda \sum_{k=3}^{4} \int\limits_0^t q_k(z_0(\tau), \underbrace{A^{-1}x(\tau), \ldots}_{k})d\tau\right\}\right)'' \ldots\right)''\right)''\Bigg|_{x=0},$$

$$\text{где } \gamma(z_0) = \det(I + TB).$$

Результаты заметки получены в соавторстве с О.Г. Смоляновым.

ТЕОРЕМА ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ СТЕПЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С.Н. Туманов

tumanov.sergey@topofmind.ru

УДК 517.984, 517.927.25

Доказана полнота системы собственных функций оператора Шрёдингера с комплексным степенным потенциалом на полуоси с краевыми условиями Дирихле.

Ключевые слова: спектральная теория, полнота системы собственных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Туманов Сергей Николаевич, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergey Tumanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Completeness theorem for the system of eigenfunctions of the Schrödinger operator with the complex power potential.

The completeness for the system of eigenfunctions of the Schrödinger operator with the complex power potential on the semi-axis with Dirichlet boundary conditions is proved.

Keywords: spectral theory, completeness of the system of eigenfunctions.

Мы рассматриваем оператор

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha$$

на полуоси $x \in [0, +\infty)$ с краевыми условиями Дирихле в нуле. Константа $c \in \mathbb{C}$.

Известно, что резольвента $R(\lambda) = (\mathcal{L}_{c,\alpha} - \lambda)^{-1}$ убывает вне замкнутого сектора $\Lambda = \{\arg\lambda \in [0, \arg c]\}$ — числового образа $\mathcal{L}_{c,\alpha}$. Известно [1], что порядок оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ равен $(2+\alpha)/2\alpha$. Если функция f ортогональна всем собственным функциям оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$, то вектор-функция $R(\lambda)f = (\mathcal{L}^*_{c,\alpha} - \lambda)^{-1} f$ со значениями в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ является целой функцией порядка роста $2\alpha/(2+\alpha)$ и нормального типа (см. §4 [4]). Если раствор сектора Λ меньше $2\pi\alpha/(2+\alpha)$, т.е. если $|\arg c| < 2\pi\alpha/(2+\alpha)$, то из теоремы Фрагмена–Линделефа следует, что $R(\lambda)f \equiv 0$, откуда $f \equiv 0$, а это влечет полноту собственных функций оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$.

Эти идеи берут начало от работы Келдыша [3]. Конечно, такой подход не позволяет получить информацию, как растет функция $R(\lambda)f$ внутри сектора Λ. Априори, она экспоненциально растет в этом секторе. Но оказывается, что если вместо вектор-функции $R(\lambda)f$ рассмотреть скалярную целую функцию $(R(\lambda)f)(x)$, заморозив произвольную фиксированную точку x, то эта функция может оказаться убывающей в более широком секторе, чем $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. Это наблюдение оказывается решающим для доказательства теоремы о полноте при более слабых условиях на аргумент числа c. Реализовать такой план нам удалось при $\alpha = 2/3$.

Итак, наша основная теорема посвящена оператору

$$\mathcal{L}_c = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^{2/3}$$

и формулируется так

Теорема 1. *Найдется $\theta_0 \in (\pi/10, \pi/9)$ такое, что при всех $c \in \mathbb{C}$: $|\arg c| < \pi/2 + \theta_0$ система собственных функций оператора $\mathcal{L}_c$ будет полна в $L_2(\mathbb{R}_+)$.*

Источником вдохновения послужила статья Савчука и Шкаликова [1], в которой для операторов на полуоси вида

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha$$

была высказана гипотеза: найдется $\alpha_0 < 2/3$, такое, что система собственных функций $\mathcal{L}_{i,\alpha} = -d^2/dx^2 + ix^\alpha$ будет полной в $L_2(\mathbb{R}_+)$ при $\alpha \in (\alpha_0, 2/3]$.

Отметим, что задача полноты $\mathcal{L}_{i,\alpha}$ до настоящего времени не была решена даже для $\alpha = 2/3$ и в 2015 году была отмечена Я. Алмогом (Y. Almog) [2] как одна из актуальных открытых проблем. Полученная нами теорема, конечно же ее решает при $\alpha = 2/3$.

Литература

1. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функц. анализ и его прил., **51**:1 (2017), 82-98.

2. *Almog Y.* Materials of the workshop "Mathematical aspects of physics with non-self-adjoint operators". List of open problems // https://aimath.org/pastworkshops/nonselfadjoint.html

3. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР, **77**:1 (1951), 11-14.

4. *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром. // Успехи мат. наук, **71**:5 (2016), 113-174.

ФОМУЛЫ СЛЕДОВ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

З.Ю. Фазуллин

fazullinzu@mail.ru

УДК 517.984.46

В работе получена формула регуляризованного следа для ограниченных возмущений дискретных самосопряженных операторов с вычетом первой поправки теории возмущений. В качестве приложения рассмотрены возмущения оператором умножения на ограниченную измеримую функцию некоторых двумерных модельных дифференциальных операторов математической физики.

Ключевые слова: спектр, регуляризованные следы, дискретные операторы, возмущения, дифференциальные операторы в частных производных.

The formulas of the traces of bounded perturbations of two-dimensional model differential operators

In this work we deal with bounded perturbations of discrete self-adjoint operators. And we obtain for them the regularized trace formulas without the first correction term of the perturbation theory. As an application, we consider two-dimensional model differential operators of mathematical physics, which are perturbed by the multiplication by a bounded measurable function.

Keywords: spectrum, regularized traces, discrete operators, perturbations, partial differential operators.

Фазуллин Зиганур Юсупович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Ziganur Fazullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть $L_0 = L_0^*$ полуограниченный снизу оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с дискретным спектром $\sigma(L_0) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < ...)$, P_k – ортогональный проектор соответствующий λ_k.

Предположим, что

$$\inf_{k>>1}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0, \tag{1}$$

$r_n = 2^{-1}\min\{\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1}\}$ и существует последовательность d_n, такая, что $0 < d_n \leqslant r_n$, $\inf\limits_{n\geqslant 2} d_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z-\lambda_n|\leqslant d_n} \|R_{0n}(z)V\| = 0, \tag{2}$$

где $R_{0n}(z) = R_0(z) - (\lambda_n - z)^{-1}P_n$, $R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}$.

Если V – симметрический L_0-компактный в $\mathcal{H}$, то оператор $L = L_0 + V$ замкнут в $\mathcal{D}(L_0)$ и дискретен (теорема Като-Реллиха).

Справедливы следующие утверждения о локализации спектра и формуле регуляризованного следа для собственных чисел оператора L.

Теорема 1. *Пусть выполнены* (1) *и* (2)*. Тогда для собственных чисел μ оператора L из интервала $(\lambda_n - r_n, \lambda_n + r_n)$, при $n >> 1$ справедлива оценка:*

$$|\mu - \lambda_n| \leqslant C\,\|P_nV\|, \quad C > 0.$$

Пусть $\nu_n = \dim PanP_n$, $\mu_s^{(n)}$, $s = \overline{1,\nu_n}$ - собственные числа оператора L, „расщепленные“ возмущением V от спектра L_0. И $\alpha_n = trP_nVR_{0n}(\lambda_n)V$, $\Gamma_n = \left\{z : |z| = \frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}\right\}$, $\beta_n = -tr\left((2\pi i)^{-1}\oint\limits_{\Gamma_n} z(R_0(z)V)^3R(z)dz\right)$, где $R(z) = (L - z)^{-1}$, tr – след ядерного оператора.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2) *теоремы 1 и при* $n >> 1$

$$\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda_n} \lambda_k\alpha_k = o(\lambda_n), \quad \beta_n = o(1),$$

$$\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda_n}\sum_{\lambda_m\geqslant\lambda_{n+1}} trP_kVP_mV = o(\lambda_n).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k - \mu_s^{(k)}\right) + tr(P_kV)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\lambda_n}\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda_n} tr\left(P_kV^2 - (P_kV)^2\right). \tag{3}$$

Отметим, что правая часть формулы (3) для произвольных ограниченных самосопряженных возмущений равна нулю, если для функции распределения спектра оператора L_0 справедлива следующая оценка: $N(t, L_0) = o(t), t \to \infty$, (см. [1], теорема 5). Более того, теоремы 1 и 2 позволяют получить формулы следов типа Гельфанда-Левитана для возмущений некоторых модельных операторов математической физики оператором умножения на ограниченную измеримую функцию конечной гладкости:

1. Оператор Лапласа-Бельтрами на сфере S^2 ([2])

$$L_0 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}, \quad \mathcal{H} = L_2(S^2)$$

$$\sigma(L_0) = \{k(k+1)\}_{k=0}^{\infty}, \quad \nu_k = 2k+1, \quad N(t) = O(t), \quad t\to\infty$$

Теорема 3. *Пусть* $V(\theta,\varphi)\in W_2^1(S^2)$. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=-k}^{k}\left[k(k+1) + \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}V(s)ds - \mu_s^{(k)}\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S^2}V^2(s)ds - \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^2}\int\limits_{S^2}\frac{V(s)V(s_0)}{\sqrt{1-(\overrightarrow{s},\overrightarrow{s_0})^2}}dsds_0$$

где $\overrightarrow{s} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$, $\overrightarrow{s_0} = (\cos\varphi_0\sin\theta_0, \sin\varphi_0\sin\theta_0, \cos\theta_0)$.

2. Двумерный гармонический осциллятор ([3])

$$L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + x_1^2 + x_2^2, \qquad \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2),$$

$$\sigma(L_0) = \{2(k+1)\}_{k=0}^{\infty} \quad \nu_k = k+1, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$N(t, L_0) = O(t^2), \quad t\to\infty.$$

Теорема 4. *Пусть* $V(x_1,x_2)\in C_0^{(4)}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathrm{tr}P_kV + \sum_{s=0}^{k}\left(2(k+1) - \mu_s^{(k)}\right)\right] = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}V^2(x)dx.$$

3. Двумерный гармонический осциллятор в полосе ([4])

$$L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + x_1^2, \quad \mathcal{H} = L_2(\Pi), \quad \Pi = \{x = (x_1,x_2) : x_1\in\mathbb{R}, x_2\in[0,\pi]\}$$

$$D(L_0) = \left\{u(x_1,x_2) : u\in W_2^2(\Pi), u(x_1,0) = u(x_1,\pi) = 0\right\}$$

$$\sigma(L_0) = \{k\in\mathbb{N}\setminus\{1,3\}\}, \nu_k \cong \left[\frac{\sqrt{k}}{2}\right], N(t,L_0) = O(t^{\frac{3}{2}}), t\to\infty$$

Теорема 5. *Пусть* $V(x)\in C_0^{(2)}(\Pi)$. *Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}/\{1,3\}}\left[\sum_{s=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k - \mu_s^{(k)}\right) + tr(P_kV)\right] = \frac{1}{12\pi}\int\limits_{\Pi}V^2(x)dx.$$

4. Двумерный оператор Шредингера в однородном магнитном поле ([5]).

$$L_0 = \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\right)^2, \qquad \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2),$$

$$\sigma(L_0) = \{2(2k+1)\}_{k=0}^{\infty} \quad \text{(уровни Ландау)}, \quad \nu_k = \infty.$$

Теорема 6. *Пусть* $V \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда справедлива формула следа*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=-k}^{\infty}(\lambda_k - \mu_k^{(i)}) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} V(x)dx\right) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} V^2(x)dx.$$

Литература

1. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Матем. сборник, **196**:12 (2005), 123–156.

2. *Садовничий В. А., Фазуллин З. Ю., Атнагулов А. И.* Свойства резольвенты оператора Лапласа на двумерной сфере и формула следов // Уфимск. матем. журн., **8**:3 (2016), 22–40.

3. *Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х.* Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Матем. сборник, **192**:2 (2001), 109–138.

4. *Фазуллин З. Ю., Нугаева И.Г.* Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармоническкго осциллятора в полосе // Дифференц. уравнения, **55**:5 (2019), 691–701.

5. *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* Спектр и формула следов двумерного оператора Шрёдингера в однородном магнитном поле // Дифференц. уравнения, **45**:4 (2009), 549–563.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА. МЕТОД ГАЛЕРКИНА-ПЕТРОВА ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ.

И.Д. Цопанов, А.К. Баззаев

55tsopanovig@gmail.com, al.bazzaev@gmail.com

УДК 517.984

Получены формулы регуляризованных следов для возмущений дискретного спектрального оператора оператором Гильберта – Шмидта. Доказана применимость метода Галеркина – Петрова для приближенного вычисления собственных значений для таких возмущений.

Ключевые слова: собственные значения, спектральный оператор, оператор Гильберта – Шмидта, метод Галеркина – Петрова

Цопанов Игорь Дзастемирович, к.ф.-м.н., доцент, Владикавказский институт управления (Владикавказ, Россия); Igor Tsopanov (Vladikavkaz Institute of Management, Vladikavkaz, Russia)

Баззаев Александр Казбекович, к.ф.-м.н., СОГУ имени К.Л. Хетагурова (Владикавказ, Россия); Владикавказский институт управления (Владикавказ, Россия); Alexander Bazzaev (North-Ossetian State University, Vladikavkaz, Russia), (Vladikavkaz Institute of Management, Vladikavkaz, Russia)

Regularized traces for perturbations of the spectral operator. The Galerkin-Petrov method for calculating eigenvalues.

Formulas of regularized traces are obtained for perturbations of a discrete spectral operator by the Hilbert – Schmidt operator. The applicability of the Galerkin – Petrov method for the approximate calculation of eigenvalues for such perturbations is proved.

Keywords: eigenvalues, spectral operator, Hilbert – Schmidt operator, Galerkin – Petrov method

Пусть T – дискретный спектральный оператор [1] в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть T представим в виде $T = S + N$, где S – спектральный оператор скалярного типа [1], корневые векторы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ которого образуют базис Рисса, а N – квазинильпотентный оператор, каждое ограничение которого на корневое подпространство является конечномерным нильпотентным оператором. Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ – корневые векторы оператора S^*. Будем считать, что функция распределения спектра оператора T удовлетворяет условию $\varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r^\alpha} = \varepsilon < \infty$ $0 < \alpha \leqslant 1$. Рассмотрим возмущение оператора T произвольным ограниченным оператором B. Верна

Теорема 1. Корневые подпространства оператора $T+B$ образуют базис Рисса из подпространств в H.

Теорема 2. Пусть B – оператор Гильберта-Шмидта в H. Если $s \in \mathbb{N}$, то существует подпоследовательность натурального ряда $\{M_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$:

$$\lim_{\nu\to\infty} \Big\{ \sum_{m=1}^{M_\nu} \Big[\mu_m^s - \lambda_m^s - s\lambda_m^{s-1}(B\varphi_m, \psi_m)\Big] +$$

$$+ c_\nu(s) - \sum_{k=2}^{s-1} \sum_{m_1=\dots=m_k=1}^{M_\nu} c_{s-k}\ (B\varphi_{m_1}, \psi_{m_k}) \prod_{j=2}^{k} (B\varphi_{m_j}, \psi_{m_{j-1}}) \Big\} =$$

$$= \kappa_s\, Tr(G^{-1}B^sG),$$

где

$$\kappa_s = \begin{cases} 1, \ if\ s \geqslant 2 \\ 0, \ if\ s = 1 \end{cases}, \quad c_\nu(1) = 0,\ c_{s-k} = [\lambda^s : \lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_k}, \lambda_{m_k}].$$

Здесь G – ограниченный обратимый оператор на H такой, что для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=0}^{\infty} : \varphi_i = Ge_i, \psi_j = (G^{-1})^* e_j\ \forall\, i, j = 0, 1, 2, \dots$ Для c_{s-k} использован символ разделенной разности [2].

Формулы, приведенные в теореме 2, называют обычно формулами регуляризованных следов.Существенный вклад в их развитие внесли академик В.А. Садовничий и его ученики. В [8] приведен обзор этой теории. В [6] исследуются формулы регуляризованных следов возмущений из классов Шаттена – фон Неймана.

Рассмотрим в качестве модельного примера задачу Ионкина. Дифференциальный оператор T здесь определяется равенствами

$$Ty = -y'',\ 0 < x < 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = y'(1), \tag{3}$$

Спектральные свойства оператора (3) изучены в работе [4].

Для сопряженной задачи $T^*y = -y'', y'(1) = 0, y(0) = y(1)$, имеем $\psi_0 = 2, \psi_{2k-1}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx), \psi_{2k} = 4x\cos(2\pi kx), k \in \mathbb{N}$, где $T^*\psi_{2k} = \lambda_k\psi_{2k},\ T^*\psi_{2k-1} = \lambda_k\psi_{2k-1} + p_k\psi_{2k},\ p_k = 4k\pi, k \in \mathbb{N}$, т.е. ψ_{2k-1} – присоединенный вектор, а ψ_{2k} – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_k. При такой нумерации выполнены соотношения биортогональности $(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$.

Рассмотрим спектральную задачу $(T+B)y = \mu\, y$ с точки зрения применимости метода Галеркина-Петрова [5] с системами координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, где B – произвольный ограниченный оператор . Приближение для собственных функций здесь ищется в виде $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(n)}\varphi_k$, где коэффициенты $c_k^{(n)}$ – решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}[\mu\ \delta_{kj} - ((T+B)\varphi_k, \psi_j)] = 0, \qquad j = 1, 2,\ \ldots, n.$$

Обозначим определитель этой системы через $\delta_n = \delta_n(\mu)$. Нули этого определителя и являются приближенными значениями собственных значений исходной спектральной задачи. Докажем, что выполнены соотношения сходимости:

$$\lambda_k^{(n)} \quad \to \quad \lambda_k \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \forall\ k = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

Следуя [7], сделав замену $y = (T+E)^{-1}u$ и введя обозначения $S = (B - E)(T+E)^{-1}$, $A = (T+E)^{-1}$, получим

$$(E + S - \mu\, A)u = 0,$$

где операторы A и $S = (B - E)A$ – ядерные. Следовательно, корректно определен характеристический определитель ядерного оператора $L = L_\mu = -S + \mu\, A$:

$$\Delta(\mu) = det(E - L(\mu)) \overset{def}{=} \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \lambda_k(L_\mu)),$$

где $\lambda_k(L)$ – собственные значения оператора L. Согласно [3] имеем

$$\Delta(\mu) = \det \|((E + S - \mu\, A)\varphi_k, \psi_j)\|_{k,j=1}^{\infty}.$$

Отметим, что $\mu_* \in \mathbb{C}$ является собственным значением исходной задачи тогда и только тогда, когда $\Delta(\mu_*) = 0$. Обоснование этого проводится с помощью неравенства Карлемана.

Из теоремы Гурвица получим справедливость следующего предложения.

Теорема 3. В любой ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$ нули определителя $\Delta_n(\lambda)$ равномерно сходятся (их конечное число) к соответствующим нулям функции $\Delta(\lambda)$. Следовательно, получаем, что нули определителя системы Галеркина-Петрова совпадают с нулями определителя $\Delta_n(\mu)$, для которых выполняются соотношения сходимости.

Литература

1. *Данфорд Н., Шварц Д.* Теория операторов. Т. III. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.— 663 с.

2. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.— 376с.

3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448с.

4. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, **13**:2 (1977), 294-304.

5. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 455 с.

6. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* Формула регуляризованного следа для возмущений из класса Шатена–фон Неймана дискретных операторов // Уфимск. матем. журн., **7**:4 (2015), 109-115.

7. *Нейман-Заде М. И., Шкаликов А. А.* О вычислении собственных значений задачи Орра-Зоммерфельда // Фундам. и прикл. матем., **8**:1 (2015), 301-305.

8. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы дискретных операторов// Успехи математических наук, **61**:5 (2006), 89-156.

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В L_2

М.Ш. Шабозов

shabozov@mail.ru

УДК 517.5

В докладе излагаются точные неравенства типа Колмогорова для последовательности производных периодических функций двух переменных и наилучших приближений последовательности производных функций тригонометрическими “углами” в пространстве $L_2(Q)$ $Q := \{0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi\}$.

Ключевые слова: неравенства типа Колмогорова, тригонометрические “угли”, квазиполином, наилучшее приближение.

Шабозов Мирганд Шабозович, д.ф.-м.н., профессор, Таджикский национальный университет (Душанбе, Республика Таджикистан); Mirgand Shabozov, professor, Tajik National University (Dushanbe, Republic of Tajikistan)

Kolmogorov type inequality for the functions of two variable in L_2

In this speech will delivered about the exact inequalities of Kolmogorov type for a sequence derivatives of functions of two variables and the best approximate sequential derivatives of functions by trigonometric “angle” in $L_2(Q)$ $Q := \{0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi\}$.

Keywords: Kolmogorov type inequality, trigonometric “angle”, quasipolynomial, the best approximation

В монографии [1] приведены и систематизированы результаты исследований по неравенствам для норм промежуточных производных (неравенствам типа Колмогорова) функций с различными областями определения, как классических, так и полученных в последнее время. При этом основное внимание уделено точным неравенствам такого типа. В [2] приведен обстоятельный обзор неравенств типа Колмогорова, где получены наилучшие константы и анализируется их связь с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования на различных классах функций. Следует отметить, что почти все результаты в [1] и [2] получены для вещественнозначных функций одного переменного. Естественно, что представляет большой интерес получение неравенств типа Колмогорова для функций многих переменных, где получены значительно меньше результатов. Здесь излагаем некоторые результаты для периодических дифференцируемых функций двух переменных в $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f^2(x,y)dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ — множество функций $f \in L_2$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}$, $\mu = \overline{0, r-1}$, $s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)} \in L_2$.

Дифференцируя формально равенство

$$f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)},\ c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) e^{-i(px+qy)} dxdy$$

r-раз по переменному x и s-раз по переменному y в смысле сходимости в метрике L_2, запишем

$$f^{(r,s)}(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (ip)^r (iq)^s c_{pq}(f) e^{i(px+qy)},$$

откуда сразу вытекает равенство

$$\|f^{(r,s)}\|_{L_2} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} p^{2r} q^{2s} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{pq}^2(f),$$

где
$$\rho_{pq}^2(f) = |c_{-p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{p,q}(f)|^2.$$

Для функции $f \in L_2^{(r,s)}$, её частных производных $f^{(r,0)}$ $(r \in \mathbb{N})$, $f^{(0,s)}$ $(s \in \mathbb{N})$, а также смешанных производных $f^{(r-k,s-l)}$ $(k, l \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \leqslant k \leqslant r,$ $0 \leqslant l \leqslant s)$ в силу равенства Парсеваля имеем:

$$\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f),\ \|f^{(r,0)}\|_{L_2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}\rho_{p,q}^2(f),$$

$$\|f^{(0,s)}\|_{L_2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f),$$

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2(r-k)}q^{2(s-l)}\rho_{p,q}^2(f).$$

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(r,s)}$ $(r, s = 2, 3...)$ *при всех* $k = \overline{1, r-1}$ *и* $l = \overline{1, s-1}$ *имеют места неравенства*

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_2}^{kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}. \tag{1}$$

Знак равенства в (1) реализуется, например, функцией

$$f_0(x, y) = \gamma \cos m(x+\alpha) \cdot \cos n(y+\beta) \in L_2^{(r,s)},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := span\left\{u_0(x), u_1(x), \ldots u_m(x)\right\},\ V_n := \{v_0(y), v_1(y), \ldots v_n(y)\}$$

их конечномерные подпространство, то есть $U_m \subset X,\ V_n \subset Y$.

Выражение вида

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{p=0}^{m} u_p(x)\psi_p(y) + \sum_{q=0}^{n} v_q(y)\phi_q(x),$$

где $\{\phi_q(x)\}_{q=0}^n$ и $\{\psi_p(y)\}_{p=0}^m$ — наборы произвольных функций, соответственно из пространств X и Y назовем тригонометрическом “углом” [3-4], или обобщенным полиномом (квазиполиномом), порожденным подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство пространств $Z := Z(Q)$, которое обозначим

$$G(U_m, V_n) : U_m \otimes Y + V_n \otimes X,$$

где операции "$\otimes$" и "$+$" обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_Z ;= \mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G(U_m, V_n)\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m > r \geqslant k \geqslant 1,\ n > s \geqslant l \geqslant 1,\ m, n, r, s, k, l \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольной функции* $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ *имеет место неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_{L_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f\right)_{L_2}\right)^{kl/rs} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2}\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\frac{l}{s}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2}\right)^{\frac{k}{r}\left(1-\frac{l}{s}\right)} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2}\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\left(1-\frac{l}{s}\right)},$$

которое является точным в вышеуказанном смысле.

Отметим, что теорема 2 доказывается по схеме рассуждений приведенной в [5], где найдены неравенство типа Колмогорова для функций двух комплексных переменных в пространстве Бергмана.

Литература

1. *Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.

2. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук, **51**:6 (1996), 89-124.

3. *Потапов М.К.* О приближении "углом" // Proceedings of the conference on constructive theory of functions, Akademiai Kiado, Budapesht, 1972, 371-399.

4. *Потапов М.К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения "углом" // Тр. МИАН СССР. **117** (1972), 256-291.

5. *Шабозов М.Ш., Сайнаков В.Д.* О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных // Труды ИММ УрО РАН, **23**:4 (2018), 295-309.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

И.А. Шейпак

iasheip@yandex.ru

УДК 517.518.23

Изучается связь норм операторов вложения пространства $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n\,[-1;1]$ в $\overset{\circ}{W}{}_\infty^k\,[-1;1]$ с нормами функционалов $f \mapsto f^{(k)}(x)$ в пространстве $\mathcal{H}$. Для каждой фиксированной точки x обозначим норму функционала через $A_{n,k}(x)$. Для каждого натурального n и четного $k \leqslant n-1$ найдено явное значение $A_{n,k}(0)$, которое является глобальным максимумом функции $A_{n,k}(x)$. Это значение также является точной константой вложения в указанных пространствах.

Ключевые слова: пространства Соболева, константы вложения

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Шейпак Игорь Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Igor Sheipak (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Sharp estimates of even order derivatives in Sobolev spaces

We study the relation of embedding operators norms from space $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n [-1;1]$ in $\overset{\circ}{W}{}_\infty^k [-1;1]$ with norms of functionals $f \mapsto f^{(k)}(x)$ in space $\mathcal{H}$. For each fixed point x we denote the functional norm by $A_{n,k}(x)$. For each natural n and even $k \leqslant n-1$, explicit values $A_{n,k}(0)$ are found, which are the global maximum of the function $A_{n,k}(x)$. This value is the exact embedding constant in the specified spaces.

Keywords: Sobolev spaces, embedding constants

Определим величины $A_{n,k}(x)$ как нормы функционалов $f \mapsto f^{(k)}(x)$, действующих в пространстве $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n [-1;1]$:

$$A_{n,k}(x) := \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}=1} |f^{(k)}(x)|.$$

Целью данного исследования является установление точного значения

$$\Lambda_{n,k} := \sup_{x\in[-1;1]} A_{n,k}(x),$$

которое называют константой вложения пространства Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n [-1;1]$ в $\overset{\circ}{W}{}_\infty^k [-1;1]$. Намного удобнее работать с квадратом этих величин, поэтому $\Lambda^2_{n,k}$ также называют константами вложения.

В работе [1] были получены формулы для констант $\Lambda^2_{n,0}$, $\Lambda^2_{n,1}$ и $\Lambda^2_{n,2}$, а также установлена связь между константами вложения и первообразными полиномов Лежандра. В работе [2] получены локальные свойства функций $A^2_{n,k}(x)$ и предъявлены формулы для $\Lambda^2_{n,4}$ и $\Lambda^2_{n,6}$.

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему в пространстве $L_2[-1;1]$ и определяются формулой Родрига

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}.$$

Первообразная порядка $m > 0$ определяется формулой

$$P_n^{(-m)} := \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n-m)}.$$

Последовательно доказываются следующие факты.

Лемма 1. *Функции $A^2_{n,k}(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$A^2_{n,k}(x) = A^2_{n-2,k-2}(x) - \left(P_{n-2}^{(k-n)}(x)\right)^2\left(n-\frac{3}{2}\right) - \left(P_{n-1}^{(k-n)}(x)\right)^2\left(n-\frac{1}{2}\right).$$

Лемма 2. *Для величин $A^2_{n,k}(x)$ справедливо соотношение*

$$\frac{dA^2_{n,k}(x)}{dx} = -P_{n-1}^{(k-n+1)}(x)\cdot P_n^{(k-n+1)}(x).$$

Теорема 1. *Точка $x = 0$ является точкой глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$ на отрезке $[-1;1]$.*

С помощью лемм 1, 2 и теоремы 1 доказывается следующий основной результат.

Теорема 2. *Точные значения констант вложения на отрезке $[-1;1]$ при $k = 2l$, $l = 0, 1, \ldots$ имеют вид*

$$\Lambda^2_{n,k} := A^2_{n,k}(0) = \frac{((k-1)!!)^2}{2^{2n-k-1}((n-(k/2)-1)!)^2(2n-2k-1)}.$$

Литература

1. *Калябин Г.А.* Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}^n_2\ [0;1]$ // Труды МИАН, **269** (2010), 143-149.

2. *Мукосеева Е.В., Назаров А.И.* О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения // Зап. научн. сем. ПОМИ, **425** (2014), 35-45.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.Н. Ярметова

tagirova_rena@mail.ru

УДК 517.984

Доклад посвящен исследованию спектральных свойств операторов, порожденных в гильбертовом пространстве $L^2(-\infty, +\infty)$ симметрическими дифференциальными выражениями с полиномиальными коэффициентами и их степенями. Рассматривается случай, когда в базисе функций Чебышева-Эрмита им соответствуют двухдиагональные обобщенные якобиевы матрицы. Найдены дефектные числа таких операторов, построены примеры целых дифференциальных операторов минимального типа, которые порождаются иррегулярными дифференциальными выражениями.

Ключевые слова: симметрические дифференциальные и разностные операторы, обощенные якобиевые матрицы, индекс дефекта, самосопряженные расширения, спектр

Ярметова Рена Насировна, аспирант, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Rena Yarmetova (Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk, Russia)

Differential operators with polynomial coefficients

The report is devoted to the study of the spectral properties of the operators generated in a Hilbert space $L^2(-\infty, +\infty)$ symmetric differential expressions with polynomial coefficients and their powers. The case is considered when, in the basis of Chebyshev-Hermite functions, they correspond to two-diagonal generalized Jacobi matrices. The deficiency indecies of such operators are found, examples of entire differential operators of minimal type are constructed, which are generated by irregular differential expressions.

Keywords: symmetric differential and difference operators, generalized Jacobi matrix, deficiency index, self-adjoint extensions, spectrum

В докладе будет рассмотрено симметрическое дифференциальное выражение порядка $n = 2k + m \geqslant 3$ вида

$$l = \sum_{i=0}^{k} \{h_i a^{*i+m} a^i + \overline{h}_i a^{*i} a^{i+m}\},$$

где $m \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$ – целые числа, $h_0, h_1, \ldots, h_k$ – произвольные комплексные числа, $h_k \neq 0$, и

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx}), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx}).$$

В этом случае матричным представлением минимального замкнутого симметрического оператора L, порожденного дифференциальным выражением l в пространстве $L^2(-\infty, +\infty)$, в базисе функций Чебышева-Эрмита является якобиева матрица, в которой только элементы двух диагоналей отличны от нуля, а именно диагонали с номером m выше и ниже главной (нулевой) диагонали. Исходя из этого, найдены дефектные числа оператора L, порожденного дифференциальным выражением l и его степенями.

В докладе также будут приведены примеры операторов, порожденных дифференциальными выражениями не более третьего порядка с полиномиальными коэффициентами и их степенями в пространстве $L^2(-\infty, +\infty)$, дефектные числа которых могут оказаться не только меньше или равны, но, что особенно интересно, и больше порядка соответствующих дифференциальных выражений.

Доклад основан на совместной статье [1].

Литература

1. *К.А. Мирзоев, Н.Н. Конечная, Т.А. Сафонова, Р.Н. Тагирова* Обобщенные якобиевы матрицы и спектральный анализ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, **152** (2018), 91-102.

ON THE SOLVABILITY IN A WEIGHT SPACE OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A CLASS FOURTH-ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.R. Aliev
alievaraz@yahoo.com

UDC 517.95

In a Sobolev-type space with an exponential weight, sufficient conditions are founded for the well-posed and unique solvability of a boundary value problem for one class fourth-order operator-differential equations with multiple characteristics.

Keywords: boundary-value problem, operator-differential equation, Hilbert space, self-adjoin operator, regular solvability
MSC: 35G15, 47D03

In a separable Hilbert space H, we consider a boundary-value problem

$$\left(-\frac{d}{dx}+A\right)^3\left(\frac{d}{dx}+A\right)u(x)+$$

$$\sum_{j=1}^{4} A_j\frac{d^{4-j}u\,(x)}{dx^{4-j}}=f\,(x)\,,\ x\in R_+=[0,+\infty)\,, \tag{1}$$

$$u\,(0)=0, \tag{2}$$

where $f\,(x)$ and $u\,(x)$ are H-valued functions, A is a self-adjoint positive-definite operator with lower boundary of the spectrum λ_0 ($A=A^*\geqslant\lambda_0 E$ ($\lambda_0>0$), where E is the identity operator), and A_j, $j=1,2,3,4$, are linear, generally, unbounded operators.

Note that equations of the form (1) are encountered in applications, in particular, in the problems of stability of plates made of plastic materials (see [1]).

We introduce the following Hilbert spaces with exponential weight $e^{-\kappa x/2}$, $\kappa\in R=(-\infty,+\infty)$:

$$L_{2,\kappa}\,(R_+;H)=\left\{v\,(x):\|v\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}=\left(\int_0^{+\infty}\|v\,(x)\|_H^2\,e^{-\kappa x}dx\right)^{1/2}<+\infty)\right\},$$

$$W_{2,\kappa}^4\,(R_+;H)=\Big\{v\,(x):\|v\|_{W_{2,\kappa}^4(R_+;H)}=$$

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^4u\,(x)}{dx^4}\right\|_H^2+\left\|A^4u\,(x)\right\|_H^2\right)e^{-\kappa x}dx\right)^{1/2}<+\infty\right\}.$$

Let

$$W_{2,\kappa}^4\,(R_+;H;\{0\})=\left\{v\,(x):v\,(x)\in W_{2,\kappa}^4\,(R_+;H)\,,v\,(0)=0\right\}$$

and let P_0 denote an operator from the space $W_{2,\kappa}^4\,(R_+;H;\{0\})$ to $L_{2,\kappa}\,(R_+;H)$ defined as

$$P_0u(x)\equiv\left(-\frac{d}{dx}+A\right)^3\left(\frac{d}{dx}+A\right)u(x),\ u(x)\in W_{2,\kappa}^4\,(R_+;H;\{0\})\,.$$

This work is supported by the ”University Grant” of the ASOIU (no. ADNSU-2018-1-01).
Aliev A.R. (Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan)

Definition. Suppose that for any $f(x) \in L_{2,\kappa}(R_+;H)$ there exists a function $u(x) \in W^4_{2,\kappa}(R_+;H)$ satisfying equation (1) almost everywhere in R_+ and boundary condition (2) in the sense that

$$\lim_{x\to 0}\left\|A^{7/2}u(x)\right\|_H = 0,$$

and, moreover,

$$\|u\|_{W^4_{2,\kappa}(R_+;H)} \leqslant const\,\|f\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}\,.$$

Then the boundary value problem (1) and (2) is said to be *regularly solvable.*

The following theorems is valid.

Theorem 1. *Suppose that* $A = A^* \geqslant \lambda_0 E$ $(\lambda_0 > 0)$ *and* $\kappa \in (-2\lambda_0, 2\lambda_0)$. *Then the operator* P_0 *is an isomorphism between the spaces* $W^4_{2,\kappa}(R_+;H;\{0\})$ *and* $L_{2,\kappa}(R_+;H)$.

Theorem 2. *Suppose that* $A = A^* \geqslant \lambda_0 E$ $(\lambda_0 > 0)$, $\kappa \in (-2\lambda_0, 2\lambda_0)$ *and, the operators* $A_j A^{-j}$, $j = 1,2,3,4$, *are bounded in* H, *moreover, the following inequality holds true*

$$\sum_{j=1}^{4} N_j \left\|A_j A^{-j}\right\|_{H\to H} < 1,$$

where

$$N_j = \sup_{0\neq u\in W^4_{2,\kappa}(R_+;H;\{0\})}\left(\left\|A^j\frac{d^{4-j}u}{dx^{4-j}}\right\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}\|P_0 u\|^{-1}_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}\right),\ j = 1,2,3,4.$$

Then the boundary-value problem (1) *and* (2) *is regularly solvable.*

Note that the well-posed and unique solvability of equation (1) on the whole axis was studies in [2]. The Fredholm property of the boundary-value problems on the semi-axis and on a finite interval for equations of the form (1) was considered in [3].

References

1. *Teters G.A.* Complex Loading and Stability of the Covers from Polymeric Materials. Zinatne Press, Latvia, Riga, 1969. (in Russian)

2. *Aliev A.R., Mohamed A.S.* On a Class of Fourth-Order Operator-Differential Equations in Weighted Space. In the Book “Science in Universities: Mathematics, Computer Science, Physics, Education” (to the 110th Anniversary of the Mathematical Faculty of Moscow State Pedagogical University) - Moscow, Publishing House “Moscow State Pedagogical University”, 2010, 88-91.

3. *Shkalikov A.A.* Elliptic Equations in Hilbert Space and Associated Spectral Problems // J. Soviet Math., **51**:4 (1990), 2398-2467 (published in Trudy Sem. Petrovsk., 14 (1989), 140-224).

ON THE SOLVABILITY OF THE OPERATOR RICCATI EQUATION IN REFLEXIVE BANACH SPACE

N.V. Artamonov

nikita.artamonov@gmail.com

UDC 517.968.4

Let X be a reflexive Banach space. It is proved that the integral non-autonomous operator Riccati equation has a unique non-negative strongly continuous solution $P(t) \in \mathcal{L}(X, X^*)$

Keywords: operator Riccati equation, reflexive Banach space, operator-function

Operator Riccati equation arises in many applications. It is well-known that the solution of linear-quadratic control problem on finite interval can be obtained by solving differential Riccati equation.

We will use the following notations. If $X_{1,2}$ are Banach spaces, then by $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ we will denote the space of bounded operators acting from X_1 to X_2. By $C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X_1, X_2))$ we denote the space of strongly continuous operator functions on interval $\mathcal{I} = [0, T]$ with the topology of strongly uniform convergence. By definition the operator-function $P \in C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X_1, X_2))$ if and only if for all $x \in X_1$ the vector-function $P(\cdot)x \in C(\mathcal{I}; X_2)$.

An operator function $\{U_{t,s}\}_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T}$ on a Banach space is called *forward (in time) evolution family* if $U_{t,t} = I$ and $U_{t,s} = U_{t,r}U_{r,s}$ for all $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant T$. An operator function $\{V_{s,t}\}_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T}$ on a Banach space is called *backward (in time) evolution family* if $V_{t,t} = I$ and $V_{s,t} = V_{s,r}V_{r,t}$ for all $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant T$.

An evolution family is called *strongly continuous* if it is strongly continuous in t (for fixed s) and in s (for fixed t). Note that strongly continuous evolution family is not necessary jointly continuous.

Let X be a reflexive Banach space with duality pairing $\langle f, x \rangle$ ($x \in X, f \in X^*$). If $A_1 \in \mathcal{L}(X, X^*)$ then taking into account the canonical isomorphism between X and X^{**} one can consider that the adjoint operator $A_1^* \in \mathcal{L}(X, X^*)$. Operator $A_1 \in \mathcal{L}(X, X^*)$ is self-adjoint if $A_1 = A_1^*$. Self-adjoint $A_1 \in \mathcal{L}(X, X^*)$ is non-negative if $\langle A_1 x, x \rangle \geqslant 0$ for all $x \in X$.

Analogously if $A_2 \in \mathcal{L}(X^*, X)$ then one can consider that the adjoint operator $A_2^* \in \mathcal{L}(X^*, X)$. Operator $A_2 \in \mathcal{L}(X^*, X)$ is self-adjoint if $A_2 = A_2^*$. Self-adjoint operator $A_2 \in \mathcal{L}(X^*, X)$ is non-negative if $\langle x, A_2 x \rangle \geqslant 0$ for all $x \in X$.

Note that if $U_{t,s}$ is strongly continuous evolution family in reflexive space X then $V_{s,t} = U_{t,s}^*$ is strongly continuous backward evolution family in X^*.

Theorem 1. *Let X be a reflexive Banach space and the following assumptions hold:*

1. *$\{U_{t,s}\}_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T}$ is strongly continuous and uniformly bounded forward evolution family in $\mathcal{L}(X)$. Then $V_{s,t} = U_{t,s}^*$ is strongly continuous and uniformly bounded backward evolution family in $\mathcal{L}(X^*)$.*
2. *operator functions $C \in C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X, X^*))$ and $B \in C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X^*, X))$*
3. *$C(t) = C^*(t) \geqslant 0$ and $B(t) = B^*(t) \geqslant 0$ for all $t \in \mathcal{I}$.*

Nikita V. Artamonov (MGIMO-University, Moscow, Russia)

Then for all self-adjoint non-negative $G \in \mathcal{L}(X, X^*)$ the integral Riccati equation

$$P(t) = V_{t,T} G U_{T,t} + \int_t^T V_{t,s}\{C(s) - P(s)B(s)P(s)\}U_{s,t} ds$$

has a unique self-adjoint non-negative solution $P \in C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X, X^*))$.

Theorem 1 generalizes the results by Curtain & Pritchard, Lasiecka & Triggiani, Da Prato & Ichikawa to the case of arbitrary reflexive Banach space.

Some applications of Theorem 1 will be given during the talk.

References

1. *Артамонов Н.В.* О разрешимости интегрального уравнения Риккати в рефлексивном банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения, **55** (2019) (принято к публикации)

2. *Артамонов Н.В.* О разрешимости системы прямых-обратных линейных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Мат.заметки, **100**:5 (2016), 762-765

ON GLOBAL INVERSE FUNCTION THEOREMS

A.V. Arutyunov, S.E. Zhukovskiy

arutyunov@cs.msu.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

The question on the existence of a right inverse mapping to a smooth mapping acting between finite-dimensional linear spaces is considered. Sufficient conditions for existence of the right inverse mapping are obtained.

Keywords: inverse function, global homeomorphism.

Consider the equation

$$f(x) = y. \tag{1}$$

Here f is a continuous mapping between Banach spaces X and Y, $x \in X$ is an unknown variable, and $y \in Y$ is a parameter. Given a set $V \subset Y$, a function $g : V \to X$ is called a right inverse to f on V if $f(g(y)) = y$ for all $y \in V$. The existence of inverse function to f on the set V is equivalent to solvability of equation (1) for every $y \in V$. Hence, theorems on the existence and properties of inverse functions are applicable to equations in various areas of mathematics and play important role in optimization, ordinary differential equations, control theory, etc.

Let us consider one class of theorems on inverse functions, namely the global homeomorphism theorems. These assertions provide assumptions for the mapping f to be a homeomorphism or, equivalently, for equation (1) to have the only solution

---

The research was supported by the grant of the Russian Science Foundation (Project no. 17-11-01168)

Aram Arutyunov (Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia; V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia)

Sergey Zhukovskiy (Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudniy, Russia; V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia)

$x = g(y)$ for every $y \in Y$ continuously dependent on y. The classical result in this area is the Hadamard's Theorem. Let us recall it.

Hadamard's Theorem (see, for example, [1, Theorem 5.3.10]). *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be continuously differentiable, the linear mapping $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be invertible for every $x \in \mathbb{R}^n$, and there exist $c \geqslant 0$ such that*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x)^{-1} \right\| \leqslant c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Then f is a homeomorphism.

Some problems lead to the investigation of global solvability of equation (1) in the case when f a priori is not a homeomorphism, for example, when $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$ and $k < n$. In this case, there can be obtained conditions for existence of continuous right inverse function $g : Y \to X$. In our research, we have obtained these conditions under various differentiability assumptions on f in both finite-dimensional and infinite-dimensional case. In particular, for the case when the spaces X and Y are finite-dimensional, the following assertion was derived.

Below $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^k$ are real coordinate spaces with the norms denoted by $|\cdot|$. Given a linear operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, denote by $\mathrm{cov} A$ the supremum of all numbers $\alpha > 0$ such that $B_{\mathbb{R}^k}(\alpha) \subset AB_{\mathbb{R}^n}(1)$. Here $B_{\mathbb{R}^k}(\alpha)$ stands for the closed ball in $\mathbb{R}^k$ centered at zero with the radius α.

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ be a twice continuously differentiable mapping, $\alpha > 0$ be a given number. If*

$$\mathrm{cov} \frac{\partial f}{\partial x}(x) \geqslant \alpha \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

then for every $x_0 \in \mathbb{R}^n$, there exists a continuously differentiable mapping $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ such that

$$f(g(y)) = y, \quad |g(y) - x_0| \leqslant \frac{|y - f(x_0)|}{\alpha} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^k.$$

Note that the proof of the existence of the right inverse function g in this theorem is based on the theory of ordinary differential equations. In fact, $g(y)$ can be constructed as a value of a solution of a specific ordinary differential equation with a parameter y.

References

1. *Ortega J.M., Rheinboldt W.C.* Iterative solutions of nonlinear equations in several variables. — NY: Academic Press, 1970.

UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR ONE CLASS OF FREDHOLM – STIELTJES EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH THO VARIABLES

A. Asanov, Z.A. Kadenova

avyt.asanov@mail.ru, kadenova71@mail.ru

UDC 517.968

This report is devoted to the study of the uniqueness of solutions linear integral equations of the first kind with two independent variables in which the operator generated by the kernel, is not compact operator. The relevance of the problem is due to the needs in development of new approaches for the regularization and uniqueness of the solution of linear integral equations of the first kind with two independent variables. As of approximate solutions such tasks, stable to small variations of the initial data, we use the solutions derived by the method of regularization and belong to the class of incorrectly formulated tasks. One of the classes of such ill-posed problems are integral equations of the first kind with two independent variables. The aim of the work is the proof of the theorems of uniqueness for solving of Fredholm-Stielties linear integral equations of the first kind with two independent variables. In the paper a theorem is proved the uniqueness of the solution of Fredholm-Stielties integral equations of the first kind with two independent variables.To obtain formulated in the article the results of used methods of functional analysis. The obtained results are new. The reliability of the result set of evidence and is illustrated by examples.The work has a theoretical character. The obtained theoretical results can be applied in various fields of science and technology method of nonnegative quadratic forms and the consept of derivative with respect to increasing function.

Keywords: Fredholm-Stieltjes inteqral equations, first kind, two variables, solution and uniqueness

Various issues concerning of integral equations of the first kind were studied in [1-7]. More specifically, fundamental results for Fredholm integral equations of the first kind were obtained in [6], where regularizing operators in the sense of M.M.Lavrent'ev vere constructed for solutions of linear Fredholm integral equations of the first kind. The regularization and uniqueness of solutions to systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind were investigated in [3, 4]. In this paper, while analizing the following integral equation.

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y) + \int_{t_0}^T Q(t,x,s)u(s,x)d\psi(s) +$$

$$\int_{t_0}^t \int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s) =$$

$$= f(t,x),\ (t,x) \in G = \left\{(t,x) \in R^2 : t_0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant b\right\}, \tag{1}$$

where

$$K(t,x,y) = \left\{ \begin{array}{l} A(t,x,y),\ t_0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ B(t,x,y),\ t_0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \end{array} \right\}$$

Avyt Avyt Asanov, Kyrgyz-Turkish Manas University, Kyrgystan
Zuula Kadenova, Institute of mathematics of NAS of the Kyrgyz Republic

$$Q(t,x,s)=\left\{\begin{array}{l} M(t,x,s),\ t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b, \\ \\ N(t,x,s),\ t_0\leqslant t\leqslant s\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b, \end{array}\right\}$$

$A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s), N(t,x,s), C(t,x,s,y)$ are given continuous functions, respectively on the domains

$$G_1=\{(t,x,y): t_0\leqslant t\leqslant T,\ a\leqslant y\leqslant x\leqslant b\};$$

$$G_2=\{(t,x,y): t_0\leqslant t\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant y\leqslant b\};$$

$$G_3=\{(t,x,s): t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b\};$$

$$G_4=\{(t,x,s): t_0\leqslant t\leqslant s\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b\};$$

$$G_5=\{(t,x,s,y): t_0\leqslant t\leqslant s\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b\}.$$

Here $u(t,x)$ and $f(t,x)$ are the unknown and given functions, respectively, $(t,x)\in G$, $\varphi(x)$ is the increasing continuous function in $[a,b], \psi(t)$ is the increasing continuous function in $[t_0,T]$.

Using $A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s)$ and $N(t,x,s)$ we define the following functions

$$\left\{\begin{array}{l} P(t,x,y)=A(t,x,y)+B(t,y,x),(t,x,y)\in G_1; \\ \\ H(t,x,s)=M(t,x,s)+N(s,x,t),(t,x,s)\in G_3 \end{array}\right\}$$

In this work for the investigation of the integral equation (1) we it is based on the notion of the derivative of function with respect to the strictly increasing function [8]. Then we need the concept of the denvative defined in the work [8]. Apparently the first notion of the derivative, with respect to the strictly increasing function, was introduced in [8].

Definition. The derivative of a function $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$ is the function $f_{\varphi}^{'}(x)$ whose value at $x\in(a,b)$

$$f_{\varphi}^{'}(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\varphi(x+\Delta)-\varphi(x)}, \tag{2}$$

where $\varphi(x)$ is the given strictly increasing continuous function in (a,b).

If the limit in (2) exists, we say that $f(x)$ is a differentiable function with respect to $\varphi(x)$. The first derivative $f_{\varphi}^{'}(x)$ may also be differentiable function with respect to $\varphi(x)$ at every point $x\in(a,b)$

$$f_{\varphi}^{'}(x)=(f_{\varphi}^{'}(x))_{\varphi}^{'},$$

is called the second derivative of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$ they would, with.

$$f_{\varphi}^{'}(x)=(f_{\varphi}^{(n-1)}(x))_{\varphi}^{'}$$

denoting the n-th derivative of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$.

Similarly, we define partial derivatives of functions of many variables.

In this work, on the basis of the consepts of the partial derivative of functions $P(t,x,y)$,$H(t,x,s)$ with respect to the increasing continuous functions $\varphi(x)$ and $\psi(t)$ and methods of functional analysis, the uniqueness theorems are proved for the integral equation (1).

References

1. Aparstyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. VSP. Utrecht, p.168, (2003).

2. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. VSP, Utrecht. p.272. (1998).

3. Imanaliev M.I. and Asanov A. On solutions of systems of Volterra nonlinear integral equations of the first kind // Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **309**:5 (1989), 1052-1055.

4. Imanaliev M.I. and Asanov A. On solutions of systems of nonlinear two-dimensional Volterra integral equations of the first kind // Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **317**:1 (1991), 330-333.

5. Lavrent'ev M.M. On-integral equations of first kind. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **127**:1 (1959), 31-33.

6. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. — AMS: Providence, R.I., 1986.

7. Imanaliev M.I. Asanov A. and Kadenova Z.A. A class of linear integral equations of the first kind with two independent variables. Doklady Mathematics, **89**:1 (2014), 98-102.

8. Asanov A. The denivative of a function by means of a increasing function. Fen Bilimleri Dergisi, Kyrgyz-Turkish Manas University, 1. 18-64 (2001).

ON SPECTRUM OF QUADRATIC OPERATOR PENCIL WITH SMALL PERIODIC $\mathcal{PT}$-SYMMETRIC PERTURBATION

D. Borisov
borisovdi@yandex.ru

UDC 517.984

We study the spectrum of a quadratic operator pencil with a small $\mathcal{PT}$-symmetric periodic potential and a fixed localized potential. We show that the essential spectrum has a band structure with bands usual and unusual gaps. These gaps can contain isolated eigenvalues and we study the existence and asymptotic behavior of such eigenvalues.

Keywords: operator pencil, $\mathcal{PT}$-symmetric perturbation, spectrum

The main object of our study is the quadratic operator pencil

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda) := -\frac{d^2}{dx^2} + V + \mathrm{i}\varepsilon\lambda\gamma + \varkappa - \lambda^2 \quad \text{in} \quad L_2(\mathbb{R}).$$

Here $\gamma \in C(\mathbb{R})$ is a real odd 2π-periodic function, $\varkappa \in \mathbb{R}$ is a fixed constant, $V \in C(\mathbb{R})$ is a real function decaying at infinity: $|V(x)| \leqslant Ce^{-\vartheta|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, where C, ϑ are some positive constants independent of x. The domain of $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ is the Sobolev space $H^2(\mathbb{R})$. We are interested in the behavior of the spectrum of the operator pencil $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ as $\varepsilon \to +0$.

As $\varepsilon = 0$, the essential spectrum of the pencil $\mathcal{H}_0$ is as follows. If $\varkappa \geqslant 0$, this is just two half-lines $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{H}_0 + \varkappa - \lambda^2) = (-\infty, -\sqrt{\varkappa}] \cup [\sqrt{\varkappa}, +\infty)$. As $\varkappa < 0$, the essential spectrum is a cross in the complex plane:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{H}_0 + \varkappa - \lambda^2) = \left\{\lambda = \mathrm{i}t : \; -\sqrt{|\varkappa|} \leqslant t \leqslant \sqrt{|\varkappa|}\right\} \cup \mathbb{R}.$$

By $B_r(a)$ we denote the ball $B_r(a) := \{\lambda : |\lambda - a| < r\}$. and we let $\lambda_0^{(m)} := \sqrt{\frac{m^2}{4} + \varkappa \operatorname{sign} m}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

The essential spectrum as $\varepsilon > 0$ is described in the next theorem.

Theorem 1. *For each $R > 0$ there exists $\varepsilon_0 > 0$ and $c > 0$ such that for all $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ the essential spectrum of $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ located inside the ball $B_R(0)$ is as follows. Outside the balls $B_{c\varepsilon}(\lambda_0^{(m)})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, and $B_{c\varepsilon}(0)$, the essential spectrum of $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ coincides with that of $\mathcal{H}_0 + \varkappa - \lambda^2$. Inside the balls $B_{c\varepsilon}(\lambda_0^{(m)})$, $\lambda_0^{(m)} \neq 0$, $\lambda_0^{(m)} \in \mathbb{R}$, the spectrum is a continuous arc in a complex plane with the following approximate parametric description:*

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda_0^{(m)} &\pm \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2\lambda_0^{(m)}}\sqrt{(\lambda_0^{(m)})^2\alpha_0^2(m) - s^2m^2 + O(\varepsilon^2)}\\ &+ \frac{\varepsilon^2}{4\lambda_0^{(m)}}\left(\frac{2\varkappa s^2}{(\lambda_0^{(m)})^2} - \frac{\alpha_0^2(m)}{2} + (\lambda_0^{(m)})^2\alpha_1(m)\right) + O(\varepsilon^3),\end{aligned}$$

$$\alpha_0(m) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\gamma(x)\sin mx\,dx,$$

$$\alpha_1(m) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\gamma(x)\left(u_+(x,m)\cos\frac{mx}{2} + u_-(x,m)\sin\frac{mx}{2}\right)dx,$$

Denis Borisov (Institute of Mathematics, Ufa Scientific Center, RAS, Ufa, Russia)

where $m \in \mathbb{Z}_+$ *and* $u_\pm$ *are the solutions to the boundary value problems*

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}-\frac{m^2}{4}\right)u_+(x,m)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\gamma(x)\cos\frac{m}{2}x-\alpha_0(m)\sin\frac{m}{2}x\right),\quad x\in(-\pi,\pi),$$
$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}-\frac{m^2}{4}\right)u_-(x,m)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\gamma(x)\sin\frac{m}{2}x-\alpha_0(m)\cos\frac{m}{2}x\right),\quad x\in(-\pi,\pi),$$
$$u_\pm\left(-\frac{1}{2},m\right)=(-1)^m u_\pm\left(\frac{1}{2},m\right),\qquad \frac{du_\pm}{dx}\left(-\frac{1}{2},m\right)=(-1)^m\frac{du_\pm}{dx}\left(\frac{1}{2},m\right),$$

orthogonal to $\cos\frac{m}{2}x$ *and* $\sin\frac{m}{2}x$ *in* $L_2(-\pi,\pi)$. *Inside the balls* $B_{c\varepsilon}(\lambda_0^{(m)})$ *with a non-zero pure imaginary* $\lambda_0^{(m)}\neq 0$, *the essential spectrum of* $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ *is pure imaginary. If* $\alpha_0(m)\neq 0$, *this part of the essential spectrum contains a gap* $\big(\beta_m^-(\varepsilon),\beta_m^+(\varepsilon)\big)$ *with the end-points obeying the asymptotics:*

$$\beta_m^\pm(\varepsilon)=\lambda_0^{(m)}\pm\frac{\mathrm{i}\varepsilon|\alpha_0(m)|}{2}-\frac{\varepsilon^2}{4\lambda_0^{(m)}}\left(\frac{\alpha_0^2(m)}{2}+|\lambda_0^{(m)}|^2\alpha_1(m)\right)+O(\varepsilon^3).$$

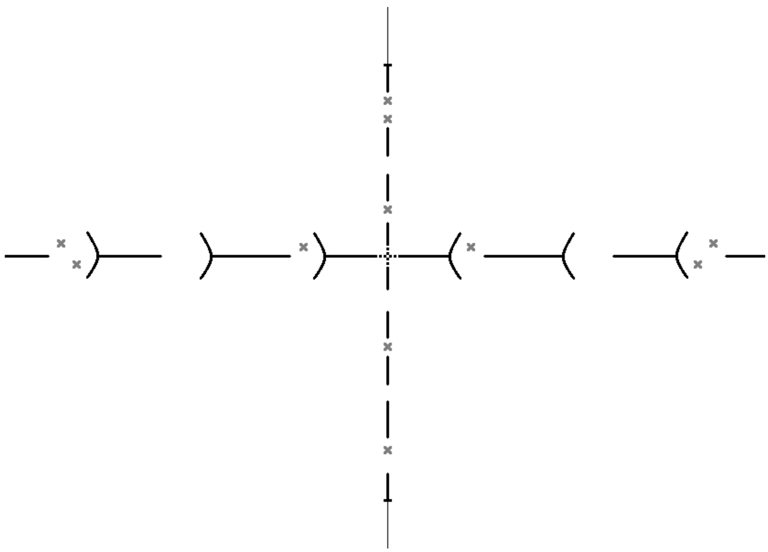

Figure 1.1: Approximate shape of the essential spectrum and possible isolated eigenvalues converging to the essential spectrum. The dotted lines at zero indicate that here the structure of the spectrum requires further studies not made in the present work.

As this theorem states, the essential spectrum has small gaps. Inside these gaps, the operator pencil $\mathcal{H}_\varepsilon$ can have isolated eigenvalues. We obtain condition ensuring the existence and absence of such eigenvalues in a given gap and describe their asymptotic behavior as $\varepsilon\to 0$. The conditions involve scattering data for the potential V and Fourier coefficients of the potential γ. In particular, we show that there can be no eigenvalues or up to two eigenvalues in each gap. The eigenvalues can be both real and imaginary. Their asymptotics are power in ε. An example of how the spectrum of $\mathcal{H}_\varepsilon$ can look like is given in Figure 1.

This is a joint work with G. Cardone.

OPERATOR ESTIMATES FOR PROBLEMS WITH OSCILLATING STEKLOV BOUNDARY CONDITION

A.G. Chechkina
chechkina@gmail.com

UDC 517.984.5

We consider boundary–value and spectral problems for the Laplacian in a domain with a smooth boundary. We assume that the homogeneous Dirichlet condition alternates with the Steklov condition on the boundary of the domain. We get the operator estimates for the convergence of solutions as a characterizing the frequency of the alternation small parameter tends to zero.

Keywords: homogenization, rapidly changing boundary conditions, Steklov–type problem, spectrum

We consider an elliptic problem in a domain with rapidly changing Steklov boundary conditions (previously such problems were considered in [1], [2], [3]).

Let $x = (x_1, x_2)$ be local coordinates in $\mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a connected domain with a non-empty boundary. We assume that the boundary of Ω is C^2-smooth and has a uniformly bounded curvature. The domain Ω can be both bounded or unbounded.

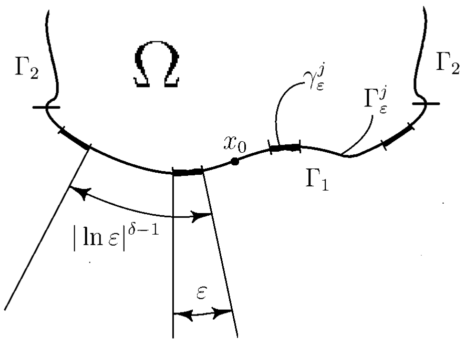

Figure 1.1: Domain Ω.

We choose a point $x_0 \in \partial\Omega$ and we consider Γ_1, the set of points $x(s) \in \partial\Omega$ such that $|s| < 1$, where s is the arc length measured from the point x_0. Consider $k \in \mathbb{Z}$ and let $s_k = k \cdot |\ln\varepsilon|^{\delta-1}$, $x_k = x(s_k)$, where $\delta \in (0,1)$ and ε is a small positive parameter. Denote $\Upsilon_\varepsilon = \{k : \big|k \cdot |\ln\varepsilon|^{\delta-1}\big| < 1\}$.

In other words, Γ_1 is a part of $\partial\Omega$ of length 2. By Γ_2 we denote the rest of the boundary, that is, $\Gamma_2 := \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}_1$. We suppose that the boundary $\partial\Omega$ is C^3-smooth

Aleksandra G. Chechkina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

in the vicinity of the part Γ_1. We suppose that Γ_1 consists of two rapidly alternating parts: $\Gamma_1 = \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$, where $\gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\Upsilon_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^k$, $\Gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\Upsilon_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon^k$ with the length $|\gamma_\varepsilon^k| = \varepsilon$, $\overline{\gamma}_\varepsilon^j \cup \overline{\Gamma}_\varepsilon^k = [x(s_k), x(s_{k+1})]$, $k \in \Upsilon_\varepsilon$. See Fig. 1.

In this paper, we consider the following eigenvalue problem:

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{H}}u_\varepsilon = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \lambda u_\varepsilon & \text{on} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on} \quad \gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

where

$$\widehat{\mathcal{H}} := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}A_j\Big) + A_0$$

is a differential operator. Here $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$ are given real functions defined in $\overline{\Omega}$. We suppose that $A_{ij}, A_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $A_0 \in C(\overline{\Omega})$, these functions are uniformly bounded in $\overline{\Omega}$, and $A_{ij} = A_{ji}$,

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant c_0 \sum_{j=1}^{2}\xi_j^2, \qquad x \in \overline{\Omega}, \quad (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

where $c_0 > 0$ is a fixed constant. The symbol $\frac{\partial}{\partial n}$ stands for the conormal derivative:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(x)\nu_i\frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{2} A_j\nu_j,$$

where $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ is the outward unit normal to $\partial\Omega$.

We consider the boundary value problem

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{H}}U_\varepsilon = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_0 U_\varepsilon = g & \text{on} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ U_\varepsilon = 0 & \text{on} \quad \gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

where $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ is a given function. We treat this problem in the weak sense and the solutions are sought in the Sobolev space $\mathring{H}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ consisting of the functions in $W_2^1(\Omega)$ having the zero trace on γ_ε.

Let $\mathcal{H}_\varepsilon$ be an operator in $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ mapping each $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ into the trace on $\partial\Omega$ of solution to problem (2); it is clear that this trace is zero on γ_ε. Then eigenvalue problem (1) can be rewritten as

$$\mathcal{H}_\varepsilon \mathfrak{u}_\varepsilon = \Lambda \mathfrak{u}_\varepsilon,$$

where $\mathfrak{u}_\varepsilon$ is the trace of U_ε on $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon$ and $\Lambda := (\lambda + \lambda_0)^{-1}$.

By $\mathcal{H}_0$ we denote the same operator as $\mathcal{H}_\varepsilon$ but for the case $\gamma_\varepsilon = \emptyset$, $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega$. It is clear that both operators $\mathcal{H}_\varepsilon$ and $\mathcal{H}_0$ are bounded.

The following statements hold true.

Theorem 1. *The operators $\mathcal{H}_\varepsilon$ and $\mathcal{H}_0$ are self-adjoint in $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. The estimate holds:*

$$\|\mathcal{H}_\varepsilon - \mathcal{H}_0\| \leqslant C|\ln\varepsilon|^{-\frac{\delta}{2}},$$

where $\|\cdot\|$ stands for the norm of a bounded operator in $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\delta = const$, $0 < \delta < 1$.

Theorem 2. *The spectrum of the operator $\mathcal{H}_\varepsilon$ converges to spectrum of $\mathcal{H}_0$. The spectral projectors of the operator $\mathcal{H}_\varepsilon$ converge to the spectral projectors of the operator $\mathcal{H}_0$. In particular, if λ_0 is a discrete eigenvalue of $\mathcal{H}_0$ of a multiplicity n, as $\varepsilon \to 0+$, there exist exactly n eigenvalues of the operator $\mathcal{H}_\varepsilon$ counting multiplicities converging to λ_0 as $\varepsilon \to 0+$ and the total projector of these eigenvalues converges to the projector on the eigenspace associated with λ_0 in the norm of bounded operators in $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.*

References

1. *Chechkina A.G., Sadovnichy V.A.* Degeneration of Steklov–Type Boundary Conditions in one Spectral Homogenization Problem // Eurasian Mathematical Journal **6**: 3 (2015), 13–29.

2. *Chechkina A.G.* The homogenization of spectral problems with singular perturbation of the Steklov condition // Izvestiya Mathematics **81**: 1 (2017), 199–236.

3. *Chechkina A.G., D'Apice C., De Maio U.* Rate of Convergence of Eigenvalues to Singularly Perturbed Steklov–Type Problem for Elasticity System // Applicable Analysis. **98**: 1-2 (2019), 32–44.

DOMINATED ERGODIC THEOREM IN SYMMETRIC SPACES ON INFINITE CONTINUOUS MEASURE SPACE

V. Chilin, M. Muratov, J. Pashkova

vladimirchil@gmail.com, mamuratov@gmail.com, pashkova.kromsh@gmail.com

UDC 517.987

It is given conditions under which dominated ergodic theorem hold in symmetric spaces of measurable functions defined on infinite continuous measure space.

Keywords: Symmetric function space, continuous measure space, Dunford-Schwartz operator, dominated ergodic theorem.
MSC: 37A30, 47A35, 46E30

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a Maharam measure space with continuous measure μ. Denote by $\mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^0(\Omega)$ the algebra of equivalence classes of almost everywhere finite real-valued measurable functions on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Let $\mathbf{L}^0_\mu$ be the subalgebra in $\mathbf{L}^0$ consisting of the functions $f \in \mathbf{L}^0$ such that $\mu\{|f| > \lambda(f)\} < \infty$ for some $\lambda(f) > 0$. If $f \in \mathbf{L}^0_\mu$, then a *non-increasing rearrangement* of f is defined as

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : \ \mu\{|f| > \lambda\} \leqslant t\}, \quad t > 0.$$

Let $((0,\infty), \mathcal{B}, \nu)$ be the σ-finite measure space with Lebesgue measure ν. A non-zero linear subspace $\mathbf{E} \subset \mathbf{L}^0_\nu$ with a Banach norm $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ is called *symmetric (fully symmetric)* on $((0,\infty), \mathcal{B}, \nu)$ if

$$f \in \mathbf{E}, \ g \in \mathbf{L}^0_\nu, \ g^*(t) \leqslant f^*(t) \ \text{ for all } \ \ t > 0,$$

Vladimir Chilin, Tashkent Branch of Moscow State University, Taskent, Uzbekistan
Muratov Mustafa, Tavrichesky National University, Simferopol, Russia
Pashkova Juliya, Tavrichesky National University, Simferopol, Russia

(respectively,

$$f \in \mathbf{E},\ g \in \mathbf{L}^0_\nu,\ \int\limits_0^s g^*(t)dt \leqslant \int\limits_0^s f^*(t)dt \quad \text{for all} \quad s > 0 \ \ (\text{writing} \quad g \prec\prec f)),$$

implies that $g \in \mathbf{E}$ and $\|g\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}}$.

Let $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ be a symmetric (fully symmetric) space on $((0,\infty), \mathcal{B}, \nu)$. Define

$$\mathbf{E}(\Omega) := \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathbf{L}^0_\mu : f^*(t) \in \mathbf{E}\}$$

and set $\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega)} = \|f^*\|_{\mathbf{E}},\ f \in \mathbf{E}(\Omega)$. It is known [2, Ch.3, Sec.3.5, Theorem 3.5.5] that $(\mathbf{E}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega})$ is a Banach space and conditions $f \in \mathbf{E}(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^0_\mu$, $g^*(t) \leqslant f^*(t)$ for every $t > 0$ (respectively, $g \prec\prec f$) imply that $g \in \mathbf{E}(\Omega)$ and $\|g\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega)}$. In such a case, we say that $(\mathbf{E}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega)})$ is a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *generated* by the fully symmetric) space $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$.

Immediate examples of fully symmetric spaces are the classical L^p-space $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ with the standard norm $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, the space $\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$ with the norm $\|f\|_{\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty} = \max\{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$, and the space $\mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty$ with the norm

$$\|f\|_{\mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty} = \inf\left\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty :\ f = g + h,\ g \in \mathbf{L}^1,\ h \in \mathbf{L}^\infty\right\}.$$

Let $T : \mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty \to \mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty$ be a Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS$), that is, T is linear and

$$\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \ \text{ for all } \ f \in \mathbf{L}^1 \quad \text{and} \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \ \text{ for all } \ f \in \mathbf{L}^\infty.$$

It is known that if $T \in DS$, then $T(\mathbf{E}(\Omega)) \subseteq \mathbf{E}(\Omega)$ for any fully symmetric space $\mathbf{E}(\Omega)$, in addition, $\|T\|_{\mathbf{E}(\Omega) \to \mathbf{E}(\Omega)} \leqslant 1$ (see, e.g. [1, Ch.II, §4, Sec.2, 4]).

Let $T \in DS$, $f \in \mathbf{L}^p$, and let

$$A_n(T)(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(f) \quad \text{and} \quad A_\infty(f) = \sup_{n \geqslant 1} A_n(T)(|f|).$$

The well-known dominated ergodic theorem states that $A_\infty(f) \in \mathbf{L}^p$ for any $T \in DS$, $f \in \mathbf{L}^p$, $1 < p < \infty$, and the following inequality holds

$$\|A_\infty(f)\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

It is clear that there is the problem of describing the class of fully symmetric spaces $\mathbf{E}(\Omega)$ for which the dominated ergodic theorem with respect to the action of an arbitrary $T \in DS$ is valid.

If $f \in \mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty$ then we can define the following continuous non-increasing function on the interval $(0, +\infty)$:

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*\, d\nu,\ t \in (0, +\infty) \ \ (\text{Hardy-Littlewood maximum function}).$$

Since $\mathbf{L}^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^\infty(\Omega) \subseteq \mathbf{E}(\Omega) \subseteq \mathbf{L}^1(\Omega) + \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ for any symmetric space $\mathbf{E}(\Omega)$, it follows that Hardy-Littlewood maximum function $f^{**}(t)$ is defined for every $f \in \mathbf{E}(\Omega)$.

Set

$$\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega)) = \{f \in \mathbf{L}^1(\Omega) + \mathbf{L}^\infty(\Omega) :\ f^{**} \in \mathbf{E}\},$$

and $\|f\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))} = \|f^{**}\|_{\mathbf{E}}$, where $\mathbf{E} = \mathbf{E}(0,\infty)$ is symmetric space on $((0,\infty), \mathcal{B}, \nu)$ that generates the symmetric space $\mathbf{E}(\Omega)$ on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Theorem 1. The pair $\left(\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega)), \|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))}\right)$ is a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

The following theorem is a version of the dominated ergodic theorem for fully symmetric space $\left(\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega)), \|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))}\right)$.

Theorem 2. Let $\left(\mathbf{E}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega)}\right)$ be a symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, and let $T \in DS$. Then $A_\infty(f) \in \mathbf{E}(\Omega)$ and $\|A_\infty(f)\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E})}$ for any $f \in \mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))$.

Corollary. Let $\left(\mathbf{E}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega)}\right)$ be a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, and let $\mathbf{E}(\Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))$ as sets. Then $A_\infty(f) \in \mathbf{E}(\Omega)$ for any $T \in DS$, $f \in \mathbf{E}(\Omega)$. In addition, there exists $\lambda > 0$ such that

$$\|A_\infty(f)\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \leqslant \lambda \cdot \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \quad \text{for all} \quad T \in DS,\ f \in \mathbf{E}(\Omega).$$

References

1. *Krein S.G., Petunin Yu.I, Semenov E.M.* Interpolation of Linear Operators. — M., Nauka, 1978. (Russian); English translation: Translations of Mathematical Monographs, vol.54, American Mathematical Society, Providence, 1982.

2. *Lord S., Sukochev F., Zanin D.* Singular Traces. Theory and Applications. — Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston. 2013.

FEYNMAN APPROXIMATIONS FOR SOLUTIONS TO SECOND-ORDER PARABOLIC EQUATIONS ON SOME RAMIFIED MANIFOLDS

V.A. Dubravina

dubravina_vika@mail.ru

UDC 517

Feynman formula is used to represent some object (usually the solution to an evolution equation) as a limit of multiple integrals as multiplicity tends to infinity. This formulae give some approximations to the solutions, which are called Feynman approximations. In the talk one considerers such representation by the Lagrangian Feynman formula for the Cauchy problem for the heat-type parabolic equation. By ramified manifold one means a disjoint union of a set of smooth bounded manifolds of equal dimension. The discussed Cauchy problem is posed for functions, defined on some ramified manifold K, from space $L_p(K)$.

Keywords: Feynman formula, Lagrangian Feynman formula, parabolic equation, Cauchy problem

---

This research is supported by Lomonosov Moscow State University. Grant “Modern problems of mathematics and mechanics”.

Viktoryia Dubravina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

The representation for the solution to Shroedinger equation, which is now called the Feynman formula, appeared in 1948 in the paper by Feynman [1]. He suggested that the integration holds over upcoming powers of configuration space, in this case corresponding formulas are called Lagrangian Feynman formulae. If the integration holds over powers of phase space, as was suggested by Feynman in 1951, the formulae are called Hamiltonian. These names can be explained by the fact than the first formula is related to the classical action in Lagrangian form, and the second one is related to the action in Hamiltonian form.

In 1964 E.Nelson first proved Lagrangian Feynman formulae [2], where he used the Trotter formula. The proof for Hamiltonian Feynman formulae appeared only in 2002 in the paper [3] by O.G. Smolyanov with co-authors, where the Chernoff theorem was used. This theorem, being the generalization of the Trotter formula, turned out to be an effective tool to obtain various Feynman-type formulae.

In this talk one discusses Lagrangian Feynman-type formulae, which are the limits of multiple integrals over some extension of ramified manifold K (the solution to the Cauchy problem is defined on K), as multiplicity tends to infinity.

One calls the ramified manifold K a disjunctive union of a set of open bounded smooth manifolds $K_j, j = 1, \ldots, m$, of equal dimension $dim K_j = n$. This set of manifolds can be isometrically embedded in $\mathbb{R}^s$ for large enough s. Each manifold K_j is also supposed to have partially smooth boundary, which can partially coincide for different manifolds K_j. The boundary is equipped with proper mixed boundary conditions, which can be either Robin-type boundary conditions or Kirchhoff boundary conditions.

We discuss the Cauchy problem

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A\psi(t), \psi(0) = f_0, \text{where } \psi : [0, \infty) \to D_A, f_0 \in D_A,$$

Let D_A be a subspace of $L_p(K)$ of functions, such that
1) their first and second derivatives belong to $L_p(K)$,
2) they satisfy the described above boundary conditions.

The differential operator A has the following form:

$$Af(q) = \frac{1}{2}c(q)\Delta f(q), \quad q \in K,$$

where Δ is the Laplace–Beltrami operator.

In order to obtain the Feynman-type formulae we use the following theorem:

The Chernoff theorem. *Let X be a Banach space, $(L(X), \tau)$ be a space of linear continuous operators on X, τ be a strong operator topology. Let $F\colon [0, \delta) \to (L(X), \tau)$ be a continuous space such that*
1) $F(0) = Id$, 2) for any $t \in (0, \infty)$ and some constant $a \in \mathbb{R}$ the following inequality is fulfilled $\|F(t)\| \leqslant e^{at}$, 3) there exists such linear and dense in X subspace $D \subset X$, that for any $f \in D$ there exists the derivative $F'(0)f = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(t)f-f}{t}$. Assume, that defined this way operator $F'(0)$, acting in D, has a closure, which is a generator of strongly continuous semigroup $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$, then $F(t/n)^n \to T_t$ as $n \to \infty$ in topology τ uniformly with respect to $t \in [0, \alpha]$, for any constant $\alpha > 0$.

For $X = L_p(K)$ we suggest that operator-valued function $F(\cdot)$ is the composition of four operators $I_2 F_2(\cdot) F_1(\cdot) I_1$, where I_1 is an embedding $L_p(K)$ into $L_p(Z)$ and I_2 is a restriction $L_p(Z)$ to $L_p(K)$, where Z is a ramified manifold, being a proper extension of K; $F_1(\cdot)$ modifies the function, defined on Z, in the neighborhood of the boundary of K, and $F_2(\cdot)$ is the integral operator of convolution type.

It is shown that the conditions of the Chernoff theorem are fulfilled and hence the solution to the Cauchy problem under consideration can be presented in the form of a limit of multiple integrals, i.e. in the form of the Feynman-type formula.

References

1. *Feynman R.P.* Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics// Reviews of modern physics, **20**:2 (1948) — 367-387.

2. *Nelson E.* Feynman Integrals and the Schroedinger Equation // J. Math. Phys., **5**:3 (1964) — 332-343.

3. *Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A.* Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula// J.of Math. Phys., **43**:10 (2002).

ON APPROXIMATION BY SHIFT OPERATORS IN MORREY TYPE SPACES

F.A. Guliyeva, S.R. Sadigova

quliyeva-fatima@mail.ru, s_sadigova@mail.ru

Morrey space $M^{p,\alpha}$ and its subspace $MC^{p,\alpha}$ where the continuous functions are dense are considered. Basic properties of convolution are extended to these spaces. It is proved that the convolution in $MC^{p,\alpha}$ can be approximated by finite linear combinations of shifts. Approximate identity in $MC^{p,\alpha}$ is also considered.

Keywords: Morrey space, convolution, approximate identity.

By the Morrey-Lebesgue space $M^{p,\alpha}(\Gamma)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $p \geqslant 1$, on the rectifiable Jordan curve Γ, we mean a normed space of all functions$f(\xi)$ measurable on Γ equipped with a finite norm $\|\cdot\|_{M^{p,\alpha}(\Gamma)}$:

$$\|f\|_{M^{p,\alpha}(\Gamma)} = \sup_B \left(|B \cap \Gamma|_\Gamma^{\alpha-1} \int_{B\cap\Gamma} |f(\xi)|^p \, |d\xi| \right)^{1/p} < +\infty.$$

Denote by $\tilde{M}^{p,\alpha}$ the linear subspace of $M^{p,\alpha}$ consisting of functions whose shifts are continuous in $M^{p,\alpha}$, i.e. $\|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_{M^{p,\alpha}} \to 0$ as $\delta \to 0$. The closure of $\tilde{M}^{p,\alpha}$ in $M^{p,\alpha}$ will be denoted by $MC^{p,\alpha}$.

Consider the Morrey-Lebesgue space $M^{p,\alpha}$, $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha < 1$. Let $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Take $f \in M^{p,\alpha}$;$g \in M^{q,\alpha}$.

Consider the convolution

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \, g(y) \, dy, x \in [-\pi, \pi].$$

Guliyeva Fatima Agayar kizi, PhD, Associate professor, Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Sadigova Sabina Rahib kizi, PhD, Associate professor, Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Let us consider the approximate identities for convolutions in the space $M^{p,\alpha}$. By the approximate identity (for convolution) we mean $\left\{K_n^{(\cdot)}\right\}_{n\in N} \subset L_1(-\pi,\pi)$, satisfying the following conditions:

α) $\sup\limits_n \|K_n\|_{L_1} < +\infty$; β) $\lim\limits_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$; γ) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} |K_n(x)\,dx| = 0$, $\forall\delta\in(0,\pi)$.

Theorem 1. *Let $\{K_n\}_{n\in N}$ be an approximate identity. Then the following properties are true:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|K_n * f - f\|_\infty = 0$, $\forall f\in C[-\pi,\pi]$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{d^m}{dx^m}(K_n * f) - \frac{d^m}{dx^m}f\right\|_\infty = 0$, $\forall f\in C[-\pi,\pi]$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\|K_n * f - f\|_{p,\alpha} = 0$, $\forall f\in MC^{p,\alpha}$, $1\leqslant p<+\infty$, $0<\alpha<1$.

References

1. *Guliyeva F.A., Sadigova S.R.* On Some Properties of Convolution in Morrey Type Spaces // Azerbaijan Journal of Mathematics, **8**:1 (2018), 140-150.

SINGULAR INTEGRAL OPERATORS AND THEIR COMMUTATORS ON GENERALIZED WEIGHTED MORREY SPACES WITH VARIABLE EXPONENT

J.J.Hasanov

hasanovjavanshir@yahoo.com.tr

UDC 517.518

We consider the generalized weighted Morrey spaces $\mathcal{M}_\omega^{p(\cdot),\varphi}(\Omega)$ with variable exponent $p(x)$ and a general function $\varphi(x,r)$ defining the Morrey-type norm. In case of unbounded sets $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ we prove the boundedness of the Calderón-Zygmund singular operators with standard kernel, in such spaces. We also prove the boundedness of the commutators of Calderón-Zygmund singular operators in the generalized weighted Morrey spaces with variable exponent.

Keywords: singular integral operators, generalized weighted Morrey space with variable exponent, BMO space.
MSC: 42B20,42B25, 42B35

The classical Morrey spaces were originally introduced by Morrey in [1] to study the local behavior of solutions to second order elliptic partial differential equations. For the properties and applications of classical Morrey spaces, we refer the readers to [1,2]. Mizuhara and Nakai introduced generalized Morrey spaces. Later, Guliyev defined the generalized Morrey spaces $M^{p,\varphi}$ with normalized norm. Recently, Komori and Shirai considered the weighted Morrey spaces $L_w^{p,\kappa}$ and studied the boundedness of some classical operators such as the Hardy-Littlewood maximal operator, the Calderón-Zygmund operator on these spaces. Guliyev gave a concept of generalized weighted Morrey space $M_w^{p,\varphi}$ which could be viewed as extension of both generalized Morrey space $M^{p,\varphi}$ and weighted Morrey space $L_w^{p,\kappa}$.

Javanshir Hasanov (Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan)

As it is known, last two decades there is an increasing interest to the study of variable exponent spaces and operators with variable parameters in such spaces, on the progress in this field, including topics of Harmonic Analysis and Operator Theory, see also references therein. For mapping properties of maximal functions and singular integrals on Lebesgue spaces with variable exponent.

Calderón-Zygmund type singular operator $Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy$, where $K(x,y)$ is a "standard singular kernel", that is, a continuous function defined on $\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : x\neq y\}$ and satisfying the estimates

$$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n} \text{ for all } x\neq y,$$

$$|K(x,y)-K(x,z)|\leqslant C\frac{|y-z|^\sigma}{|x-y|^{n+\sigma}},\ \ \sigma>0,\ \text{ if } |x-y|>2|y-z|,$$

$$|K(x,y)-K(\xi,y)|\leqslant C\frac{|x-\xi|^\sigma}{|x-y|^{n+\sigma}},\ \ \sigma>0,\ \text{ if } |x-y|>2|x-\xi|.$$

Let $p(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $(1,\infty)$. An open set Ω which may be unbounded throughout the whole paper. We mainly suppose that $1<p_-\leqslant p(x)\leqslant p_+<\infty$, where $p_- := ess\inf_{x\in\Omega}p(x)$, $p_+ := ess\sup_{x\in\Omega}p(x)$. By $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ we denote the space of all measurable functions $f(x)$ on Ω such that $I_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx<\infty$. Equipped with the norm $\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\eta>0:\ I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right)\leqslant 1\right\}$, this is a Banach function space. By $p'(\cdot)=\frac{p(x)}{p(x)-1}$, $x\in\Omega$, we denote the conjugate exponent.

$\mathcal{P}(\Omega)$ is the set of bounded measurable functions $p:\Omega\to[1,\infty)$;

$\mathcal{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p\in\mathcal{P}(\Omega)$ satisfying the local log-condition

$$|p(x)-p(y)|\leqslant\frac{A}{-\ln|x-y|},\ \ |x-y|\leqslant\frac{1}{2}\ \ x,y\in\Omega,$$

where $A=A(p)>0$ does not depend on x,y;

$\mathbb{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p\in\mathcal{P}^{log}(\Omega)$ with $1<p_-\leqslant p_+<\infty$;

for Ω which may be unbounded, by $\mathbb{P}^{log}_\infty(\Omega)$ we denote the subsets of the above sets of exponents satisfying the decay condition (when Ω is unbounded)

Let $1\leqslant p(x)<\infty$, $x\in\Omega$. The variable exponent generalized Morrey space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi}(\Omega)$ and variable exponent generalized weighted Morrey space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi(\cdot)}_\omega(\Omega)$ are defined as the set of integrable functions f on Ω with the finite norms

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi}} = \sup_{x\in\Omega,r>0}\frac{1}{\varphi(x,r)t^{\theta_p(x,t)}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,r))},$$

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi}_\omega} = \sup_{x\in\Omega,r>0}\frac{1}{\varphi(x,r)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,r))}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}_\omega(\widetilde{B}(x,r))},$$

respectively, where $\theta_p(x,r)=\begin{cases}\frac{n}{p(x)}, & r\leqslant 1,\\ \frac{n}{p(\infty)}, & r\geqslant 1\end{cases}$.

We define the $BMO(\Omega)$ space as the set of all locally integrable functions f with finite norm

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{x\in\Omega,\ r>0}|B(x,r)|^{-1}\int_{\widetilde{B}(x,r)}|f(y)-f_{\widetilde{B}(x,r)}|dy.$$

We define the $BMO_{p(\cdot),\omega}(\Omega)$ space as the set of all locally integrable functions f with finite norm

$$\|f\|_{BMO_{p(\cdot),\omega}} = \sup_{x\in\Omega,\ r>0}\frac{\|(f(\cdot)-f_{\widetilde{B}(x,r)})\chi_{\widetilde{B}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}_\omega(\Omega)}}{\|\chi_{\widetilde{B}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}_\omega(\Omega)}}.$$

Let us define the class $A_{p(\cdot)}(\Omega)$ to consist of those weights ω for which

$$\sup_B |B|^{-1} \|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,r))} \|\omega^{-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\widetilde{B}(x,r))} < \infty.$$

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_\infty(\Omega)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(\Omega)$ and $\varphi_1(x,t)$ and $\varphi_2(x,r)$ fulfill condition*

$$\int_t^\infty \frac{ess\inf_{s<r<\infty} \varphi_1(x,r) \|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,r))}}{\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,s))}} \frac{ds}{s} \leqslant C\varphi_2(x,t),$$

where C does not depend on $x \in \Omega$ and t. Then the singular integral operator T is bounded from the space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi_1}_\omega(\Omega)$ to the space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi_2}_\omega(\Omega)$.

The commutator generated by T and a suitable function b is formally defined by $[T,b]f = T(bf) - bT(f)$.

Theorem 2. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_\infty(\Omega)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(\Omega)$, $b \in BMO(\Omega)$ and the functions $\varphi_1(x,r)$ and $\varphi_2(x,r)$ satisfy the condition*

$$\sup_{t>r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{ess\inf_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) \|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,s))}}{\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,t))}} \leqslant C\varphi_2(x,r).$$

Then the operator $[b,T]$ is bounded from the space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi_1}_\omega(\Omega)$ to the space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi_2}_\omega(\Omega)$.

References

1. *C.B. Morrey*, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126-166.

2. *G. Di Fazio and M. A. Ragusa*, Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients , J. Funct. Anal. 112 (1993), 241-256.

ON ACTIONS OF SPACES CONTINUOUSLY CONTAINING TOPOLOGICAL GROUPS

S. Iliadis

s.d.iliadis@gmail.com

Definition. Given an indexed collection $\mathbf{G}$ of topological groups, let Q be a topological space, and let h^G_Q, $G \in \mathbf{G}$, be a topological embedding of G into Q. We say that Q is a *continuosly containing space for* $\mathbf{G}$ *with respect to the collection* $\{h^G_Q : G \in \mathbf{G}\}$ if the following conditions are satisfied: (1) For any points $x, y \in G \in \mathbf{G}$ and each neighbourhood U of $h^G_Q(xy)$ in Q, there exist neighbourhoods V and W in Q of $h^G_Q(x)$ and $h^G_Q(y)$, respectively, such that, for any points $x', y' \in G' \in \mathbf{G}$ such that $h^{G'}_Q(x') \in V$ and $h^{G'}_Q(y') \in W$, we have $h^{G'}_Q(x'y') \in U$; (2) For any $x \in G \in \mathbf{G}$ and each neighbourhood U of $h^G_Q(x^{-1})$ in Q there exists a neighbourhood V of $h^G_Q(x)$ in Q such that, for each $x' \in G' \in \mathbf{G}$ for which $h^{G'}_Q(x') \in V$, we have $h^{G'}_Q((x')^{-1}) \in U$; (3) $\cup\{h^G_Q(G) : G \in \mathbf{G}\} = Q$.

Stavros Iliadis, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

Below, we shall identify the topological group $G \in \mathbf{G}$ with the subset $h_Q^G(G)$ of Q and will say that Q is a *continuously containing space for* $\mathbf{G}$. (See [3].)

Definition. Let Q be a continuously containing space for a collection $\mathbf{G}$ of topological groups and X a topological space. An open continuous mapping $F : Q \times X \to X$ is said to be an *action* of Q on X if for each $G \in \mathbf{G}$ the restriction $F|_{G\times X}$ of F onto the subset $G \times X \subset Q \times X$ is an action of G on X.

In the formulation of the given below theorem it is used the notion of a saturated class of spaces, which is introduced in the paper [1] and widely used in [2]. This notion indicate the realm of spaces in which the given theorem is considered. So, if in the formulation of the theorem we replace the words “a saturated class of spaces” by the words, for example, “the class of all completely regular spaces” or by “the class of all completely regular n-dimensional spaces” (both classes are saturated), then we obtain two distinct theorems, independent each of other, that is each of them does not follows from other, but having the similar proofs. Thus, the words “a saturated class of spaces” in the formulation of the theorem are not technical conditions, they join distinct and independent results having a common proof. In the following proposition we indicate some of the saturated classes of spaces.

Proposition (see [1] and [2]). *The following classes, consisting of spaces of weight* $\leqslant \tau$*, are saturated classes:*

(1) *the class of all* T_0*-spaces;*

(2) *the class of all regular spaces;*

(3) *the class of all completely regular spaces;*

(4) *the class of all spaces of the small inductive dimension ind* $\leqslant n \in \mathbb{N}$*;*

(5) *the class of all spaces of the small transfinite inductive dimension ind* $\leqslant \alpha$*, where* α *is an ordinal;*

(6) *the class of all countable-dimensional spaces;*

(7) *the class of all strongly contable-dimensional spaces;*

(8) *the class of all locally finite-dimensional spaces.*

(9) *the intersection of any two saturated classes of spaces.*

(In the definition of the elements of the above classes (6)–(8) the small inductive dimension *ind* is used.)

Theorem. *Let* $\mathbb{S}$ *be a saturated class of spaces of weight* $\leqslant \tau$*, where* τ *is a fixed infinite cardinal,* $\mathbf{G}$ *an indexed collection of topological groups, which as topological spaces are elements of* $\mathbb{S}$*,* X *a fixed topological space of weight* $\leqslant \tau$*, and let for each* $G \in \mathbf{G}$*,* $F_G : G \times X \to X$ *be an action of* G *on* X*. Then, there exists an element* T *of* $\mathbb{S}$*, which is a continuously containing space for* $\mathbf{G}$*, and an action* $F : \mathrm{T} \times X \to X$ *such that for each* $G \in \mathbf{G}$*, the restriction* $F|_{G\times X}$ *of* F *onto the subset* $G \times X \subset Q \times X$ *coincides with* F_G*.*

1. *Stavros Iliadis.* A construction of containing spaces // Topology and its Applications, **107** (2000), 97-116.

2. *S.D. Iliadis.* Universal Spaces and Mappings. (North-Holland Mathematics Studies **198**). — Elsevier, 2005.

3. *Stavros Iliadis.* On embeddings of topological groups // Fundamental and Applied Mathematics, **20**:2 (2015), 105-112 (Russian). Journal of Mathematical Sciences, **223**:6 (2017), 720-724 (English).

ON BASICITY OF THE SYSTEM OF EXPONENTS AND TRIGONOMETRIC SYSTEMS IN GRAND-LEBESGUE SPACES

M.I. Ismailov, V.Q. Alili
migdad-ismailov@rambler.ru, alilivefa@mail.ru

UDC 517.51

This paper is devoted to the study of the basis properties of trigonometric systems and the solvability of the Riemann problem in the grand-Lebesgue spaces $L^{p)}, p > 1$. In this paper, a subspace $G^{p)}$ of the space $L^{p)}, p > 1$, is defined and the basicity of trigonometric systems in $G^{p)}, p > 1$. is established. Grand-Hardy classes $H^{+}_{p)}, p > 1$, are defined, in which analogues of the Riesz and Smirnov theorems and on the representation of a function by the Cauchy formula are proved. The solvability of the Riemann problem in grand-Hardy classes is studied.

Keywords: system of exponents, basicity, grand-Lebesgue space

In the paper we study the basicity of the system of exponents and trigonometric system in grand-Lebesgue spaces $L^{p)}$. Let $L^{p)}(-\pi;\pi)$, $1 < p < +\infty$, be a grand-Lebesgue space of measurable on $[-\pi;\pi]$ functions f, with the finite norm

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon}\, dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty.$$

For $\forall f \in L^{p)}(-\pi;\pi)$ and $\forall \delta > 0$ we assume $T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x+\delta), x+\delta \in [-\pi;\pi] \\ 0, x+\delta \in R\backslash[-\pi;\pi]. \end{cases}$

We denote by $\tilde{G}^{p)}(-\pi;\pi)$ a linear manifold of functions $f \in L^{p)}(-\pi;\pi)$ satisfying the condition $\|T_\delta f - f\|_{p)} \to 0, \delta \to 0$. Let $G^{p)}(-\pi;\pi)$ be a closure $\tilde{G}^{p)}(-\pi;\pi)$ in $L^{p)}(-\pi;\pi)$. We have the following

Lemma 1. *The space $C_0^\infty[-\pi;\pi]$ is dense in $G^{p)}(-\pi;\pi)$*

We consider the basicity of the system of exponent and trigonometric system in the spaces $G^{p)}(-\pi;\pi)$ and $G^{p)}(0;\pi)$ respectively. The following statements are valid.

Theorem 1. *Exponential system $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ forms a basis for the space $G^{p)}(-\pi;\pi)$, $1 < p < +\infty$.*

Theorem 2. *Systems of sines $\{\sin nt\}_{n\in N}$ and cosines $\{\cos nt\}_{n\in N_0}$ forms bases for the space $G^{p)}(0;\pi)$, $1 < p < +\infty$.*

The results of the note are obtained in co-authorship with B.T. Bilalov.

Ismailov Migdad Imdad, PhD, Associate professor, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku State University, Baku, Azerbaijan
Alili Vafa Gachay, PhD student, Baku Slavic University, Baku, Azerbaijan

References

1. *Castilo R.E., Rafeiro H.* An Introductory Course in Lebesgue Spaces, Springer, Switzerland, 2016.

2. *Kokilashvili V.* Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces// J. Math. Sci., **170**: (2010), 20-33

3. *Bilalov B.T., Gasymov T. B., Quliyeva A.A.* On solvability of Riemann boundary value problem in Morrey–Hardy classes // Turkish J. Math., **40**:5 (2016), 1085–1101.

SPECTRAL FUNCTION ASYMPTOTICS OF DIFFERENTIAL OPERATORS

Z. Kadelburg

kadelbur@matf.bg.ac.rs

UDC 517.927.25

V.A. Sadovnichiĭ showed that it is possible to use weighted regularized sums of the roots of a whole function, belonging to the class K, in order to determine spectral function asymptotics for the Sturm-Liouville operator. In this talk, we give a survey of some further results in this direction. Namely, such asymptotic behavior is determined in the case of the following problems: an even order operator, the Regge operator, the Orr-Sommerfeld equation, an operator with non-local boundary conditions, the one-dimensional Dirac system, and a second order functional-differential operator.

Keywords: differential operator, spectral function, asymptotic behavior
MSC: 47E05, 34L20

OSCILLATION PROPERTIES OF ONE FOURTH-ORDER PROBLEM WITH A SPECTRAL PARAMETER IN BOUNDARY CONDITIONS

E.S. Karulina

karulinaes@yandex.ru

We consider the oscillation properties of one fourth-order problem with a spectral parameter in boundary conditions.

Keywords: eigenfunctions, oscillation, spectral theory

This work is supported by the Ministry of Education, Science and Technological Development of Serbia (no. 174002).

Zoran Kadelburg, University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia
Karulina Elena Sergeevna (Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia)

Consider the boundary problem

$$(py'')'' - (qy')' = \lambda r y,$$

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

$$(py)''(1) - \alpha\lambda y'(1) = [(py'')' - qy'](1) + \beta\lambda y(1) = 0,$$

where λ is a spectral parameter. We show that if all eigenvalues

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$$

of this problem are positive, then they are simple, and the derivatives y_n' of the correspondent eigenfunctions have n changes of the sign.

Some particular cases of this problem were considered, for example, in [1].

The talk is based on a joint work with Vladimirov A.A.

References

1. *Kerimov N.B., Aliev Z.S.* Basis properties of a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition // Sb. Math. **197**:9-10 (2006), 1467-1487.

2. *Vladimirov A.A.* On the problem of oscillation properties of positive differential operators with singular coefficients // Math. Notes, **100**:5-6 (2016), 790-795.

SPECTRAL PROPERTIES OF TOEPLITZ OPERATORS

B.B. Koca

basakoca@istanbul.edu.tr

UDC 517

In this talk, we consider Toeplitz operators H^p, $1 < p < \infty$. In the case of $p = 2$, Peller [1] obtained estimates for the resolvents of Toeplitz operators under certain restrictions on their symbols and found conditions for the existence of nontrivial invariant subspaces and for a Toeplitz operator to be similar to a unitary operator. It is natural to ask what happens in the case of $p \neq 2$. We study some spectral properties for Toeplitz operators with unimodular symbols and Toeplitz operators whose spectra satisfies a certain geometric condition (the so-called the circular convexity condition).

Keywords: Toeplitz operators, Hardy space, invariant subspace, spectrum
MSC: 47B35, 47A15

References

1. *Peller V.V.* Spectrum, similarity, and invariant subspaces of Toeplitz operators//Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **50** (1986), 776–787.

This work is supported by TUBITAK (no. 19-01-00000).
Beyaz Basak Koca, Istanbul University, Istanbul, Turkey

ON SPECTRAL PROPERTIES OF THE M-ACCRETIVE OPERATOR TRANSFORM

M. Kukushkin
kukushkinmv@rambler.ru

UDC 517.984

In this paper we present spectral theorems for some type of a m-accretive operator transform. The relevance of such consideration is lots of applications to the semigroup theory and as a consequence of this fact to the theory of PDE. More precisely, a considered below operator transform can be reduced to a second order differential operator with a fractional derivative in the final term.

Keywords: non-selfadjoint operator, sectorial operator, strongly continuous semigroup
MSC: 47A10, 47A07, 47B10

In the paper [1] the spectral properties of perturbed non-selfadjoint and normal operators were studied. However for applying these results for a concrete operator we must have a representation of one by the sum of the main part and the operator-perturbation. It is essential that the main part must be an operator of a special type either a selfadjoint or a normal operator. If we consider a case where in the representation the main part is neither selfadjoint nor normal and we cannot approach the required representation in an obvious way, then it is possible to use another technique based on properties of the real component of the initial operator. This is a subject of our consideration.

Suppose J is a m-accretive operator acting in a complex separable Hilbert space $\mathfrak{H}$, J^{-1} is compact, the operator G is bounded and strictly accretive, $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(T^*)$, $\overline{\mathrm{D}(T)} = \mathfrak{H}$, where $T := J^*GJ$. Note that the positive fractional powers of the operator J are well defined (see [2]). Consider the operator J transform

$$L := J^*GJ + J^{\alpha},\ \alpha \in (0, 1/2). \tag{1}$$

Using the imposed conditions on the operators J, G we prove that the numerical range of the operator $\bar{L}$ belongs to the sector with the vertex situated at the point zero and the semi-angle θ, $0 \leqslant \theta < \pi/2$. We also prove that $0 \in \mathrm{P}(\bar{L})$. Consider a real component $H := (L + L^*)/2$ of the operator L. It is not hard to prove that $\bar{H}$ is selfadjoint and $0 \in \mathrm{P}(\bar{H})$. Using the technic of the sesquilinear form theory we establish the compactness property of the operators $\bar{L}^{-1}, \bar{H}^{-1}$. In accordance with the definition given in the paper [1] we denote by μ order of the operator $\bar{H}$. As a main result we obtain the number of theorems that give us a description of the spectral properties of the operator $\bar{L}$. The following theorem is formulated in terms of order μ and is devoted to the Schatten-von Neumann classification.

Theorem 1. *We have the following classification*

$$\bar{L}^{-1} \in \mathfrak{S}_p,\ p = \begin{cases} l,\ l > 2/\mu,\ 0 < \mu \leqslant 1, \\ \qquad 1,\ 1 < \mu < \infty \end{cases}.$$

Maksim Kukushkin, International Committee Continental, Zheleznovodsk, Russia

The following theorem establishes the completeness property of the system of root vectors of the operator $\bar{L}^{-1}$.

Theorem 2. *Suppose $\theta < \pi\mu/2$; then the system of root vectors of the operator $\bar{L}^{-1}$ is complete.*

It is a well-known fact that for any bounded operator with the compact imaginary component there is a relationship between s-numbers of the imaginary component and the eigenvalues (see [3]). Similarly using the information on s-numbers of the real component, we obtain an asymptotic formula for the eigenvalues $\lambda_i(\bar{L}^{-1})$, $i \in \mathbb{N}$. This idea is realized in the following theorem.

Theorem 3. *The following inequality holds*

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(\bar{L}^{-1})|^p \leqslant \sec^p \theta \, \|S^{-1}\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p(\bar{H}^{-1}), \ (n = 1, 2, ..., \nu), \ 1 \leqslant p < \infty,$$

where ν is the sum of all algebraic multiplicities of the operator $\bar{L}^{-1}$.

Moreover, if $\nu = \infty$ and order $\mu \neq 0$, then the following asymptotic formula holds $|\lambda_i(\bar{L}^{-1})| = o\left(i^{-\mu+\varepsilon}\right)$, $i \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

Remark 1. *Note that if the operator A is the ifinitesimal generator of a C_0 semigroup of contractions $T_t : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, then A is m-accretive. Hence if in additional we assume that A^{-1} is compact, then we claim that the Theorems 1-3 are true for the operator J transform (1), where $J := A$ and the operator G is chosen respectively. If besides of the made assumptions the semigroup T_t is a shift semigroup acting in a space of Lebesgue square integrable functions, then it is not hard to show that (1) may represent a differential operator second order with the fractional derivative in the final term.*

References

1. *Shkalikov A.A.* Perturbations of selfadjoint and normal operators with a discrete spectrum. // Russian Mathematical Surveys, **71** (2016), 113–174.

2. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980.

3. *Gohberg I.C., Krein M.G.* Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space. — Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1965.

SEMIGROUP AND DISTRIBUTION METHODS IN STUDYING ABSTRACT STOCHASTIC PROBLEMS

I.V. Melnikova

Irina.Melnikova@urfu.ru

UDC 517.983, 517.982.4, 519.21

Construction of generalized and regularized solutions to abstract stochastic equations with generators of regularized semigroups and infinite-dimensional white noise are under consideration.

Keywords: semigroup of operators, generalized function, Wiener process

---

The work was supported by Regulation no. 211 of the Government of the Russian Federation (contract no. 02.A03.21.0006).

Irina V. Melnikova (Professor, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

The research area of stochastic differential equations has occupied one of the primary areas of pure and applied mathematics for the last three decades providing new techniques for studying complex systems in mathematical physics, finance, biology, etc., whose evolution is subject to random perturbations. Among the equations, the most studied are those that simulate finite-dimensional processes with white noise type perturbations.

We consider the infinite-dimensional stochastic Cauchy problem

$$X'(t) = AX(t) + F(t,X) + B(t,X)\mathcal{W}(t),\ t \in [0,T],\ X(0) = \zeta \tag{1}$$

with A generating an R-regularized semigroup $\{V(t), t \geqslant 0)\}$ in a Hilbert space H ($V(t)u - R(t)u = \int_0^t V(s)Au\,ds, u \in D(A) \subset H$), $B \in L(\mathcal{H}, H)$, and $\mathcal{H}$-valued white noise $\mathcal{W}$. We pay special attention to the linear problem ($F = 0$) and $A = A(i\partial/\partial x)$.

Generally the problem is ill-posed in H due to properties of A and $\mathcal{W}$ [1, 2].

The following approaches to regularization and construction of generalized solutions are considered.

• Construction of solutions to the corresponding integrated problem with Itô integral w.r.t. a Wiener process W, a "primitive" of white noise $\mathcal{W}$.

• Construction of generalized (in t) solutions to (1) with white noise $\mathcal{W}$, a generalized derivative of W in spaces of abstract distributions defined by properties of A.

• Construction of generalized (in random variable ω) solutions to (1) with $\mathcal{W}$ defined in infinite-dimensional white noise spaces.

• Construction of generalized (in x) solutions to (1) with $A = A(i\partial/\partial x)$ in Gelfand-Shilov spaces in the case of Petrovskii well-posed, conditionally well-posed, and ill-posed problems. Note that due to proven in [3] connection between Gelfand-Shilov classification and semigroup classification, for equations with $A(i\partial/\partial x)$ generating integrated or convoluted semigroups we can construct generalized in t solutions instead of generalized in x solutions and conversely.

References

1. *Melnikova I.V.* Stochastic Cauchy Problems in Infinite Dimensions: Regularized and Generalized Solutions. London, New York, Washington, CRC Press, 2016.

2. *Melnikova I.V., Alshanskiy M.A.* Stochastic Equations with an Unbounded Operator Coefficient and Multiplicative Noise // Siberian Math. J., **58**:6 (2017), 15p.

3. *Melnikova I.V., Alekseeva U.A.* Semigroup Classification and Gelfand–Shilov Classification of Systems of Partial Differential Equations // Mat. Zam., **104**:6 (2018), 895–911.

ON A DOUBLE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION

S.S. Mirzoev, S.F. Babayeva

mirzoyevsabir@mail.ru, seva_babaeva@mail.ru

In the paper the existence and uniqueness of a class of double-point boundary value problems on a semi-axis is studied for a second order operator-differential equation of elliptic type. The solvability conditions of these boundary value problems expressed by the properties of the coefficients of the given equation.

Keywords: Hilbert space, self-adjoint operator, boundary value problem, regular solvability.

Let H be a separable Hilbert space, A be a definite-positive self-adjoint operator with domain of definition $D(A)$. As is known, the domain of definition of the operator A^γ $(\gamma \geqslant 0)$ becomes a Hilbert space H_γ with regard to scalar product $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x, y \in D(A^\gamma)$. For $\gamma = 0$ we assume $H_0 = H$ and $(x, y) = (x, y)_0$.

Denote by $L_2(R_+; H)$ Hilbert space of all functions $f(t)$ determined almost everywhere in $R_+ = (0, \infty)$ with Bochner quadratically integrable values in H, for which

$$\|f\|_{L_2(R_+;\, H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty.$$

In what follows all derivatives u', u'' are understood in the sense of distribution theory [1]. Following the monograph [1] we introduce the Hilbert space

$$W_2^2(R_+, H) = \left\{ u : \ u'' \in L_2(R_+; H) \ , \ \ A^2 u \in L_2(R_+; H) \right\}$$

with the norm

$$\|u\|_{W_2^2(R_+,\, H)} = \left(\|u''\|^2_{L_2(R_+;\, H)} + \|A^2 u\|^2_{L_2(R_+;\, H)} \right)^{1/2}.$$

Let us consider in the space H the boundary value problem

$$-u''(t) + A^2 u(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) = f(t) \ , \quad t \in R_+ = (0, \infty) \, , \tag{1}$$

$$u(0) + u(1) = 0. \tag{2}$$

Definition. Problem (1),(2) is said to be regularly solvable if for any function $f(t) \in L_2(R_+; H)$ there exists the function $u(t) \in W_2^2(R_+, H)$ that satisfies equation (1) almost everywhere in R_+, condition (2) in the sense of convergence

$$\lim_{t \to +0} \|u(t) + u(1-t)\|_{3/2} = 0,$$

and it holds the estimation

$$\|u\|_{W_2^2(R_+,\, H)} \leqslant const \, \|f\|_{L_2(R_+;\, H)} \, .$$

Sabir S. Mirzoev (Institute Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan and Baku State University, Baku, Azerbaijan

Sevinj F. Babayeva (Institute of Control Systems and Baku State University, Baku, Azerbaijan

Theorem. *Let A be a positive-definite self-adjoint operator, the operators $B_1 = A_1\, A^{-1}$ and $B_2 = A_2\, A^{-2}$ be bounded in H and the following inequality holds for them*

$$q = N_1\ \|B_1\| + N_0\ \|B_2\| < 1,$$

where

$$N_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2},\ N_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Then problem (1),(2) is regularly solvable.

References

1. *Lions, J.L., Magenes E.,* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and their Applications, Moscow, Mir, 371 p.(in Russian).

OSCILLATORY INTEGRAL OPERATORS AND THEIR COMMUTATORS IN MODIFIED MORREY SPACES WITH VARIABLE EXPONENT

A.M. Musayev
musayevali07@gmail.com

UDC 517.518

In this paper first we prove Calderón-Zygmund-type integral inequalities for oscillatory integral operators and their commutators in the modified Morrey spaces with variable exponent $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ are unbounded sets. After that we prove the boundedness of these operators on the spaces $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$.

Keywords: Calderón-Zygmund-type integral inequalities for oscillatory integral operators, modified Morrey space with variable exponent.
MSC: 42B20,42B25, 42B35

The variable exponent analysis is a popular topic which attract many researchers. This topic is mainly focused on the Lebesgue and Sobelev spaces with variable order of integrability and operator theory in these spaces. The study of these spaces has been stimulated by problems of various fields, influenced by many applications, for instance, mechanics of the continuum medium, elasticity, fluid dynamics, calculus of variations and differential equations with non-standard growth conditions. In particular, various results on non-weighted and weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents $p(x)$ have been proved for maximal, singular and fractional type operators.

A distribution kernel $K(x, y)$ is a "standard singular kernel", that is, a continuous function defined on $\{(x, y) \in \Omega \times \Omega : x \neq y\}$ and satisfying the estimates

$$|K(x, y)| \leqslant C|x - y|^{-n} \quad \text{for all} \quad x \neq y,$$

$$|K(x, y) - K(x, z)| \leqslant C\frac{|y - z|^{\sigma}}{|x - y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad \text{if} \quad |x - y| > 2|y - z|,$$

A.M. Musayev (Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan)

$$|K(x,y) - K(\xi,y)| \leqslant C\frac{|x-\xi|^\sigma}{|x-y|^{n+\sigma}}, \ \ \sigma > 0, \ \ \text{if} \ \ |x-y| > 2|x-\xi|.$$

Calderón-Zygmund type singular operator and the oscillatory integral operator are defined by

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy,$$

$$Sf(x) = \int_\Omega e^{P(x,y)}K(x,y)f(y)dy,$$

where $P(x,y)$ is a real valued polynomial defined on $\Omega \times \Omega$. Lu and Zhang used L^2-boundedness of T to get L^p- boundedness of S with $1 < p < \infty$.

The commutator generated by the operator S for a given measurable function b is formally defined by

$$[S,b]f = S(bf) - bS(f).$$

Let $p(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $(1,\infty)$. An open set Ω which may be unbounded throughout the whole paper. We mainly suppose that

$$1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty,$$

where $p_- := ess\inf_{x\in\Omega} p(x)$, $p_+ := ess\sup_{x\in\Omega} p(x)$. By $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ we denote the space of all measurable functions $f(x)$ on Ω such that

$$I_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx < \infty.$$

Equipped with the norm

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\eta > 0: \ I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \leqslant 1\right\},$$

this is a Banach function space. By $p'(\cdot) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$, $x \in \Omega$, we denote the conjugate exponent.
$\mathcal{P}(\Omega)$ is the set of bounded measurable functions $p : \Omega \to [1,\infty)$;
$\mathcal{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ satisfying the local log-condition

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{A}{-\ln|x-y|}, \ \ |x-y| \leqslant \frac{1}{2} \ \ x,y \in \Omega,$$

where $A = A(p) > 0$ does not depend on x, y;
$\mathbb{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ with $1 < p_- \leqslant p_+ < \infty$;
for Ω which may be unbounded, by $\mathbb{P}^{log}_\infty(\Omega)$ we denote the subsets of the above sets of exponents satisfying the decay condition (when Ω is unbounded)

Let $\lambda(x)$ be a measurable function on Ω with values in $[0,n]$. The variable modified Morrey space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ is defined as the set of integrable functions f on Ω with the finite norms

$$\|f\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega, \ t>0} [t]_1^{\frac{\lambda(x)}{p(x)}} t^{-\theta_p(x,t)} \|f\chi_{\widetilde{B}(x,t)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

respectively.

We define the $BMO(\Omega)$ space as the set of all locally integrable functions f with finite norm

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{x\in\Omega, \ r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y) - f_{\widetilde{B}(x,r)}|dy.$$

We define the $BMO_{p(\cdot)}(\Omega)$ space as the set of all locally integrable functions f with finite norm

$$\|f\|_{BMO_{p(\cdot)}} = \sup_{x\in\Omega,\ r>0} \frac{\|(f(\cdot) - f_{\widetilde{B}(x,r)})\chi_{\widetilde{B}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}{\|\chi_{\widetilde{B}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}.$$

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_{\infty}(\Omega)$ and $0 \leqslant \lambda(x) < n$. Then the singular integral operator S is bounded from the space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$ to the space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$*

Theorem 2. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_{\infty}(\Omega)$, $b \in BMO(\Omega)$ and $0 \leqslant \lambda(x) < n$. Then the singular integral operator $[b, S]$ is bounded from the space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$ to the space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$.*

References

1. *C.B. Morrey*, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126-166.

2. *G. Di Fazio and M. A. Ragusa*, Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients , J. Funct. Anal. 112 (1993), 241-256.

3. *S. Janson*, Mean oscillation and commutators of singular integral operators, Ark. Mat. **16**, 1978, 263-270.

REMARKS ON COMMUTING JACOBI TYPE DIFFERENCE OPERATORS

A.S. Osipov

osipa68@yahoo.com

UDC 517.984.4,517.982.37,517.962.2

We study the situations when two Jacobi operators are self-adjoint and commute. Both scalar and block Jacobi operators are considered. In the latter case, some sufficient conditions for commutativity in terms of the operators' coefficients are given.

Keywords: Jacobi matrices, difference equations, moment problem, orthogonal polynomials
MSC: 47B39, 47A10, 39A70

Andrey Osipov, Federal State Institution “Scientific-Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russia

In the operator theory, the study of commuting operators remains an actual task. First we recall that two self-adjoint (possibly unbounded) operators are said to commute if their spectral projections commute [1]. In [2] E. Nelson proved the existence of two essentially self-adjoint operators A and B in a Hilbert space $\mathcal{H}$ having a common dense domain $\mathcal{D}$ such that for all x in $\mathcal{D}$, $ABx = BAx$, but such that $\bar{A}$ and $\bar{B}$ do not commute. He proved that for the commutativity some additional conditions are needed. In this note, we study the commutativity issues for some operators generated by semi-infinite Jacobi matrices with scalar and matrix elements.

We start from the scalar Jacobi operators. Namely, consider two Jacobi matrices:

$$J^1 = \begin{pmatrix} b_0^1 & a_0^1 & 0 & 0 \\ a_0^1 & b_1^1 & a_1^1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} b_0^2 & a_0^2 & 0 & 0 \\ a_0^2 & b_1^2 & a_1^2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix};$$

where $a_n^m, b_n^m \in \mathbb{R}, a_n^m > 0, n \in \mathbb{Z}_+,\ m = 1,2$. Denote by L_0^1 and L_0^2 the minimal closed symmetric operators the Hilbert space $l^2[0,\infty)$ (consisting of the complex sequences $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$ such that $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$), generated by J^1 and J^2 respectively. Also, denote by $P^1(\lambda) = (P_i^1(\lambda))_{i=0}^{\infty}, Q^1(\lambda) = (Q_i^1(\lambda))_{i=0}^{\infty}$ and $P^2(\lambda) = (P_i^2(\lambda))_{i=0}^{\infty}, Q^2(\lambda) = (Q_i^2(\lambda))_{i=0}^{\infty}$ the systems of polynomials of the first and the second kind (see e. g. [3] for details) corresponding to J^1 and J^2. The formal matrix commutativity $J^1J^2 = J^2J^1$ (which amounts to commutativity of L_0^1 and L_0^2 on the set $D_0^{'}$ of finitely nonzero vectors from $l^2[0,\infty)$) implies

$$a_n^2 = ka_n^1, \quad b_n^2 = kb_n^1 - K; \quad n \in \mathbb{N}; \tag{1}$$

where $k = a_0^2/a_0^1,\ K = kb_0^1 - b_0^2$. In terms of the polynomial systems, this implies that

$$P_i^2(\lambda) = P_i^1\left(\frac{\lambda}{k} + \lambda_0\right) \quad Q_i^2(\lambda) = \frac{1}{k}Q_i^1\left(\frac{\lambda}{k} + \lambda_0\right); \quad \lambda_0 = \frac{K}{k}; \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

As well known ([3]), the defect numbers of L_0^m are are either (0,0) (self-adjoint or limit-point case) or (1,1) (limit-circle case). If the relations (1) are fulfilled, then one can easily check that the defect numbers of L_0^1 and L_0^2 are the same.

Define the domains $D^m,\ m = 1,2$ as the sets of all vectors $y \in l^2[0,\infty)$ such that $J^m y \in l^2[0,\infty)$. For any y and z from D^m there exists a limit

$$[y,z]_\infty^m := \lim_{n\to\infty} a_n^m(y_n\bar{z}_{n+1} - y_{n+1}\bar{z}_n).$$

The study of self-adjoint extensions of Jacobi operators in the limit-circle case allows us to get the following result.

Theorem 1. *Assume that L_0^1 and L_0^2 are commutative on the set $D_0^{'}$. Then, either they are self-adjoint and commute, or they admit a commutative self-adjoint extensions. In the latter case these extensions can be determined as follows: $L_{ext}^1 :=$ J^1y on the elements y in D^1, satisfying the boundary condition:*

$$[y, Q^1(0)]_\infty^1 - h[y, P^1(0)]_\infty^1 = 0;$$

and $L_{ext}^1 := J^2y$ on the elements y in D^2, satisfying:

$$[y, Q^2(\lambda_0)]_\infty^2 - \tilde{h}[y, P^2(\lambda_0)]_\infty^2 = 0;$$

where h is a real number, $\tilde{h} = kh$.

We now consider one special class of block Jacobi operators. First, consider two three-diagonal block matrices

$$J_b^1 = \begin{pmatrix} B_{0,1} & A_{0,1}^* & & \mathbf{0} \\ A_{0,1} & B_{1,1} & A_{1,1}^* & \\ & A_{1,1} & B_{2,1} & \ddots \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad J_b^2 = \begin{pmatrix} B_{0,2} & A_{0,2}^* & & \mathbf{0} \\ A_{0,2} & B_{1,2} & A_{1,2}^* & \\ & A_{1,2} & B_{2,2} & \ddots \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

where $A_{n,m}$ are $(n+2)\times(n+1)$ complex matrices, rank $A_{n,m} = (n+1)$; and $B_{n,m}$ - $(n+1)\times(n+1)$ matrices, $n \in \mathbb{Z}_+$, $m = 1, 2$. Assume that for J_b^1 and J_b^2 the commutativity relations are fulfilled, which implies

$$A_{n,1}A_{n-1,2} = A_{n,2}A_{n-1,1},$$

$$A_{n-1,1}B_{n-1,2} + B_{n,1}A_{n-1,2} = A_{n-1,2}B_{n-1,1} + B_{n,2}A_{n-1,1},$$

$$A_{n-1,1}A_{n-1,2}^* + B_{n,1}B_{n,2} + A_{n,1}^*A_{n,2} = A_{n-1,2}A_{n-1,1}^* + B_{n,2}B_{n,1} + A_{n,2}^*A_{n,1}. \quad (2)$$

Denote by $\hat{l}^2[0,\infty)$ the Hilbert space of quadratic summable sequences $u = (u_0, u_1, \dots)$ where the vectors $u_j \in \mathbb{C}^j$; with the inner product $(u,v) = \sum_{j=0}^{\infty}(u_j, v_j)_{\mathbb{C}^j}$. Also, denote by L_1 and L_2 the operators (which act via matrix multiplication on $\hat{l}^2[0,\infty)$), generated by J_b^1 and J_b^2 respectively. The domain D_0 of L_1 and L_2 consists of the finitely nonzero vectors from $\hat{l}^2[0,\infty)$. These are symmetric operators which, as follows from (2), are commutative on the vectors from D_0. The study of such operators is important to the theory of multivariate orthogonal polynomials and multidimensional moment problem. It was shown in [4] that if L_1 and L_2 (under some additional assumptions on the structure of $A_{n,m}$ and $B_{n,m}$) are essentially self-adjoint and commute, then the corresponding two-dimensional moment problem has the solution, and a sufficient condition for that was found (Theorem 3). Using the results of [5]-[6], one can find a number of similar conditions, in particular the following one:

Theorem 2. *Assume that L_1 and L_2 are commutative on D_0. Denote*

$$E_n = A_{n,1}^*A_{n+1,1}^* + A_{n,2}^*A_{n+1,2}^*,$$

$$F_n = A_{n,1}^*B_{n+1,1} + B_{n,1}A_{n,1}^* + A_{n,2}^*B_{n+1,2} + B_{n,2}A_{n,2}^*.$$

$$G_n = A_{n-1,1}A_{n-1,1}^* + A_{n-1,2}A_{n-1,2}^* + (B_{n,1})^2 + (B_{n,2})^2 + A_{n,1}^*A_{n,1} + A_{n,2}^*A_{n,2}.$$

If $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_n D_{1,n}} = \infty$, where $C_n = max\{\|E_n\|, \|E_{n+1}\|, \|F_n\|\}$, and $D_{1,n} = max\{D_n, D_{n+1}\}$, where $D_n = \|G_n^{-1}E_{n-2}\| + \|G_n^{-1}F_{n-1}\| + \|G_n^{-1}E_n\| + \|G_n^{-1}F_n\|$, then operators L_1 and L_2 are essentially self-adjoint and commute.

Finally, note that if the analog of Carleman's condition is fulfilled for L_1 and L_2: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|A_{n,m}\|} = \infty$, then L_1 and L_2 are self-adjoint, but the question of their commutativity remains open.

References

1. *M. Reed, B. Simon* Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis. — New York: Academic Press, 1980.

2. *E. Nelson* Analytic vectors // Ann. of Math. **70(3)** (1959), 572–615.

3. *N.I. Akhiezer* The Classical Moment Problem. — Edinburgh: Oliver Boyd, 1965.

4. *M. Gekhtman, A. Kalyuzhny* On the orthogonal polynomials in several variables // Integr. Equat. Oper. Theory **19(4)** (1994), 404–418.

5. *E.N. Petropoulou, L. Velazquez* Self-adjointness of unbounded tridiagonal operators and spectra of their finite truncations // J. Math. Alal. Appl. **420** (2014), 852–872.

6. *I.N. Braeutigam, K.A. Mirzoev* Deficiency numbers of operators generated by infinite Jacobi matrices // Dokl. Math. **93(2)** (2016), 170–174.

KOLMOGOROV INTEGRAL AND FOCK APPROACHES TO WEYL SECOND QUANTIZATION

N.N. Shamarov
nshamarov@yandex.ru

UDC 517.9

The second quantization method is developed into two directions which both transform real-valued infinite dimensional classical observables into symmetric (in proper sense) pseudo-differential operators, acting on functions and measures (Borel or generalized) defined on an infinite-dimensional real Hilbert space H.

The first construction deals with only countably additive measures on H but uses Kolmogorov "indefinite" integral technique; and the second one uses a version of translation-invariant generalized measure on H (analogous to the finite-dimensional Lebesgue measure) and infinite dimensional functions-to-functions Fourier transforms leading to the natural Fock CCR representation.

Keywords: Kolmogorov definite and indefinite integrals, Fock representation of canonical commutation relations, Weyl pseudo-differential operators, method of second quantization
MSC: 46N50

The fundamental physical theories continue to inspire deep analytical advances; in particular the mathematical formulation of renormalization method in physically interesting models needs further development of functional-analytical methods for regularizing linear functionals such as traces and integrals [1], and the correspondent exponentials like determinants [2] and evolutional semigroups [3], [4]. The functional representations of the Fock space [5] objects in the second quantization [6] methods are the objects of infinite dimensional analysis being the functions (of infinitely many variables) differentiated to obtain equations and integrated to obtain solutions [3]. Following to the works of V.Fock and [3], below we accept that the domain of the functions representing states of secondary quantized system is the separable infinite-dimensional real Hilbert space H which can be interpreted as a real (configurational) part of the complex Hilbert space of the (pure) states of a "primary" quantized system (= of the "one-particle" part of the secondary quantized system's Hilbert space, which can be called Dirac–Fock space [5]).

This work is supported by "5-100 Russian Academic Excellence Program".
Nikolai Shamarov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

The attempt to exclude generalized measures from the definition, given in [3], of infinite-dimensional pseudo-differential operators (PDO, which are secondary quantized observables), defined on the space $M(H)$ of some Fomin-smooth [7] countably additive Borel measures on H, led us to use the construction of the Kolmogorov integral [8] while in its easy form for the σ-additive measures. Namely, like the complex-values measure on a measurable space $(X, \mathcal{F})$ denoted as fm or $f(x)m(dx)$ or $\int_{\cdot} fm$ and defined by $\mathcal{F} \ni A \mapsto (fm)(A) \equiv \int_A f(x)m(dx)$ can be called the Lebesgue indefinite integral of $f \in L_1(|m|)$ over m, also in the case when $f_j \in L_1(X, \mathcal{F}, |m_j|)$ $(j = 1, ..., n)$ the function $a = a_{f_1,m_1;\ ...;\ f_n,m_n} : X \times \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ defined by $X \times \mathcal{F} \ni (x, A) \mapsto a(x, A) = \sum_j f_j(x)m_j(A)$ is called a (Kolmogorov) amplitude (interpreted as the intensity of transitions from x to A), and its indefinite Kolmogorov integral is denoted by $\int_{\cdot} a$ or by $a(x, dy)|_{y=x}$ such that $\int_{\cdot} a : \mathcal{F} \ni A \mapsto \int_A a(x, dy)|_{y=x} \equiv \sum_j \int_A f_j(x)m_j(dx)$. In the following some analytical assumption are omitted and the discussion has an algebraic character.

Let $Q = H = P \equiv H^*$, $E = Q \times P$ and let $K : E \to \mathbb{C}$ be be a polynomial w.r.t. ortho-normed basis $\mathcal{E} = \{e_j\}$ of H. Then the (P)DOs $\hat{K}_M$ with the Weyl symbol K (in the spaces of measures) and $\hat{K}$ in the spaces of functions on H can be defined by means of the injective Hilbert Fourier transform [9] (HFt) and its inverse. Let m be a measure smooth enough along $span(\mathcal{E})$, and $a_{K,m}$ be the Kolmogorov amplitude such that for any $(q_0, p) \in E$

$$\int_Q e^{ip(q_1)} a_{K,m}(q_0, dq_1) = \int_Q e^{ip(q_1)} K(\tfrac{q_0+q_1}{2}, p)m(dq_1);$$

then $\hat{K}_M\ m$ is such a measure that for each $p \in P$

$$\int_Q e^{ipq}(\hat{K}_M\ m)(dq) = \int_Q e^{ipq} a_{K,m}(q_0, dq)|q = q_0\ .$$

Let now $\psi : H \to \mathbb{C}$ be a smooth enough function. Then $\hat{K}\psi : H \to \mathbb{C}$ is such a function that for each $q \in Q$ $\hat{K}\psi(q) = \int_P e^{ip(q)} a_{K,\psi,q}(p, dp_1)|p = p_1$, where $a_{K,\psi,q}$ is such a Kolmogorov amplitude that for any $q_1 \in Q$ and $p \in P$

$$K(\tfrac{q+q_1}{2}, p)\psi(q) = \int_P e^{ip_1(q_1)} a_{K,\psi,q}(p, dp_1)\ .$$

Theorem 1. *If K is real valued, then $\hat{K}$ is a symmetric differential operator on functions in the sense that $\hat{K}_M$ has the same coefficients as a differential operator on measures. Moreover, if $K(q,p) \equiv g(q)$ for some polynomial $g : Q \to \mathbb{C}$ then $(\hat{K}\psi)(q) = g(q)\psi(q)$ and $(\hat{K}_M m)(dq) = g(q)m(dq)$; and if $K(q,p) = p(e_j)^n$ then $\hat{K}$ “$=$” $\hat{K}_M = (-i)^n(\partial_{e_j})^n$.*

The second construction of PDO uses simple variant of translation-invariant Schwartz spaces $S^r(H) = \cup\{S^r_L(H) : L \subset H, \dim L < \infty\}$ where $\mathbb{R} \ni r > 0$, $g^r(x) = e^{-r\|x\|^2/2}$ and, for any finite dimensional subspace $L \subset H$, $S^r_L(H) = \{(f \circ P_L)(g^r \circ P_{L^\perp}) : f \in S(L;\mathbb{C})\}$, P_{H_0} denotes orthogonal projector on a closed linear subspace $H_0 \subset H$. Now the normalized Fourier transform $F^{2\pi} : S^{2\pi}(H) \ni \psi \mapsto \tilde{\psi} \in S^{2\pi}(H)$ of a function $\phi_f = (f \circ P_L)(g^{2\pi} \circ P_{L^\perp})$ $(f \in S(L;\mathbb{C})$ can be defined as $\widetilde{\phi_f} = \phi_{\tilde{f}}$ where $\tilde{f}(y) = \int_L e^{2\pi i(x,y)_L} f(x)dx$ $(y \in L)$ and hence $f(x) = \int_L e^{-2\pi i(x,y)_L} \tilde{f}(y)dy$ $(x \in L)$. The “Lebesgue” integration can be also defined as $\int_H f(P_L x)g^{2\pi}(P_{L^\perp} x)dx = \int_L f(y)dy$ so the space $S^\pi(H)$ carries a complex scalar product $(\psi_1, \psi_2)_{L_2(H)} = \int_H \psi_1(x)\overline{\psi_2(x)}dx$ and its completion is denoted $L_2(H)$.

If K is as above and $\phi \in S^{2\pi}(H)$ then define

$$\hat{K}_-\phi\ (q) = \int_P dp\ (e^{2\pi ip(q)} \int_Q e^{-2\pi ip(q_1)} K(\tfrac{q+q_1}{2}, p)\phi(q_1)dq_1)$$

so $\hat{K}_{-}\phi \in S^{2\pi}(H)$ again. Endowing the space $C^{\infty}(H)$ of all Frechet smooth function with the topology of convergence of each derivative on each finite dimensional bounded set, we close the graph of $\hat{K}_{-}$ in such a topology and then restrict the closure onto $S^{\pi}(H)$ denoting the restriction by $\hat{K}_{+}$.

Theorem 2. *If K is real valued then $\hat{K}_{+}$ is an essentially self-adjoint differential operator in $L_2(H)$ having the same algebraic property as do $\hat{K}$ in Theorem 1 up to constant multipliers:*

if $K(q,p) \equiv g(q)$ for some polynomial $g : Q \to \mathbb{C}$ then $(\hat{K}_{+}\psi)(q) = g(q)\psi(q)$ and if $K(q,p) = p(e)^n$ ($\|e\|_H = 1$) then $\hat{K}_{+} = (-\frac{i}{2\pi})^n(\partial_e)^n$.

Moreover, analytic continuation of each $K \in E'$ onto the complexification of E defines the Fock representation of the canonical commutation relations with the vacuum vector $g^{\pi} \in L_2(H)$.

References

1. *Sadovnichii V. A., Smolyanov O. G., Shavgulidze E. T.* Representation of regularized traces of operators by functional integrals // Doklady Math., **86**, no. 2 (2012), 644—647.

2. *V. A. Sadovnichii, O. G. Smolyanov, and E. T. Shavgulidze* Representations of regularized determinants of exponentials of differential operators by functional integrals // Doklady Math., **93**, no. 1 (2016), 46—48.

3. *V. V. Kozlov, O. G. Smolyanov* Hamiltonian Approach to Secondary Quantization // Doklady Math., **98**, no. 3 (2018), 571—574.

4. *Kravtseva A. K., Smolyanov O. G., Shavgulidze E. T.* Asymptotic expansions of Feynman integrals of exponentials with polynomial exponent // Rus. J. of Math. Phys., **23**, no. 4 (2016), 490–508.

5. *V. Fock* Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung // Z. Phys., **49** , no.5–6 (May 1928), 339–357.

6. *V. Fock* Konfigurationsraum und zweite Quantelung // Z. Phys., **75** , no.9–10 (Sep 1932), 622–647.

7. *Averbuch V.I., Smolyanov O.G., Fomin S.V.* Generalized functions and differential equations in linear spaces. I. Differentiable measures. // Works of the Moscow mathematical society, **24** no 133 (1971), 133–174.

8. *Kolmogoroff A.* Untersuchungen Über den Integralbegriff. // Math. Ann., **103** (1930), 654-696

9. *O.G. Smolyanov, E.T. Shavgulidze* Path integrals. — Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1990 (2nd ed. 2015) (Rus.)

TRANSFORMATION OF FEYNMAN PATH INTEGRALS AND QUANTUM ANOMALIES

O.G. Smolyanov

smolyanov@yandex.ru

UDC 517

Feynman path integral need not be invariant with respect to transformation, which conserve classical action, because the generalized (Lebesgue) measure, which is used in the definition of the Feynman path integral, may be not invariant with respect to the transformation. It is shown that it is the reason of so called quantum anomalies. The statement resolve the contradiction between results in the books by K. Fujikawa and H. Suzuki ([1]) and P. Cartier and C. DeWitt-Morette ([2]) in favor of the first one.

Keywords: Feynman path integral, generalized measure, Lebesgue distribution, quantum anomaly, classical action

One calls quantum anomaly the situation when the dynamic of the quantum system, which is obtained by a procedure of quantization of a classical (Lagrangian or Hamiltonian) system, whose action is invariant with respect to some transformation, which we denote by g, is not invariant with respect to the same transformation.

In the talk we show that such loss of invariance is explained by nontrivial transformation of the Sobolev-Schwartz distribution, which is used in Feynman path integral representing the dynamic of quantum system.

Feynman path integrals are used to represent solutions to Cauchy problems for Schroedinger-type equations and also some other objects related to such equations (for example, regularized traces of differential operators and regularized exponents of such operators).

Such Feynman path integrals, which are used in the representation of solutions to Cauchy problem of the Schroedinger equation, can be interpreted as integrals of the exponent of classical action times a function depending on initial data with respect to generalized measure which is a sort of the Sobolev-Schwartz distribution. This distribution is translation-invariant and hence can be considered a generalization of the Lebesgue measure. According to the well-known A.Weil's theorem, on any infinite-dimensional locally convex space there does not exist an analog of the standard Lebesgue measure: any translation-invariant σ-additive σ-finite locally finite Boreal measure on an infinite-dimensional locally convex space is equal to zero. The invariance of classical action with respect to some transformation does not imply the invariance of Feynman path integral with respect to this transformation because the translation-invariant generalized measure in the integral need not be invariant with respect to this transformation.

One can define the transformation of the generalized measure using the derivative of this measure along the vector field which generates such transformation. The formulae for transformation of usual measures generated by vector fields can be found in [3]. One can show that the formulae for generalized measures look quite similar.

We denote the vector field, which generates the transformation g, by h.

This research is supported by Lomonosov Moscow State University. Grant "Modern problems of mathematics and mechanics" and by visit-professor grant of MPhTI.

Oleg Smolyanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Let also ν be the product of the exponent of the action of the classical system and the Lebesgue-type (i.e. translation invariant) distribution (generalized measure):

$$\nu = e^{S(\cdot)} M_{\mathcal{L}};$$

here $S(\cdot)$ is the classical action and $M_{\mathcal{L}}$ is the Lebesgue-type distribution. Let the symbol $\nu' h$ denote the derivative of ν along the vector field h; then according to the Leibnitz formula:

$$\nu' h = e^{S(\cdot)} S' h(\cdot) M_{\mathcal{L}} + e^{S(\cdot)}\ tr(h'(\cdot)) M_{\mathcal{L}}.$$

If the domain of the vector field h is equipped with a Hilbert structure then for any x from the domain of h, $h'(x)$ is the linear operator in the corresponding Hilbert space, and the symbol $tr(h'(x))$ denotes the usual trace of operator.

If the vector field h generates a transformation with respect to which the action $S(\cdot)$ is invariant, then $S'h(\cdot) = 0$ and hence $\nu' h = e^{S(\cdot)}\ tr(h'(\cdot)) M_{\mathcal{L}}$. If $tr(h'(\cdot)) \neq 0$ then the derivative of ν along the vector field h is not equal to zero. This is just the origin of the quantum anomalies.

References

1. *Fujikawa K., Suzuki H.* Path Integrals and Quantum Anomalies. — Clarendon Press: Oxford, 2004.

2. *Cartier P., DeWitt-Morette C.* Functional Integration: Action and Symmetries. — Cambridge University Press, 2006.

3. *Smolyanov O.G., Weizsacker H.v.* Smooth probability measures and associated probability operators// Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2013. – **2**:1, – pp. 51–78.

CHARACTERIZATION OF ASSOCIATE FUNCTION SPACES AND PRINCIPLE OF DUALITY

V.D. Stepanov

stepanov@mi-ras.ru

We analyse the problem of characterization of function spaces associated to a given function spaces or cones. The situation is rather different for an ideal, that is with lattice property, and non-ideal function spaces. Namely, the notion of associate norm bifurcates for a non-ideal space. We provide several examples of such a characterization including the weighted Sobolev space of the first order on the real line. The talk is based on the publications [1-7].

References

1. Stepanov V.D., On optimal Banach spaces containing a weight cone of monotone or quasiconcave functions, Math. Notes, **98**, No. 6, 957–970 (2015).

2. Eveson S.P., Stepanov V.D., and Ushakova E.P., A duality principle in weighted Sobolev spaces on the real line, Math. Nachr., **288**, No. 8-9, 877–897 (2016).

The author was supported by the Russian Scientific Fund (project no. 19-11-00087) and Russian Fund for Basic Researches (project no. 19-01-00223).

Vladimir D. Stepanov (Computing Center of Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia)

3. Prokhorov D.V., Stepanov V.D., and Ushakova E.P., On weighted Sobolev spaces on the real line, Math. Nachr., **290**, No. 5-6, 890–912, (2017).

4. Prokhorov D.V., Stepanov V.D., and Ushakova E.P., Hardy-Steklov integral operators. Part I. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **300**, Suppl. 2, pp. S1–S112 (2018).

5. Prokhorov D.V., Stepanov V.D., and Ushakova E.P., Hardy-Steklov integral operators. Part II. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **302**, Suppl. 2, pp. S1–S61. (2018)

6. Jain P., Singh A.P., Singh M., and Stepanov V.D., Sawyer's duality principle for grand Lebesgue space, Math. Nachr. **292**, No. 4, 841–849, (2019)

7. Stepanov V.D. and Ushakova E.P., Hardy–Steklov operators and the duality principle in weighted first-order Sobolev spaces on the real axis, Math. Notes, **105**, No. 1, pp. 92—104, (2019).

THE STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF FIVE-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. QUARTET STATE

S.M. Tashpulatov

sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

UDC 517.984

We consider of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the quartet state of the system. (3-10 lines).

Keywords: essential spectra, discrete spectrum, Hubbard model, five-electron systems, quartet state

MSC: 47Axx

In the early 1970s, three papers [1,2,3], where a simple model of a metal was proposed that has become a fundamental model in the theory of strongly correlated electron systems, appeared almost simultaneously and independently. In that model, a single nondegenerate electron band with a local Coulomb interaction is considered. The model Hamiltonian contains only two parameters: the matrix element t of electron hopping from a lattice site to a neighboring site and the parameter U of the on-site Coulomb repulsion of two electrons. In the secondary quantization representation, the Hamiltonian can be written as

$$H = t\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma} a_{m,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow} a_{m,\uparrow} a^{+}_{m,\downarrow} a_{m,\downarrow}, \tag{1}$$

where $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ denote Fermi operators of creation and annihilation of an electron with spin γ on a site m and the summation over τ means summation over the nearest neighbors on the lattice.

This work is supported by Uz.FFI (no. OT-F2-18).

Sadulla Mamarajabovich Tashpulatov (Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

The model proposed in [1,2,3] was called the Hubbard model after John Hubbard, who made a fundamental contribution to studying the statistical mechanics of that system, although the local form of Coulomb interaction was first introduced for an impurity model in a metal by Anderson [4]. We also recall that the Hubbard model is a particular case of the Shubin-Wonsowsky polaron model [5], which had appeared 30 years before [1,2,3]. In the Shubin-Wonsowsky model, along with the on-site Coulomb interaction, the interaction of electrons on neighboring sites is also taken into account.

The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [6]. But little is known about exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model, and obtaining the corresponding statements is therefore of great interest. The spectrum and wave functions of the system of two electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [6].

The spectrum and wave functions of the system of three electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [7].

The spectrum of the energy operator of system of four electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the triplet state were studied in [8]. In the four-electron systems are exists quintet state, and three type triplet states, and two type singlet states. The spectrum of the energy operator of four-electron systems in the Hubbard model in the quintet, and singlet states were studied in [9].

Here, we consider the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for sextet and quartet states.

The Hamiltonian of the chosen model has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m+\tau,\gamma}a_{m,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}. \qquad (2)$$

Here A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites (we assume that $B>0$ for convenience), $\tau=\pm e_j, j=1,2,...,\nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, $\gamma=\uparrow$ or $\gamma=\downarrow$, $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m\in Z^\nu$.

In the five-electron systems exists sextet state, four type quartet states, and five type doublet states.

The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\mathcal{H}_{as}$.

In the system exists four type quartet states. This states is consists of the next states ${}^1q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\downarrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$, ${}^2q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$, ${}^3q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$, ${}^4q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^1\mathcal{H}^q_{3/2}$, corresponding to the first five-electron quartet state is the set of all vectors of the form ${}^1\psi^q_{3/2} = \sum_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} f(m,n,r,t,l)\,{}^1q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu}, f\in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^5)$. The restriction ${}^1H^q_{3/2}$ of operator H to the subspace ${}^1\mathcal{H}^q_{3/2}$, is called the five-electron first quartet state operator.

Theorem 1. *The subspace ${}^1\mathcal{H}^q_{3/2}$ is invariant under the operator H, and the operator ${}^1H^q_{3/2}$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^1\overline{H}^q_{3/2}$ acting in the space l^{as}_2. In the quasimomentum representation, the* *operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *acts in the Hilbert space* $L_2^{as}((T^\nu)^5)$ *as*

$$ {}^1\widetilde{H}^q_{3/2}\psi = \{5A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i + cos\mu_i + cos\gamma_i + cos\theta_i + cos\eta_i]\}f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta)+ \quad (3) $$

$$ +U\int_{T^\nu}[f(s,\lambda+\mu-s,\gamma,\theta,\eta)+f(s,\mu,\lambda+\gamma-s,\theta,\eta)+f(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta)+ $$

$+f(s,\mu,\gamma,\theta,\lambda+\eta-s)]ds$, *where* $L_2^{as}((T^\nu)^5)$ *is the subspace of antisymmetric functions in* $L_2((T^\nu)^5)$.

Using tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators in Hilbert spaces, we can describe the structure of essential spectra and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$.

Let $\Lambda_1=\lambda+\mu$, $\Lambda_2=\gamma+\theta$, $\Lambda_3=\lambda+\eta$, $\Lambda_4=\lambda+\gamma$, $\Lambda_5=\lambda+\theta$.

Theorem 2. *If* $\nu=1$ *and* $U<0$, *then the essential spectrum of the first five-electron quartet state operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of the union of seven segments:*

$$ \sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = [a+c+e,b+d+f]\cup[a+c+z_3,b+d+z_3]\cup[a+e+z_2,b+f+z_2]\cup[a+z_2+ $$

$+z_3,b+z_2+z_3]\cup[c+e+z_1,d+f+z_1]\cup[c+z_1+z_3,d+z_1+z_3]\cup[e+z_1+z_2,f+z_1+z_3]$, *and discrete spectrum of operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of no more one point:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2})=\{z_1+z_2+z_3\}$, *or* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2})=\emptyset$.

Here and hereafter $a=2A-4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b=2A+4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $c=2A-4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $d=2A+4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $e=A-2B$, $f=A+2B$, $z_1=2A-\sqrt{U^2+16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $z_2=2A-\sqrt{U^2+16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $z_3=A+2\sqrt{U^2+B^2}$.

Theorem 3. *If* $\nu=1$ *and* $U>0$, *then the essential spectrum of the first five-electron quartet state operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of the union of seven segments:*

$$ \sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = [a+c+e,b+d+f]\cup[a+c+\widetilde{z}_3,b+d+\widetilde{z}_3]\cup[a+e+\widetilde{z}_2,b+f+\widetilde{z}_2]\cup $$

$$ \cup[a+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3,b+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3]\cup[c+e+\widetilde{z}_1,d+f+\widetilde{z}_1]\cup $$
$$ \cup[c+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3,d+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3]\cup[e+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2,f+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3], $$

and discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of no more one point:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2})=\{\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3\}$, *or* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2})=\emptyset$. *Here* $\widetilde{z}_1=2A+\sqrt{U^2+16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $\widetilde{z}_2=2A+\sqrt{U^2+16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $\widetilde{z}_3=A-2\sqrt{U^2+B^2}$.

Theorem 4. *a). If* $\nu=3$ *and* $U<0$, *or* $U>0$, *then the essential spectrum of the first five-electron quartet state operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of the union of seven or four, or two, or single segments, and discrete spectrum of operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of no more one point.*

The analogously investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum the others quartet states.

References

1. *Hubbard J.* Electron Correlations in Narrow Energy Bands // Proc. Roy. Soc. A., **276** (1963), 238–257.

2. *Gutzwiller M.C.* Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals // Phys. Rev. Lett., **10** (1963), 159–162.

3. *Kanamori J.* Electron correlation and ferromagnetism of transition metals // Prog. Theor. Phys., **30** (1963), 275–289.

4. *Anderson P.W.* Localized Magnetic States in Metals // Phys. Rev., **124** (1961), 41–53.

5. *Shubin S.P., Wonsowsky S.V.* On the electron theory of metals // Proc. Roy. Soc. A., **145** (1934), 159–180.

6. *Karpenko B.V., Dyakin V. V., and Budrina G. L.* Two electrons in the Hubbard Model // Phys. Met. Metallogr., **61** (1986), 702–706.

7. *Tashpulatov S. M.* Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model // Theoretical and Mathematical Physics, **179** (2014), 712–728.

8. *Tashpulatov S. M.* Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard model // Journal of Physics: Conference Series, **697** (2016), 012025 doi:10.1088/1742-6596/697/1/012025

9. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii Journal of Mathematics, **38** (2017), 530–541.

INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH COMPLEX WEIGHTS

V.A. Yurko

yurkova@info.sgu.ru

UDC 517.984

We study inverse problems of spectral analysis for second order differential operators on a finite interval with complex-valued weights and with an arbitrary number of jump conditions inside the interval. Uniqueness theorems are proved for this class of nonlinear inverse problems.

Keywords: Sturm-Liouville operators; complex weights; inverse spectral problems

Let $N \geqslant 2$ be fixed, and let $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ be the eigenvalues of the boundary value problem L for the differential equation

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad x \in [0,T], \tag{1}$$

on a finite interval $[0,T]$ with the boundary conditions

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(T) + Hy(T) = 0,$$

and with the discontinuity conditions in interior points $b_k \in (0,T)$, $k = \overline{1, N-1}$, $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{N-1} < T$:

$$y(b_k+0) = d_{k1}y(b_k-0), \quad y'(b_k+0) = d_{k2}y'(b_k-0)+d_{k3}y(b_k-0), \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{2}$$

This work was supported in part by Grant 1.1660.2017/4.6 of the Russian Ministry of Education and Science and by Grant 19-01-00102 of Russian Foundation for Basic Research.

Vjacheslav Yurko (Saratov State University, Saratov, Russia)

Here $q(x)$ and $r(x)$ are complex-valued functions, $q(x) \in L(0,T)$, $r(x) = a_k$ for $x \in [b_{k-1}, b_k)$, $k = \overline{1,N}$, $b_0 := 0, b_N := T$, and h, H, a_k, d_{kj} are complex numbers, $a_k \neq 0$, $d_k := d_{k1}d_{k2} \neq 0$.

Let $\Phi(x,\lambda)$ be the solution of Eq. (1) satisfying jump conditions (2) and the boundary conditions $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$. Denote $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$. We will call $M(\lambda)$ the Weyl-type function. Let $\{\lambda_{n0}\}_{n\geqslant 0}$ be the eigenvalues of the boundary value problem L_0 for Eq.(1) with jump conditions (2) and the boundary conditions $y(0) = V(y) = 0$. Let a_k and d_{kj}, $j = 1,2$ be known a priori. The inverse problem is formulated as follows.

Inverse problem 1. Given the Weyl-type function $M(\lambda)$, construct $q(x)$, h, H, d_{k3}.

Inverse problem 2. Given two spectra $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{\lambda_{n0}\}_{n\geqslant 0}$, construct $q(x)$, h, H, d_{k3}.

These inverse problems are generalizations of the classical inverse problems for Sturm-Lioville operators with $r(x) \equiv 1$ and $d_{k1} = d_{k2} = 1, d_{k3} = 0$ (see [1]).

Let us formulate the uniqueness theorems for these inverse problems. For this purpose together with L we consider the boundary value problem $\tilde{L}$ of the same form but with different coefficients. We agree that if a certain symbol α denotes an object related to L, then $\tilde{\alpha}$ will denote the analogous object related to $\tilde{L}$. Let $a_k = \tilde{a}_k$, $d_{kj} = \tilde{d}_{kj}$, $j = 1,2$.

Theorem 1. *If $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, then $q(x) = \tilde{q}(x)$ a.e. on $(0,T)$, and $h = \tilde{h}, H = \tilde{H}, d_{k3} = \tilde{d}_{k3}$. Thus, the specification of the Weyl-type function uniquely determines $q(x), h, H$ and d_{k3}.*

Theorem 2. *If $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\lambda_{n0} = \tilde{\lambda}_{n0}$, for all $n \geqslant 0$, then $q(x) = \tilde{q}(x)$ a.e. on $(0,T)$, and $h = \tilde{h}, H = \tilde{H}, d_{k3} = \tilde{d}_{k3}$. Thus, the specification of two spectra uniquely determines $q(x), h, H$ and d_{k3}.*

References

1. *Freiling G., Yurko V.A* Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications. — New York: NOVA Science Publishers, 2001.

Секция 2

Дифференциальные уравнения

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННОЙ С НАГРУЖЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ

М.Ф. Абдукаримов, С.Х. Мирзоев

mahmadsalim_86@mail.ru

УДК 517.958

Данная работа посвящена изучению одной задачи граничного управления, связанной с нагруженным уравнением гиперболического типа. Доказана теорема существования решения рассматриваемой задачи. Показана также его устойчивость относительно функций, входящих в задачу.

Ключевые слова: граничное управление, нагруженное уравнение, априорная оценка, смещение.

On the existence of a solution to a single boundary control problem associated with a loaded equation

This paper is devoted to the study of one boundary control problem associated with a loaded hyperbolic equation type. An existence of solution for this problem and its stability with respect to the functions, included to the problem are proved.

Keywords: boundary control, loaded equation, apriori estimate, offset.

Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич, к.ф.-м.н., Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Душанбе, Таджикистан); Mahmadsalim Abdukarimov (Branch of Lomonosow Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan)

Мирзоев Сайъло Хабибулоевич, к.ф.-м.н., доцент, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Душанбе, Таджикистан); Say'lo Mirzoev (Branch of Lomonosow Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan)

В данной работе изучается вопрос существования решения задачи граничного управления смещением на одном конце при закрепленном втором процесса, описываемого одним гиперболическим уравнением. Постановка задачи такова: найти такую функцию $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, для которой существует в прямоугольнике $Q_T = (0 \leqslant x \leqslant l) \times (0 \leqslant t \leqslant T)$ решение следующей задачи:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x_0,t) = f(x,t) \qquad \textit{в} \qquad Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \qquad \textit{при} \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x) \qquad \textit{при} \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = 0 \qquad \textit{при} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

в которой $\varphi(x),\ \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l],\ \psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l],\ f(x,t), q(x,t) \in L_2(Q_T)$, $0 < x_0 < l$ и выполнены условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0);\ \varphi(l) = 0;\ \varphi_1(0) = \mu(T);\ \varphi_1(l) = 0.$$

Отметим, что уравнение (1) относится к классу нагруженных уравнений гиперболического типа [1].

Решение задачи граничного управления (1)-(4) понимается в обобщенном смысле и ищется в классе $\hat{W}_2^1(Q_T)$, впервые введенном в [2].

Следующая теорема доказывается методом, предложенным в [3].

Теорема. *Пусть $T = 2l$. Тогда решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления (1)-(4) существует.*

Следствие 1. *Из процесса доказательства приведенной теоремы вытекает оценка*

$$\|\mu - \hat{\mu}\|_{W_2^1[0,2l]} \leqslant C\|q\|_{L_2(Q_T)}, \tag{5}$$

где $\hat{\mu}(t) = \hat{u}(0,t)$ - граничное управление задачи для уравнения вынужденных колебаний струны [4].

Оценка (5) свидетельствует о регулярности решения рассматриваемой задачи граничного управления по отношению к аддитивному возмущению $q(x,t)u(x_0,t)$ неоднородного волнового оператора с суммируемым коэффициентом $q(x,t)$.

Следствие 2. Имеет место априорная оценка $\|u\|_{W_2^1(Q_{2l})} \leqslant C_1(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0,l]})$, которая свидетельствует об устойчивости решения задачи (1)-(4) относительно начальных и финальных условий.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — Москва: Наука, 2012. — 233 с.

2. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения, **36**:11 (2000), 1513-1528.

3. *Абдукаримов М.Ф.* Некоторые задачи граничного управления смещением для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом. — Душанбе, 2018. — 240с.

4. *Абдукаримов М.Ф., Крицков Л.В.* Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещением на одном конце // Дифференциальные уравнения, **49**:6 (2013), 759-771.

ИНВАРИАНТНОЕ СВОЙСТВО ФУНКЦИИ РИМАНА

А.В. Аксенов

aksenov@mech.math.msu.su

УДК 517.951

Показано, что симметрии фундаментальных решений линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения. Предложен метод построения функции Римана. Приведены примеры его применения. В терминах инвариантов Лапласа сформулировано условие, когда предлагаемый метод построения функции Римана неприменим.

Ключевые слова: функция Римана, фундаментальное решение, оператор симметрии, алгебра Ли

Invariant property of the Riemann's function

It is shown that the symmetries of the fundamental solutions of the linear hyperbolic equation of the second order with two independent variables preserve the Riemann's function of the adjoint equation invariant. The method for construction the Riemann's function is proposed. Examples of its application are given. The condition, when the proposed method of the Riemann's function construction is inapplicable, is formulated in terms of Laplace's invariants.

Keywords: Riemann's function, fundamental solution, symmetry operator, Lie algebra

В работе [1] применительно к частному гиперболическому уравнению второго порядка предложен метод интегрирования Римана. Для его использования необходимо построить функцию Римана, являющуюся решением характеристической задачи Гурса. Общего метода построения функции Римана не существует. В работе [2] дан подробный анализ шести известных способов ее построения для частных типов уравнений. В работе [3], на основе результатов работы [4] по групповой классификации гиперболических уравнений второго порядка, предложено находить функцию Римана с помощью симметрий уравнения. В настоящей работе показана инвариантность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00890).

Аксенов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Aksenov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

функции Римана относительно симметрий фундаментальных решений и предложен метод ее построения.

Рассмотрим общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$Lu = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)\,. \tag{1}$$

Метод Римана основывается на следующем тождестве: $2(vLu - uL^*v) \equiv (vu_y - uv_y + 2auv)_x + (vu_x - uv_x + 2buv)_y$. Здесь $L^*v = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv$ – сопряженное с Lu дифференциальное выражение. Метод Римана сводит задачу интегрирования уравнения (1) к построению вспомогательной функции Римана $v = R(x,y;x_0,y_0)$, удовлетворяющей однородному сопряженному уравнению $L^*R = 0$ и следующим условиям на характеристиках

$$(R_y - aR)\big|_{x=x_0} = 0\,, \qquad (R_x - bR)\big|_{y=y_0} = 0\,, \qquad R(x_0,y_0;x_0,y_0) = 1\,.$$

С помощью функции Римана для уравнения (1) строятся общие решения задачи Коши и характеристической задачи Гурса, а также частное решение неоднородного уравнения.

Функция Римана обладает свойством взаимности

$$R^*(x,y;x_0,y_0) = R(x_0,y_0;x,y)\,, \tag{2}$$

где $R^*(x,y;x_0,y_0)$ – функция Римана сопряженного уравнения, которая является решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет следующим условиям на характеристиках

$$(R^*_y + aR^*)\big|_{x=x_0} = 0\,, \qquad (R^*_x + bR^*)\big|_{y=y_0} = 0\,, \qquad R^*(x_0,y_0;x_0,y_0) = 1\,.$$

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка

$$Mu = \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(\mathbf{x})\, D^\alpha u = 0\,, \qquad \mathbf{x} \in R^m\,. \tag{3}$$

Здесь приняты стандартные обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ – мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$,

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m}\,.$$

Фундаментальные решения уравнения (3) являются решениями уравнения

$$Mu = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x^1 - x^1_0)\cdots\delta(x^m - x^m_0)\,. \tag{4}$$

Операторы симметрии уравнения (3), образующие конечномерную часть алгебры Ли операторов симметрии, имеют вид

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta(\mathbf{x})\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\,. \tag{5}$$

Обозначим через $\underset{p}{X}$ продолжение порядка p оператора симметрии (5). Функция $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ удовлетворяет тождеству $\underset{p}{X}(Mu) \equiv \lambda(\mathbf{x})\, Mu$.

Сформулируем основной результат работы [5].

Теорема 1. *Алгебра Ли операторов симметрии уравнения (4) является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения (3), выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad \lambda(\mathbf{x}_0) + \sum_i \frac{\partial \xi^i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_0^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m\,. \tag{6}$$

Симметриями фундаментальных решений (или симметриями уравнения (4)) будем называть симметрии уравнения (3), удовлетворяющие соотношениям (6).

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\,, \tag{7}$$

описывающее фундаментальные решения уравнения (1).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Симметрии фундаментальных решений уравнения (1) (или симметрии уравнения (7)) оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения.*

Из теоремы 2 следует, что функция Римана сопряженного уравнения является инвариантным решением исходного однородного уравнения относительно симметрий фундаментальных решений. Функция Римана исходного уравнения находится из соотношения взаимности (2).

На основании теоремы 2 предложен метод построения функции Римана. Приведены примеры его применения.

Приведено условие, когда предлагаемый метод построения функции Римана неприменим. Условие сформулировано в терминах инвариантов Лапласа. Дано некоторое уточнение результатов групповой классификации уравнения (1), приведенных в работе [4].

Литература

1. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды // В кн.: Риман Б. Сочинения. М.-Л.: ОГИЗ, 1948, 376-395.

2. *Copson E.T.* On the Riemann–Green Function // Archive for Rational Mechanics and Analysis, **1**:1 (1957/58), 324-348.

3. *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи математических наук, **47**:4 (1992), 83-144.

4. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнения С.А. Чаплыгина // Журнал прикладной механики и технической физики, 3 (1960), 126-145.

5. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН, **342**:2 (1995), 151-153.

О ТИПИЧНОСТИ И НЕТИПИЧНОСТИ СТЕПЕННОГО ПОВЕДЕНИЯ BLOW-UP РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА – ФАУЛЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СПЕКТРА ПОРОЖДЕННОГО ИМ ЯКОБИАНА

И.В. Асташова

ast.diffiety@gmail.com

УДК 517.923, 517.925.54

Исследуется асимптотика "blow-up"решений, то есть решений, уходящих в конечной точке на бесконечность вместе со своими производными до порядка n. Доказано, что асимптотическое поведение таких решений связано с характером спектра линейного оператора, возникающего при линеаризации связанной с уравнением динамической системы на $(n-1)$-мерном многообразии. Доказано, что для слабо нелинейных дифференциальных уравнений все blow-up решения имеют степенную асимптотику, а для сильно нелинейных уравнений степенное поведение таких решений нетипично: множество данных Коши, порождающих решения со степенным асимптотическим поведением имеет меру нуль.

Ключевые слова: асимптотическое поведение решений, качественные свойства, "blow-up спектр матрицы Якоби

On the typicality and atypicality of the power-law behavior of blow-up solutions to nonlinear Emden-Fowler type higher-order equations depending on the spectrum of a related Jacobian

We study the asymptotics of ”blow-up” solutions, that is, solutions tending at the end point to infinity with their derivatives up to the n-th order. It is proved that the asymptotic behavior of such solutions is related to the nature of the spectrum of a related linear operator. This operator arises from linearization of a dynamical system on an $(n-1)$-dimensional manifold. It is proved that for weakly nonlinear differential equations all blow-up solutions have power-law asymptotic behavior, and for strongly non-linear equations the power-law behavior of such solutions is atypical: the set of Cauchy data generating solutions with power-law asymptotic behavior has null measure.

Keywords: asymptotic behavior of solutions, qualitative properties, ”blow-up”, Jacobi matrix spectrum

Рассматривается нелинейное уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка:

$$y^{(n)} = p(x, y, y', ..., y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geqslant 2, \quad k \in (1, \infty), \tag{1}$$

Асташова Ирина Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова; РЭУ имени Г.В. Плеханова (Москва, Россия) Irina Astashova (Lomonosov Moscow State University, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia)

где функция $p(x, \xi_1, ..., \xi_n)$ непрерывна по всем переменным, удовлетворяет условию Липшица по переменным $\xi_1, ..., \xi_n$, а также неравенству $0 < m \leqslant p(x, \xi_1, ..., \xi_n) \leqslant M < +\infty$. Введем обозначение

$$\alpha = n/(k-1). \tag{2}$$

Любое максимально продолженное вправо решение уравнения (1), положительное в некоторой точке вместе со всеми своими *младшими* (т.е. порядка меньше n) производными, имеет вертикальную асимптоту в правой границе своей области определения. Ранее было доказано, что для $n = 2$ (см. [1, глава V]), для $n \in \{3, 4\}$ (см.[2, глава 5.3] и ссылки там на более ранние работы), что любое такое решение имеет степенное асимптотическое поведение:

$$y(x) = \pm C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0, \ C^{k-1} = \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha + j), \tag{3}$$

где x^* — произвольная константа. И.Т.Кигурадзе (см. [1, задача 16.4]) был поставлен вопрос о справедливости такого утверждения для уравнения (1) более высокого порядка. Это предположение оказалось верным для слабо нелинейного уравнения (1)(см. [3–4]).

Теорема 1. *Пусть $n > 4$, $p \in C(\mathbb{R}^{n+1}) \bigcap \mathrm{Lip}_{y_0,\dots,y_{n-1}}(\mathbb{R}^n)$, $p \to p_0 > 0$ при $x \to x^*, y_0 \to \infty, \dots, y_{n-1} \to \infty$. Тогда существует такое $K > 1$, что для любого действительного $k \in (1; K)$ любое blow-up решение уравнения (1) имеет степенное асимптотическое поведение (3) для некоторого x^*.*

Однако было доказано для уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ (см. доказательство в [5] для сколь угодно высокого порядка n, в [6]— для $n = 12, 13, 14$, в [7]— для произвольного $n \geqslant 12$), что при некотором $k > 1$ это уравнение имеет нестепенное решение

$$y = (x^* - x)^{-\alpha} \ h(\log(x^* - x)), \tag{4}$$

где h — непостоянная непрерывная положительная периодическая функция на $\mathbb{R}$.

Оказалось, что при $n \geqslant 12$ асимптотически степенные решения уравнения (1) порядка n с достаточно сильной нелинейностью даже при $p = p_0 > 0$ не только не исчерпывают множества всех blow-up решений, но и являются в некотором смысле нетипичными blow-up решениями этого уравнения.

При исследовании асимптотических свойств уравнения (1) при $p = p_0 > 0$ (см. [2, глава 5.3]) использовалось построение на $(n-1)$-мерной фазовой сфере динамической системы, у которой асимптотически степенным решениям уравнения (1) соответствовали траектории, стремящиеся к некоторой неподвижной точке системы. На координатной карте, покрывающей область сферы, соответствующую точкам с положительными значениями решения и его младших производных, эта система линеаризуется в окрестности особой точки, и собственные значения матрицы Якоби удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=0}^{n-1} (l + \alpha + j) = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + j + 1) \, . \tag{5}$$

Характер спектра этой матрицы определяет поведение blow-up решений уравнения (1). Ранее было доказано (см.[2, глава 5.1]), что если уравнение (4) имеет m корней с отрицательной действительной частью, то уравнение (1) имеет m- параметрическое семейство blow-up решений со степенным асимптотическим поведением. Так, при $5 \leqslant n \leqslant 11$ доказано существование $(n-1)$-параметрического семейства blow-up решений со степенной асимптотикой у уравнения (1) при некоторых дополнительных предположениях относительно функции p (см. [2, глава 5.1]). Существование решений вида (4) для уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ связано с появлением для любого $n \geqslant 12$ при некоторых $k > 1$ пары чисто мнимых корней и некоторыми дополнительными свойствами спектра (см. [5–7]). Оказалось [8], что для доказательства нетипичности степенного поведения blow-up решений уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ также используются свойства корней уравнения (5).

Теорема 2. *Если среди корней уравнения (5) нет чисто мнимых, но существует по крайней мере один отличный от 1 корень с положительной действительной частью, то для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ имеет меру нуль.*

Теорема 3. *Если среди корней уравнения (5) при $\alpha = 0$ нет чисто мнимых, но существует по крайней мере один отличный от 1 корень с положительной действительной частью, то существует такое $k_n > 1$, что для любого $k > k_n$ и любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ имеет меру нуль.*

Теорема 4. *Уравнение (5) при $\alpha = 0$*

для любого целого $n \geqslant 12$ имеет по крайней мере одну пару сопряженных корней с положительной действительной частью;

для любого натурального $n < 62$ не больше одной пары сопряженных корней с неотрицательной действительной частью;

при $62 \leqslant n \leqslant 203$ имеет ровно две пары сопряженных корней с положительной действительной частью и не имеет чисто мнимых корней.

Теорема 5. *Для любого целого $n \in [12, 203]$ найдется такое $k_n > 1$, что для любого вещественного $k > k_n$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ имеет меру нуль.*

Литература

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. —М.: Наука, 1990.

2. *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Научное издание под ред.И.В.Асташовой. —ЮНИТИ-ДАНА, М., 2012, —22–290.

3. *Astashova I.* On Kiguradze's problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations // Georgian Mathematical Journal. . **24**:2 (2017), 185–191.

4. *Astashova I.* On Asymptotic Behavior of Blow-Up Solutions to Higher-Order Differential Equations with General Nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. Springer International Publishing AG. 2018, —1–13.

5. *Kozlov V.A.* On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. (1999), **37**:2, 305–322.

6. *Astashova I.V.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. Springer Open Journal (2013), № 2013:220.

7. *I. Astashova, V.Vasilev.* On Nonpower-Law Behavior of Blow-up Solutions to Emden–Fowler Type Higher-Order Differential Equations // International Workshop QUALITDE - 2018, December 1 – 3, (2018), Tbilisi, Georgia, 11–15.

8. *Асташова И. В.* О нетипичности асимптотически степенных решений уравнения типа Эмдена-Фаулера высокого порядка, Алгебра и анализ, **31** (2019), 1–22.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ В КЛАССЕ ГЁЛЬДЕРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Е.А Бадерко, М.Ф. Черепова

baderko.ea@yandex.ru, cherepovamf@mpei.ru

УДК 517.956.4

Установлена единственность в классе Гёльдера классического решения первой начально-краевой задачи для одномерных по пространственной переменной параболических по Петровскому систем второго порядка в полуограниченной области с негладкой боковой границей.

Ключевые слова: параболические системы, первая начально-краевая задача, единственность классического решения, негладкая боковая граница

On uniqueness in Hölder class of solution to Dirichlet problem for parabolic systems in a semibounded domain on the plane

We establish the uniqueness in Hölder class of a classical solution to the first initial boundary value problem for spatially one-dimensional parabolic second-order systems (in sense of Petrovskii) in a semibounded domain with a nonsmooth lateral boundary.

Keywords: parabolic systems, the first initial boundary value problem, uniqueness of a classical solution, nonsmooth lateral boundary

---

Бадерко Елена Александровна, д-ф.-м.н., профессор, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Baderko Elena Aleksandrovna (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Черепова Марина Федоровна, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (Москва, Россия); Cherepova Marina Fedorovna (National Research University „Moscow Power Engineering Institute“, Moscow, Russia)

В полосе $D = \{(x,t) \in R^2 : x \in R, 0 < t < T\}, 0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно–параболический по Петровскому матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A^{(k)}(x,t)\partial_x^k u, \quad u = (u_1, \dots, u_m),\ m \geqslant 1,$$

где $A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{m}$ — матрицы размерности $m \times m$, элементы которых есть вещественные функции, определенные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

a) собственные числа μ_r матрицы $A^{(2)}$ подчиняются неравенству $Re\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}, r = \overline{1,m}$;

b) $a_{ij}^{(k)} \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \alpha \in (0,1), i,j = \overline{1,m}, k = 0,1,2$;

$(H^{\beta,\beta/2}(\overline{D})$ — пространство Гёльдера, $\beta > 0$ — нецелое число).

В D выделяется полуограниченная область $\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{\Omega} : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяют условию:

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| \leqslant K|\Delta t|^{(1+\alpha)/2},\ t, t+\Delta t \in [0,T]. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть для оператора L выполнены условия a), b) и для боковой границы Σ — условие (1). Пусть u — классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega,\ u|_{t=0} = 0,\ u|_{\Sigma} = 0$$

такое, что $u \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Литература

1. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифф. уравн. **52**:2 (2016), 198-208.

2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости в модельном случае. // ДАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 247-249.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ш.А. Балгимбаева
sholpan.balgyn@gmail.com

УДК 517.95

Устанавливается L_p-ограниченность некоторых классов псевдодифференциальных операторов с символами, негладкими по пространственной переменной, на $d-$мерном торе при $1 < p < \infty$.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, символ, $d-$мерный тор

The boundedness of some classes of periodical pseudo-differential operator

L_p- boundedness of some classes of pseudo-differential operators with symbols that are nonsmooth in the spatial variable is established on the $d-$dimensional torus for $1 < p < \infty$.

Keywords: pseudo-differential operator, symbol, d-dimensional torus

Псевдодифференциальные операторы (ПДО), т.е. операторы имеющие представление

$$T_a u(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{2\pi i x\xi} d\xi,$$

имеют важное значение в теории общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, а также в гармоническом анализе.

Исследование ограниченности (классов) ПДО между различными нормированными пространствами функций и распределений — одна из важных задач теории.

Обычно предполагается, что символ $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ оператора T_a является гладким, как по пространственной переменной x, так и по частотной переменной ξ, и удовлетворяет некоторым условиям роста (убывания).

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\mathrm{z}_d = \{1, 2, \dots, d\}$ $(d \in \mathbb{N})$. Для $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$, $|x| := |x|_2 = \sqrt{xx}$, $\langle x\rangle = \sqrt{1+xx}$; $x \leqslant y$ $(x < y)$ $\Leftrightarrow x_\kappa \leqslant y_\kappa$ $(x_\kappa < y_\kappa)$ для всех $\kappa \in \mathrm{z}_d$. Далее, $\mathbb{T}^d \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d-мерный тор.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_d(f)$ — преобразование Фурье для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Далее для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{N}_0^d$, используем стандартные мультииндексные обозначения:

$$\partial^\alpha f(x) (\equiv \partial_x^\alpha f(x)) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f(x), \quad \text{где} \quad \partial_\kappa = \tfrac{\partial}{\partial x_\kappa},\ \kappa \in \mathrm{z}_d;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта AP05133257 МОиН РК.

Балгимбаева Шолпан Албановна, к.ф.-м.н., доцент, Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Balgimbayeva Sholpan (Institute of Mathematics and Math Modeling, Almaty, Kazakhstan)

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!; \quad \binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \quad (\gamma \leqslant \alpha).$$

Пусть, далее, $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$ — пространство 1-периодических (по всем переменным) распределений, т. е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot+\xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^d$. Известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$, если и только если $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \mathbb{Z}^d$, т. е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^d \backslash \mathbb{Z}^d$.

Для $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ($\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) и $g \in L_1(\mathbb{T}^d)$ ($\subset \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$) имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d; \quad \widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^d.$$

Фиксируем вектор $\mathtt{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}, n \leqslant d$. Тогда $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_n}$ представим в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{k_{\nu-1}+1}, \ldots, x_{k_\nu}) \in \mathbb{R}^{d_\nu}$.

Далее обозначим $k_\nu = d_1 + \ldots + d_\nu$, $k_0 = 0$ и введем множества $\mathrm{K}_\nu = \{l \in \mathbb{N} : k_{\nu-1} + 1 \leqslant l \leqslant k_\nu\}, \nu \in \mathrm{z}_n$.

Обозначим через Δ_y^ν разность первого порядка для функции $f(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ по ν-ой "пачке" переменной

$$\Delta_y^\nu f(x) = f(x^1, \ldots, x^\nu - y, \ldots, x^n) - f(x), \nu \in \mathrm{z}_n, y \in \mathbb{R}^{d_\nu}.$$

Приведем обобщение определения модуля непрерывности

Определение. Набор функций $\{\omega_1(t_1), \omega_2(t_1, t_2), \ldots, \omega_n(t_1, \ldots, t_n)\}$ будем называть *модулем непрерывности*, если справедливы условия:
1. Для каждого $\nu \in \mathrm{z}_n$ функции $\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu) : (\mathbb{R}_+)^\nu \to \mathbb{R}_+$ непрерывная, вогнутая, монотонно возрастающая по каждой переменной $t_l, l \in \mathrm{z}_\nu$;
2. $\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu)$ инвариантна относительно любой перестановки переменных $t_1, \ldots, t_\nu$;
3. для каждых $\mu, \nu : 1 \leqslant \mu < \nu \leqslant n$ имеем $\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu) \leqslant 2^{\nu-\mu}\omega_\mu(t_1, \ldots, t_\mu)$.

Пусть символ $a(x, \xi)$ удовлетворяет условиям:
I. Для любого $\nu \in \mathrm{z}_n, l \in \mathrm{K}_\nu$ и $\alpha \in \nu \in \mathrm{z}_{d+1} \cup \{0\}$

$$|\partial_{\xi_l}^\alpha a(x, \xi)| \leqslant C\langle \xi^\nu \rangle^{-\alpha}, \xi^\nu \in \mathbb{R}^{d_\nu};$$

II_μ. ($\mu \in \mathrm{z_n}$). Для любого $\nu \in \mathrm{z}_n, l \in \mathrm{K}_\nu$; $\alpha \in \nu \in \mathrm{z}_{d+1} \cup \{0\}$; $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\mu \leqslant n$; $y_1 \in \mathbb{R}^{d_{\nu_1}}, \ldots, y_\mu \in \mathbb{R}^{d_{\nu_\mu}}$

$$|\Delta_{y_1}^{\nu_1} \ldots \Delta_{y_\mu}^{\nu_\mu} \partial_{\xi_l}^\alpha a(x, \xi)| \leqslant \omega_\mu(|y_1|, \ldots, |y_\mu|)\langle \xi^\nu \rangle^{-\alpha}, \xi^\nu \in \mathbb{R}^{d_\nu}.$$

Отметим работы, которые имеют непосредственное отношение к нашему результату. В непериодическом случае — это результат Р. Койфмана и И. Мейера [1] и результат М. Ямазаки [2]. Сформулируем в наших обозначениях теорему из [2], периодическая версия которой является основным результатом сообщения.

Теорема А. *Следующие три условия относительно модулей непрерывности эквивалентны:*
1. Для каждого $\nu \in \mathrm{z}_n$ *имеем*

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \frac{\omega_\nu(t_1,\dots,t_\nu)^2}{t_1\cdot\ldots\cdot t_\nu} dt_1 \dots dt_\nu < \infty,$$

2. Если символ $a(x,\xi)$ *удовлетворяет условиям* $\mathrm{II}_\mu, \mu \in \mathrm{z}_n$, *тогда соответствущий оператор* T_a *ограничен в* L_p *для каждого* $1 < p < \infty$,
3. Для каждого символа $a(x,\xi)$, *удовлетворяющего условиям* $\mathrm{II}_\mu, \mu \in \mathrm{z}_n$, *существует* $1 < p < \infty$ *такой, что оператор ограничен в* L_p.

В периодическом случае отметим работу Д.Б. Базарханова [3], в которой развиты, в частности, результаты из [1] на случай периодических ПДО с символами, которые являются негладкими по пространственной переменной и имеют достаточно малую гладкость по частнотной переменной.

Обозначим через $\Sigma_\omega^{(\mathtt{r})} = \Sigma_\omega(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d)$ пространство символов $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ таких, что выполнены условия I, II_μ $\forall \mu \in \mathrm{z}_n$.

Пусть $\Sigma_\omega^{(\mathtt{t})} = \Sigma_\omega(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^d)$ — класс символов $a : \mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$, которые являются сужениями на $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d$ символов $a^{(\mathtt{r})} \in \Sigma_\omega^{(\mathtt{r})}$ таких, что $\forall \xi \in \mathbb{Z}^d$ функция $a^{(\mathtt{r})}(x,\xi)$ является периодической по пространственной переменной x.

Рассмотрим формальный псевдодифференциальный оператор, соответствующий периодическому символу $a : \mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$

$$T_a \colon u(x) \mapsto T_a u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi) e^{2\pi i \xi x}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Псевдодифференциальный оператор* T_a *ограничен на* $L_p(\mathbb{T}^d)$ *при всех* $1 < p < \infty$ *для любого* $a \in \Sigma_\omega(\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d)$ *тогда и только тогда, когда* ω_ν^2, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *удовлетворяет условию Дини:*

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \frac{\omega_\nu(t_1,\dots,t_\nu)^2}{t_1\cdot\ldots\cdot t_\nu} dt_1 \dots dt_\nu < \infty.$$

Литература

1. *Coifman R. R., Meyer Y.* Au–dela des operateurs pseudo-differentiels // Asterisque, **57** (1978), 1-185.

2. *Yamazaki M.* The L^p-boundedness of pseudo-differential operators satisfying estimates of parabolic type and product type // Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, **60**:8 (1984), 279-282.

3. *Базарханов Д. Б.* L_p-ограниченность некоторых классов псевдодифференциальных операторов на m-мерном торе// Труды Института математики и механики УрО РАН, **22**:4 (2016), 64-80.

ОБОБЩЕНИЕ ПРИМЕРОВ ПЕРРОНА И ВИНОГРАДА НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА НА ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

bar@im.bas-net.by, vvbykov@gmail.com

УДК 517.926.4

Рассматривается класс правильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем и произвольные их линейные параметрические возмущения, убывающие к нулю на бесконечности равномерно относительно параметра, принадлежащего некоторому метрическому пространству, которое может быть любым. Получено полное описание спектров показателей Ляпунова таких систем как вектор-функций параметра.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, показатели Ляпунова, правильная по Ляпунову система, бесконечно малые возмущения

Generalization of Perron's and Vinograd's examples of instability of Lyapunov exponents for linear differential systems with parametric perturbations

We consider the class of linear differential Lyapunov regular systems and their arbitrary linear parametric perturbations vanishing at infinity uniformly with respect to the parameter from a metric space, which might be arbitrary. A complete description of Lyapunov exponent spectra of such systems as vector functions of the parameter is obtained.

Keywords: linear differential system, Lyapunov exponents, Lyapunov regular system, infinitesimal perturbations

Для заданного натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Показатели Ляпунова [1, с. 27] системы (1) обозначим через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, а через $\mathcal{P}_n$ – подкласс класса $\mathcal{M}_n$, состоящий из правильных по Ляпунову систем [1, с. 51]. Далее мы отождествляем систему (1) с функцией $A(\cdot)$ и поэтому будем писать $A \in \mathcal{M}_n$ или $A \in \mathcal{P}_n$.

В работе [2] О. Перрон построил пример системы $A \in \mathcal{M}_2$ с отрицательными показателями Ляпунова, для которой существует такая экспоненциально убывающая к нулю на бесконечности 2×2-матрица $Q(t)$

Барабанов Евгений Александрович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (Минск, Беларусь); Evgeny Barabanov (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus)

Быков Владимир Владиславович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Bykov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

($t^{-1}\ln\|Q(t)\| \to \mathrm{const} < 0$ при $t \to +\infty$), что старший показатель Ляпунова возмущённой системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

положителен. Другими словами, показатели Ляпунова, отвечающие за устойчивость решения, сами устойчивыми не являются (даже при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов системы).

Вследствие примера Перрона естественно возникла задача о поиске достаточно широких подклассов класса $\mathcal{M}_n$, показатели Ляпунова систем которых были бы устойчивыми (не изменялись) при убывающих к нулю на бесконечности возмущениях матриц коэффициентов. Долгое время держалась гипотеза, что таким свойством обладает класс $\mathcal{P}_n$ правильных по Ляпунову систем – гипотеза, основанная в существенном на фундаментальном результате Ляпунова о том, что если у нелинейной системы (при естественных ограничениях на правую часть) система её первого приближения правильная и обладает свойством условной экспоненциальной устойчивости, то этим же свойством (с теми же размерностью устойчивого многообразия и показателем асимптотики) обладает и нулевое решение нелинейной системы [1, с. 53–55]. Тем не менее, в работе [3] Р.Э. Виноград привёл пример системы $A \in \mathcal{P}_2$, показатели Ляпунова которой изменяются при некотором убывающем к нулю на бесконечности возмущении её матрицы коэффициентов (показатели Ляпунова правильных систем при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов устойчивы, как это следует из теоремы Богданова–Гробмана).

Пусть M – метрическое пространство. Введём нужные в дальнейшем классы E_n и Z_n непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Класс E_n состоит из функций $Q(\cdot,\cdot)$, экспоненциально убывающих к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$ (т.е. $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|Q(t,\mu)\| < \mathrm{const} < 0$), а класс Z_n – из функций $Q(t,\mu)$, убывающих к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$.

Обобщая ситуацию, рассмотренную в примерах Перрона и Винограда, для каждой системы $A \in \mathcal{M}_n$ определим класс $P^n(A; M)$, состоящий из семейств

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t,\mu))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

линейных дифференциальных систем, где $\mu \in M$ – параметр и $Q(\cdot,\cdot) \in E_n$, а для каждой системы $A \in \mathcal{P}_n$ – класс $V^n(A; M)$, состоящий из семейств (2), в которых $Q(\cdot,\cdot) \in Z_n$. В силу этого при каждом фиксированном в семействе (2) значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu; A, Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu; A, Q)$, а значит, для каждого $k = \overline{1,n}$ получаем функцию $\lambda_k(\cdot; A, Q)\colon M \to \mathbb{R}$, которую назовём k-ым показателем этого семейства, а также вектор-функцию $\Lambda(\cdot; A, Q)\colon M \to \mathbb{R}^n$, определённую равенством $\Lambda(\mu; A, Q) = (\lambda_1(\mu; A, Q), \ldots, \lambda_n(\mu; A, Q))^{\mathrm{т}}, \quad \mu \in M$.

Ставятся задачи полного описания для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M классов вектор-функций

$$P_n(M) = \{\Lambda(\cdot; A, Q) \,|\, A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in E_n\},$$
$$V_n(M) = \{\Lambda(\cdot; A, Q) \,|\, A \in \mathcal{P}_n,\ Q \in Z_n\}.$$

Решения этих задач будут содержать как частные случаи примеры Перрона и Винограда соответственно. Если $n = 1$, то описания этих классов легко вытекают из определения показателя Ляпунова – для любого метрического пространства M каждый из классов $P_1(M)$ и $V_1(M)$ совпадает с классом постоянных функций $M \to \mathbb{R}$. Поэтому далее считаем, что $n \geqslant 2$.

Пусть вектор-функция $f(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))^{\mathrm{т}} \colon M \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $P_n(M)$ или классу $V_n(M)$. Приведём три свойства вектор-функции $f(\cdot)$, которым она необходимо должна удовлетворять (ниже эти свойства нумеруются как 1), 2), 3)). Одно свойство очевидно вытекает из определения этой вектор-функции: 1) для любого $\mu \in M$ справедливы неравенства $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$. Другое свойство вытекает из того, что матричнозначная функция A ограничена на временно́й полуоси: 2) вектор-функция $f(\cdot)$ ограничена на M. Например, $|\Lambda(\mu; A, Q)| \leqslant n \sup\{\|A(t)\| \,|\, t \in \mathbb{R}_+\}$ для каждого $\mu \in M$. Прежде чем привести третье свойство, напомним, что функция $g \colon M \to \mathbb{R}$ называется [4, с. 224] функцией класса $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $g^{-1}\big([r, +\infty)\big)$ полуинтервала $[r, +\infty)$ является G_δ-множеством метрического пространства M. Как следует из работы [5], в которой получено полное описание спектров показателей Ляпунова общих параметрических семейств линейных дифференциальных систем, равномерно зависящих от параметра на временно́й полуоси, имеет место свойство 3): компоненты $f_k(\cdot)$ вектор-функции $f(\cdot)$ принадлежат классу $(^*, G_\delta)$.

Теорема 1. *Для каждых $n \geqslant 2$, метрического пространства M и вектор-функции $(f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{т}} \colon M \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет свойствам 1) – 3), существуют такие система $A \in \mathcal{M}_n$ и матричнозначная функция $Q \in E_n$, что для показателей Ляпунова $\lambda_k(\cdot)$ семейства (2) при всех $k = \overline{1, n}$ и $\mu \in M$ справедливы равенства $\lambda_k(\mu) = f_k(\mu)$.*

Теорема 2. *Для каждых $n \geqslant 2$, метрического пространства M и вектор-функции $(f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{т}} \colon M \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет свойствам 1) – 3), существуют такие система $A \in \mathcal{P}_n$ и матричнозначная функция $Q \in Z_n$, что для показателей Ляпунова $\lambda_k(\cdot)$ семейства (2) при всех $k = \overline{1, n}$ и $\mu \in M$ справедливы равенства $\lambda_k(\mu) = f_k(\mu)$.*

Таким образом, из сказанного выше вытекает, что классы $P_n(M)$ и $V_n(M)$ совпадают между собой, а их полное описание содержит

Теорема 3. *Для каждых $n \geqslant 2$ и метрического пространства M вектор-функция $(f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{т}} \colon M \to \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда принадлежит классу $P_n(M)$ (классу $V_n(M)$), когда она удовлетворяет свойствам 1) – 3). Для каждого метрического пространства M класс $P_1(M)$ (класс $V_1(M)$) совпадает с классом постоянных функций $M \to \mathbb{R}$.*

Литература

1. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений: в 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. — М., Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr., **32**:1 (1930), 703–728.

3. *Виноград Р.Э.* Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика, **17**:5 (1953), 645–650.

4. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — М.–Л.: ОНТИ, 1937.

5. *Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В.* Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси // Дифференц. уравнения, **54**:12 (2018), 1579– 1588.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ $F_D^{(N)}$

С.И. Безродных

sbezrodnykh@mail.ru

УДК 517.5

Рассматривается проблема аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ — обобщенной гипергеометрической функции N переменных. При произвольном N указан полный набор формул аналитического продолжения этой функции за границу единичного поликруга, где она первоначально определена в виде N–кратного гипергеометрического ряда. Такие формулы представляют функцию $F_D^{(N)}$ в подходящих подобластях $\mathbb{C}^N$ в виде других обобщенных гипергеометрических рядов, являющихся решениями той же системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет и $F_D^{(N)}$. Обсуждаются некоторые приложения.

Ключевые слова: гипергеометрические функции многих переменных, аналитическое продолжение, конформное отображение

Analytic continuation of the Lauricella hypergeometric function $F_D^{(N)}$

The problem of analytic continuation is considered for the Lauricella function $F_D^{(N)}$, which is a generalized hypergeometric function of N complex variables. For an arbitrary N, a complete set formulae is given for its analytic continuation outside the unite polydisk, where the function is defined originally as an N-variate hypergeometric series. Such formulae represent $F_D^{(N)}$ in suitable subdomains of $\mathbb{C}^N$ in terms of other generalized hypergeometric series, which satisfy the same system of partial differential equations as $F_D^{(N)}$. Some applications are discussed.

Keywords: multiple hypergeometric functions, analytic continuation, conformal mapping

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-07-00750).

Безродных Сергей Игоревич, д.ф.-м.н., Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН (Москва, Россия); Sergey Bezrodnykh (Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia)

Рассматриваемая в докладе функция $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ была введена Дж. Лауричеллой [1] (см. также [2]) в качестве одного из наиболее естественных обобщений гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b;c;z)$ на случай N комплексных переменных $(z_1,\dots,z_N) =: \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ и комплексных параметров $(a_1,\dots,a_N) =: \mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$, b и c. Определением функции $F_D^{(N)}$, служит сходящийся в единичном поликруге $\mathbb{U}^N := \{\, \mathbf{z}\colon |z_j| < 1,\ j = \overline{1,N}\,\}$ N–кратный гипергеометрический ряд

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1}\cdots(a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|}k_1!\cdots k_N!}\, z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}\,; \tag{2.1}$$

суммирование в (2.1) ведется по мультииндексу $\mathbf{k} := (k_1,\dots,k_N)$ с неотрицательными целыми компонентами $k_j \geqslant 0$, $j = 1,\dots,N$, для которого $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j$. Символ Похгаммера $(a)_m := \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$; при неотрицательных m он равен $(a)_0 = 1$, $(a)_m = a(a+1)\cdots(a+m-1)$. В (2.1) предполагается, что $c \notin \mathbb{Z}^-$. Функция $F_D^{(N)}$ удовлетворяет следующей системе из N линейных уравнений с частными производными, см. [1], [2]:

$$\begin{aligned} z_j(1-z_j)\frac{\partial^2 u}{\partial {z_j}^2} + (1-z_j)\sum\nolimits_{k=1}^{\prime N} z_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k} + \\ + \Big[c - (1 + a_j + b)z_j\Big]\frac{\partial u}{\partial z_j} - a_j \sum\nolimits_{k=1}^{\prime N} z_k \frac{\partial u}{\partial z_k} - \\ - a_j b\, u = 0, \qquad j = \overline{1,N}; \end{aligned} \tag{2.2}$$

здесь "штрих" над суммой означает, что суммирование ведется по $k \neq j$; параметры $\mathbf{a}$, b и c входят в выражения для коэффициентов уравнений. Известно [1], [2], что общее решение системы (2.2) зависит лишь от $(N+1)$-й произвольной комплексной постоянной, таким образом, она является переопределенной. Особым множеством $\mathcal{M}$ этой системы является объединение гиперплоскостей $\mathcal{M}_j^{(\tau)} := \{\mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = \tau\}$, где $\tau \in \mathcal{S} := \{0, 1, \infty\}$, и гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l} := \{\mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = z_l\}$; здесь $j,\ l = \overline{1,N}$, $j \neq l$; расширенное пространство $\overline{\mathbb{C}}^N$ определяется как $\overline{\mathbb{C}}^N = \overline{\mathbb{C}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{C}}$.

Центральным нерешенным вопросом для функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ оставалась *проблема ее аналитического продолжения.* Эта проблема заключающается в том, чтобы вне поликруга $\mathbb{U}^N$ указать представления вида

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c;\, \mathbf{z}) = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \lambda_j\, u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \qquad \mathbf{z} \notin \mathbb{U}^N, \tag{2.3}$$

где функции $u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ — обобщенные гипергеометрические ряды (отличные от исходной функции), которые, также как и $F_D^{(N)}$, удовлетворяют системе (2.2), а коэффициенты λ_j зависят от параметров $a_1,\dots,a_N$, b, c и не обращаются в нуль одновременно. Представления вида (2.3) называют *формулами аналитического продолжения.* Отметим, что в правой части (2.3) фигурируют $(N+1)$ слагаемых, поскольку именно такое число линейно независимых решений имеет система (2.2). Эти формулы являются прямым обобщением соответствующих представлений [3] для функции Гаусса.

Доклад посвящен результатам работы [4], где при произвольном числе N переменных функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ представлен набор формул аналитического продолжения (2.3), области сходимости которых в совокупности покрывают $\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N$ (за исключением некоторых гиперплоскостей). К настоящему моменту были известны частные результаты, соответствующие случаям 2-х и 3-х переменных функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, см. [2]. В докладе также дано приложение полученных формул аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ к эффективному построению конформного отображения многоугольных областей.

В качестве примера приведем формулы (см. [4]), позволяющие аналитически продолжить $F_D^{(N)}$ в область больши́х по модулю переменных, точнее в область $\mathbb{V}^N := \big\{ \mathbf{z} : |z_1| > \cdots > |z_N| > 1;\ |\arg(-z_j)| < \pi, j = \overline{1, N} \,\big\}$, а также в области вида $\mathbb{V}_\sigma^N := \big\{\mathbf{z} : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{V}^N\big\}$, где $\sigma(\mathbf{z})$ — результат действия некоторого элемента σ группы перестановок S_N множества из N элементов. Прежде чем перейти к такому продолжению, определим величины

$$\mathbf{h}_j := (a_1, \ldots, a_{j-1}, 1 - c + b, a_{j+1}, \ldots a_N),\ \ |\mathbf{a}_{1,j}| := \sum\nolimits_{k=1}^{j} a_k,\ \ |\mathbf{a}| := |\mathbf{a}_{1,N}|,$$

$$\mathbf{z}^{-1} := \Big(\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_N}\Big), \qquad \mathcal{Y}_j(\mathbf{z}) := \Big(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, z_j, \frac{z_j}{z_{j+1}}, \ldots, \frac{z_j}{z_N}\Big),$$

и запишем следующий обобщенный гипергеометрический ряд [2]:

$$G^{(N,\,j)}\big(\mathbf{a};\, b;\, c;\, \mathbf{z}\big) \;:=\; \sum\nolimits_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}_j|}\,(a_1)_{k_1}\,\cdots(a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}_j|}\,k_1!\,\cdots k_N!}\, z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}\ , \qquad (2.4)$$

где выражение $|\mathbf{k}_j|$ для мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N)$ означает

$$|\mathbf{k}_j| := \sum\nolimits_{s=j}^{N} k_s - \sum\nolimits_{s=1}^{j-1} k_s,$$

а параметр j может принимать значения $1, \ldots, N+1$. Областью сходимости ряда (2.4) при всех $j = \overline{1, N+1}$ является единичный поликруг $\mathbb{U}^N$. Справедливо следующее утверждение, позволяющее продолжить $F_D^{(N)}$ в область $\mathbb{V}^N$.

Теорема 1. *Если ни одно из чисел $b - \sum_{l=1}^{j} a_l$, $j = \overline{1, N}$, не является целым, то аналитическое продолжение ряда (2.1) в область $\mathbb{V}^N$ дается формулой*

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a};\, b,\, c;\, \mathbf{z}) \;=\; \sum\nolimits_{j=0}^{N} B_j\mathcal{U}_j^{(\infty)}(\mathbf{a};\, b,\, c;\, \mathbf{z}), \qquad (2.5)$$

где функции $\mathcal{U}_0^{(\infty)}$, $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(\infty)}(\mathbf{a};\, b,\, c;\, \mathbf{z}) = \ \Big(\prod\nolimits_{l=1}^{N}(-z_l)^{-a_l}\Big)F_D^{(N)}\big(\mathbf{a};\, 1+|\mathbf{a}|-c,\, 1+|\mathbf{a}|-b;\, \mathbf{z}^{-1}\big), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_j^{(\infty)}(\mathbf{a};\, b,\, c;\, \mathbf{z}) &= (-z_j)^{|\mathbf{a}_{1,j-1}|-b}\bigg(\prod\nolimits_{l=1}^{j-1}(-z_l)^{-a_l}\bigg)\times \\ &\times\ G^{(N,j)}\Big(\mathbf{h}_j; b - |\mathbf{a}_{1,j-1}|, 1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b; \mathcal{Y}_j(\mathbf{z}^{-1})\Big), \qquad j = \overline{1, N};\end{aligned} \qquad (2.7)$$

в (2.6), (2.7) под $F_D^{(N)}$ *и* $G^{(N,j)}$ *понимаются ряды (2.1) и (2.4),* B_j *имеют вид*

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma\big(b-|\mathbf{a}|\big)}{\Gamma(b)\,\Gamma\big(c-|\mathbf{a}|\big)},$$

$$B_j = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma\big(b-|\mathbf{a}_{1,j-1}|\big)\Gamma\big(|\mathbf{a}_{1,j}|-b\big)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j=\overline{1,N}. \tag{2.8}$$

Функции (2.6), (2.7) образуют полную систему линейно независимых решений системы (2.2) в области $\mathbb{V}^N$.

Аналитическое продолжения функции $F_D^{(N)}$ в область $\mathbb{V}^N_\sigma$, $\sigma \in S^N$, дается формулой (2.5) с заменой в ее правой части $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$ и $\mathbf{z}$ на $\sigma(\mathbf{z})$. При этом функции $\mathcal{U}_j^{(\infty)}(\sigma(\mathbf{a});\, b,\, c;\, \sigma(\mathbf{z}))$, $j=\overline{0,N}$, образуют полный набор линейно независимых решений системы (2.2) в области $\mathbb{V}^N_\sigma$.

В заключение отметим, что развитый в работе подход может быть применен для аналитического продолжения, по–видимому, достаточно широкого класса гипергеометрических функций многих переменных, в том числе, еще трех функций $F_A^{(N)}$, $F_B^{(N)}$ и $F_C^{(N)}$, введенных Дж. Лауричеллой [1], [2].

Литература

1. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rendiconti Circ. math. Palermo, **7** (1893), 111-158.

2. *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. — New York: J. Willey & Sons inc, 1976.

3. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т.2. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

4. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы, задача Римана — Гильберта и некоторые приложения // Успехи матем. наук, **73**:6 (2018), 3-94.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ

А.В. Болтачев, А.Ю. Савин
boltachevandrew@gmail.com, antonsavin@mail.ru

УДК 517.9

Исследуются краевые задачи для волнового уравнения с данными на всей границе. Даны условия, при выполнении которых краевая задача является фредгольмовой в подходящих функциональных пространствах. Эти условия существенным образом зависят от структуры траекторий геодезического потока.

Ключевые слова: волновое уравнение, фредгольмов оператор, эллиптичность, геодезический поток

On a class of Fredholm boundary value problems for the wave equation with conditions on the entire boundary

We study boundary value problems for the wave equation with conditions on the entire boundary. We obtain conditions, which guarantee Fredholm property of the problem in suitable spaces of functions. These conditions depend on the structure of trajectories of the geodesic flow in an essential way.

Keywords: wave equation, Fredholm operator, ellipticity, geodesic flow

Рассматривается класс краевых задач для волнового уравнения с данными на всей границе. Исследование задач такого типа имеет давнюю историю (см. работы Бургина и Дюффина, Джона, Соболева, Арнольда и др.) Вместе с тем, задачи такого вида возникают и в приложениях (например, исследование задачи Дирихле играет важную роль при решении задачи о равновесии вращающейся жидкости).

Мы исследуем следующую краевую задачу для волнового уравнения с данными на всей границе. Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие, Δ — неотрицательный оператор Лапласа-Бельтрами, ассоциированный с римановой метрикой на M. Фиксируем некоторое положительное число τ. На цилиндре $[0,\tau]\times M$ с координатами (t,x) рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = f, \\ u|_{t=0} = g_1, \\ \left.\left(Au + B\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\right|_{t=\tau} = g_2, \end{cases} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00373, 19-01-00574) и DFG.

Болтачев Андрей Владимирович, студент, РУДН (Москва, Россия); Andrei Boltachev (RUDN University, Moscow, Russia)

Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия); Anton Savin (RUDN University, Moscow, Russia)

где g_1, g_2 — известные функции на M, f — функция на $[0,\tau]\times M$, а A и B — (псевдо)дифференциальные операторы на M порядков 1 и 0 соответственно.

В случае одной пространственной переменной (т.е. $M = \mathbb{S}^1$) задача (1) была исследована Антоневичем. В настоящей работе мы исследуем общую ситуацию. Задачу (1) можно также интерпретировать как обратную задачу для волнового уравнения: задано начальное отклонение и необходимо найти начальную скорость по заданной линейной комбинации отклонения и скорости в момент времени $t = \tau$.

Основной результат работы состоит в указании условий на коэффициенты задачи (1), при выполнении которых данная задача является фредгольмовой в подходящих функциональных пространствах. Оказывается, что эти условия существенным образом связаны со свойствами динамики геодезического потока на косферическом расслоении многообразия.

Опишем кратко план решения задачи (1). Сначала мы проводим редукцию задачи на границу, пользуясь известными результатами об однозначной разрешимости задачи Коши. Какой же оператор получается в результате сведения задачи (1) на границу? Оказывается, что на границе получается оператор, равный линейной комбинации операторов $e^{\pm i\tau\sqrt{\Delta}}$ с некоторыми псевдодифференциальными операторами, выступающими в качестве коэффициентов. Надо отметить, что операторы $e^{\pm i\tau\sqrt{\Delta}}$ являются квантованными каноническими преобразованиями (см. работы Фока, Маслова, Хермандера) и ассоциированы с каноническим преобразованием кокасательного расслоения многообразия — геодезическим потоком. Таким образом, мы имеем дело с оператором, который ассоциирован с группой, порожденной степенями квантованного канонического преобразования. Фредгольмовость операторов такого вида была недавно исследована в работах [1,2]. В цитированных работах было показано, что в этой ситуации работает подход, связанный с локализацией, применением теории C^*-алгебр и их скрещенных произведений (см. работы Антоневича и его школы). Применяя результаты указанных работ, мы получаем условия фредгольмовости исходной задачи.

Литература

1. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю., Шроэ Э.,* Эллиптические операторы, ассоциированные с группами квантованных канонических преобразований // УМН, **73**:3 (2018), 179-180.

2. *Savin A., Schrohe E., Sternin B.* Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations // Bull. Sci. Math., (2019), (in print). arXiv:1612.02981.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИТЕРАЦИЙ К ОДНОМУ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОМУ НЕЛИНЕЙНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е.Е. Букжалёв
bukzhalev@mail.ru

УДК 517.928.4

На примере задачи Коши для одного нелинейного сингулярно возмущённого дифференциального уравнения 2-го порядка продемонстрирована возможность построения приближений, сходящихся к точному решению как в обычном, так и в асимптотическом смыслах. Построение приближений и доказательство их сходимости основаны на идее полуобращения операторов и принципе сжимающих отображений.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, теорема Банаха о неподвижной точке, метод асимптотических итераций

Application of the method of asymptotic iteration to a certain second-order, singularly perturbed nonlinear differential equation

By an example of the Cauchy problem for a certain second-order, nonlinear singularly perturbed differential equation, the possibility of constructing approximations that converge to an exact solution in both ordinary and asymptotic senses is demonstrated. The construction of approximations and the proof of their convergence are based on the idea of the semi-inversion of operators and the principle of contraction mappings.

Keywords: singular perturbations, Banach contraction principle, method of asymptotic iterations

Рассмотрим задачу (штрих — производная по первому аргументу):

$$\begin{gathered} \varepsilon^2\, y''(x;\varepsilon) = -\,[3 + 2\,y(x;\varepsilon)]\,\varepsilon\, y'(x;\varepsilon) - 2\,a(x)\,[y(x;\varepsilon) + y^2(x;\varepsilon)], \\ y(0;\varepsilon) = 1, \quad y'(0;\varepsilon) = -1/\varepsilon, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x \in [0,1]$, $a \in C^1[0,1]$, $a > 0$ на $[0,1]$ и $a(0) = 1$.

Если бы $a \in C^\infty[0,1]$, то метод пограничных функций (см. [1]), позволил бы построить асимптотическое разложение решения задачи (1):

$$y(x;\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i\,[\bar{y}_i(x) + \Pi_i(x/\varepsilon)].$$

Однако поскольку $a \in C^1[0,1]$, то, вообще говоря, можно определить только две пограничные функции — Π_0 и Π_1 (при этом возможность определения всех $\bar{y}_i$ не связана со степенью гладкости a, и $y_i(x) \equiv 0$, если $a \neq 0$ на $[0,1]$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00424).

Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Bukzhalev Evgeny (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Функция Π_0 удовлетворяет нелинейной автономной начальной задаче:

$$\Pi_0''(\xi;\varepsilon) = -[3 + 2\,\Pi_0(\xi;\varepsilon)]\,\Pi_0'(\xi;\varepsilon) - 2\,a(0)\,[\Pi_0(\xi;\varepsilon) + \Pi_0^2(\xi;\varepsilon)],$$
$$\Pi_0(0) = 1, \quad \Pi_0'(0) = -1.$$

Учитывая равенство $a(0) = 1$, несложно убедиться, что $\Pi_0(\xi) = e^{-\xi}$.

Для функции Π_1 получается линейная неавтономная начальная задача:

$$\begin{aligned}\Pi_1''(\xi;\varepsilon) = -\left\{3 + 2\,e^{-\xi}\right\}\Pi_1'(\xi;\varepsilon) - 2\left\{a(0) + [2\,a(0) - 1]\,e^{-\xi}\right\}\Pi_1(\xi;\varepsilon) - \\ - 2\,a'(0)\,\xi\,(e^{-\xi} + e^{-2\xi}), \quad \Pi_1(0) = \Pi_1'(0) = 0,\end{aligned} \tag{2}$$

решение которой может быть записано с помощью функции Коши $\widetilde{K}$:

$$\Pi_1(\xi) = -2\,a'(0)\int_0^\xi \widetilde{K}(\xi,\zeta)\,\zeta\,(e^{-\zeta} + e^{-2\zeta})\,d\zeta,$$

где $\widetilde{K}(\xi,\zeta) = \frac{1}{2}\,e^{-\xi+\zeta} - \frac{1}{2}\,e^{-\xi+\zeta+2e^{-\xi}-2e^{-\zeta}}$.

Дальнейшее исследование задачи (1) проведём по схеме, предложенной в [2] для нелинейного сингулярно возмущённого уравнения первого порядка (добавив необходимые усложнения). Начнём с замены переменных:

$$x = \varepsilon\,\xi, \quad y(x;\varepsilon) = \Pi_0(\xi) + \varepsilon\,z(\xi;\varepsilon) = e^{-\xi} + \varepsilon\,z(\xi;\varepsilon), \quad \xi \in [0, 1/\varepsilon].$$

Для новой функции $z(\cdot;\varepsilon)$ имеем:

$$\begin{aligned}z''(\xi;\varepsilon) = -\left\{3 + 2\,e^{-\xi}\right\}z'(\xi;\varepsilon) - 2\left\{a(\varepsilon\,\xi) + [2\,a(\varepsilon\,\xi) - 1]\,e^{-\xi}\right\}z(\xi;\varepsilon) + \\ + f(z'(\xi;\varepsilon), z(\xi;\varepsilon), \xi;\varepsilon), \quad z(0) = z'(0) = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

где $f(v,z,\xi;\varepsilon) = 2\,\varepsilon^{-1}\,[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)]\,(e^{-\xi} + e^{-2\xi}) - 2\,\varepsilon\,z\,v - 2\,\varepsilon\,a(\varepsilon\,\xi)\,z^2$.

Задача (3) эквивалента интегральному уравнению:

$$z(\xi;\varepsilon) = \int_0^\xi K(\xi,\zeta;\varepsilon)\,f(z'(\zeta;\varepsilon), z(\zeta;\varepsilon), \zeta;\varepsilon)\,d\zeta =: A(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi), \tag{4}$$

где $K(\cdot,\cdot;\varepsilon)$ — функция Коши дифференциального уравнения:

$$Z''(\xi;\varepsilon) = -\left\{3 + 2\,e^{-\xi}\right\}Z'(\xi;\varepsilon) - 2\left\{a(\varepsilon\,\xi) + [2\,a(\varepsilon\,\xi) - 1]\,e^{-\xi}\right\}Z(\xi;\varepsilon). \tag{5}$$

Сведение задачи (3) к уравнению вида (4) — частный случай распространённого приёма, используемого для доказательства теорем существования и единственности и обоснования асимптотических разложений решений сингулярно возмущённых уравнений (см. [1]). Переход к уравнению (4) позволяет построить итерационную последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}$, сходящуюся к решению задачи (3): $z_n(\xi;\varepsilon) := A(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon), z_{n-1}'(\cdot;\varepsilon))(\xi)$, $n \in \mathbb{N}$. Данный способ приближённого решения задачи (3) (а вместе с тем и задачи (1)) обладает тем недостатком, что для его реализации необходима функция Коши уравнения (5), не выражающаяся в элементарных функциях. Для устранения этого недостатка преобразуем дифференциальное уравнение для $z(\cdot;\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}z''(\xi;\varepsilon) = -\left\{3 + 2\,e^{-\xi}\right\}z'(\xi;\varepsilon) - 2\left\{a(0) + [2\,a(0) - 1]\,e^{-\xi}\right\}z(\xi;\varepsilon) + \\ + \tilde{f}(z'(\xi;\varepsilon), z(\xi;\varepsilon), \xi;\varepsilon), \quad z(0) = z'(0) = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\tilde{f}(v, z, \xi; \varepsilon) = 2\,\varepsilon^{-1}\,[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)]\,[e^{-\xi} + e^{-2\xi} + \varepsilon\,(1 + 2\,e^{-\xi})\,z] - 2\,\varepsilon\,z\,v - - 2\,\varepsilon\,a(\varepsilon\,\xi)\,z^2$.

Задача (6) эквивалента интегральному уравнению:

$$z(\xi;\varepsilon) = \int_0^{\xi} \widetilde{K}(\xi,\zeta)\,\tilde{f}(z'(\zeta;\varepsilon), z(\zeta;\varepsilon), \zeta;\varepsilon)\,d\zeta =: \tilde{A}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi)$$

с той же функцией $\widetilde{K}$, что и в формуле для Π_1. Заметим, что $\tilde{f}$ отличается от f дополнительным слагаемым $2\,[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)]\,(1 + 2\,e^{-\xi})\,z$, из-за которого итерационная последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}$, построенная с помощью оператора $\tilde{A}(\varepsilon)$, вообще говоря, расходится при больших значениях ξ. Для получения сходящихся приближений ещё раз преобразуем дифференциальное уравнение для $z(\cdot;\varepsilon)$, добавив в него новый параметр $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} z''(\xi;\varepsilon) = &-3\,z'(\xi;\varepsilon) - 2\,a(x)\,z(\xi;\varepsilon) + \bar{g}(z'(\xi;\varepsilon), z(\xi;\varepsilon), \xi;\varepsilon) - \\ &+ \bar{f}(z'(\xi;\varepsilon), z(\xi;\varepsilon), \xi;\varepsilon), \quad z(0) = z'(0) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\bar{f}(v, z, \xi; x, \varepsilon) = 2\,[a(x) - 2(\varepsilon\,\xi)]\,z - 2\,\varepsilon^{-1}\,[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)]\,(e^{-\xi} + e^{-2\xi}) - 2\,\varepsilon\,z\,v - - 2\,\varepsilon\,a(\varepsilon\,\xi)\,z^2$, $\bar{g}(v, z, \xi; \varepsilon) = -2\,e^{-\xi}\,v - 2\,[2\,a(\varepsilon\,\xi) - 1]\,e^{-\xi} z$.

Задача (7) при каждом $x \in [0,1]$ эквивалента интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} z(\xi; x,\varepsilon) = \int_0^{\xi} \bar{K}(\xi,\zeta;x)\,\bar{h}(z'(\zeta;x,\varepsilon), z(\zeta;x,\varepsilon), \zeta; x,\varepsilon)\,d\zeta = \\ =: \bar{A}(x,\varepsilon)(z(\cdot;x,\varepsilon), z'(\cdot;x,\varepsilon))(\xi), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\bar{h}(v, z, \zeta; x, \varepsilon) = \bar{g}(v, z, \zeta; \varepsilon) + \bar{f}(v, z, \zeta; x, \varepsilon)$, $\bar{K}(\cdot,\cdot;x)$ — функция Коши дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$Z''(\xi;x) = -3\,Z'(\xi;x) - 2\,a(x)\,Z(\xi;x).$$

Можно доказать, что если в уравнении (8) на место x подставить любую функцию ξ и ε со значениями на отрезке $[0,1]$, то получится уравнение, равносильное задаче (3). Полагая $x = \varepsilon\,\xi$, приходим к уравнению:

$$z(\xi;\varepsilon) = \bar{A}(\varepsilon\,\xi,\, \varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi).$$

Заметим, что из-за слагаемого $\bar{g}$, входящего в $\bar{h}$, итерационная последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}$, построенная с помощью оператора $\bar{A}(\varepsilon\,\xi,\,\varepsilon)$, вообще говоря, расходится при малых значениях ξ. Для устранения последнего препятствия на пути построения сходящихся приближений положим

$$\int_0^{\xi} \widetilde{K}'(\xi,\zeta)\,\tilde{f}(z'(\zeta;\varepsilon), z(\zeta;\varepsilon), \zeta;\varepsilon)\,d\zeta = \tilde{A}'(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),$$

$$\bar{g}(\tilde{A}'(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi), \tilde{A}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi), \xi;\varepsilon) = \hat{g}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),$$

$$\hat{g}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi) + \bar{f}(z'(\xi;\varepsilon), z(\xi;\varepsilon), \xi;\, \varepsilon\,\xi,\, \varepsilon) = \hat{h}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),$$

и заменим в (8) функцию $\bar{h}$ на оператор $\hat{h}$ (сохранив при этом подстановку $x = \varepsilon\,\xi$ в ядре $K(\cdot,\cdot;x)$):

$$z(\xi;\varepsilon) = \int_0^{\xi} \bar{K}(\xi,\zeta;\,\varepsilon\,\xi)\,\hat{h}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\zeta)\,d\zeta =: \hat{A}(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),$$

Можно доказать, что, во-первых, при всех достаточно малых положительных ε итерационная последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}$, построенная с помощью $\hat{A}(\varepsilon)$, сходится к решению задачи (3) по норме $C[0,1/\varepsilon]$: $\|z(\cdot,\varepsilon) - z_n(\cdot,\varepsilon)\| \to 0$ при $n \to \infty$, и что, во-вторых, $\|z(\cdot,\varepsilon) - z_n(\cdot,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1})$.

Литература

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.

2. *Букжалёв Е.Е.* Об одном способе исследования задачи Коши для сингулярно возмущённого нелинейного дифференциального уравнения первого порядка // Дифференц. уравнения, **54**:2 (2018), 155-167.

О СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ С КРАТНЫМ КОРНЕМ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

В.Ф. Бутузов

butuzov@phys.msu.ru

УДК 517.928.4, 517.956.8

На примере краевой задачи для сингулярно возмущенной частично диссипативной системы уравнений показаны особенности асимптотики (по малому параметру) решения, которые возникают в случае кратного корня вырожденного уравнения.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные задачи с кратным корнем вырожденного уравнения, пограничный слой

On singularly perturbed problems with multiple root of the degenerate equation

On the example of a boundary value problem for a singularly perturbed partially dissipative system of equations, the features of asymptotics (by a small parameter) of the solution arising in the case of a multiple root of the degenerate equation are shown.

Keywords: Singularly perturbed problems with multiple root of the degenerate equation, boundary layer

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00424).

Бутузов Валентин Федорович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Valentin Butuzov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения и системы уравнений активно исследуются, начиная с середины прошлого века после появления основополагающих работ А.Н. Тихонова [1], Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко (см. [2, 3]), М.И. Вишика и Л.А. Люстерника [4].

Для решений многих сингулярно возмущенных начальных и краевых задач характерной особенностью является наличие пограничных и (или) внутренних переходных слоев, где происходит быстрое изменение решения. Одним из эффективных методов построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с пограничными (внутренними) слоями является метод, разработанный А.Б. Васильевой [5] и получивший дальнейшее развитие в ее работах, работах ее учеников и других ученых. Этот метод успешно работает в тех случаях, когда соответствующее вырожденное уравнение имеет простой (т.е. однократный) устойчивый корень. При этом условии быстрое изменение решения в пограничном (внутреннем) слое имеет экспоненциальный характер.

В последнее время ведется активное изучение сингулярно возмущенных задач, в которых вырожденное уравнение имеет двукратный или трехкратный корень (см., например, [6 - 9]). Оказалось, что во многих таких задачах поведение решения в пограничном (внутреннем) слое качественно отличается от поведения в случае простого корня вырожденного уравнения. Пограничный (внутренний) слой становится многозонным с различным поведением решения в разных зонах. В частности, в случае трехзонного пограничного слоя пограничные функции в первой зоне убывают степенным образом с ростом погранслойной переменной, затем следует вторая (переходная) зона, в которой происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания пограничных функций, и, наконец, в третьей зоне возникает погранслойная переменная с другим масштабом и с ее ростом пограничные функции убывают экспоненциально.

Описанное поведение решения делает неприменимым классический алгоритм А.Б. Васильевой. Разработан новый алгоритм, позволяющий строить единые пограничные функции сразу для всех зон пограничного слоя, что отличает новый подход от известного метода согласования (сращивания) асимптотических разложений, построенных раздельно в разных зонах. Новый класс задач потребовал также дальнейшего развития методов обоснования построенных асимптотик. Основным методом у нас стал асимптотический метод дифференциальных неравенств, суть которого состоит в том, что нижнее и верхнее решения задачи конструируются на основе предварительно построенной формальной асимптотики.

Все эти особенности будут показаны в докладе на примере краевой задачи Дирихле для стационарной частично диссипативной системы двух уравнений.

$$\varepsilon^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - w(x)\frac{du}{dx} \right) = F(u, v, x, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{dv}{dx} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0; 1),$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, а вырожденное уравнение $f(u, v, x, 0) = 0$ имеет двукратный корень $u = \varphi(v, x)$.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры // Матем. сб., **31(73)**:3 (1952), 575-586.

2. *Понтрягин Л.С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат, **21**:5 (1957), 605-626.

3. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — Москва: Наука, 1975.

4. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук, **12**:5 (1957), 3-122.

5. *Васильева А.Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Успехи мат. наук, **18**:3 (1963), 15-86.

6. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки, **94**:1 (2013), 68-80.

7. *Бутузов В.Ф., Бычков А.И.* Асимптотика решения начально - краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. уравнения, **49**:10 (2013), 1295-1307.

8. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сб., **207**:8 (2016), 73-100.

9. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем // ЖВМиМФ, **58**:6 (2016), 961-987.

ДЕСКРИПТИВНЫЙ ТИП МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

А.Н. Ветохин

anveto27@yandex.ru

УДК 517.93

Для семейства динамических систем, непрерывно зависящих от параметра, получено описание множества точек полунепрерывности снизу и множества точек полунепрерывности сверху топологической энтропии его систем, рассматриваемой как функция параметра.

Ключевые слова: топологическая энтропия

Ветохин Александр Николаевич, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, проф. каф. ФН-1 "Высшая математика"МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Alexander Vetokhin (Lomonosov Moscow State University, Bauman Moscow State Technical University Moscow, Russia)

Descriptive type of sets of lower semicontinuity points and upper semicontinuity points of topological entropy with continuous dependence on a parameter

For a family of dynamical systems continuously dependent on the parameter, a description of the set of lower semi-continuity points and the set of upper semi-continuity points of the topological entropy of its systems, considered as a function of the parameter, is obtained.

Keywords: topological entropy

Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N},\, x, y \in X.$$

Обозначим через $B_f(x, \varepsilon, n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x, y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f, ε, n)-покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

Пусть $S_d(f, \varepsilon, n)$ обозначает минимальное количество элементов (f, ε, n)-покрытия. *Топологической энтропией* динамической системы, порожденной непрерывным отображением f, называется величина [1, с. 120]

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному отображению

$$f : \mathcal{M} \times X \to X, \tag{1}$$

образуем функцию

$$\mu \longmapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)). \tag{2}$$

В работе [2] доказано, что в случае, когда $\mathcal{M}$ полно, для топологической энтропии семейства отображений (1) множество точек пространства $\mathcal{M}$, в которых функция (2) полунепрерывна снизу, содержит плотное в пространстве $\mathcal{M}$ множество типа G_δ.

Возникает естественный вопрос: что представляют собой множество точек полунепрерывности снизу и множество точек полунепрерывности сверху функции (2) с точки зрения дескриптивной теории множеств?

В работе [2] была получена формула для топологической энтропии, которая позволяет установить

Теорема 1. *Для произвольного пространства $\mathcal{M}$ множество точек полунепрерывности снизу функции (2) является множеством типа G_δ, а множество ее точек полунепрерывности сверху — множеством типа $F_{\sigma\delta}$.*

Из результата работы [2] получаем следующую

Теорема 2. *В случае полноты пространства $\mathcal{M}$ множество точек полунепрерывности снизу функции* (2) *является всюду плотным множеством типа G_δ.*

Через $\mathcal{B}$ обозначим множество Кантора на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M} = X = \mathcal{B}$. Тогда для любого всюду плотного множества $\mathcal{G}$ типа G_δ метрического пространства $\mathcal{M}$ существует отображение (1) такое, что множество точек полунепрерывности снизу функции (2) совпадает с множеством $\mathcal{G}$.*

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{M} = X = \mathcal{B}$, тогда найдется отображение (1) такое, что множество точек полунепрерывности сверху функции (2) является пустым.*

Литература

1. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.

2. *Ветохин А. Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения, **53**:6 (2017), 448–453.

АСИМПТОТИКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ОБЛАСТЯХ С УЗКОЙ ЩЕЛЬЮ

В.И. Власов

vlasov@ccas.ru

УДК 517.632.4

Изложен аналитико-численный метод решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в плоских областях, имеющих узкую щель с параллельными сторонами и дном произвольной формы. Метод обеспечивает эффективное вычисление решения и его производных вплоть до контура щели и позволяет находить коэффициенты интенсивности в угловых точках дна. С его помощью найдена асимптотика решения в области, его градиента на дне щели и асимптотика коэффициентов интенсивности при стремлении ширины щели к нулю. Для дна в виде дуги окружности или ломаной коэффициенты этих асимптотик найдены в явном виде.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение Пуассона, области с узкими щелями, коэффициенты интенсивности, асимптотики при стремлении ширины щели к нулю.

Власов Владимир Иванович, д.ф.-м.н., гл. научн. сотрудник, Федеральный исследовательский центр ”Информатика и Управление“ РАН (Москва, Россия); Vlsdimir Vlasov (Federal Research Center ”Computer Science and Control“ of RAS, Moscow, Russia)

Asymptotics and analytic–numerical method for solving the Poisson equation in domains with narrow slits

An analytic–numerical method is presented for solving the Dirichlet problem for Poisson's equation in planar domains containing a narrow slit with parallel sides and a bottom of arbitrary shape. The method provides effective calculation of the solution and its derivatives up to the contour of a slit, as well as computation of intensity factors at angle points of the bottom. By means of the method we obtained asymptotics of the solution in the domain, asymptotics of its gradient at the bottom of the slit and asymptotics of the intensity factors as the width of the slit tends to zero. Coefficients of these asymptotics have been obtaind in explicit form, when bottom of the slit is a circular arc or a polygonal line.

Keywords: the Dirichlet problems, Poisson's equation, domains with narrow slits, intensity factors, asymptotics as the width of the slit tends to zero.

Области с тонкими включениями и узкими щелями относятся к классу сингулярно деформируемых областей [1]-[3]. Краевые задачи в таких областях возникают в ряде проблем механики и физики и вызывают интерес как у математиков, так и у специалистов в соответствующих прикладных областях [4]-[8]. Важными вопросами являются разработка эффективных вычислительных методов для таких задач и исследование асимптотик их решения и его характеристик при сужении ширины щели.

В докладе рассматривается область g_ε, расположенная на комплексной плоскости $z = x + iy$ и имеющая узкую щель ширины 2ε с параллельными сторонами и дном произвольной формы. Чтобы определить ее, введем:

1) полубесконечную область G_ε с границей, состоящей из лучей $\gamma_\varepsilon^\pm := \{z : x \in [-\infty, 0], y = \pm\varepsilon\}$ и непересекающейся с ними жордановой дуги σ_ε с концевыми точками $\pm i\varepsilon$, играющей роль дна щели, причем $G_\varepsilon = \{z : \varepsilon z \in G_1\}$, и

2) жорданову область G, содержащую начало координат $z = 0$, граница которой ∂G (спрямляемая кусочно–гладкая кривая без точек заострения) пересекается с ∂G_ε только в точках A и D, расположенных соответственно на лучах γ_ε^+ и γ_ε^-.

Тогда область g_ε определяется как пересечение $G \cap G_\varepsilon$. Ее граница ∂g_ε состоит из двух звеньев, соединяющихся в точках A и D: первым звеном является контур щели $\gamma_\varepsilon \subset \partial G_\varepsilon$, содержащийся в G, а вторым звеном — дуга $\Gamma \subset \partial G$. Заменим, что область G_ε является расширением области g_ε через дугу Γ. При $\varepsilon \to 0$ первая из этих областей превращается в $G_0 = \mathbb{C} \setminus \{x \in [-\infty, 0], y = 0\}$, а вторая — в $g_0 = G \setminus \{x \in [-\infty, 0], y = 0\}$. Бесконечно удаленную точку границы ∂G_ε обозначим через M.

Пусть в области g_ε задана задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta U_\varepsilon(z) = \mathcal{P}(z),\ z \in g_\varepsilon; \quad U_\varepsilon(z) = 0,\ z \in \gamma_\varepsilon; \quad U_\varepsilon(z) = h(z),\ z \in \Gamma, \qquad (1)$$

где $\mathcal{P}(z)$ — полином от x и y с вещественными коэффициентами, а функция $h \in L_2(\Gamma)$. Ее решение $U_\varepsilon \in C^2(g_\varepsilon) \cap C(g_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon)$ удовлетворяет граничному условию на Γ в смысле L_2 [9]. Решение задачи (1) существует и единственно в соответствующем пространстве Харди [9]. В дальнейшем изложении ограничимся случаем, когда полином в правой части уравнения (1) равен константе, $\mathcal{P}(z) = -a$; случай общего полинома изучается аналогично.

Для построения решения задачи (1) запишем его в виде суммы $U_\varepsilon(z) = Q_\varepsilon(z) + \Psi_\varepsilon(z)$ решения $Q_\varepsilon \in C^2(G_\varepsilon) \cap C(\overline{G}_\varepsilon \cap M)$ уравнения Пуассона в G_ε,

$$\Delta Q_\varepsilon = -a \,\mathrm{in}\, G_\varepsilon;\; Q_\varepsilon = 0 \,\mathrm{on}\, \partial G_\varepsilon \backslash M;\; Q_\varepsilon(z) = 0.5\, a(\varepsilon^2 - y^2) + o(1),\; z \to M, \quad (2)$$

и решения уравнения Лапласа в g_ε,

$$\Delta \Psi_\varepsilon(z) = -a,\; z \in g_\varepsilon; \quad \Psi_\varepsilon(z) = 0,\; z \in \gamma_\varepsilon; \quad \Psi_\varepsilon(z) = h(z) - Q_\varepsilon(z),\; z \in \Gamma. \quad (3)$$

Решение задач (2) и (3) строится с использованием конформного отображения $\zeta = \mathcal{F}_\varepsilon(z)$ области G_ε на $\mathbb{H} := \{y > 0\}$, подчиненного нормировке $\mathcal{F}_\varepsilon(N_\varepsilon) = 0$, $\mathcal{F}_\varepsilon(M) = \infty$, $\mathcal{F}_\varepsilon(z) \sim i\sqrt{z}$, где $N_\varepsilon = \varepsilon N_1$ —точка на дне щели σ_ε. Для ряда форм дна σ_ε (в том числе в виде дуги окружности или отрезка прямой) отображение $\mathcal{F}_\varepsilon$ было получено в явном виде, либо вначале было найдено обратное к нему $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}$ (например, для дна в виде дуги окружности — через гипергеомутрические функции, а для дна в виде ломаной — через интеграл Кристоффеля — Шварца), а затем оно было обращено.

Для общей формы дна использовалось следующее разложение. Пусть $\Phi_\varepsilon(z)$ — конформное отображение области $\mathbb{C} \setminus (\gamma_\varepsilon^+ \cup \gamma_\varepsilon^-)$ на $\mathbb{H}$, отвечающее условиям нормировки, аналогичным приведенным для $\mathcal{F}_\varepsilon$; оно выражается через функцию Ламберта. Тогда для $\mathcal{F}_\varepsilon$ справедливо разложение

$$\mathcal{F}_\varepsilon(z) = \Phi_\varepsilon(z) + \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} B_k L_\varepsilon^{k+1} \left[\Phi_\varepsilon(z)\right]^{-k}, \quad (4)$$

сходящееся в $\overline{G}_\varepsilon$, за исключением малой окрестности дна σ_ε. Для некоторых (в том числе упомянутых выше) форм дна получены разложения в окрестности дна, области сходимости которых в совокупности с (4) покрывают всю $\overline{G}_\varepsilon$. В (4) коэффициенты B_k определяются только формой дна и не зависят от ε, а $\Phi_\varepsilon(z) = \sqrt{\varepsilon}\, \Phi_1(\varepsilon^{-1} z)$, $L_\varepsilon = L_1 \varepsilon^{1/2}$, где $L_1 = \max |\Phi_1(\sigma_1)|$.

Решение задачи (2) строится следующим образом. С помощью подстановки $Q_\varepsilon(z) = 0.5\, a \left[\varepsilon^2 - y^2 + \theta_\varepsilon(z)\right]$ (в случае полинома $\mathcal{P}(z)$ общего вида в уравнении (1) — более сложной подстановки) задача (3) сводится к задаче Дирихле для уравнения Лапласа относительно функции $\theta_\varepsilon(z)$ в области G_ε с однородным условием Дирихле на всей ∂G_ε, за исключением дна σ_ε, на котором граничная функция равна $y^2 - \varepsilon^2$. Последняя задача легко решается с помощью отображения $\mathcal{F}_\varepsilon$.

После этого решение задачи (3) строится с помощью метода [9], опирающегося на следующие свойства система функций $\{\Omega_n(z)\}$, $n \in \mathbb{N}$:

1) $\Delta \Omega_n(\varepsilon, z) = 0$, $z \in G_\varepsilon$;

2) $\Omega_n(\varepsilon, z) = 0$, $z \in \partial G_\varepsilon$;

3) система $\{\Omega_n(z)\}$, $n \in \mathbb{N}$, является полной и минимальной в $L_2(\Gamma)$.

Приближенное решение $\Psi_\varepsilon^K(z)$ задачи (3) строится в виде линейной комбинации первых K функций $\Omega_n(\varepsilon, z)$, коэффициенты которой находятся из условия $||\Psi_\varepsilon^K(z) - h(z); L_2(\Gamma)|| = \min$. Доказано, что $\Psi_\varepsilon^K(z) \to \Psi(\varepsilon, z)$ при $K \to \infty$ на любом компакте внутри G_ε вместе со всеми производными, причем приближенное решение модно дифференцировать и в точках дуги γ_ε соответствующей гладкости. Это позволило дать выскоэффективный вычислительный метод решения задачи (1).

Кроме того, с помощью изложенного метода получена следующая, равномерная внутри g_0, асимптотика решения задачи (1) при сужении щели:

$$U_\varepsilon(z) = U_0(z) - (2\pi)^{-1} A_1(0)\, \Xi_1(z)\, \varepsilon \ln \varepsilon + o\,(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0;$$

здесь $A_1(0)$ — коэффициент интенсивности на конце разреза для решения U_0, а функция $\Xi_1(z) = \mathrm{Im}\mathcal{V}(z)$, где $\mathcal{V}$ — конформное отображение области g_0 на $\mathbb{H}$, удовлетворяюшего условию $\mathcal{V}(z) \sim i\, z^{1/2},\ z \to 0$. Получена также асимптотика градиента в точке N_ε дна щели

$$\operatorname{grad} U_\varepsilon(N_\varepsilon) = i\, A_1\,(0)\, \overline{\mathcal{F}_1'\,(N_1)}\, \varepsilon^{\,-1/2} + O(1), \qquad \varepsilon \to 0,$$

где предполагается, что $\mathcal{F}_1'\,(N_1)$ существует. Кроме того, для дна в виде отрезка, образующего со стороной шели угол $\pi\alpha$, установлен вид асимптотики для коэффициента интенсивности в этом угле; главный член асимптотики имеет порядок $1/2 - 1/\alpha$.

Некоторые приведенные результаты были ранее получены в [10].

Литература

1. *Cole J.D.* Perturbation methods in applied mathematics. — Waltham, Massachussetts - Toronto - London: Blaisdell Publ. Co., 1968.

2. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. — Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.

3. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.

4. *Ван–Дайк М.* Методы возмущений в межанике жидкости. — М.: Мир, 1967.

5. *Geer J.F., Keller J.B.* Uniform asymptotic solutions for potential flow around a thin airfoil and the electrostatic potential about a thin conductor // SIAM J. Appl. Math., **26**:3 (1974), 539-553.

6. *Ильин А.М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // Матем. сб., **99**:4 (1976), 514-537.

7. *Федорюк М.В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Известия АН СССР. Сер. матем., **45**:1 (1981), 167-186.

8. *Назаров С.А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

9. *Vlasov V.I.* Multipole method for solving some boundary value problems in complex–shaped domains // Z. Angew. Math. Mech., **76**, suppl. 1 (1996), 279–282.

10. *Власов В.И., Пальцев А.Б.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью // Ж. выч. мат. и матем. физ., **43**:12 (2003), 1786-1805.

ПРОБЛЕМА НОРМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА С ТРЕНИЕМ В ШАРНИРЕ И ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский

victor.voytitsky@gmail.com, kopachevsky@list.ru

УДК 517.98, 517.955

Изучаются спектральные свойства линейной начально-краевая задачи о малых движениях маятника с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, при учёте сил трения в сферическом шарнире. Доказана дискретность спектра, степенная асимптотика собственных значений и их локализация в полосе, примыкающей к мнимой оси, базисность по Абелю-Лидскому системы корневых элементов.

Ключевые слова: задача Коши, гильбертово пространство, линейный оператор, дискретный спектр, асимптотика собственных значений

Normal motions problem of a pendulum with friction in the hinge and cavity partially filled with an ideal liquid

We study spectral properties of the linear initial-boundary value problem on small motions of a pendulum with cavity partially filled with an ideal liquid, taking into account friction force in the spherical hinge. We prove discreetness of the spectrum, power asymptotics of the eigenvalues and its localization in the strip, Abel-Lidskii basis property of the system of root elements.

Keywords: Cauchy problem, Hilbert space, linear operator, discrete spectrum, eigenvalue asymptotics.

Рассмотрим находящуюся в поле сил тяжести гидромеханическую систему $G \subset \mathbb{R}^3$, состоящую из твердого тела (маятника) Ω_0 с плотностью ρ_0, закреплённого в неподвижной точке с помощью сферического шарнира, и однородной идеальной несжимаемой жидкости Ω с плотностью ρ, частично заполняющей полость в маятнике. Считаем, что граница $\partial\Omega$ в равновесном состоянии состоит из твердой стенки S и плоской свободной границы Γ, перпендикулярной прямой, соединяющей точку подвеса O_1 и центр масс маятника.

Работа выполнена при финансовой поддержке второго соавтора грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

Войтицкий Виктор Иванович, к.ф.-м.н., доцент, Таврическая академия Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского (Симферополь, Россия); Voytitsky Victor (Taurida Academy of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia)

Копачевский Николай Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор, Таврическая академия Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского (Симферополь, Россия); Kopachevsky Nikolay (Taurida Academy of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia)

В подвижной системе декартовых координат $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$, жестко связанных с маятником (с ортами $\{\vec{e}_1^{\,k}\}_{k=1}^3$) после линеаризации возникает следующая начально-краевая задача:

$$\int\limits_G \vec{r}\times\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)dm+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}\times\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,d\Omega_1+\alpha\vec{\omega}+$$
$$+\,gmlP_2\vec{\delta}-g\rho_1\int_\Gamma(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r})\zeta\,d\Gamma=\vec{M}(t),$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\rho_1^{-1}\nabla p=\vec{f},\quad \operatorname{div}\vec{u}=0\quad(\text{в }\Omega_1),\\ \vec{u}\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на }S),\quad \frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}=P_2\vec{\omega},\quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}^{\,3}=\vec{\omega}^{\,3},\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}=\rho_1g(\zeta+\theta(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\quad(\text{на }\Gamma),\quad\int_\Gamma\zeta\,d\Gamma=0,\\ \vec{u}(0,x)=\vec{u}^{\,0}(x),\ x\in\Omega_1,\quad\zeta(0,x)=\zeta^0(x),\ x\in\Gamma,\\ \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^{\,0},\quad\vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^{\,0}.\end{gathered}$$

Здесь $\vec{\delta}(t)$ — угловое перемещение маятника, $\vec{\omega}(t)=d\vec{\delta}/dt$ — угловая скорость маятника, $\vec{u}(t,x)$ — поле относительных скоростей жидкости, $p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного, $\alpha\geqslant 0$ — коэффициент трения в шарнире, $m>0$ — масса маятника с жидкостью, l — расстояние от O_1 до центра тяжести системы в состоянии равновесия, $P_2\vec{\delta}$ — проекция δ на плоскость Γ, $P^3\vec{\delta}=I-P_2\vec{\delta}$, $\zeta(t,x)$ — малая функция, описывающая отклонения свободной поверхности жидкости от равновесного состояния вдоль нормали $\vec{n}$ к Γ, $\vec{M}(t)$ — момент малого поля внешних сил $\vec{f}$, наложенных на гравитационное поле $\vec{g}=-g\vec{e}^{\,3}$, $\theta:\ L_2(\Gamma)\to L_{2,\Gamma}$ ортопроектор на подпространство $L_{2,\Gamma}$ функций, ортогональных константам на Γ.

Отметим, что в случае, когда трение в шарнире не учитывается (случай $\alpha=0$), задача изучалась ранее (см., например, [1-3]). В частности, доказана теорема о существовании сильного решения задачи на конечном отрезке времени. Установлено, что при выполнении достаточных условий для статической устойчивости по линейному приближению:

$$\Delta_1:=ml-\rho\alpha_{11}>0,\quad\Delta_2:=(ml-\rho\alpha_{11})(ml-\rho\alpha_{22})-2\rho\alpha_{12}^2>0,\tag{1}$$

где $\alpha_{jk}:=\int_\Gamma(\theta x_1^j)x_1^k\,d\Gamma=\alpha_{kj}$, соответствующая спектральная задача (для решений, зависящих от времени по закону $e^{-\lambda t}$) имеет дискретный спектр, состоящий из бесконечнократного нулевого собственного значения и двух ветвей мнимых взаимно сопряжённых собственных значений с предельной точкой $\pm i\infty$ и асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{\pm}=\pm i\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi}\right)^{-1/4}k^{1/4}[1+o(1)],\quad k\to\infty.\tag{2}$$

При этом половина собственных элементов образует ортогональный базис в пространстве $\widetilde{H}_1:=\vec{G}_{h,S}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3$, где $\vec{G}_{h,S}(\Omega_1):=\{\vec{u}=\nabla\Phi\in\vec{L}_2(\Omega_1):$

$\Delta\Phi = 0$ (в Ω_1), $\dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ (на S)$\}$. При невыполнении условий (1) задача может иметь не более двух отрицательных собственных значений, а система корневых элементов образует базис Рисса в $\widetilde{H}_1$.

При учёте сил трения (т.е. для $\alpha > 0$) и выполнении неравенств (1) спектральная задача сводится к изучению операторного пучка в $\widetilde{H}_1$:

$$(\widetilde{C}_2 - \lambda\alpha P + \lambda^2\widetilde{C}_1)\widetilde{z}_1 = 0, \quad \widetilde{z}_1 = (\nabla\Phi;\ \vec{\omega})^\tau \in \widetilde{H}_1, \tag{3}$$

где $P := \operatorname{diag}(0;\ I_3)$, $\widetilde{C}_1$ положительно определен и ограничен, а $\widetilde{C}_2$ положительно определен и неограничен в $\widetilde{H}_1$. Эта задача имеет дискретный ненулевой спектр, состоящий из двух ветвей комплексно сопряженных собственных значений в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \mathrm{const}$ с сохранением асимптотического поведения (2).

Задача (3) может быть сведена к поиску собственных значений оператора $A+B$, где неограниченный самосопряжённый оператор A имеет дискретный спектр с оценкой собственных значений $|\lambda_k| \leqslant \widetilde{c}k^{1/4}$, а B ограничен. Отсюда на основании теорем А.С. Маркуса и В.Э. Кацнельсона (см. [4], [5]) корневые элементы оператора $A + B$ образуют базис Абеля-Лидского со скобками порядка $\alpha > 3$ в пространстве $\widetilde{H}_1^2$.

Ожидается, что подобные спектральные свойства выполнены для начально-краевых задач, порождённых проблемами малых движений систем сочленённых маятников с полостями, частично либо целиком заполненных одной или несколькими идеальными жидкостями с учётом трения в шарнирах в случае статической устойчивости по линейному приближению ($C_2 \gg 0$). В операторной форме любая такая задача может быть приведена к задаче Коши для системы уравнений в сумме гильбертовых пространств $H_1 \oplus H_2$

$$\begin{cases} C_1\dfrac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f(t); \\ gC_2\dfrac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{cases} \tag{4}$$

где $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ — оператор кинетической энергии, $C_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ — оператор потенциальной энергии, $0 \leqslant A_1$ — оператор диссипации энергии, а B_{12} и $B_{21} = -B_{12}^*$ неограниченные операторы, связанные с обменом между кинетической и потенциальной энергиями системы. В подготовленной к публикации работе [6] доказана теорема о сильной разрешимости задачи (4), изучены спектральные свойства консервативных систем, когда все жидкости являются идеальными и трение в шарнире не учитывается, в частности, получены новые вариационные принципы для нахождения собственных значений.

Литература

1. *С. Г. Крейн, Н. Н. Моисеев.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной границей // Прикладная математика и механика, **21**:2 (1957), 169–174.

2. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – Зб. праць Інституту математики НАН України, **2**:1 (2005), 158–194.

3. *Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. – 276 с.

4. *Маркус А. С.* О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // ДАН СССР, **142**:3 (1962), 538–541.

5. *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов // Функц. анализ и его приложения, №2 (1967), 39–51.

6. *Н. Д. Копачевский, В. И. Войтицкий.* О колебаниях сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными жидкостями // Современная математика. Фундаментальные направления, **65**:2 (2019). (в печати)

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ РЕАКТОРА

Н.П. Волков

npvolkov@yandex.ru

УДК 517.518

Рассматриваются некоторые задачи управления переходными процессами в ядерных реакторах. Исследуется математическая модель динамики реактора без обратной тепловой связи. Эта модель описывается системой интегро-дифференциальных уравнений, состоящей из нестационарного анизотропного многоскоростного уравнения переноса и уравнения баланса запаздывающих нейтронов. Доказана управляемость поставленных задач.

Ключевые слова: Управление, переходные процессы в ядерных реакторах

The Control of Transient Processes in one Model Problem of Reactor Dynamics

On some problems controls of the transient processes in nuclear reactors is considered. The mathematical model of reactor dynamics without thermal feedback is investigated. This model is described by a system of integro-differential equations consisting of a nonstationary anisotropic multispeed transport equation and a delayed neutron balance equation. The controllability of these problems is proved.

Keywords: Control, transient processes in nuclear reactors

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности НИЯУ МИФИ, проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

Волков Николай Петрович, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва, Россия); Nikolay Volkov (National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia)

Рассматривается математическая модель динамики реактора без учета обратной температурной связи (см.[1]), которая описывается системой нестационарных интегро-дифференциальных уравнений:

1) нестационарным анизотропным многоскоростным кинетическим уравнением переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + (\mathbf{v},\nabla_x)u(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \Sigma(\mathbf{x},\mathbf{v},t)u(\mathbf{x},\mathbf{v},t) =$$

$$= \int_V J(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)u(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}' + \sum_{k=1}^{N} z_k R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + F(\mathbf{x},\mathbf{v},t),$$

2) уравнением баланса запаздывающих нейтронов

$$\frac{\partial R_k}{\partial t}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = -z_k R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \int_V J_k(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)u(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}', \forall k = \overline{1,N},$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{v},t) \in D = G \times V \times (0,T).$$

В этой модели функция $u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ является функцией плотности распределения нейтронов, пролетающих через точку $\mathbf{x} \in G$ со скоростью $\mathbf{v} \in V$ в момент времени $t \in [0,T]$. Функции $\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, $J(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)$, $F(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ характеризуют свойства среды, в которой происходит процесс массопереноса. Конкретно, $\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ является коэффициентом поглощения, $J(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)$ – индикатрисой рассеяния, а $F(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ – плотностью внутренних источников нейтронов. Здесь G есть область изменения пространственных координат, которая предполагается ограниченной строго выпуклой областью с границей ∂G класса C^1; V – диапазон изменений скоростей $\mathbf{v}$ частиц, являющийся ограниченным замкнутым множеством, содержащимся в сферическом слое $\{0 < v_0 \leqslant |\mathbf{v}| \leqslant v_1 < \infty\}$. Ядра $J_k(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)$ интегралов рассеяния характеризуют плотности распределения вторичных нейтронов, а функции $R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ – плотность распределения носителей запаздывающих нейтронов k-ой группы $\forall k = \overline{1,N}$.

Предположим, что рассматриваемый процесс происходит при отсутствии внешних источников частиц; т.е., например, внешнее излучение не проходит через стенки реактора. Это предположение математически выражается граничным условием

$$u(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0, \qquad (\mathbf{x},\mathbf{v},t) \in \gamma_- \times [0,T],$$

где $\gamma_- = \{(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \partial G \times V : (\mathbf{v}, n_x < 0)\}$, and n_x - внешняя нормаль к границе ∂G области G в точке $\mathbf{x}$. Зададим начальные условия для функций $u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ и $R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$:

$$u(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{v}), \qquad (\mathbf{x},\mathbf{v},t) \in \overline{G} \times V, \tag{1}$$

$$R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = R_{k0}(\mathbf{x},\mathbf{v}), \quad \forall k = \overline{1,N}, \qquad (\mathbf{x},\mathbf{v},t) \in \overline{G} \times V.$$

Для постановки задач управления необходимо задать финальное условие:

$$u(\mathbf{x},\mathbf{v},\ t_1) = \psi(\mathbf{x},\mathbf{v}), \qquad (\mathbf{x},\mathbf{v},t) \in \overline{G} \times V, \tag{2}$$

Задачи управления переходным процессом для системы динамики реактора состоит в том, что необходимо найти некоторые управляющие воздействия, с помощью которых этот реактор может быть переведен за конечное время $\{t_1\} \in (0,T)$ из начального состояния $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})$ в финальное состояние $\psi(\mathbf{x},\mathbf{v})$.

Задача управления 1. *Найти достаточные условия на исходные данные, при которых исследуемый реактор из начального состояния (1) может быть переведен за время $\{t_1\} \in (0,T)$ в целевое состояние (2), будучи управляемым стационарной частью $f(\mathbf{x},\mathbf{v})$ функции источников $F(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = f(\mathbf{x},\mathbf{v})g_1(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, где $f(\mathbf{x},\mathbf{v})$ есть допустимое управляющее воздействие (распределенное стационарное управление), а $g_1(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ - априори заданная функция (функция коррекции).*

Задача управления 1 является линейной с точки зрения поиска распределенных управляющих воздействий $f(\mathbf{x},\mathbf{v})$ и в своей постановке идентична обратной задаче в работе автора [2].

Доказана теорема существования решения задачи управления 1, т.е. теорема об управляемости переходными процессами в исследуемой математической модели динамики реактора. Найдены достаточные условия единственности искомого управляющего воздействия. При доказательстве данной теоремы использован метод идентичный методу, примененному в работе автора [3].

Исследована также следующая задача управления:

Задача управления 2. *Найти достаточные условия на исходные данные, при которых исследуемый реактор из начального состояния (1) может быть переведен за время $\{t_1\} \in (0,T)$ в целевое состояние (2), будучи управляемым стационарной частью $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})$ коэффициента поглощения $\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})g_2(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, где $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})$ есть допустимое управляющее воздействие (распределенное стационарное управление), а $g_2(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ - априори заданная функция (функция коррекции поглощения).*

Задача управления 2 является нелинейной с точки зрения поиска распределенных управляющих воздействий $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})$.

Доказана локальная теорема существования и единственности решения задачи управления 2.

Литература

1. *Крянев А.В., Шихов С.Б.* Вопросы математической теории реакторов (Нелинейный анализ)// М.: Энергоатомиздат,1983.

2. *Volkov N/P/* Linear Inverse Prodlem of Dynamics of the Reactor // Journal of Physics: Conference Series **788**:1 (2017), 1-4.

3. *Волков Н.П.* Разрешимость некоторых обратных задач для нестационарного кинетического уравнения переноса. // Журнал вычислительной математики и математической физики, **56**:9 (2016), 1622-1627.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ ВЕСОМ

А.А. Гималтдинова
aa-gimaltdinova@mail.ru

УДК 517.927.25

Найдены собственные значения и собственные функции задач Штурма – Лиувилля со знакопеременной весовой функцией с разными комбинациями краевых или нелокальных условий. Построены соответствующие системы собственных функций и исследованы на полноту и базисность.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, спектральная задача, собственные значения и собственные функции

Spectral problems with non-local conditions with an alternating weight

The eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville problems with an alternating weight function with different combinations of boundary or non-local conditions are found. The corresponding systems of eigenfunctions are constructed and investigated for completeness and basicity.

Keywords: ordinary differential operator, spectral problem, eigenvalues and eigenfunctions

Рассмотрим задачу для уравнения

$$LX(x) = X''(x) + \lambda \cdot \operatorname{sign} x \cdot X(x) = 0, \quad x \in (-l, 0) \cup (0, h), \ l, h > 0, \tag{1}$$

с условиями сопряжения $X(0-0) = X(0+0)$, $X'(0-0) = X'(0+0)$ и одной из следующих пар краевых или нелокальных условий

$$X(-l) = X(h), \quad X'(h) = 0, \tag{2}$$

$$X'(-l) = X'(h), \ X(h) = 0 \text{ или } \ X(-l) = X(h), \ X'(-l) = X'(h).$$

Для каждой из трех задач найдены собственные значения как корни соответствующих трансцендентных уравнений (например, собственные значения задачи (1)–(2) есть корни уравнения $\cos(\mu h)\operatorname{ch}(\mu l) - \sin(\mu h)\operatorname{sh}(\mu l) = 1$). Получены асимптотические формулы для корней этих уравнений, найдены соответствующие системы собственных функций и аналогично [1] исследованы их свойства.

Литература

1. *Гималтдинова А.А., Курман К.В.* О полноте одной пары биортогонально сопряженных систем функций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, **19**:1 (2015), 7–18.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ - РБ (проект № 17-41-020516).
Гималтдинова Альфира Авкалевна, к.ф.-м.н., доцент, УГНТУ (Уфа, Россия); Al'fira Gimaltdinova (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ю.В. Гласко
glaskoyv@mail.ru

УДК 517.946

Рассмотрена краевая задача относительно уравнения Пуассона. На ее основе сформулирована задача касательно распределения на границе. Рассмотрен геометрический метод решения указанной задачи. Метод применен к краевой задаче относительно параболического уравнения.

Ключевые слова: Уравнение Пуассона, balayage-метод Пуанкаре

Geometrical method for solution some boundary problems

We consider boundary problem for Poisson equation. Problem for boundary distribution is formulated on base of the Poison boundary problem. Geometrical solution method for the boundary distribution problem is considered. The method is used for boundary problem for parabolic equation.

Keywords: Poisson equation, Poincare balayage method

В данном сообщении мы рассмотрим стационарный процесс с источником $f(X),\ X \in \Omega \subset V,\ X \equiv \{x, y, z\},\ \partial V \equiv \Gamma$ в рамках следующей краевой задачи:

$$D\Delta u(X) = -f(X),\ X \in \Omega, \tag{1}$$

$$D\Delta u(X) = 0,\ X \in V \setminus \Omega, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(X)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

$$u(X) = u_0(X) = cf(X),\ X \in \Omega \tag{4}$$

Здесь D и c обеспечивают совпадение размерностей. Нам следует определить:

$$u(X)|_{\Gamma} = u_{\Gamma}(X) \tag{5}$$

Первым общепризнанным доказательством существования решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа относительно потенциала явился balayage-метод А. Пуанкаре. Мы используем его для решения указанной 3D задачи (1-5). Суть его в заполнении области V системой шаров $\{\Sigma_i\}, i = 1, ..., M$ и перераспределении $u(X)$ из шаров на их границы до тех пор пока все $u(X)$ окажутся на Г. Предполагается, что объединение частей поверхностей обращенных к Г граничных шаров из системы $\{\Sigma_i\}$ достаточно точно аппроксимирует Г. Каждые 2 из пересекающихся шаров $\Sigma_i,\ \Sigma_j$ являются вариантом составной области рассматриваемой в альтернирующем методе Шварца. При этом в каждое $\Sigma_i \bigcap \Sigma_j$ можно поместить луночку- то есть выполнен критерий Шварца. В то же время дополнительные условия (3-4)

Гласко Юрий Владленович, к.ф.-м.н., НИВЦ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Yuri Glasko (Research Computing Center Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

по отношению к постановке А. Пуанкаре , имеют целью обеспечить единственность решения. При этом, в качестве V мы выбираем куб. В нашем случае мы имеем линейный оператор задачи. Для устойчивости следует обеспечить его компактность. Так же следует иметь значительную априорную информацию о источнике и распределении на границе (в соответствии с методом расширяющихся компактов). В качестве области Ω выбираем выпуклую область без дырок. Можно выбрать и несколько таких областей но они не должны пересекаться или граничить друг с другом. Кроме того, пространства должны быть нормированными. Возможно использование гильбертовых пространств.

Численно задача решается на сетке с шагом h на основе итерационного цикла по всей области V^h. V^h заполнена аппроксимациями системы шаров $\{\Sigma_i\}, i = 1, ..., M$, которые даются семиточечными схемами типа "крест" $\{\Sigma_i^h\}, i = 1, ..., M$.

Задача (5) рассмотрена и на основе краевой проблеммы для параболического уравнения. Для решения применяется указанный выше метод.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики — Москва: Наука, 1966.

2. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Том 3. — Москва: Наука, 1974.

3. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1979.

4. *Садовничий В.А.* Теория операторов. — Москва: Дрофа, 2001.

5. *Зидаров Д.* О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. — София: БАН, 1980.

6. *Yagola A.G., Dorofeev K.Yu.* Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems // Ramm A.G., Shivakumar P.N., Strauss A.V. (eds.) Fields Institute Communications: Operator Theory and Its Applications. — Providence, RI: American Mathematical Society, **25**, 2000. — 543-550.

7. *Glasko Y.V.* Interpretation algorithms for hydrocarbon deposits // Nurgaliev D., Matveeva N. (eds.) Practical and theoretical aspects of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields. — Switzerland: Springer, 2019. — 113-125.

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.Л. Гольдман
nlgold40@yandex.ru

УДК 517.958

Исследованы постановки нелинейных задач для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени. Одна из них представляет собой систему, состоящую из краевой задачи с граничными условиями первого рода и из уравнения, задающего закон изменения по времени искомого коэффициента. В других постановках аналогичная система отличается видом граничных условий. Доказана однозначная разрешимость таких нелинейных систем на основе метода Ротэ и априорных оценок в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера. Исследование связано с математическим моделированием физико-химических процессов с изменяющимися внутренними характеристиками материалов.

Ключевые слова: параболические уравнения, краевые задачи, классы Гельдера, метод Ротэ, априорные оценки, однозначная разрешимость

Some new statements of nonlinear problems for a parabolic equation

We study statements of nonlinear problems for a parabolic equation with an unknown coefficient at the time derivative. One of the statements is a system, which contains the boundary value problem of the first kind and the equation for a time dependence of the sought coefficient. In the other statements the corresponding system is distinguished by boundary conditions. For these nonlinear systems, conditions of uniqueness solvability in a class of smooth functions are proved by applying the Rothe method and a priori estimates in the difference-continuous analogs of Hölder spaces. The present investigation is connected with the mathematical modelling of physical-chemical processes in which inner characteristics of materials are subjected to changes.

Keywords: parabolic equations, boundary value problems, Hölder spaces, Rothe method, a priori estimates, uniqueness solvability

Одна из рассмотренных постановок является нелинейной системой для нахождения в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ функций $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ из условий

$$c(x,t,u)\rho(x,t)u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{x=0} = w(t), \quad u(x,t)|_{x=l} = v(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$\rho_t(x,t) = \gamma(x,t,u), \quad (x,t) \in Q, \quad \rho(x,t)|_{t=0} = \rho^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

Гольдман Наталия Львовна, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nataliya Gol'dman, Dr.Sci, Leading Scientist (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

в которых равномерно эллиптический оператор Lu имеет вид

$$Lu \equiv (a(x,t,u)u_x)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)u,$$

a, b, c, d, f, а также w, v, φ, γ и ρ^0 — известные функции своих аргументов, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $\rho^0 \geqslant \rho^0_{\min} > 0$, $a_{\min}$, $c_{\min}$, $\rho^0_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

В зависимости от функции $\gamma(x,t,u)$, которая предполагается знакопостоянной при $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ (где $M_0 \geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|$, M_0 — постоянная из принципа максимума для краевой задачи (1)–(3)), требование параболичности уравнения (1) приводит к ограничениям на искомое решение

$$0 < \rho^0_{\min} < \rho(x,t) \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l} \rho^0(x) + T \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} \gamma(x,t,u) \text{ при } \gamma(x,t,u) > 0, \quad (5)$$

$$0 < \rho^0_{\min} - T \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} |\gamma(x,t,u)| \leqslant \rho(x,t) \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l} \rho^0(x) \text{ при } \gamma(x,t,u) \leqslant 0. \quad (6)$$

Если $\gamma(x,t,u) \leqslant 0$ в области $\overline{D}$, то условие (6) накладывает ограничение на отрезок времени $[0,T]$, на котором ищется решение системы (1)–(4): $0 < T < \rho^0_{\min}(\max_{(x,t,u)\in\overline{D}} |\gamma(x,t,u)|)^{-1}$.

Другие рассмотренные постановки отличаются от системы (1)–(4) видом граничных условий

$$a(x,t)u_x|_{x=0} = g(t),\ a(x,t)u_x|_{x=l} = q(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a(x,t,u)u_x - h(t,u)u|_{x=0} = g(t),\ h \geqslant 0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ a(x,t,u)u_x + e(t,u)u|_{x=l} = q(t),\ e \geqslant 0, \quad 0 < t \leqslant T. \end{aligned} \quad (8)$$

Это новый вид нелинейных краевых задач для параболического уравнения по сравнению с классическими постановками таких задач в [1]. Для исследования условий существования их гладких решений используем метод прямых Ротэ. Для системы (1)–(4) аппроксимирующая ее нелинейная дифференциально-разностная система состоит в определении $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ — приближенных значений функций $u(x,t)$ и $\rho(x,t)\}$ в области $\overline{Q}_\tau = \{0 \leqslant x \leqslant l\} \times \overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_\tau \in [0,T]$ — равномерная сетка узлов t_n с шагом $\tau = TN^{-1}$

$$c_n\rho_n u_{n\bar{t}} - (a_n u_{nx})_x + b_n u_{nx} + d_n u_n = f_n, \quad (x,t_n) \in Q_\tau = \{0 < x < l\} \times \omega_\tau, \quad (9)$$

$$u_n|_{x=0} = w_n, \quad u_n|_{x=l} = v_n, \quad 0 < t_n \leqslant T, \quad (10)$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (11)$$

$$\rho_{n\bar{t}} = \gamma_{n-1},\ (x,t_n) \in Q_\tau, \quad \rho_n|_{n=0} = \rho^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (12)$$

где a_n, b_n, c_n, d_n — значения соответствующих коэффициентов в точке (x,t_n,u_n), $f_n = f(x,t_n)$, $w_n = w(t_n)$, $v_n = v(t_n)$, $\gamma_{n-1} = \gamma(x,t_{n-1},u_{n-1})$, $u_{n\bar{t}} = (u_n(x) - u_{n-1}(x))\tau^{-1}$, $u_{nx} = du_n(x)/dx$, $\rho_{n\bar{t}} = (\rho_n(x) - \rho_{n-1}(x))\tau^{-1}$.

Для систем с граничными условиями (7), (8) дифференциально-разностная аппроксимация этих условий имеет соответствующий вид, в частности

$$a_n u_{nx} - h_n u_n|_{x=0} = g_n,\ a_n u_{nx} + e_n u_n|_{x=l} = q_n,\ 0 < t_n \leqslant T,$$

где h_n и e_n — значения коэффициентов в граничных условиях при $t = t_n$, $u = u_n|_{x=0}$ и, соответственно, $u = u_n|_{x=l}$.

Доказательство разрешимости соответствующей исходной нелинейной системы методом Ротэ включает в себя несколько основных этапов.

Этап 1. Исследование дифференциально-разностной краевой задачи с соответствующими граничными условиями в предположении, что коэффициент $\rho_n(x)$ — известная функция. Получение априорных оценок в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера для $u_n(x)$, не зависящих от x, n.

Этап 2. Доказательство существования и единственности решения $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ всей дифференциально-разностной системы на основе результатов этапа 1. Получение априорных оценок для $u_n(x)$ и $\rho_n(x)$ в соответствующих сеточно-непрерывных пространствах, не зависящих от x, n.

Этап 3. Предельный переход при $n \to \infty$ в дифференциально-разностной системе на основе полученных априорных оценок, в силу которых семейство $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ является компактным. Завершение доказательства разрешимости исходной нелинейной системы в классе гладких функций.

Получение априорных оценок на этих этапах проводится в [2, 3] без требований дополнительной гладкости от входных данных, которые обычно накладываются методом Ротэ. Это позволяет установить точные дифференциальные зависимости в исходных нелинейных системах и получить условия их однозначной разрешимости в классе гладких функций. Такие условия для системы (1)–(4) формулирует следующая

Теорема. *Предположим, что:*

1) *при* $(x,t) \in \overline{Q}$ *и любых* u, $|u| < \infty$, *все входные данные в соотношениях* (1)–(3) *являются ограниченными функциями в областях своего определения, причем коэффициент* $a(x,t,u)$ *ограничен вместе со своими производными по* x *и* u, *выполнены условия* $0 < a_{\min} \leqslant a \leqslant a_{\max}$, $0 < c_{\min} \leqslant c \leqslant c_{\max}$;

2) *при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *функции* $a(x,t,u)$, $a_x(x,t,u)$, $a_u(x,t,u)$, $b(x,t,u)$, $c(x,t,u)$ *и* $d(x,t,u)$ *непрерывны в смысле Гельдера по* x *и* t *с показателями* λ, $\lambda/2$ *и имеют ограниченные производные по* u; *кроме того, производная* $c_x(x,t,u)$ *ограничена, функция* $f(x,t)$ *принадлежит* $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$;

3) *функции* $w(t)$ *и* $v(t)$ *принадлежат* $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, *функции* $\varphi(x)$ *и* $\rho^0(x)$ *принадлежат, соответственно,* $H^{2+\lambda}[0,l]$ *и* $C^1[0,l]$, $0 < \rho^0_{\min} \leqslant \rho^0(x) \leqslant \rho^0_{\max}$, $\rho^0_{\min}, \rho^0_{\max} = \mathrm{const} > 0$; *выполнены условия согласования*

$$c(x,0,\varphi)\rho^0(x)w_t - L\varphi|_{x=0,t=0} = f(x,0)|_{x=0},$$

$$c(x,0,\varphi)\rho^0(x)v_t - L\varphi|_{x=l,t=0} = f(x,0)|_{x=l};$$

4) *функция* $\gamma(x,t,u)$ *в условии* (4) *знакопостоянна при* $(x,t,u) \in \overline{D}$, *имеет ограниченные производные по* x, u, *кроме того непрерывна в смысле Гельдера по* t *с показателем* $\lambda/2$.

Тогда нелинейная система (1)–(4) *имеет единственное решение* $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$, *обладающее свойствами*

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad |u(x,t)|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}} \leqslant M, \quad M = \mathrm{const} > 0,$$

$$\rho(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_t(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),$$

и удовлетворяющее ограничениям (5), (6) *в зависимости от знака функции* $\gamma(x,t,u)$. *Это решение можно получить как предел решения* $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ *дифференциально-разностной системы* (9)–(12) *при стремлении шага сетки* τ *к нулю.*

Аналогичные условия однозначной разрешимости нелинейных систем с граничными условиями (7), (8) получены в [3].

Проведенное исследование связано с моделированием физико-химических процессов, которые сопровождаются изменениями внутренних характеристик материалов. В [3] рассмотрены модели деструкции теплозащитного композита (т.е., необратимых изменений его плотности и концентраций компонентов) под воздействием высоких температур.

Литература

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

2. *Гольдман Н.Л.* О некоторых постановках нелинейных параболических задач с краевыми условиями первого рода и о методах их приближенного решения // Вычисл. методы и программирование, **19** (2018), 314-326.

3. *Gol'dman N.L.* Boundary value problems for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient // J. Differential Equations, **266** (2019), 4925-4952.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.И. Горбачев

vigorby@mail.ru

УДК 517.926.4

Рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (исходные уравнения). Наряду с каждым исходным уравнением рассматривается точно такое же уравнение только с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение). Показано, что общее решение исходного уравнения представляется в интегральной форме через общее решение сопутствующего уравнения и фундаментальное решение исходного уравнения. Фундаментальное решение находится методом возмущений в виде бесконечного знакопеременного ряда.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, интегральные формулы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00016а).

Горбачев Владимир Иванович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Gorbachev Vladimir Ivanovich, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Рассмотрим исходное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами [1]

$$f_2(x)u'' + f_1(x)u' + f_0(x)u + f(x) = 0\,, \quad x \in (0, L). \tag{1}$$

Если функция $f_2(x)$, при любом x, не обращается в нуль, то уравнение (1) можно свести к самосопряженной форме [2, стр. 241], которое также будем называть исходным уравнением

$$\big[C(x)u'\big]' + e(x)u + X(x) = 0\,,\ C = \exp\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx\,,\ e = \frac{f_0}{f_2}\,,\ X = \frac{f_1 f}{f_2}\,, \tag{2}$$

Пусть $G(x,\xi)$ — фундаментальное решение уравнения (2), то есть

$$\big[C(x)G'(x,\xi)\big]' + e(x)G(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0\,, \quad x,\xi \in (0,L)\,, \tag{3}$$

где $\delta(x-\xi)$ — дельта функция Дирака [3]. Решение уравнения (3) понимается в обобщенном смысле [4, 5]. В этом случае решение уравнения (2) можно представить в виде следующей интегральной формулы [6, 7]:

$$u(x) = v(x) + \int\limits_0^L G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, v'(\xi)d\xi - \int\limits_0^L G(x,\xi)\tilde{e}(\xi)v(\xi)d\xi\,, \tag{4}$$

где $\tilde{C}(\xi) = C^o - C(\xi)$, $\tilde{e}(\xi) = e^o - e(\xi)$, а $v(x)$ — решение, так называемого, сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами C^o и e^o

$$C^o v''(x) + e^o v(x) + X(x) = 0. \tag{5}$$

Общее решение сопутствующего уравнения (5) имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\lambda x} + K_2 e^{-i\lambda x} + \varphi(x)\,; \qquad \lambda = \sqrt{\frac{e^o}{C^o}}\,, \tag{6}$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные константы, а $\varphi(x)$ — частное решение сопутствующего уравнения (5) с постоянными коэффициентами

$$\varphi(x) = \frac{i}{2\lambda C^o}\left[e^{i\lambda x}\int X(x)e^{-i\lambda x}dx - e^{-i\lambda x}\int X(x)e^{i\lambda x}dx\right].$$

Подставив (6) в интегральную формулу (4), получим общее решение исходного уравнения (2)

$$u(x) = K_1 A(x) + K_2 B(x) + \Phi(x)\,, \tag{6}$$

где

$$A(x) = e^{i\lambda x} + i\lambda \int\limits_0^L G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{i\lambda\xi} d\xi - \int\limits_0^L G(x,\xi)\tilde{e}(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi\,,$$

$$B(x) = e^{-i\lambda x} - i\lambda \int\limits_0^L G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi - \int\limits_0^L G(x,\xi)\tilde{e}(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi\,,$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int\limits_0^L G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, \varphi'(\xi) d\xi - \int\limits_0^L G(x,\xi)\tilde{e}(\xi)\varphi(\xi) d\xi.$$

Коэффициенты C^o и e^o положим равными эффективным характеристикам [5, 8] так, что

$$C^o = 1/\big\langle 1/C \big\rangle\,,\ e^o = \big\langle e \big\rangle\,,\ \big\langle f \big\rangle \equiv \int_0^L f(x)dx/L.$$

Построение фундаментального решения исходного уравнения. Общее решение исходного уравнения находится по формулам (6), если известно фундаментальное решение уравнения (3) с переменными коэффициентами. Однако задача отыскания точного фундаментального решения в общем случае зависимости коэффициентов от координаты вряд ли разрешима. Поэтому будем искать приближенное решение уравнения (3) методом возмущений [9, 10]. Для этого перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$\big[C(x)G'(x,\xi)\big]' + \varkappa e(x)G(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0\,, \tag{7}$$

где $\varkappa$ — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным 1. Будем искать решение уравнения (7) в виде ряда по степеням параметра $\varkappa$:

$$G(x,\xi,\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n G_n(x,\xi).$$

Далее подставим этот ряд в уравнение (7), соберем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$ и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений, каждое из которых легко интегрируется в общем виде. Константы интегрирования этих уравнений полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Опуская подробности всех выкладок, запишем представление фундаментального решения в виде следующего ряда:

$$G(x,\xi) = -h(x-\xi)\Bigg[\int\limits_\xi^x \frac{dz}{C(z)} - \int\limits_\xi^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int\limits_\xi^{x_1} e(x_2)dx_2 \int\limits_\xi^{x_2} \frac{dz}{C(z)} +$$

$$+ \int\limits_\xi^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int\limits_\xi^{x_1} e(x_2)dx_2 \int\limits_\xi^{x_2} \frac{dx_3}{C(x_3)} \int\limits_\xi^{x_3} e(x_4)dx_4 \int\limits_\xi^{x_4} \frac{dz}{C(z)} - \cdots \Bigg]. \tag{8}$$

Если $C = C^o = const. > 0$ и $e = e^o = const. > 0$, тогда ряд (8) суммируется и получается фундаментальное решение сопутствующего уравнения (5), которое понимается в обобщенном смысле. Это решение можно найти, например, в книгах [11 стр. 198], [12]

$$G^o(x,\xi) = -\frac{h(x-\xi)s^o}{C^o}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\Big[\frac{x-\xi}{s^o}\Big]^{2n+1} = -\frac{h(x-\xi)\,s^o}{C^o}\,\sin\frac{x-\xi}{s^o}\,,$$

где $s^o = \sqrt{C^o/e^o} = 1/\lambda^o$. Сходимость ряда (8) исследована в работе [13].

Литература

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Москва: Наука, 1971.

2. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.

3. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. — Москва: Мир, 1978.

4. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1966.

5. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осредненние процессов в периодических средах. — Москва: Наука, 1984.

6. *Горбачев В.И.* Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела, **2**:2 (1991), 61-76.

7. *Горбачев В.И.* Averaging equations of mathematical physics with coefficients dependent on coordinates and time // Nanoscience and Technology: An International Journal, **8**:4 (2017), 345-353.

8. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. — Москва: Изд-во МГУ, 1984.

9. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. — Москва: Изд-во МГУ, 1976.

10. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. — Москва: Мир, 1976.

11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — Москва: Главная ред. физ.-мат. лит., 1971.

12. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — Москва: Наука, 1976.

13. *Горбачев В.И.* О собственных частотах продольных колебаний неоднородного стержня с переменным поперечным сечением // Вестник МГУ. Сер. 1 математика, механика, 1 (2016), 31-39.

О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Н. Денисов
vdenisov2008@yandex.ru

УДК 517.518

Устанавливаются достаточные условия на рост коэффициентов параболического уравнения второго порядка, при которых решение задачи Коши стабилизируется к нулю, равномерно по x на каждом компакте K в R^N. Также получаем достаточные условия на коэффициенты, при которых решение задачи Коши стабилизируется к нулю со степенной скоростью, равномерно по x на каждом компакте K в R^N.

Ключевые слова: математика, параболические уравнения, решение задачи Коши, стабилизация

On stabilization rate of a solution to the Cauchy problem for parabolic equation with increasing coefficients

We obtain sufficient conditions on the growth of coefficients of a second order parabolic equation under which a solutions of the Cauchy problem stabilize to zero uniformly in x on every compact K in R^N. Additionally, unimprovable sufficient conditions on the coefficients are obtained under which the solution of the Cauchy problem stabilize to zero at a power law rate uniformly on every compact K in R^N.

Keywords: mathematics, parabolic equations, solution of the Cauchy problem, stabilization

В полупространстве $\overline{E} = R^N \times [0, \infty), N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv Lu_1 + (b, \nabla u) + c(x)u - u_t = 0, \text{ в } E(1), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{2}$$

где

$$L_1 u = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x) u''_{x_i x_k}, (b, \nabla u) = \sum_{k=1}^{N} b_i(x) u'_{x_i}. \tag{3}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) коэффициенты в (1) действительны, непрерывны, и удовлетворяют условию Гельдера в каждой ограниченной подобласти D в $R^N, a_{ik} = a_{ki}$, $(i, k = 1, \ldots, N)$, существуют положительные постоянные k_0, k_1,такие, что

$$k_0^2 b(|x|)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \leqslant k_1^2 b(|x|)|\xi|^2, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-11-00223).

Денисов Василий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vasilii Denisov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

для $\forall (x)\xi \in R^N$,

$$b(|x|) = (1+|x|^2)^{\nu/2}, \text{ где } 1 < \nu < 2, |x|^2 = x_1^2 + ... + x_N^2. \quad (5)$$

2)коэффициенты $b_1(x)..., b_N(x)$ удовлетворяет условию (B): существует постоянная $B > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{N} |b_k(x)| \leqslant B(1+|x|^2)^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (6)$$

3)коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C), т.е. $\exists \beta > 0$

$$c(x) \leqslant -\beta^2 \text{ для } \forall x \in R^N. \quad (7)$$

4) начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в R^N:

$$|u_0(x)| \leqslant M, \forall x \in R^N. \quad (8)$$

Теорема 1. *Если выполнены сформулированные выше условия (4)-(8), то решение задачи Коши (1), (2) имеет предел:*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \quad (9)$$

равномерно по x на каждом компакте K в R^N.

Замечание 1. Теорема 1 является точной, в том смысле, что нельзя заменить в её утверждении компакт K на все R^N (См. [1]).

В случае, когда $\nu = 2$ в (5), то теорема 1 доказана в работе [2]. Положим

$$S = \frac{k_1^2(N-1) + k_0^2 + B}{k_0^2}, \lambda(\beta) = \frac{2 - S + \sqrt{D}}{2}, D = (2-S)^2 + \overline{\beta^2}, \overline{\beta} = \frac{\beta}{k_1}.$$

Справедливо утверждение:

Теорема 2. *Пусть в (5) $\nu = 2$ и выполнено неравенство*

$$\beta^2 > k_1^2(S-1).$$

Тогда для любой начальной функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условию (8), для решения задачи Коши (1), (2) справедлива оценка:

$$|u(x,t)| \leqslant Mt^{-\frac{\lambda(\beta)}{3}}, \forall t \geqslant t_1 > 0, M > 0, \quad (10)$$

равномерная по x на любом компакте K в R^N) .

Замечание 2. Из предельного равенства

$$\lim_{\beta\to\infty} \lambda(\beta) = +\infty$$

и из оценки (10) вытекает, что для любого наперед заданного $m > 0$ можно найти $\beta > 0$ из условия $\lambda(\beta) = m$.

Обзору работ по стабилизации решений параболических уравнений посвящена работа [3]. Асимптотика решений нелинейных параболических уравнений изучалась в [4].

Литература

1. *Денисов В.Н.* Об асимптотике при большом времени решений параболических уравнений с растущими старшими коэффициентами // Докл. РАН, **475**:1 (2017), 10-13.

2. *Денисов В.Н.* О стабилизации решений параболических уравнений с растущими старшими коэффициентами // Труды семинара имени И.Г. Петровского, **32** (2019), 134-161.

3. *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // УМН, **60**:4 (2005), 145-212.

4. *Kon'kov A.A.* On the asymptotic behaviour of solutions of nonlinear parabolic equations // Proc. Royal Soc. Edinburgh, **136** (2006), 365-384.

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И СВЯЗАННОМ С НЕЙ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов, М.Г. Ергалиев

muvasharkhan@gmail.com, ramamur@mail.ru, ergaliev.madi.g@gmail.com

УДК 517.9

В случае осевой симметрии, в виде перевернутого конуса вырождающейся области, для граничной задачи теплопроводности установлены теоремы о разрешимости в весовых пространствах существенно ограниченных функций. Они основаны на результатах по исследованию вопросов разрешимости неоднородного вырождающегося интегрального уравнения Абеля второго рода. Применяется метод регуляризации Карлемана-Векуа из теории сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, вырождающаяся область, интегральный оператор Абеля

Работа выполнена при финансовой поддержке грантовых проектов AP05130928, AP05132262 и BR05236693 (2018–2020) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Дженалиев Мувашархан Танабаевич, д.ф.-м.н., профессор, ИМММ (Алматы, Казахстан); Muvasharkhan Jenaliyev (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

Рамазанов Мурат Ибраевич, д.ф.-м.н., профессор, КарГУ имени Е.А.Букетова (Караганда, Казахстан); Murat Ramazanov (Buketov State University of Karaganda, Kazakhstan)

Ергалиев Мади Габиденович, PhD, ИМММ (Алматы, Казахстан); Madi Yergaliyev (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

On a boundary problem of heat conduction and a degenerating integral equation of Abel type of the second kind related to it

In the case of axial symmetry, in the form of an inverted cone of a degenerating domain, for the boundary value problem of heat conduction it has been established theorems of solvability in the weighted spaces of essentially bounded functions. They are based on the results on the study of the solvability questions of the inhomogeneous degenerating Abel integral equation of the second kind. It has been used the Carleman-Vekua regularization method from the theory of singular integral equations.

Keywords: heat equation, degenerating domain, Abel's integral operator

В конусе $G = \big\{(x;y,t) : \, x^2 + y^2 < t^2, \, 0 < t < T\big\}$ мы изучаем граничную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

с условием на поверхности конуса

$$u(x,y,t) = u_{\text{c}}(x,y,t), \; \sqrt{x^2+y^2} = t, \; 0 < t < T, \tag{2}$$

где $u_{\text{c}}(x,y,t)$ – заданная функция.

Переходя к полярным координатам в задаче (1)–(2) и предполагая выполнение свойства изотропности по угловой координате, получаем: найти в области $\Omega = \{(r,t) : \, 0 < r < t, \, 0 < t < T\}$ решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{3}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\lim_{r\to 0} \frac{u(r,t)}{\ln{(1/r)}} = u_0(t), \; 0 < t < T, \tag{4}$$

$$\lim_{r\to t} u(r,t) = u_1(t) \equiv u_{\text{c}}(x,y,t)\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t}, \; 0 < t < T. \tag{5}$$

Решение граничной задачи (3)–(5) сводится к изучению вопросов разрешимости неоднородного интегрального уравнения

$$t\,\varphi(t) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)d\,\tau}{\sqrt{t-\tau}} = f(t), \; 0 < t < T < \infty, \tag{6}$$

где λ – заданная положительная постоянная величина, $\{f(t), \; t \in (0,T)\}$ – заданная функция.

Уравнения вида (6) являлись предметом изучения многих работ. Мы здесь укажем только на следующие работы [1–5] и ссылаемся на многочисленные исследования, цитируемые в них. В работе [1] при предположении, что порядок вырождения, определяемая степенью независимой переменной t, является строго меньше, чем единица, установлена однозначная разрешимость интегрального уравнения. В [2] установлены необходимые и достаточные условия, при которых оператор в пространстве квадратично суммируемых функций представляется в виде суммы оператора умножения на ограниченную функцию и интегрального оператора, и эта сумма называется интегральным оператором третьего рода. В уравнениях из [3], [4] и [5] ядра интегральных операторов не должны иметь особенностей.

Порядок вырождения в исследуемом нами уравнении (6) равен единице и ядро интегрального оператора имеет слабую особенность и определяет интегральный оператор Абеля. Мы изучаем вопросы разрешимости уравнения (6) в весовом классе существенно ограниченных функций. Мы также показываем, что граничная задача теплопроводности (3)–(5) сводится к изучению уравнения вида (6).

При определенных физико-технических допущениях [6] граничная задача (1)–(2) моделирует температурное поле в теле плазмы электрического разряда между размыкающимися контактами высокого напряжения, находившихся первоначально в замкнутом состоянии. В связи с тем, что измерить указанное температурное поле весьма затруднительно, остается надеяться, хотя бы качественно, оценить характер протекающих тепловых процессов с помощью методов математического моделирования.

Ранее нами изучались граничные задачи теплопроводности, подобные (1)–(2), в одномерных вырождающихся областях [7–10]. А изучаемые в работе [11] граничные задачи сводятся к особым интегральным уравнениям типа (6). Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть* $t^{-3/2}u_0(t),\ t^{-1/2}u_1(t) \in L_\infty(0,T)$. *Тогда граничная задача (3)–(5) имеет общее решение* $u(r,t) = Cu_{hom}(r,t) + u_{part}(r,t) \in L_\infty(\Omega; r^{-1/2})$, *т.е.,* $r^{-1/2}u(r,t) \in L_\infty(\Omega)$, $C = const$, *где* $u_{hom}(r,t)$ *и* $u_{part}(r,t)$ *являются решениями соответственно однородного (при* $u_0(t) \equiv 0,\ u_1(t) \equiv 0$*) и неоднородного граничных задач (3)–(5).*

В случае осевой симметрии из теоремы 1 следует следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $t^{-1/2}u_1(t) \equiv t^{-1/2}u_c(x,y,t)\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} \in L_\infty(0,T)$. *Тогда граничная задача (1)–(2) имеет общее решение* $u(x,y,t) = Cu_{hom}(x,y,t) + u_{part}(x,y,t) \in L_\infty(G; (x^2+y^2)^{-1/4})$, *т.е.,* $(x^2+y^2)^{-1/4}u(x,y,t) \in L_\infty(G)$, $C = const$, *где* $u_{hom}(x,y,t)$ *и* $u_{part}(x,y,t)$ *являются решениями соответственно однородного (при* $u_c(x,y,t) \equiv 0$*) и неоднородного граничных задач (1)–(2).*

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть* $t^{-1/2}f(t) \in L_\infty(0,T)$. *Тогда интегральное уравнение (6) имеет общее решение* $\varphi(t) = C\varphi_{hom}(t) + \varphi_{part}(t) \in L_\infty((0,T); t^{-1/2})$, *т.е.,* $t^{-1/2}\varphi(t) \in L_\infty(0,T)$, $C = const$, *где* $\varphi_{hom}(t)$ *и* $\varphi_{part}(t)$ *являются решениями соответственно однородного (при* $f(t) \equiv 0$*) и неоднородного интегральных уравнений (6).*

Литература

1. *Нахушев А.М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифф. уравн., **10**:1 (1974), 100-111.

2. *Коротков В.Б.* Об интегральных операторах третьего рода // Сиб. мат. журн., **44**:5 (2003), 829-832.

3. *Крейн С.Г., Сапронов И.В.* Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями // Усп. мат. наук, **50**:4 (2003), 140.

4. *Сапронов И.В.* Об одном классе решений уравнения Вольтерра второго рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве // Изв. ВУЗов. Математика, **48**:6 (2004), 45-55.

5. *Кожанов А.И.* Изучение разрешимости некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений третьего рода // Докл. РАН, **97**:1 (2018), 38-41.

6. *Ким Е.И., Омельченко В.Т., Харин С.Н.* Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. — Алма-Ата: Наука, 1977.

7. *Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.* Об однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. мат. журн, **56**:6 (2018), 982-995.

8. *Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., and Zhanbolova A.K.* The solution of the singular Volterra integral equation of the thermal problem with a uniformly moving boundary // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, **82**:2 (2016), 40-47.

9. *Jenaliyev M., Amangaliyeva M., Kostmakova M., and Ramazanov M.I.* On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations, **2015**:71 (2015).

10. *Jenaliyev M., and Ramazanov M.* On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain // Filomat, **32**:3 (2018), 965-974.

12. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. I, II // Дифференц. уравнения, **43**:4 (2007), 513-524; **43**:6 (2007), 806-812.

КВАЗИСЛУЧАЙНЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В СИСТЕМАХ С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ S^1

С.А.Довбыш

sdovbysh@yandex.ru

УДК 517.913, 517.938

Во многих известных задачах механики имеются циклические переменные; наличие такой переменной равносильно существованию однопараметрической группы симметрий. Между тем, обычно рассматривают динамику не исходной системы, а соответствующей приведённой системы, получаемой редукцией по группе симметрий (исключением циклической переменной). Получены простые условия, при выполнении которых квазислучайным движениям приведённой системы соответствуют движения с аналогичными свойствами в исходной системе с группой симметрий S^1, что гарантирует неинтегрируемость последней.

Ключевые слова: первый интеграл, неинтегрируемость, квазислучайные движения, приведённая система

Довбыш Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э.Баумана (Москва, Россия); Sergei Dovbysh (Lomonosov Moscow State University and Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Quasi-random motions and non-integrability in systems with symmetry group S^1

In many mechanical problems there are cyclic variables. The presence of such a variable is equivalent to the existence of a one-parameter symmetry group. However, one usually considers dynamics in a corresponding reduced system obtained by reduction over the symmetry group (elimination of the cyclic variable), rather than that in the original system. Simple conditions are obtained, under which to quasi-random motions of a reduced system there correspond motions in a original system with symmetry group S^1, which guarantees the non-integrability of the latter.

Keywords: first integral, non-integrability, quasi-random motions, reduced system

Во многих известных задачах механики имеются циклические переменные. Однако, обычно рассматривают динамику не исходной системы, а соответствующей приведённой (или пониженной) системы, получаемой редукцией по группе симметрий. В частности, все результаты о неинтегрируемости (т.е. отсутствии непостоянного аналитического первого интеграла) относились именно к приведённым, а не исходным динамическим системам. Кажется естественным предположить, что из неинтегрируемости приведённой системы следует неинтегрируемость исходной. Целью работы доказательство результатов такого сорта при определённых предположениях.

Используется подход, в котором неинтегрируемость приведённой системы оказывается следствием наличия инвариантного гиперболического множества *квазислучайных* движений, описываемого методами символической динамики [1]. При этом мы ограничиваемся рассмотрением классического случая, когда пониженная система — гамильтонова с двумя степенями свободы. Этот случай охватывает многие задачи механики и здесь возникают следующие хорошо известные ситуации, когда присутствие трансверсально пересекающихся сепаратрис гиперболических периодических решений и/или гиперболических положений равновесия влечёт наличие в фазовом пространстве системы инвариантного множества квазислучайных движений и неинтегрируемость:

1) случай гиперболических периодических решений (В.М.Алексеев [1] — результат в наиболее общем виде)

2) случай положения равновесия типа седло-фокус (Р.Деваней [2])

3) случай положения равновесия типа седло-седло (Д.В.Тураев и Л.П.Шильников [3]; требуется наличие хотя бы двух гомоклинических траекторий и выполнение некоторых дополнительных условий на их расположение).

Пусть исходная система имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = Z(z), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \Psi(z), \tag{1}$$

где $\psi\,(\mathrm{mod}2\pi)$ — угловая (циклическая) переменная, а её приведённая система

$$\frac{dz}{dt} = Z(z), \tag{2}$$

полученная редукцией по ψ, является автономной гамильтоновой с гамильтонианом $H(z)$ и двумя степенями свободы, где z — фазовые переменные. Под неинтегрируемостью понимается отсутствие дополнительного (независимого с интегралом энергии приведённой системы) аналитического первого интеграла.

Пусть в системе (2) имеется инвариантное множество квазислучайных движений M. Тогда система (1) имеет инвариантное множество $\widetilde{M} = M \times S^1 = \{(z,\psi) : z \in M\}$, лежащее "над" M. Целью является получение простых конструктивно проверяемых условий, при которых множество $\widetilde{M}$ обладает следующим свойством: для любых окрестностей любых двух точек из $\widetilde{M}$ имеется траектория в $\widetilde{M}$, пересекающая обе эти окрестности. При наличии сформулированного свойства динамика на $\widetilde{M}$ оказывается аналогична динамике на M, хотя $\widetilde{M}$ не гиперболично (система нейтральна в направлении циклической координаты). Это позволяет непосредственно перенести на случай исходной системы известные аргументы, используемые для доказательства неинтегрируемости приведённой системы. Таким образом, обсуждаемое свойство гарантирует искомый результат, что система (1) не имеет аналитического первого интеграла, независимого с интегралом энергии приведённой системы (2).

Результаты формулируются отдельно для трёх упомянутых выше случаев, когда приведённая система имеет гиперболическое периодическое решение, либо неподвижную точку типа седло-фокус, либо неподвижную точку типа седло-седло.

1. Пусть приведённая система (2) имеет гиперболическое периодическое решение Γ. Тогда эта система сводится вблизи Γ на фиксированном уровне энергии к гамильтоновой системе с одной степенью свободы, периодически зависящей от нового "времени" $\varphi\,(\mathrm{mod} 2\pi)$. В некоторых канонически сопряжённых переменных ξ, η гамильтониан последней системы принимает вид $G(\xi,\eta) = \lambda\xi\eta + O_4$ (здесь O_k всюду означает члены порядков k и выше), а решение Γ задаётся уравнениями $\xi = 0, \eta = 0$. Пусть уравнение для ψ в новых переменных принимает вид $d\psi/d\varphi = F(\xi,\eta,\varphi)$.

Теорема 1. *Пусть сепаратрисы периодического решения* Γ *трансверсально пересекаются, следовательно, имеется инвариантное множество* M*. Если в разложении функции* $\int\limits_0^{2\pi} F(\xi,\eta,\varphi)\,d\varphi$ *по степеням* ξ,η *квадратичный член* $\xi\eta$ *имеет ненулевой коэффициент, то множество* $\widetilde{M}$ *обладает сформулированным выше свойством.*

2. Пусть приведённая система (2) имеет положение равновесия O типа седло-фокус, т.е. с комплексными ляпуновскими показателями $\alpha \pm i\beta, -\alpha \pm i\beta$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Тогда в некоторых канонически сопряжённых переменных x_1, y_1, x_2, y_2 гамильтониан принимает вид $H(z) = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2) + \beta(x_1y_2 - x_2y_1) + O_4$.

Теорема 2. *Пусть сепаратрисы положение равновесия* O *трансверсально пересекаются, следовательно, имеется инвариантное множество* M*. Если в разложении функции* $\Psi(z)$ *по степеням* x_1, y_1, x_2, y_2 *квадратичные члены, линейные по паре переменных* x_1, x_2 *и по паре пере-*

менных y_1, y_2, имеют вид $a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$, причём $\beta(a_{11}+a_{22})+\alpha(a_{21}-a_{12}) \neq 0$, то множество $\widetilde{M}$ обладает сформулированным выше свойством.

3. Пусть приведённая система (2) имеет положение равновесия O типа седло-седло, т.е. с действительными ляпуновскими показателями $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$, где $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Тогда в некоторых канонически сопряжённых переменных x_1, y_1, x_2, y_2 гамильтониан принимает вид $H(z) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + O_3$. Если числа λ_1, λ_2 близки так, что $\lambda_1^2 < \lambda_2$, то можно добиться, чтобы сепаратрисы задавались условиями $x_1 = x_2 = 0$ и $y_1 = y_2 = 0$, а система на них принимала линейный вид.

Теорема 3. *Пусть сепаратрисы положение равновесия O трансверсально пересекаются, причём гомоклинические траектории входят обоими концами в O, касаясь ведущих направлений (т.е. осей координат x_2, y_2, соответственно) и выполнены условия (Д.В.Тураев и Л.П.Шильников), гарантирующие, что приведённая система имеет инвариантное множество M квазислучайных движений. Пусть λ_1, λ_2 близки, а гомоклинические траектории на каждой из сепаратрис не лежат на неведущей линии $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$, соответственно. Если $\lambda_2 a_{11} - \lambda_1 a_{22} \neq 0$, где a_{11}, a_{22} — описанные в Теореме 2 коэффициенты в разложении $\Psi(z)$, то множество $\widetilde{M}$ обладает сформулированным выше свойством.*

Литература

1. *Алексеев В.М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // Успехи матем. наук, **36**:4 (1981), 161-176.

2. *Devaney R.L.* Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // J. Diff. Equat., **21** (1976), 431-438.

3. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* О гамильтоновых системах с гомоклиническими кривыми седла // Докл. АН СССР, **304**:4 (1989), 811-814.

О ВЫЧИСЛЕНИИ СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ ДЛЯ ЭКСПЛУАТИРУЕМОЙ ПОПУЛЯЦИИ

А.В. Егорова

nastik.e@bk.ru

УДК 517.929

Рассматриваются модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные системой разностных уравнений. Ставится задача оптимального сбора ресурса на бесконечном промежутке времени при различных ограничениях на условия промысла. Исследуется средняя временная выгода от извлечения ресурса и описывается стратегия промысла, которая является оптимальной среди других способов эксплуатации популяции.

Ключевые слова: модель популяции, подверженной промыслу, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация

Егорова Анастасия Владимировна, магистрант, Владимирский государственный университет (ВлГУ) (Владимир, Россия); Anastasia Egorova (Vladimir State University, Vladimir, Russia)

On calculation of the average time profit for exploited population

We consider models of dynamics of exploited population, given by the system of difference equations. The problem of optimal harvesting of renewable resource at an infinite time interval is put under various restrictions on extraction conditions. We investigate the average time profit from resource extracting and describe a harvesting strategy that is optimal among other methods of exploitation of the population.

Keywords: model of the population subject to harvesting, average time profit, optimal exploitation

На протяжении многих лет остается актуальной проблема рационального использования природных ресурсов. В последние годы множество работ посвящено исследованию режимов динамики структурированной популяции и максимизации дохода от промыслового воздействия на нее (см. [1] и обзор литературы в [2]). Так, в [3] аналитически показано, что для некоторых двухвозрастных популяций оптимальным является изъятие фиксированной доли от численности особей только одной из возрастных групп, а при одновременной эксплуатации обоих возрастов максимум дохода не достигается. Наряду с этим проводятся исследования дохода от извлечения ресурса для дифференциальных уравнений и систем, зависящих от случайных параметров [4]. Современное состояние работ по вопросам оптимальной добычи ресурса для различных моделей эксплуатируемых популяций более подробно описано в [1].

Предположим, что исследуемая неоднородная популяция разделена на $n \geqslant 2$ возрастных классов. Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$ количество ресурса каждого из класса в момент $k = 0, 1, 2, \ldots$. Введем множество $U \doteq \bigl\{\overline{u} : \overline{u} = \bigl(u(0), u(1), \ldots, u(k), \ldots\bigr)\bigr\}$, где $u(k) = \bigl(u_1(k), \ldots, u_n(k)\bigr) \in [0,1]^n$ и рассмотрим последовательность $\overline{u} \in U$ как управление для достижения лучшего результата сбора. Тогда модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$x(k+1) = F\bigl((1-u(k))x(k)\bigr), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x(k) = \bigl(x_1(k), \ldots, x_n(k)\bigr) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+ \doteq \bigl\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\bigr\}$, $(1-u_i(k))x_i(k)$ — количество ресурса i-го вида, оставшееся после сбора в момент k, $F(x) = \bigl(f_1(x), \ldots, f_n(x)\bigr)$, $f_i(x)$ — вещественные неотрицательные функции, заданные для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ такие, что $f_i(0) = 0$, $f_i \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$ и матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ является невырожденной для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Пусть $C_i \geqslant 0$ — стоимости единицы ресурса каждого из классов, тогда стоимость всей добываемой продукции в момент k равна

$$z(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k) u_i(k).$$

Для любых $\overline{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ определим *среднюю временную выгоду* от извлечения ресурса (см. [4])

$$H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j)\,. \qquad (1)$$

Основная задача данной работы заключается в построении такого способа эксплуатации популяции, при котором значение функции (1) максимальное.

Стационарным режимом эксплуатации популяции называется такой способ добычи ресурса, при котором $u(k) = u^0 = (u^0_1, \ldots, u^0_n) \in [0,1]^n$.

Вначале рассмотрим однородную популяцию, заданную моделью

$$x(k+1) = f\bigl((1-u(k))x(k)\bigr), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}_+$ — количество ресурса до сбора в момент k, $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ — вещественная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Без ограничения общности можем полагать $C_1 = 1$, поэтому из (1) следует, что средняя временная выгода равна

$$H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} x(j)u(j).$$

Утверждение 1. *Пусть $d(x) \doteq f(x) - x$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* > 0$. Тогда для любого $x(0)$ из некоторой окрестности точки $f(x^*)$ максимальное значение функции $H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$ равно $H\bigl(\overline{u}^*, x(0)\bigr) = f(x^*) - x^*$ и достигается при стационарном режиме эксплуатации $u^*(k) = 1 - \dfrac{x^*}{f(x^*)}$, $k = 0, 1, \ldots$.*

Пример 1. Предположим, что модель однородной эксплуатируемой популяции задана уравнением

$$x(k+1) = 4\cdot(1-u(k))x(k)\cdot(1-(1-u(k))x(k)), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Функция $d(x) = 4x(1-x) - x$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* = 0.375$. Согласно утверждению 1, максимальное значение функции $H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$ достигается при стационарном режиме эксплуатации и равно $f(x^*) - x^*$. Несложно посчитать, что для всех $x(0) \in (0,1)$ выполнены равенства

$$u^* = 1 - \frac{x^*}{f(x^*)} = 0.6 \quad \text{и} \quad H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) = f(x^*) - x^* = 0.5625.$$

Теорема 1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *функция $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\bigl(f_i(x) - x_i\bigr)$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ и $x^*_i < f_i(x^*) \neq 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$;*

2) *точка* $F(x^*)$ *является устойчивым положением равновесия системы* $x(k+1) = F\big((1-u^0)x(k)\big)$, $k \geqslant 0$ *при*

$$u^0 = u^* = \left(1 - \frac{x_1^*}{f_1(x^*)}, \ldots, 1 - \frac{x_n^*}{f_n(x^*)}\right).$$

Тогда для любого $x(0)$ *из некоторой окрестности точки* $F(x^*)$ *функция* $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает максимального значения*

$$H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = D(x^*) = \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) - x_i^*\big)$$

при стационарном режиме эксплуатации $\overline{u}^* = (u^*, \ldots, u^*, \ldots)$.

Пример 2. Пусть динамика двухвозрастной популяции описана системой

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 4\big(1-u_1\big)x_1(k) + \big(1-u_1\big)x_1(k)\big(1-u_2\big)x_2(k) - 2(1-u_1)^2x_1^2(k), \\ x_2(k+1) = 4\big(1-u_2\big)x_2(k) + \frac{1}{4}\big(1-u_1\big)x_1(k)\big(1-u_2\big)x_2(k) - 3(1-u_2)^2x_2^2(k), \end{cases}$$

где $x_1(k)$ — численность младшего возрастного класса в момент k, $x_2(k)$ — численность старшего возрастного класса, в момент времени k, k — номер периода размножения, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $u_1 = u_1(k)$, $u_2 = u_2(k)$ — доли ежегодного промыслового изъятия для младшего и старшего возрастного класса соответственно.

Опишем оптимальный режим эксплуатации. Пусть $C_1 = 3$, $C_2 = 2$, тогда функция

$$D(x_1, x_2) = 9x_1 + 6x_2 + \frac{7}{2}x_1x_2 - 6x_1^2 - 6x_2^2$$

достигает максимального значения в точке $(x_1^*, x_2^*) \approx (0.9791, 0.7856)$.

Согласно теореме 1, максимальное значение функции $H(\overline{u}, x(0))$ достигается при стационарном режиме эксплуатации. Здесь оптимальные управления $u_1^* \approx 0.6463$, $u_2^* \approx 0.4704$ и максимальная средняя временная выгода $H\big(\bar{u}^*, x(0)\big) = D(x_1^*, x_2^*) \approx 6.7628$.

Литература

1. *Абакумов А.И., Израильский Ю.Г.* Эффекты промыслового воздействия на рыбную популяцию // Математическое моделирование, **11**:2 (2016), 191–204.

2. *Неверова Г.П., Абакумов А.И., Фрисман Е.Я.* Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования // Математическая биология и биоинформатика, **11**:1 (2016), 1–13.

3. *Жданова О.Л., Фрисман Е.Я.* Модельный анализ последствий оптимального промысла для эволюции двухвозрастной популяции // Информатика и системы управления, **40**:2 (2014), 12–21.

4. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, **28**:1 (2018), 48–58.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Н.В. Зайцева

n.v.zaiceva@yandex.ru

УДК 517.95

Для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области исследованы начально-граничные задачи в зависимости от числового параметра, входящего в уравнение. Решения построены в виде рядов Фурье-Бесселя. Единственность решений задач проводится методом интегральных тождеств. Доказаны теоремы существования и устойчивости решений поставленных задач.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, сингулярный коэффициент, начально-граничная задача, ряд Фурье-Бесселя, равномерная сходимость.

Initial-boundary value problems for hyperbolic equation with singular coefficient

We research initial-boundary value problems in a rectangular domain for the hyperbolic equation with a singular coefficient. The solutions are obtained in the forms of the Fourier-Bessel series. The uniqueness of solutions of the problems are established by means of the method of integral identities. The existence and stability theorems for the solutions of the problems are proved.

Keywords: hyperbolic equation, singular coefficient, initial-boundary value problem, Fourier-Bessel series, uniform convergence.

Теория краевых задач для вырождающихся уравнений является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных, что обусловлено использованием данного класса уравнений в многочисленных приложениях к задачам газовой динамики и акустики, теории струй в гидродинамике, механике, теории упругости и пластичности. Первая граничная задача для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа с переменными коэффициентами впервые изучена в работе [1]. Особое место в данной теории занимают исследования уравнений, содержащих дифференциальный оператор Бесселя, изучение которых было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу. Обширное исследование уравнений трех основных классов с оператором Бесселя представлено в работах [2–5].

Рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l, 0 < t < T\}$ координатной плоскости Oxt, $l, T > 0$ – заданные действительные числа, гиперболическое уравнение

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \frac{k}{x} u_x = 0, \tag{1}$$

Зайцева Наталья Владимировна, старший преподаватель, Казанский федеральный университет (Казань, Россия); Natalya Zaitseva (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

где $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{k}{x}\dfrac{\partial}{\partial x} = x^{-k}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right)$ – оператор Бесселя, $k \neq 0$ – заданное действительное число.

В данной работе исследованы первая и вторая начально-граничные задачи для гиперболического уравнения (1) в прямоугольной области D при всех $k \neq 0$.

Постановка первой начально-граничной задачи. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D), \quad x^k u_x(x,t) \in C(\overline{D}), \tag{2}$$

$$\square_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k < 1,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(l) = \psi(l) = 0$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ при $k < 1$.

Постановка второй начально-граничной задачи. *Найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет (2)–(4) и условиям:*

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\lim_{x \to 0+} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad |k| < 1,$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k \leqslant -1,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi'(l) = \psi'(l) = 0$.

Методом интегральных тождеств доказаны теоремы единственности решений поставленных задач. Для доказательства существования решения задачи используются оценки коэффициентов ряда и системы собственных функций, которые установлены на основании асимптотических формул для функции Бесселя и нулей этой функции. Получены достаточные условия относительно начальных условий, которые гарантируют сходимость построенного ряда в классе регулярных решений [6, 7]. Для каждой из задач доказана

Теорема. *Для решения задачи справедлива оценка $||u|| \leqslant C(||\varphi|| + ||\psi||)$, где постоянная C не зависит от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.*

Литература

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР, **77**:2 (1951), 181-183.

2. *Carroll R.W., Showalter R.E.* Singular and degenerate Cauchy problems. — New York: Academic Press, 1976.

3. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — Москва: Наука. Физматлит, 1997.

4. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Современная математика. Фундаментальные направления, **52** (2014), 3-141.

5. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления, **64**:2 (2018), 211-426.

6. *Zaitseva N.V.* First initial-boundary value problem for B-hyperbolic equation // Lobachevskii Journal of Mathematics, **40**:2 (2019), 240-247.

7. *Сабитов К.Б., Зайцева Н.В.* Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика, (2019), [в печати].

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Г.А. Закирова

zakirovaga@susu.ru

УДК 517.518

Разработан численный метод решения обратных спектральных задач для дискретных полуограниченных операторов. В тезисах показано применение этого метода для решения модельных краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов четвертого порядка. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: спектральная теория, теория возмущений, обратная задача, оператор высокого порядка

Inverse spectral problem for a fourth order differential operator

A numerical method for solving inverse spectral problems for discrete semi-bounded operators is developed. The theses show the application of this method to the solution of model boundary value problems for ordinary differential operators of the fourth order. The results of computational experiments are presented.

Keywords: spectral theory, perturbation theory, inverse problem, high order operator

На основе [1]–[3] в работах [4]–[6] разработан численный метод решения обратных спектральных задач, позволяющий решать обратные задачи для дискретных полуограниченных операторов. При этом удалось построить алгоритмы, которые можно с малыми корректировками перенести на задачи с необходимым порядком, видом дифференциальных операторов и граничных условий.

Закирова Галия Амрулловна, к.ф.-м.н., доцент, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Galiya Zakirova (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

Покажем применение данного метода на примере модельных краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов четвертого порядка. Рассмотрим спектральную задачу

$$Lu = \mu u, \tag{1}$$

$$Gu|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

для дискретного полуограниченного оператора L, заданного в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D_L \subset H$, Γ – граница области D_L.

Теорема 1.[4] *Пусть L – дискретный полуограниченный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом H и удовлетворяет заданным для оператора L однородным граничным условиям. Тогда приближенные собственные значения $\widetilde{\mu}_n$ оператора L находятся по формулам*

$$\widetilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \delta_n, \quad n \in N, \tag{3}$$

где $\delta_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\mu}_k(n-1) - \widetilde{\mu}_k(n)]$.

Воспользовавшись теоремой 1, найдем

$$\int\limits_0^1 \Big[p_0(s)\varphi_n^{(4)}(s) + p_1(s)\varphi_n'''(s) + p_2(s)\varphi_n(s)'' + p_3(s)\varphi_n(s)' + \\ + p_4(s)\varphi_n(s)\Big]\varphi_n(s)ds = \widetilde{\mu}_n^{\delta}, \quad \widetilde{\mu}_n^{\delta} = \widetilde{\mu}_n(n) - \delta_n. \ \ n \in N$$

Запишем полученное уравнение в матричном виде

$$A\widehat{P} \equiv \int\limits_a^b \widehat{K}(x,s)\widehat{P}(s)ds = \widetilde{f}(x), \ c \leqslant x \leqslant d, \tag{4}$$

где A – оператор Фредгольма,
$\widehat{K}(x_k,s) = \Big(K_0(x_k,s) \ \ K_1(x_k,s) \ \ K_2(x_k,s) \ \ K_3(x_k,s) \ \ K_4(x_k,s)\Big)$, $K_j(x_n,s) = \varphi_n^{(4-j)}(s)\varphi_n(s)$, $\widehat{P}(s) = \begin{pmatrix} p_0(s) \\ p_1(s) \\ p_2(s) \\ p_3(s) \\ p_4(s) \end{pmatrix}$, $x_k \in [c,d]$, $\widetilde{f}(x_n) = \widetilde{\mu}_n^{\delta}$, $[c,d]$ – отрезок содержащий необходимое количество приближенных собственных значений спектральной задачи (1)–(2).

Допустим, что ядро $\widehat{K}(x,s)$ интегрального уравнения (4) непрерывно и замкнуто в квадрате $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, функции $\widetilde{f}(x) \in L_2[c,d]$, $p_j(s) \in W_2^n[a,b]$, $j = \overline{0,4}$, $n = \max(r_1, r_2, t_1, t_2)$. Точные значения правой части интегрального уравнения (4) $f(x)$ неизвестны. Известны только ее приближенные значения $\widetilde{f}(x_k)$ такие, что $||f - \widetilde{f}||_{L_2[c,d]} < \delta$. Для численного решения данной задачи используется регуляризация Тихонова.

В качестве иллюстрации рассмотрим спектральную задачу.

$$\begin{gathered} u^{(4)}+p_4(s)u=\mu u, \quad 0<s<1, \\ u(0)=u'(0)=0, \\ u(1)=u'(1)=0. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $u \in W_2^4(a,b)$, $p_4(s)$ - гладкая функция. За систему координатных функций $\{\varphi_k(s)\}_{k=1}^n$ в методе Галеркина возьмем собственные функции спектральной задачи

$$\begin{gathered} \varphi^{(4)}=\lambda\varphi, \\ \varphi(0)=\varphi'(0)=0, \\ \varphi(1)=\varphi'(1)=0, \end{gathered} \tag{6}$$

вид которых известен. Собственные значения спектральной задачи (5)–(6) вычисляются по формулам $\lambda_k=q_k^4, \quad k=\overline{1,\infty}$. В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента по нахождению значений потенциала p_{4n}^{α} в узловых точках дискретизации при следующих значениях параметров: $N_s=17$ - число узлов дискретизации, $c=504,3358$, $d=9135911,1596$, $p_4(s)=s^2+3s+2$. Через p_{2n}^{α} обозначены значения псевдорешения p_2^{α} в узлах дискретизации. Величины ζ_n определяет поточечную абсолютною погрешность полученного псевдорешения p_4^{α} и определяются по формулам $\zeta_n=\left|f(x_n)-\int\limits_a^b K_4(x_n,s)p_4^{\alpha}(s)ds\right|, \quad n=\overline{1,N_s}$.

Таблица 1

n	s_n	$p_4(s_n)$	p_{4n}^{α}	$\lvert p_4(s_n)-p_{4n}^{\alpha}\rvert$	ζ_n
1	0,0000	2,0000	3,7353	1,7353	$1,6703\cdot10^{-1}$
2	0,0625	2,1914	3,7778	1,5864	$1,0987\cdot10^{-2}$
3	0,1250	2,3906	3,7499	1,3593	$5,9071\cdot10^{-3}$
4	0,1875	2,5977	3,7100	1,1123	$5,4734\cdot10^{-3}$
5	0,2500	2,8125	3,7060	0,8935	$3,8745\cdot10^{-3}$
6	0,3125	3,0352	3,7834	0,7482	$2,6786\cdot10^{-3}$
7	0,3750	3,2656	3,9236	0,6580	$1,8679\cdot10^{-3}$
8	0,4375	3,5039	4,0571	0,5532	$1,3017\cdot10^{-3}$
9	0,5000	3,7500	4,1115	0,3615	$8,8254\cdot10^{-4}$
10	0,5625	4,0039	4,0571	0,0532	$5,5436\cdot10^{-4}$
11	0,6250	4,2656	3,9236	0,3420	$2,8582\cdot10^{-4}$
12	0,6875	4,5352	3,7834	0,7518	$5,8948\cdot10^{-5}$
13	0,7500	4,8125	3,7060	1,1065	$1,3703\cdot10^{-4}$
14	0,8125	5,0977	3,7100	1,3877	$3,0895\cdot10^{-4}$
15	0,8750	5,3906	3,7499	1,6407	$4,6141\cdot10^{-4}$
16	0,9375	5,6914	3,7778	1,9136	$5,9765\cdot10^{-4}$
17	1,0000	6,0000	3,7353	2,2647	$7,2014\cdot10^{-4}$

Проведенные многочисленные вычислительные эксперименты по восстановлению операторов Штурма-Лиувилля четвертого порядков по известным их собственным значениям, принадлежащих некоторым отрезкам, показали высокую вычислительную эффективность разработанного численного метода решения обратных спектральных задач порожденных дискретными полуограниченными операторами.

Литература

1. *Садовничий В.В, Дубровский В.В., КадченкоС.И., Кравченко В.Ф.* Вычисление собственных чисел задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при небольших числах Рейнольдса // Доклады Академии наук. 1998. Т. 363. № 6. - С. 748.

2. *Кадченко С.И.* Метод регуляризованных следов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование 2009. N 37 (170). - С. 4 – 23.

3. *Кадченко С.И., Какушкин С.Н* Численный метод нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенными самосопряженными операторами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование 2012. N 27 (286). - С. 45 - 57.

4. *Кадченко С.И.*Численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия - 2013. - N 9-1(100). - С. 5 - 11.

5. *Кадченко С.И.* Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование 2013. - Т. 6, N 4. - С. 15 - 25.

6. *Kadchenko S.I., Zakirova G.A.* A numerical method for inverse spectral problems // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8. N 3. С. 116-126.

О КОЭРЦИТИВНОСТИ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.П. Иванова

elpaliv@yandex.ru

УДК 517.9

Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с возмущениями в сдвигах аргументов. Получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга в алгебраическом виде. Исследована непрерывная зависимость решений этих задач от сдвигов аргументов.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, краевые задачи, сильная эллиптичность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17–01–00401).

Иванова Елена Павловна, к.ф.-м.н., доцент, Московский авиационный институт (МАИ), Российский университет дружбы народов (РУДН) (Москва, Россия); Elena Ivanova (Moscow Aviation Institute, RUDN University, Moscow, Russia)

On coercivity of perturb differential-difference equations

Boundary value problems for differential-difference equations with perturbations in the shifts of the arguments are considered. The algebraic criterion of fulfillment of the Garding-type inequality was established. We investigated continuous dependence of solutions of these boundary-value problems on the shifts of arguments.

Keywords: differential-difference equations, boundary-value problems, strong ellipticity

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$Au=-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ij\varepsilon}u_{x_j})_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(Ru_{x_i})_{x_i}=f(x)\quad(x\in Q),\tag{1}$$

$$u(x)=0\quad(x\notin Q)\,,\tag{2}$$

где $Q-$ ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей, $f\in L_2(Q)$.

Разностные операторы $R_{ij\varepsilon},R:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$R_{ij\varepsilon}u(x)=a_{ij0}u(x)+\sum_{k=1}^{J}a_{ijk}(u(x_1+k\varepsilon,x_2,...,x_n)+u(x_1-k\varepsilon,x_2,...,x_n))$$

$$Ru(x)=b_0u(x)+\sum_{h\in M\setminus 0}b_h(u(x+h)+u(x-h)).$$

Здесь $a_{ijk},b_h\in\mathbb{R},a_{ijk}=a_{jik}$; $M-$ множество векторов с целочисленными координатами, $\varepsilon>0-$ малый параметр (далее $\varepsilon\to 0$). Решение u задачи (1)-(2) ищется в пространстве Соболева $\mathring{H}^1(Q)$ и определяется стандартным образом.

Теория краевых задач для эллиптических дифференциально - разностных уравнений с целочисленными сдвигами аргументов в старших членах построена в работах А.Л. Скубачевского [1],[2].

Назовем уравнение (1) сильно эллиптическим, если выполнено неравенство типа Гординга:

$$\mathrm{Re}\,(Au,u)_{L_2(Q)}\geqslant c_1\|u\|^2{}_{H^1(Q)}\quad(\forall u\in C_0^\infty(\Omega),\ c_1>0).$$

Получим условия равномерной (по $\varepsilon>0$) сильной эллиптичности уравнений (1). Вопрос о непрерывной зависимости константы эллиптичности и решений функционально-дифференциальных уравнений от параметра ε при $\varepsilon\to 0$ впервые рассматривался в [3]. Краевые задачи для возмущенных дифференциально-разностных уравнений в одномерном случае исследованы в [4].

Обозначим $a_R(\eta,\xi)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij0}+2\sum\limits_{k=1}^{J}a_{ijk}\cos(k\eta))\xi_i\xi_j\quad(\eta\in\mathbb{R},\xi\in\mathbb{R}^n)$ $a_{\min}:=\inf\limits_{\eta,\xi}\mathrm{Re}\ a_R(\eta,\xi)$ $(\eta\in\mathbb{R},|\xi|=1)$. Введем операторы $R^C:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^Cu(x)=a_{\min}u(x)+Ru(x)$, $R^C_Q=P_QR^CI_Q:L_2(Q)\to L_2(Q)$, где

$I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$– оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$– оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Теорема 1. *Уравнение (1) является сильно эллиптическим в $\bar{Q}$ для любого значения параметра $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда контрольный оператор R_Q^C является положительно определенным.*

Обозначим $a_{ij}^{\lim} = a_{ij0} + 2\sum\limits_{k=1}^{J} a_{ijk}$ и рассмотрим предельную задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}^{\lim} u_{x_j}\right)_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} (Ru_{x_i})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{3}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q). \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ и любом фиксированном значении параметра $\varepsilon > 0$ задача (1)-(2) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in \mathring{H}^1(Q)$. При этом $\|u_\varepsilon - u_{\lim}\|_{\mathring{H}^1(Q)} \to 0,\ \varepsilon \to 0$, где $u_{\lim} \in \mathring{H}^1(Q)$– решение задачи (3),(4).*

Литература

1. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel – Boston – Berlin: Birkhauser, 1997.

2. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально - разностных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук, **71**:5 (2016), 3-112.

3. *Rossovskii L.E.* Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function // J. of Mathematical Sciences, **223**:4 (2017), 351–493.

4. *Ivanova E.P.* Continuouse dependence on translations of the independent variables for solutions of boundary-value problems for differential-difference equations // Journal of Mathematical Sciences, **233**:6 (2018), 828-852.

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ

М.Ю. Игнатьев

ignatievmu@info.sgu.ru

УДК 517.984

Изучается задача рассеяния на полуоси для систем дифференциальных уравнений, имеющих регулярную особую точку в нуле. Устанавливаются существование, единственность и некоторые свойства решений типа Вейля, играющих ключевую роль при исследовании прямых и обратных спектральных задач.

Ключевые слова: задачи рассеяния, системы дифференциальных уравнений, особенность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-04864, 16-01-00015, 17-51-53180) и Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6).

Игнатьев Михаил Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия); Mikhail Ignatiev (Chernyshevsky Saratov State University, Saratov, Russia)

On scattering problem for the systems of differential equations with a singularity

The scattering problem on the semi-axis for the systems of the differential equations with a regular singularity at the origin is studied. We establish the existence, the uniqueness and some properties of the Weyl-type solutions which play an important role in investigation of direct and inverse spectral problems.

Keywords: scattering problems, systems of differential equations, singularity

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$y' = \rho By + x^{-1}Ay + q(x)y, \; x \in (0, \infty) \tag{1}$$

со спектральным параметром ρ, где $A, B, q(x)$ – $n \times n$ - матрицы, $n > 2$, A, B постоянны, $q_{jk}(\cdot) \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$, $p > 2$. В дальнейшем через X_p будем обозначать множество внедиагональных матриц-функций с элементами из $L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$.

Будем считать, что $B = diag(b_1, \dots, b_n)$, $q_{jj}(x) \equiv 0$, $a_{jj} = 0$, $b_1, \dots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, не лежащие на одной прямой и такие, что $\sum_{k=1}^{n} b_k = 0$. Пусть, кроме того, собственные значения $\mu_1, \dots, \mu_n$ матрицы A таковы, что $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, $\mathrm{Re}\mu_j \neq 0$ и $\mathrm{Re}\mu_1 < \mathrm{Re}\mu_2 < \dots < \mathrm{Re}\mu_n$.

Определение. Обозначим через $R_1, \dots, R_n$ перестановку чисел $b_1, \dots, b_n$ такую, что $\mathrm{Re}\,\rho R_1 < \mathrm{Re}\,\rho R_2 < \dots < \mathrm{Re}\,\rho R_n$, через $f_1, \dots, f_n$ – соответствующую перестановку векторов $e_1, \dots, e_n$ стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$. k-м решением типа Вейля назовём решение $\psi_k(q, x, \rho)$ системы (1), удовлетворяющее условиям:

$$\psi_k(q, x, \rho) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0, \; \psi_k(q, x, \rho) = \exp(\rho x R_k)(f_k + o(1)), x \to \infty.$$

Обозначим

$$\Sigma := \bigcup_{(k,j): j \neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

Пусть S - некоторый сектор с вершиной в начале координат, лежащий в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, и пусть $c(z) = (c_1(z), \dots, c_n(z))$ и $e(z) = (e_1(z), \dots, e_n(z))$ фундаментальные матрицы невозмущенной системы

$$\frac{dy}{dz} = By + z^{-1}Ay, \; z \in S,$$

такие что

$$e_k(z) = \exp(zR_k)(f_k + o(1)), \; z \to \infty, \quad c_k(z) = z^{\mu_k}(h_k + o(1)), \; z \to 0,$$

где h_k - собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению μ_k. Будем говорить, что в секторе S выполнено *условие информативности*, если для каждого $k = \overline{2, n}$ $\det(e_1(z), \dots, e_{k-1}(z), c_k(z), \dots, c_n(z)) \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть в секторе S выполнено условие информативности. Тогда для каждого $k = \overline{1,n}$ k-е решение типа Вейля существует и единственно при всех $\rho \in S$, за исключением, быть может, некоторого не более чем счётного множества. Если $q = 0$, то решение типа Вейля существует и единственно при всех $\rho \in S$.*

Определим функции:

$$W_0(\xi) := (1 - |\xi|)\xi + |\xi|^2, \ |\xi| \leqslant 1, \ W_0(\xi) := (W_0\left(\xi^{-1}\right))^{-1}, \ |\xi| > 1,$$

$$W_k(\xi) := W_0\left(\xi^{\mu_k}\right)\exp(R_k\xi), \ |\xi| \leqslant 1, \quad W_k(\xi) := \exp(R_k\xi), \ |\xi| > 1,$$

$k = \overline{1,n}$. Через $W(\xi)$ обозначим матрицу

$$W(\xi) := diag(W_1(\xi), \ldots, W_n(\xi)).$$

Условимся через $C_0(\overline{S})$ обозначать пространство функций, непрерывных по $\rho \in \overline{S}$ и стремящихся к 0 при $\rho \to \infty$. Аналогично, через $C_0(l)$, где l - некоторый луч вида $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{S} \setminus \{0\}$ будем обозначать пространство функций, непрерывных на l и стремящихся к 0 при $\rho \to \infty$. Через $H(l)$ обозначим пространство $C_0(l) \cap L_2(l)$.

Составим из решений типа Вейля матрицу

$$\psi(q,x,\rho) := (\psi_1(q,x,\rho), \ldots, \psi_n(q,x,\rho)).$$

Теорема 2. *Пусть в секторе S выполнено условие информативности. Тогда справедливо представление:*

$$\psi(q,x,\rho) = W(\rho x)\psi(0,x,\rho)(W(\rho x))^{-1}\beta(q,x,\rho),$$

где

$$\beta_{jk}(q,x,\rho) = \frac{\delta_{jk} + d_{jk}(q,x,\rho)}{1 + d_k(q,x,\rho)},$$

δ_{jk} - символ Кронекера, $d_{jk}, d_k \in C(X_p, BC([0,\infty), C_0(\overline{S})))$ и для любого луча $l = \{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{S} \setminus \{0\}$ ограничения $d_{jk}|_l$, $d_k|_l$ принадлежат $C(X_p, BC([0,\infty), H(l)))$.

Полученные результаты являются обобщением результатов [3], где исследовалась система (1) с абсолютно непрерывными коэффициентами $q_{jk}(\cdot)$.

Литература

1. *Beals R., Deift P. and Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1988.

2. *Yurko V.A.* On higher-order differential operators with a singular point // Inverse Problems, **9** (1993), 495—502.

3. *Ignatyev M.* Spectral analysis for differential systems with a singularity // Results in Mathematics, **71** (2017), 1531–1555.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МАЯТНИКОВОГО ТИПА

Е.В. Игонина
elenaigonina7@mail.ru

УДК 517.91

Исследована устойчивость системы управления обратным маятником, описываемой моделью Такаги–Сугено, с помощью метода функций Ляпунова и построения логического регулятора.

Ключевые слова: обратный маятник, логический регулятор, устойчивость, стабилизация, модель Такаги–Сугено.

On the study of the stability of the control system of the pendulum type

The stability of an inverse pendulum control system described by the Takagi-Sugeno model is investigated using the Lyapunov function method and the construction of a logic controller.

Keywords: reverse pendulum, logical controller, stability, stabilization, Takagi-Sugeno model

Изучению дифференциальных моделей маятниковых систем в настоящее время уделяется огромное внимание в связи с тем, что они используются для описания широкого класса управляемых объектов (шагающие роботы, технические средства – пожарные вертолеты с водосбросным ковшом, портальные краны, гироскутеры) и процессов (управление запуском и полетом ракет).

В работе предложен подход к исследованию устойчивости системы управления маятникового типа, основанный на аппроксимации исходной модели моделью Такаги–Сугено и построении логического регулятора, осуществляющего управление. Рассматривается дифференциальная модель, описывающая динамику обратного маятника, прикрепленного к горизонтально двигающейся тележке:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g\sin(x_1(t)) - \frac{amlx_2^2(t)\sin(2x_1(t))}{2}}{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1(t))} - \frac{a\cos(x_1(t))u(t)}{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1(t))}, \tag{1}$$

где $x_1(t)$ — угол (в радианах) отклонения маятника от вертикальной оси, $x_2(t)$ — угловая скорость, $g = 9,8$ м/c^2 — гравитационная постоянная, m — масса маятника, M — масса тележки, $2l$ — длина маятника, u — сила, прикладываемая к тележке (в Ньютонах), $a = \frac{1}{m+M}$. Задача заключается в стабилизации и удержании маятника в верхнем неустойчивом вертикальном положении за счет воздействия, оказываемого регулятором на тележку.

Игонина Елена Викторовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования и компьютерных технологий, ЕГУ имени И.А. Бунина (Елец, Россия); Elena Igonina (Bunin Yelets State University, Yelets, Russia)

С помощью процедуры аппроксимации, описанной в работе [1], система дифференциальных уравнений (1) приводится к виду модели Такаги–Сугено:

П1: Если $x_1(t)$ приблизительно равно 0, то $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$.

П2: Если $x_1(t)$ приблизительно равно

$$\pm\frac{\pi}{2}\left(|x_1| < \frac{\pi}{2}\right), \tag{2}$$

то $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$, где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2}, \end{bmatrix} \quad \beta = \cos 88^\circ.$$

Логический регулятор, полученный с помощью процедуры параллельной распределенной компенсации [2], определяется правилами вида:

П1: Если $x_1(t)$ приблизительно равно 0, то $u(t) = F_1x(t)$.

П2: Если $x_1(t)$ приблизительно равно $\pm\frac{\pi}{2}\left(|x_1| < \frac{\pi}{2}\right)$, то $u(t) = -F_2x(t)$, где F_1, F_2 — матрицы коэффициентов усиления.

Тогда общее задание логического регулятора, стабилизирующего систему, представимо в виде

$$u(t) = -h_1(x_1(t))F_1x(t) - h_2(x_1(t)F_2x(t), \tag{3}$$

где h_1 и h_2 — функции принадлежности для правил П1 и П2 соответственно, и $h_1 + h_2 = 1$. Для исследования устойчивости модели (2) с логическим регулятором (3) использованы результаты работы [2]. Построена функция Ляпунова вида:

$$V(x(t)) = h_1(x_1(t))x^T(t)P_1x(t) + h_2(x_2(t))x^T(t)P_2x(t),$$

где P_1, P_2 — положительно определенные матрицы. С помощью численного метода Лоусона [3, 4] проведено качественное исследование решений системы дифференциальных уравнений (2) с учетом (3) — (4). Для конкретных начальных условий и значений параметров системы $m = 2$ кг, $M = 8$ кг, $2l = 1$ м определены положительно определенные матрицы P_1, P_2, и матрицы F_1, F_2, обеспечивающие условие асимптотической устойчивости системы (2).

Литература

1. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man and Cyber. 1985. V. 15. P. 116–132.

2. *Abdelmalek I., Golea N., Hadjili M.* A new fuzzy Lyapunov approach to non-quadratic stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy models // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. V. 17. № 1. P. 39–51.

3. *Lawson D. J.* Generalized Runge–Kutta processes for stable systems with large Lipshitz constants // SIAM J. Numer. Anal. 1967. V. 4. № 3. P. 372–380.

4. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.* Общее описание подпрограмм решения обыкновенных дифференциальных уравнений библиотеки численного анализа

НИВЦ МГУ // Вычислительные методы и программирование. 2003. Т.4. С. 7–15.

О ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ (ПЯТОЙ) СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

М. Исмати, Н.М. Исматов

mismati@mail.ru, ismatov.n.m@ mail.ru

УДК 517.934-948

В настоящей работе устанавливается почти-периодичность обобщенного и классического решения пятой (в частности, четвертой) смешанных задач для уравнения динамики трехмерного упругого тела (уравнения Ламе).

Ключевые слова: почти периодичность, обобщенные и классические решения, смешанные задачи, уравнения Ламе

On the almost-periodicity solution of the fourth (fifth) mixed problem for the system of the Lame equations

In this paper, we establish almost periodic generalized and classical solutions of fifth (in particular, fourth) mixed problems for the equations of dynamics of a three-dimensional elastic body (the equation of Lame).

Keywords: almost-periodicity, generalized and classical solutions,mixed problems, Lame's equation

Пусть — некоторое банахово пространство (в частности, гильбертово пространство). Напомним [1] определение почти- периодичности:

Определение 1. Функция $f(t)$, непрерывная при $t \in J \equiv (-\infty, \infty)$, со значением из B называется почти-периодической (в дальнейшем сокращенно п.-п.) функцией в B, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число l_ε такое, что в любом интервале $l_\varepsilon = (a; a + l_\varepsilon)$ длины l_ε , $l_\varepsilon \in J \equiv (-\infty, \infty)$, найдется число $\tau = \tau_f(\varepsilon)$ (ε-почти период), для которого неравенство $\|f(t + \tau) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$ выполняется для всех $t \in J \equiv (-\infty, \infty)$. ($\|\cdot\|$-норма в B). С. Бохнер [2] доказал, что если множество значений $R_{f(t)}$ функции $f(t)$, $t \in J \equiv (-\infty, \infty)$ относительно компактно в B и существует постоянная $\sigma > 0$ такая, что для любого $t \in J$ имеет место неравенство

$$\inf_t \|f(t + \tau) - f(t)\| > \sigma \sup_t \|f(t + \tau) - f(t)\|, \tag{1}$$

Исмати Мухаммаджон, д.ф.-м.н, профессор, ИПС (Душанбе, Таджикистан); Muhammadjon Ismati (Institute of Enterpreneurship and Service of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Исматов Набиджон Мухаммаджонович, к.ф.-м.н, доцент, ИПС (Душанбе, Таджикистан); Nabijon Ismatov Muhammadjonovich (Institute of Enterpreneurship and Service of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

то $f(t)$-п.-п. функция в B.

Пусть теперь требуется найти решение пятой смешанной задачи для системы уравнений динамики изотропного однородного упругого тела:

$$\rho u_{tt} = \Delta^* u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_t \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega \cup S \tag{3}$$

$$[N^{(n)} + \sigma(x)]u \mid_{\Gamma_T} = 0, \tag{4}$$

Здесь φ, ψ и $f(x,t)$ — заданные вектор-функции, Ω — конечная трехмерная связная область с границей S типа Ляпунова,

$$N^{(n)} \equiv \overset{k}{T}{}^{(n)} = \left\| \overset{k}{T}{}^{(n)}_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x}, n(x) \right) \right\|_{3\times 3}$$

— оператор псевдонапряжения, в котором

$$\overset{k}{T}_{ij} = \mu(\nu+\mu) n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + k(n_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} - n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{ij}\mu \frac{\partial}{\partial n(x)},$$

$k = \mu(\nu+\mu)(\nu+3\mu)^{-1}$, $\sigma(x)$ — вещественная непрерывная положительно определенная матрица размера 3×3, заданная на S. Известно [3], что при $k = \mu$ получим оператор напряжения $T^{(n)}$ В частности, при $\sigma(x) \equiv 0$ получим четвертое краевое условие $N^{(n)} u \mid_\Gamma = 0$.

Для классического решения смешанной задачи (2)-(4) имеет место

Теорема. *Пусть начальные вектор-функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*
1) Вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывна в области Ω и обладает в этой области непрерывными производными до 3-го порядка и интегрируемыми с квадратом производными четвертого порядка. Кроме того, $[N^{(n)} + \sigma]\varphi(x)|_S = [N^{(n)} + \sigma]\Delta^*\varphi(x)|_S = 0$.
2) Вектор-функция $\psi(x)$ непрерывна в области Ω и обладает в этой области непрерывными производными до 2-го порядка и интегрируемыми с квадратом производными третьего порядка. Кроме того, $[N^{(n)} + \sigma]\psi(x)|_S = 0$.
3) Вектор-функция $f(x,t)$ непрерывна в области Q_T и для $\forall t \in [0,T]$ по x обладает в этой области непрерывными производными до 2-го порядка и интегрируемыми с квадратом производными третьего порядка и $[N^{(n)} + \sigma]f(x,t)|_\Gamma = 0$. Кроме того $f(x,t)$ функция является почти периодической по t со значением в пространстве L_2.

Тогда существует единственное почти периодическое классическое решение смешанной задачи (2)-(4).

Доказательство теоремы основывается на результатах работ [4-6].

Замечания.

1. Аналогичное утверждение при более слабых ограничениях имеет место и для обобщенного решения задачи (2)-(4).

2. Полученные результаты аналогичным образом переносятся для $N = 2$ и $N(> 3)$-мерных областей.

Литература

1. *Бор Г.* Почти-периодические функции. — ГТТИ, 1934.
2. *Bochner S., Neuman J.* // Trans. AMS. **2**:37 (1935); Ann. Math. **36**:1 (1935).
3. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. — "Наука 1963.
4. *Исматов М.* О разрешимости смешанной задачи теории упругости с граничным оператором псевдонаппряжения // Тез. докл. Респуб. науч.-практ. конф. — Душанбе, ИБО, 1994. — 119-120.
5. *Исматов М., Исматов Н.М.* Обобщенные решения смешанных задач для уравнения динамики упругого тела и некоторых локальных и нелокальных задачах математической физики. — Душанбе, ИПС, 2009. — 160.
6. *Amerio L.* // Bolletiodel Un. Matem. Zanichelli, 1965. —19-325.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б.Т. Калимбетов, В.Ф. Сафонов

burkhan.kalimbetov@ayu.edu.kz, SafonovVF@yandex.ru

УДК 517.95

Целью исследования являются разработка алгоритма метода регуляризации Ломова для интегро-дифференциальных систем с быстро осциллирующими коэффициентами и описание эффектов, вызванных наличием интегрального члена. В докладе обсуждается случай отсутствия резонанса, т. е. случай, когда целочисленная линейная комбинация частот быстро осциллирующего коэффициента не совпадает с частотой спектра предельного оператора.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный, интегро-дифференциальные уравнения, быстро осциллирующие коэффициенты, регуляризация, асимптотическая сходимость

Integro-differential singularly perturbed equations with rapidly oscillating coefficients

The aim of the study is to develop the Lomov's regularization algorithm for integro-differential systems with rapidly oscillating coefficients and a description of the effects caused by the presence of an integral term. The report discusses the case of lack of resonance, i.e. the case when the integer linear combination of frequencies of the fast oscillating coefficient does not coincide with the frequency of the spectrum of the limit operator.

Keywords: singularly perturbed, integro-differential equations, rapidly oscillating coefficients, regularization, asymptotic convergence

---

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (проект АР 05133858).

Калимбетов Бурхан Тешебаевич, д.ф.-м.н., доцент, Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан; Kalimbetov Burkhan Teshebaevich (H.A.Yasawi International Kazakh-Turkish university, Turkestan, Kazakhstan)

Сафонов Валерий Федорович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Россия; Safonov Valeriy Fedorovich (The National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia)

При исследовании различных вопросов, связанных с динамической устойчивостью, со свойствами сред с периодической структурой, при исследовании других прикладных задач, приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями с быстро осциллирующими коэффициентами. Асимптотические интегрирование дифференциальных систем уравнений с такими коэффициентами проводились методом расщепления Фещенко-Шкиля-Николенко [1-2] и методом регуляризации Ломова [3-4]. В настоящей работе впервые исследуется система интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{dz}{dt}-A(t)z-\varepsilon g(t)\cos\frac{\beta(t)}{\varepsilon}B\left(t\right)z-\int\limits_{t_0}^{t}K(t,s)z(s,\varepsilon)ds=h(t), \\ &z(t_0,\varepsilon)=z^0,\quad t\in[t_0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

где $z=\{z_1,z_2\}$, $h(t)=\{h_1(t),h_2(t)\}$, $\beta'(t)>0,\ \ \omega(t){>}0\ \ (\forall t\in[t_0,T])$, $g(t)$ — скалярная функция, а $A(t)$ и $B(t)$ —(2×2)- матрицы, причем $A\left(t\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2(t) & 0\end{pmatrix}$, $z^0=\left\{z_1^0,z_2^0\right\}$, $\varepsilon>0$ — малый параметр. Предельный оператор $A\left(t\right)$ имеет спектр $\lambda_1(t)=-i\omega(t)$, $\lambda_2(t){=}+i\omega(t)$, частота быстро осциллирующего косинуса равна $\beta'(t)$. Функции $\lambda_3(t)=-i\beta'(t)$, $\lambda_4(t)=+i\beta'(t)$ обычно называют спектром быстро осциллирующего коэффициента. Целью исследования являются разработка алгоритма метода регуляризации для таких систем и описание эффектов, вызванных наличием интегрального члена. В докладе обсуждается случай отсутствия резонанса, т. е. случай, когда целочисленная линейная комбинация частот быстро осциллирующего коэффициента не совпадает с частотой спектра предельного оператора. Предполагаются выполненными следующие условия:

1) $\omega(t),\beta(t),g(t)\in C^{\infty}\left([t_0,T],\mathbb{C}^1\right)$, $h(t)\in C^{\infty}\left([t_0,T],\mathbb{C}^2\right)$,

$B(t)\in C^{\infty}\left([t_0,T],\mathbb{C}^{2\times2}\right)$, $K(t,s)\in C^{\infty}\left([t_0,T],\mathbb{C}^{2\times2}\right)$,

2) для $\forall t\in[t_0,T]$ и всех $n_3\neq n_4$ имеют место неравенства

$$n_3\lambda_3(t)+n_4\lambda_4(t)\neq\lambda_j(t),\ \lambda_k(t)+n_3\lambda_3(t)+n_4\lambda_4(t)\neq\lambda_j(t),\ \ k\neq j,k,j=1,2,$$

для всех мультииндексов $n=(n_3,n_4)$ с $|n|\equiv n_3+n_4\geqslant 1$ (n_3 и n_4 — целые неотрицательные числа).

Условие 2) называют условием отсутствия резонанса. После введения регуляризирующих переменных $\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_j(\theta)d\theta\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j=\overline{1,4}$ и регуляризации интегрального оператора строится расширенная система, имеющая вид регулярно возмущенной задачи, решение которой определяется в виде степенного ряда по степеням малого параметра. Разрабатывается теория нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач для коэффициентов этого ряда и доказывается асимптотическая сходимость сужения этого ряда (на регуляризирующих переменных) к точному решению исходной задачи (1), обсуждается влияние интегрального члена на структуру асимптотики.

Литература

1. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1966.

2. *Далецкий Ю.Л.* Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР, **143**:5 (1962), 1026-1029.

3. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

4. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Издательство Московского университета, 2011.

ОТСУТСТВИЕ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА РЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.Ш. Кальменов, Н. Кахарман

kalmenov@math.kz, n.kakharman@math.kz

УДК 517.984.56

В докладе рассматриваются спектральные свойства линейного оператора L_Q, соответствующего краевой задаче для линейного дифференциального уравнения, заданного дифференциальным выражением в области $\Omega \subset R^n$ и однородными граничными условиями. Предполагается, что коэффициенты дифференциального выражения бесконечно дифференцируемы, оператор L_Q обратим, а его обратный L_Q^{-1} является компактным в $L_2(\Omega)$. Рассматривается вопрос, когда спектр оператора L_Q является либо пустым, либо бесконечным множеством. То есть исследуется вопрос об отсутствии конечного спектра у краевых задач для общих дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейный оператор, спектр, дифференциальный оператор, краевая задача

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН Республики Казахстан (гранты AP05133239, BR05236656).

Кальменов Тынысбек Шарипович, академик НАН РК, д.ф.-м.н., профессор, зав. отделом Института математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Kal'menov Tynysbek (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

Кахарман Нурбек, PhD докторант, Институт математики и математического моделирования, Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан); Kakharman Nurbek (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

Absence of a finite spectrum of regular boundary value problems for differential equations

In this work it is discussed the spectral properties of the linear operator L_Q corresponding to the boundary value problem for a linear differential equation defined by a differential expression in the domain $\Omega \subset R^n$ with homogeneous boundary conditions.The coefficients of a differential expression are assumed to be infinitely differentiable, the operator L_Q is invertible, and its inverse L_Q^{-1} is compact in $L_2(\Omega)$. A question when the spectrum of the operator L_Q is either empty or an infinite set is considered. It is studied a question of the absence of a finite spectrum of boundary value problems for general differential equations.

Keywords: linear operator, spectrum, differential operator, boundary value problem

Хорошо известно, что спектральное разложение дифференциальных операторов имеет и фундаментальную и прикладную значимость.

В тоже время проблема конечности спектра дифференциальных операторов, порожденных регулярными краевыми условиями остается открытой проблемой. До сих пор не известно примеров корректных линейных краевых задач, имеющих конечное число собственных значений. В работе [1] Кальменов Т.Ш. и Сураган Д. доказали отсутствие конечного спектра у краевых задач для широкого класса дифференциальных уравнений при предположении, что в некоторой достаточно малой части области коэффициенты исследуемого уравнения являются постоянными. В настоящем докладе это ограничение снимается, но требуется бесконечная дифференцируемость коэффициентов уравнения.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – конечная область. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача Q**.** *Найти решение уравнения*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant p} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$Qu|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где Q *– линейный граничный оператор, определенный на следах функции* u *и ее производных до порядка* $p-1$ *на границе* $\partial\Omega$*.*

Через L_Q обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного выражением (1) на линейном многообразии функций $u \in C^p(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (2). В докладе предполагается, что обратный оператор L_Q^{-1} существует, определен на всем $L_2(\Omega)$ и является компактным. В этом случае спектр оператора L_Q может состоять только из собственных значений.

Основным результатом доклада является доказательство, что при некоторых общих предположениях относительно дифференциального оператора L_Q, он будет либо вольтерровым (т.е. не имеет собственных значений), либо количество его собственных значений будет бесконечно.

Для доказательства этого факта модернизируется методика работы [1] с использованием оценок антиаприорного типа (см., например, [2]).

Доклад основан на результатах совместных исследований с М.А. Садыбековым.

Литература

1. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* Определение структуры спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений методом антиаприорных оценок В.А. Ильина // Докл. РАН, **423**:6 (2008), 730–732.

2. *Ильин В.А.* О точных по порядку соотношениях между L_2-нормами собственных и присоединенных функций эллиптического оператора второго порядка // Дифференц. уравнения, **18**:1 (1982), 30–37.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

В.Л. Камынин

vlkamynin2008@yandex.ru

УДК 517.95

Исследована однозначная разрешимость обратных задач одновременного определения двух младших коэффициентов в параболическом уравнении с одной пространственной переменной при различных условиях интегрального наблюдения.

Ключевые слова: обратные задачи, параболические уравнения, интегральное наблюдение

On inverse problems of simultaneous determination of the lower coefficients in a parabolic equation

We investigate the unique solvability of simultaneous determination of two lower coefficients in a parabolic equation with one spatial variable under various conditions of integral observation.

Keywords: inverse problems, parabolic equations, integral observation

---

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности НИЯУ МИФИ, проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

Камынин Виталий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва, Россия); Vitaly Kamynin (National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia)

В докладе рассматриваются две обратные задачи одновременного определения коэффициентов перед u и u_x в параболическом уравнении с двумя независимыми переменными.

Обратная задача 1.

Определить тройку функций $\{u(t,x), b(x), c(x)\}$, удовлетворяющих в $Q \equiv [0,T] \times [-l,l]$ уравнению

$$\rho u_t - u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q; \tag{1}$$

краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in [-l,l]; \quad u(t,-l) = \mu_1(t),\ u(t,l) = \mu_2(t),\ t \in [0,T]; \tag{2}$$

и условиям интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t,x)\omega(t)\,dt = \varphi(x),\ \int_0^T u(t,x)\chi(t)dt = \psi(t), \quad x \in [-l,l]. \tag{3}$$

Обратная задача 2.

Определить тройку функций $\{u(t,x), b(t), d(t)\}$, удовлетворяющих в Q уравнению

$$u_t - a(t,x)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + d(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q; \tag{4}$$

краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in [-l,l]; \quad u(t,-l) = u(t,l) = 0,\ t \in [0,T]; \tag{5}$$

и условиям интегрального наблюдения

$$\int_{-l}^{l} u(t,x)\omega(x)\,dx = \varphi(t),\ \int_{-l}^{l} u_x(t,x)\omega(x)\,dx = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

В обоих случаях рассматриваются обобщенные решения: $u(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$, функции b и c ограничены, соответственно, на $[-l,l]$ в случае обратной задачи 1 и на $[0,T]$ в случае обратной задачи 2.

Доказаны теоремы существования и единственности решения данных обратных задач.

Для каждой из рассматриваемых обратных задач мы также получаем оценки максимумов модулей неизвестных коэффициентов уравнения с константами, явно выписанными через входные данные обратных задач.

Кроме того приводятся нетривиальные примеры обратных задач, к которым применимы доказанные теоремы существования и единственности.

Работа является продолжением исследований автора [1, 2], где были получены теоремы об однозначной разрешимости обратных задач одновременного определения правой части и одного из младших коэффициентов в параболическом уравнении.

Литература

1. *Камынин В.Л.* Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении на плоскости // Дифференц. уравнения, **50**:6 (2014), 795-806.

2. *Камынин В.Л.* Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многим пространственными переменными // Матем. заметки, **97**:3 (2015), 368-381.

КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.Х. Каримов

karimov_olim72@mail.ru

УДК 517.948

Работа посвящена коэрцитивной разрешимости нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве.

Ключевые слова: Коэрцитивная оценка, разрешимость, нелинейный оператор, весовое пространство.

Coercitive solvability of nonlinear systems of differential equations of second order with matrix coefficients in the weight space

The work is dedicated to the coercitive solvability of nonlinear systems of differential equations of second order with matrix coefficients in the weight space.

Keywords: Coercitive estimates, the solvability of nonlinear operator, weighted space.

Пусть $\rho(x)$ - положительная функция, определенная в R^n, l - некоторое натуральное число. Символом $L_{2,\rho}(R^n)^l$ - обозначим пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), ..., u_l(x)), u_j(x) \in L_2(R^n), (j = \overline{1, l})$ с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{R^n} \rho(x)|u_j(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Каримов Олимджон Худойбердиевич, к.ф.-м.н., доцент, Институт математики им. А.Джураева (Душанбе, Таджикистан); Olimjon Karimov (A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)^l$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u,\upsilon)_\rho = \sum_{j=1}^{l} \int_{R^n} \rho(x) u_j(x) \overline{\upsilon_j(x)} dx \quad .$$

Рассмотрим в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ дифференциальный оператор

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + V(x,u)u(x) = f(x), \quad (x \in R^n) \qquad (1)$$

Предположим, что коэффициенты a_{ij} оператора являются квадратными матрицами порядка l с элементами из класса $C^1(R^n)$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ij} \equiv a_{ji}, \quad Im a_{ij} \equiv 0,$$

$$|a_{ij}| \leqslant \sigma_1, \quad \nabla a_{ij} \leqslant \sigma_2, \quad (x \in R^n, i,j = \overline{1,n}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} |s_i; C^l|^2 \leqslant \chi_1 \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) s_i, s_j; C^l \rangle \quad ((x \in R^n), \forall s = (s_i)_{i=1}^n, s_i \in C^l),$$

а значения $V(x,\omega)$, $x \in R^n, \omega \in C^l$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми матрицами из $\mathrm{End}\, C^l$, константы σ_1,σ_2,χ_1 в этих условиях не зависят от x и s.

Определение. Уравнение (1) и соответствующий ему дифференциальный оператор называются разделимыми в $L_{2,\rho}(R^n)^l$, если $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)$, $V(x,u(x))u(x) \in L_2(R^n)^l$ для всех $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Учитывая результат о разделимости оператора (1)(Теорема 1 [6]), получим следующий результат:

Теорема 1. *Пусть оператор (1) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, а весовая функция $\rho(x)$ и положительная функция $\Psi(x) \in C^1(R^n)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\|\Psi^{-1}(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| < \delta_1,$$

$$\|\rho^{-1}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| < \delta_2.$$

Тогда при выполнении условий

$$n(\delta_1^2 + \delta_2^2) < 2\alpha, \quad n\alpha\sigma_1\chi_1 < 1, \quad \alpha > 0$$

система дифференциальных уравнения (1) при всех $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ имеет единственное решение в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Литература

1. *Everitt W.N., Giertz M.* Some properties of the domains of certain differential operators // London Math.Soc. **23**:3 (1971), 301-324.

2. *Бойматов К.Х.* О методе Эверитта и Гирца для банаховых пространств // Докл. РАН. **356**:1 (1997), 10-12.

3. *Бойматов К.Х.* Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения // Труды МИАН СССР. **170** (1984), 37-76.

4. *Отелбаев М.* Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды МИАН СССР. **161** (1983), 195-217.

5. *E.M.E.Zayed.* Separation for an elliptic differential operator in a weighted Hilbert space with its application to an existence and uniqueness theorem // Dynamics of Contionuous, Discrete and Impulsive systems series A:Mathematical Analysis, **22** (2015), 409-421.

6. *Каримов О.Х.* О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффицентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. **58**:8 (2015), 665-673.

7. *Каримов О.Х.* О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. **9**:1 (2017), 55-62.

8. *Каримов О.Х.* Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного класса нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник. **18**:4 (2017), 245-254.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО АНАЛОГА НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ, ОДИН КОНЕЦ КОТОРЫЙ ЗАДЕЛАН, А ДРУГОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕН, В КЛАССАХ СОБОЛЕВА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Ш.Г. Касимов, У.С. Мадрахимов

shokiraka@mail.ru, umadraximov@mail.ru

УДК 517.958:624.04

В данной работе изучена задача с начально-граничными условиями для уравнения колебаний балки один конец, которой заделан, а другой шарнирно закреплен в многомерном случае. Доказаны теоремы единственности, существования поставленной задачи в классах Соболева. Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций получена теорема единственности решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: уравнение балки, начально-граничная задача, спектральный метод, собственные значения, собственные функции, полнота, базис Рисса, единственность, существование, ряд.

Работа выполнена при финансовой поддержке РУзФФИ (проект № ОТ-Ф-4-(36+32)).

Касимов Шакирбай Гаппарович, д.ф.-м.н., и.о. профессора, НУУз имени Мирзо Улугбека (г.Ташкент, Узбекистан); Kasimov Shakirbay Gapparovich (National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

Мадрахимов Умрбек Собирович, докторант, НУУз имени Мирзо Улугбека (г.Ташкент, Узбекистан); Madraximov Umrbek Sabirovoch (National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

On the unique solvability of a generalized analogue of the initial-boundary problem of beam oscillations with one end, which is embedded, and the other is hinged fixed ends in Sobolev classes in the multidimensional case

In this paper, we study a problem with initial-boundary conditions for the equation of beam oscillations, one end of which is embedded and the other is pivotally fixed in the multidimensional case. The theorems of uniqueness, the existence of the problem in Sobolev classes are proved. The solution of the initial-boundary problem is constructed as a sum of a series in the system of eigenfunctions of the multidimensional spectral problem. It is shown that this system of eigenfunctions is complete and forms a Riesz basis in Sobolev spaces. On the basis of the completeness of the system of eigenfunctions, a uniqueness theorem is obtained for the solution of the initial-boundary value problem posed.

Keywords: beam equation, initial-boundary problem, spectral method, proper values, eigenfunctions, completeness, Riesz basis, uniqueness, existence, row.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [1]–[6]. В данной работе рассматривается более общее уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(y,t)+a^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}}=f(y,t),\ \ (y,t)\in\Pi\times(0,T), \tag{1}$$

$p-1<\alpha\leqslant p;\ m,\ p\in\mathbb{N}$, с начальными и краевыми условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(y,t)\big|_{t=0}=\varphi_i(y),\quad i=1,2,...,p, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0, & \left.\frac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\\ \left.\frac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l}=0, & \left.\frac{\partial^{4k+2}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,\ m-1},\ \ j=\overline{1,N}, \end{cases} \tag{3}$$

где $(y,t)=(y_1,...,y_j,...,y_N,t)\in\Pi\times(0,T)$, $\Pi=(0,l)^N$, $T>0$ – заданные положительные числа и $f(y,t)$, $\varphi_i(y)$, $i=1,2,...,p$ – заданные функции. Здесь $D_{0t}^{\alpha}u(y,t)$ дробная производная в смысле Римана–Лиувилля.

Будем искать решение $u\left(y,t\right)$ задачи (1)–(3) в виде разложения в ряд Фурье $u\left(y,t\right)=\sum\limits_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum\limits_{n_N=0}^{\infty}T_{n_1\ldots n_N}\left(t\right)v_{n_1\ldots n_N}\left(y\right)$, где $T_{n_1\ldots n_N}\left(t\right)$ – коэффициенты ряда, $\left\{v_n(y),\ n\in\overline{\mathbb{Z}}_+{}^N\right\}$ – система собственных функций многомерной спектральной задачи:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}v\left(y\right)}{\partial y_j^{4m}}-\lambda v\left(y\right)=0, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^{4k} v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{4k+1} v(y)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0} = 0, \\ \left.\frac{\partial^{4k} v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{4k+2} v(y)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=l} = 0, \quad k = \overline{0,\ m-1}, \ \ j = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{5}$$

Собственные значения задачи (4), (5) определяются по формуле $\lambda_{m_1 \dots m_N} = a^2 \sum\limits_{j=1}^{N} d_{m_j}^{4m}$, где d_{m_j} - корень трансцендентного уравнения $tgld = thld$. Это уравнение имеет счетного множество корней $d_0 < d_1 < \cdots < d_n < \cdots$, при этом справедлива при больших n асимптотическая формула $d_n = \frac{\pi n}{l} + \frac{\pi}{4l} + O\left(e^{-2\pi n}\right)$. В результате найдем соответствующую систему собственных функций

$$\left\{ v_{m_1 \dots m_N}\left(x_1, ..., x_N\right) \right\}_{(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^N} = \left\{ \prod_{j=1}^{N} X_{m_j}(x_j) \right\}_{(m_1, \dots, m_N) \in \overline{\mathbb{Z}}_+{}^N}, \tag{6}$$

где

$$X_{m_j}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + d_{m_j}^{4s}}} \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\frac{\sin d_{m_j}(l-x)}{\sin d_{m_j} l} - \frac{shd_{m_j}(l-x)}{shd_{m_j} l} \right), \ m_j = 0, 1, \dots . \tag{7}$$

Норма в пространстве $W_2^s(0,l)$ вводится по формуле $\|f\|^2_{W_2^s(0,l)} = \|f\|^2_{L_2(0,l)} + \|D^s f\|^2_{L_2(0,l)}$, где s - произвольное натуральное число.

Теорема 1. *Система собственных функций (6) спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированный системой в классе Соболева* $W_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$.

Теорема 2. *Система собственных функций (6) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева* $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$.

Следствие 1. *Если* $s_j > k + \frac{N}{2}, k \geqslant 0, k \in Z$, *то ряд Фурье функции* $f(x) \in H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi) \cap C^k(\Pi)$ *по системе собственных функций (6) спектральной задачи (4), (5) сходится по норме пространства* $C^k(\Pi)$ *к функции* $f(x)$.

Мы получим единственное решение задачи (1) – (3) в виде ряда

$$u(y,t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{p} \varphi_{j,(m_1 \dots m_N)} t^{\alpha - j} E_{\alpha, \alpha - j + 1}(\mu_{m_1 \dots m_N} t^{\alpha}) + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\mu_{m_1 \dots m_N}(t-\tau)^{\alpha}] f_{m_1 \dots m_N}(\tau) d\tau \right] \cdot v_{m_1 \dots m_N}(y_1, ..., y_N).$$

Выясним условия существования решения из класса $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N, \theta}\left(\Pi \times (0,l)\right)$. По теореме вложения Соболева условие

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{p} \varphi_{j,(m_1 \dots m_N)} t^{\alpha - j} E_{\alpha, \alpha - j + 1}\left(\mu_{m_1 \dots m_N} t^{\alpha}\right) + \right. \tag{9}$$

$$+ \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1\dots m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right] f_{m_1\dots m_N}(\tau)\, d\tau \Bigg|^2 \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(1 + d_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty.$$

является достаточным условием существования регулярного решения задачи (1) – (3) из класса $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N,\theta}(\Pi \times (0,l))$ с показателем $s_1 = \dots = s_N = 4m + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$.

Теорема 3. *Пусть начальные функций $\varphi_i(y), i = 1,2,\dots,p$, и правую часть $f(y,t)$ удовлетворяет условию (9) при каждом $t > 0$. Тогда регулярные решение задачи (1) – (3) из класса $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N,\theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 4m + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ существует, единственно и представляется в виде ряда (8).*

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.

2. *Рэлей Л.* Теория звука. 2-е изд. Т.1. М.: Наука, 1955. 504 с.

3. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

4. *Коренев Б.Г.* Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. 355 с.

5. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференциальные уравнения, **53**:1 (2017), 89-100.

6. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференциальные уравнения, **53**:5 (2017), 665-671.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ БОЛЬШИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

И.С. Кащенко

iliyask@uniyar.ac.ru

УДК 517.9

В работе изучается локальная динамика дифференциального уравнения с двумя асимптотически большими пропорциональными запаздываниями. В зависимости от параметров выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Во всех критических случаях построены специальные уравнения (квазинормальные формы), решения которых определяют асимптотику решений исходного уравнения.

Ключевые слова: запаздывание, дифференциальные уравнения, сингулярное возмущение, нормальная форма

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10043).

Кащенко Илья Сергеевич, д.ф.-м.н., доцент, ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Ilia Kashchenko (P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Behavior of solutions of equation with two large delays

The local dynamics of differential equations with two asymptotically large proportional delays is studied. Depending on the parameters critical cases in the problem of the stability of the equilibrium state are identified. In all critical cases special equations (quasinormal forms) are built. Their nonlocal dynamics determines the local behavior of solutions of the original equations.

Keywords: delay, differential equations, singular perturbation, normal form

Рассмотрим уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + bx(t-T_1) + F(x, x(t-T), x(t-T_1)), \quad T, T_1 > 0. \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ скалярная функция, a и b некоторые постоянные. Функция $F = F(x,y,z)$ предполагается нелинейной, т. е. $F(0,0,0) = F'_x(0,0,0) = F'_y(0,0,0) = F'_z(0,0,0) = 0$. Основное предположение состоит в том, что оба запаздывания T и T_1 пропорциональны друг другу и достаточно велики, т. е.

$$T = \varepsilon^{-1}, \quad T_1 = T(k_0 + \varepsilon^{1+\alpha} k_1), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad k_0 \geqslant 1, \quad \alpha > 0.$$

Поставим задачу определить поведение решений в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого состояние равновесия. Метод исследования базируется на так называемом методе квазинормальных форм [1].

Введем в рассмотрение функцию

$$R(\Omega) = a\cos\Omega + b\cos k_0\Omega$$

и обозначим через $R_0 = R_0(a,b)$ супремум (для иррациональных k_0) или максимум (для рациональных k_0) этой функции.

Теорема 1. *Пусть $R_0 < 1$, тогда для всех достаточно малых ε нулевое состояние равновесия (1) асимптотически устойчиво.*

Если же $R_0 > 1$, то для всех достаточно малых ε нулевое состояние равновесия (1) неустойчиво.

Основное содержание работы посвящено случаю $R_0 = 1$. При этом условии бесконечное количество корней характеристического уравнения стремится к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, таким образом все критические случаи в задаче об устойчивости стационара имеют бесконечную размерность. В каждом из них исходная задача сводится к аналогу нормальной формы – уравнению параболического типа, которое не содержит малый параметр [1]. Решения этих уравнение доставляют главный член асимтотического по невязке приближения исходной задачи.

Литература

1. *Kashchenko I.* Normalization of a system with two large delays // International Journal of Bifurcation and Chaos, **24**:8 (2014), 1440021.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.И. Кожанов

kozhanov@math.nsc.ru

УДК 517.946

Изучается корректность краевых задач для квазигиперболических уравнений высокого порядка.

Ключевые слова: квазигиперболические уравнения, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Boundary-value problems for quasihyperbolic equations

We study the correctness of boundary value problems for high order quasi-hyperbolic equations.

Keywords: quasihyperbolic equations, boundary value problems, regular solutions, existence, uniqueness

Квазигиперболическими уравнениями будем называть дифференциальные уравнения вида

$$Lu \equiv (-1)^{p+1}\frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}} - Au = f(x,t)$$

с эллиптическим оператором A второго порядка, действующим по пространственным переменным ($A \sim \Delta$), и с натуральным числом p таким, что $p > 1$ (при $p = 1$ данные уравнения являются обычными гиперболическими уравнениями).

В настоящем докладе излагаются результаты последнего времени, связанные с постановкой и разрешимостью краевых задач для квазигиперболических уравнений в ограниченном цилиндре. В частности, описываются новые корректные задачи — задачи, в которых при $t = 0$ задаются $p + 1$ условие, при $t = T - p - 1$ условие. Далее показывается, что задачи на собственные значения для квазигиперболических уравнений с этими же условиями при $t = 0$ и при $t = T$ имеют счетное множество действительных собственных чисел. Дополнительно изучаются краевые задачи для некоторых классов квазигиперболических уравнений с разрывными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-51-41009).

Кожанов Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Kozhanov Alexandr (Sobolev Institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia)

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И ДАННЫМИ В ВИДЕ МЕРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^N$

Л.М. Кожевникова

kosul@mail.ru

УДК 517.956.25

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматриваются анизотропные эллиптические уравнения второго порядка с переменными показателями нелинейностей и правой частью в виде диффузной меры. В анизотропных пространствах Соболева-Орлича с переменными показателями доказано существование энтропийного решения. Установлено, что построенное энтропийное решение является ренормализованным решением.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, энтропийное решение, ренормализованное решение, существование решения, переменный показатель, диффузная мера

On solutions of elliptic equations with variable exponent nonlinearity and and measure data in space $\mathbb{R}^n$

In the space $\mathbb{R}^n$, second-order anisotropic elliptic equations are considered with nonlinear variables of exponents, and the right-hand side as a diffuse measure. The existence of an entropy solution is proved in anisotropic Sobolev – Orlicz spaces with variable exponents. It is established that the obtained entropy solution is a renormalized solution.

Keywords: anisotropic elliptic equation, entropy solution, renormalized solution, existence solution, variable exponent, diffuse measure

В пространстве $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$, рассматривается анизотропное эллиптическое уравнения вида

$$-\mathrm{div}\,\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с ограниченной мерой Радона μ специального вида.

Введем пространство

$$C^+(\mathbb{R}^n) = \{p \in C(\mathbb{R}^n) \ : \ 1 < p^- \leqslant p^+ < +\infty\},$$

где $p^- = \inf\limits_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n} p(\mathrm{x})$, $p^+ = \sup\limits_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n} p(\mathrm{x})$. Положим $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), \dots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\mathbb{R}^n))^n$, $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot) = (p_0(\cdot), \overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)) \in (C^+(\mathbb{R}^n))^{n+1}$ и определим

$$p_+(\mathrm{x}) = \max_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00428).

Кожевникова Лариса Михайловна, д.ф.-м.н., профессор, Стерлитамакский филиал БашГУ (Стерлитамак, Россия); Larisa Kozhevnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot) = (p_0(\cdot), p_1(\cdot), ..., p_n(\cdot)) \in (C^+(\mathbb{R}^n))^{n+1}$, анизотропное пространство Соболева с переменными показателями $W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|v\|_{W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{p_0(\cdot)} + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)}.$$

Через $\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство $L_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times L_{p_n(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|\mathrm{v}\|_{\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathrm{v}\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)} = \|v_1\|_{p_1(\cdot)} + \ldots + \|v_n\|_{p_n(\cdot)}, \ \mathrm{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Множество ограниченных мер Радона обозначим $\mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$. Меру $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$ назовем диффузной по емкости $\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}$ ($\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ – емкости), если $\mu(B) = 0$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$ такого, что $\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(B, \mathbb{R}^n) = 0$. Здесь $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ — емкость компакта K по отношению к $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(K, \mathbb{R}^n) = \inf_{S_{p(\cdot)}(K)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}(\mathrm{x}, v, \nabla v) d\mathrm{x},$$

$$S_{p(\cdot)}(K) = \left\{ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; v \geqslant \chi_K \right\},$$

где $\mathbf{P}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})}$, $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = \sum\limits_{i=1}^n |s_i|^{p_i(\mathrm{x})}$, χ_K — характеристическая функция множества K. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ – емкость борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$ по отношению к $\mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(B, \mathbb{R}^n) = \sup\{\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(K, \mathbb{R}^n) \;\Big|\; B \supset K, \ K \text{ компакт}\}.$$

Через $\mathcal{M}^b_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство всех ограниченных мер Радона диффузных по $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ – емкости. Доказано, что если $\mu \in L_1(\mathbb{R}^n) + W^{-1}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ($W^{-1}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ — пространство сопряженное к $W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$), то $\mu \in \mathcal{M}^b_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Представление диффузной меры $\mu \in \mathcal{M}^b_{p(\cdot)}(\Omega)$ для ограниченной области Ω получено в работах [1], [2].

Предполагаем, что

$$p_+(\mathrm{x}) \leqslant p_0(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

и функции

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), каратеодориевы. Пусть существуют неотрицательные функции $\Phi_i \in L_{p_i'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, непрерывные неубывающие функции $\widehat{a}_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, положительное число $\overline{a}$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leqslant \widehat{a}_i(|s_0|)\left((\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}))^{1/p_i'(\mathrm{x})} + \Phi_i(\mathrm{x})\right), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{3}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0, \quad \mathrm{s} \neq \mathrm{t}; \tag{4}$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \geqslant \overline{a}\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \phi(\mathrm{x}). \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i t_i$, $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n)$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, непрерывная неубывающая функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leqslant \widehat{b}(|s_0|)\left(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) + \Phi_0(\mathrm{x})\right); \tag{6}$$

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_0 \geqslant 0. \tag{7}$$

Будем считать, что мера μ имеет вид

$$\mu = f + f_0 - \operatorname{div} \mathrm{f},\ f \in L_1(\mathbb{R}^n),\ f_0 \in L_{p_0'(\cdot)}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

По доказанному такая мера μ является диффузной по $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ – емкости.

Вводя обозначение $\widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) + \mathrm{f}$, из уравнения (1) получаем

$$-\operatorname{div} \widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f + f_0.$$

Применяя неравенство Юнга, легко заметить, что функция $\widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ также подчиняется условиям вида (3)–(5). Поэтому в работе рассматривается уравнение (1) с мерой

$$\mu = f + f_0, \quad f \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad f_0 \in L_{p_0'(\cdot)}(\mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Определим функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Введем обозначение $\langle u \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u d\mathrm{x}$. Через $\mathcal{T}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество измеримых функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при любом $k > 0$.

Определение 1. *Энтропийным решением уравнения* (1), (8) называется функция $u \in \mathcal{T}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

1) $B(\mathrm{x}) = b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_1(\mathbb{R}^n)$;
2) при всех $k > 0$, $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u - f - f_0) T_k(u - \xi) \rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) \rangle \leqslant 0.$$

Определение 2. *Ренормализованным решением уравнения* (1), (8) называется функция $u \in \mathcal{T}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ такая, что выполнено условие 1) определения 1,
2) $\lim_{h \to \infty} \int\limits_{\{h \leqslant |u| < h+1\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u) d\mathrm{x} = 0$,

3) для любой гладкой функции $S \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем и любой функции $\xi \in C^1_0(\Omega)$ справедливо равенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u - f - f_0)S(u)\xi\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot\nabla(S(u)\xi)\rangle = 0.$$

Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2)–(7), тогда существует энтропийное решение уравнения (1), (8).*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2)–(7), тогда энтропийное решение, построенное в теореме 1, является ренормализованным решением уравнения (1), (8).*

Литература

1. *Nyanquini I., Ouaro S., Soma S.* Entropy solution to nonlinear multivalued elliptic problem with variable exponents and measure data // Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, **40**:2 (2013), 1—25.

2. *Zhang C.* Entropy solutions to nonlinear elliptic equations with variable exponents // Electronic Journal of Differential Equations, **2014**:92 (2014), 1—14.

ВЕКТОРНЫЙ ВАРИАНТ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА

Ю.А. Комаров, А.Б. Куржанский

ykomarov94@gmail.com, kurzhans@mail.ru

УДК 517.97

Доклад посвящен методам решения задач многокритериальной оптимизации для моделей систем управления, описываемых обыкновенными дифференциальными или разностными уравнениями. Подобные задачи нередко решаются путем сведения их к оптимизации совокупности скаляризованных сверток векторного критерия. В то же время, в реальных векторных задачах необходим анализ всей границы Парето. С этой целью, в данной работе предлагается метод векторного динамического программирования, позволяющий описать эволюцию паретовского фронта при помощи векторного аналога эволюционного уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Ключевые слова: Гамильтонов формализм, векторная оптимизация, динамическое программирование, фронт Парето

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-29-04191 офи_м).

Комаров Юрий Андреевич, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Yury Komarov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Куржанский Александр Борисович, д.ф.-м.н., проф., акад., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Kurzhanski (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

A vector-valued version of the Hamiltonian formalism

This report introduces methods of optimalizing the solutions to problems of controlled dynamics under multiple criteria. Though such problems are usually approached by scalarization of the vector-valued cost, in most realistic cases, the actual demand is the the analysis of the whole Pareto front and its evolution. Such demand is reached in this paper by introducing a vector-valued multiobjective dynamic programming, based on vector-valued version of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation.

Keywords: Hamiltonian formalism, multiobjective optimization, dynamic programming, Pareto front

В первой части доклада рассматривается дискретная динамическая система с векторным критерием следующего вида:

$$
\begin{gathered}
x_{t+1} = f(t, x_t, u_t), \;\; t = 0, \ldots, \vartheta - 1, \\
x_0 = x^0, \\
u_t \in \mathcal{P}_t, \\
\begin{bmatrix} \mathcal{J}_1(\vartheta, x, u) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_p(\vartheta, x, u) \end{bmatrix} = \vec{\mathcal{J}}(\vartheta, x, u) = \sum_{\tau=0}^{\vartheta-1} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\varphi}(x_\vartheta) \to \mathcal{M}\mathrm{in}, \\
x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m; \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{L}}, \vec{\varphi} \in \mathbb{R}^p,
\end{gathered}
$$

где под $\vec{\mathcal{J}}(\vartheta, x, u) \to \mathcal{M}\mathrm{in}$ понимается задача отыскания границы Парето множества всех возможных (в силу условий системы) значений многомерного функционала $\vec{\mathcal{J}}(\vartheta, x, u)$. Следуя терминологии [2], под паретовским фронтом множества в упорядоченном пространстве будем понимать подмножество его недоминируемых по порядку точек.

Для этой системы был введен векторный аналог функции цены в виде

$$
\vec{\mathcal{V}}(0, x^0) = \mathcal{M}\mathrm{in} \left\{ \sum_{\tau=0}^{\vartheta-1} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\varphi}(x_\vartheta) \middle| x_0 = x^0, u_t \in \mathcal{P}_t \right\}
$$

и показано, что при выполнении определенных условий регулярности для паретовского фронта многокритериальной оптимизационной задачи справедлив векторный принцип оптимальности в следующей форме:

$$
\vec{\mathcal{V}}(0, x^0) = \mathcal{M}\mathrm{in} \left\{ \sum_{\tau=0}^{t} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\mathcal{V}}(t+1, x_{t+1}) \middle| u_\tau \in \mathcal{P}_\tau \right\}, \;\; t = 0, \ldots, \vartheta - 1.
$$

Был получен дискретный векторный аналог уравнения Беллмана для введенной функции цены:

$$
\begin{cases}
\vec{\mathcal{V}}(t, x) = \mathcal{M}\mathrm{in} \left\{ \vec{\mathcal{L}}(t, x, u) + \vec{\mathcal{V}}(t+1, x_{t+1}) \middle| u \in \mathcal{P}_t \right\}, \;\; t = 0, \ldots, \vartheta - 1, \\
\vec{\mathcal{V}}(\vartheta, \cdot) = \vec{\varphi}(\cdot).
\end{cases}
$$

На примере одномерной стационарной линейной системы с дискретным временем продемонстрировано, что, в силу векторной природы задачи, построенная система уравнений типа Гамильтона-Якоби-Беллмана является лишь необходимым, но не достаточным условием для отыскания функции цены. В общем случае она не позволяет однозначно определить искомую границу Парето решаемой задачи.

В связи с этим был предложен метод гарантированного точечного оценивания границы Парето, позволяющий свести полученный ранее векторный аналог уравнения Беллмана к набору скалярных задач, решение каждой из которых представляет собой единственную точку искомого паретовского фронта.

Затем была рассмотрена многомерная постановка задачи достижимости для системы с дискретным временем и установлено взаимно-однозначное соответствие между решениями задачи в классической (скалярной) и векторной постановках. В частности, было продемонстрировано совпадение линий уровня двух соответствующих функций цены:

$$\mathcal{X}(t;0,A\cap B)=\left\{x\colon \min_{u(\cdot),x_0}\left\{d^2(x_0,A\cap B)\;\middle|\; x_t=x\right\}\leqslant 0\right\}=$$
$$=\left\{x\colon \mathcal{M}\mathrm{in}\left\{\begin{pmatrix}d^2(x_0,A)\\ d^2(x_0,B)\end{pmatrix}\;\middle|\; x_t=x\right\}\leqslant 0\right\},$$

где $\mathcal{X}(t;0,A\cap B)$ — искомое множество достижимости системы в момент времени t при заданном начальном множестве $\mathcal{X}^0=A\cap B$.

В заключительной части доклада была рассмотрена задача управления системой в непрерывном времени при наличии векторного критерия следующего вида:

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad t\in[0,\vartheta],$$
$$x(0)=x^0,$$
$$u(t)\in\mathcal{P}(t),$$
$$\begin{bmatrix}\mathcal{J}_1(\vartheta,x,u)\\ \vdots\\ \mathcal{J}_p(\vartheta,x,u)\end{bmatrix}=\vec{\mathcal{J}}(\vartheta,x,u)=\int\limits_0^{\vartheta}\vec{\mathcal{L}}(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+\vec{\varphi}(x(\vartheta))\to\mathcal{M}\mathrm{in},$$
$$x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m;\ \vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{L}},\vec{\varphi}\in\mathbb{R}^p,$$

Для такой постановки задачи был введён векторный аналог функции цены, продемонстрировано выполнение принципа оптимальности для границы Парето и получен векторный аналог уравнения Гамитона-Якоби-Беллмана в форме эволюционного уравнения:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\delta\to+0}\dfrac{1}{\delta}\mathbf{h}\left(\vec{\mathcal{V}}(t,x),\mathcal{M}\mathrm{in}\left\{\int\limits_t^{t+\delta}\vec{\mathcal{L}}(s,x(s),u(s))ds+\vec{\mathcal{V}}(t+\delta,x(t+\delta))\right\}\right)=0,\\ \vec{\mathcal{V}}(\vartheta,\cdot)=\vec{\varphi}(\cdot),\end{cases}$$

где $\mathbf{h}(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа.

Литература

1. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation. — Basel, Birkhäuser, 2014. 445 p.

2. *Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.* Theory of Multiobjective Optimization. — London, Academic Press Inc., 1985. 296 p.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

А.Н. Конёнков

a.konenkov@365.rsu.edu.ru

УДК 517.956.4

Рассматривается параболическая система второго порядка на плоскости в области с негладкой боковой границей. Методом граничных интегральных уравнений установлена разрешимость задачи Дирихле с непрерывными граничными функциями. Исследована гладкость полученного решения, если граничные функции удовлетворяют условию Гельдера.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений параболического типа, задача Дирихле, анизотропные пространства Гельдера

Solvability of the Dirichlet problem for a parabolic system on a plane

A second order parabolic system is considered in a domain with a non-smooth lateral boundary on a plane. The boundary integral equations method is used to establish the solvability of the problem with continuous boundary data. The smoothness of the obtained solution is studied if the boundary functions satisfy the Hölder condition.

Keywords: systems of parabolic type, Dirichlet problem, anisotropic Hölder spaces

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается параболическая система

$$Lu = \partial_t u - A(x)\partial_x^2 u,$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$, $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^m$. Для оператора L предполагается выполненными условия a) равномерной параболичности, то есть собственные значения $\lambda_k(x)$ матрицы $A(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_k(x) \geqslant \mu > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \tag{1}$$

Конёнков Андрей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, РГУ (Рязань, Россия); Andrey Konenkov (Ryazan State University, Ryazan, Russia)

б) принадлежности коэффициентов пространству Гельдера:

$$a_{ij} \in C^{\alpha}(\mathbb{R}), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2}$$

В полуограниченной области $\Omega = \{(x,t) \in D \,|\, x > g(t)\}$ рассматриваем задачу Дирихле

$$\left\{ \begin{array}{rcll} Lu & = & 0 & \text{в } \Omega, \\ u(x,0) & = & 0, & x > g(t), \\ u(g(t),x) & = & \psi(t), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{array} \right. \tag{3}$$

В [1] для широкого класса параболических систем установлено существование и единственность решений краевых задач. Боковая граница области предполагалась достаточно гладкой. В частности, для параболических систем второго порядка исследовались решения из шкалы анизотропных пространств Гельдера $H^{m+\alpha,(m+\alpha)/2}(\Omega)$, $m \geqslant 2$.

В [2], [3] установлена разрешимость задачи Дирихле для параболической системы на плоскости в пространстве $C^{1,1/2}(\bar{\Omega})$. Также была исследована гладкость полученного решения в $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$. При этом рассматривались области с негладкими боковыми границами вида $x = g(t)$, где функция g удовлетворяет условию Жевре

$$g \in H^{(1+\alpha)/2}([0,T]). \tag{4}$$

Методом граничных интегральных уравнений было доказано существование решения и его представимость в виде суммы потенциалов простого слоя.

Обозначим через $\Gamma(x,\xi,t-\tau)$ фундаментальное решение оператора L. Для плотности φ, заданной на боковой границе области Ω, мы вводим модифицированный потенциал двойного слоя

$$W\varphi(x,t) = \int_0^t \partial_\xi(\Gamma(x,\xi,t-\tau)A(\xi))|_{x=g(\tau)}\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Отметим, что при наложенных условиях на коэффициенты оператора L фундаментальное решение не имеет, вообще говоря, производной по переменной ξ. Мы устанавливает, что функция $\Gamma(x,\xi,t)A(\xi)$ является непрерывно дифференцируемой по ξ при $t > 0$.

Теорема. *Пусть для оператора L выполнены условия (1), (2), для боковой границы выполнено условие (4), граничная функция $\varphi \in C([0,T])$, $\varphi(0) = 0$. Тогда существует ограниченное в Ω решение $u \in C(\bar{\Omega})$ задачи Дирихле (3), представимое в виде модифицированного потенциала двойного слоя с плотностью $\varphi \in C([0,T])$, $\varphi(0) = 0$. Для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant C\|\psi\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Если при этом $\psi \in H^{\alpha/2}([0,T])$, то указанное решение принадлежит пространству $H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega})$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega})} \leqslant C\|\psi\|_{H^{\alpha/2}([0,T])}.$$

Аналогичное утверждение получено и для ограниченной области $\Omega = \{(x,t) \in D \,|\, g_1(t) < x < g_2(t)\}$.

Литература

1. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН СССР, **83** (1965), 3–163.

2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН, **458**:4 (2014), 379-381.

3. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения, **52**:2 (2016), 198-208.

ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

М.В. Коровина

betelgeuser@yandex.ru

УДК 517.911,517.925.7,517.928.1

Работа посвящена описанию асимптотических разложений решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки. Приводится вид асимптотики решения в окрестности бесконечно удаленной особой точки.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения

Poincare problem. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of irregular singular points

This study is devoted to the description of the asymptotic expansions of solutions to ordinary differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an irregular singular point. An example of irregular singular point in infinity is consider.

Keywords: differential equations

Коровина Мария Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Maria Korovina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Проблема представления асимптотики решения уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки впервые была сформулирована А. Пуанкаре в работах [1],[2]. В этих работах рассматривались уравнения нефуксова типа и впервые было показано, что решение уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки в некоторых случаях может разлагаться в асимптотический ряд. Проблема Пуанкаре состоит в том, чтобы найти вид асимптотических разложений для произвольных линейных уравнений с голоморфными коэффициентами.

В данной работе приводится классификация особых точек, и рассматриваются соответствующие им асимптотические разложения. А именно рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$b_n(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^n u(r) + ... + b_i(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^i u(r) + ... + b_0(r)\,u(r) = 0, \qquad (2.1)$$

здесь $b_i(r)$ являются голоморфными функциями.

Если коэффициент при старшей производной $b_n(r)$ обращается в ноль в некоторой точке, без ограничения общности можно считать, что эта точка $r = 0$, то уравнение (1), вообще говоря, имеет особенность в нуле. В этом случае ноль может быть регулярной или иррегулярной особой точкой. Уравнение (1) может быть сведено к уравнению вида

$$\hat{H}u = H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u = 0, \qquad (2.2)$$

где $\hat{H}$ – дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами

$$H(r,p) = \sum_{i=0}^{n} b_i'(r)\,p^i$$

Здесь $b_i'(r)$ – соответствующие голоморфные функции. k – целое число, причем $k >= -1$. Очевидно, что значение k определяется неоднозначно. В зависимости от минимального значения k можно разбить уравнения на три типа, каждому из которых соответствует свой тип асимптотик.

К первому типу отнесем те уравнения, для которых $k = -1$. В этом случае мы имеем невырожденные дифференциальные уравнения, решения которых не имеют особенностей в нуле.

В случае $k = 0$ уравнения являются вырожденными. $k = 0$ – регулярная особая точка, асимптотика решения является конормальной.

$k \in N$ – иррегулярные особенности. Эти уравнения называются уравнениями нефуксова типа. Примером асимптотик нефуксова типа являются асимптотики вида

$$\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i \qquad (2.3)$$

Нефуксовы асимптотики вида (3) соответствуют случаю, когда многочлен $H(0,p)$ имеет только простые корни. Здесь через $\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i$ обозначен асимптотический ряд, $p_j, j = 1, ..., n$ – корни многочлена, α^j_{k-i}, σ_j – некоторые числа.

Если многочлен $H(0,p)$ имеет кратные корни, и $k = 1$ то асимптотика в окрестности иррегулярной точки p_j соответствующей кратному корню, будет представима в виде суммы конормальной асимптотики и асимптотичского разложения вида

$$\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{p_j}{r} + \sum_{i=1}^{m-v} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{m}}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{l=0}^{\infty} b_l^j r^l \tag{2.4}$$

Примером такой особой точки является бесконечно удаленная точка для уравнения

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + ... + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + ... + a_0(x)\, u(x) = 0 \tag{2.5}$$

здесь коэффициенты $a_i(x)$ регулярны на бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга $|x| > a$, что функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}$. Уравнение (5) путем замены $x = \frac{1}{r}$ приводится к уравнению (2) при $k = 1$. А значит представляет собой сумму асимптотики (4) и конормальной асимптотики. Впервые эта задача рассматривалась в работе Томэ[3].

Если $k > 1$ и p_j корень многочлена $H(0,p)$ является кратным, то асимптотика решения может быть представима в виде конормальной асимптотики и асимптотического разложения

$$\sum_{j} \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{km-v} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{m}}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{l=0}^{\infty} b_l^j r^l \tag{2.6}$$

Гипотеза. *Все асимптотики решения уравнения (1) представимы в виде суммы нефуксовой асимптотики (6) и конормальной асимптотики.*

Литература

1. *Poincare H.* Sur les integrales irregulieres des equations lineaires. //Acta math. 1886, v. 8, p. 295-344.

2. *Анри Пуанкаре.* Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре. Изд-во «Наука», 1974 г.

3. *Thome L.W.* Zur Theorie der linearen differentialgelichungen. //Journal fur die reine und angewandte Mathematik. 1872

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Б.Д. Кошанов
koshanov@list.ru

УДК 517.9

Для эллиптического уравнения $2l-$го порядка, старшие коэффициенты которого постоянны, в односвязной области с гладкой границей рассмотрена краевая задача с нормальными производными $(k_j-1)-$го порядка, $j=1,\dots,l$, где $1\leqslant k_1<\dots<k_l\leqslant 2l$. При $k_j=j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j=j+1$ – в задачу Неймана. В работе доказана эквивалентность условии фредгольмовости с условием дополнительности, т.е. с условием Шапиро-Лопатинского.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, краевая задача, нормальные производные, фредгольмовость задачи, формула индекса

On the generalized Neumann problem for the high order elliptic equation on a plane

For the elliptic equation of $2l-$th order with of constant real coefficients we consider boundary value problem of the normal derivatives (k_j-1) order, $j=1,\dots,l$, where $1\leqslant k_1<\dots<k_l\leqslant 2l$. When $k_j=j$ it moves into the Dirichlet problem, and when $k_j=j+1$ it moves into the Neumann problem. In this paper, we prove the equivalence of the Fredholm condition with the complementarity condition, i.e. with the condition of Shapiro-Lopatinskij.

Keywords: elliptic equation, boundary value problem, normal derivatives, Fredholm problem, index formula

В докладе исследуется эллиптическое уравнение $2l$-го порядка в односвязной области D

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r\frac{\partial^{2l}u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r}+\sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a_{rk}(x,y)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r}=f(x,y),(x,y)\in D \qquad (1)$$

с коэффициентами $a_r\in\mathbb{R}$ и $a_{rk}\in C^\mu(\overline{D})$, $\Gamma=\partial D\in C^{2l,\mu},\ 0<\mu<1$.

Задача S. Обобщенная задача Неймана заключается в отыскании решения $u(x,y)$ уравнения (1) в области D по краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right|_\Gamma=g_j,\quad j=1,\dots,l, \qquad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН Республики Казахстан (грант AP05135319).

Кошанов Бакытбек Данебекович, д.ф.-м.н., профессор, Главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Bakytbek Koshanov (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

где $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль и натуральные k_j подчинены условию $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_l \leqslant 2l$.

Нормальная производная $(\partial/\partial n)^r$ порядка r понимается граничный оператор

$$\left(n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r$$

и аналогичный смысл имеет граничный оператор $(\partial/\partial e)^r$ по отношению к единичному касательному вектору $e = e_1 + ie_2 = i(n_1 + in_2)$.

Постановка этой задачи при $k_{j+1} - k_j \equiv 1$ для полигармонического уравнения была изучена А.В. Бицадзе в работе [1], где при $k_1 \geqslant 2$ она названа обобщенной задаче Неймана. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен А.А. Дезиным [2]. В классе

$$u \in C^{2l}(D) \cap C^{2l-1,\mu}(\overline{D}), \quad \sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} \in C^{\mu}(\overline{D}),$$

задача (1), (2) была исследована в [3]. Очевидно, этот класс зависит от старших коэффициентов a_r уравнения (1). В более узком классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ эта задача была рассмотрена в [4]. В докладе доказывается, что условие фредгольмовости задачи (1),(2) эквивалентно известному [5] условию дополнительности (или Шапиро– Лопатинского). Также приведена формула ее индекса $\operatorname{ind} S$ удобного для использования.

Теорема 1. *Пусть многочлен* $\det W_g(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ *переменных* $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ *определяется в (4) по вектор- функции*

$$g_j(z) = z^{k_j - k_1}, \ 1 \leqslant j \leqslant l, \tag{3}$$

и пусть n_j *– наивысшая степень, с которой* ζ_j *входит в этот многочлен. Тогда функция*

$$P(t) = \prod\nolimits_{j=1}^{m} (1 + t\nu_j)^{n_j} \det W_g \left(\frac{\nu_1 - t}{1 + t\nu_1}, \ldots, \frac{\nu_m - t}{1 + t\nu_m}\right) \tag{4}$$

является многочленом степени $n = n_1 + \ldots + n_m$.

В этих обозначениях условие фредгольмовости задачи (1), (2) сводится к тому, что многочлен P *не имеет нулей на вещественной оси, а ее индекс дается формулой*

$$\varkappa = 4\left(-N + \sum\nolimits_{i<j} l_i l_j\right), \tag{5}$$

где N *есть число нулей этого многочлена в верхней полуплоскости, взятое с учетом их кратности.*

Доклад основан на результатах совместных исследований с профессором А.П. Солдатовым.

Литература

1. *Бицадзе А.В.* О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения, **24**:5 (1988), 825–831.

2. *Дезин А.А.* Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве W_2^m // Докл. АН СССР, **96**:5 (1954), 901–903.

3. *Кошанов Б.Д., Солдатов А.П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости // Дифференц. уравнения **52**:12 (2016), 1666–1681.

4. *Солдатов А.П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости // Владикав. мат. журнал **19**:3 (2017), 51–58.

5. *Schechter M.* General boundary value problems for elliptic partial differential equations // Comm. Pure and Appl. mathem. **12** (1950), 467–480.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДВУМЕРИЗОВАННЫЕ ЦЕПОЧКИ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

М.Н. Кузнецова

mariya.n.kuznetsova@gmail.com

УДК 517.518

Описаны интегрируемые случаи квазилинейных двумеризованных цепочек вида $u_{n,xy} = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x} + r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y} + q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$. В качестве критерия интегрируемости понимается наличие бесконечного числа редукций в виде систем гиперболического типа, интегрируемых в смысле Дарбу. При исследовании гиперболических систем применяются характеристические алгебры Ли-Райнхарта.

Ключевые слова: двумеризованная цепочка, интегрируемая редукция, характеристическая алгебра Ли, вырожденное условие обрыва, интегрируемая по Дарбу система

Integrable quasilinear two-dimensional chains and characteristic algebras

Integrable cases of quasilinear two-dimensional chains of the form $u_{n,xy} = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x} + r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y} + q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ are described. As an integrability criterion we accept the existence of an infinite number of reductions, which are hyperbolic type systems integrable in the sense of Darboux. Hyperbolic systems are studied by means of the characteristic algebras Lie-Rinehart.

Keywords: two-dimensional lattice, integrable reduction, characteristic Lie algebra, degenerate cutting off condition, Darboux integrable system

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20007).

Кузнецова Мария Николавена, к.ф.-м.н., Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Mariya Kuznetsova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

В настоящее время актуальной является задача классификации уравнений типа двумеризованной цепочки Тоды

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad -\infty < n < \infty. \tag{1}$$

Предполагается, что функция $f = f(x_1, x_2, \cdots x_5)$ является аналитической в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^5$. Искомая функция $u_n = u_n(x, y)$ зависит от вещественных переменных x, y и целой переменной n.

В настоящей работе исследуется подкласс цепочек (1) следующего вида:

$$u_{n,xy} = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x} + r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y} + q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}). \tag{2}$$

Функции $p(x_1, x_2, x_3)$, $r(x_1, x_2, x_3)$, $q(x_1, x_2, x_3)$ предполагаются аналитическими в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^3$.

Многомерные уравнения являются сложными объектами для исследования и, тем более, для классификации. Известно, что существование большого числа интегрируемых редукций указывает на интегрируемость уравнения (см., например, работу [1], в которой существование интегрируемых редукций гидродинамического типа рассматривается в качестве признака интегрируемости). В настоящей работе мы используем аналогичную идею - называя уравнение интегрируемым, если оно допускает бесконечный класс редукций в виде систем гиперболического типа, интегрируемых в смысле Дарбу.

При описании интегрируемых по Дарбу систем уравнений гиперболического типа давно используется понятие характеристической алгебры Ли [2]. Переход к более общим алгебрам Ли-Райнхарта [3] открывает новые возможности [4, 5, 6].

Условие обрыва $u_0 = \varphi(x, y)$ называется вырожденным условием обрыва для цепочки (1), если оно сводит (1) к двум независимым полубесконечным цепочкам, определенным на интервалах $-\infty < n < 0$ и $0 < n < +\infty$, соответственно.

Допустим, что для цепочки (1) существуют вырожденные условия обрыва в двух разных точках $n = N_1$, $n = N_2$. Тогда цепочка (1) сводится к конечной системе гиперболического типа:

$$\begin{aligned} &u_{N_1} = \varphi_1(x, y), \\ &u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad N_1 < n < N_2, \\ &u_{N_2} = \varphi_2(x, y). \end{aligned} \tag{3}$$

Определение 1. *Цепочка (1) называется интегрируемой, если существуют функции φ_1 и φ_2, такие, что для любого выбора пары целых чисел N_1, N_2, где $N_1 < N_2 - 1$, система гиперболического типа (3) является интегрируемой по Дарбу.*

Большой класс интегрируемых цепочек вида (1) представлен в работе [7], где они были исследованы в рамках симметрийного подхода. Важным является тот факт, что все уравнения из этого класса являются интегрируемыми в смысле Определения 1. Как известно, интегрируемые по Дарбу системы обладают точным решением. Следовательно, гиперболическая система (3) обладает точным решением, которое может быть продолжено до решения исходной цепочки (1). В силу того, что выбор N_1, N_2 произволен, исходная цепочка имеет множество частных решений.

В работах [5, 6] были описаны интегрируемые в смысле Определения 1 двумеризованные квазилинейные цепочки вида

$$u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y} + p_n u_{n,x} + r_n u_{n,y} + q_n, \tag{4}$$

при условии, что $\frac{\partial \alpha_n}{\partial u_{n\pm1}} \neq 0$. Здесь коэффициенты зависят от трех последовательных переменных $\alpha_n = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $p_n = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $r_n = r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $q_n = q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$.

В данной работе рассматривается частный случай (2) цепочки (4), когда α_n тождественно равна нулю. Мы требуем, чтобы выполнялись следующие условия: хотя бы одна из производных

$$\frac{\partial p_n}{\partial u_{n+1}} \neq 0, \quad \frac{\partial p_n}{\partial u_{n-1}} \neq 0 \tag{5}$$

не равна нулю.

Главным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Если цепочка (2), (5) интегрируема в смысле Определения 1, тогда она приводится посредством точечных преобразований к одной из следующих:*

$$u_{n,xy} = \left(e^{u_n - u_{n-1}} - e^{u_{n+1} - u_n}\right) u_{n,x}, \tag{6}$$

$$u_{n,xy} = \left(-u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}\right) u_{n,x}. \tag{7}$$

Цепочки (6), (7) были известны ранее (см. [7]).

Литература

1. *Ferapontov E.V., Khusnutdinova K.R.* On the integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems // Commun. Math. Phys. **248**:1 (2004), 187-206.

2. *Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.* Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. — 376стр.

3. *Millionshchikov D.* Lie algebras of slow growth and Klein-Gordon PDE // Algebr. Represent. **21**:5 Theor. (2018), 1037-1069.

4. *Habibullin I.T.* Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for (2+ 1)-dimensional lattices // Physica Scripta **87**:6 (2013), 065005.

5. *Habibullin I.T., Poptsova (Kuznetsova) M.N.* Classification of a subclass of two-dimensional lattices via characteristic Lie rings // SIGMA **13** (2017), 073, 26 p.p.

6. *Habibullin I.T., Poptsova (Kuznetsova) M. N.* Algebraic properties of quasilinear two-dimensional lattices connected with integrability // Ufa Math. J., **10**:3 (2018), 86-105.

7. *Shabat A.B., Yamilov R.I.* To a transformation theory of two-dimensional integrable systems // Phys. Lett. A **227**:1-2. (1997), 15-23.

ЛОКАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ УРАВНЕНИЯ КАНА – ХИЛЛИАРДА

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов
kulikov_d_a@mail.ru, anat_kulikov@mail.ru

УДК 517.518

Рассматривается уравнение Кана – Хиллиарда вместе с тремя типами краевых условий. Во всех краевых задачах изучен вопрос о существовании, устойчивости и асимптотическом представлении пространственно неоднородных состояний равновесия. Использован метод качественной теории бесконечномерных динамических систем.

Ключевые слова: уравнение Кана – Хиллиарда, устойчивость, бифуркации, асимптотика

Local attractors of Cahn – Hilliard equation

The Cahn – Hilliard equation is considered with 3 types of boundary conditions. For all boundary value problem the questions about existence, stability and asymptotically representation of spatial nongomogeneous solutions are studied. Qualitative theory methods for infinite-dimensional dynamical systems are used.

Keywords: Cahn – Hilliard equation, stability, bifurcations,asymptotic

Рассмотрено известное в математической физике уравнение

$$u_t = (-u_{xx} - au + u^3)_{xx}, \tag{1}$$

которое принято называть уравнением Кана – Хиллиарда [1] и впервые появилось в физической химии в связи с изучением реакций в двухкомпонентных средах [2]. В уравнении (1) неизвестная функция зависит от одной пространственной переменной x. Для приложений, быть может, более актуален вариант, когда $u = u(t, x, y)$ и рассматривается уравнение

$$u_t = \Delta(-\Delta u - au + u^3),$$

где Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным, но в рамках данного сообщения ограничимся изучением уравнения Кана – Хиллиарда в форме (1) вместе с краевыми условиями следующих трёх типов [1,2]

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0, \tag{2}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \tag{3}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00672).

Куликов Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Anatoly Kulikov (Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Куликов Дмитрий Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, ЯрГУ имени П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Dmitry Kulikov (Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Если обратиться к краевой задаче (КЗ) (1), (2), то при ее анализе возникает достаточно стандартная бифуркационная задача. КЗ (1), (2) имеет пространственно однородное состояние равновесия $u(t,x) = 0$. При $a \in (-\infty, 1]$ оно асимптотически устойчиво и при переходе a в интервал $(1, \infty)$ теряет устойчивость.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $a = 1+\varepsilon$ КЗ (1), (2) имеет два асимптотически устойчивых пространственно неоднородных состояния равновесия*

$$u_{\pm}(x,\varepsilon) = \pm 2\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon^{1/2}\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2}\sin 3x + o(\varepsilon^{3/2}).$$

В иных терминах при указанных a реализуется бифуркация типа "вилка"(или бифуркация Тьюринга – Пригожина).

Иная ситуация возникает при анализе КЗ (1), (3). КЗ (1), (3) имеет однопараметрическое семейство однородных состояний равновесия $u(t,x) = \alpha$, а также интеграл $M_0(u) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi u(t,x)dx = \alpha, \alpha \in R$ и произвольно. Наличие интеграла $M_0(\alpha) = \alpha$ означает, что сохраняется пространственное среднее, а при наличии условий непроницаемости (3) может быть проинтерпретировано как следствие закона сохранения массы.

Пусть $a \in (1, \infty)$. Положим $\alpha = \alpha(\varepsilon) = \pm\sqrt{\dfrac{a-1-\gamma\varepsilon}{3}}, \alpha_0 = \alpha(\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1, \gamma = \pm 1$ и соответствующий знак у γ будет выбран позднее.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и любом $a > 1$ КЗ (1), (3) имеет два пространственно неоднородных состояния равновесия*

$$u_{\pm}(x,\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) \pm \varepsilon^{1/2}v_1(x) + \varepsilon v_2 \pm \varepsilon^{3/2}v_3(x) + o(\varepsilon^{3/2}), \qquad (5)$$

$$v_1(x) = (\frac{\gamma}{d})^{1/2}\cos x, v_2(x) = -\frac{\alpha_0\gamma}{2d}\cos 2x,$$
$$v_3(x) = (\frac{\gamma}{d})^{3/2}\frac{1}{32}(6\alpha_0^2 - 1)\cos 3x,\ d = \frac{3}{2}(\frac{1}{2} - \alpha_0^2).$$

Решения (5) существуют, если $d \neq 0$ и при $d > 0$ (выбираем $\gamma = 1$) состояния равновесия (5) устойчивы, а при $d < 0 (\gamma = -1)$ они неустойчивы. Подчеркнём, что $d > 0$, если $\alpha_0^2 < 1/2$.

Итак, при $\alpha_0 \in (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия (5) формируют два локальных аттрактора $M_{\pm}(\varepsilon) (dim M_{\pm}(\varepsilon) = 1)$. При $|\alpha_0| > 1/\sqrt{2}$ получаем уже пару локально инвариантных седловых многообразия $M_{\pm}(\varepsilon)$. При таких $\alpha_0(\alpha(\varepsilon))$ будут устойчивыми пространственно однородные состояния равновесия $u(t,x) = \alpha(\varepsilon)$.

Аналогичный результат имеет место для КЗ (1), (4). Она имеет при соответствующем выборе $\alpha_0(\alpha(\varepsilon))$ и $a > 1$ двупараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия

$$u(x,\varepsilon,\varphi) = \alpha(\varepsilon) + \varepsilon^{1/2}v_1(x+\varphi) + \varepsilon v_2(x+\varphi) + \varepsilon^{3/2}v_3(x+\varphi) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (6)$$

где $\varphi \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$, а функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$ были указаны в формулировке теоремы 2.

При $|\alpha_0| < 1/\sqrt{2}$ двупараметрическое семейство (6) образует двумерный аттрактор $M_2(\varepsilon)$ и его формирующие пространственно неоднородные состояния равновесия устойчивы (при этом в соответствующих формулах $\gamma = 1$).

Если же $|\alpha_0| > 1/\sqrt{2}$, то получаем двумерное локальное инвариантное многообразие, сформированное неустойчивыми пространственно неоднородными состояниями равновесия.

Обоснование результатов использует метод интегральных многообразий, теорию нормальных форм [3,4].

Литература

1. *Cahn J.W., Hilliard J.E.* Free energy of a Nonuniform system. I.Interfacial Free Energy // J. Chim. Phys, **28**:2 (1958), 258-267.

2. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — New-York: Springer-Verlag, 1997.

3. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации в уравнениях Кана-Хиллиарда, Курамото-Сивашинского и их обобщениях // ЖВМиМФ, **59**:4 (2019), 670-683.

4. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Пространственно неоднородные решения в двух краевых задачах для уравнения Кана-Хиллиарда // Научные ведомости БелГУ, **51**:2 (2019), в печати.

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ – НЕЙМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ОПЕРАТОРА СМЕШАННОГО ТИПА

А.Н. Кучкарова

kuchkarova_aigul@mail.ru

УДК 517.518

Найдены собственные значения спектральной задачи для вырождающегося оператора смешанного типа и построена соответствующая система собственных функций

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, спектральная задача, собственные числа, собственные функции, полнота

Construction of a system of eigenfunctions of the Tricomi-Neumann type problem for a degenerate operator of mixed type

Eigenvalues of the spectral problem for the degenerate operator of mixed type are found and the corresponding eigenfunctions system is constructed.

Keywords: equation of mixed type, spectral problem, eigenvalues, eigenfunctions, completeness

Кучкарова Айгуль Наилевна, к.ф.-м.н., доцент, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Aigul Kuchkarova (Bashkir State University ,Ufa , Russia)

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $m > 0$, в области D, ограниченной: 1) "нормальной"кривой Γ_0 : $x^2 + \frac{1}{\alpha^2} y^{2\alpha} = 1$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(-1, 0)$ и $A_2(1, 0)$; 2) характеристиками OC ($x - \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = 0$) и CA_2 ($x + \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = 1$) уравнения (1) при $y < 0$, где $C = (\frac{1}{2}, -(\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}})$, $O = (0, 0)$, $\alpha = \frac{m+2}{2}$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую спектральную задачу.

Задача. *Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x, y) \in \mathrm{C}(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(D_0 \cup D_1), \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \ \ (x, y) \in D_0 \cup D_1, \tag{3}$$

$$u(x, y) = 0, \ \ (x, y) \in \Gamma, \tag{4}$$

$$u_y(x, 0) = 0, \ \ -1 < x < 0, \tag{5}$$

$$u(x, y) = 0, \ \ (x, y) \in OC. \tag{6}$$

Пусть $\gamma_n = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} + n$, $n = 0, 1, 2, ...$, $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$. Тогда собственные значения $\lambda_{n,m}$ определяются как нули функции Бесселя $J_{\gamma_n}(\lambda)$, т.е. m –й корень уравнения $J_{\gamma_n}(\lambda) = 0$. Соответствующая система собственных функции задачи (2)-(6) имеет вид

$$u_{n,m}(x, y) =$$

$$= \begin{cases} c_{n,m} r^{-\beta} J_{\gamma_n}(\lambda_{n,m} r)(\sin\frac{\varphi}{2})^{1-2\beta}(F(\frac{1}{2}+\gamma_n, \frac{1}{2}-\gamma_n, \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\frac{\varphi}{2}) \\ +\dfrac{\Gamma(\gamma_n+\beta)\Gamma(\frac{3}{2}-\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)\Gamma(1+\gamma_n-\beta)} F(\beta+\gamma_n, \beta-\gamma_n, \dfrac{1}{2}+\beta; \sin^2\dfrac{\varphi}{2})), \ \ (r, \varphi) \in D_0, \\ c_{n,m}\sigma^{-\beta}\theta^{-(\beta+\gamma_n)} J_{\gamma_n}(\lambda_{n,m}\sigma) \dfrac{\Gamma(\gamma_n+\beta)\Gamma(\frac{1}{2}+\gamma_n)}{\Gamma(1+2\gamma_n)\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)} \\ F(\beta+\gamma_n, \dfrac{1}{2}+\gamma_n, 1+2\gamma_n; \dfrac{1}{\theta}), \ \ (\sigma, \theta) \in D_1. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $c_{n,m}$ – действительные числа.

Отметим, что ранее в работах [1]-[4] построены собственные функции задач Трикоми, Трикоми–Неймана и Геллерстедта.

Литература

1. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 5. С.1147-1161.

2. *Сабитов К.Б., Бибакова С.Л.* Построение собственных функций задачи Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение //Математические заметки. 2003. Т. 74. № 1. С. 76-87.

3. *Кучкарова А.Н.* Решение краевой задачи методом спектрального анализа // Ученые записки. Сборник научных статей физико-математического факультета

Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. Уфа, 2007. Выпуск 8. с. 15-22

4. *Сабитов К.Б.* К теории уравнения смешанного типа М.ФИЗМАТЛИТ. 2014. 304с. (гл.2)

АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ИСТОЧНИКА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.С. Леонов

asleonov@mephi.ru

УДК 519.642.8

Обратная задача нахождения источника решается по схеме регуляризованного проекционного метода с апостериорной оценкой точности, которая вычисляется с помощью нового, «быстрого», алгоритма.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, некорректные задачи, апостериорная оценка точности

A-posteriori error estimate in source recovery for linear PDEs

The inverse source problem is solved according to the scheme of a regularized projection method with an a-posteriori error estimate, which is calculated using a new "fast" algorithm.

Keywords: partial differential equations, ill-posed problems, a-posteriori error estimate

1. Рассмотрим *прямую задачу*: найти решение $u(\mathbf{x},t) \in U$ уравнения в частных производных $D_t u(\mathbf{x},t) = L_x u(\mathbf{x},t) + g(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in G$, $t > 0$ в области $G \subset \mathbb{R}^N$ при выполнении граничных условий $l_x u(\mathbf{x},t) = a(t)$, $\mathbf{x} \in \partial G$, $t \geqslant 0$, и начальных условий $d_t u(\mathbf{x},t)|_{t=0} = b(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in G$. Здесь D_t, L_x – линейные дифференциальные операторы по переменным t и $\mathbf{x}$ соответственно, действующие из банахова пространства U в банахово пространство V, l_x, d_t – линейные дифференциальные операторы, действующие из U в банаховы пространства V_x и V_t. Функции источника $g(\mathbf{x},t)$, $f(\mathbf{x})$ таковы, что $g(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x}) \in V$, $f(\mathbf{x}) \in V_x$. Считаем, что прямая задача корректно поставлена в указанных функциональных пространствах, т.е. она однозначно разрешима и устойчива для данных $g(\mathbf{x},t), f(\mathbf{x}), a(t), b(\mathbf{x})$ из этих пространств. В дальнейшем мы фиксируем известные функции $g(\mathbf{x},t), a(t), b(\mathbf{x})$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00159-а и 19-51-53005-ГФЕН-а), а также Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (Московского инженерно-физического института), проект № 02.а03.21.0005 от 27.08.2013.

Леонов Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ (Москва, Россия); Alexander S. Leonov (National research nuclear university MEPhI, Moscow, Russia)

и будем обозначать линейный ограниченный оператор решения прямой задачи с различными допустимыми функциями $f(\mathbf{x})$ как A: $u = Af$.

2. Нас интересует *обратная задача*: считая, что решение прямой задачи удовлетворяет дополнительному условию $Bu = F$, найти неизвестную функцию источника $f(\mathbf{x}) \in V_x$. Здесь B – линейный ограниченный оператор, действующий из U в банахово пространство W, а $F \in W$ – известный элемент. Задачи такого рода интенсивно изучаются (см., например, [1]). Они часто оказываются некорректно поставленными, и для их решения требуется применять методы регуляризации. В данном случае мы используем следующий подход. Предположим, что обратная задача, т.е. линейное операторное уравнение $B(Af) = F$, имеет единственное решение $\bar{f}(\mathbf{x}) \in V_x$. Будем решать уравнение формально с помощью разновидности проекционного метода, описанной, например, в [2]. Для этого предположим, что справедливо разложение $\bar{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(\mathbf{x})$ по базису $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty} \subset V_x$. Аппроксимируем $\bar{f}$ элементами $f_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(\mathbf{x})$ и вычислим приближенно разложения элементов $B(A\varphi_k)$ и F по базису $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W$: $B(A\varphi_k) \approx \sum_{l=1}^{m} A_{lk}\psi_l$, $F \approx \sum_{l=1}^{m} F_l \psi_l$. Тогда приближенное уравнение для нахождения источника принимает вид $\sum_{k=1}^{n} A_{lk} f_k = F_l$, $l = 1, ..., m$. Итак, точное операторное уравнение обратной задачи $B(Af) = F$ сводится к конечномерному уравнению $\hat{A}\hat{f} = \hat{F}$ с матрицей $\hat{A} = [A_{lk}]$ и столбцами $\hat{f} = [f_k] \in \mathbb{R}^n$, $\hat{F} = [F_l] \in \mathbb{R}^m$. При этом данные $\hat{F}$ этого уравнения могут быть заданы с ошибкой, т.е. известен приближенный элемент $\hat{F}_\delta \in \mathbb{R}^m$ и оценка его точности $\delta > 0$ такие, что $||\hat{F} - \hat{F}_\delta|| \leqslant \delta$.

Решим уравнение $\hat{A}\hat{f} = \hat{F}$ с приближенными данными $\hat{F}_\delta$, используя, например, метод регуляризации А.Н.Тихонова, и получим конечномерное приближенное решение $\hat{f}_\eta = [f_k^{(\eta)}]$, $\eta = (\delta, 1/n, 1/m)$ нашей задачи, и далее – приближенный элемент $f_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k^{(\eta)} \varphi_k(\mathbf{x})$. При адекватном выборе параметра регуляризации такой подход обеспечивает сходимость $f_\eta(\mathbf{x}) \to \bar{f}(\mathbf{x})$ в пространстве V_x при $\eta \to 0$ (см., например, [2]).

3. Получив приближенное решение $f_\eta(\mathbf{x})$ рассматриваемой некорректно поставленной задачи, мы сталкиваемся с проблемой оценки его точности. В большинстве работ по решению некорректных задач даются *теоретические априорные оценки точности*. Они, как правило, получаются при очень жестких дополнительных ограничениях на искомое решение. Кроме того, эти оценки зачастую содержат константы, практическое вычисление которых затруднительно. Поэтому получить априорную оценку точности в виде числа в большинстве случаев невозможно. Как альтернатива, в последнее время развита теория *апостериорных оценок точности* решений некорректных задач. Мы будем использовать для оценки подход из [3].

Далее везде $||\cdot||$, $(\cdot,\cdot)$ – нормы и скалярные произведения в евклидовых пространствах $\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^m$. Зная $f_\eta(\mathbf{x})$, вычислим величины $\Delta_\eta = ||\hat{A}\hat{f}_\eta - \hat{F}_\delta||$, $R_\eta = ||\hat{f}_\eta||$. Введем множество $\mathcal{F}_\eta = \{\hat{f} \in \mathbb{E}^n : ||\hat{A}\hat{f} - \hat{F}_\delta|| \leqslant C\Delta_\eta, ||\hat{f}|| \leqslant CR_\eta\}$, где $C > 1$ заданная константа, и предположим, что элемент $\widehat{\bar{f}} \in \mathbb{E}^n$, определяющий проекцию точного решения $\bar{f}(\mathbf{x})$ на подпространство $\mathrm{span}(\varphi_1, ..., \varphi_n)$, принадлежит множеству $\mathcal{F}_\eta$. Тогда справедливо неравенство

$$||\hat{f}_\eta - \widehat{\bar{f}}|| \leqslant \sup\{||\hat{f}_\eta - \hat{f}||:\ \hat{f} \in \mathcal{F}_\eta\} \stackrel{def}{=} \hat{\varepsilon}(\eta), \tag{1}$$

и функция $\hat{\varepsilon}(\eta)$ есть *глобальная апостериорная оценка точности* [3] конечномерного приближенного решения $\hat{f}_\eta$. Ее можно найти, решая экстремальную задачу (1) с помощью известных численных методов оптимизации.

4. В докладе предлагается новый алгоритм приближенного решения задачи (1). Пусть $\hat{v}_\eta = \hat{F}_\delta - \hat{A}\hat{f}_\eta$, $D_\eta^2 = (C^2-1)\,\|\hat{v}_\eta\|^2$, $r_\eta^2 = (C^2-1)R_\eta^2$. Для элементов $\hat{w} \in \mathbb{E}^n, ||\hat{w}|| = 1$, введем функционалы $t_\eta^{(I)}(\hat{w}) = \frac{\sqrt{(\hat{w},\hat{f}_\eta)^2 + r_\eta^2} - (w,\hat{f}_\eta)}{||\hat{w}||} > 0$, $t_\eta^{(A)}(\hat{w}) = \frac{\sqrt{(\hat{A}\hat{w},\hat{v}_\eta)^2 + D_\eta^2||\hat{A}\hat{w}||^2} + (\hat{A}\hat{w},\hat{v}_\eta)}{||\hat{A}\hat{w}||^2} > 0$. Определим также величину

$$\rho_\nu(\eta) = \sup_{\hat{w}}\{\xi_\nu[t_\eta^{(A)}(\hat{w}), t_\eta^{(I)}(\hat{w})]:\ ||\hat{w}|| = 1\}, \tag{2}$$

где $\xi_\nu(a,b) = \frac{ab}{\sqrt[\nu]{a^\nu + b^\nu}},\ a, b > 0,\ \nu \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Справедливо неравенство* $\rho_\nu(\eta) \leqslant \hat{\varepsilon}(\eta) \leqslant 2^{\frac{1}{\nu}}\rho_\nu(\eta)$.

Таким образом, величина $\rho_\nu(\eta)$ есть оценка для $\hat{\varepsilon}(\eta)$ с относительной точностью $\epsilon = 2^{\frac{1}{\nu}} - 1$, которая управляется числом ν (например, взяв $\nu = 60$, получим $\epsilon \approx 0.0116$). Число $\rho_\nu(\eta)$ можно принять как приближенную апостериорную оценку точности решений рассматриваемой обратной задачи определения источника. Такой метод апостериорной оценки точности является гораздо более быстродействующим (в среднем, в 3 – 5 раз, в зависимости от решаемой задачи), чем ранее предложенные. Это связано с тем, что, в отличии от задачи (1), в экстремальной задаче (2) нахождения числа $\rho_\nu(\eta)$ имеется лишь одно простое ограничение. Детали решения задачи (2), кратко изложенные в работе [4], конкретизируются в докладе для обратной задачи определения источника.

5. В докладе приводятся примеры численного решения по предлагаемой методике обратной задачи нахождения источника в начально-краевых задачах для уравнения теплопроводности и колебаний, включая апостериорную оценку точности получаемых решений с помощью величины $\rho_\nu(\eta)$. В применяемом варианте проекционного метода используются сплайновые базисы метода конечных элементов. Предлагаемая методика применима с небольшими изменениями и для нахождения источника вида $g(\mathbf{x},t)f(t)$ с неизвестной функцией $f(t)$.

Литература

1. *Prilepko A.I., Kamynin V.L. and Kostin A.B.* Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time // J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **26**:4 (2017), 523-539.

2. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. Изд. 2. — Москва: Либроком, 2013.

3. *Леонов А.С.* Апостериорные оценки точности решения некорректно поставленных обратных задач и экстраоптимальные регуляризующие алгоритмы их решения // Сиб. журн. вычисл. матем. **15**:1 (2012), 85-102.

4. *Leonov A.S., Yanfei Wang, Yagola A.G.* Piecewise uniform regularization for the inverse problem of microtomography with a-posteriori error estimate // Inverse Problems in Science and Engineering, (2018) DOI: 10.1080/17415977.2018.1561676.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ПОДСТАНОВКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ

А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова
miro73@mail.ru, lbmironova@yandex.ru

УДК 517.956, 517.958

Получены нелокальные преобразования типа Коула-Хопфа, переводящие уравнения Лиувилля с тремя и четырьмя независимыми переменными в простейшие уравнения Бианки. Построены решения указанных уравнений Лиувилля, содержащие произвольные функции.

Ключевые слова: уравнение Лиувилля, уравнение Бианки, нелокальное преобразование

On nonlocal substitutions for Liouville equations

We obtained the non-local transformations of the Cole-Hopf type, which transfer the Liouville equations with three and four independent variables into the Bianchi equations. The solutions with arbitrary functions of these Liouville equations are constructed.

Keywords: Liouville equation, Bianchi equation, non-local transformation

Уравнение

$$u_{xyz} = \lambda e^{u} \tag{1}$$

может рассматриваться как трехмерный аналог уравнения Лиувилля

$$u_{xy} = \lambda e^{u}. \tag{2}$$

Уравнение (2), в частности, играет ключевую роль в задаче групповой классификации гиперболических уравнений второго порядка [1, с. 116–125]

$$v_{xy} + a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v = 0.$$

Миронов Алексей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, Елабужский институт КФУ (Елабуга, Россия); Alexey Mironov (Yelabuga Institute of Kazan (Volga region) Federal University, Yelabuga, Russia)

Миронова Любовь Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт КФУ (Елабуга, Россия); Lyubov Mironova (Yelabuga Institute of Kazan (Volga region) Federal University, Yelabuga, Russia)

Уравнение (1) используется при изучении групповых свойств уравнения Бианки третьего порядка [2]

$$v_{xyz} + a(x,y,z)v_{xy} + b(x,y,z)v_{yz} + c(x,y,z)v_{xz} + \\ + d(x,y,z)v_x + e(x,y,z)v_y + f(x,y,z)v_z + g(x,y,z)v = 0.$$

Здесь построено нелокальное преобразование, переводящее уравнение (1) в простейшее уравнение Бианки

$$v_{xyz} = 0, \tag{4}$$

которое имеет зависящее от трех произвольных функций общее решение вида

$$v = \alpha(x,y) + \beta(x,z) + \gamma(y,z). \tag{5}$$

При этом используется алгоритм, основанный на применении групповых методов [3, с. 237–241].

Уравнение (1) допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z - (\xi'(x) + \eta'(y) + \zeta'(z))\partial_u,$$

где $\xi(x)$, $\eta(y)$, $\zeta(z)$ — произвольные функции.

С другой стороны, уравнение (4) допускает алгебру Ли операторов

$$X_0 = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z,$$

где $\xi(x)$, $\eta(y)$, $\zeta(z)$ также произвольны. Кроме того, как всякое линейное уравнение, уравнение (4) допускает оператор растяжения $Y = v\partial_v$.

В связи с этим предположим, что существует нелокальное преобразование

$$u = \varphi(v, v_x, v_y, v_z) \tag{6}$$

такое, что система уравнений (1), (4), (6) допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z - (\xi'(x) + \eta'(y) + \zeta'(z))\partial_u, \quad Y = v\partial_v.$$

Должны выполняться соотношения

$$\underset{1}{Y}(u-\varphi)|_{u=\varphi} = v\varphi_v + v_x\varphi_{v_x} + v_y\varphi_{v_y} + v_z\varphi_{v_z} = 0, \tag{7}$$

$$\underset{1}{X}(u-\varphi)|_{u=\varphi} = -(\xi' + \eta' + \zeta') + \xi' v_x\varphi_{v_x} + \eta' v_y\varphi_{v_y} + \zeta' v_z\varphi_{v_z} = 0, \tag{8}$$

где $\underset{1}{X}$, $\underset{1}{Y}$ — первые продолжения операторов X, Y.

Учитывая, что функция v имеет вид (5), из (7)–(8) получаем систему

$$(\alpha+\beta+\gamma)\varphi_v + (\alpha_x+\beta_x)\varphi_{v_x} + (\alpha_y+\gamma_y)\varphi_{v_y} + (\beta_z+\gamma_z)\varphi_{v_z} = 0, \\ -(\xi'+\eta'+\zeta') + \xi'(\alpha_x+\beta_x)\varphi_{v_x} + \eta'(\alpha_y+\gamma_y)\varphi_{v_y} + \zeta'(\beta_z+\gamma_z)\varphi_{v_z} = 0,$$

которой удовлетворяет соотношение

$$u = \varphi(v, v_x, v_y, v_z) = \ln\frac{cv_xv_yv_z}{v^3}. \tag{9}$$

Подстановка (9) в уравнение (1) с учетом (5) приводит к формуле, определяющей класс решений уравнения (1), зависящих от трех произвольных функций

$$u = \ln\left(-\frac{6}{\lambda}\frac{f_1'(x)f_2'(y)f_3'(z)}{(f_1(x)+f_2(y)+f_3(z))^3}\right).$$

Здесь $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Аналогично может быть рассмотрено уравнение

$$u_{xyzt} = \lambda e^u.$$

С помощью нелокальной подстановки построено его решение

$$u = \ln\left(\frac{24}{\lambda}\frac{f_1'(x)f_2'(y)f_3'(z)f_4'(t)}{(f_1(x)+f_2(y)+f_3(z)+f_4(t))^4}\right),$$

где $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$, $f_4(t)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1978.

2. *Миронов А.Н.* Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка // Матем. заметки, **94**:3 (2013), 389-400.

3. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наукова думка, 1989.

О КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИФФУЗНОЙ МЕРОЙ

Ф.Х. Мукминов

mfkh@rambler.ru

УДК 517.954,517.956.45,517.958:531.72

Рассматривается первая смешанная задача для анизотропного параболического уравнения с диффузной мерой в правой части. Уравнение имеет переменные показатели нелинейности. Установлена новая версия формулы интегрирования по частям в виде двух неравенств. Она позволила упростить доказательство существования решения задачи. Оно не использует осреднение Ландеса. Доказана также единственность решения задачи.

Ключевые слова: диффузная мера, существование решения, единственность решения, параболическое уравнение, формула интегрирования по частям.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00428 а).

Мукминов Фарит Хамзаевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Farit Mukminov (Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences State , Ufa, Russia)

On the correctness of a mixed problem for an anisotropic parabolic equation with a diffuse measure

The first mixed problem for an anisotropic parabolic equation with a diffuse measure on the right-hand side is considered. The equation has variable nonlinearities. A new version of the integration by partformula is established in the form of two inequalities. It allowed us to simplify the proof of the existence of a solution to the problem. It does not use the Landes averaging. The uniqueness of the solution of the problem is also proved.

Keywords: diffuse measure, existence of a solution, uniqueness of a solution, parabolic equation, integration formula by parts.

Пусть Ω — произвольная ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. В цилиндрической области $D^T = (0,T)\times\Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$u_t = \mathrm{div} a(x,u,\nabla u) + b(x,u,\nabla u) + \mu,\ \ a = (a_1,...,a_n), \tag{1}$$

$$u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t>0\}\times\partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in L_1(\Omega). \tag{3}$$

Функция $a(x,r,y)$ – удовлетворяет условиям

$$a(x,r,y)\cdot y \geqslant \delta_0 S(x,y) - CF(x), \ \ \forall r\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^n, \ \ S(x,y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^{p_i(x)},$$

$$|a_j(x,r,y)|^{\overline{p}_j(x)} \leqslant C(F(x) + |r|^q + S(x,y)),\ \frac{1}{\overline{p}_j} + \frac{1}{p_j} = 1,\ j = 1,...,n,$$

при всех $r\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^n$, $x\in\Omega$; здесь $F(x)\in L_1(\Omega)$,

$$q < p_\infty = \max\{p_i\}, \ \ p_i = \inf\{p_i(x), x\in\Omega\}.$$

Выполнено условие монотонности

$$(a(x,r,y) - a(x,r,z))\cdot(y-z) > 0,\ y\neq z.$$

Пусть

$$|b(x,r,y)| \leqslant F(x);\ \ \forall r\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^n,\ x\in\Omega;$$

Пространство $\mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$ определяется как пополнение пространства $C_0^1(D^T)$ по норме

$$||u||_{W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)} = \sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||_{p_i(\cdot),D^T} = \|\nabla u\|_{\mathbf{p},D^T}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда существует ренормализованное решение задачи (1) – (3) с правой частью вида* $\mu = f + \mathrm{div} G + g_t$, *где* $f\in L_1(D^T)$, $G_i \in L_{p(\cdot)}(D^T)$, $g\in \mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$.

Доказательство опирается на установленную в работе лемму об интегрировании по частям :

Лемма 1. *Пусть* $\beta(r)$ *– непрерывная неубывающая функция, и измеримые функции* $v : D^T \to \mathbb{R}$, $v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ *таковы, что* $\beta(v) \in L_1(D^T)$, $\beta(x, v_0) \in L_1(\Omega)$. *Пусть* $z \in (\mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T))' + L_1(D^T)$, $k = 0, 1$, *и выполнено неравенство*

$$(-1)^k[(\beta(v) - \beta(v_0))\varphi_t] \geqslant (z, \varphi)_{D^T} - c\|\varphi\|_\infty$$

при всех неотрицательных $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$(-1)^k[\varphi_t \int\limits_{v_0}^{v} h(r) d_r \beta(r)] \geqslant (z, h(v)\varphi)_{D^T} - c\|h(v)\varphi\|_\infty$$

при всех неотрицательных $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$ *и неотрицательных ограниченных функциях* $h(s)$, *монотонных и липшицевых по* s, *таких, что* $\nabla h(v) \in \mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$.

При дополнительном условии

$$\begin{gathered}(a(t, x, r, y) - a(t, x, \widetilde{r}, z)) \cdot (y - z) + \\ + C(m)(F(t, x) + |a(t, x, r, y) \cdot y| + |a(t, x, \widetilde{r}, z) \cdot z|)|r - \widetilde{r}| \geqslant 0,\end{gathered}$$

где $C(m)$ – непрерывная функция, $|r|, |\widetilde{r}| \leqslant m$, – доказана единственность решения задачи.

Настоящая работа обобщает результаты, полученные в [1].

Литература

1. *Bouajaja A., Redwane H. and Marah A.* Existence and Uniqueness of Renormalized Solutions to Nonlinear Parabolic Equations with Lower Order Term and Diffuse Measure Data // Mediterr. J. Math., **178**:15 (2018), https://doi.org/10.1007/s00009-018-1223-8.

НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, ВОЗНИКАЮЩИЕ В МОДЕЛЯХ НЕЙРОСЕТЕЙ: ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

А.Б. Муравник

amuravnik@yandex.ru

УДК 517.9

Рассматривается задача Коши для сингулярных квазилинейных дифференциально-сверточных неравенств параболического типа, возникающих при описании нейронных сетей, процессов реакции–диффузии и нелокальных фазовых переходов. Устанавливаются достаточные условия отсутствия ее глобальных решений задачи Коши, т. е. необходимые условия ее глобальной разрешимости.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения в частных производных, квазилинейные уравнения, параболические уравнения, отсутствие глобальных решений

Singular inequalities arising in neural-network models: global solvability

The Cauchy problem for singular quasilinear parabolic differential-convolutional inequalities describing neural networks, reaction–diffusion processes, and nonlocal phase transitions is considered. Sufficient conditions of the nonexistence of its global solutions, i. e., necessary conditions of its global solvability, are found.

Keywords: partial functional-differential equations, quasilinear equations, parabolic equations, nonexistence of global solutions

В полупространстве $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant \Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t,u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + b(x,t,u)\, K * u^{\omega}, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x). \tag{2}$$

Дифференциальные операторы рассматриваемой задачи возникают при математическом моделировании нейронных сетей, процессов реакции–диффузии и нелокальных фазовых переходов (см., напр., [2]).

Доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что* $\alpha > -1$, $0 < \beta < n$, $u_0^{\alpha+1} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ *и существуют такие положительные* C *и* R_0 *и такое неотрицательное* γ, *что неравенство* $\int_{|x|<R} u_0^{\alpha+1}(x)dx \geqslant CR^{\gamma}$ *выполняется для любого*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг, а также при поддержке гранта Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1 и гранта РФФИ 17-01-00401.

Муравник Андрей Борисович, д.ф.-м.н., руководитель проекта, АО «Концерн «Созвездие» (Воронеж, Россия); Andrey Muravnik (JSC “Concern “Sozvezdie”, Voronezh, Russia)

R из $(R_0, +\infty)$. Предположим, что $a_j(x,t,s) \geqslant \dfrac{\alpha}{s}$, $j = \overline{1,n}$, $b(x,t,s) \geqslant \dfrac{1}{(\alpha+1)s^{\alpha}}$, а функция $K(x)$ ограничена снизу ядром Рисса $|x|^{\beta-n}$. Тогда, если $\gamma \geqslant n$, то задача (1)-(2) *не имеет классических положительных решений при условии, что $\omega > \alpha+1$, а если $\gamma < n$, то задача* (1)-(2) *не имеет классических положительных решений при условии, что $1 < \dfrac{\omega}{\alpha+1} < 1 + \dfrac{\beta+2}{n-\max\{\gamma,\beta\}}$.*

Это утверждение (обобщающее результаты работы [1]) дает более сильные результаты, чем аналогичное утверждение для соответствующих *уравнений* — если условие гарантирует отсутствие глобальных решений (нестрогого) *неравенства*, то при том же самом условии соответствующее *уравнение* тем более не имеет глобальных решений.

Литература

1. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Лиувиллевы теоремы для некоторых классов нелинейных нелокальных задач // Тр. МИАН, **248** (2005), 164-184.

2. *Chen F.* Almost periodic traveling waves of nonlocal evolution equations // Nonlinear Analysis, **50** (2002), 807-838.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н.Т. Орумбаева, А.Б. Кельдибекова

OrumbayevaN@mail.ru, keldibekova_a_b@mail.ru

УДК 517.956

В настоящей работе исследуются вопросы существования решения периодической краевой задачи для системы дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка и предлагается метод построения ее приближенного решения. Установлены достаточные условия существования и единственности решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, алгоритм, периодическая краевая задача

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (грант AP05132262, грант "Лучший преподаватель ВУЗа").

Орумбаева Нургул Тумарбековна, к.ф.-м.н., доцент, КарГУ имени академика Е.А. Букетова (Караганда, Казахстан); Nurgul Orumbayeva (Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan)

Кельдибекова Алия Болатовна, PhD докторант, КарГУ имени академика Е.А. Букетова (Караганда, Казахстан); Aliya Keldibekova (Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan)

Solubility of a periodic boundary value problem for a differential equation in partial derivatives of the third order

In this paper, we study the existence of a solution to the periodic boundary value problem for a system of partial differential equations of the third order and propose a method for constructing its approximate solution. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the studied problem are established.

Keywords: differential equations in partial derivatives, an algorithm, a periodic boundary value problem

На $\Omega=[0,X]\times[0,T]$ рассматривается периодическая краевая задача

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,t)u+f(x,t),(x,t)\in\Omega, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=u(x,T),\quad x\in[0,X], \qquad (2)$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\psi(t),\quad t\in[0,T], \qquad (3)$$

где $(n\times n)$ - матрицы $A(x,t),B(x,t)$, n-вектор-функции $f(x,t)$ непрерывны на Ω, n-вектор-функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[0,T]$, здесь $\|u(x,t)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|u_i(x,t)|,\quad \|A(x,t)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}(x,t)|$.

Для нахождения решения введем функцию $v(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и применяем метод параметризации [1]. По шагу $h>0:Nh=T$ произведем разбиение $[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh)$, $N=1,2,....$ При этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t)$, $z_r(x,t)$, $u_r(x,t)$ обозначим, соответственно, сужение функции $v(x,t)$, $u(x,t)$ на $\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$.

Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t=(r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h)$ и сделаем замену[2] $\widetilde{v}_r(x,t)=v_r(x,t)-\lambda_r(x),r=\overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial\widetilde{v}_r}{\partial t}=A(x,t)\widetilde{v}_r+A(x,t)\lambda_r(x)+B(x,t)u_r(x,t)+f(x,t), \qquad (4)$$

$$\widetilde{v}_r(x,(r-1)h)=0,\quad x\in[0,\omega],\quad r=\overline{1,N}, \qquad (5)$$

$$\lambda_1(x)-\lambda_N(x)-\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_N(x,t)=0,\quad x\in[0,\omega], \qquad (6)$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to sh-0}\widetilde{v}_s(x,t)-\lambda_{s+1}(x)=0,\quad x\in[0,\omega],\quad s=\overline{1,N-1}. \qquad (7)$$

$$u_r(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)x+\int\limits_0^x\int\limits_0^\xi v_r(\eta,t)d\eta d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N}, \qquad (8)$$

где (7)- условие склеивания функций во внутренних линиях разбиения.

Задача (8),(9) при фиксированных $\lambda_r(x), u_r(x,t)$ является однопараметрическим семейством задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x \in [0,\omega]$, и эквивалентна интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_r(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)\widetilde{v}_r(x,\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r(x) + \int\limits_{(r-1)h}^{t} F(x,\tau,u_r)d\tau, \tag{9}$$

где

$$\int\limits_{(r-1)h}^{t} F(x,\tau,u_r)d\tau = \int\limits_{(r-1)h}^{t} B(x,\tau)u_r(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau)d\tau.$$

Переходя в правой части уравнения (9) к пределу при $t \to rh-0$ и подставляя в уравнения (6), (7), для неизвестных функций $\lambda_r(x), r=\overline{1,N}$ получим систему функциональных уравнений:

$$Q(x,h)\lambda(x) = -F(x,h,u) - G(x,h,\widetilde{v}). \tag{10}$$

Здесь элементы матрицы $Q(x,h)$ определяются через $A(x,t)$. Для нахождения системы из трех функций $\{\lambda_r(x), \widetilde{v}_r(x,t),\ u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, имеем замкнутую систему состоящую из уравнений (10), (9) и (8).

Предполагая обратимость матрицы $Q(x,h)$ при всех $x \in [0,\omega]$, из уравнения (10), где $u_r(x,t)=\varphi(t)$, $\widetilde{v}_r(x,t)=0$, находим

$$\lambda^{(0)}(x) = -[Q(x,h)]^{-1}\big\{F(x,h,\varphi) + G(x,h,0)\big\}.$$

Используя уравнение (9), при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, найдем функции

$$\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r^{(0)}(x) + \int\limits_{(r-1)h}^{t} F(x,\tau,\varphi)d\tau,\ r=\overline{1,N}.$$

Функции $u_r^{(0)}(x,t), r=\overline{1,N}$, определяются из соотношения (8).

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость и сходимость предложенного алгоритма, а также однозначную разрешимость задачи (4)-(8).

Теорема 1. *Пусть при некоторых $h>0 : Nh=T, N=1,2,...$, $(nN \times nN)$ матрица $Q(x,h)$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства*
1) $\|[Q(x,h)]^{-1}\| \leqslant \gamma(x,h)$;
2) $a(x)q(x,h) \leqslant \mu < 1, \quad q(x,h) = h[1 + a(x)\gamma(x,h)h], a(x) = \max\limits_{t\in[0,T]} \|A(x,t)\|.$

Тогда существует единственное решение задачи (4)-(8) и справедливы оценки

$$a)\ \max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\sigma(x,h)b(x)\sum_{j=2k-1}^{\infty}\frac{1}{j!}\bigg(\int\limits_0^x\int\limits_0^\xi\sigma(\eta,h)b(\eta)d\eta d\xi\bigg)^j\int\limits_0^x\int\limits_0^\xi\chi(\eta,h)d\eta d\xi\times$$

$$\times\max\bigg\{\max_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{(x,t)\in\Omega}\|f(x,t)\|\bigg\},$$

$$b)\ \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^*(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^x\int\limits_0^\xi\bigg(\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^*(\eta)-\lambda_r^{(k)}(\eta)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(\eta,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(\eta,t)\|\bigg)d\eta d\xi,$$

$k=1,2,...,$ *где* $b(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|B(x,t)\|,\quad \sigma(x,h)=\frac{[q(x,h)+\gamma(x,h)h]}{1-a(x)q(x,h)},$

$$\chi(x,h)=\bigg[\sigma(x,h)q(x,h)+\gamma(x,h)h\bigg][a(x)+b(x)]\rho(x),$$

$$\rho(x)=\max\bigg\{[b(x)+1]q(x,h),x+\int\limits_0^x\int\limits_0^\xi\Big[b(\eta)+1][q(\eta,h)+\gamma(\eta,h)h\Big]d\eta d\xi\bigg\}\times$$

$$\times\max\bigg\{\max_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{(x,t)\in\Omega}\|f(x,t)\|\bigg\}.$$

В силу эквивалентности задач (1)-(3) и (4)-(8) из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует единственное решение* $u^*(x,t)$ *задачи (1)-(3).*

Литература

1. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики, **29**:1 (1989), 50-66.

2. *Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T.* Well-posedness of a periodic boundary value problem for the system of hyperbolic equations with delayed argument // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, **89**:1 (2018), 8–14. DOI: 10.31489/2018M1/8-14.

АППРОКСИМАЦИЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ МЕР

Г.С. Осипенко

george.osipenko@mail.ru

УДК 517.938

Рассматривается дискретная динамическая система, порожденная гомеоморфизмом f на компактном многообразии M. Символический образ G динамической системы это ориентированный граф определенный по конечному покрытию многообразия замкнутыми ячейками. Потоки на графе G являются аналогами инвариантных мер. Если диаметр покрытия достаточно мал, то потоки аппроксимируют инвариантные меры. Простой поток на G порожден циклом без повторений. Показано, что простые потоки аппроксимируют эргодические меры.

Ключевые слова: символический образ, потоки на графе, слабая топология, простой поток.

Approximation to the ergodic measures

The discrete dynamical system generated by the f homeomorphism on the compact manifold M is considered. The symbolic image G of the dynamical system is an oriented graph defined by the finite covering of a manifold by closed cells. The flows on the graph G are analogues of invariant measures. If the diameter of covering is small enough then the flows approximate invariant measures. A simple flow on G is generated by a loop without repetitions. It is shown that simple flows approximate ergodic measures.

Keywords: symbolic image, flow on graph, weak topology, simple flow.

Пусть $f : M \to M$ гомеоморфизм компактного многообразия M, который порождает дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n). \tag{1}$$

В основе дальнейшего изложения лежит понятие символического образа динамической системы [1], которое соединило в себе символическую динамику [2] и численные методы [3].

Пусть $C = \{M(1), ..., M(n)\}$ есть конечное покрытие многообразия M замкнутыми подмножествами, $M(i)$ будем называть ячейкой индекса i. Символический образ динамической системы для покрытия C есть ориентированный граф G с вершинами $\{i\}$ соответствующими ячейкам $\{M(i)\}$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром (дугой) $i \to j$ тогда и только тогда, когда

$$f(M(i)) \bigcap M(j) \neq \emptyset.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № А 19-01-00388).

Осипенко Георгий Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, Филиал МГУ в Севастополе (Крым, Россия); George Osipenko (Sevastopol Branch of Lomonosov Moscow State University, Crimea, Russia)

Не ограничивая общности, можно считать, что ячейки $M(i)$ являются многогранниками, которые пересекаются по граничным дискам. Пусть число $d = diam(C)$ есть наибольший из диаметров ячеек, которое назовем диаметром покрытия C. Обозначим множество всех f-инвариантных нормированных мер $\mathcal{M}(f)$. Множество $\mathcal{M}(f)$ является выпуклым замкнутым компактом в слабой топологии, крайними точками этого множества являются эргодические меры.

Потоком на графе G называется распределение $\{m_{ij}\}$ на дугах $\{i \to j\}$ такое, что $m_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{ij} m_{ij} = 1$ и для любой вершины i имеет место равенство

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}. \tag{2}$$

Множество потоков на графе G образуют выпуклое множество $\mathcal{M}(Q)$ с естественной операцией сложения.

Из покрытия C построим разбиение $C^* = \{M^*(i)\}$, приписывая граничные диски к одной из примыкающих ячеек. Если имеется инвариантная мера μ, то приписывая каждой дуге $i \to j$ меру

$$m_{ij} = \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j))) = \mu(f(M^*(i)) \cap M^*(j)), \tag{3}$$

получим поток на символическом образе. Так определено отображение из пространства инвариантных мер $\mathcal{M}(f)$ в пространство потоков $\mathcal{M}(G)$ на символическом образе G. Рассмотрим обратное построение. Пусть на символическом образе G определен поток $m = \{m_{ij}\}$, тогда на многообразии M можно определить меру μ, полагая для любого измеримого $A \subset M$

$$\mu(A) = \sum_i \frac{m_i v(A \cap M(i))}{v(M(i))}, \tag{4}$$

где v — нормированная на M мера Лебега. Вообще говоря, построенная мера μ не является инвариантной для f, однако, следующая теорема утверждает, что построенная мера μ аппроксимирует инвариантную меру.

Теорема 1. [4] *Для любой окрестности (в слабой топологии) U множества $\mathcal{M}(f)$ найдется положительное число d_0 такое, что для всякого разбиения C с максимальным диаметром $d < d_0$ и любого потока m на символическом образе G, построенного относительно разбиения C, мера μ, построенная согласно (4) по m, лежит в окрестности U.*

Периодический путь $\omega = (i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k = i_0)$ на G называется простым или циклом, если все вершины $\{i_t,\ t = 1, 2, \dots, k\}$ различны. Простой путь ω порождает простой поток $m(\omega)$, сосредоточенный на ω такой, что $m_{ij} = 1/k$ для всех дуг периодического пути ω и $m_{ij} = 0$ для всех остальных дуг. Простой поток не раскладывается в сумму других потоков и является крайней точкой множества потоков $\mathcal{M}(G)$ на G.

Пусть Q и G — ориентированные графы, $s:\ Q \to G$ является отображением ориентированных графов и существует поток m на Q. Тогда отображение s индуцирует поток $m^* = s^* m$ на G такой, что мера дуги $i \to j\ \in G$ вычисляется как

$$m^*_{ij} = \sum_{s(p \to q) = i \to j} m_{pq},$$

где сумма берется по всем дугам $p \to q$, которые отображаются на $i \to j$. Если дуга $i \to j$ не имеет прообразов, то $m^*_{ij} = 0$. Образ $s^*(\mathcal{M}(Q))$ является выпуклым многогранником в $\mathcal{M}(G)$.

Пусть покрытие C подвергается подразбиению, т.е. каждая ячейка $M(i)$ разбивается на несколько ячеек $M(i1)$, $M(i2)$, $\dots$ так, что $M(i) = \bigcup_k M(ik)$. Таким образом, мы получаем новое покрытие NC и новый символический образ NG. Нумерация вершин на G и NG задается в виде $\{i\}$ и $\{(ik)\}$, соответственно. Естественное отображение $s: NG \to G$ имеет очень простой вид $s(ik) = i$. Это отображение является отображением ориентированных графов. Отображение s позволяет перенести любой поток заданный на NG в поток заданный на G, как это описано выше, т.е. построить отображение

$$s^* : \mathcal{M}(NQ) \to \mathcal{M}(G),$$

где $\mathcal{M}(G)$ и $\mathcal{M}(NG)$ множество потоков на G и NG, соответственно.

Теперь рассмотрим последовательные подразбиения C_1, C_2, C_3, $\dots$ такие, что максимальный диаметр ячеек разбиений d_1, d_2, d_3, $\dots$ сходится к нулю. При этом, каждое покрытие C_k состоит из ячеек, которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам. Такая последовательность порождает последовательность символических образов G_1, G_2, G_3, $\dots$, их отображений $s: G_k \to G_{k-1}$ и отображений потоков

$$s^* : \mathcal{M}(G_k) \to \mathcal{M}(G_{k-1}).$$

Пусть на каждом символическом образе G_k выбран поток $m^k \in \mathcal{M}(G_k)$, причем потоки $\{m^k\}$ согласованы, т.е.

$$s^*(m^{k+1}) = m^k.$$

Используя меру Лебега, построим меру μ_k по формуле (4) для каждого k. В результате получена последовательность мер $\{\mu_k\}$ на многообразии M.

Теорема 2. *Пусть C_k — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек $d_k \to 0$. Если m^k согласованная последовательность простых потоков на символических образах G_k, то существует инвариантная мера*

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_k,$$

которая является эргодической.

Литература

1. *Osipenko G.* Dynamical systems, Graphs, and Algorithms. Lectures Notes in Mathematics, **1889**. — Springer, Berlin, 2007.

2. *Lind Douglas, Marcus Brian.* An introduction to symbolic dynamics and coding. — Cambridge University Press, 1995.

3. *Hsu C. S.* Cell-to-Cell Mapping. — Springer-Verlag, N.Y., 1987.

4. *Osipenko G.* Symbolic images and invariant measures of dynamical systems // Ergodic Theory and Dynamical Systems, **30** (2010), 1217-1237.

О МАКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕЩЕНИЕМ

К.Н. Оспанов

kordan.ospanov@gmail.com

В докладе обсуждаются вопросы однозначной разрешимости в гильбертовом пространстве одной полупериодической задачи на полосе для двумерного сингулярного эллиптического уравнения второго порядка с неограниченным промежуточным коэффициентом. Предполагается, что некоторое среднее от промежуточного коэффициента уравнения быстро растет около бесконечности и не контролируется другими коэффициентами. Исследуемое уравнение встречается в задачах стохастического анализа, биологии и финансовой математики. Для решения уравнения получена оценка максимальной регулярности. Ранее такие результаты получены только в случае линейного и близкого к линейному роста промежуточного коэффициента в работах A. Lunardi и V. Vespri (1997), P.J. Rabier (2005), M. Hieber, L. Lorenzi, J. Prüss, A. Rhandi и R. Schnaubelt (2009).

УСРЕДНЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ СТЕПЕННОГО РОСТА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

С.Е. Пастухова

pas-se@yandex.ru

УДК 517.956.25

Получено усреднение задачи Дирихле в области из $\mathbb{R}^n$ для эллиптического максимального монотонного оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$, удовлетворяющего степенным оценкам роста с переменным показателем, когда показатель роста $p_\varepsilon(x)$, а также символ оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ осциллируют с малым периодом ε по пространственной переменной x. Предельным при $\varepsilon \to 0$ будет максимальный монотонный оператор $\mathcal{A}$, символ которого не зависит от x и подчинён оценкам роста нестепенного типа с выпуклой функцией $f(\xi)$ – результатом усреднения степени $|\xi|^{p_\varepsilon(x)}$.

Ключевые слова: периодическое усреднение, максимальный монотонный оператор, переменный показатель роста

Оспанов Кордан Наурызханович, д.ф.-м.н., профессор, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); L.N.Gumilyov Eurasian National University

Пастухова Светлана Евгеньевна, д.ф.-м.н., профессор, МИРЭА–РТУ (Москва, Россия); Svetlana Pastukhova (MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia)

Homogenization of maximal monotone operators with oscillating growth exponent

We consider the Dirichlet problem for an elliptic maximal monotone operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ satisfying growth estimates of power type with a variable exponent. This exponent $p_\varepsilon(x)$ and also the symbol of the operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ oscillate with a small period ε with respect to the space variable x. We prove a homogenization result for this problem obtaining, in the limit as $\varepsilon \to 0$, a maximal monotone operator $\mathcal{A}$. The symbol of $\mathcal{A}$ does not depend on x and satisfies new type growth estimates casted in terms of a convex function $f(\xi)$ which arises via homogenization of the polinomial $|\xi|^{p_\varepsilon(x)}$.

Keywords: periodic homogenization, maximal monotone operator, growth conditions with a variable exponent

1° В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$, введём классы функций

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{v \in L^1(\Omega) : |v(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega)\},$$

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : Du \in L^{p(x)}(\Omega)\},$$

где показатель $p : \Omega \to \mathbb{R}$ есть измеримая функция, удовлетворяющая условию $1 < \alpha \leqslant p(\cdot) \leqslant \beta < \infty$. Наделённые нормами Люксембурга

$$||v||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left| \frac{v(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leqslant 1 \right\},$$

$$||u||_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = ||Du||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

это будут рефлексивные сепарабельные Банаховы пространства. Теория этих пространств изложена, например, в обзорной статье [1] и книге [2]. Отметим особенность пространства Соболева $W = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ с переменным порядком: в нём, вообще говоря, не плотны функции класса $C_0^\infty(\Omega)$. Если определить другое пространство Соболева $H = H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ как замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в W, то в общем случае $W \neq H$. Несовпадение этих пространств принято называть *эффектом Лаврентьева*, и говорят, что показатель $p(\cdot)$ *регулярен*, если $W = H$.

2° Для заданной вектор-функции $h \in L^\infty(\Omega)$ рассмотрим в области Ω дифференциальное включение с нулевым граничным условием Дирихле

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \\[2ex] g_\varepsilon(x) \in a_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \quad \text{для п.в.} \;\; x \in \Omega, \\[2ex] \displaystyle\int_\Omega g_\varepsilon \cdot Dv\, dx = \int_\Omega h \cdot Dv\, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega). \end{array} \right. \tag{1}$$

Здесь функции $p(\cdot)$ and $a(\cdot, \xi)$ периодичны на $\mathbb{R}^n$, их ячейка периодичности – единичный куб $Y = (0,1)^n$; гомотетией получаем ε-периодические функции

$$p_\varepsilon(x) = p(x/\varepsilon),\; a_\varepsilon(x, \xi) = a(x/\varepsilon, \xi),\; \varepsilon \in (0, 1].$$

Отображение $a : Y \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ многозначное (т.е. в качестве "значений отображения"имеем множества из $\mathbb{R}^n$, необязательно точечные) и удовлетворяет условиям максимальной монотонности по ξ, а также измеримости по совокупности переменных, кроме того, выполнены оценки коэрцитивности и роста

$$c_1|\xi|^{p(x)} \leqslant \xi \cdot \eta + m_1, \quad c_2|\eta|^{p'(x)} \leqslant \xi \cdot \eta + m_2 \tag{2}$$

для п.в. $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in a(x,\xi)$ с константами $c_1, c_2, > 0$ и $m_1, m_2 \geqslant 0$ (здесь и всюду далее штрихом обозначаем сопряженный по Гёльдеру показатель, т.е. $p'(x) = p(x)/(p(x)-1)$). Такого рода многозначные монотонные по ξ отображения, зависящие также от пространственной переменной x, более детально описаны в [3], где изучалась G-сходимость монотонных операторов с подобными символами. Из (2) вытекают оценки для $a_\varepsilon(x,\xi)$ с показателем $p_\varepsilon(x)$ и теми же константами c_i, m_i, а именно,

$$c_1|\xi|^{p_\varepsilon(x)} \leqslant \xi \cdot \eta + m_1, \quad c_2|\eta|^{p'_\varepsilon(x)} \leqslant \xi \cdot \eta + m_2 \tag{3}$$

для п.в. $x \in \Omega$, а также всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in a_\varepsilon(x,\xi)$.

В задаче (1) надо найти пару функций $(u_\varepsilon, g_\varepsilon)$, удовлетворяющих трём указанным условиям. При сделанных выше предположениях существует, по крайней мере, одно решение задачи (1), при этом справедливы оценки

$$\int_\Omega |Du_\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)}\, dx \leqslant c, \quad \int_\Omega |g_\varepsilon|^{p'_\varepsilon(x)}\, dx \leqslant c,$$

где $c > 0$ не зависит от ε. Благодаря этим оценкам, имеем слабую сходимость (хотя бы по подпоследовательности)

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad g_\varepsilon \rightharpoonup g \quad \text{в } L^{\beta'}(\Omega). \tag{4}$$

Основная трудность – найти связь между предельными элементами в (4).

3° В случае однозначного отображения $a(x,\cdot)$ задача (1) упрощается: поток $g_\varepsilon = a_\varepsilon(x, Du_\varepsilon)$ находится по функции u_ε однозначно и дифференциальное включение превращается в уравнение в слабой форме

$$u_\varepsilon \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \ \int_\Omega a_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \cdot Dv\, dx = \int_\Omega h \cdot Dv\, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega). \tag{5}$$

В (5) введено так называемое W-решение задачи Дирихле для монотонного уравнения

$$\mathrm{div}\, \mathrm{a}_\varepsilon(\mathrm{x}, \mathrm{Du}_\varepsilon) = \mathrm{div}\, \mathrm{h} \tag{6}$$

в области Ω. Заменяя в (5) пространство $W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$ на $H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, приходим к H-решению уравнения (6). W- и H-решения могут не совпадать. Таким образом, эффект Лаврентьева влечёт особого рода неединственность для уравнений с переменным порядком нелинейности: задачу Дирихле для уравнения можно ставить, по крайней мере, двумя способами и обе постановки корректны. Задача (5), а также её аналог для H-решения исследованы в [4], где доказан результат об усреднении уравнения (6) с учетом эффекта Лаврентьева. Для каждого типа решений найдена своя процедура усреднения. Например, установлена сходимость (в определенном смысле) при $\varepsilon \to 0$ решений u_ε задачи (5) к решению u задачи

$$u \in W_0^f(\Omega), \quad \int_\Omega a(Du) \cdot Dv\, dx = \int_\Omega h \cdot Dv\, dx \quad \forall v \in W_0^f(\Omega). \tag{7}$$

Здесь $W_0^f(\Omega) = \left\{ v \in W_0^{1,1}(\Omega) : f(Dv) \in L^1(\Omega) \right\}$ есть пространство Соболева, в котором интегрируемость по Орличу задана выпуклой функцией $f(\xi)$. Монотонный символ $a(\xi)$ и выпуклая функция $f(\xi)$ определяются с помощью задач на ячейке периодичности Y, каждая из которых корректна. Корректность задачи (7) обеспечена оценками

$$a(\xi) \cdot \xi \geqslant c(f(\xi) - 1), \quad f^*(a(\xi)) \leqslant C(f(\xi) + 1), \tag{8}$$

где константы $C, c > 0$ и f^* – функция, сопряжённая по Фенхелю для f.

4° В общем случае усредненной для (1) будет однородная задача

$$\begin{cases} u \in W_0^f(\Omega), \\ g(x) \in a(Du(x)) \quad \text{для п.в.} \ \ x \in \Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega g \cdot Dv\, dx = \int_\Omega h \cdot Dv\, dx \quad \forall v \in W_0^f(\Omega). \end{cases} \tag{9}$$

Предельные элементы из (4) являются решением задачи (9). Условия роста (3) трансформируются в пределе в условия нестепенного типа

$$c_1 f(\xi) \leqslant \xi \cdot \nu + m_1, \quad c_2 f^*(\nu) \leqslant \xi \cdot \nu + m_2$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in a(\xi)$. Это аналог соотношений (8) при усреднении максимальных монотонных операторов.

Исследование предельного поведения решений задачи (1) в случае регулярного показателя $p(\cdot)$ проведено совместно с В. Кьядо Пиат.

Литература

1. *Zhikov V.V.* On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci., **173**:5(2011), 463–570.

2. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lect. Notes Math. 2017. – Berlin: Springer, 2011.

3. *Chiadò Piat V., Dal Maso G., Defranceschi A.* G-convergence of monotone operators // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **7**(1990), 123–160.

4. *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* Усреднение монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста переменного порядка // Матем. заметки, **90**:1 (2011), 53–69; Math. Notes, 90:1 (2011), 48–63.

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

С.В. Пикулин
spikulin@gmail.com

УДК 519.632.4

Задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка с оператором типа p–лапласиана в главной части рассматривается в областях Ω_ε, содержащих шаровую полость малого размера ε, причем функция в краевом условии на границе полости зависит от параметра ε, а условие на границе $\partial\Omega$ соответствующей области без полости является однородным. Установлены достаточные условия сходимости к нулю семейства решений $\{u_\varepsilon(x)\}$ этой задачи при $\varepsilon \to 0$ в интегральной норме, и получена оценка скорости этой сходимости.

Ключевые слова: квазилинейные эллиптические уравнения, p–лапласиан, задача Дирихле, обобщенные решения, сходимость решений

Convergence of the solutions of a quasilinear elliptic equation in a domain with a spherical cavity

The Dirichlet problem for a second order quasilinear elliptic equation containing an operator of p–Laplacian type in its main part is considered in domains Ω_ε with a spherical cavity of small size ε. The form of the function in the condition on the cavity's boundary depends on ε, while the condition on the boundary $\partial\Omega$ of the domain with no cavity is homogeneous. For ε tending to zero sufficient conditions are established for the convergence of the family of solutions $\{u_\varepsilon(x)\}$ to the zero solution in Ω with respect to an integral norm. A convergence rate estimate is obtained.

Keywords: quasilinear elliptic equations, p–Laplacian, Dirichlet problem, generalized solutions, convergence of solutions

В липшицевых областях Ω_ε евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, полученных при каждом значении малого параметра ε исключением из ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ шара $B(\varepsilon)$ радиуса ε с центром в некоторой фиксированной точке $y \in \Omega$, рассмотрим следующую задачу Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения:

$$\operatorname{div}\big(|\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)|^{p-2}\, A(x)\cdot \operatorname{grad} u_\varepsilon(x)\big) - a(x)\,|u_\varepsilon(x)|^{q-1}\, u_\varepsilon(x) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, \quad (1)$$

$$u_\varepsilon(x) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x) \quad \text{на} \quad \partial B(\varepsilon), \qquad (2)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) \in W_2^{1-1/p}(\partial\Omega)$, $\varphi_\varepsilon(x) \in W_2^{1-1/p}\big(\partial B(\varepsilon)\big)$ — некоторые (заданные) ограниченные функции коэффициент $a(x)$ — измеримая функция на Ω, удовлетворяющая неравенству

$$a(x) \geqslant a_0 = \text{const}, \qquad x \in \Omega,$$

Пикулин Сергей Владимирович, к.ф.-м.н., старший научн. сотр., ВЦ ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия); Sergey Pikulin, (CC RAS, Moscow, Russia)

$A(x)$ — симметричная положительно определенная матрица $\|a_{ij}(x)\|, i,j = 1,\dots,n$, с измеримыми коэффициентами $a_{ij}(x)$ и со спектром, отделенным от нуля, т.е.

$$a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \quad \lambda^{-1}|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \leqslant \lambda\,|\xi|^2, \quad x\in\Omega, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0.$$

Определение. *Функция $u_\varepsilon(x) \in W_2^p(\Omega_\varepsilon)\cap L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), если граничные условия (2) удовлетворяются в смысле следа, и $\forall\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ выполнено интегральное тождество*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)|^{p-2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx + \\ + \int_{\Omega_\varepsilon} a(x)\,|u_\varepsilon(x)|^{q-1}\,u_\varepsilon(x)\,\psi(x)\,dx = 0.$$

Обобщенное решение задачи (1), (2) существует и единственно (см., например, [1, Ch. 4]).

В работе [2] получены достаточные условия сходимости при $\varepsilon\to 0$ решений $u_\varepsilon(x)$ задачи (1), (2) при $n\geqslant 3$ и $p=2$ к решению $u(x)$ задачи Дирихле в области Ω для уравнения (1) с краевым условием $u(x)=\varphi(x)$ на $\partial\Omega$. А именно, при условии, что показатель q достаточно велик, показана сходимость таких решений к указанному пределу в норме L^∞, а также в подходящей интегральной норме, где норму вычислены по области Ω_ε с исключенной окрестностью полости $B(\varepsilon)$ определенного размера (малого при $\varepsilon\to 0$). При этом факт сходимости решений остается справедливым независимо от того, насколько быстро растут нормы функций $\varphi_\varepsilon(x)$ в краевом условии (2) при $\varepsilon\to 0$. Полученные результаты опираются, в частности, на априорную оценку Кондратьева — Ландиса решения полулинейного уравнения через расстояние до границы области (см. [3]).

В настоящем докладе некоторые из результатов работы [2] распространены на случай $n\geqslant 2, p\in(1,n)$. В частности, справедлив следующий результат.

Теорема. *Рассмотрим задачу (1), (2) при $n\geqslant 2, p\in(1,n)$, $\varphi(x)\equiv 0$ на $\partial\Omega$, и предположим, что выполнено неравенство*

$$q > \frac{n+p}{n-p}. \tag{3}$$

Тогда при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$\int\limits_{\Omega\setminus B(2\varepsilon)} \big(|\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)|^p + a(x)\,|u_\varepsilon(x)|^{q+1}\big)\,dx = O\big(\varepsilon^{n-p\,(q+1)/(q-1)}\big). \tag{4}$$

Отметим, что показатель степени в правой части соотношения (4) положителен в силу (3), следовательно его левая часть стремится к нулю.

Литература

1. *Diaz J.I.* Nonlinear partial differential equations and free boundaries. — Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

2. *Пикулин С.В.* Сходимость семейства решений уравнения типа Фуджиты в областях с полостями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **56**:11 (2016), 1902–1930.

3. *Кондратьев В.А., Ландис Е.М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сборник, **135(177)**:3 (1988), 346–360.

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ВИДА ФРОНТА ЗАДАЧИ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

Е.В. Полежаева, Н.Т. Левашова, Д.И. Кузнецова

pel789@yandex.ru, natasha@npanalytica.ru, dora13ku@gmail.com

УДК 519.633.2

Рассматривается вопрос о стабилизации решения вида фронта начально-краевой задачи типа реакция-диффузия-адвекция на бесконечно большом временном промежутке к решению соответствующей стационарной задачи. Теорема о стабилизации решения доказывается с использованием понятий верхнего и нижнего решений и следствий из теорем сравнения. Верхнее и нижнее решения каждой из задач строятся как модификации асимптотических приближений решений этих задач.

Ключевые слова: задача реакция-диффузия-адвекция, решение вида фронта, внутренний переходный слой, верхнее и нижнее решения, асимптотическое приближение

Stabilization of a front form solution of the reaction-diffusion-advection problem

The question of stabilization of a front form solution to the initial-boundary value problem of reaction-diffusion-advection type at infinitely large time interval to the solution of the corresponding stationary problem is considered. The theorem on stabilization of a solution is proved using the concepts of upper and lower solutions and comparison theorems corollaries. The upper and lower solutions are constructed as modifications of the asymptotic approximations of problem solutions.

Keywords: reaction-diffusion-advection problem, front form solution, internal transition layer, upper and lower solutions, asymptotic approximation

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-11-00042).

Полежаева Елена Вячеславовна, к.ф.-м.н., электроник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Elena Polezhaeva (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Левашова Наталия Тимуровна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nataliya Levashova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Кузнецова Дарья Игоревна, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Daria Kuznetsova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Исследование решений уравнений реакция-диффузия-адвекция является важной задачей математической физики. В частности, большой интерес представляют решения, обладающие большим градиентом в некоторой области, ширина которой много меньше линейных размеров множества, на котором поставлена задача. Эта область называется внутренним переходным слоем. Если положение переходного слоя изменяется со временем, то его также называют фронтом.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения реакция-диффузия-адвекция:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=A(u,x)\frac{\partial u}{\partial x}+B(u,x), \quad x\in(0;1), \quad t\in(0;T],\\&u(0,t,\varepsilon)=u^0, \quad u(1,t,\varepsilon)=u^1, \quad t\in[0;T],\\&u(x,0,\varepsilon)=u_{init}(x,\varepsilon), \quad x\in[0;1].\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $A(u,x)$ и $B(u,x)$ – достаточно гладкие функции в области $(u,x)\in I_u\times[0;1]$, I_u – некоторый промежуток изменения переменной u, $\varepsilon>0$ – малый параметр, $T>0$.

Будем исследовать вопрос о стабилизации при $t\to\infty$ решения вида фронта начально-краевой задачи (1) к решению с внутренним переходным слоем соответствующей стационарной задачи

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2}=A(u,x)\frac{du}{dx}+B(u,x), \quad x\in(0;1), u(0,\varepsilon)=u^0,\ u(1,\varepsilon)=u^1. \tag{2}$$

Потребуем выполнения следующих условий.

Условие А1. *Уравнение*

$$A(u,x)\frac{du}{dx}+B(u,x)=0$$

с дополнительными условием $u(0)=u^0$ *имеет на отрезке* $[0;1]$ *решение* $u=\varphi^{(-)}(x)$, *а с дополнительным условием* $u(1)=u^1$ *– решение* $u=\varphi^{(+)}(x)$, *причем*

$$\varphi^{(-)}(x)<\varphi^{(+)}(x), \quad x\in[0;1],$$

и

$$A\left(\varphi^{(-)}(x),x\right)>0, \quad A\left(\varphi^{(+)}(x),x\right)<0, \quad x\in[0;1].$$

Рассмотрим существование решения в виде движущегося фронта, т.е. решения, имеющего внутренний переходный слой, который в каждый момент времени t локализован в окрестности точки $\hat{x}(t,\varepsilon)\in(0;1)$. Слева от указанной окрестности решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) близко к функции $\varphi^{(-)}(x)$, а справа – к функции $\varphi^{(+)}(x)$. Будем предполагать, что в начальный момент времени уже существует сформированный фронт, т.е. функция $u_{init}(x,\varepsilon)$ имеет внутренний переходный слой в окрестности некоторой точки x_{00} отрезка $[0;1]$.

Условие А2. *Пусть существует множество $X \subset (0;1)$ функций $x(t)$, таких, что при $\varphi^{(-)}(x(t)) < \tilde{Q} < \varphi^{(+)}(x(t))$ выполняются неравенства*

$$\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(x(t))}^{\tilde{Q}} (A(s, x(t)) - V)\, ds > 0, \quad \textit{где } V = \frac{dx}{dt}.$$

Условие А3 *Пусть задача Коши*

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} A(u, x_0) du}{\varphi^{(+)}(x_0) - \varphi^{(-)}(x_0)}, \quad x_0(0) = x_{00}$$

имеет решение $x_0(t)$, такое что $x_0(t) \in (0;1)$, $\quad t \in [0;T]$.

В работе [1] построено асимптотическое приближение, $U_n(x,t,\varepsilon)$ решения задачи (1) как сумма функции $\bar{u}(x,\varepsilon)$, описывающей поведение решения вдали от переходного слоя, и функции переходного слоя, $Q(\xi,t,\varepsilon)$, где $\xi = (x - \hat{x}(t))/\varepsilon$ – растянутая переменная. Также в [1] доказано, что при выполнении условий **А1**-**А3** при достаточно малых ε существует решение задачи (1) с таким асимптотическим приближением. Доказательство проведено при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств, суть которого заключается в построении верхнего и нижнего решений задачи (1), а именно, функций $\beta_n(x,t,\bar{x},\bar{V})\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,t,\underline{x},\underline{V},\varepsilon)$ соответственно, которые строятся как модификации асимптотического приближения:

$$\beta_n(x,t,\bar{x},\bar{V},\varepsilon) = U_n(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n-1}\left(\mu(x) + q_0(\bar{\xi}) + \varepsilon q_1(\bar{\xi})\right),$$
$$\alpha_n(x,t,\underline{x},\underline{V},\varepsilon) = U_n(x,t,\varepsilon) - \varepsilon^{n-1}\left(\mu(x) + q_0(\underline{\xi}) + \varepsilon q_1(\underline{\xi})\right),$$

где $\bar{x} = X_{n-1}(t,\varepsilon) - \varepsilon^{n-1}\delta$, $\underline{x} = X_{n-1}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{n-1}\delta$, $X_{n-1}(t,\varepsilon)$ – асимптотическое приближение положения фронта $\hat{x}(t)$, $\bar{V} = d\bar{x}/dt$, $\bar{\xi} = (x - \bar{x})/\varepsilon$, $\underline{V} = d\underline{x}/dt$, $\underline{\xi} = (x - \underline{x})/\varepsilon$. Константа $\delta > 0$, а также функции $\mu(x)$ и $q_i(\xi)$, $i = 0,1$ определяются таким образом, чтобы функции α_n и β_n удовлетворяли определению нижнего и верхнего решений соответственно.

В работе [2] доказано существование и асимптотическая устойчивость решения задачи (2) как стационарного решения задачи (1) при выполнении условий **А1**, **А2** (при $V = 0$) и следующего условия **А3'**:

Условие А3'. *Пусть уравнение*

$$\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} A(u,x_0) du = 0 \ \textit{ имеет решение } x_0 \in (0;1).$$

Тем же способом, что и в работе [3] легко устанавливается, что область влияния решения стационарной задачи не меньше отрезка $\alpha_1(x,\infty,\underline{x}_s,0,\varepsilon), \beta_1(x,\infty,\bar{x}_s,0,\varepsilon)$, где $\underline{x}_s$ и $\bar{x}_s$ – значения $\underline{x}$ и $\bar{x}$ при $t \to \infty$.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *При любой гладкой начальной функции u_{init} задачи (1), лежащей между верхним решением $\beta_1(x,0,\bar{x},\bar{V},\varepsilon)$ задачи (1) и нижним решением $\alpha_1(x,\infty,\bar{x}_s,0,\varepsilon)$ задачи (2), решение задачи (1) стремится к решению задачи (2) при $t \to \infty$.*

Литература

1. *Антипов Е.А, Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **54**:10 (2014), 1594–1607.

2. *Васильева А.Б.* Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **35**:4 (1995), 520–531.

3. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция-адвекция-диффузия в случае сбалансированной нелинейности // Дифференциальные уравнения., **53**:4 (2017), 524–537.

О ДВУХТОЧЕЧНЫХ ФОРМУЛАХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.П. Половинкин, М.В. Половинкина, А.Л. Мугланов

muglanov_artem@mail.ru, polovinkin@yandex.ru, polovinkina-marina@yandex.ru

УДК 517.518

С помощью метода спуска Адамара, формулы среднего значения Бицадзе-Нахушева, преобразований Лакса-Филлипса, получены двухточечные формулы среднего значения для эллиптических уравнений на сфере и в пространстве Лобачевского

Ключевые слова: формула среднего, оператор Лапласа-Бельтрами, метод спуска

On two-point mean-value formulas for some elliptic equations in non-Euclidean spaces

Using the Hadamard descent method, the Bitsadze-Nakhushev mean-value formula, the Lax-Phillips transformations, we obtained two-point mean-value formulas for elliptic equations on the sphere and in the Lobachevskiy space

Keywords: mean-value formula, Laplace-Beltrami operator, descent method

---

Половинкин Игорь Петрович, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия); Igor Polovinkin (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Половинкина Марина Васильевна, к.ф.-м.н., доцент, Воронежский государственный университет инженерных технологий (Воронеж, Россия); Marina Polovinkina (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Мугланов Артем Леонидович, аспирант, Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия); Artem Muglanov (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Следуя известной конструкции А.В. Бицадзе и А.М. Нахушева, рассмотрим две точки $(\chi^{(j)},\tau^{(j)})\in\mathbb{R}^{n+1}$, $j=1,2$, где $\chi^{(j)}=(\chi_1^{(j)},\chi_2^{(j)},\ldots,\chi_n^{(j)})$, $j=1,2$, удовлетворяющие условию непустого пересечения световых конусов $|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|<|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|$. Построим матрицу $A(\dim A=n\times n)$ по следующему правилу. Зафиксируем какой-нибудь индекс $i\in\{1,\ldots,n\}$ и положим $a_{ij}=(\chi_j^{(1)}-\chi_j^{(2)})/|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|$, $j=1,\ldots,n$. Оставшиеся позиции матрицы A заполним исходя из условий $AA^T=I,\quad \det A=1$, где A^T — матрица, транспонированная к матрице A, $I=\|\delta_{ij}\|$ — единичная матрица, δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть A_i — матрица, полученнуя из матрицы А заменой i-го столбца нулями. Введем усредняющий оператор S_ϱ и оператор B_ϱ^n по формулам

$S^n v=S_\varrho^n v=\sqrt{\pi^{1-n}}\int_{|\xi|=\varrho}v\,(\eta,\,\sigma)\;d\omega_\xi,\ |\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|>0,$

$S^n=S_\varrho^n v=\gamma(n)\int_{|\xi|=\varrho}v\left(\chi^{(2)}+\xi,(\tau^{(1)}+\tau^{(2)})/2\right)\,d\omega_\xi,\ \chi^{(1)}=\chi^{(2)},$

$B^n v=B_\varrho^n\,v=\varrho\,(\partial/(2\varrho\partial\varrho))^{(n-1)/2}\,(1/\varrho S_\varrho v)\,,\ n=1(\mathrm{mod}2),$

$B^n v=B_\varrho^n\,v=\pi^{-1/2}\,(\partial/(2\varrho\partial\varrho))^{n/2}\int_0^\varrho S_\varrho v\,d\theta/\sqrt{\varrho^2-\theta^2},\ n=0(\mathrm{mod}2),$

где $d\omega_\xi$ — элемент площади поверхности сферы $|\xi|=\varrho$ в $\mathbb{R}^n$,

$$\eta=\frac{|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|\,\xi_i(\chi^{(1)}-\chi^{(2)})}{|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|\sqrt{(\tau^{(1)}-\tau^{(2)})^2-|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|^2}}+\frac{\chi^{(1)}+\chi^{(2)}}{2}+A_i\xi,$$

$$\sigma=\left(\tau^{(1)}+\tau^{(2)}\right)/2-|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|\xi_i/\sqrt{(\tau^{(1)}-\tau^{(2)})^2-|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|^2}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}=\{x=(x_1,\ldots,x_n,z)=(x,z)\},n\geqslant 2$, множество $S_n^+=\{(x,z)\in S_n:z=\sqrt{1-|x|^2}\}$ — верхнюю половину сферы с метрикой $ds^2=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{i=1}^n(\delta_{ik}+x_ix_k/z^2)dx_idx_k$ и оператором Лапласа-Бельтрами в этой метрике Δ_ω.

Введем в рассмотрение отображение $S_n\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ (преобразование П. Лакса и Р. Филлипса) с помощью формул $\tau=\tau_\pm(x,z,t)=\pm\sin t/(z\mp\cos t)$, $\chi=\chi_\pm(x,z,t)=\pm x/(z\mp\cos t)$, где $\chi=(\chi_1,\ldots,\chi_n)$. Введем также замену функции $u(x,z,t)=(z-\cos t)^{-(n-1)/2}v(\chi(x,z,t),\tau(x,z,t))$.

Теорема 1. *Для любых двух точек* $(x^{(1)},z^{(1)})$, $(x^{(2)},z^{(2)})\in S_n$ *и любых двух значений* $t^{(1)}$, $t^{(2)}\in(0,2\pi]$, *удовлетворяющих условию*

$$(z^{(1)}z^{(2)}+x^{(1)}x^{(2)}-\cos(t^{(1)}-t^{(2)}))/((z^{(1)}-\cos t^{(1)})(z^{(2)}-\cos t^{(2)}))>0,$$

регулярное решение $u(x)$ *уравнения* $\Delta_\omega u-((n-1)/2)^2\,u=0$ *удовлетворяет формуле среднего значения*

$$(z^{(1)}\mp\cos t^{(1)})^{(n-1)/2}u(x^{(1)},z^{(1)})+(z^{(2)}\mp\cos t^{(2)})^{(n-1)/2}u(x^{(2)},z^{(2)})=$$

$$=B_\varrho^n(v(x(\chi,\tau),z(\chi,\tau)),\ \varrho=\sqrt{(\tau^{(1)}-\tau^{(2)})^2-|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|^2}/2.$$

Рассмотрим реализацию П геометрии Лобачевского на полупространстве $\mathbb{R}_+^n=\{x=(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)=(x',x_n):x_n>0\},n\geqslant 2$, с метрикой $ds^2=dx^2/x_n^2$ и оператором Лапласа-Бельтрами Δ_Π.

Теорема 2. *Для любых двух точек* $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in \Pi$ *и любых двух значений* $t^{(1)}$ *и* $t^{(2)} \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющих условию*

$$(x_n^{(2)}\, e^{t^{(1)}} - x_n^{(1)}\, e^{t^{(2)}})\,(x_n^{(1)}\, e^{t^{(1)}} - x_n^{(2)}\, e^{t^{(2)}}) - e^{t^{(1)}+t^{(2)}}|\triangle x'|^2 \; > 0,$$

регулярное решение $u(x)$ *уравнения* $\Delta_\Pi u + ((n-1)/2)^2\, u = 0$ *удовлетворяет формуле среднего значения*

$$e^{t^{(1)}(1-n)/2}u(x^{(1)}) + e^{t^{(2)}(1-n)/2}u(x^{(2)}) = B_\varrho^n(fu(x(\chi,\tau))),$$

$x' = \chi'/(\tau+\chi_n), x_n = \sqrt{\tau^2-|\chi|^2}/(\tau-\chi_n), t = \ln\sqrt{\tau^2-|\chi|^2}, f = (\tau^2 - |\chi|^2)^{(1-n)/4}$.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА В (B) – ПРОСТРАНСТВАХ

А.И. Прилепко

prilepko.ai@yandex.ru

УДК 517.977.1, 517.977.5

Применяется BUME метод и метод монотонных отображений к изучению задач наблюдения и управления. В (B) – пространстве исследуется уравнение первого рода, как задача наблюдения, при этом сопряжённое уравнение называется задачей управления. Для случая рефлексивных (B) – пространств доказан критерий управляемости и абстрактный принцип максимума.

Ключевые слова: задача управления, задача наблюдения, оптимальное управление, принцип максимума

Optimal control and maximum principle in (B) – spaces

The BUME method and the monotone mapping method are applied to the study of observation and control tasks. In (B) – space, an equation of the first kind is investigated as a problem of observation, and the adjoint equation is called a control problem. For the case of reflexive (B) – spaces, the criterion of controllability and the abstract maximum principle are proved.

Keywords: control problem, observation problem, optimal control, maximum principle

---

Прилепко Алексей Иванович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksey Prilepko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Введём задачи наблюдения и управления в (B) – пространствах, считая пространства рефлексивными и вещественными. Пусть дано число $T \in (0, +\infty)$; $J = (0, T)$. Введём (B) – пространства E, E_1 и их сопряжённые E', E_1', предполагая их независящими от времени t. Кроме того, введём (B) – пространство элементов, зависящих от времени и принимающих значения в E_1, обозначив его $U_T \equiv B(J, E_1)$, а также сопряжённое к нему пространство $U_T' = (B(J, E_1))'$. В силу рефлексивности пространств имеем $(U_T')' = U_T$, а (B) – пространство U_T' будем называть пространством управлений.

Для линейного оператора A_T и его сопряжённого (по Банаху) A_T' рассмотрим соответствующие уравнения первого рода как задачи наблюдения и управления.

Задача наблюдения. Получить обратное неравенство (т.е. ограниченность снизу) для уравнения

$$A_T\, e = u, \qquad \text{где} \quad e \in E, \quad u(t) \in U_T = B(J, E_1), \quad A_T \in \mathcal{L}(E, U_T) \tag{1}$$

Задача управления. Для данного элемента $e' \in E' \setminus \{0\}$ найти функцию $u' \in U_T'$ из уравнения

$$A_T'\, u' = e', \qquad \text{где} \quad A_T' \in \mathcal{L}(U_T', E') \tag{2}$$

Решение задачи (2) $u_* \in U_T'$ при фиксированном $e' \neq 0$ называем точным управлением (или управлением), а через $\mathcal{U}_*$ обозначим множество всех управлений $\mathcal{U}_* \subset U_T'$. Управление с минимальной нормой (т.е. нормальное по Тихонову решение (2)) называем оптимальным управлением задачи (2) и обозначаем u_*^o, таким образом, $\|u_*^o\|_{U_T'} = \inf\{\|u_*\|_{U_T'} \mid \forall u_* \in \mathcal{U}_*\}$.

Теорема 1. [Критерий управляемости и оптимальной управляемости] *Пусть дано рефлексивное (B) – пространство $U_T \equiv B(J, E_1)$ и его сопряжённое U_T'. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *существует постоянная $\mu_T > 0$ такая, что для всех $e \in E$ выполняется неравенство $\|A_T\, e\|_{U_T} \geqslant \mu_T \|e\|_E$;*
2. *$R(A_T) = \overline{R(A_T)}$, $N(A_T) = 0$;*
3. *$\|(A_T)_\ell^{-1}\| \leqslant 1/\mu_T$, т.е. задача (1) непрерывно наблюдаема;*
4. *решение задачи наблюдения (1) единственно и устойчиво;*
5. *существует решение задачи управления $u_* \neq 0$ при $e' \in E' \setminus \{0\}$;*
6. *при любом $e' \in E' \setminus \{0\}$ множество всех управлений $\mathcal{U}_* \neq \emptyset$, где $\mathcal{U}_* = (A_T')_r^{-1} e'$ – есть замкнутое выпуклое множество в U_T';*
7. *при любом $e' \in E' \setminus \{0\}$ существует оптимальное управление $u_*^o \neq 0$ причём множество всех оптимальных управлений $\mathcal{U}_*^o \neq \emptyset$ есть замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{U}_* \subseteq U_T'$, если пространства U_T, U_T' выпуклые;*
8. *при любом $e' \in E' \setminus \{0\}$ существует единственное оптимальное управление $u_*^o \neq 0$, т.е. минимальное по норме управление, если пространства U_T, U_T' строго выпуклые.*

Для исследования свойств оптимальных управлений, кроме BUME метода [1, 2] мы привлекаем метод нелинейных монотонных отображений и оператор Рисса.

Литература

1. *Прилепко А. И.* Метод Банаха и метод монотонных отображений нахождения оптимальных управлений в рефлексивных (B) – пространствах // Доклады АН, **476**:4 (2017), 377-380.

2. *Prilepko A. I.* Controllability and Optimal Controllability for Operator Equations of the First Kind in (B)-Spaces: Examples for ODE in $\mathbb{R}^n$ // Doklady Mathematics, **99**:2 (2019), 1-4.

3. *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed parameter systems // SIAM Review, **30** (1988), 1-64.

4. *Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В.* Приближённые решения двойственных задач управления и наблюдения. — М.: Макс Прес, 2010.

5. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга. 1999.

6. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York: Marcel Dekker, 2000.

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Л.С. Пулькина

louise@samdiff.ru

УДК 517.95

В докладе рассматривается задача для гиперболического уравнения с нелокальными интегральными условиями. Выбор метода исследования разрешимости нелокальной задачи зависит от вида интегрального условия. В процессе разработки методов, эффективных именно для нелокальных задач, были выделены интегральные условия различных типов, отличающиеся видом внеинтегральных слагаемых или даже их отсутствием. Дальнейшие исследования показали, что условия разрешимости нелокальных задач аналогичны условиям регулярности краевых условий для дифференциального оператора.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, нелокальные задачи, регулярные краевые условия

Людмила Степановна Пулькина, д.ф.-м.н., профессор, (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия); Ludmila Pulkina (Samara Samara National Research University, Samara, Russia)

On certain conditions for solvability of nonlocal problems for hyperbolic equations

In this talk, we consider a problem with nonlocal integral conditions for a hyperbolic equation. A method we choose to prove the solvability of certain nonlocal problem depends on a kind of integral conditions. The kind of an integral condition is defined by a form of the terms outside the integral. Following analysis shows that conditions for solvability of the nonlocal problem are analogous to regularity of boundary conditions for differential operator.

Keywords: hyperbolic equations, nonlocal problems, regular boundary conditions

Рассмотрим в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ задачу для гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \qquad (1)$$

с начальными данными $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ и нелокальными условиями

$$\int_0^l K_i(x)u(x,t)dx = 0, \; i = 1,2. \qquad (2)$$

Условия (2) называются интегральными условиями первого рода. Исследование разрешимости задач с условиями такого вида сталкивается с многими трудностями и демонстрирует неприменимость классических методов обоснования разрешимости краевых задач [1]. Однако если интегральные условия имеют вид

$$u_x(0,t) + \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0, \; u_x(l,t) + \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0 \qquad (3)$$

или

$$u(0,t) + \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0, \; u(l,t) + \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0, \qquad (4)$$

то есть являются условиями второго рода, то можно модифицировать известные методы доказательства разрешимости так, что удается получить априорные оценки, на которых базируется доказательство, применяя многие классические приемы. Возник вопрос, нельзя ли свести условия (2) к условиям (3) или (4). Оказалось, что при определенных ограничениях на функции $K_i(x)$ это сделать можно [2]. Неизбежно возникло желание ослабить условия на $K_i(x)$ и рассмотреть более общие случаи сведения условий первого рода к условиям второго рода, т.е. к таким, которые содержат кроме интегрального оператора след решения или его производных.

Предположив, что $u(x,t)-$ решение нелокальной задачи с условиями (2), проинтегрируем (1), умноженное предварительно на $K_i(x)$ по x от 0 до l. Получим соотношения $a_1u_x(0,t) + b_1u_x(l,t) + a_0u(0,t) + b_0u(l,t) + \int_0^l P_1udx = g_1(t)$ и $c_1u_x(0,t) + d_1u_x(l,t) + c_0u(0,t) + d_0u(l,t) + \int_0^l P_2udx = g_2(t)$, в которых коэффициенты, ядра $P_i(x,t)$ и правые части $g_i(t)$ выражаются через коэффициенты уравнения (1) и $K_i(x)$. Эти соотношения при $P_i = 0, g_i = 0$ совпадают с краевыми условиями ([3], с. 53), которые при выполнении некоторых условий являются регулярными. Оказалось, что условия регулярности краевых условий, записанные в терминах поставленной задачи, являются условиями разрешимости нелокальных задач с соответствующими интегральными условиями. Например, условие регулярности $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$ для нашей задачи принимает вид $K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0$ и позволяет свести условия (2) к условиям второго рода $u_x(0,t) + \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx = h_1(t)$, $u_x(,t)+\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)+\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx = h_2(t)$. Однозначная разрешимость задачи с такими условиями доказана в [2]. Там же получены условия, при выполнении которых следует и разрешимость задачи с интегральными условиями первого рода (2).

Литература

1. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения, **13**:2 (1977), 294-301.

2. *Пулькина Л.С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия вузов. Математика, № 4 (2012), 74-83.

3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: 1954.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ

Н.А. Раутиан

nrautian@mail.ru

УДК 517.968.72

Установлена корректная разрешимость начальных задач для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и теории распространения тепла в средах с памятью.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, оператор-функции, спектральный анализ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект № НШ-6222.2018.1).

Раутиан Надежда Александровна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nadezhda Rautian (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Analysis of Volterra integro-differential equations with singular kernels

We establish the correct solvability of the abstract integro-differential equations with unbounded operator coefficients in Hilbert space are studied. The spectral analysis of operator-functions that are the symbols of the considered equations are developed. These equations are the abstract form of the linear partial integro-differential equations arising in viscoelasticity theory and the theory of heat transfer in media with memory.

Keywords: integro-differential equations, operator-functions, spectral theory

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений на основе спектрального анализа их символов. В работе рассматриваются уравнения следующего вида

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A^2u(t) - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где A – самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\mu(\tau),$$

где $d\mu$ - положительная мера, которой соответствует возрастающая непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Получены представления сильных решений указанных уравнений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений (см. [1], [2]). Указанные представления являются новыми для данного класса интегро-дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Rautian N.A., Vlasov V.V.* Well-posedness and spectral analysis of Volterra integro-differential equations with singular kernels // Doklady Mathematics, **98**:2 (2018), 502-505.

2. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc. **75** (2014), 185-204.

ОЦЕНКА ПРОМЫСЛОВОГО ДОХОДА В СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СБОРА ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА

Л.И. Родина
LRodina67@mail.ru

УДК 517.935

Рассматриваются модели эксплуатируемой популяции, заданные уравнениями со случайными параметрами. Предполагаем, что ценность позднее получаемой выгоды от извлечения ресурса снижается, поэтому рассматриваем промысловый доход за бесконечное число сборов с учетом дисконтирования. Получены оценки среднего дохода от промысла, выполненные с вероятностью единица.

Ключевые слова: стохастические модели сбора, возобновляемый ресурс

Estimation of the trade income in stochastic models of harvesting of a renewable resource

We consider the models of exploited population given by the equations with random parameters. We assume that value after received profit from resource extraction decreases, therefore we consider the trade income for infinite number of gathering taking into account discounting. We received the estimations of the average trade income, true with probability one.

Keywords: stochastic models of harvesting, renewable resource

Задачи моделирования и оптимизации эксплуатации возобновляемого ресурса начали вызывать интерес ученых, начиная с семидесятых годов прошлого века. Так, в одной из первых работ [1] показано, что стохастическую рыбную популяцию можно эксплуатировать только до достижения определенного уровня, не зависящего от текущего размера популяции. В [2], [3] описан способ добычи ресурса, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления и с вероятностью единица существует положительный предел средней временной выгоды. Множество работ посвящено вопросам оптимальной эксплуатации популяций, в которых случайным воздействиям подвержены размер популяции, коэффициент рождаемости или цена продукции (см. обзор литературы в [4]).

Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции задано уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в моменты времени τ_k происходит сбор ресурса, при этом из популяции извлекается некоторая случайная доля v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Считаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ между моментами изъятий τ_k являются случайными величинами и количество извлеченного ресурса зависит от случайных параметров v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора таким образом, чтобы остановить заготовку, если ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in [0, 1)$ в момент τ_k), тогда часть ресурса сохранится

Родина Людмила Ивановна, д.ф.-м.н., профессор, ВлГУ имени А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия); Lyudmila Rodina (Vladimir State University, Vladimir, Russia)

для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна $\ell_k = \ell(v_k, u_k) = v_k$, если $v_k < u_k$ и $\ell_k = u_k$, если $v_k \geqslant u_k$. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\dot{x} = g(x), \quad t \neq \tau_k,$$
$$x(\tau_k) = (1 - \ell_k) \cdot x(\tau_k - 0), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\tau_0 = 0$, $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1} \in \Omega_1 = [\alpha_1, \beta_1]$, $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1$; $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$. Предполагаем, что решения данного уравнения непрерывны справа, функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \geqslant 0$.

Обозначим $\bar{\theta}_k \doteq (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, $\bar{\ell}_k \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k)$,

$$x(\tau_k - 0) = X_k = X_k(\bar{\theta}_k, \bar{\ell}_{k-1}, x_0), \quad x(\tau_k) = x_k = x_k(\bar{\theta}_k, \bar{\ell}_k, x_0),$$

тогда $x_k = (1 - \ell_k)X_k$, где $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $\bar{\theta} \doteq (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, $\bar{\ell} \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)$. Для любого $x_0 \geqslant 0$ введем в рассмотрение функцию

$$H_\alpha\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} X_k \ell_k e^{-\alpha\tau_k} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k\big(\bar{\theta}_k, \bar{\ell}_{k-1}, x_0\big)\ell_k e^{-\alpha\tau_k},$$

равную доходу от извлечения ресурса на бесконечном промежутке времени. Показатель дисконтирования $\alpha > 0$ указывает здесь на то, что ценность позднее получаемого дохода снижается.

Определим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ как прямое произведением вероятностных пространств $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$. Здесь Σ_1 означает множество числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где $\theta_k \in \Omega_1$, система множеств $\mathfrak{A}_1$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\theta \in \Sigma_1 : \theta_1 \in I_1, \ldots, \theta_k \in I_k\}, \text{ где } I_i \doteq (t_i, s_i],\ i = 1, \ldots, k,$$

а вероятностная мера μ_1 определена следующим образом. Для каждого промежутка I_i определим вероятностную меру $\widetilde{\mu}_1(I_i) = F_1(s_i) - F_1(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ с помощью функции распределения F_1. На алгебре цилиндрических множеств построим меру $\widetilde{\mu}_1(E_k) = \widetilde{\mu}_1(I_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}_1(I_k)$, тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1)$ существует единственная вероятностная мера μ_1, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$. Таким же образом определяем вероятностное пространство $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$, где $\Sigma_2 \doteq \{v : v = (v_1, \ldots, v_k, \ldots)\}$, $v_k \in \Omega_2$ и мера $\widetilde{\mu}_2$ задана с помощью функции распределения F_2. Отметим, что $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{\sigma : \sigma = (\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)\}$, где $\omega_k = (\theta_k, v_k) \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Обозначим через $\varphi(t, x_0)$ решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x_0) = x_0$. Пусть $\theta \in \Omega_1$, тогда функция $\varphi(\theta, x)$ является случайной величиной, заданной на множестве Ω_1. Положим $u(x, \varphi(\theta, x)) = 1 - \dfrac{x}{\varphi(\theta, x)}$. Рассмотрим функцию

$$\ell(\omega, x) = \ell\big(v, u(x, \varphi(\theta, x))\big) = \begin{cases} v, & \text{если } v < u(x, \varphi(\theta, x)), \\ u(x, \varphi(\theta, x)), & \text{если } v \geqslant u(x, \varphi(\theta, x)), \end{cases}$$

которая является случайной величиной на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Условие 1. *Уравнение* $\dot{x} = g(x)$ *имеет асимптотически устойчивое решение* $\varphi(t) \equiv K$ *и интервал* (K_1, K_2) *является областью асимптотической устойчивости этого решения* $(0 \leqslant K_1 < K < K_2)$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие 1. Тогда для любых* $x \in (K_1,K)$, $x_0 \in [x,K]$ *существует управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что для всех* $\sigma \in \Sigma$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\theta_k, x)\ell(\omega_k, x)e^{-\alpha\tau_k} \leqslant H_\alpha\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) \leqslant K \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\omega_k, x)e^{-\alpha\tau_k}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{\theta}^p \doteq (\theta_1^p, \ldots, \theta_k^p, \ldots), \;\; \bar{\ell}^p \doteq (\ell_1^p, \ldots, \ell_k^p, \ldots), \;\; \tau_k^p = \theta_1^p + \ldots + \theta_k^p, \;\; p = 1, 2, \ldots .$$

Тогда $H_\alpha\big(\bar{\theta}^p, \bar{\ell}^p, x_0\big) \doteq \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k\big(\bar{\theta}_k^p, \bar{\ell}_{k-1}^p, x_0\big)\ell_k^p e^{-\alpha\tau_k^p}$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1. Тогда для любых* $x \in (K_1, K)$, $x_0 \in (x, K)$ *найдется управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства*

$$\frac{M\big(\varphi(\theta, x)\ell(\omega, x)e^{-\alpha\theta}\big)}{1 - Me^{-\alpha\theta}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} H_\alpha\big(\bar{\theta}^p, \bar{\ell}^p, x_0\big) \leqslant \frac{K \cdot M\big(\ell(\omega, x)e^{-\alpha\theta}\big)}{1 - Me^{-\alpha\theta}}.$$

Рассматривается также задача выбора управления $\bar{u}^* \in U$, при котором оценка снизу для среднего дохода от извлечения ресурса является максимальной.

Литература

1. *Reed W.J.* Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management, **6** (1979), 350-363.

2. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, **28**:1 (2018), 48-58.

3. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, **28**:2 (2018), 213-221.

4. *Jensen F., Frost H., Abildtrup J.* Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy, **21** (2017), 167-178.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К.Б. Сабитов

sabitov_fmf@mail.ru

УДК 517.95

В работе для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде изучена начально-граничная задача. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей. Установлена оценка об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно граничных функций.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, начально-граничная задача, критерий единственности, существование, ряд, малые знаменатели, устойчивость

Initial-boundary problem for a three-dimensional equation of a mixed parabolic-hyperbolic type

Short abstract. In the work for the mixed parabolic-hyperbolic type equation in a rectangular parallelepiped, the initial boundary problem was studied. The uniqueness criterion is established. The solution is constructed as the sum of the orthogonal series. In justifying the convergence of the series, the problem of small denominators arose. An estimate on separation from zero with the corresponding asymptotics is established, which allowed us to prove the convergence of a series in the class of regular solutions and the stability of the solution with respect to boundary functions.

Keywords: equation of mixed type, initial boundary problem, uniqueness criterion, existence, series, small denominators, stability

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в области

$$Q = \{(x,y,t)|\,(x,y) \in D,\, t \in (-\alpha, \beta)\},$$

где

$$D = \{(x,y)|\,0 < x < p,\, 0 < y < q\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020516).

Сабитов Камиль Басирович, д.ф.-м.н., профессор, Стерлитамакский филиал БашГУ; Стерлитамакский филиал ИСИ РБ (Стерлитамак, Россия); Kamil Sabitov (Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak branch of the Institute of Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia)

α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, и b – заданное любое действительное число.

Начально-граничная задача. *Найти функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y,t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q_+ \cup Q_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv 0, \quad (x,y,t) \in Q_+ \cup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = u(x,y,t)\big|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=0} = u(x,y,t)\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x,y,t)\big|_{t=-\alpha} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

где $\psi(x,y)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющие условиям согласования с граничными данными (4) *и* (5).

Отметим, что задача Трикоми и ее аналоги для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались многими авторами [1–3] (см. библиографию указанных работ) в двумерных областях, в которых гиперболическая часть представляет собой "треугольник", ограниченный характеристиками уравнения и линией изменения типа $t = 0$. В работах [4–7] изучены аналоги начально-граничных задач для уравнений параболо-гиперболического типа в прямоугольных областях.

В данной работе установлен критерий единственности решения, а само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям двумерной спектральной задачи оператора Лапласа. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей от двух переменных более сложной структуры, чем в ранее известных работах. В связи с чем установлена оценка об отделенности от нуля малых знаменателей, на основании которой доказана сходимость ряда у классе функций $C^2(\overline{Q})$ при некоторых условиях относительно функции $\psi(x,y)$, а также получены оценки об устойчивости решения по отношению граничному условию.

Здесь приведем ряд результатов.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (6)*, то оно единственно только тогда, когда при всех m и n выполнены условия*

$$\delta_{mn}(\alpha) = \cos\lambda_{mn}\alpha + \lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}\alpha \neq 0, \tag{7}$$

где

$$\lambda_{mn}^2 = b + \pi^2\left[\left(\frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{n}{q}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Отметим, что в дальнейшем в (8) будем считать, что $b = \mu^2 \geqslant 0$ ($\mu \geqslant 0$), так как если $b < 0$, то начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$ правая часть (8) принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b не влияет на полученные результаты.

При соблюдении условий (7) решение задачи (2) – (6) формально определяется рядом Фурье

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \tag{9}$$

где коэффициенты находятся по формуле

$$u_{mn}(t)=\begin{cases}\dfrac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)}e^{-\lambda_{mn}^2 t}, & t\geqslant 0,\\ \dfrac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)}\Big(\cos\lambda_{mn}t-\lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}t\Big), & t\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\psi_{mn}=\iint\limits_D \psi(x,y)v_{mn}(x,y)\,dxdy,\quad v_{mn}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{pq}}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}.$$

Заметим, что выражение $\delta_{mn}(\alpha)$ является знаменателем коэффициентов ряда (9) и легко показать, что уравнение $\delta_{mn}(\alpha)=0$ имеет счетное множество нулей относительно α. В связи с этим возникает проблема малых знаменателей от двух переменных n и m более сложной структуры, чем в плоском случае [4–7].

Лемма 1. *Пусть $n\geqslant m$ и отношение q/p рационально. Если $\widetilde{\alpha}=\alpha/q$ – произвольное положительное рациональное число, т.е. $\widetilde{\alpha}=r/s$, r, $s\in\mathbb{N}$, $(r,s)=1$, и выполнено неравенство*

$$\mu(2\,r\,p\,q)^2+(2p)^2\pi\,q\,r\,s<3\pi^2,$$

то существуют положительные постоянные C_0 и n_0 ($n_0\in\mathbb{N}$), такие, что при всех $n>n_0$ и любом фиксированным m справедлива оценка

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})|\geqslant C_0.$$

Теорема 2. *Пусть постоянные $\widetilde{\alpha}$, μ, $p=q$ удовлетворяют условиям леммы 1, а функция $\psi(x,y)\in C^6(\overline{D})$ и $\psi(0,y)=\psi_{xx}(0,y)=\psi(p,y)=\psi''_{xx}(p,y)=0$, $0\leqslant y\leqslant q$, $\psi(x,0)=\psi_{yy}(x,0)=\psi(x,q)=\psi_{yy}(x,q)=0$, $\psi_{xxyy}(x,0)=\psi_{xxyy}(x,q)=0$, $0\leqslant x\leqslant p$. Тогда, если $\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})\neq 0$ при $n=\overline{1,n_0}$, то существует единственное решение задачи (2) – (6) и оно определяется рядом (9).*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения (9) задачи (2) – (6) справедливы оценки*

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)}\leqslant C_1\|\psi(x,y)\|_{W_2^1(D)},$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})}\leqslant C_2\|\psi(x,y)\|_{C^3(\overline{D})},$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от функции $\psi(x,y)$.

Литература

1. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамаджанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. — Ташкент: Изд. ФАН, 1986.

2. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью I. II. // Дифференц. уравнения, **23**:1 (1987), 72-78; **24**:8 (1988), 1379-1386.

3. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения, **25**:1 (1989), 117-126.

4. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. — М.: Наука, 2016.

5. *Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения, **44**:9 (2008), 1175-1181.

6. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, **50**:3 (2014),356-365.

7. *Сидоров С.Н.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика, 12 (2015), 55-64.

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ D_E-СИСТЕМЫ

Ж. Сартабанов, А.А. Кульжумиева

sartabanov42@mail.ru, aiman-80@mail.ru

УДК 517.925

Рассмотрена линейная система с оператором дифференцирования по направлению главной диагонали пространства временных переменных. Установлены условия существования многопериодического решения линейной системы.

Ключевые слова: линейная система, дифференциальный оператор, матрица монодромии, мультипликатор, многопериодическое решение

Multiperiodic solution of a semi-linear D_e-system

We considered a linear system with differentiation operator in the direction of the main diagonal of the space of time variables. The conditions for existence of a multiperiodic solution of the linear system are established.

Keywords: linear system, differentiation operator, monodromy matrix, multiplier, multiperiodic solution

Сартабанов Жайшылык, д.ф.-м.н., профессор, АРГУ им. К. Жубанова (Актобе, Казахстан); Zhaishylyk Sartabanov (K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan)

Кульжумиева Айман Амангельдиевна, к.ф.-м.н., ЗКГУ им. М. Утемисова (Уральск, Казахстан); Aiman Kulzhumiyeva (M. Utemisov West-Kazakhstan State University, Uralsk, Kazakhstan)

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$D_e x = P(\tau,t)x + f(\tau,t) \tag{1}$$

с дифференциальным оператором $D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$, где $\tau \in (-\infty,+\infty) = R$ и $t = (t_1,...,t_m) \in R^m$ – временные переменные, $\langle , \rangle$ – скалярное произведение m-векторов $e = (1,...,1)$ и $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1},...,\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$, $x = (x_1,...,x_n)$ – искомая функция.

Допустим, что матрица $P(\tau,t)$ и заданная вектор-функция $f(\tau,t)$ обладают следующими свойствами:

$$P(\tau+\theta, t+k\omega) = P(\tau,t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R\times R^m), \quad k \in Z^m, \tag{2}$$

$$f(\tau+\theta, t+k\omega) = f(\tau,t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R\times R^m), \quad k \in Z^m, \tag{3}$$

где $\theta = \omega_0$, $\omega_1,...,\omega_m$ – рационально несоизмеримые положительные постоянные, $k\omega = (k_1\omega_1,...,k_m\omega_m)$ – кратный вектор-период, $k = (k_1,...,k_m) \in Z^m$, Z – множество целых чисел.

Поставим задачу о выяснении условий существования многопериодического решения системы (1).

Для решения поставленной задачи сначало исследуем условия существования многопериодического решения соответствующей однородной системы

$$D_e x = P(\tau,t)x. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что матрицант $X(\tau,t,\sigma)$ системы (4) обладает свойствами:

$$X(\tau+\theta,t,\sigma) = X(\tau,t,\sigma)X(\theta,\sigma,\sigma),$$
$$X(\tau,t+k\omega,\sigma+k\omega) = X(\tau,t,\sigma), \quad k\in Z^m,$$

где $\sigma = t - e\tau$.

Матрицу $X(\theta,\sigma,\sigma)$ назовем матрицей монодромии. Предположим, что матрица монодромии $X(\theta,\sigma,\sigma)$ имеет вещественный логарифм. Значит можно выбрать замкнутый контур γ, который будет окружать спектр матрицы монодромии, но не будет охватывать нуль, а затем определить на нем однозначную ветвь $\ln\lambda$ и построить логарифм матрицы монодромии соотношением

$$\ln X(\theta,\sigma,\sigma) = -\frac{1}{2\pi i}\oint \ln\lambda\,[X(\theta,\sigma,\sigma)-\lambda E]^{-1}\,d\lambda, \tag{5}$$

где $\lambda_j = \rho_j(\sigma)$ – собственные значения, имеющие кратности n_j, $j=\overline{1,l}$.

Собственные значения $\rho_j(\sigma)$, матрицанта $X(\theta,\sigma,\sigma)$, определяемые вековым уравнением

$$\det[\rho E - X(\theta,\sigma,\sigma)] = 0$$

назовем мультипликаторами системы (4), E – единичная матрица.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы система (4) при условиях (2) и (5) имела нетривиальное многопериодическое решение необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из мультипликаторов её был равен единице.*

Для исследования многопериодического решения системы (1) предположим выполненным условие

$$\det\left[X(\tau+\theta,t,\sigma)-X(\tau,t,\sigma)\right]\neq 0,\quad (\tau,t,\sigma)\in R\times R^m\times R^m \tag{6}$$

об отсутствии θ-периодического по τ решения системы (4), отличного от нулевого.

В частности, условие (6) имеет место если все мультипликаторы $\rho(\sigma)$ содержатся внутри единичного круга комплексной плоскости.

Пусть матрица $G(\tau,t,s,\sigma+es)$ имеет вид

$$G(\tau,t,s,\sigma+es)=\left[X^{-1}(\tau+\theta,t,\sigma)-X^{-1}(\tau,t,\sigma)\right]^{-1}X^{-1}(s,\sigma+es,\sigma). \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2), (3), (5). Тогда при условии (6), в частности, когда все мультипликаторы системы (4) находятся внутри единичного круга* $|\rho(\sigma)|<1$, *то система (1) имеет единственное многпериодическое решение* $x^*(\tau,t)$, *которое с помощью матрицы (7) можно представить в виде*

$$x^*(\tau,t)=\int\limits_{\tau}^{\tau+\theta}G(\tau,t,s,\sigma+es)f(s,\sigma+es)\,ds.$$

Далее, методом сжатых отображений теорема 2 обобщается на случай полулинейной системы, когда вектор-функция f наряду с (τ,t) зависит от искомой функции x.

Доклад посвящен дальнейшему развитию результатов работ [1-2].

Литература

1. *Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.* On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal, **8**:1 (2017), 67-75.

2. *Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.* General bounded multiperiodic solutions of linear equation with differential operator in the direction of the main diagonal // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, **92**:4 (2018), 44-53.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПО ЛЯПУНОВУ И ПО ПЕРРОНУ

И.Н. Сергеев

igniserg@gmail.com

УДК 517.926.4

Новое понятие устойчивости по Перрону сравнивается с классическим понятием устойчивости по Ляпунову. Получен полный список логических связей между ними и указаны их особенности для некоторых типов систем. Обнаружено совпадение возможностей для исследования различных видов устойчивости по первому приближению.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, показатели Перрона, первое приближение

Lyapunov and Perron stability of solutions to differential systems

The new concept of Perron stability is compared with the classical concept of stability according to Lyapunov. A complete list of logical connections between them is obtained and their features for some types of systems are indicated. The coincidence of the possibilities in studying various types of stability by the first approximation is found.

Keywords: Lyapunov stability, Perron exponents, first approximation

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим допускающую *нулевое решение* систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G), \quad \mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty). \tag{1}$$

Через $\mathcal{S}_\delta(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых ненулевых* решений x системы (1) с *начальными условиями* $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что для системы (1) имеет место следующее *перроновское свойство устойчивости*:

1) *устойчивость по Перрону*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| < \varepsilon \tag{2}$$

(если решение определено не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, то требование (2), как и требование (3) ниже, считаем *невыполненным* по определению);

2) *асимптотическая устойчивость по Перрону*, если существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| = 0; \tag{3}$$

3) *неустойчивость по Перрону*, если нет устойчивости по Перрону;

Сергеев Игорь Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Igor Sergeev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

4) *полная неустойчивость по Перрону*, если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что ни одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2).

Определение 2 [3]. Для каждого из четырёх перроновских свойств устойчивости из определения 1 установим его *ляпуновский* аналог: *устойчивость*, *асимптотическую устойчивость*, *неустойчивость* и *полную неустойчивость по Ляпунову*, — все они получаются заменой нижнего предела в требованиях (2) и (3) точной верхней гранью и соответственно точным пределом с добавлением условия устойчивости по Ляпунову.

Определение 3 [3–5]. *Показателями Перрона* (1930) и *Ляпунова* (1892) функции $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ называются соответственно величины

$$\pi(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)|, \quad \lambda(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)|.$$

Перроновские свойства устойчивости связаны с показателями Перрона *аналогично* тому, как ляпуновские — с показателями Ляпунова.

Теорема 1 [2]. *Если для некоторого $\delta > 0$ показатели Перрона (Ляпунова) всех решений $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ системы (1) отрицательны, то она асимптотически устойчива по Перрону (соответственно по Ляпунову, правда, при дополнительном условии её устойчивости по Ляпунову), а если положительны — то она вполне неустойчива по Перрону (по Ляпунову).*

Между перроновскими и ляпуновскими свойствами устойчивости из определений 1 и 2 действуют естественные *логические связи*.

Теорема 2 [1, 2]. *Любая система (1):*

1) либо устойчива по Перрону (по Ляпунову), либо неустойчива;

2) если асимптотически устойчива по Перрону (по Ляпунову), то и устойчива, а если вполне неустойчива, то и неустойчива;

3) если устойчива (асимптотически) по Ляпунову, то и по Перрону, а если неустойчива (вполне) по Перрону, то и по Ляпунову.

Теорема 3 [2]. *Любое сочетание свойств устойчивости по Перрону и по Ляпунову, не противоречащее теореме 2, реализуется на некоторой линейной системе*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(t)\| < \infty. \tag{4}$$

Наиболее *содержательными* представляются следующие два сочетания:

1) устойчивость по Ляпунову вместе с асимптотической — по Перрону;

2) полная неустойчивость по Перрону (а тогда и по Ляпунову).

В случае *автономной* системы логические связи между различными свойствами устойчивости оказываются несколько более жесткими [2, 6].

Теорема 4. *Одномерная автономная система устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Перрону, если и только если она устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Ляпунову.*

Теорема 5. *Автономная система вполне неустойчива по Перрону, если и только если она вполне неустойчива по Ляпунову.*

Теорема 6 [7]. *Существует двумерная автономная система, асимптотически устойчивая по Перрону, но неустойчивая по Ляпунову.*

В случае *линейной* системы вида (4) (с не обязательно ограниченной функцией A) свойства устойчивости также имеют свои особенности [8].

Теорема 7 [1]. *Линейная автономная система (4) устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Перрону, если и только если она устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Ляпунову.*

Теорема 8 [2]. *Существует правильная (см. [3]) система (4), асимптотически устойчивая по Перрону, но вполне неустойчивая по Ляпунову.*

Одним из основных *методов Ляпунова* является исследование устойчивости системы по её первому приближению.

Определение 4 [3, 4]. Пусть в системе (1) выделена *линейная* часть

$$f(t,x) \equiv A(t)x + h(t,x), \quad A(t) \equiv f'_x(t,0), \tag{5}$$

при дополнительном условии *равномерной малости* нелинейной добавки

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |h(t,x)| = o(x), \quad x \to 0. \tag{6}$$

Тогда соответствующую линейную систему назовём её *первым приближением*, а если всякая система (5) с фиксированным первым приближением обладает данным перроновским или ляпуновским свойством устойчивости, то скажем, что это первое приближение *обеспечивает* данное свойство.

Без требования равномерной малости добавки последнее определение оказывается *бессодержательным*.

Теорема 9 [9, 10]. *Если в определении 4 снять условие (6), то никакое первое приближение не сможет обеспечить ни одного из перроновских или ляпуновских свойств устойчивости вообще.*

Все свойства устойчивости, в отличие от свойств неустойчивости, обеспечиваются в точности *одними и теми же* первыми приближениями.

Теорема 10 [2, 9, 10]. *Если данное первое приближение обеспечивает хотя бы одно из четырёх свойств: устойчивость или асимптотическую устойчивость по Перрону или устойчивость или асимптотическую устойчивость по Ляпунову, — то оно обеспечивает и остальные три.*

Теорема 11 [9, 10]. *Существует асимптотически устойчивая по Перрону система (4), обеспечивающая полную неустойчивость по Ляпунову.*

Теорема 12 [9, 10]. *Существует не вполне неустойчивая ни по Перрону, ни по Ляпунову система (4), обеспечивающая неустойчивость и по Перрону, и по Ляпунову.*

Литература

1. *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения, **54**:6 (2018), 855-856.

2. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения, **55**:5 (2019), 636-646.

3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

4. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. — Мн.: БГУ, 2006.

5. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.

6. *Сергеев И.Н.* Об исследовании на устойчивость по Перрону одномерных и автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения, **54**:11 (2018), 1561-1562.

7. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

8. *Сергеев И.Н.* Исследование на устойчивость по Перрону линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения, **54**:11 (2018), 1571-1572.

9. *Сергеев И.Н.* Об исследовании по первому приближению перроновских и ляпуновских свойств устойчивости // Дифференц. уравнения, **55**:6 (2019).

10. *Сергеев И.Н.* Устойчивость по Перрону и её исследование по первому приближению // Доклады Акад. наук, **486**:1 (2019).

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С.Н. Сидоров

stsid@mail.ru

УДК 517.95

Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением на линии изменения типа изучены начально-граничная и обратная задачи по определению сомножителей правых частей, зависящих от времени. На основе формулы решения прямой задачи решение обратной задачи эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений, доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной обратной задачи и указана явная формула решения.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, начально-граничная задача, обратная задача, единственность, существование, ряд, малые знаменатели, интегральные уравнения.

Сидоров Станислав Николаевич, к.ф.-м.н., снс, Стерлитамакский филиал ИСИ РБ; Стерлитамакский филиал БашГУ(Стерлитамак, Россия); Stanislav Sidorov (Sterlitamak branch of the Institute of Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

Boundary value problems for a degenerate equation of a mixed parabolic-hyperbolic type

Short abstract. For the equation of a mixed parabolic-hyperbolic type with power degeneration on the type change line, the initial-boundary and inverse problems of determining the factors of the right-hand parts depending on time are studied. Based on the formula for solving a direct problem, the solution of the inverse problem is equivalently reduced to the solvability of loaded integral equations. Using the theory of integral equations, the theorems of uniqueness and the existence of a solution to the inverse problem are proved and an explicit formula for the solution is given.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, initial-boundary value problem, inverse problems, uniqueness, existence, series, small denominators, integral equations.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt}, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\, -\alpha < t < \beta\},$$

где n, m, l, α, β – заданные положительные действительные числа, $f_i(x)$, $i = 1, 2,$ – известные функции и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \quad u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $F(x,t)$ – заданная достаточно гладкая функция, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (2) – (4) и*

$$g_1(t) \in C[0,\beta], \quad g_2(t) \in C[-\alpha, 0];$$

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

здесь $f_i(x)$, $i = 1, 2$, $h(t)$ – известные функции, x_0 – заданная точка из интервала $(0,l)$.

Отметим, что начально-граничная задача 1 для однородного уравнения (1), т.е. когда $F(x,t) \equiv 0$ изучена в работах [1 – 3], а когда $F(x,t) \neq 0$ – в работах [4, 5]. В работах [6, 7] были изучены обратные задачи для уравнения (1) по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$. А в статьях [8, 9] рассмотрена обратная задача 2 для уравнения (1), когда $n > 0$, $m = 0$ и $n = 0$, $m > 0$.

В данной работе изучена обратная задача 2 по отысканию сомножителей правой части уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением на линии изменения типа, исследование которой проводится на основе решения прямой начально-граничной задачи 1. Решение этой задачи построено в виде суммы ортогонального ряда, при обосновании сходимости которого возникает проблема малых знаменателей. В связи с чем, установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволяют обосновать сходимость ряда в классе регулярных решений уравнения (1). На основе формулы решения этой задачи решение обратной задачи 2 эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач и указаны явные формулы решения.

Литература

1. *Сидоров С.Н.* Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, **14**:3 (2012), 30-40.

2. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, **50**:3 (2014),356-365.

3. *Сидоров С.Н.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика, 12 (2015), 55-64.

4. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. — М.: Наука, 2016.

5. *Sabitov K.B., Sidorov S.N.* Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type // J. Math. Sci. (N.Y.), **236**:6 (2019), 603-640.

6. *Сидоров С.Н.* Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 19 (190) (2014), С. 91-104.

7. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1 (2015), 46-59.

8. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. матем. изв., 16 (2019), 144-157.

9. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский математический журнал, **11**:1 (2019), 72-86.

О ТЕОРЕМЕ БОЛЯ – ПЕРРОНА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛОВ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

П.М. Симонов

simpm@mail.ru, simonov@econ.psu.ru

УДК 517.977

В тезисах продолжается изучение гибридной линейной системы функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГЛСФДУП). Гибридность здесь понимается так: первая система уравнений по части переменных является система линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ЛФДУП), по другой части переменных — система линейных разностных уравнение с последействием (ЛРУП), вторая система уравнений по части переменных является система ЛРУП, по другой части переменных — система ЛФДУП. Возникает система двух уравнений с двумя неизвестными. Применен W-метод Н.В.Азбелева к двум уравнениям. Изучены два модельных уравнения: одно — это система ЛФДУП, второе — это система ЛРУП. Изучены банаховы пространства правых частей и решений. Это пространства функций исчезающих на бесконечности, и другое — пространства функций, имеющий предел на бесконечности. Известны теоремы Боля — Перрона об асимптотической устойчивости и о существовании пределов решений для ЛФДУП из работ Н. В. Азбелева, Л. М. Березанского, П. М. Симонова и А. В. Чистякова [1], [2]. Эти результаты были получены в статье для ЛРУП и для ГЛСФДУП. В тезисах такие результаты получены были переносом с систем ЛФДУП. В случае системы ГЛСФДУП удалось свезти к одному уравнению в пространстве функций на полуоси (к ЛФДУП) или свезти к одному уравнению в пространстве функций на счётном множестве (к ЛРУП).

Ключевые слова: теорема Боля – Перрона, гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием, метод модельных уравнений, разрешимость в парах пространств, существование пределов решений.

On a Bohl – Perron theorem on the existence of solution limits for hybrid linear functional differential systems with aftereffect

The theses continue the study of a hybrid linear system of functional differential equations with aftereffect (HLSFDEA). Hybridism here is understood as follows: the first system of equations with respect to a part of the variables is a system of linear functional differential equations with aftereffect (LFDEA), the other part of the variables is a system of linear difference equations with aftereffect (LDEA), the second system of equations with respect to some variables is the LDEA system, for the other part of the variables is the LFDEA system. There is a system of two equations with two unknowns. The W-method of N. V. Azbelev is applied to two

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332 А).

Симонов Пётр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ПГНИУ (Пермь, Россия); Pyotr Simonov (Perm State National Research University, Perm, Russia)

equations. Two model equations are studied: one is the LFDEA system, the other is the LDEA system. Banach spaces of right-hand sides and solutions are studied. These are spaces of functions vanishing at infinity, and the other is a space of functions having a limit at infinity. Known Bohl — Perron theorems on asymptotic stability and on the existence of the limits of solutions for LFDEA from the works of N. V. Azbelev, L. M. Berezanskii, P. M. Simonov and A. B. Chistyakov [1], [2]. These results were obtained in an article for LDEA and for the HLSFDEA. In the theses, such results were obtained by transfer from LFDEA systems. In the case of the HLSFDEA system, it was possible to reduce to one equation in the space of functions on the semi-axis (to LFDEA) or to reduce to one equation in the space of functions on the countable set (to LDEA).

Keywords: theorem of Bohl – Perron, hybrid linear system of functional differential equations with aftereffect, method of model equations, solvability in pairs of spaces, asymptotic stability, existence of the limits of solution.

Воспользуемся обозначением статей [3]–[6].

Ниже предполагаем, что пространство $\mathbf{B}$ содержит все функции константы, а подпространство $\mathbf{B}_0$ не содержит отличных от нуля констант.

Будем говорить, что вектор $z(\infty)=(\mathbf{B})\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$ есть "$\mathbf{B}$-*предел*" функции $z \in \mathbf{B}$, если разность $z - z(\infty)$ принадлежит пространству $\mathbf{B}_0$, т.е. если $\lim\limits_{s\to\infty} \|[z - z(\infty)]^s\|_{\mathbf{B}} = 0$.

Если $\mathbf{B} = L_\infty$, то тогда $z(\infty) = \operatorname{vrai}\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$. Через $\mathbf{B}_l$ обозначим пространство функций $z \in \mathbf{B}$, для каждой из которых существует $\mathbf{B}$-предел с нормой $\|z\|_{\mathbf{B}_l} = \|z\|_{\mathbf{B}}$. Аналогично определим пространство C_l таких функций $x \in C$, для каждой из которых существует $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x(\infty) \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C_l} = \|x\|_C$.

Относительно модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ и пространства $\mathbf{B}$ будем предполагать, что

а) оператор Коши W_{11} действует из пространства $\mathbf{B}_l$ в пространство C_l и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} принадлежат пространству C_l.

Эти условия означают, что имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l) \subset C_l$. Следовательно, предполагается, что фундаментальная матрица U_{11} имеет конечный предел $U_{11}(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} U_{11}(t)$.

Имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \subset \mathbf{C}$.

Здесь предполагаем, что пространство $\mathbf{b}$ содержит все функции константы, а подпространство $\mathbf{b}^0$ не содержит отличных от нуля констант. Через $\mathbf{b}^l$ обозначим пространство функций $g \in \mathbf{b}$, для каждой из которых существует $\mathbf{b}$-предел $g(\infty)$ с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}^l} = \|g\|_{\mathbf{b}}$.

Иначе говоря, пространство $\mathbf{b}^l$ состоит из всех функций $g \in \mathbf{b}$, стремящихся при $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, пределу $g(\infty)$ по метрике пространства $\mathbf{b}$, причем нетрудно показать, что $\mathbf{b}^l$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $||\cdot||_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g \in \mathbf{b}$ и функций констант. Аналогично определяем пространство $\mathbf{b}_0^l$.

Всюду будем предполагать, что для пространства $\mathbf{b}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = u$ выполнены условия:

а) оператор Коши W_{22} действует из пространства $\mathbf{b}^l$ в пространство $\ell_{\infty 0}^l$ и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = 0$ принадлежат пространству $\ell_{\infty 0}^l$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l) \subset \ell_{\infty 0}^l$ и существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = \lim\limits_{n\to\infty} y[n] = y(\infty)$ всех решений уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$ в случае $g \in \mathbf{b}^l$.

Имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \subset \ell_{\infty 0}$.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \{f, g\}$.

Теорема. *Операторы* $\mathcal{L}_{12} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \to \mathbf{B}$, $\mathcal{L}_{21} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \to \mathbf{b}$ *действуют и ограничен, причем* $\mathcal{L}_{12}(\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l)) \subset \mathbf{B}_l$, $\mathcal{L}_{21}(\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l)) \subset \mathbf{b}^l$. *Пусть уравнение* $\mathcal{L}_{11} x = f$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})-$*устойчиво и уравнение* $\mathcal{L}_{22} y = g$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})-$*устойчиво, а операторы* $\mathcal{L}_{11} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}) \to L$, $\mathcal{L}_{22} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}) \to \ell$ *действует из пространства* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l)$ *и* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l)$ *в пространства* $\mathbf{B}_l$ *и* $\mathbf{b}^l$ *и ограничены. Пусть, далее, уравнение* $\mathcal{L}_1 x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21})x = f_1$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})-$*устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_1 W_{11} : \mathbf{B}_l \to \mathbf{B}_l$ *ограничен. Или, пусть уравнение* $\mathcal{L}_2 x = (\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12})y = g_1$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{b})-$*устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_2 W_{22} : \mathbf{b}^l \to \mathbf{b}^l$ *ограничен. Тогда уравнение* $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ *будет* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}_l \times \mathbf{b}^l)-$*устойчивым.*

Литература

1. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференциальные уравнения, **27**:10 (1991), 1659-1668.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. — Пермь: Перм. ун-т, 2001.

3. *Симонов П.М.* Теорема Боля — Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем и её обращение // Вестник Тамбовского университета, Серия «Естественные и технические науки», **23**:124 (2018), 726-737.

4. *Симонов П.М.* Теорема Боля — Перрона и обратная к ней об асимптотической устойчивости для гибридных линейных систем с последействием // Вестник Пермского университета, Математика. Механика. Информатика, **41**:2 (2018), 38-43.

5. *Симонов П.М.* Теорема Боля — Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) // Вестник РАЕН, Темат. номер «Дифференциальные уравнения», **16**:3 (2018), 55-59.

6. *Симонов П.М.* Теорема Боля — Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения : материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (Пермь, 17 – 19 мая 2017 г.). — Пермь, ПНИПУ, 2018. — 230-235.

О КОМПОЗИЦИОННОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С.М. Ситник

sitnik@bsu.edu.ru

УДК 517.95

Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом ее приложений. Особую роль методы операторов преобразования играют в теории дифференциальных уравнений различных типов. В докладе будут изложены результаты, полученные в этом направлении в последние годы.

Ключевые слова: операторы преобразования, интегральные преобразования, специальные функции, композиционный метод

On composition method in transmutation theory

The importance of transmutation theory is demonstrated by many applications. The most valuable its role is in differential equations theory. In the report the results will be considered in transmutation theory which were stated recently.

Keywords: transmutations, integral transforms, special functions, composition method

В докладе будет рассказано основное содержание монографий [1] и [2], при этом достаточно подробно изложен композиционный метод операторов преобразований. Монография [1] составлена из докторской диссертации Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010) и части докторской диссертации С.М.Ситника, защищённой в 2016 г. Следует отметить, что оба автора, учитель и его ученик, принадлежат школе известного воронежского математика Ивана Александровича Киприянова, получившего фундаментальные результаты для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя по одной или части переменных.

Изложим более подробно содержание [1]. Монография посвящена приложениям метода операторов преобразования к исследованию дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Особое внимание уделяется дифференциальным уравнениям в частных производных с операторами Бесселя. Монография содержит подробное введение в теорию операторов преобразования и достаточно обширный список литературы.

Теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова. К числу важных результатов В.В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования.

Ситник Сергей Михайлович, д.ф.-м.н., доцент, Белгородский государственный университет (Белгород, Россия); Sergei Sitnik (Belgorod State University, Belgorod, Russia)

Особо следует выделить введённый В.В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введённого им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана—Лиувилля, В.В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С.Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В.В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свёртки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие «К-следом» в честь В.В. Катрахова, который ввёл это условие и подробно изучил краевые задачи с ним. В терминах «К-следа» получается полная характеризация решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В. В. Катраховым была доказана корректность постановки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области.

Приведём содержание книги по главам.

Глава 1. Введение (исторические сведения, функциональные пространства, специальные функции, интегральные преобразования).

Глава 2. Операторы преобразования Сонина—Пуассона—Дельсарта и их модификации.

Глава 3. Теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи.

Глава 4. Общие весовые краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.

Глава 5. Новые краевые задачи для уравнения Пуассона с особенностями в изолированных точках.

Глава 6. Композиционный метод построения сплетающих соотношений между решениями дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

Глава 7. Приложения метода операторов преобразования к оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и задаче Е.М. Ландиса.

Список литературы в [1] содержит около 650 ссылок.

В монографии [2] излагаются как известные, так и недавно полученные результаты теории операторов преобразования, представляющей собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегро-дифференцирования, теории обратных задач и задач рассеяния.

Литература

1. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления, **64**:2 (2018), 211-426.

2. *Ситник С.М., Шишкина Э.Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В.В. Соловьев

soloviev.vyacheslav@gmail.com

УДК 517.95

Рассматривается обратная задача определения источника в уравнении теплопроводности для случая первой краевой задачи в одномерном случае. В качестве дополнительной информации о решении прямой задачи (переопределении) предполагается известным след её решения в финальный момент времени на некотором отрезке. Получены достаточные условия существования единственного решения обратной задачи. Рассмотрение задачи проводится в классах функций удовлетворяющих условиям Гёльдера.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, переопределение.

Solvabiliti of the inverse problem of finding source with compact support in the heat equation.

The inverse problem of source determination for the heat equation in case of the first boundary problem in one dimensional case is studied. The trace of the solution to the direct problem on a segment in the last time is used as additional information (overdetermination) about this solution. Existance and uniqueness therems for the solution to the inverse problem are proved. The inverse problems are considered in the class of smooth functions with the derivatives satisfying the Holder condition.

Keywords: inverse problem, heat equation, overdetermination

Соловьев Вячеслав Викторович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва, Россия); Vyacheslav Solov'ev (National Research Nuclear University «MIPhI», Moscow, Russia)

Пусть $T > 0, l > 0, 0 < a < b < l, 0 < \alpha < 1$- фиксированные числа, $\Omega_T = (0,l) \times (0,T]$- прямоугольник на плоскости переменных (x,t). В прямоугольнике $\overline{\Omega}_T = [0,l] \times [0,T]$ рассмотрим обратную задачу определения пары функций (u,f) из условий:

$$u_t - u_{xx} = f(x)h(x,t) + g(x,t), (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,l], u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t), t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,T) = \chi(x), x \in [a,b]. \tag{3}$$

Будем предполагать, что входящая в уравнение (1) функция $f(x)$ может быть отличной от нуля только на отрезке $[a,b]$, то есть носитель этой функции принадлежит этому отрезку. Определим прямоугольники $P_T = [a,b] \times (0,T], Q_T = [0,a] \times (0,T] \cup [b,l] \times (0,T]$. Определим пространство функций:

$$U(\Omega_T) = \{u \in C(\overline{\Omega}_T) : u \in C^{1,0}_{x,t}(\Omega_T) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(P_T) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)\}.$$

Так как данное пространство функций не является общепринятым при изучении задач (1)-(2) то, сформулируем сначала, теорему существования м единственности решения прямой задачи (1)-(2) в этом классе функций.

Теорема 1. *Пусть справедливы условия $h, h_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $f \in C^\alpha[a,b]$. Тогда прямая задача (1)-(2), для любых функций $\mu_1, \mu_2 \in C[0,T], \varphi \in C[0,l]$, удовлетворяющих условиям согласования $\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(0) = \varphi(l)$, имеет единственное решение в классе функций $U(\Omega_T)$.*

Решением обратной задачи (1)-(3) будем называть пару функций $(u,f) \in U(\Omega_T) \times C^\alpha[a,b]$ удовлетворяющую условиям (1)-(3).

Теорема 2. *Пусть справедливы условия $h, h_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $h(x,t)h_t(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in \Omega_T$. Тогда обратная задача (1)-(3) не может иметь двух различных решений в том и только в тои случае, когда отрезок $[a,b]$ принадлежит носителю функции $h(x,T)$. Если, дополнительно к этим условиям на функцию h, выполнено неравенство $|h(x,T)| \geqslant h_T > 0$, то обратная задача (1)-(3) имеет единственное решение для любых функций $\mu_1, \mu_2 \in C[0,T], \varphi \in C[0,l], \chi \in C^2[a,b]$ удовлетворяющих условиям согласования.*

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Б.Х. Турметов
turmetovbh@mail.ru

УДК 517.956

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости некоторых нелокальных краевых задач для полигармонического уравнения. В качестве граничных операторов рассматриваются операторы дробного дифференцирования типа Адамара. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемых задач.

Ключевые слова: дробная производная, нелокальная задача, ортогональная матрица, полигармоническое уравнение

On some nonlocal boundary value problems with fractional-order boundary operators

In this paper, we study the solvability of some non-local boundary value problems for a polyharmonic equation. Fractional differentiation operators of the Hadamard type are considered as boundary operators. The theorems on the existence and uniqueness of the solution of the studied problems are proved.

Keywords: fractional derivative, nonlocal problem, orthogonal matrix, polyharmonic equation

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \geqslant 2$, $\partial\Omega$ — единичная сфера, $u(x)$ — гладкая функция в Ω, $r = |x|, \theta = \frac{x}{r}, \delta = r\frac{d}{dr}$ и $\mu \geqslant 0$.

Введем операторы типа Адамара [1]:

$$J_\mu^\alpha[u](x) = \frac{r^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{\tau}\right)^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} u(\tau\theta) d\tau, \alpha > 0,$$

$$D_\mu^\alpha[u](x) = r^{-\mu} J_0^{p-\alpha} \left[\delta^p [r^\mu u]\right](x), p-1 < \alpha \leqslant p, p \geqslant 1.$$

Пусть S - действительная ортогональная матрица $SS^T = E$. Предположим также, что существует такое натуральное $l \in N$ что $S^l = E$.

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$(-\Delta)^m u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$D_\mu^{\alpha+k} u(x) + a_k D_\mu^{\alpha+k} u(Sx) = g_k(x),\ x \in \partial\Omega, k = 0, 1, ..., m-1. \tag{2}$$

Решением задачи (1),(2) назовем функцию $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $D_\mu^{\alpha+k} u(x) \in C(\bar{\Omega}), k = 0, 1, ..., m-1$ и удовлетворяющую условиям (1),(2) в классическом смысле.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК (проект № AP05131268).

Турметов Батирхан Худайбергенович, д.ф.-м.н., профессор, Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави (Туркестан, Казахстан) Batirkhan Turmetov (A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan)

Задача (1),(2) в случае $\mu > 0$ является нелокальным аналогом задачи Робена, а в случае $\mu = 0$ нелокальным аналогом задачи Неймана. При $a_k = 0, k = 0, 1, ..., m-1$ данная задача изучена в работе [2].

Теорема 1. *Пусть* $\mu > 0, a_k^l \neq \pm 1$, $k = 0, 1, ..., m-1, 0 < \lambda < 1$ *и* $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_k(x) \in C^{\lambda+m-1-k}(\partial\Omega), k = 0, 1, ..., m-1$. *Тогда решение задачи (1),(2) существут и единственно.*

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 2 & 4 & ... & 2(m-1) \\ 0 & 2^2 & 4^2 & ... & [2(m-1)]^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 2^{m-1} & 4^{m-1} & ... & [2(m-1)]^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Через $\Delta_j, j = 0, ..., m-1$, обозначим определитель матрицы, полученной из матрицы A удалением первого столбца и строки $(j+1)$. В частности, $\Delta_0 = |A| = detA$. Легко показать, что $|A| \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\mu = 0, 0 < \alpha \leqslant 1, a_k^l \neq \pm 1, 0 < \lambda < 1$ *и* $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_k(x) \in C^{\lambda+m-1-k}(\partial\Omega), k = 0, 1, ..., m-1$. *Тогда для существования решения задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left(1 - |x|^2\right)^{m-1} f_{1-\alpha}(x)dx = \sum_{k=1}^{m} c_{k,m} \int\limits_{\partial\Omega} g_{k-1}(x)dS_x$$

где

$$f_{1-\alpha}(x) = J_{2m}^{1-\alpha}[f](x), c_{k,m} = (-1)^{k+1}\Delta_k \frac{4^{m-1}((m-1)!)^2}{(1+a_k)|A|}.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

В случае $\alpha = 1$ используя результаты работы [3] условие разрешимости задачи (1),(2) можно уточнить.

Теорема 3. Пусть $\alpha = 1, \mu = 0, a_k^l \neq \pm 1$, $k = 0, 1, ..., m-1, 0 < \lambda < 1$ и $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_{k-1}(x) \in C^{\lambda+m-1-k}(\partial\Omega), k = 0, 1, ..., m-1$. Тогда для существования решения задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\left(1 - |x|^2\right)^{m-1}}{(2m-2)!!} f(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} 2m-k-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \frac{(2m-2k-1)!!}{1+a_k} g_{k-1}(x)\, dS_x.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Литература

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — North-Holland: Elsevier, 2006.

2. *Турметов Б.Х.* О разрешимости некоторых краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения с граничными операторами типа Адамара // Дифф. урав. , **53**:3 (2014), 343–354.

3. *Карачик В.В.* Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сиб. журн. индустр.матем., **16**:4 (2013), 61-74.

ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.К. Уринов, К.Т. Каримов

urinovak@mail.ru, karimovk80@mail.ru

УДК 517.518

Краткая аннотация. Для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде исследована краевая задача типа задачи Дирихле. Единственность и существование решения задачи, доказана с использованием метода спектрального анализа.

Ключевые слова: сингулярный коэффициент, полубесконечный параллелепипед, спектральный метод.

The problem of the type Dirichlet problem in a semi-infinite parallelepiped for an elliptic equation with three singular coefficients

Short abstract. For a three-dimensional elliptic equation with three singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped, a problem of the Dirichlet problem type was investigated. The uniqueness and existence of the solution of the problem is proved using the method of spectral analysis.

Keywords: singular coefficient, semi-infinite parallelepiped, spectral method.

Уринов Ахмаджон Кушакович, д.ф.-м.н., профессор, Ферганский государственный университет (Фергана, Узбекистан); Akhmadjon Urinov (Ferghana state University, Ferghana, Uzbekistan)

Каримов Камолиддин Туйчибаевич, к.ф.-м.н., Ферганский государственный университет (Фергана, Узбекистан); Kamoliddin Karimov (Ferghana state University, Ferghana, Uzbekistan)

Рассмотрим следующее трехмерное эллиптическое уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, +\infty), z \in (0, c)\}$, где α, β, γ, a, $c \in R$, причем $\alpha, \beta, \gamma < 1/2$, $a > 0$, $c > 0$; $u = u(x, y, z)$ – неизвестная функция.

Задача D^{∞}. Найти функцию $u \in C([0, a] \times [0, \infty) \times [0, c]) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u(0, y, z) = 0,\ \ u(a, y, z) = 0,\ 0 \leqslant y < \infty,\ 0 \leqslant z \leqslant c;$$

$$u(x, y, 0) = 0,\ \ u(x, y, c) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y < \infty;$$

$$u(x, 0, z) = f(x, z),\ \lim_{y \to \infty} u(x, y, z) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant c,$$

где $f(x, z)$ – заданная непрерывная функция.

В работе доказана следующая

Теорема. Пусть функция $f(x, z)$ удовлетворяет условиям

$$f(0, z) = f(a, z) = f(x, 0) = f(x, c) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{xz}(x, z)\right] \in C([0, a] \times [0, b]),$$

$$\lim_{x \to 0} x^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^{2\alpha} f_x(x, z)\right] = \lim_{x \to a} \frac{\partial}{x^{2\alpha} \partial x}\left[x^{2\alpha} f_x(x, z)\right] = 0,$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\partial}{z^{2\gamma} \partial z}\left[z^{2\gamma} f_z(x, z)\right] = \lim_{z \to c} \frac{\partial}{z^{2\gamma} \partial z}\left[z^{2\gamma} f_z(x, z)\right] = 0.$$

Тогда решение задачи D^{∞} существует, единственно и определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x^{1/2-\alpha} z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right) J_{1/2-\gamma}\left(\frac{\delta_{nm} z}{c}\right) \times$$

$$\times \bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right) f_{nm},$$

где $J_l(x)$ – функция Бесселя порядка l первого рода,

$$f_{nm} = \frac{4}{J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n) J_{3/2-\gamma}^2(\delta_{nm})} \int_0^c \int_0^a f(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dx dz,$$

$$X_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x / a),\ n \in N,$$

$$Z_{nm}(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm} z / c),\ n, m \in N,$$

σ_n и δ_{nm}– занумерованные в порядке возрастания положительные нули функций $J_{1/2-\alpha}(x)$ и $J_{1/2-\gamma}(z)$ соответственно; $\bar{K}_{\nu}(z) =$

$2^{1-\nu}z^{\nu}K_{\nu}(z)/\Gamma(\nu)$, $\nu > 0$[2]; $\Gamma(x)$ – Гамма функция Эйлера, $K_l(x)$– функция Макдональда [1].

Литература

1. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. –Изд. ИЛ.: Москва, 1949.
2. *Капилевич М.Б.* Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Математический сборник, **30**:72 (1952),11-38.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ РОБЕНА

А.В. Филиновский

flnv@yandex.com

УДК 517.956.226, 517.956.227

Изучается поведение первого собственного значения краевой задачи Робена $\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in \Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0$, $x \in \Gamma$, в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей Γ (ν – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, α — вещественный параметр). Устанавливается асимптотическое разложение первого собственного значения по степеням спектрального параметра при $\alpha \to +\infty$. Доказываются также двусторонние оценки разности собственных функций задач Робена и Дирихле.

Ключевые слова: оператор Лапласа, задача Робена, собственные значения, собственные функции, параметр, асимптотическое разложение, двусторонние оценки

Asymptotic representation for the first eigenvalue of the Robin problem

We study the behavior of first eigenvalue of the Robin boundary value problem $\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in \Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0$, $x \in \Gamma$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, is a bounded domain with smooth boundary Γ, ν is the outward unit normal vector to $\partial\Omega$, α is a real parameter. We obtain the power-type asymptotic expansion to the first eigenvalue of this problem for $\alpha \to +\infty$. Also we prove two-side estimates to the difference between Robin and Dirichlet eigenfunctions.

Keywords: Laplace operator, Robin problem, eigenvalues, eigenfunctions, asymptotic expansion, two-side estimates

Филиновский Алексей Владиславович, д.ф.-м.н., профессор, МГТУ имени Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Alexey Filinovskiy (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Будем рассматривать спектральные задачи Робена

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\right)\Big|_{x\in\Gamma} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u|_{x\in\Gamma} = 0, \tag{4}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей Γ, ν – единичный вектор внешней нормали к Γ. Обозначим через $\lambda_1^R(\alpha)$ первое собственное значение задачи Робена (1) — (2), а через λ_1^D – первое собственное значение задачи Дирихле (3) — (4). В работах [1] – [3] было получено следующее равенство:

$$\lambda_1^R(\alpha) = \lambda_1^D - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds\,\frac{1}{\alpha} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha \to +\infty, \tag{5}$$

где $u_1^D(x)$ – нормированная в $L_2(\Omega)$ первая собственная функция задачи Дирихле (3) — (4).

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ и выполняется равенство*

$$\int_\Omega u_1^D f dx + \int_\Gamma \frac{\partial u_1^D}{\partial \nu} g ds = 0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение $v \in H^1(\Omega)$ краевой задачи

$$\Delta v + \lambda_1^D v = f, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$v|_{x\in\Gamma} = g, \tag{7}$$

удовлетворяющее условию

$$\int_\Omega v u_1^D dx = 0, \tag{8}$$

и для него имеет место оценка

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1 \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right).$$

Применяя теорему 1, получаем следующее асимптотическое разложение, уточняющее (5).

Теорема 2. *Для собственного значения λ_1^R справедливо асимптотическое представление*

$$\lambda_1^R(\alpha) = \lambda_1^D - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds\,\frac{1}{\alpha} - \int_\Gamma \frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} ds\,\frac{1}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right), \tag{9}$$

$$\alpha \to +\infty,$$

где v – обобщенное решение краевой задачи

$$\Delta v + \lambda_1^D v = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds\, u_1^D, \quad x \in \Omega,$$

$$v|_{x\in\Gamma} = -\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu},$$

удовлетворяющее условию (8).

Так как поверхность Γ гладкая, то все входящие в правую часть формулы (9) интегралы имеют смысл (см., например, [5], теорема 7.1.3).

Обозначим через $\{\lambda_k^R(\alpha)\}_{k=1}^\infty$ последовательность собственных значений задачи Робена, а через $\{\lambda_k^D\}_{k=1}^\infty$ – последовательность собственных значений задачи Дирихле $\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in \Omega$, $u = 0$, $x \in \Gamma$. Собственные значения считаем занумерованными в порядке возрастания с учетом кратностей. Пусть $\{u_{k,\alpha}^R\}_{k=1}^\infty$ и $\{u_k^D\}_{k=1}^\infty$ – соответствующие ортонормированные (в $L_2(\Omega)$) последовательности собственных функций задач Робена и Дирихле. Обозначим через $m(\lambda)$ кратность собственного значения λ. Для всех $\alpha \in R$ будем полагать

$$\int_\Omega u_{k,\alpha}^R u_k^D\, dx \geqslant 0.$$

Теорема 3. (см. [4]) *Пусть $m(\lambda_k^D) = 1$. Тогда существует $\alpha_k \in R$, такое, что при всех $\alpha > \alpha_k$ выполнено $m(\lambda_k^R(\alpha)) = 1$ и справедливы оценки*

$$\frac{C_2}{\alpha} \leqslant \|u_{k,\alpha}^R - u_k^D\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \frac{C_3}{\alpha},$$

где C_2, C_3 – положительные постоянные, не зависящие от α.

Литература

1. *Filinovskiy A.V.* On the asymptotic behavior of the first eigenvalue of Robin problem with large parameter // J. ellipt. parab. equ., **1**:1 (2015), 123-135.

2. *Филиновский А.В.* Об асимптотическом поведении собственных значений краевой задачи с параметром // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия,**128**:6 (2015), 135-140.

3. *Filinovskiy A.V.* On the Asymptotic Behavior of Eigenvalues and Eigenfunctions of the Robin Problem with Large Parameter // Math. Model. Anal. **22**:1 (2017), 37-51.

4. *Филиновский А.В.* О двусторонних оценках собственных функций эллиптических краевых задач // Дифф. уравнения, **53**:11 (2017), 1574-1575.

5. *Агранович М.С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПАРЫ ЛАКСА

А.Р. Хакимова
aigulya.khakimova@mail.ru

УДК 517.9

В работе обсуждается прямой метод поиска пары Лакса для нелинейного интегрируемого уравнения. В качестве первого уравнения пары Лакса берется линеаризация рассматриваемого нелинейного уравнения. Вторым уравнением пары будет обыкновенное дифференциальное уравнение совместное с линеаризованным уравнением. Это ОДУ можно выбрать так, что полученная пара действительно будет парой Лакса для исходного нелинейного уравнения, в том смысле, что она совместна тогда и только тогда, когда выполняется уравнение. Полученная пара Лакса имеет более высокий порядок, чем обычная пара, однако понижением порядка она сводится к обычной.

Ключевые слова: нелинейные интегрируемые уравнения, линеаризованное уравнение, инвариантное многообразие, пара Лакса

On a method for constructing a Lax pair

The paper discusses the direct search method for the Lax pair for a nonlinear integrable equation. The linearization of the nonlinear equation under consideration is taken as the first equation of the Lax pair. The second equation of the pair will be an ordinary differential equation consistent with the linearized equation. This ODE can be chosen in such a way that the resulting pair is indeed a Lax pair for the original nonlinear equation, in the sense that it is consistent if and only if the equation is satisfied. The resulting Lax pair has a higher order than a regular pair, but by decreasing the order it reduces to the usual one.

Keywords: nonlinear integrable equations, linearized equation, invariant manifold, Lax pair

Пара Лакса является важным инструментом исследования нелинейных уравнений. Она позволяет находить гамильтонову структуру, интегралы движения, высшие симметрии, точные и асимптотические решения и т.д. Разработка новых методов поиска пар Лакса остается актуальной, несмотря на то, что имеются различные способы решения этой задачи (см., например, [1] - [4]).

Доклад основан на результатах, полученных в наших работах [5] - [10], в которых разработан способ построения представления Лакса, использующий понятие симметрии. Кратко изложим суть метода.

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных вида

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_k), \quad u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20007).

Хакимова Айгуль Ринатовна, инженер-исследователь, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Aigul Khakimova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

Линеаризуем уравнение (1)

$$U_t = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_x} D_x + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} D_x^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k} D_x^k\right) U. \tag{2}$$

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_m = F(x, t, U, U_x, U_{xx}, \dots, U_{m-1}; u, u_x, u_{xx}, \dots, u_n), \tag{3}$$

где $U = U(x,t)$ искомая функция, а функция $u = u(x,t)$, являющаяся некоторым решением уравнения (1), входит в (3) в качестве функционального параметра.

Определение *Уравнение (1) определяет обобщенное инвариантное многообразие (ОИМ) для уравнения (1), если условие*

$$D_x^m U_t - D_t U_m|_{(1),(2),(3)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $\{u_j\}$ *и* U, U_x, $\dots$, U_{m-1}.

Здесь переменные u_t, U_t и их производные по x заменяются в силу уравнений (1) и (2), а переменные $U_m, U_{m+1}, \dots$ – в силу равенства (3). Поскольку переменные x, t, U, U_x, U_{xx}, $\dots$, U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, $\dots$, u_n, u_{n+1}, $\dots$ в уравнении (3) являются независимыми, задача отыскания функции $F(x, t, U, U_x, \dots, U_{m-1}; u, u_x, \dots, u_n)$ является переопределенной и эффективно решается.

В наших работах рассматриваются следующие два класса обобщенных инвариантных многообразий:

$$1. \sum_{i,j=0}^{s} \alpha_{ij}(\lambda, u, u_1, \dots) U_i U_j + k = 0;$$

$$2. \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\lambda, u, u_1, \dots) U_j = 0,$$

где k, λ – произвольные постоянные.

В первом случае, когда ОИМ задается нелинейным уравнением, система уравнений (2)-(3) образует нелинейную пару Лакса для уравнения (1), которая простыми преобразованиями сводится к линейной. Во втором случае, когда ОИМ задается линейным уравнением, из равенства (2) легко выводится такой важный в теории интегрируемости объект, как оператор рекурсии. Эффективность метода построения пары Лакса и оператора рекурсии апробирована на многочисленных примерах (см. [5] - [10]).

Литература

1. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ **61**:1 (1971), 118-134.

2. *Wahlquist H.D., Estabrook F.B.* Prolongation structures of nonlinear evolution equations // Journal of Mathematical Physics **16**:1 (1975), 1-7.

3. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painlevé property for partial differential equations // Journal of Mathematical Physics, **24**:3 (1983), 522-526.

4. *Nijhoff F.W., Walker A.J.* The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier system // Glasgow Mathematical Journal **43**:A (2001), 109-123.

5. *Habibullin I.T., Khakimova A.R., Poptsova M. N.* On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **49**:3 (2016), 35 pp.

6. *Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.* Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек // Теоретическая и математическая физика, **191**:3 (2017), 369-388.

7. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **50**:30 (2017), 19 pp.

8. *Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.* Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей // Теоретическая и математическая физика, **196**:2 (2018), 294-312.

9. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* On the recursion operators for integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **51**:42 (2018), 22 pp.

10. *Хакимова А.Р.* К задаче описания обобщенных инвариантных многообразий нелинейных уравнений // Уфимский математический журнал, **10**:3 (2018), 110-122.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА С.М. НИКОЛЬСКОГО ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

А.Р.Халмухамедов, Э.И.Кучкоров, К.К.Тургунов

e-mail:khalmukhamedov@gmail.com; e_kuchkorov@mail.ru; komilturgunov@mail.ru

УДК 517.946

В настоящей работе найдены условия равномерной суммируемости средних Рисса спектральных разложений функций, принадлежащих классу Никольского H_p^α.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, спектральные разложения, средние Рисса.

Халмухамедов Алимджан Рахимович, д.ф.-м.н., профессор, Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Узбекистан);

Кучкоров Эркин Иброхимович, к.ф.-м.н., доцент, Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Узбекистан);

Тургунов Комил Курбаналиевич, старший преподаватель, Ташкентский Архитектурно Строительный институт (Ташкент, Узбекистан);

On spectral decompositions of functions from Nikolsky spaces with respect to eigenfunctions of the Schrödinger operator in 3-dimensional domain

This paper is devoted to establish uniformly summability conditions for the Riesz means of spectral decompositions of functions from Nikolsky spaces H_p^α.

Keywords: the Schrödinger operator, spectral decompositions, the Riesz means.

В произвольной трехмерней области Ω рассмотрим неотрицательную функцию $q(x) \geqslant 0$ и $q(x) \in L_2(\Omega)$. Обозначим через $\{u_n(x)\}$ полную ортонормированную систему собственных функций произвольного неотрицательного самосопряженного расширения оператора Шрёдингера $-\Delta + q(x)$ с чисто точечным спектром, состоящим из собственных чисел $\lambda_n \geqslant 0$.

Для любой функции $f(x) \in L_2(\Omega)$ и обозначим через f_n ее коэффициенты Фурье по системе $\{u_n(x)\}$ и введем средние Рисса ряда Фурье функции f порядка $s > 0$:

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) \tag{1}$$

Для каждого компактного подмножества $K \subset \Omega$ обозначим через $S_K(t)$ следующую величину:

$$S_K(t) = \left(\sup_{x \in K \subset \Omega} \int\limits_{|y-x| \leqslant t} |q(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Пусть

$$Q(\Omega) = \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int\limits_0^1 \frac{S_K(t)}{t} dt < +\infty, \ K \subset \Omega, t > 0. \right\}.$$

Основным результатом данной работы является следующая:

Теорема. *Пусть Ω - произвольная область, $q \in Q(\Omega)$, $\{u_n(x)\}$ - полная ортонормированная система собственных функций произвольного неотрицательного самоспряженного расширения оператора $-\Delta + q(x)$ с чисто точечным спектром $\lambda \geqslant 0$.*

Пусть $f(x)$ - произвольная функция, удовлетворяющая следующим трем требованиям: 1) $f(x)$ финитна в области Ω; 2) $f(x)$ принадлежит в области Ω классу $H_2^\alpha(\Omega)$ при $\alpha \geqslant 1 - s$, где s заключено в интервале $0 \leqslant s < 1$; *3) в некоторой содержащей в Ω области D функция $f(x)$ принадлежит классу $H_p^\alpha(D)$ при $\alpha \geqslant 1 - s$, $p\alpha > 3$. Тогда равномерно относительно x в каждой сторого внутренней подобласт D' области D имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda^s f(x) = f(x).$$

Доказательство теоремы проводится методом разработанным академиками Ильиным В.А и Алимовым Ш.А (см [1]-[4]), на основе формулы среднего значения для собственных функций.

Литература

1. *Ильин В.А.,* Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1991. 368 С.

2. *Ильин В. А., Алимов Ш.А.*, Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов.// Дифференциальные уравнения, 1974, Т.10, №3, С.481-506.

3. *Алимов Ш.А.*, О разложении по собственным функциям оператора Шредингера.// Дифференц. уравнения, 1971, Т.7, №2, С. 286–296.

4. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Точная по порядку и равномерная в $N = 2$ при $N = 3$ и оценка квадратов фундаментальных функций самосопряженного расширения оператора Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим условию Като // Дифференц. уравнения. 1996, №3, Т.32, С.357-374.

5. *Садовничий В.А.* Теория операторов, М., Дрофа, 2004.384 С.

6. *Никольский С. М.*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М.,1969.

О СИТЕ СТЕКЛОВА

Г.А. Чечкин

chechkin@mech.math.msu.su

УДК 517.946

В работе рассматривается спектральная задача типа Стеклова на соединении двух областей. Построены асимптотики собственных значений при стремлении малого параметра, характеризующую микроструктуру на интерфейсе, к нулю.

Ключевые слова: задача Стеклова, дифференциальные уравнения, спектральная теория

On the Steklov Sieve

We consider the Steklov type spectral problem on a junction of two domains. We construct the asymptotics of eigenvalues as the small parameter characterizing the microstructure of the interface, tends to zero.

Keywords: Steklov problem, differential equations, spectral theory

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00046).

Чечкин Григорий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Gregory A. Chechkin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Обозначим через Ω область в $\mathbb{R}^2$, граница которой Γ является гладкой и в окрестности концов отрезка $\Gamma_1 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс совпадает с прямыми $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ соответственно. Обозначим непустой участок границы $\Gamma_2 = \{x \in \Gamma : x_2 > c\}$ для некоторого фиксированного $c > 0$ и пусть $\Gamma_3 = \Gamma \setminus \Gamma_2$.

Пусть Q — прямоугольник $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), x_2 \in \left(-\frac{h\varepsilon}{2}; \frac{h\varepsilon}{2}\right)\right\}$ и B — прямоугольник $\left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \xi_2 \in \left(-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right)\right\}$. Напомним, что $\varepsilon = \frac{1}{2\mathcal{N}+1}$, где $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$. Обозначим $B_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in B\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon = \bigcup\limits_j B_\varepsilon^j$ и рассмотрим полосу с каналами $Q_\varepsilon := Q \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Вертикальную границу каналов обозначим $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon \cap Q$. Определим область Ω_ε как $\Omega \setminus \overline{Q_\varepsilon}$ (см. рис. 1). Обозначим $\Gamma_3^\varepsilon = \left\{x \in \Gamma_3 : |x_2| > \frac{h\varepsilon}{2}\right\}$ и $\Upsilon_\varepsilon = \left\{x \in \partial Q_\varepsilon : |x_2| = \frac{h\varepsilon}{2}\right\}$.

Пространство $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_2)$ определим как замыкание множества $C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ функций, равных нулю в окрестности Γ_2, по норме $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

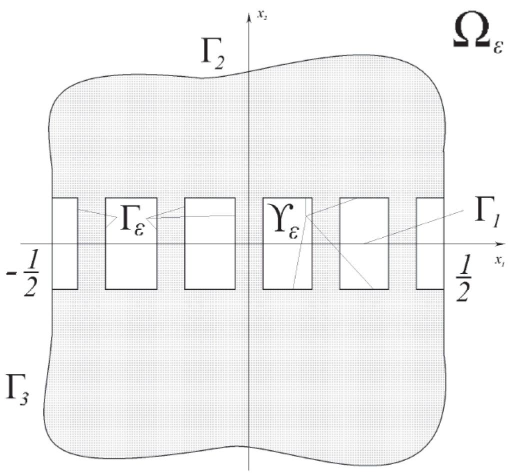

Рис. 2.1: Структура области Ω_ε

Рассмотрим следующую спектральную задачу типа Стеклова

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Upsilon_\varepsilon \cup \Gamma_3^\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{на } \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь и далее ν — вектор единичной внешней нормали.

Спектральная задача для оператора Лапласа в ограниченной области с условием Стеклова на части границы является самосопряженной, резольвента соответствующего оператора компактна и положительна. Поэтому, задача (1) имеет дискретный спектр, уходящий в ∞. Обозначим собственные значения этой задачи, перенумерованные с учетом кратности, через

$\lambda_{\varepsilon,1}$, $\lambda_{\varepsilon,2}, \dots, \lambda_{\varepsilon,j}, \dots \to \infty$, а соответствующие собственные функции через $u_{\varepsilon,1}$, $u_{\varepsilon,2}, \dots, u_{\varepsilon,j}, \dots$ Следующее условие нормировки является естественным для задачи (1):

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u_{\varepsilon,i} u_{\varepsilon,j}\, dx_2 = \delta_i^j,$$

где $\delta_i^j = 1$ если $i = j$, и 0, если $i \neq j$.

В дальнейшем мы также используем обозначение $[u]$ для скачка функции u на Γ_1. Задачу (1) и возникающие ниже задачи со скачком на Γ_1 будем понимать в смысле интегрального тождества, соответствующие решения принадлежат пространству $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_2)$.

В [1] было показано, что усредненная задача для (1) принимает вид

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = 0 & \text{в } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_2, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma_3, \\ [u_0] = 0 & \text{на } \Gamma_1, \\ \left[\dfrac{\partial u_0}{\partial x_2}\right] = -2h\lambda_0 u_0 & \text{на } \Gamma_1. \end{cases} \tag{2}$$

Эта задача самосопряженная и имеет дискретный спектр. Соответствующие собственные числа $\lambda_{0,k}$, занумерованные с учетом кратности, стремятся к $+\infty$ при $k \to \infty$. Более того, как частный случай [1, Theorem 3.1] получаем следующее утверждение.

Отметим интересную особенность предельной задачи (2). Коэффициент в спектральном условии в этой задаче зависит от параметра h (толщины перегородки), но не зависит от параметра a, характеризующего ширину отверстий (см. формулу (11) в [1]). Зависимость от a проявляется только в следующих членах асимптотического разложения собственных пар. Это связано с тем, что коэффициент в предельном спектральном условии определяется эффективной длиной вертикальной части границы перегородки в допредельной задаче. Эта эффективная длина не зависит от параметра a.

Имеет место следующая теорема (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть λ_0 — n-кратное собственное значение задачи (2), $u_0^{(l)}$ — соответствующие нормированные собственные функции. Тогда асимптотики собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(l)}$ задачи (1), сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$, имеют вид*

$$\lambda_\varepsilon^{(l)} = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(l)} + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}-\mu}),$$

где $\lambda_1^{(l)}$ определяется равенством

$$\lambda_1^{(l)} = \frac{1-a}{2}\left(B_{ah}\lambda_0^2 + \left\|\left\langle\frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial x_2}\right\rangle\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + (1-3A_{ah})\left\|\frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right),$$

константы A_{ah}, B_{ah} явно вычисляются, а μ — сколь угодно малое положительное число.

Благодарности. Результаты работы получены совместно с Р.Р. Гадыльшиным, А.Л. Пятницким, Y. Amirat, O. Bodard.

Литература

1. *Amirat Y., Bodard O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L.* Asymptotics of a spectral-sieve problem // J. Math. Anal. Appl., **435** (2016), 1652–1671.

2. *Гадыльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Об асимптотическом поведении собственных пар краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова // Известия РАН, **82**:6 (2018), 37–64.

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЕ МИНИМАКСНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ С НЕОДНОРОДНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Л.Г. Шагалова

shag@imm.uran.ru

УДК 517.955

Рассматривается терминальная задача Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с неоднородным гамильтонианом. Гамильтониан и терминальная функция предполагаются кусочно-линейными, а размерность фазового пространства равна двум. Предложен и обоснован конечный алгоритм точного построения минимаксного и/или вязкостного решения. Алгоритм состоит из конечного числа последовательных этапов, на каждом из которых решаются элементарные задачи нескольких типов и осуществляется непрерывная склейка решений этих задач. Решение, построенное в результате реализации алгоритма, является кусочно-линейной функцией.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона – Якоби, минимаксное решение, вязкостное решение, кусочно-линейные функции, алгоритм

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00074).

Шагалова Любовь Геннадьевна, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия); Lyubov Shagalova (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)

Piecewise linear minimax solution of Hamilton – Jacobi equation with nonhomogeneous Hamiltonian

The terminal value Cauchy problem is considered for Hamilton - Jacobi equation with nonhomogeneous Hamiltonian. The Hamiltonian and the terminal function are piecewise linear, and the dimension of state space is two. A finite algorithm for the exact construction of the minimax and/or viscosity solution is proposed and justified. The algorithm consists of a finite number of consecutive stages, at each of which elementary problems of several types are solved and the continuous gluing of these solutions are carried out. The solution built by the algorithm is a piecewise linear function.

Keywords: Hamilton – Jacobi equation, minimax solution, viscosity solution, piecewise linear functions, algorithm

Рассматривается следующая терминальная задача Коши.

$$\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial x}\right) = 0, \quad t \leqslant \vartheta,\ x \in \times R^n, \tag{1}$$

$$\omega(\vartheta, x) = \sigma(x), \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Здесь ϑ — заданное положительное число, гамильтониан $H(\cdot)$ непрерывен, а функция $\sigma(\cdot)$ — липшицева.

Известно [1], что минимаксное (вязкостное [2]) решение $\omega(\cdot)$ задачи (1),(2) существует и единственно. Если хотя бы одна из функций $H(\cdot)$ или $\sigma(\cdot)$ является выпуклой или вогнутой, можно выписать явные формулы для решения, используя известные формулы Хопфа – Лакса [3,4] и Пшеничного – Сагайдак [5]. Однако в общем случае получить явные формулы для решения не удается.

В [6,7] был разработан конечный алгоритм точного построения минимаксного решения в случае, когда размерность фазового пространства равна двум, а гамильтониан $H(\cdot)$ и функция $\sigma(\cdot)$ являются кусочно-линейными и удовлетворяют условиям положительной однородности

$$\sigma(\lambda x) = \lambda\sigma(x), \quad x \in R^n, \quad \lambda \in R,\ \lambda > 0, \tag{3}$$

$$H(\lambda s) = \lambda H(s), \quad s \in R^n, \quad \lambda \in R,\ \lambda > 0. \tag{4}$$

В [6,7] условие (4) было существенным. В настоящей работе задача (1),(2) также рассматривается в случае двумерного фазового пространства и кусочно-линейных входных данных. Но сейчас не требуется выполнение условия (4) однородности гамильтониана.

Предлагается алгоритм точного построения решения. Алгоритм заключается в последовательном решении элементарных задач нескольких типов и непрерывной склейке этих решений. Построенное минимаксное решение является кусочно-линейной функцией.

Предлагаемый алгоритм, представляющий самостоятельный интерес, может быть использован для кусочно-линейной аппроксимации минимаксных (вязкостных) решений уравнений Гамильтона-Якоби с гамильтонианами общего вида.

Литература

1. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. — Москва: Наука, 1991.

2. *Crandall M., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton Jacobi equations. // Trans. Amer. Math. Soc., **277**:1 (1983), 1-42.

3. *Hopf E.* Generalized solutions of nonlinear equations of first order // J. Math. Mech., **14** (1965), 951-973.

4. *Bardi M., Evans L.* On Hopf's formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Appl., **8**:11 (1984), 1373-1381.

5. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика, **2** (1970), 54-63.

6. *Субботин А.И., Шагалова Л.Г.* Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби // Доклады Академии Наук, **325**:5 (1992), 144-148.

7. *Shagalova L.G.* A piecewise linear minimax solution of the Hamilton – Jacobi equation // Kirillova F.M., Batukhtin V.D. (eds.) Proceedings of IFAC Conference on Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization. — Oxford: Pergamon, Elsevier Science, 1998. — 193-197.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ СО МНОГИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М.В. Шамолин

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

УДК 517.9, 531.01

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл

Integrable dynamical systems with many degrees of freedom and dissipation

In this study, we show the integrability of certain classes of dynamic systems on the tangent bundle to a multi-dimensional manifold. In this case, the force fields have variable dissipation and generalize the cases considered previously.

Keywords: dynamical system, dissipation, integrability, transcendental first integral

---

Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Maxim V. Shamolin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

В задачах динамики изучаются системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. Выделим также задачи о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства.

Рассмотрим системы с n степенями свободы $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, $(z_n, \ldots, z_1)$ — квазискорости, наличие диссипации (знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении, $F(\alpha)$ — внешнее силовое поле:

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha),\\
\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots\\
\ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot z_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z^2_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \ldots,\\
\dot z_2 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_2 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]\, f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})]\, f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot z_1 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_1 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]\, f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\
- [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]\, f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]\, f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\\
\dot\beta_1 = z_{n-1} f(\alpha),\ \dot\beta_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1),\ \dot\beta_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \ldots,\\
\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2});
\end{gathered}
\tag{1}
$$

здесь всевозможные Γ — коэффициенты связности фазового пространства, D — дифференцирование, функции $f, g, h, i, \ldots$ — гладкие.

Потребуем выполнение следующих равенств:

$$
\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \ldots = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots =
$$

$$
= \Gamma_n(\alpha),\ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{2}
$$

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$
w_n = z_n,\ w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z^2_{n-1}},\ w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},
$$

$$w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \ \ldots, \ w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}},$$

система (1) распадается следующим образом:

$$\dot\alpha = -w_n + b\delta(\alpha), \ \dot w_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2,$$

$$\dot w_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_{n-1} w_n, \tag{3}$$

$$\dot w_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2} f(\alpha)\ldots\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)\right],$$

$$\dot\beta_s = \pm\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}} f(\alpha)\ldots, s = 1,\ldots,n-2, \tag{4}$$

$$\dot\beta_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{5}$$

где в системе (4) символом “$\ldots$” показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3), по одному — для систем (4) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (5) (т.е. всего $n+1$).

Теорема. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства $\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa d\ln|\delta(\alpha)|/d\alpha$, $F(\alpha) = \lambda d\delta^2(\alpha)/2d\alpha$. Тогда система (1) при выполнении условий (2) обладает полным набором $(n+1)$ независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

В частности, при $\kappa = -1$ система (3) имеет следующий первый интеграл:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}.$$

Дополнительный первый интеграл для системы (3) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры ($u_n = w_n/\delta(\alpha)$)

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b-u_n)du_n}{2(\lambda - bu_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\}/2}.$$

Первые интегралы для систем (4) имеют вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \ s = 1,\ldots,n-2,$$

где $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1,\ldots,n-2$, — некоторые гладкие функции. А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (5), имеет вид

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \text{const}.$$

Для систем с диссипацией трансцендентность функций как первых интегралов наследуется из наличия притягивающих предельных множеств.

Выделим важные случаи для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{7}$$

Случай (6) формирует системы, соответствующие движению динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле [1, 2]. Случай (7) формирует системы, соответствующие движению материальной точки на n-мерной сфере также в неконсервативном поле. В случае (6), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n+1)$-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [3]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает обобщенный $(n+1)$-мерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Литература

1. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем., **16**:4 (2010), 3–229.

2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН, **479**:3 (2018), 270–276.

3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН, **474**:2 (2017), 177–181.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ БЕССЕЛЯ

Э.Л. Шишкина

ilina_dico@mail.ru

УДК 517.9

В докладе рассматривается метод решения дифференциального уравнения с левосторонней дробной производной Бесселя, основанный на применении преобразования Мейера.

Ключевые слова: дробный оператор Бесселя, дробное дифференциальное уравнение, гипергеометрическая функция, преобразование Мейера

Шишкина Элина Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, Воронежский Государственный Университет (Воронеж, Россия); Elina Shishkina (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Method for differential equations with fractional Bessel derivative

In the report we discuss a method for solving a differential equation with a left-sided fractional Bessel derivative. This method is based on the application of the Meijer transform.

Keywords: fractional Bessel operator, fractional differential equation, hypergeometric function, Meijer transform

Дифференциальные уравнения с дробной производной Бесселя появляются в различных областях исследований и инженерных приложений (см. [1,2]), но, до настоящего момента, не существовало простых и общих методов для решения таких уравнений. В этой работе представлен метод, который подходит для широкого класса начальных задач для дифференциальных уравнений с дробной производной Бесселя. Метод использует метод преобразования Мейера и основан на формуле преобразования Мейера для дробной производной Бесселя.

Рассмотрим дифференциальный оператор Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \qquad \nu \geqslant 0, \quad D := \frac{d}{dx},$$

и его дробные степени $(B_\nu)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть f интегрируема по $(0,\infty)$ с весом $x^{4\alpha+\nu}$, $\alpha > 0$. Интеграл

$$(B^{-\alpha}_{\nu,0+}f)(x) = (IB^{\alpha}_{\nu,0+}\, f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)dy \qquad (1)$$

называется **левосторонним дробным интегралом Бесселя** на полуоси $[0,\infty)$ порядка α.

В (1) функция ${}_2F_1(a,b;c;z)$ — это гипергеометрическая функция, определеннвя для $|z| < 1$ степенным рядом

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Для комплексного аргумента z с $|z| \geqslant 1$ функция ${}_2F_1(a,b;c;z)$ может быть аналитически продолжена по любому пути в комплексной плоскости, который избегает точек ветвления 1 и ∞.

Левосторонняя дробная производная Бесселя на полуоси $[0,\infty)$ порядка α определяется равенством

$$(B^{\alpha}_{\nu,0+}f)(x) = (DB^{\alpha}_{\nu,0+}f)(x) = B^n_\nu (IB^{n-\alpha}_{\nu,0+}f)(x), \qquad n = [\alpha]+1$$

Подробнее о дробных производных Бесселя см. [3–7].

Пусть $C^\infty = C^\infty(0,\infty)$. В [4] представлены пространства

$$F_p = \left\{\varphi \in C^\infty : x^k \frac{d^k\varphi}{dx^k} \in L^p(0,\infty) \,\text{при}\, k = 0,1,2,...\right\}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$F_\infty = \left\{\varphi \in C^\infty : x^k \frac{d^k\varphi}{dx^k} \to 0 \,\text{при}\, x \to 0+ \;\text{и}\,\text{при}\, x \to \infty \,\text{для}\, k = 0, 1, 2, ...\right\}$$

и

$$F_{p,\mu} = \left\{\varphi : x^{-\mu}\varphi(x) \in F_p\right\}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \qquad \mu \in \mathbb{C},$$

приспособленные для работы с операторами вида $B^\alpha_{\nu,0+}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Приведем теорему из [4].

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Для всех p, μ и $\nu > 0$ таких, что $\mu{\neq}\frac{1}{p}{-}2m$, $\nu{\neq}\frac{1}{p}{-}\mu{-}2m{+}1$, $m{=}1,2...$ оператор $B^\alpha_{\nu,0+}$ является непрерывным линейным отображением из F_p, μ в $F_{p,\mu-2\alpha}$. Если, кроме того, $2\alpha \neq \mu - \frac{1}{p} + 2m$ и $\nu - 2\alpha \neq \frac{1}{p} - \mu - 2m + 1$, $m = 1, 2...$, то $B^\alpha_{\nu,0+}$ — гомеоморфизм из F_p, μ на $F_{p,\mu-2\alpha}$ с обратным $B^{-\alpha}_{\nu,0+}$.*

Интегральное преобразование с ядром, представляющим собой модифицированную функцию Бесселя второго рода $K_{\frac{\nu-1}{2}}$, $\nu \geqslant 1$ называется **преобразованием Мейера** и имеет вид

$$\mathcal{K}_\nu[f](\xi) = F(\xi) = \int\limits_0^\infty k_{\frac{\nu-1}{2}}(x\xi)\, f(x) x^\nu\, dx, \quad \text{где} \quad k_\beta(t) = \frac{2^\beta \Gamma(\beta+1)}{t^\beta} K_\beta(t).$$

Пусть $f \in L^{loc}_1(\mathbb{R}_+)$ и $f(t) = o\left(t^{\beta - \frac{\nu}{2}}\right)$ при $t \to +0$, где $\beta > \frac{\nu}{2} - 2$ если $\nu > 1$ и $\beta > -1$ если $\nu = 1$. Кроме того, пусть $f(t) = 0(e^{at})$ при $t \to +\infty$. Тогда преобразование Мейера такой функции существует почти всюду для $\operatorname{Re}\xi > a$ (см. [8], стр. 94).

Если $0 < \nu < 2$ и $F(\xi)$ аналитическая на полуплоскости $H_a = \{p \in \mathbb{C} :$ p $\geqslant a$, $a \leqslant 0$ и $s^{\frac{\nu}{2}-1}F(\xi) \to$, $|\xi| \to +\infty$, равномерно по $\arg s$ то для всех c, $c > a$ обратное преобразование Мейера $\mathcal{K}^{-1}_\nu$ определяется равенством

$$\mathcal{K}^{-1}_\nu[\widehat{f}](x){=}f(x){=}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widehat{f}(\xi) i_{\frac{\nu-1}{2}}(x\xi)\xi^\nu d\xi, \quad \text{где} \quad i_\beta(t) = \frac{2^\beta\Gamma(\beta+1)}{t^\beta} I_\beta(t),$$

I_β — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Теорема 1. *Если $f \in C^{2n}$, $n = [\alpha]+1$ и она такова, что преобразование Мейера от нее сущетсвует, то*

$$\mathcal{K}_\nu[B^\alpha_{\nu,0+}f](\xi) = \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\nu[f](\xi) - 2^{\nu-1}\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\sum_{k=0}^{n-1} \xi^{2k+1-\nu} B^{\alpha-1-k}_{\nu,0+} f(0). \quad (2)$$

Формула (2) используется для решения дифференциальных уравнений с левосторонней дробной производной Бесселя.

Пример. Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим задачу

$$B^\alpha_{2,0+} f(x) = \lambda f(x), \qquad (3)$$

$$B^{\alpha-1}_{2,0+} f(0) = a. \qquad (4)$$

Применяя преобразование Мейера, учитывая формулу (2), получим

$$\xi^{2\alpha}F(\xi) - \lambda F(\xi) = \frac{a}{\xi} \qquad \text{или} \qquad F(\xi) = a\frac{\xi^{-1}}{\xi^{2\alpha} - \lambda},$$

где

$$F(\xi) = \mathcal{K}_2[f](\xi) = \int\limits_0^\infty k_{\frac{1}{2}}(x\xi)\, f(x)x^\nu\, dx = \frac{\pi}{2\xi}\int\limits_0^\infty f(x)e^{-x\xi}x\, dx = \frac{\pi}{2\xi}L[xf(x)](\xi),$$

а L — преобразование Лапласа. Тогда

$$L[xf(x)](\xi) = \frac{2a}{\pi}\frac{1}{\xi^{2\alpha} - \lambda}$$

Имеет место формула (см. [9], стр. 21, формула 1.80)

$$\int\limits_0^\infty e^{-\xi x}x^{\beta-1}E_{\gamma,\beta}(\pm\lambda x^\gamma)dx = \frac{\xi^{\gamma-\beta}}{\xi^\gamma \mp \lambda}, \qquad \operatorname{Re}(\xi) > |\lambda|^{1/\gamma}.$$

В нашем случае имеем

$$f(x) = \frac{2a}{\pi}x^{2\alpha-2}E_{2\alpha,2\alpha}(\lambda x^{2\alpha}),$$

что и дает решение задачи (3)–(4).

Литература

1. *Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications. — Longman & J. Wiley: New York, 1994.

2. *Garra R., Orsingher E.* Random flights related to the Euler-Poisson-Darboux equation // Markov Processes and Related fields, **22** (2016), 87-110.

3. *Sprinkhuizen–Kuyper I.G.* A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math.Analysis and Applications, **75** (1979), 674–702.

4. *McBride A. C.* Fractional Powers of a Class of Ordinary Differential Operators // Proceedings of the London Mathematical Society, **3:45** (1982), 519-546.

5. *Ситник С.М.* О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, **12:2** (2010), 69-75.

6. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* On fractional powers of Bessel operators // Journal of Inequalities and Special Functions. **8:1** (2017), 49–67.

7. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* О дробных степенях оператора Бесселя на полуоси // Сибирские Электронные Математические Известия, **15** (2018), 1–10

8. *Glaeske H. J., Prudnikov A.P., Skornik K. A.* Operational calculus and related topics. — Chapman and Hall/CRC: USA, 2006.

9. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — Academic Press: San Diego, 1999.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М.Г. Юмагулов, М.Ф. Фазлытдинов
yum_mg@mail.ru, fazlitdin_marat@mail.ru

УДК 517.91

В докладе обсуждаются новые формулы и алгоритмы построения центральных многообразий в задаче о локальных бифуркациях в динамических системах. Предлагаемые алгоритмы и формулы позволяют проводить эффективный качественный анализ бифуркаций в терминах исходных уравнений.

Ключевые слова: динамическая система, точка равновесия, бифуркация, центральное многообразие.

Approximate formulas and algorithms for constructing central manifolds

In this paper, new algorithms for constructing central manifolds in problem on local bifurcations in dynamical systems are obtained. The proposed algorithms and formulas allow for an efficient qualitative analysis of bifurcations in terms of the original equations.

Keywords: dynamical systems, equilibrium point, bifurcation, central manifold.

В докладе предлагается общая схема, позволяющая получить новые приближенные формулы для центральных многообразий динамических систем в терминах исходных уравнений. Основными объектами исследования являются:

– Динамические системы с непрерывным временем, описываемые дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + a(x)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

где A – квадратная матрица, а функция $a(x)$ является C^m-гладкой ($m \geqslant 1$) и удовлетворяет равенствам: $a(0) = 0$ и $a'(0) = 0$. Предполагается, что точка равновесия $x = 0$ системы (1) является негиперболической, т.е. матрица A имеет одно или несколько чисто мнимых собственных значений.

– Динамические системы с дискретным временем, описываемые уравнением

$$x_{n+1} = Ax_n + a(x_n)\,, \;\; n = 0, 1, 2, \dots\,, \quad x \in R^N\,, \tag{2}$$

где A – квадратная матрица, а функция $a(x)$ является C^m-гладкой ($m \geqslant 1$) и удовлетворяет равенствам: $a(0) = 0$ и $a'(0) = 0$. Предполагается, что точка

Юмагулов Марат Гаязович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Yumagulov Marat Gayazovich (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Фазлытдинов Марат Флюрович, аспирант, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Главный специалист, Газпромнефть НТЦ (Санкт-Петербург, Россия); Fazlytdinov Marat Flurovich (Bashkir State University, Ufa, Russia; Gazpromneft STC, St. Petersburg, Russia)

равновесия $x = 0$ системы (2) является негиперболической, т.е. матрица A имеет одно или несколько собственных значений, равных 1 по модулю.

Ограничимся здесь приведением некоторых результатов относительно задачи построения центрального многообразия для системы (1). Будем считать, что нелинейность в правой части уравнения (1) представима в виде $a(x) = a_2(x) + a_3(x) + \widehat{a}_4(x)$, где $a_2(x)$ содержит квадратичные по x слагаемые, $a_3(x)$ – слагаемые третьей степени, а $\widehat{a}_4(x)$ является C^m-гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{a}_4(x)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$.

Пусть спектр σ матрицы A состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, вещественные части которых равны нулю, а σ^0 – остальные собственные значения. Множество σ^0 также состоит из двух частей: $\sigma^0 = \sigma_- \cup \sigma^+$, где множество σ_- содержит собственные значения, вещественные части которых отрицательны, а σ^+ – собственные значения, вещественные части которых положительны. Обозначим через E_0, E_- и E^+ – корневые подпространства матрицы A, отвечающие, соответственно, частям σ_0, σ_- и σ^+ ее спектра. Пусть k_0, k_- и k^+ – это размерности подпространств E_0, E_- и E^+; тогда $k_0 + k_- + k^+ = N$ и $1 \leqslant k_0 \leqslant N-1$.

Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E_- \bigoplus E^+$ инвариантных для оператора $A : R^N \to R^N$ подпространств E_0, E_- и E^+. Положим также $E^0 = E_- \bigoplus E^+$; тогда $R^N = E_0 \bigoplus E^0$. Обозначим, через $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ соответствующие операторы проектирования.

Теорема о центральном многообразии (см., например, [1]) утверждает, что существует δ_0-окрестность $T(0, \delta_0)$ точки $x = 0$ такая, что система (1) имеет в шаре $T(0, \delta_0)$ гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие W_c, которое в точке $x = 0$ касается подпространства E_0. Многообразие W_c называют *центральным многообразием* системы (1). В естественном смысле вся нетривиальная динамика системы (1) в окрестности точки равновесия $x = 0$ сосредоточена на центральном многообразии.

Центральное многообразие W_c системы (1) может быть локально задано равенством

$$W_c = \{x : \, x = u + \psi(u) \ | \ \ u \in E_0 \, , \ \psi(u) \in E^0 \, , \ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \, \} \, ,$$

где функция $v = \psi(u)$ является гладкой.

Ограничимся для простоты рассмотрением случая, когда матрица A имеет простое собственное значение 0 и не имеет других чисто мнимых собственных значений. В этом случае существуют собственные векторы e и g матрицы A и транспонированной матрицы A^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 0 и удовлетворяющие равенствам $\|e\| = 1 \, , (e, g) = 1$. Подпространство E_0 является одномерным; оно содержит вектор e. Операторы проектирования здесь определяются равенствами $P_0 x = (x, g)e \, , P^0 = I - P_0$.

Положим $B_0 = -A + P_0$. По построению оператор $B_0 : \, R^N \to R^N$ обратим, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для него. Положим, далее, для краткости: $a_2 = a_2(e) \, , a_3 = a_3(e) \, , a_2' = a_2'(e)$; здесь $a_2'(x)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x)$.

Теорема 1. *Пусть матрица A имеет простое собственное значение 0, а вещественные части остальных ее собственных значений не равны нулю. Тогда центральное многообразие W_c системы (1) может быть описано равенством*

$$W_c = \{x : x = \varepsilon e + \varepsilon^2 \psi_2 + \varepsilon^3 \psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon)\},$$

где ε - малый параметр,

$$\psi_2 = B_0^{-1} P^0 a_2 , \quad \psi_3 = B_0^{-1} P^0 [-2(a_2, g)\psi_2 + a_2' \psi_2 + a_3],$$

а функция $\widehat{\psi}_4(\varepsilon)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{\psi}_4(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \to 0$.

Литература

1. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

ON THE SOLVABILITY OF PERIODIC PROBLEM FOR LOADED PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF FOURTH ORDER

A.T. Assanova, Z.M. Kadirbayeva

assanova@math.kz, apelman86pm@mail.ru

UDC 517.95

A periodic problem for a system of loaded pseudoparabolic equations of fourth order is considered. By method of introduction additional functions original problem is reduced to equivalent problem, consisting of periodic problem for the system of loaded hyperbolic equations of second order and integral relations. Algorithms for finding solution to equivalent problem are proposed and conditions of their convergence are obtained. Conditions of unique solvability to periodic problem for the system of loaded pseudoparabolic equations of fourth order are established in the terms of initial data.

Keywords: loaded pseudoparabolic equation of fourth order, periodic problem, loaded hyperbolic equation of second order, algorithm, solvability
MSC: 35G35, 35G40, 35G46, 35L53, 35L55, 35L57

This work is supported by Grant of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (no. AP 05131220).

Anar T. Assanova, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Zhazira M. Kadirbayeva, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling & International Information Technologies University, Almaty, Kazakhstan

Consider on the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ the periodic problem for the system of loaded pseudoparabolic equations of fourth order

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} = \sum_{i=1}^{3} \Big\{ A_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{4-i}} + B_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{3-i} \partial t} \Big\} + C(t,x)u + f(t,x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \Big[\sum_{i=1}^{3} \Big\{ K_{i,j}(x) \frac{\partial^{4-i} u(t,x)}{\partial x^{4-i}} + L_{i,j}(x) \frac{\partial^{4-i} u(t,x)}{\partial x^{3-i} \partial t} \Big\} + M_j(x) u(t,x) \Big] \Big|_{t=t_j}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^3 u(0,x)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u(T,x)}{\partial x^3}, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = \psi_0(t), \ \ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_1(t), \ \ u(t,0) = \psi_2(t), \ \ t \in [0,T], \qquad (3)$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ is unknown function, the $n \times n$ matrices $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = \overline{1,3}$, $C(t,x)$, and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, the $n \times n$ matrices $K_{i,j}(x)$, $L_{i,j}(x)$, $M_j(x)$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,m}$, are continuous on $[0,\omega]$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = T$, the n vector-functions $\psi_s(t)$, $s = \overline{0,2}$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

Let $C(\Omega, R^n)$ be the space of continuous vector functions $u : \Omega \to R^n$ on Ω with norm $||u||_0 = \max_{(t,x)\in\Omega} ||u(t,x)||$.

A function $u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, having partial derivatives

$$\frac{\partial^{i+j} u(t,x)}{\partial x^i \partial t^j} \in C(\Omega, R^n), \qquad i = \overline{1,3}, \quad j = 0,1,$$

is called a *classical solution* to problem (1)–(3) if it satisfies to system of loaded pseudoparabolic equations (1) for all $(t,x) \in \Omega$ and meets the conditions (2) and (3).

Various problems for the different classes of partial differential equations of fourth order are investigated in the works of many authors [1-7].

Introduce a new unknown functions in the following form

$$v_1(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad v_2(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \quad v_3(t,x) = u(t,x).$$

Taking into account of second and third conditions in (3), we have

$$v_2(t,x) = \psi_1(t) + \int_0^x v_1(t,\xi)d\xi, \ \ v_3(t,x) = \psi_2(t) + \psi_1(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v_1(t,\xi_1)d\xi_1 d\xi.$$

Then problem (1)–(3) is reduced to a following problem

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = A_1(t,x) \frac{\partial v_1}{\partial x} + B_1(t,x) \frac{\partial v_1}{\partial t} + A_2(t,x) v_1 + f(t,x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \Big\{ K_{1,j}(x) \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x} + L_{1,j}(x) \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} + K_{2,j}(x) v_1(t,x) \Big\} \Big|_{t=t_j} +$$

$$+ F_1(t,x,v_2,v_3) + F_2(x,v_2,v_3), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial v_1(0,x)}{\partial t} = \frac{\partial v_1(T,x)}{\partial t}, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (5)$$

$$v_1(t,0) = \psi_0(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (6)$$

$$v_s(t,x) = \psi_{s-1}(t) + \sum_{i=1}^{s-2} \psi_{s-1-i}(t) \frac{x^i}{i!} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{s-2}}{(s-2)!} v_1(t,\xi) d\xi, \quad s = 2,3, \qquad (7)$$

where $F_1(t,x,v_2,v_3) =$

$$= A_3(t,x)v_2(t,x) + B_2(t,x)\tfrac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} + B_3(t,x)\tfrac{\partial v_3(t,x)}{\partial t} + C(t,x)v_3(t,x),$$
$$F_2(x, v_2, v_3) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\left\{K_{3,j}(x)v_2(t,x) + L_{2,j}(x)\tfrac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} + L_{3,j}(x)\tfrac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} + M_j(x)v_3(t,x)\right\}\Big|_{t=t_j}.$$

We also consider an auxiliary system of loaded hyperbolic equations second order

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + A_2(t,x)v_1+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\Big\{K_{1,j}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x} + L_{1,j}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} + K_{2,j}(x)v_1(t,x)\Big\}\Big|_{t=t_j} + g(t,x) \qquad (8)$$

with conditions (5) and (6).

Here the function $g(t,x) \in C(\Omega, R^n)$.

The following assertion is true.

Theorem 1. *Let*

1) the $n \times n$ matrices $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = \overline{1,3}$, $C(t,x)$, and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω;

2) the $n \times n$ matrices $K_{i,j}(x)$, $L_{i,j}(x)$, $M_j(x)$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,m}$, are continuous on $[0,\omega]$;

3) the n vector-functions $\psi_s(t)$, $s = \overline{0,2}$ are continuously differentiable on $[0,T]$;

4) the periodic problem for system of loaded hyperbolic equations second order (8), (5), (6) is uniquely solvable for any $g(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, and $\psi_0(t) \in C^1([0,T], R^n)$.

Then periodic problem for the system of loaded pseudo-parabolic equations of fourth order (1)–(4) has a unique classical solution.

Proof of Theorem 1 is proved analogously of proof Theorem 1 in [8].

A questions of unique solvability, well-posedness to system (8) with conditions (5), (6) and impulse effects are investigated in [9-10]. Conditions of unique solvability to considered problem are established in the terms of initial data.

References

1. *Kiguradze T., Lakshmikantham V.* On the Dirichlet problem for fourth order linear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis, **49** (2002), No. 2 , 197–219.

2. *Midodashvili B.* A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics // Electr. J. of Differential Equations, 2002, No. 85, 1–7.

3. *Midodashvili B.* Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // Proc. of A. Razmadze Math. Institute, **138** (2005), 43–54.

4. *Kiguradze T.* On solvability and well-posedness of boundary value problems for nonlinear hyperbolic equations of the fourth order // Georgian Math. J., **15** (2008), No. 3 , 555–569.

5. *Mamedov I.G.* On correct solvability of a problem with loaded boundary conditions for a fourth order pseudoparabolic equation // Memoires on Differ. Edu. and Math. Phys., **43** (2008), 107–118.

6. *Mamedov I.G.* A fundamential solution to the Cauchy problem for a fourth-order pseudoparabolic equation // Comput. Math. and Math. Phys., **49** (2009), No. 1, 93–104.

7. *Ferraioli D.C., Tenenblat K.* Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces // J. Differential Equations, **257** (2014), 3165–3199.

8. *Assanova A.T.* On the solvability of nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition // Georgian Math. J., DOI: 10.1515/gmj-2019-2011. Published Online: 02/ 19/ 2019.

9. *Asanova A.T., Kadirbaeva Z.M., Bakirova E.A.* About of an unique solvability of a nonlocal boundary value problem for the loaded systems of hyperbolic equations with impulse effects // Ukrainian Math. J., **69** (2018), No. 8, 1175–1195.

10. *Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M.* Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations // Electr. J. of Differential Equations, 2018, No. 72, 1–8.

AN INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL PENCILS WITH DELAY

S.A. Buterin, M.A. Malyugina, C.-T. Shieh

buterinsa@info.sgu.ru, margarita.malyugina@tele2.ru, ctshieh@mail.tku.edu.tw

UDC 517.984

We consider a second order functional-differential pencil with delay and study the inverse problem of recovering its coefficients from subspectra of two boundary value problems with one common boundary condition.

Keywords: functional-differential equation, deviating argument, constant delay, inverse spectral problem

MSC: 34A55, 34B07, 34K29

Consider the functional-differential equation

$$y''(x) + \rho^2 y(x) = (q_0(x) + 2\rho q_1(x))y(x-a), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

where ρ is the spectral parameter and $a \in [\pi/2, \pi)$, while $q_\nu(x) \in W_2^\nu[0,\pi]$ are complex-valued functions and $q_\nu(x) = 0$ on $(0,a)$, $\nu = 0,1$. For simplicity we assume that $\int_a^\pi q_1(x)\,dx = 0$. For $j = 0,1$ let $\{\rho_{n,j}\}$ be the spectrum of the boundary value problem $L_j(q_0,q_1)$ for equation (1) with the boundary conditions

$$y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0. \tag{2}$$

Theorem 1. *For $j = 0,1$ and $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ the following asymptotics holds:*

$$\rho_{n,j} = \rho_{n,j}^0 + \frac{\omega_0}{\pi n}\cos\rho_{n,j}^0 a + (-1)^j \frac{\omega_1}{\pi n}\sin\rho_{n,j}^0 a + \frac{\varkappa_{n,j}}{n}, \quad \omega_j \in \mathbb{C},\ \{\varkappa_{n,j}\} \in l_2,$$

where $\rho_{n,j}^0 = n - \operatorname{sgn}(n)j/2$. Moreover, $\omega_0 = \int_a^\pi q_0(x)\,dx$ and $\omega_1 = q_1(\pi)/2$.

Let $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ be an increasing sequence of natural numbers. Consider the following *inverse problem* (**IP**): Given the subspectra $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 0,1$, find the functions $q_0(x)$, $q_1(x)$.

The classical results in the inverse spectral theory are known for differential operators (see, e.g., the survey in [1]). For example, the inverse problem for the pencils (1), (2) without delay (i.e. when $a = 0$) from the complete spectra was studied in [2]. For functional-differential operators and pencils as well as for other classes of

This work was supported in part by the Russian Ministry of Education and Science (Grant no. 1.1660.2017/4.6) and by RFBR (Grant no. 19-01-00102).

Sergey Buterin, Saratov State University, Saratov, Russia
Margarita Malyugina, Saratov State University, Saratov Russia,
Chung-Tsun Shieh, Tamkang University, Taipei, Taiwan

nonlocal ones the classical methods of the inverse spectral theory usually do not work. For Sturm–Liouville-type operators (i.e. when $q_1(x)\equiv 0$) with delay inverse problems were studied in [3–12]. We note that the case $a\in(0,\pi/2)$ is much more difficult. Some aspects of the inverse problem for $a\in(2\pi/5,\pi/2)$ when $q_1(x)\equiv 0$ were studied in [8–11].

Lemma 1. *Specification of the subspectra $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j=0,1$, uniquely determines the numbers ω_j, $j=0,1$, by the formula*

$$\begin{bmatrix}\omega_0\\ \omega_1\end{bmatrix}=\pi\sin^{-1}\frac{a}{2}\lim_{k\to\infty}n_k\begin{bmatrix}\sin\overset{0}{\rho}_{-n_k,1}a & \sin\overset{0}{\rho}_{n_k,0}a\\ \cos\overset{0}{\rho}_{-n_k,1}a & -\cos\overset{0}{\rho}_{n_k,0}a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho_{n_k,0}-\overset{0}{\rho}_{n_k,0}\\ \overset{0}{\rho}_{-n_k,1}-\rho_{-n_k,1}\end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Put $n_0:=0$, $n_{-k}:=-n_k$ for $k\in\mathbb{N}$ and introduce the sequences $\{\theta_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_j}$, $j=0,1$, where $\mathbb{Z}_0=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ and $\mathbb{Z}_1=\mathbb{Z}$, in the following way:

$$\theta_{k,0}=\rho_{n_{k+1},0},\ k\leqslant -2,\quad \theta_{k,0}=\rho_{n_{k-1},0},\ k\geqslant 3,\qquad \theta_{k,1}=\rho_{n_k,1},\quad |k|\in\mathbb{N}, \qquad (4)$$

$$\theta_{-1,0}=\rho_{n_1,0},\ \theta_{1,0}=\theta_{2,0}=0,\qquad \theta_{0,1}=0. \qquad (5)$$

Without loss of generality we assume that $\theta_{-k,0}\neq\theta_{n,0}$ and $\theta_{-k,1}\neq 0$ for all $n,k\in\mathbb{N}$ and that multiple values in the sequences $\{\theta_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_j}$ are neighboring, i.e. $\theta_{k,j}=\theta_{k+1,j}=\ldots\theta_{k+m_{k,j}-1,j}$, where $m_{k,j}$ is the multiplicity of $\theta_{k,j}$.

We also introduce the sets

$$\mathcal{S}_0=\{k:\theta_{k,0}\neq\theta_{k-1,0},k\in\mathbb{Z}_0\setminus\{1\}\}\cup\{1\},\quad \mathcal{S}_1=\{k:\theta_{k,1}\neq\theta_{k-1,1},k\in\mathbb{Z}\}$$

and the systems of vector-functions $\Lambda_j=\{(c_{kj}(x),s_{kj}(x))\}_{k\in\mathbb{Z}_j}$, $j=0,1$, where

$$c_{k+\nu,j}(x)=\frac{d^\nu}{d\rho^\nu}\cos\rho x\Big|_{\rho=\theta_{k,j}},\quad s_{k+\nu}(x)=\frac{d^\nu}{d\rho^\nu}\sin\rho x\Big|_{\rho=\theta_{k,j}}$$

for $k\in\mathcal{S}_j$ and $\nu=\overline{0,m_{k,j}-1}$.

Lemma 2. *(i) The system Λ_0 is complete in $(L_2(0,b))^2$ if and only if the system $\{\cos n_kx\}_{k+1\in\mathbb{N}}$ is complete in $L_2(0,b)$.*

(ii) The system Λ_1 is complete in $(L_2(0,b))^2$ if and only if the system $\{\sin(n_k-1/2)x\}_{k\in\mathbb{N}}$ is complete in $L_2(0,b)$.

(iii) The system Λ_0 is a Riesz basis in $(L_2(0,b))^2$ if and only if so is the system $\Lambda_0^0=\{(0,x)\}\cup\{(\cos n_kx,\sin n_kx\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

(iv) The system Λ_1 is a Riesz basis in $(L_2(0,b))^2$ if and only if so is the system $\Lambda_1^0=\{(\cos\overset{0}{\rho}_{n_k,1}x,\sin\overset{0}{\rho}_{n_k,1}x\}_{k\in\mathbb{Z}}$, where $\overset{0}{\rho}_{0,1}=0$.

Theorem 2. *Specification of the subspectra $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j=0,1$, uniquely determines the functions $q_0(x)$ and $q_1(x)$ if and only if each of the systems $\{\cos n_kx\}_{k+1\in\mathbb{N}}$ and $\{\sin(n_k-1/2)x\}_{k\in\mathbb{N}}$ is complete in $L_2(0,\pi-a)$.*

Corollary 1. *For any fixed $a\in[\pi/2,\pi)$, specification of the subspectra $\{\rho_{2k,j}\}_{|k|\in\mathbb{N}}$, $j=0,1$, uniquely determines the functions $q_0(x)$ and $q_1(x)$.*

The following theorem gives sufficient conditions for solvability of IP.

Theorem 3. *Fix $a\in[\pi/2,\pi)$. Then two arbitrary sequences of complex numbers $\{\mu_{k,j}\}_{|k|\in\mathbb{N}}$, $j=0,1$, are subspectra of some boundary value problems $L_j(q_0,q_1)$, $j=0,1$, respectively, if the following two conditions are fulfilled:*

(i) There exists an increasing sequence of natural numbers $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ such that

$$\mu_{k,j}=\overset{0}{\rho}_{n_k,j}+\frac{\omega_0}{\pi n_k}\cos\overset{0}{\rho}_{n_k,j}a+(-1)^j\frac{\omega_1}{\pi n_k}\sin\overset{0}{\rho}_{n_k,j}a+\frac{\varkappa_{k,j}}{n_k},\quad \{\varkappa_{k,j}\}\in l_2,$$

where $|k|\in\mathbb{N}$, $\omega_0,\omega_1\in\mathbb{C}$ and $n_{-k}=-n_k$ for $k\in\mathbb{N}$;

(ii) Each of the systems Λ_j^0, $j=0,1$, constructed by the sequence $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ from (i), is a Riesz basis in $(L_2(0,\pi-a))^2$.

Under assumption (ii) of Theorem 3 the solution of the inverse problem can be found by the following algorithm.

Algorithm 1. *Let the subspectra $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j=0,1$, be given. Then:*
1) Find the numbers ω_0 and ω_1 by formula (3);
2) Construct the sequences $\{\beta_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_j}\in l_2$, $j=0,1$, by the formula

$$\beta_{k+\nu,j}=\Theta_j^{(\nu)}(\theta_{k,j}),\quad k\in\mathcal{S}_j,\quad \nu=\overline{0,m_{k,j}-1},$$

where the numbers $\theta_{k,j}$ are determined in (4) and (5), while

$$\Theta_0(\rho)=-\rho\sin\rho\pi+\omega_0\cos\rho(\pi-a)-\omega_1\sin\rho(\pi-a),$$

$$\Theta_1(\rho)=-\rho\cos\rho\pi-\omega_0\sin\rho(\pi-a)+\omega_1\cos\rho(\pi-a);$$

3) Find the functions $w_{j\nu}(x)\in L_2(0,\pi-a)$, $j,\nu=0,1$, by the formulae

$$w_{j0}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_j}\beta_{kj}c_{kj}^*(x),\quad w_{j1}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_j}\beta_{kj}s_{kj}^*(x),$$

where the system $\{(c_{kj}^*(t),s_{kj}^*(t))\}_{k\in\mathbb{Z}_j}$ is biorthogonal to the Riesz basis Λ_j;
4) Construct the functions $q_0(x)$ and $q_1(x)$ by the formulae

$$q_0(x)=2\begin{cases} w_{00}(\pi+a-2x)-w_{11}(\pi+a-2x), & x\in\Big(a,\dfrac{\pi-a}{2}\Big),\\ w_{00}(2x-\pi-a)+w_{11}(2x-\pi-a), & x\in\Big(\dfrac{\pi-a}{2},\pi\Big),\end{cases}$$

$$q_1(x)=2\omega_1-\int_x^\pi u(t)\,dt,$$

$$u(t)=2\begin{cases} w_{10}(\pi+a-2x)+w_{01}(\pi+a-2x), & x\in\Big(a,\dfrac{\pi-a}{2}\Big),\\ w_{10}(2x-\pi-a)-w_{01}(2x-\pi-a), & x\in\Big(\dfrac{\pi-a}{2},\pi\Big).\end{cases}$$

Analogous results for Sturm–Liouville-type operators with delay were obtained in [12].

References

1. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. — Utrecht: VSP, 2002.

2. *Buterin S.A., Yurko V.A.* Inverse problems for second-order differential pencils with Dirichlet boundary conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. **20** (2012), 855–881.

3. *Pikula M.* Determination of a Sturm–Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra // Mat. Vesnik **43**:3-4 (1991), 159–171.

4. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators with a constant delay, Appl. Math. Lett. **25** (2012), 1999–2004.

5. *Vladičić V., Pikula M.* An inverse problem for Sturm–Liouville-type differential equation with a constant delay // Sarajevo J. Math. **12**:1 (2016), 83–88.

6. *Buterin S.A., Pikula M., Yurko V.A.* Sturm–Liouville differential operators with deviating argument // Tamkang J. Math. **48**:1 (2017), 61–71.

7. *Ignatiev* Ignatiev M.Yu. On an inverse Regge problem for the Sturm-Liouville operator with deviating argument // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. **22**:2 (2018), 203–211.

8. *Bondarenko N., Yurko V.* An inverse problem for Sturm–Liouville differential operators with deviating argument // Appl. Math. Lett. **83** (2018), 140–144.

9. *Bondarenko N.P., Yurko V.A.* Partial inverse problems for the Sturm–Liouville equation with deviating argument // Math. Meth. Appl. Sci. **41** (2018), 8350–8354.

10. *Vladičić V., Pikula M., Vojvodić B.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with a constant delay less than half the length of the interval and Robin boundary conditions // Res. Math. **74**:45 (2019).

11. *Yurko V.A.* An inverse spectral problem for second order differential operators with retarded argument // Res. Math. **74**:71 (2019).

12. *Buterin S.A., Yurko V.A.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with a large delay // Anal. Math. Phys. **9**:1 (2019), 17–27.

MICROLOCAL GEOMETRY MAKES GLOBAL STRUCTURES IN POROUS MEDIUM

V.A. Galkin

val-gal@yandex.ru

UDC 531.3,517.958

We consider the problem of connectedness in the metric space which model is “porous medium”. The main question is the description of measure for quantity of global connections between two points in the space provided the local distribution of connections in microstructure is given. A porous medium is a network of intergrain channels formed by internally connected intermediate spaces between particles.

Keywords: porous medium, intergrain channels

Mathematically this problem directly connected with behavior of solutions for the conservation laws systems of quasilinear Equations

$$\frac{\partial u_\beta(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j^{(\beta)}}{\partial x_j} = 0, \quad x \in \mathrm{R}_n, \quad t > 0, \quad \beta \in C. \tag{1}$$

Here the given typically nonlinear functions $F_j^{(\beta)}$ define the local connectivity in the medium. The analysis of global geometry in “porous medium” is directly related to the structure of singularities of solutions to the Eq. (1). The main description of above is based on so-called functional solutions theory in the algebraically adjoint space to the L_1^{loc} equipped by the Tikhonov topology [1].

Natural examples of above problems are investigated in description of global structures produced by connected pores in matrix of oil-containing sands and similar problems arise in research of materials of nuclear reactors under influence of neutron flow.

Those problems are close to the description of structures in multidimensional billiard game.

The Russian Foundation for Basic Research supported this work (project nos. 16-29-15105, 18-01-00343).

Valeriy Galkin, Scientific Research Institute for System Studies, Federal Research Center, Russian Academy of Sciences (Moscow, Surgut); Tyumen Industrial University (Tyumen)

The description of global structures in the above examples connected with solutions of Smoluchowskii kinetic Equation [2], which is directly leads to the non-local Hopf Equation

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F - F(0,t)]\,\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad (p > 0,\ t > 0),$$

for density distribution function of global conductivity paths in structure of porous medium.

Directly these phenomena involve processes of cracks growth in the structure of materials due to their mutual intersections (coagulation of growing cracks with the formation of defects, comparable to the size of the engineering objects is the phenomenon of their destruction). This is related to the tasks of destruction dynamics and its prognosis to prevent possible disasters on aerospace devices and pipelines of the first circuit of nuclear power plants during their cyclic freezing-thawing. The latter is especially true for nuclear reactors with heavy metal coolant, where phase transitions are a source of pressure surges on the pipes, generating the development of cracks.

The above phenomenon connected with transition of the conservation relationship into relation of dissipation in Eqs. (1). The great interest is the study of the stationary problem for the size distribution function of pores$f$, which is written as [2]:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\mu} \Phi(\mu-\mu_1,\mu_1) f(\mu-\mu_1) f(\mu_1)\, d\mu_1 - \\ - f(\mu)\int_0^{\infty} \Phi(\mu,\mu_1) f(\mu_1)\, d\mu_1 + q(\mu) = 0, \quad \mu \in \mathrm{R}^+, \quad (2)$$

where given a non-negative function $q(\mu)$ defines the intensity, with which pores of size $\mu \geqslant 0$ are introduced into the medium containing growing pores due to their mutual crossings.

Such solutions do not belong to the conservative set of Smoluchowski collision operator (2), and therefore they lie in the set of dissipation. Such problems arise when describing the growth of pores in metals when irradiated by fast neutron flux that during collisions with atoms in crystal lattice provide holes. In this case, neutrons are source of particles (holes). These holes during their thermal movement meet each other and coagulate. Mathematical modelling of jet engines has to take into account coagulation of sticky particles, which arise in the combustion process.

References

1. *Galkin V.A.* Analysis of Mathematical Models: Conservation Law Systems, Smoluchowski and Boltzmann Equations. — Moscow: BINOM, 2009.

2. *Galkin V.A.* Smoluchowski Equation. — Moscow: FIZMATLIT, 2001.

CONFORMAL SPECTRAL ESTIMATES OF THE DIRICHLET-LAPLACIAN

V. Gol'dshtein, V. Pchelintsev, A. Ukhlov
vladimir@math.bgu.ac.il, vpchelintsev@vtomske.ru, ukhlov@math.bgu.ac.il

UDC 517.984

We study spectral estimates of the Dirichlet-Laplacian in bounded planar domains and obtain spectral gap estimates in terms of the conformal (hyperbolic) geometry.

Keywords: Dirichlet-Laplacian, spectral gap, conformal mappings
MSC: 35P15, 30C65

This note is dedicated to estimates of the eigenvalues of the Dirichlet-Laplacian

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ (x,y) \in \Omega, \ u|_{\partial\Omega} = 0,$$

in terms of the conformal geometry of $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

By Riemann's mapping theorem there exists a conformal mapping $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ of a simply connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^2$, onto the unit disc $\mathbb{D}$. Recall that Ω is called a conformal α-regular domain if φ' belongs to the Lebesgue space $L^\alpha(\mathbb{D})$, for some $\alpha > 2$ [1]. This definition does not depend on choice of a conformal mapping $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ and can be reformulated in terms of the hyperbolic metrics [1]. A class of conformal regular domains includes Lipschitz domains and also some fractal domains like snowflakes.

Our machinery is based on the spectral stability estimates of the Dirichlet-Laplace operator [1] and the geometric theory of composition operators on Sobolev spaces [3]. On this way we obtain asymptotically sharp lower estimates of the spectral gap between the first two Dirichlet eigenvalues in conformal α-regular domains [2].

Introduce the notations:

$$\gamma_\alpha = \inf_{p \in \left(\frac{4\alpha}{3\alpha-2}, 2\right)} \left(\frac{p-1}{2-p}\right)^{\frac{2(p-1)}{p}} \frac{\pi^{-\frac{\alpha+2}{2\alpha}} 4^{-\frac{1}{p}}}{\Gamma(2/p)\Gamma(3-2/p)},$$

$$V^0_\alpha(\Omega, \widetilde{\Omega}) = \inf_{\varphi, \widetilde{\varphi}} \left[\left(\|\varphi' \mid L^\alpha(\mathbb{D})\| + \|\widetilde{\varphi}' \mid L^\alpha(\mathbb{D})\|\right) \|\varphi' - \widetilde{\varphi}' \mid L^2(\mathbb{D})\|\right],$$

where the infimum is taken over all conformal mappings $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ and $\widetilde{\varphi} : \mathbb{D} \to \widetilde{\Omega}$. The quantity $V^0_\alpha(\Omega, \widetilde{\Omega})$ measures a "distance" between Ω and $\widetilde{\Omega}$ in terms of L^2-norms of conformal homeomorphisms.

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a conformal α-regular domain of area π. Then the spectral gap for Dirichlet-Laplacian satisfies*

$$\lambda_2(\Omega) - \lambda_1(\Omega) \geqslant \lambda_2(\mathbb{D}) - \lambda_1(\mathbb{D}) - (\lambda_*^2 + 1)\lambda_1^2(\mathbb{D}_\rho)\gamma_\alpha V^0_\alpha(\mathbb{D}, \Omega),$$

where $\lambda_* \approx 2.539$ and $\mathbb{D}_\rho$ is the largest disc inscribed in Ω.

This work is supported by the United States-Israel Binational Science Foundation (BSF Grant no. 2014055) and RFBR (no. 18-31-00011).

Vladimir Gol'dshtein, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel

Valerii Pchelintsev, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel; Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

Alexander Ukhlov, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel

Also we obtain asymptotically sharp lower estimates of the Payne-Pólya-Weinberger ratio of eigenvalues of the Dirichlet-Laplace operator in conformal α-regular domains [2].

Theorem 2. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a conformal α-regular domain of area π. Then the ratio of the first two eigenvalues of the Dirichlet-Laplacian satisfies*

$$\frac{\lambda_2(\Omega)}{\lambda_1(\Omega)} \geqslant \frac{\lambda_2(\mathbb{D}) - \lambda_*^2 \lambda_1^2(\mathbb{D}_\rho)\gamma_\alpha V_\alpha^0(\mathbb{D},\Omega)}{\lambda_1(\mathbb{D}) + \lambda_1^2(\mathbb{D}_\rho)\gamma_\alpha V_\alpha^0(\mathbb{D},\Omega)},$$

where $\lambda_* = \frac{\lambda_2(\mathbb{D})}{\lambda_1(\mathbb{D})} \approx 2.539$ and $\mathbb{D}_\rho$ is the largest disc inscribed in Ω.

References

1. *Burenkov V.I., Gol'dshtein V., Ukhlov A.* Conformal spectral stability for the Dirichlet-Laplace operator // Math. Nachr., **288** (2015), 1822-1833.

2. *Gol'dshtein V., Pchelintsev V., Ukhlov A.* On conformal spectral gap estimates of the Dirichlet-Laplacian // Algebra i Analiz, **31**:2 (2019), 189-203.

3. *Ukhlov A.* On mappings, which induce embeddings of Sobolev spaces // Siberian Math. J., **34**:1 (1993), 185-192.

ON STABILIZATION PROBLEM FOR A LOADED HEAT EQUATION: THE TWO-DIMENSIONAL CASE

K. Imanberdiyev, A. Kassymbekova

kanzharbek75ikb@gmail.com, kasar08@mail.ru

UDC 517.95

The problem of stabilization (of forming a cylinder) of a solution of boundary value problem for heat equation with the loaded two-dimensional Laplace operator is considered. An algorithm is proposed for approximate construction of boundary controls providing the required stabilization of the solution. The work continues the research of the authors carried out earlier for the loaded one-dimensional heat equation.

Keywords: loaded Laplace equation, heat equation, boundary value problems, spectrum, eigenfunction
MSC: 35K05, 39B82, 47A75

This work is supported by Ministry of Science and Education of the RK (no. AP05130928).

Kanzharbek Imanberdiyev, Al-Farabi Kazakh National University, Institute Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Arnay Kassymbekova, Al-Farabi Kazakh National University, Institute Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

The idea of reducing the stabilization problem for a parabolic equation by means of boundary controls to the solution of an auxiliary boundary value problem (BVP) in the extended domain of independent variables belongs to A.V. Fursikov [1]. At the same time, recently, the so-called loaded differential equations [2], [3] are actively used in problems of mathematical modeling and control of nonlocal dynamical systems. In this paper, we investigate stabilization problems for the loaded two-dimensional thermal conductivity equation.

Statement of the problem. Let $\Omega = \{x, y : -\pi/2 < x, y < \pi/2\}$ be a domain with a boundary $\partial\Omega$. In the cylinder $Q = \Omega \times \{t > 0\}$ with lateral surface $\Sigma = \partial\Omega \times \{t > 0\}$ we consider the BVP for the loaded heat equation

$$u_t - \Delta u + \alpha u(0, y, t) + \beta u(x, 0, t) = 0,\ \{x, y, t\} \in Q, \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y),\ \{x, y\} \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x, y, t) = p(x, y, t),\ \{x, y, t\} \in \Sigma, \tag{3}$$

where α, $\beta \in \mathbb{C}$ are given (in general case are complex) constants, $u_0(x, y)$ is given function. The aim is to find a function $p(x, y, t)$ such that a solution of the BVP (1)–(3) satisfies the inequality

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_0 e^{-\sigma t},\ \sigma > 0,\ t > 0. \tag{4}$$

Note that here σ is a given constant and C_0 is an arbitrary bounded constant.

Auxiliary BVP. Let $\Omega_1 = \{x, y : -\pi < x, y < \pi\}$ and $Q_1 = \Omega_1 \times \{t > 0\}$.

$$z_t - \Delta z + \alpha z(0, y, t) + \beta z(x, 0, t) = 0,\ \{x, y, t\} \in Q_1, \tag{5}$$

$$z(x, y, 0) = z_0(x, y),\ \{x, y\} \in \Omega_1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^{(j)} z(-\pi, y, t)}{\partial x^{(j)}} = \frac{\partial^{(j)} z(\pi, y, t)}{\partial x^{(j)}},\ \{y, t\} \in (-\pi, \pi) \times \{t > 0\},$$

$$\frac{\partial^{(j)} z(x, -\pi, t)}{\partial y^{(j)}} = \frac{\partial^{(j)} z(x, \pi, t)}{\partial y^{(j)}},\ \{x, t\} \in (-\pi, \pi) \times \{t > 0\},\ j = 0, 1. \tag{7}$$

The problem is to find an initial function $z_0(x, y)$ such that a solution of the BVP (5)–(7) satisfies the inequality

$$\|z(x, y, t)\|_{L_2(\Omega_1)} \leqslant C_0 e^{-\sigma t},\ \sigma > 0,\ t > 0. \tag{8}$$

We recall, as we indicated above, that here σ is a given constant and C_0 is an arbitrary bounded constant.

Spectral problem for the loaded twodimensional Laplace operator. Let us search a solution of the problem (5)–(7) in the form

$$z(x, y, t) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} Z_{kl}(t) \psi_{kl}(x, y), \tag{9}$$

where $\{\psi_{kl}(x, y), k, l \in \mathbb{Z}\}$ is a biorthogonal basis of the space $L_2(\Omega_1)$ and $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$. The following two spectral problems are considered for the construction of the biorthogonal basis $\{\psi_{kl}(x, y), k, l \in \mathbb{Z}\}$ in the domain $\Omega_1 = \{x, y : -\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi\}$:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x, y) + \alpha\varphi(0, y) = \lambda\varphi(x, y), \\ \dfrac{\partial^j \varphi(-\pi, y)}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^j \varphi(\pi, y)}{\partial x^j},\ \dfrac{\partial^j \varphi(x, -\pi)}{\partial y^j} = \dfrac{\partial^j \varphi(x, \pi)}{\partial y^j}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x,y)+\alpha\varphi(0,y)+\beta\varphi(x,0)=\lambda\varphi(x,y), \\ \dfrac{\partial^j\varphi(-\pi,y)}{\partial x^j}=\dfrac{\partial^j\varphi(\pi,y)}{\partial x^j},\ \dfrac{\partial^j\varphi(x,-\pi)}{\partial y^j}=\dfrac{\partial^j\varphi(x,\pi)}{\partial y^j}, \end{cases} \tag{11}$$

where $j=0,1$, Δ is the Laplace operator, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ are given complex numbers, $\lambda\in\mathbb{C}$ is a spectral parameter. The following propositions are valid.

Theorem 1. *(a). Let $\forall\ l\in\mathbb{Z}:\alpha\neq l^2$. Then a system of eigenfunctions and eigenvalues of the problem (10) is defined in the form:*

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)e^{iky},\ \lambda_{kl}=l^2+k^2,\ l\in\mathbb{Z}'\equiv\mathbb{Z}\backslash\{0\};$$

$$\varphi_{k0}(x,y)=e^{iky},\ \lambda_{k0}=\alpha+k^2\ (l=0),\ k\in\mathbb{Z}\Big\}. \tag{12}$$

(b). Let $\exists\ l_0\in\mathbb{Z}:\ \alpha=l_0^2$. Then a system of eigenfunctions, associated functions (marked with $\sim$) and eigenvalues of the problem (10) is defined in the form:

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)e^{iky},\ \lambda_{kl}=l^2+k^2,\ l\in\mathbb{Z}_1'\equiv\mathbb{Z}'\backslash\{\pm l_0\};$$

$$\varphi_{kl_0}(x,y)=e^{iky},\ \tilde{\varphi}^{\pm}_{kl_0}(x,y)=e^{\pm il_0x+iky},\ \lambda_{kl_0}=\alpha+k^2\ (\alpha=l_0^2),\ k\in\mathbb{Z}\Big\}. \tag{13}$$

Theorem 2. *(a). Let $\forall\,k,\,l\in\mathbb{Z}:\ \beta\neq k^2,\ \alpha\neq l^2$. Then a system of eigenfunctions and eigenvalues for the problem (11) is defined in the form:*

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)\Big(e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),$$

$$\lambda_{kl}=k^2+l^2,\ k,\ l\in\mathbb{Z}';\ e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha},\ \lambda_{0l}=\beta+l^2,\ l\in\mathbb{Z}';$$

$$e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta},\ \lambda_{k0}=k^2+\alpha,\ k\in\mathbb{Z}';\ 1,\ \lambda_{00}=\alpha+\beta\Big\}. \tag{14}$$

(b). Let $\forall\,k\in\mathbb{Z}:\beta\neq k^2$ and $\exists l_0\in\mathbb{Z}:\alpha=l_0^2$. Then a system of eigenfunctions, associated functions (marked with $\sim$) and eigenvalues for the problem (11) is defined in the form (where $\mathbb{Z}_1'=\mathbb{Z}'\backslash\{\pm l_0\}$):

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)\Big(e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \lambda_{kl}=k^2+l^2,\ k\in\mathbb{Z}',\ l\in\mathbb{Z}_1';$$

$$\varphi_{kl_0}(x,y)=e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta},\ \tilde{\varphi}^{\pm}_{kl_0}(x,y)=e^{\pm il_0x}\Big(e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \lambda_{kl_0}=k^2+\alpha,$$

$$\alpha=l_0^2,\ k\in\mathbb{Z}';\ \varphi_{0l_0}(x,y)=1,\ \tilde{\varphi}^{\pm}_{0l_0}(x,y)=e^{\pm il_0x},\ \lambda_{0l_0}=\alpha+\beta\Big\}. \tag{15}$$

(c). Let $\forall\ l\in\mathbb{Z}:\ \alpha\neq l^2$ and $\exists\ k_0\in\mathbb{Z}:\ \beta=k_0^2$. Then a system of eigenfunctions, associated (marked with $\sim$) functions and eigenvalues for the problem (11) is defined in the form (where $\mathbb{Z}_2'=\mathbb{Z}'\backslash\{\pm k_0\}$):

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)\Big(e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \lambda_{kl}=k^2+l^2,\ k\in\mathbb{Z}_2',\ l\in\mathbb{Z}';$$

$$\varphi_{k_0l}(x,y)=e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha},\ \tilde{\varphi}^{\pm}_{k_0l}(x,y)=e^{\pm ik_0y}\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big),\ \lambda_{k_0l}=\beta+l^2,$$

$$\beta=k_0^2,\ l\in\mathbb{Z}';\ \varphi_{k_00}(x,y)=1,\ \tilde{\varphi}_{k_00}(x,y)=e^{\pm ik_0y},\ \lambda_{k_00}=\alpha+\beta\Big\}. \tag{16}$$

(d). Let $\exists\, k_0,\, l_0 \in \mathbb{Z}:\ \beta = k_0^2,\ \alpha = l_0^2$. Then a system of eigenfunctions, associated functions (marked with $\sim$) and eigenvalues for the problem (11) is defined in the form:

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y) = \Big(e^{ilx} + \frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)\Big(e^{iky} + \frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \lambda_{kl} = k^2 + l^2,\ k \in \mathbb{Z}_2',\ l \in \mathbb{Z}_1';$$

$$\varphi_{k_0 l}(x,y) = e^{ilx} + \frac{\alpha}{l^2-\alpha},\ \tilde{\varphi}_{k_0 l}^{\pm}(x,y) = e^{\pm ik_0 y}\Big(e^{ilx} + \frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big),\ \lambda_{k_0 l} = \beta + l^2,$$

$$\beta = k_0^2,\ l \in \mathbb{Z}_1';\ \varphi_{kl_0}(x,y) = e^{iky} + \frac{\beta}{k^2-\beta},\ \alpha + k^2,\ k \in \mathbb{Z}_2';\ \varphi_{k_0 l_0}(x,y) = 1,$$

$$\tilde{\varphi}_{k_0 l_0}(x,y) = e^{\pm ik_0 y},\ \lambda_{k_0 l_0} = \alpha + \beta;\ \tilde{\varphi}_{kl_0}(x,y) = e^{\pm il_0 x}\Big(e^{iky} + \frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \alpha + k^2,$$

$$k \in \mathbb{Z}_2';\ \tilde{\varphi}_{k_0 l_0}(x,y) = e^{\pm il_0 x},\ \tilde{\varphi}_{k_0 l_0}(x,y) = e^{\pm il_0 x \pm ik_0 y},\ \lambda_{k_0 l_0} = \alpha + \beta\Big\}. \tag{17}$$

References

1. *Fursikov A.V.* Stabilizability a quasilinear parabolic equation by using the boundary control with feedback // Mathematicheskii sbornik, **192**, no. 4 (2001), 115–160 (in Russian).

2. *Amangaliyeva M., Jenaliyev M., Imanberdiyev K., Ramazanov M.* On spectral problems for loaded two-dimension Laplace operator // AIP Conference Proceedings, **1759** (2016), 020049. https://doi.org/10.1063/1.4959663.

3. *Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I.* Stabilization of solutions of loaded on zero-dimensional manifolds heat equation with using boundary controls // Mathematical journal, **15**, no. 4 (2015), 33–53 (in Russian).

ON PROJECTOR APPROACH TO CONSTRUCTING ASYMPTOTIC SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEMS FOR SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS IN CRITICAL CASE

G. Kurina

kurina@math.vsu.ru

UDC 517.928.4

The algorithm by A.B. Vasil’eva and V.F. Butuzov (Differ. Uravn. 1970, 6(4), 650-664 (in Russian)) for constructing asymptotic solution of the initial value problem for weakly non-linear differential equation with a small parameter standing before the derivative in the case of a singular matrix $A(t)$ standing in front of the unknown function is formulate here with the help of the orthogonal projectors onto $kerA(t)$ and $kerA(t)'$ (the prime denotes the transposition). Such approach essentially simplifies understanding the algorithm of the asymptotics construction.

Keywords: singular perturbations, critical case, projector approach

MSC: 34E15

This work is supported by the Russian Science Foundation (no. 17-11-01220).

Galina Kurina, Voronezh State University, Voronezh, Russia; Federal Research Center ”Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

An asymptotic solution, containing boundary functions, for the initial value problem for weakly non-linear differential equation in a real m-dimensional space

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

where $x = x(t,\varepsilon) \in X$, the matrix $A(t)$ is singular, and for its discrete analogue has been constructed in [1]. The results from this paper are also presented in [2] and [3]. In these publications, the cause of studying equations of the last form is also explained.

Here and further $\varepsilon \geqslant 0$ means a small parameter and the $m \times m$ matrix $A(t)$ and the m-dimensional vector-functions $f(x,t,\varepsilon)$ are sufficiently smooth with respect to their arguments.

In contrast [1], we use the projector approach for constructing asymptotic solution of problem (1),(2). It allows us to represent the algorithm of boundary functions method for constructing asymptotic solution of initial value singularly perturbed problems in a critical case more clearly than in [1].

Note that the projector approach has been used in [4] for constructing the zero order asymptotic solution for a singularly perturbed linear-quadratic control problem in the critical case.

We will assume the same assumptions as in [1] that the matrix $A(t)$ has for each $t \in [0,T]$ m eigenvalues $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_m(t)$ and they satisfy the conditions

1. $\lambda_j(t) = 0$ for $j = 1,2,...,k$, $k < m$.
2. All k eigenvectors $v_1(t), v_2(t), ..., v_k(t)$ of the matrix $A(t)$, corresponding to $\lambda_j(t) = 0$, $j = 1,2,...,k$, are linearly independent.

We will use here eigenvectors having the same smoothness as the matrix $A(t)$.

Following to [1], we will seek for the asymptotic solution of problem (1), (2) in the form

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon), \tag{3}$$

where $\overline{x}(t,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j\overline{x}_j(t)$ is a so-called regular series, $\Pi x(\tau,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j\Pi_j x(\tau)$ is a so-called boundary series, $\tau = t/\varepsilon$. Functions $\Pi_j x(\tau)$ are boundary functions in the vicinity of $t = 0$. They will be find as in [1] with the help of the additional condition $\Pi_j x(\tau) \to 0$ as $\tau \to +\infty$.

Further we will use the decompositions of the space X into the orthogonal sums

$$X = kerA(t) \oplus imA(t)' = kerA(t)' \oplus imA(t).$$

The prime denotes the transposition. Orthogonal projectors $P(t)$ and $Q(t)$ of the space X onto the subspaces $kerA(t)$ and $kerA(t)'$, respectively, corresponding to the decompositions of the space X into two last orthogonal sums, will be applied.

The following two conditions are yet assumed.

3. For each $t \in [0,T]$ the operator $(I - P(t))A(t)(I - P(t)) : imA(t)' \to imA(t)'$ is stable, i. e. all eigen values of this operator have negative real parts.

By I, as usually, we mean the identity operator.

4.The initial value problem

$$\frac{d(P(t)\overline{x}_0(t))}{dt} = (Q(t)P(t))^{-1}Q(t)(-\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t)+$$

$$+f(P(t)\overline{x}_0(t),t,0)) + (I - P(t))\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t),$$

$$P(0)\overline{x}_0(0) = P(0)(x^0 - \Pi_0 x(0))$$

has a unique solution on the segment $[0,T]$.

Substituting expansion (3) into (1),(2) and equating terms of the same order of ε, separately depending on t and τ, we get as in [1] equalities for terms of series (3). Decomposing them with the help of the orthogonal projectors $P(t)$ and $Q(t)$ we obtain the next assertion.

Theorem 1. *Under assumptions 1-4 the asymptotic solution of problem (1),(2) in form (3) can be constructed with the help of orthogonal projectors onto* $ker A(t)$ *and* $ker A(t)'$. *The order of finding asymptotics terms is following:* $(I-P(t))\overline{x}_j(t)$, $(I-P(0))\Pi_j x(\tau)$, $P(0)\Pi_j x(\tau)$, $P(t)\overline{x}_j(t)$, $j \geqslant 0$.

In particular, for finding the zero order approximation we have the following relations $(I-P(t))\overline{x}_0(t) = 0$, $\frac{d(I-P(0))\Pi_0 x(\tau)}{d\tau} = (I-P(0))A(0)(I-P(0))\Pi_0 x(\tau)$, $(I-P(0))\Pi_0 x(0) = (I-P(0))x^0$, $P(0)\Pi_0 x(\tau) = -\int_\tau^{+\infty} P(0)A(0)(I-P(0))\Pi_0 x(s)\,ds$. The function $P(t)\overline{x}_0(t)$ is determined with the help of equalities from condition 4.

References

1. *Butuzov V.F., Vasil'eva A.B.* Differential and difference systems of equations with a small parameter in the case when the unperturbed (degenerate) system is situated on the spectrum // Differ. Uravn., **6**(4) (1970), 650–664 (in Russian).

2. *Vasil'eva A.B, Butuzov V.F.* Singularly Perturbed Equations in Critical Cases. — Moscow: Moscow Univ., 1978 (in Russian).

3. *Vasil'eva A.B, Butuzov V.F, Kalachev L.V.* The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. — SIAM: Philadelphia, 1995.

4. *Kurina G.A., Hoai N.T.* Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // AIP Conference Proceedings. Int Conf Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018). **1**997 (2018), 020073-1–020073-7 (430–436).

THE PERIODIC SOLUTIONS WITH AN INTERIOR LAYER OF BURGERS TYPE EQUATIONS WITH MODULAR ADVECTION: ASYMPTOTIC APPROXIMATION AND ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF SOME INVERSE COEFFICIENT PROBLEMS

N. Nefedov

nefedov@phys.msu.ru

UDC 517.9

We consider a new class of singularly perturbed parabolic periodic boundary value problems for reaction-advection-diffusion equations: Burgers type equations with modular advection. We construct the interior layer type formal asymptotics and prove the existence of a periodic solution with an interior layer. The accuracy of its asymptotics and asymptotic stability of this solution is also established.

Keywords: singularly perturbed parabolic periodic problems, Burgers type equations, exponential asymptotic stability, lower and upper solutions
MSC: 35K20.

This work is supported by Russian Science Foundation [grant number 18-11-00042].

Nikolay Nefedov, Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Currently, there is a growing interest in the reaction-diffusion-advection equations with the so-called modular nonlinearity or modular advection. This is due to interesting applications of such mathematical models. The details of derivation of Burgers equation with modular nonlinearity one can find in [1]. Such problems are typical for numerous applications of nonlinear wave theory where they describes modular waves propagating in a non-dispersive medium (see [2], [1], [3] and references therein). The present work extends these models to a new class of mathematical and applied problems and provide rigorous mathematical results in the study of such problems. We consider the singularly perturbed periodic boundary value problem

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial|u|}{\partial x}-B(u,x,t)=0$$

$$\text{for}\quad (x,t)\in\mathcal{D}:=\{(x,t)\in R^2: -1<x<1, t\in R\},$$
$$u(-1,t,\varepsilon)=u^{(-)}(t),\quad u(1,t,\varepsilon)=u^{(+)}(t)\quad\text{for}\quad t\in R,$$
$$u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon)\quad\text{for}\quad t\in R,\quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{1}$$

where ε is a small parameter. The functions B, $u^{(-)}$ and $u^{(+)}$ are sufficiently smooth and T-periodic in t. The equation in (1) has so-called modular nonlinearity or modular advection.

Define the domains $D_T := (t,x) \in (R] \times (-1;1)$, $D_T^{(-)} := (t,x) \in (R] \times (-1;x^*)$, $D_T^{(+)} := (t,x) \in (R] \times (x^*;1)$, where $x^* = x^*(t)$ is a T-periodic function, $-1 < x^*(t) < 1$, $t \in R$.

Definitin.

The periodic function $u(x,t,\varepsilon) \in C\left(\overline{D}_T\right) \cap C^1(D_T) \cap C^{1,2}\left(D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}\right)$ is called a solution to the problem for (1), if it satisfies the equation (1) in each of the $D_T^{(\mp)}$, as well as the boundary conditions.

We assume

(A_0). *B, $u^{(-)}$ and $u^{(+)}$ are sufficiently smooth and T-periodic in t. Suppose also that $u^{(-)}(t) < 0, \quad u^{(+)}(t) > 0 \quad$ for $\quad t \in R$.*

If we put $\varepsilon = 0$ in equation (1) we get the so-called degenerate equation

$$\frac{\partial|u|}{\partial x}+B(u,x,t)=0, \tag{2}$$

where t has to be considered as a parameter. Equation (2) is studied with one of the following initial conditions from problem (1)

$$u(-1,t)=u^{(-)}(t)\quad\text{for}\quad t\in R, \tag{3}$$

$$u(1,t)=u^{(+)}(t)\quad\text{for}\quad t\in R. \tag{4}$$

Concerning these initial value problems we assume

(A_1). *The problems (2), (3) and (2), (4) have the solutions $u = \varphi^{(-)}(x,t)$ and $u = \varphi^{(+)}(x,t)$, respectively, which are defined for $(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}$, are T-periodic in t and satisfy*

$$\varphi^{(-)}(x,t)<0<\varphi^{(+)}(x,t)\quad\textit{for}\quad (x,t)\in\overline{\mathcal{D}}.$$

To formulate the next assumptions we introduce the function $I(x,t)$ by

$$I(x,t):=\varphi^{(-)}(x,t)+\varphi^{(+)}(x,t),$$

and suppose

(A_2). *The equation $I(x,t) = 0$ has a smooth solution $x = x_0(t)$ which is T-periodic and obeys the conditions $-1 < x_0(t) < 1 \quad$ for $\quad t \in R$.*

(A_3). *The function* $x_0(t)$ *) satisfies the condition*

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x_0(t),t) < 0 \quad \text{for} \quad t \in R,$$

that is, $x_0(t)$ *is a simple root of the equation* $I(x,t) = 0$ *for all* $t \in R$.

Our main result is the following theorem.

Theorem 1. *Let the assumptions* (A_0)*–*(A_3) *be satisfied. Then, for sufficiently small* ε*, there exists a solution* $u(x,t,\epsilon)$ *of problem (1) such that for any small but fixed* δ *we have the limit relation*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x,t) & \text{for} \quad x \in [0, x_0(t) - \delta],\ t \in R, \\ \varphi^{(+)}(x,t) & \text{for} \quad x \in [x_0(t) + \delta, 1],\ t \in R. \end{cases}$$

We can give a more precise description of the solution with an interior layer by using proposed asymptotic approximation construction.

The constructed asymptotic can be used to get asymptotic solution of some inverse coefficient problems. In particular, we illustrate our approach by considering the problem (1) for the reaction term $B(u,x,t) = q(x)f(t)$ for some natural data of observations and a priori information.

References

1. *Hedberg C.M., Rudenko O.V.* Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium // Nonlinear Dyn., **90** (2017), 2083-2091.

2. *Nefedov N.N., Rudenko O.V.* On front motion in a Burgers-type equation with quadratic and modular nonlinearity and nonlinear amplification // Dokl. Math., **97** (2018), 99-103.

3. *Rudenko O.V.* Equation admitting linearization and describing waves in dissipative media with modular, quadratic and quadratically cubic nonlinearities// Dokl. Math., **94** (2016), 703-707.

SPECTRAL PROBLEMS FOR ELLIPTIC OPERATORS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

V.S. Serov

vserov@cc.oulu.fi

UDC 517.518

Some classical (spectral direct and spectral inverse) problems for elliptic differential operator with singular coefficients are considered. The Green’s function approach and the estimates for the normalised eigenfunctions played the crucial role in this work.

Keywords: elliptic operators, spectral expansions, inverse spectral problem

Valery S. Serov (University of Oulu, Oulu, Finland)

This work deals with the spectral problems (direct and inverse) for elliptic differential operators with singular coefficients. We consider on the smooth bounded domain $\Omega \subset R^n, n \geqslant 1$, the differential operators of order $2m$

$$H_{2m}(x,\partial) := (-\Delta)^m + \sum_{|\alpha|+|\beta|<2m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)\partial^\beta),$$

where $|\alpha|, |\beta| \leqslant m$, $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\alpha\beta}} \in L^p(\Omega)$ with

$$\begin{cases} \hfill p = \frac{n}{2m-|\alpha|-|\beta|}, \quad |\beta| > m - \frac{n}{2}, \\ \hfill p = \frac{2n}{2m-2|\alpha|+n}, \quad |\alpha| > m - \frac{n}{2}, \quad |\beta| < m - \frac{n}{2}, \\ p > \frac{2n}{2m-2|\alpha|+n}, \quad |\alpha| = m - \frac{n}{2}, \quad |\beta| < m - \frac{n}{2} \quad or \quad |\beta| = m - \frac{n}{2}, \\ \hfill p = 1, \quad |\alpha| < m - \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Under these (quite weak) conditions for the coefficients of H_{2m} the Gårding's inequality is proved

$$(H_{2m}u, u)_{L^2(\Omega)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^m(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

where $0 < c_1 < 1, c_2 > 0$. It implies the existence of the Friedrichs self-adjoint extension with pure discrete spectrum $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ and corresponding normalized eigenfunctions $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ which form the o.n.b in $L^2(\Omega)$.

Assuming some additional conditions for the coefficients of H_{2m}, namely $a_{\alpha\beta} \in W_p^{|\alpha|}(\Omega)$ with $(|\alpha| \geqslant |\beta|)$

$$\begin{cases} p = \frac{n}{2m-|\beta|}, \quad |\beta| > 2m - \frac{n}{2}, \\ \quad p > 2, \quad |\beta| = 2m - \frac{n}{2}, \\ \quad p = 2, \quad |\alpha| < 2m - \frac{n}{2}, \end{cases}$$

the following result holds

Theorem 1. *Suppose that the coefficients of H_{2m} satisfy all above mentioned conditions. Then for any function $f \in W_{2,0}^{2m}(\Omega)$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f(x) - \sum_{\lambda_k<\lambda} f_k\phi_k(x)\|_{W_2^{2m}(\Omega)} = 0.$$

In particular, if $4m > n$ then

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda_k<\lambda} f_k\phi_k(x) = f(x)$$

holds uniformly in x up to the boundary of Ω.

The classical estimates of the Green's function allows to obtain the following classical (but for operators with singular coefficients) result.

Theorem 2. *Suppose that the coefficients $a_{\alpha\beta}(x)$ of H_{2m} satisfy the conditions $(|\alpha| \geqslant |\beta|)$*

$$a_{\alpha\beta}(x) \in W_p^{|\alpha|}(\Omega), \quad n < p \leqslant \infty, \quad |\beta| \geqslant 1,$$

$$a_\alpha(x) \in W_q^{|\alpha|}(\Omega), \quad \frac{n}{2m} < q \leqslant \infty, \quad 2m \leqslant n; \quad p = 1, \quad 2m > n.$$

Then for any function $f \in W_{2,0}^s(\Omega)$, $s > \frac{n}{2}$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda_k<\lambda} f_k\phi_k(x) = f(x)$$

holds uniformly in x up to the boundary of Ω.

Let H_2 be an operator on the finite interval (a, b) of the form

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + (q(x) - \overline{p'(x)})$$

where $q \in L^2(a, b)$ is real, $p \in L^r(a, b), p' \in L^2(a, b), 1 < r \leqslant \infty$, is complex. Then for any function $f \in W^s_{2,0}(a, b)$ with $s > \frac{1}{2}$ its Fourier series in eigenfunctions of the Dirichlet problem converges uniformly and absolutely on $[a, b]$.

Another part of this work concerns to the inverse spectral problems for H_4 and H_2 from above. Such problems can be formulated as follows: (1) do the Dirichlet-to-Neumann map for H_4 and H_2 uniquely determine the coefficients of these operators? (2) do the Dirichlet eigenvalues and the derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary of these operators uniquely determine their coefficients? It turned out that these two problems are very connected to each other. The first result is: the knowledge of the Dirichlet eigenvalues and the derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary up to some order uniquely determine the Dirichlet-to-Neumann map corresponding to these operators. The second result is: the knowledge of the Dirichlet-to-Neumann map uniquely determine the coefficients of H_4 and H_2. These results state an analogue of the Borg-Levinson theorem for the Schrödinger and for the magnetic Schrödinger operators. Rewriting H_4 in the equivalent form as $(n \geqslant 2)$

$$H_4 = \Delta^2 + i\nabla(\nabla(A\nabla)) + i\nabla(A\Delta) - \nabla(F\nabla) - 2iG\nabla - i\nabla G + V$$

with vector-valued functions A and G, and with scalar functions F and V, we assume now that all these coefficients are real-valued and satisfy the following quite general conditions:

$$A(x) \in W^3_p(\Omega), \quad F(x) \in W^2_p(\Omega), \quad G(x) \in W^1_p(\Omega),$$
$$V(x) \in L_p(\Omega), \quad p > \frac{n}{2}, \quad n \geqslant 2$$

with the same value of p.

The Dirichlet-to-Neumann map Λ_λ, which is defined as

$$\Lambda_\lambda\{f_0, f_1\}(x) := \{\partial_\nu(\Delta u)(x), -\Delta u(x)\}, \quad x \in \partial\Omega,$$

plays the crucial role in our considerations.

Theorem 3. *Under the conditions for the coefficients and under the following conditions: for each $k = 1, 2, ...$ and for $x \in \partial\Omega$*

$$\lambda_k(A_1, F_1, G_1, V_1) = \lambda_k(F_2, G_2, V_2),$$

$$\partial_\nu(A_1\nabla\phi_k(x; A_1, F_1, G_1, V_1)) = \partial_\nu(A_2\nabla\phi_k(x; A_2, F_2, G_2, V_2)),$$
$$\Delta\phi_k(x; A_1, F_1, G_1, V_1) = \Delta\phi_k(x; A_2, F_2, G_2, V_2).$$
$$\partial_\nu\Delta\phi_k(x; A_1, F_1, G_1, V_1) = \partial_\nu\Delta\phi_k(x; A_2, F_2, G_2, V_2)$$

we have that for all λ big enough

$$\Lambda^{(1)}_\lambda\{f_0, f_1\} = \Lambda^{(2)}_\lambda\{f_0, f_1\}.$$

The next theorem states the main result of the inverse spectral problem for operator H_4.

Theorem 4. *If $A_j = 0$, $F_j \in W^2_\infty(\Omega)$, $G_j \in W^1_\infty(\Omega)$ and $V_j \in L^\infty(\Omega)$, and for each $k = 1, 2, ...$ and $x \in \partial\Omega$*

$$\lambda_k(F_1, G_1, V_1) = \lambda_k(F_2, G_2, V_2),$$

$$\Delta\phi_k(x; F_1, G_1, V_1) = \Delta\phi_k(x; F_2, G_2, V_2),$$
$$\partial_\nu \Delta\phi_k(x; F_1, G_1, V_1) = \partial_\nu \Delta\phi_k(x; F_2, G_2, V_2),$$

then

$$F_1(x) = F_2(x), \quad G_1(x) = G_2(x), \quad V_1(x) = V_2(x)$$

a.e. in Ω.

References

1. *Serov V.S.* Borg-Levinson theorem for magnetic Schrödinger operator // Bull. Greek Math. Soc., **57** (2010), 321-332.

2. *Serov V.S.* Borg-Levinson theorem for perturbations of the biharmonic operator // Inverse Problems, **32** (2016), 045002 (19 PP).

3. *Serov V.S.* On some inverse spectral problems for an arbitrary perturbation of the biharmonic operator with singular coefficients //Programnye produkty i sistemy (Software & Systems), **106**:2 (2014), 192-198.

A POSTERIORI ERROR ESTIMATION FOR SOLUTIONS OF ILL- POSED PROBLEMS

A.G. Yagola

yagola@mail.physics.msu.ru

UDC 519.6

We will describe three approaches for constructing error estimates for solutions of ill-posed problems and also their practical applications.

Keywords: inverse problems, ill-posed problems, error estimation
MSC: 97N40, 45Q05

In order to calculate a priori or a posteriori error estimates for solutions of an ill-posed operator equation with an injective operator we need to describe a set of approximate solutions that contains an exact solution. After that we have to calculate a diameter of this set or maximal distance from a fixed approximate solution to any element of this set.

We will describe three approaches for constructing error estimates and also their practical applications.

1) Error estimates for quasisolutions on a given compact set [1, 2]. This method can be generalized for inverse problems on Banach lattices [3].

2) A posteriori error estimates in the method of extending compacts [2, 4]. This method can be generalized for nonlinear ill-posed problems [5]. Using the Lagrange principle optimal a posteriori error estimates can be constructed [6, 7].

3) Extra-optimal regularizing algorithms proposed by A.S. Leonov [8].

References

1. *Yagola A., Titarenko V.* Using a priori information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications // Inverse Probl. in Sci. and Eng., **15** (2007), 3–17.

This work is supported by RFBR (no. 17-01-00159).

Anatoly Yagola, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

2. *Titarenko V., Yagola A.* Error estimation for ill-posed problems on piecewise convex functions and sourcewise represented sets // J. Inverse Ill-Posed Probl., **16** (2008), 625–638.

3. *Korolev Y., Yagola A.* Making use of a partial order in solving inverse problems // inv. Probl., **29** (2013), doi:10.1088/0266-5611/29/9/095012.

4. *Dorofeev K.Y., Titarenko V.N., Yagola A.G.* Algorithms for constructing a posteriori errors of solutions to ill-posed problems // Comp. Math. Math. Phys., **43** (2003), 12–25.

5. *Dorofeev K.Y., Yagola A.G.* The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Probl., **12** (2004), 627–636.

6. *Bayev A.V. Yagola A.G.* Optimal recovery in problems of solving linear integral equations with a priori information // J. Inverse Ill-Posed Probl., **15** (2007), 569–586.

7. *Zhang Y, Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Using Lagrange principle for solving two-dimensional integral equation with a positive kernel // Inverse Probl. in Sci. and Eng., **23** (2015), 465–475.

8. *Leonov A.S* Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Probl., **20** (2012), 637–665.

Указатель авторов

Contemporary problems of mathematics and mechanics. Proceedings of the conference dedicated to the 80th anniversary of academician V. A. Sadovnichy. – Moscow : MAKS Press, 2019.

ISBN 978-5-317-06133-3 e-ISBN 978-5-317-06111-1

Volume I. – 436 p.

ISBN 978-5-317-06134-0

The book is composed of short notes, which present the results of the participants of the international conference dedicated to the 80th anniversary of academician V.A. Sadovnichy. It presents 5 areas of mathematics and mechanics, in which V.A. Sadovnichy worked most actively. These areas coincide with the names of the sections in which the conference was held.

1. Operator theory and functional analysis.
2. Dierential equation.
3. Function theory and computational mathematics.
4. Geometry and mathematical physics.
5. Mechanics and mathematical modeling.

The book consists of 2 volumes. The irst volume contains notes related to sections 1–2, the second volume – notes presented in sections 3–5. The results of the notes are presented in author's edition. The book is intended for teachers, researchers and graduate students and aims to get acquaintance with the current state of research carried out in Russia and abroad in these areas.

Keywords: operator theory, spectral theory, dierential equations, dierential geometry, function theory, mathematical physics, mechanics, mathematical simulation.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

*Материалы международной конференции,
посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего*

Том I

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Обложка: *А. М. Павлов*

Оригинал макет подготовлен издательским отделом
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Подписано в печать 29.04.2019 г.
Формат 70x100 1/16. Усл.печ.л.35,43.
Тираж 200 экз. Изд. № 098

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495) 939–3890/91. Тел./Факс 8(495) 939–3891

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.