Начала теории Галуа: разрешимость алгебраических уравнений в радикалах

Андрей Леонидович Канунников, к. ф.-м. н., мехмат МГУ

МИАН им. В. А. Стеклова, пятница (с 17.02.17), 18.00, ауд. 430

Классическая теория Галуа преобразила средневековую алгебру — науку о решении уравнений — в современную. Занимаясь проблемой разрешимости уравнений в радикалах, французский математик Эварист Галуа (1811–1832) заложил основы теории групп и полей.

Итальянские математики XVI века научились решать уравнения 3-й и 4-й степени. Их результаты привели к открытию комплексных чисел и ускорили создание современной алгебраической символики.

Общих формул для уравнений 5-й степени никто найти не мог, и лишь в начале XIX века Нильс Абель доказал, что общие уравнения степени $\geqslant 5$ неразрешимы в радикалах; доказательство Паоло Руффини 1799 года содержало пробел. (Отметим, что в те же годы Гаусс разными способами доказал „основную теорему алгебры“.) Руффини и Абель опирались на идеи Луи Лагранжа, который первый систематически исследовал перестановки корней уравнений и разработал теорию групп перестановок. Созданный Лагранжем метод резольвент решения уравнений универсальным не был, зато вплотную приблизил задачу к окончательному решению. Критерий разрешимости уравнений в радикалах установил Галуа, введя понятия группы, нормальной подгруппы, нормального расширения и разрешимой группы. Позднее идеи Галуа развивались и обобщались в разных направлениях и не только алгебраических.

Мы познакомим слушателей с основными понятиями и результатами классической теории Галуа. Изложение будет сопровождаться большим числом примеров и задач. Курс рассчитан на слушателей, владеющих алгеброй в объёме первого семестра математических факультетов.

Программа курса

1. Решение уравнений третьей и четвёртой степеней.

2. Метод резольвент Лагранжа решения уравнений. Теоремы Лагранжа.

3. Теорема Абеля–Руффини о неразрешимости общего уравнения степени $\geqslant 5$.

4. Теорема Кронекера о неразрешимости одного класса уравнений над $\mathbb{Z}$.

5. Построение правильных многоугольников. Периоды Гаусса. Критерий разрешимости в квадратных радикалах.

6. Группа Галуа. Соответствия Галуа. Основная теорема теории Галуа.

7. Группа Галуа двучлена. Метациклическая группа.

8. Группы Галуа многочленов степени $\leqslant 4$ и разрешимых многочленов степени 5.

9. Циклические расширения. Теорема Артина–Шрайера.

10. Критерий разрешимости в радикалах в характеристике 0 (разрешимость группы Галуа).

11. Новые доказательства теорем Абеля–Руффини и Кронекера. Многочлены над $\mathbb{Z}$ с группой Галуа S_n.

12. Критерий Абеля–Галуа разрешимости неприводимого уравнения простой степени.

13. Многочлены с наперёд заданной конечной абелевой группой Галуа. Теорема Кронекера–Вебера: всякое конечное абелево расширение поля $\mathbb{Q}$ вкладывается в круговое.

14. Вычисление группы Галуа с помощью резольвентных многочленов.

15. Теория Галуа конечных полей. Вычисление группы Галуа с помощью редукции по простому модулю.