**Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений
Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики"
Лаборатория комплексного анализа и дифференциальных
уравнений Сибирского федерального университета
Филиал Северного (Арктического) федерального
университета им. М. В. Ломоносова в г. Коряжме
Архангельской области**

VI школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России

**г. Коряжма Архангельской области,
Филиал С(А)ФУ им. М. В. Ломоносова,
25–30 августа 2017 года**

Оргкомитет школы-конференции

А. Г. Сергеев, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник МИАН (председатель оргкомитета);

И. В. Кузнецова, кандидат пед. наук, директор Филиала С(А)ФУ в г. Коряжме Архангельской области (сопредседатель оргкомитета);

Вик. С. Куликов, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник МИАН;

Д. В. Осипов, доктор физ.-мат. наук, научный сотрудник НИУ ВШЭ, ведущий научный сотрудник МИАН, профессор НИТУ «МИСИС»;

А. К. Цих, доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой теории функций СФУ;

С. А. Тихомиров, кандидат физ.-мат. наук, доцент ЯГПУ;

А. С. Трепалин, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник НИУ ВШЭ и ИППИ РАН;

А. В. Щуплев, кандидат физ.-мат. наук, заведующий лабораторией комплексного анализа и дифференциальных уравнений СФУ

Конференция проводится при поддержке РФФИ (грант № 17-31-10213 мол_г), Лаборатории комплексного анализа и дифференциальных уравнений Сибирского Федерального Университета, а также на средства субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации «5-100», выделенной Лаборатории алгебраической геометрии и её приложений Национального Исследовательского Университета "Высшая Школа Экономики".

Оглавление

ЧАСТЬ I. ЛЕКЦИИ

НЕАРХИМЕДОВО ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

В. В. Батырев (Тюбинген)
batyrev@math.uni – tuebingen.de

Хорошо известно, что аналог классического интегрирования дифференциальных форм на вещественных и комплексных многообразиях существует также над неархимедовыми полями p-адических чисел. Это интегрирование было использовано А. Вейлем для построения адельных мер Тамагавы на алгебраических группах, определенных над полями алгебраических чисел [We82]. Как и в случае классического интегрирования мер на вещественных многообразиях X, множество p-адических точек любого собственного подмногообразия $Z \subset X$ имеет меру нуль. Поэтому для вычисления неархимедовых интегралов достаточно интегрировать лишь только по p-адическим точкам в подходящих открытых по Зарисскому подмножествах $U \subset X$. Это обстоятельство даёт возможность заменить вычисление интеграла по p-адическим точкам многообразия X на интеграл по p-адическим точкам другого многообразия X', которое бирационально X. Используя идеи Вейля, с помощью p-адического интегрирования удаётся доказать, что два бирационально изоморфных n-мерных многообразия Калаби-Яу X и X' должны иметь одинаковые числа Бетти [Ba99].

Более глубокие приложения неархимедова интегрирования удаётся получить, если, следуя предложению М. Концевича [Ko95], заменить поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ на поле формальных степенных рядов $\mathbb{C}((t))$ с комплексными коэффициентами. В этом случае значения неархимедовых интегралов будут уже приниматься в некотором коммутативном кольце R снабженном топологией относительно некоторой естественной фильтрации. Наименьшим подходящим для этого кольцом R будет пополнение кольца рациональных функций на проективной прямой над $\mathbb{Z}$ относительно дискретного нормирования, которое соответствует бесконечно удалённой точке $\infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, а наибольшим - пополнение мотивного кольца Гротендика $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} := K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ классов алгебраических многообразий над полем $\mathbb{C}$. По этой причине соответствующее неархимедово интегрирование называют ещё *мотивным интегрированием* [Ve99, Lo00].

Одним из важных приложений неархимедова интегрирования на алгебраических многообразиях является определение новых инвариантов особых алгебраических многообразий, которые естественным образом возникают при изучении зеркальной симметрии для многообразий Калаби-Яу [Ba98]. Зеркальная симметрия была обнаружена в конце 80-х годов теоретическими физикам в связи с теорией струн. С точки зрения геометрии теорию струн интересует уравнения движения на многообразиях не нульмерных объектов - материальных точек, а уравнения движения одномерных объектов - струн. Аналог подобного подхода в алгебраической геометрии, предложенный Концевичем [Ko95], состоит в рассмотрении множества решений алгебраических уравнений не в поле $\mathbb{C}$, а в поле частных одномерного локального кольца формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[t]]$.

Классы особенностей алгебраических многообразий и пар многообразий, которые обеспечивают сходимость неархимедовых интегралов, очень тесно связаны с классами особенностей, которые естественным образом возникают в теории Мори минимальных бирациональные моделей алгебраических многообразий. По этой причине "струнная" точка зрения из теоретической физики даёт возможность получать новые математические результаты в классических темах бирациональной алгебраической геометрии.

Цель лекций - объяснить основные идеи мотивного интегрирования и проиллюстрировать их на примерах. Основными примерами будут служить торические многообразия и многообразия с тороидальными особенностями. Это связано с тем, что струнные инварианты торические многообразий, полученные посредством неархимедова интегрирования, могут быть вычислены через чисто комбинаторные инварианты, связанные с подсчётом целых точек решетки в теории выпуклых многогранников и конусов в конечномерных пространствах.

Литература

[Ba98] V. V. Batyrev, *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities*, Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ (1998), 1–31.

[Ba99] V. V. Batyrev, *Birational Calabi–Yau n-folds have equal Betti numbers*, in: New Trends in Algebraic Geometry, Warwick, 1996, 1999, pp. 1–11.

[Ko95] M. Kontsevich, *Grothendieck ring of motives and related rings*, Talk in IHES, 1995.

[Lo00] E. Looijenga, *Motivic measures*. Astérisque, (276): 267–297, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.

[Ve99] W. Veys. *Arc spaces, motivic integration and stringy invariants*. In Singularity theory and its applications, volume 43 of Adv. Stud. Pure Math., pages 529–572. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006

[We82] A. Weil, *Adeles and Algebraic groups*, Progress in Mathematics Volume 23, 1982.

ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ, ПОРОЖДЁННЫЕ КОМПЛЕКСНЫМИ ОТРАЖЕНИЯМИ

В. Л. Попов[1] **(Москва)**
popovvl@mi.ras.ru

Аффинная изометрия комплексного эрмитова аффинного пространства E называется комплексным отражением, если ее порядок конечен, а коразмерость множества неподвижных точек (зеркала отражения) равна 1. Лекции будут посвящены группам G преобразований пространства E, которые порождены отражениями и дискретны (последнее означает, что G-орбита каждой точки из E является дискретным подмножеством в E). Например, если $E = \mathbf{C}^1$, то циклическая группа порядка n, состоящая из всех поворотов вокруг нуля на углы, кратные $2\pi/n$, является конечной такой группой; она порождена одним комплексным отражением. В этом примере E/G— некомпактное алгебраическое многообразие (изоморфное аффинной прямой $\mathbf{C}^1$). Существуют и бесконечные дискретные группы, порожденные комплексными отражениями: например, таковой является группа, порожденная поворотами на углы, кратные $2\pi/3$, вокруг точек решетки $\mathbf{Z} + e^{2\pi i/3}\mathbf{Z}$ равносторонних треугольников в $E = \mathbf{C}^1$. Для неё фактор E/G является компактным алгебраическим многообразием (изоморфным проективной прямой $\mathbf{P}^1$). В лекциях будет рассказано о классификации дискретных групп, порожденных комплексными отражениями, и о появляющихся в контексте этой теории различных замечательных объектах, в частности, инвариантных решетках и комплексных пространствах E/G (которые на самом деле всегда являются алгебраическими многообразиями).

Литература

[C55] C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, Ameer. J. Math., 1955, 77, 778–782

[P82] V. L. Popov, Discrete Complex Reflection Groups, Lectures delivered at the Mathematical Institute, Rejksuniversiteit

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15–01-002158).

Utrecht, October 1980, Communications of the Mathematical Institute Reiksuniversiteit Utrecht, 15–1982, 89 pp.

[ST54] G. C. Shephard, J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, Canad. J. Math., 1954, 6, 274–304

ГЕОМЕТРИЯ ТВИСТОРОВ И УРАВНЕНИЯ ДУАЛЬНОСТИ

А. Г. Сергеев (Москва)
sergeev@mi.ras.ru

Главной темой лекций является изложение основ теории твисторов и их приложений к решению уравнений калибровочной теории поля, таких как автодуальные уравнения Янга–Миллса.

Первая часть курса, посвященная теории твисторов, открывается построением твисторной модели пространства Минковского. Затем мы переходим к исследованию твисторного соответствия, сопоставляющего геометрическим объектам в пространстве Минковского их образы в пространстве твисторов. Отдельный интерес представляет клейнова интерпретация пространства Минковского, при которой это пространство отождествляется с квадрикой в 5-мерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^5$.

Во второй части курса теория твисторов применяется к исследованию уравнений дуальности. В качестве первого примера мы рассматриваем уравнения дуальности Янга–Миллса на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ и их решения, называемые инстантонами. Теорема Атьи–Уорда дает твисторную интерпретацию инстантонов, а основанная на ней ADHM-конструкция, предложенная Атьей, Дринфельдом, Хитчином и Маниным, позволяет полностью описать пространство модулей инстантонов. Следующим примером служат уравнения монополей в $\mathbb{R}^3$, называемые иначе уравнениями Богомольного. Их твисторная интерпретация была предложена Намом. Наконец, мы обращаемся к двумерным моделям, которые представлены уравнениями Янга–Миллса–Хиггса в $\mathbb{R}^2$ и уравнениями Хитчина на римановых поверхностях. Пространство модулей решений автодуальных уравнений Янга–Миллса–Хиггса полностью описывается теоремой Таубса.

Все указанные уравнения дуальности имеют глубокий физический смысл, а их исследование представляет несомненный интерес как с точки зрения физики, так и математики.

ГРУППЫ БИРАЦИОНАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ

К. А. Шрамов (Москва, НИУ ВШЭ и Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
costya.shramov@gmail.com

Мы обсудим подходы к следующему фундаментальному (и в чём-то даже философскому) вопросу. Пусть дано поле $\Bbbk$ нулевой характеристики и его конечно порождённое расширение $\mathbb{K}$.

Вопрос 1. Что можно сказать про группу автоморфизмов поля $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$?

Если расширение $\mathbb{K}/\Bbbk$ не просто конечно порождено, а конечно, то на этот вопрос отвечает теория Галуа. Однако если расширение $\mathbb{K}/\Bbbk$ бесконечно, то, с одной стороны, методов теории Галуа для изучения группы автоморфизмов не хватает, а с другой стороны поблизости появляется содержательная геометрия.

Пример 2. Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие, определённое над $\Bbbk$. Тогда поле рациональных функций $\mathbb{K} = \Bbbk(X)$ является конечно порождённым расширением поля $\Bbbk$.

Очевидно, что не всякое конечно порождённое расширение поля $\Bbbk$ получается как в примере 2. А именно, чтобы поле $\mathbb{K}$ получалось таким образом, необходимо и достаточно, чтобы $\Bbbk$ было алгебраически замкнуто в $\mathbb{K}$. С другой стороны, для алгебраического замыкания $\bar{\Bbbk}_{\mathbb{K}}$ поля $\Bbbk$ в $\mathbb{K}$ группа автоморфизмов $\bar{\Bbbk}_{\mathbb{K}}$ над $\Bbbk$ может быть достаточно подробно изучена методами теории Галуа; в частности, эта група всегда конечна. Поэтому наиболее содержательная часть вопроса 1 относится к группе автоморфизмов поля $\mathbb{K}$ над $\bar{\Bbbk}_{\mathbb{K}}$. Другими словами, можно с самого начала предполагать, что поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто в $\mathbb{K}$, и что поле $\mathbb{K}$ строится по некоторому неприводимому многообразию X как в примере 2. В этом случае группа автоморфизмов поля $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$ изоморфна группе бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ многообразия X (в частности, группа $\mathrm{Bir}(X)$ не зависит от выбора модели X для поля $\mathbb{K}$). Для изучения этой группы можно применить богатый арсенал средств из алгебраической геометрии.

Среди групп бирациональных автоморфизмов по историческим причинам важнейшее место занимают так называемые группы Кремоны, то есть группы бирациональных автоморфизмов проективных пространств. Очевидно, что группа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1)$ совпадает со своей подгруппой $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$, поэтому от неё трудно ожидать особенно интригующих свойств. При $n \geqslant 2$ группы $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ устроены значительно сложнее. В частности, они бесконечномерны (в любом разумном смысле). Тем не менее, про группу $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ известно довольно много.

Теорема 1 (М. Нётер и многие другие)**.** *Если поле* $\Bbbk$ *алгебраически замкнуто, то группа* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ *порождена своей подгруппой* $\mathrm{PGL}_3(\Bbbk)$ *и бирациональным преобразованием* $\sigma\colon (x:y:z) \mapsto (yz:xz:xy)$.

Известны также образующие для группы $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})$, описанные Дж. Бланком и Ф. Мангольтом. На группах бирациональных автоморфизмов можно ввести естественную топологию (относительно которой, впрочем, они как правило не являются топологическими группами). В случае алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$ можно доказать, что в группе $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ нет замкнутых нормальных подгрупп; это было проделано Дж. Бланком. С другой стороны, С. Канта и С. Лами доказали, что в группе $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ существуют незамкнутые нормальные подгруппы. Классификация конечных подгрупп в группе $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ была получена И. Долгачёвым и В. Исковских. Для группы $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ в этом направлении имеются только эпизодические классификационные результаты, в основном полученные Ю. Прохоровым.

РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ

Е. В. Щепин (Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
scepin@mi.ras.ru

Под *рядом экспонент* в лекциях подразумевается так называемый *обобщенный ряд Дирихле*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}, \qquad (1)$$

где все показатели λ_k вещественны и монотонно возрастают к бесконечности. Теория обобщенных рядов Дирихле возникла в начале двадцатого века как естественное обобщение теории обыкновенных рядов Дирихле, то есть рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$, играющих фундаментальную роль в теории чисел.

Значительный вклад в теорию обобщенных рядов Дирихле внесли такие математики, как Э. Ландау, Х. Бор, М.Рисс. Важнейшим результатом этой теории является теорема об умножении обобщенных рядов Дирихле, которая, в частности, утверждает, что формальное произведение обобщенных рядов Дирихле может сходится только к произведению сумм сомножителей, если последние определены. В полной общности теорема умножения была доказана М. Риссом, на основе разработанной им теории "типических средних" впоследствии получивших название *средние Рисса*.

В последнее время теория обобщенных рядов Дирихле, и прежде всего, теорема об умножении рядов Дирихле, получила приложение к теории суммирования неупорядоченных массивов [4]. Под числовым массивом понимается индексированная произвольным множеством совокупность комплексных чисел. Жадной суммой числового массива $\{a_s\}_{s\in S}$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|a_s|>\varepsilon} a_s \qquad (2)$$

Прямым произведением массивов $\{a_s\}_{s\in S}$ и $\{b_t\}_{t\in T}$ называется массив попарных произведений $\{a_s b_t\}_{(s,t)\in S\times T}$. Основным результатом лекций будет доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Если массивы $\{a_s\}_{s\in S}$, $\{b_t\}_{t\in T}$ и их прямое произведение $\{a_s b_t\}_{(s,t)\in S\times T}$ жадно суммируемы, то жадная сумма их прямого произведения равна произведению их жадных сумм.*

На лекциях будет изложена вся необходимая для доказательства этой теоремы теория обобщенных рядов Дирихле.

Литература

[1] E. Landau, *Über die Multiplikation Dirichlet'scher Reihen"*, Rendiconti di Palermo, vol.24, 1907, p.p. 81-160

[2] H. Bohr, *Über die Summabilität Dirichletscher Reihen"*, Göttinger, 1909, p.p. 247-262

[3] G. H. Hardy, M. Riesz *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics № 18 Cambridge University Press, 1915

[4] Е. В. Щепин *Суммирование неупорядоченных массивов*, Функциональный анализ и его приложения. (в печати)

ЧАСТЬ II. ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Д. В. Артамонов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
artamonov.dmitri@gmail.com

В 1950-ом году И.М. Гельфанд и М.Л. Цетлин опубликовали в ДАН СССР короткую заметку, в которой привели индексацию базисных векторов в представлении $\mathfrak{gl}_n$ и дали формулы для действия генераторов $E_{i,j}$ в этом базисе. Эта заметка не содержала доказательства и не была переведена на английский язык. Тем не менее, она привлекла большое внимание прежде всего специалистов по математической физике. Так в 1963-ем году вышла работа Бидерхарна и Бэрда [BB], в которой они приводили вывод формул Гельфанда и Цетлина. В этой работе использовалась реализация представления с помощью операторов рождения и уничтожения, которая на более математическом языке есть реализация представления на функциях на группе GL_n.

Сама работа Бидерхарна и Бэрда содержит много оригинальных идей. В частности, в ней для $n = 3$ приведена замечательная формула для функции на группе GL_3, соответствующая диаграмме Гельфанда–Цетлина. Эта функция очень просто выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса $F_{2,1}$. При этом формулы для действия генераторов довольно легко выводятся из соотношений, которым удовлетворяет эта функция!

В докладе будет рассказано об обобщениях этого подхода на произвольное n. Оказывается, что функция, соответствующая диаграмме в случае $\mathfrak{gl}_n$, выражается через гипергеометрическую функцию Гельфанда–Капранова–Зелевинского. Эта функция связана с очень естественным действием тора на пространстве функций на группе[2]. Будет обсуждено, как формулы для действия генераторов получа-

[2]Это действие, к сожалению, отличается от того, действия, что лежит в основе интегрируемой системы ГКЗ

ются системы уравнений ГКЗ.

Литература

[BB] G. E. Biedenharn, L.C. Baid. On the representations of semisimple Lie Groups II,F J. Math. Phys., V. 4, N 12, 1963, 1449–1466.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ И СВЯЗЬ С ПРИКЛАДНЫМИ ВОПРОСАМИ

Е. А. Благовещенская[3] (Санкт-Петербург),
Д. В. Зуев (Санкт-Петербург),
И. В. Кузнецова (Коряжма),
С. А. Тихомиров (Ярославль)
kblag2002@yahoo.com, zuevdv@gmail.com,
i.kuznetsova2@narfu.ru, satikhomirov@mail.ru

Циклическая группа, являясь базовым понятием алгебры, одновременно играет большую роль в преподавании этой дисциплины, так как позволяет студентам (или учащимся школ, классов с углубленным изучением математики) получить первый опыт абстрактного мышления с возможностью практической реализации, см. [KuzZyabKorTikh]. К тому же, одним из средств алгебраического исследования является разложение сложных объектов на более простые, что хорошо иллюстрируется возможностью разложения циклической группы в прямую сумму циклических групп взаимно простых порядков.

Любой эндоморфизм циклической группы сужается до эндоморфизма отдельно взятого слагаемого и, таким образом, изучение свойств всего объекта сводится к независимому рассмотрению указанных подобъектов, что иллюстрирует возможность распараллеливания решаемых задач. Параллельные алгоритмы и вычисления широко используются в программировании и использовании многопроцессорных вычислительных систем, поэтому ознакомление с ними должно происходить на ранней стадии обучения, и желательно, в связи с понятиями фундаментальной математики для демонстрации естественности таких подходов.

В данной работе рассматриваются алгебраические структуры, определенная факторизация которых приводит к циклическим группам, и потому их прямые разложения базируются на разложениях циклических групп. Важным моментом является то, что, несмотря на однозначность с точностью до изоморфизма прямых разложений циклических групп, эти структуры обладают сравнительно редко встречающимся свойством неоднозначности прямых разложений. Поэтому знакомство с такой ситуацией расширяет математический кругозор обучающихся. Отметим, что по своему определению эти объекты чрезвычайно просты, так как являются аддитивными

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-01-00849)

подгруппами конечной прямой суммы групп, изоморфных группе рациональных чисел Q. К ним относятся так называемые почти вполне разложимые группы X с циклическим регуляторным фактором, содержащие вполне разложимую подгруппу A конечного индекса, так что X/A является циклической группой, см. [Blag]. Напомним, что вполне разложимая группа A по определению является прямой суммой подгупп группы Q, количество которых в этой сумме является рангом A и также X.

Этот класс групп входит в класс абелевых групп без кручения конечного ранга. О многообразии их прямых разложений свидетельствует следующая

Теорема 1. *Пусть $1 < n_1 < n_2 \ldots < n_s < n$ — натуральные числа. Для того, чтобы существовала абелева группа без кручения ранга n, допускающая разложения в прямую сумму n_1 неразложимых слагаемых, n_2 неразложимых слагаемых, ... n_s неразложимых слагаемых, необходимо и достаточно, чтобы $n_1 \geq \frac{n}{n-n_s+1}$.*

Среди практических приложений теории прямых разложений абелевых групп без кручения конечного ранга следует указать графическую интерпретацию различных разложений с помощью графов ярусно-параллельной формы, имеющих прямое отношение к алгоритмам параллельных вычислений, см. [BlagKun].

Литература

[Blag] Е. Благовещенская. Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. Сер.: Математика в политехническом университете. Санкт-Петербург, 2009.

[BlagKun] E. Blagoveshchenskaya, D. Kunetz. Graphs and algorithms in direct decomposition theory of torsion-free abelian groups. В книге: XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2016), 2016, С. 105.

[KuzZyabKorTikh] И. В. Кузнецова, Л. В. Зяблицева, С. Ю. Корабельщикова, С. А. Тихомиров. Алгебраические структуры и их приложения: учебное пособие/Сев. Федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: САФУ, 2015.

НОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д. А. Васильев, А. С. Тихомиров (Москва, НИУ ВШЭ)

Нахождение всех неприводимых компонент пространства модулей $B(n)$ стабильных векторных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n \geq 1$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ представляет собой трудную алгебро-геометрическую задачу уже при малых значениях n. Последнее достижение в этом направлении было получено в работе Ч.Алмейды, М.Жардима, А.Тихомирова и С.Тихомирова [Ch.Almeida, M.Jardim, A.Tikhomirov, S.Tikhomirov. New moduli components of rank 2 bundles on projective space. arXiv:1702.06520v1.math.AG, 21.02.2017]. В этой работе найдены все неприводимые компоненты пространства $B(5)$. Одна из этих компонент, имеющая размерность 37 и отличная от 37-мерной инстантонной компоненты $I(5)$ и 40-мерной компоненты Эйна пространства $B(5)$. (Здесь и ниже для $n \geq 1$ через $I(n)$ обозначается $(8n-3)$-мерная неприводимая компонента в $B(n)$, общее расслоение в которой является математическим инстантонным расслоением.) Она описывается следующим образом. Общее расслоение E из этой компоненты получается как когомологическое расслоение симплектической монады вида:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \xrightarrow{a} F \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{a^\vee} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \to 0, \quad (*)$$

где F - общее нуль-корреляционное расслоение (то есть инстантонное расслоение из $I(1)$) с $c_2 = 1$, а симплектическая структура на расслоении $F \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ складывается из канонической симплектической структуры на F и стандартной симплектической структуры на $2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$.

В настоящем докладе мы показываем, что подобная конструкция работает по крайней мере для $n = 6$ и 7, то есть позволяет получить новые компоненты пространств модулей $B(n),\ n = 6, 7$.

Как известно, $B(6)$ содержит неприводимую инстантонную компоненту $I(6)$ размерности 45 и еще по крайней мере одну неприводимую компоненту размерности ≥ 45, содержащую (возможно открытое) локально замкнутое подмножество $M(6) = \{[E] \in B(6) \mid E$ есть когомологическое расслоение монады $0 \to 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to 8\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \to 0$ – см. [R.Hartshorne, A.P.Rao. Spectra and monads of stable bundles. J. Math. Kyoto Univ. 31:3 (1991), 789–806,

Table 5.3, $c_2 = 6$, (2,i)]. Соответственно, $B(7)$ содержит по крайней мере 4 компоненты. Это: инстантонная компонента $I(7)$ размерности 53, две компоненты Эйна размерностей 65 и 55, соответственно, и компонента размерности ≥ 53, содержащая локально замкнутое подмножество $M(7) = \{[E] \in B(7) \mid E$ есть когомологическое расслоение монады $0 \to 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to 8\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \to 0\}$ размерности 52 – см. [loc. cit., Table 5.3, $c_2 = 7$, (2,i)]. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема.

(i) Существует отличная от инстантонной компоненты $I(6)$ *неприводимая компонента пространства* $B(6)$*, общее расслоение в которой получается как когомологическое расслоение симплектической монады (*), в которой* F *- общее инстантонное расслоение из* $I(2)$*. Эта компонента имеет размерность* 45*, ожидаемую по теории деформации и совпадает с замыканием вышеописанного множества* $M(6)$*.*

(ii) Существует неприводимая компонента пространства $B(7)$*, отличная отинстантонной компоненты* $I(7)$ *и компонент Эйна. Общее расслоение в этой компоненте получается как когомологическое расслоение симплектической монады (*), в которой* F *- общее инстантонное расслоение из* $I(3)$*. Эта компонента имеет размерность* 53*, ожидаемую по теории деформации, и содержит вышеописанное локально замкнутое подмножество* $M(7)$ *коразмерности* 1*.*

КОЭНО-МАКОЛЕЕВЫ МОДУЛИ НАД АЛГЕБРОЙ ПЛАНАРНЫХ КВАЗИ-ИНВАРИАНТОВ И СИСТЕМЫ КАЛОДЖЕРО-МОЗЕРА

А. Б. Жеглов[4] (Москва, МГУ)
azheglov@math.msu.su

Мой доклад (основанный на совместной работе с Игорем Бурбаном) посвящен алгебраическому анализу рациональных систем Калоджеро-Мозера на плоскости. Этот класс квантовых интегрируемых систем известен как суперинтегрируемый. Это означает, что оператор Шредингера с соответствующим рациональным потенциалом включается в большое семейство попарно коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных, так что пространство общих собственных функций одномерно в общей точке спектра.

С алгебро-геометрической точки зрения, всякая такая квантовая суперинтегрируемая система по существу определяется некоторыми алгебро-геометрическими данными: проективной спектральной поверхностью (определенной по алгебре планарных квази-инвариантов с естественной фильтрацией) и спектральным пучком (определенным некоторым модулем, про который известно, что он Коэно-Маколеев ранга один). Эти геометрические данные имеют очень специальные алгебро-геометрические свойства, наиболее важным из которых является сппециальная форма полинома Гильберта пучка. Спектральное многообразие оказывается рациональным, но очень особым (Коэно-Маколеевым, но не нормальным). Оказывается, что все Коэно-Маколеевы модули ранга один над алгеброй планарных квази-инвариантов могут быть явно описаны в терминах очень естественных модульных параметров, и это описание, в некотором смысле, очень похоже на описание обобщенного якобиана особой рациональной кривой. Спектральный модуль планарной системы Калождеро-Мозера при этом оказывается проективным.

В отличие от случая кривых, не каждый модуль Коэно-Маколея является спектральным модулем некоторой квантовой системы. Пространство модулей *спектральных* пучков устроено намного тоньше, тем не менее его структура указывает на существование интегрируемых *деформаций* систем Калоджеро-Мозера. В частности, я собираюсь рассказать как классификация модулей Коэно-Маколея вместе с алгебраическими методами обратной спектральной задачи поз-

[4]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 16-11-10069

воляют выписать некоторые новые деформации систем Калоджеро-Мозера в алгебре дифференциально-разностных операторов.

О ПРОГРАММЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТЕПЕННОГО МНОЖИТЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА МОНОМИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Т. В. Зыкова[5] (Красноярск, Сибирский федеральный университет)
zykovatv@mail.ru

Рассмотрим *каноническую приведенную* систему n полиномиальных уравнений:

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

В этом случае матрица ω – диагональная, состоящая из столбцов $\omega^{(i)} = (0, \ldots, m_i, \ldots, 0)$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \ldots, n$.

Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$ и пусть $N = \#\Lambda$ – число коэффициентов в системе (1). Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторное пространство $\mathbb{C}^\Lambda \cong \mathbb{C}_x^N$, в котором координаты точек $x = (x_\lambda)$ индексируются элементами $\lambda \in \Lambda$.

Составим матрицу

$$\Psi = \left(\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(n)}\right) = \left(\lambda^1, \ldots, \lambda^N\right),$$

столбцами которой являются векторы $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$ из показателей мономов системы (1). Имеется ввиду, что блоки $\Lambda^{(i)}$ нумеруются в соответствии с нумерацией уравнений системы (1), а нумерация столбцов внутри каждого из блоков произвольная, но фиксированная. Строки этой матрицы обозначим ψ_i, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\chi^{(i)}$ характеристические функции подмножеств $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$, отождествим $\chi^{(i)}$ с векторами, имеющими координаты $\left(\chi^{(i)}(\lambda)\right)_{\lambda \in \Lambda}$, $i = 1, \ldots, n$. Также будем рассматривать матрицу $\tilde{\Psi}$, строки которой есть векторы $\tilde{\psi}_i = \psi_i - m_i \chi^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим мономиальную функцию $\frac{1}{y^\mu(-x)} := \frac{1}{y_1^{\mu_1}(-x) \cdots y_n^{\mu_n}(-x)}$, $\mu_i > 0$, составленную из координат $y_j(-x)$ ветви решения системы уравнений (1), выделенной условиями

[5]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований № 15-31-20008-мол_а_вед

$y_i(0) = 1, i = 1, \ldots, n.$, для которой прямое преобразование Меллина, определено интегралом

$$M\left[\frac{1}{y^{\mu}(-x)}\right](z) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{1}{y^{\mu}(-x)} x^{z-I} dx, \tag{2}$$

где $x^{z-I} = x_1^{z_1-1} \cdots x_N^{z_N-1}$, $dx = dx_1 \cdots dx_N$.

Теорема 1 ([1]). *Преобразование Меллина, определенное интегралом (2), равно*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(i)}} \Gamma(z_\lambda)\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i}\left\langle \tilde{\psi}_i, z\right\rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i}\langle \psi_i, z\rangle + 1\right)} Q(z),$$

где $Q(z)$ – полином вида

$$\sum_{q=0}^{n} \sum_{|I|=q} \sum_{\tau\in\Lambda^I} z_\tau \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{\tau^{i_1}_{i_1}}{m_{i_1}}\right) & \cdots & -\frac{\tau^{i_1}_{i_q}}{m_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\tau^{i_q}_{i_1}}{m_{i_q}} & \cdots & \left(1 - \frac{\tau^{i_q}_{i_q}}{m_{i_q}}\right) \end{vmatrix} \prod_{i\notin I} \left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i}\left\langle \tilde{\psi}_i, z\right\rangle\right),$$

здесь I – упорядоченный набор $1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n$, $\tau = (\tau^{i_1}, \ldots, \tau^{i_q})$ – элемент произведения множеств $\Lambda^I = \Lambda^{(i_1)} \times \ldots \times \Lambda^{(i_q)}$.

Интеграл (2) сходится для всех z из области $U + i\mathbb{R}^N$, где U – это открытое множество

$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^N_+ : \mu_i + \left\langle \tilde{\psi}_i, u\right\rangle > 0,\, i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Проведена алгоритмизация полученных теоретических результатов и разработана программа на языке $C\sharp$ для вычисления полинома $Q(z)$.

Литература

[1] I. A. Antipova, T. V. Zykova Mellin transform for monomial functions of the solution to the general polynomial system, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2013, 6(2), 475–486

НОВЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА 2 НА $\mathbb{P}^3$ С КЛАССАМИ ЧЕРНА $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$

А. Н. Иванов (Москва, НИУ ВШЭ)
xnikiv@gmail.com

Пусть $\mathcal{M}(0,k,n)$ – схема модулей Гизекера-Маруямы полустабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = k$, $c_3 = n$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над основным полем $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ характеристики 0. Обозначим $\mathcal{M}(k) = \mathcal{M}(0,k,0)$. Под множеством особенностей данного $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$-пучка E мы понимаем множество $\mathrm{Sing}(E) = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid E$ не является локально свободным в точке $x\}$. $\mathrm{Sing}(E)$ является всегда собственным замкнутым подмножеством $\mathbb{P}^3$ и, более того, если E – полустабильный пучок ненулевого ранга, каждая неприводимая компонента множества $\mathrm{Sing}(E)$ имеет размерность максимум 1. Кроме того, далее для стабильного пучка E мы не будем делать различия между E и его классом изоморфизма $[E]$ как точкой в пространстве модулей.

Общие точки всех известных до настоящего времени компонент схем $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 1$, являются пучками с особенностями чистой размерности [2], при этом все компоненты схем $\mathcal{M}(1)$ и $\mathcal{M}(2)$ найдены, в отличие от схемы $\mathcal{M}(3)$, полное описание всех компонент которой является открытой проблемой. Настоящий доклад посвящен обсуждению основного результата совместной работы докладчика с А. С. Тихомировым, состоящего в описании новых неприводимых компонент схемы $\mathcal{M}(3)$, общие точки которых являются пучками с множеством особенностей, содержащим компоненты размерностей 0 и 1 – см. теорему ниже. Построенные семейства пучков являются первыми примерами неприводимых компонент схемы Гизекера-Маруямы, общие точки которых являются пучками с особенностями смешанной размерности.

Компоненты описываются следующим образом. Рассмотрим в $\mathcal{M}(0,2,n)$ открытое подмножество $\mathcal{R}(0,2,n)$ – схему модулей стабильных рефлексивных когерентных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = n$, где $n = 2, 4$. Для любой точки $[F] \in \mathcal{R}(0,2,n)$, по теореме Грауэрта-Мюлиха [1], множество $X_{[F]} = \{(l,Z) \in \mathrm{Gr}(2,4) \times \mathrm{Sym}^s(\mathbb{P}^3)^* \mid (l \sqcup Z) \cap \mathrm{Sing}(F) = \emptyset,\ F|_l \simeq 2\mathcal{O}_l\}$ является плотным подмножеством $\mathrm{Gr}(2,4) \times \mathrm{Sym}^s(\mathbb{P}^3)^*$, где $\mathrm{Gr}(2,4)$ – грассманиан прямых в $\mathbb{P}^3$, и $\mathrm{Sym}^s(\mathbb{P}^3)^*$ – открытое плотное подмножество $\mathrm{Sym}^s(\mathbb{P}^3)$, состоящее из дизъюнктных объединений s различных точек $\mathbb{P}^3$. Для любой точки $u \in X_{[F]}$ и целого числа r обозначим $Q_{u,r} := \mathcal{O}_l(r) \oplus \mathcal{O}_Z$, и рассмотрим при $r = \frac{n}{2} + 1 - s$ открытое плотное подмножество $\mathrm{Hom}(F, Q_{u,r})_e \subset \mathrm{Hom}(F, Q_{u,r})$, состоящее из эпиморфизмов $\phi : F \twoheadrightarrow Q_{u,r}$. Для любого элемента $\phi \in \mathrm{Hom}(F, Q_{u,r})_e$ мы можем взять ядро $E = \ker\ \phi$. Легко видеть, что E – стабильный пучок и определяет точку $[E]$ схемы $\mathcal{M}(3)$. Кроме того, $\ker\phi \simeq \ker\phi'$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $g \in \mathrm{Aut}(Q_{u,r})$, такой что $\phi' = g \circ \phi$. Обозначим через $[\phi]$ класс эквивалентности ϕ по модулю $\mathrm{Aut}(Q_{u,r})$. Теперь рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{X}}(n,r,s) = \{x = ([F], u, [\phi_x]) \mid [F] \in \mathcal{R}(0,2,n),\ u \in X_{[F]},\ [\phi_x] \in \mathrm{Hom}(F, Q_{u,r})_e/\mathrm{Aut}(Q_{u,r})\}$. Поскольку $\mathcal{R}(0,2,n)$ является приведенной неприводимой схемой [3], множество $\widetilde{\mathcal{X}}(n,r,s)$ имеет естественную структуру приведенной неприводимой схемы. Более того, существует корректно определенный инъективный морфизм $f : \widetilde{\mathcal{X}}(n,r,s) \longrightarrow \mathcal{M}(3)$, $x \mapsto [\ker\ \phi_x]$. Положим $\mathcal{X}(n,r,s) := f(\widetilde{\mathcal{X}}(n,r,s)) \subset \mathcal{M}(3)$ и рассмотрим соответствующие замыкания $\overline{\mathcal{X}(n,r,s)}$ схем $\mathcal{X}(n,r,s)$ в $\mathcal{M}(3)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Замыкания* $\overline{\mathcal{X}(2,2,0)}, \overline{\mathcal{X}(4,3,0)}, \overline{\mathcal{X}(4,2,1)}$ *являются неприводимыми компонентами схемы* $\mathcal{M}(3)$ *размерностей 22, 24, 26, соответственно. Общие точки этих компонент являются стабильным пучками с особенностями смешанной размерности.*

Литература

[1] D. Huybrechts, M. Lehn, The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves, 2nd ed., Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] Jardim M., Markushevich D., Tikhomirov A. S., Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on $\mathbb{P}^3$ // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2017. P. 1-36.

[3] M.-C. Chang, Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications. Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 57–89.

ИНВОЛЮЦИИ В ГРУППЕ ВЕЙЛЯ И ПРИМЫКАНИЯ B-ОРБИТ В ОРТОГОНАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

М. В. Игнатьев[6] **(Самара, Самарский университет)**
mihail.ignatev@gmail.com

Пусть G — комплексная простая алгебраическая группа, B — борелевская подгруппа в ней, N — унипотентный радикал группы B, $\mathfrak{n}$ — его алгебра Ли, $\mathfrak{n}^*$ — сопряжённое к ней пространство. Группа B естественно действует на $\mathfrak{n}^*$ с помощью коприсоединённого представления. Орбиты этого действия играют ключевую роль в теории представлений согласно методу орбит А. А. Кириллова, см., к примеру, [Ki].

Обозначим через Φ систему корней группы G, через Φ^+ — множество положительных корней относительно B, а через W — группу Вейля. Алгебра $\mathfrak{n}$ имеет базис $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ из корневых векторов; обозначим через $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$. Любую инволюцию $w \in W$ можно представить в виде произведения попарно коммутирующих отражений. Далее G будет классической группой, причём в случае B_n и D_n мы будем предполагать, что $\#\{i > 0 \mid w(i) = -i\} = 0$ (при стандартном отождествлении W с подгруппой в группе $S_{\pm n}$ подстановок на элементах $1, \ldots, n, -n, \ldots, -1$ [BB]); такие инволюции мы далее будем называть *базисными*.

Носителем данной инволюции w называется такое подмножество $D \subseteq \Phi^+$, что $w = \prod_{\alpha \in D} s_\alpha$. В случае A_{n-1} и базисных инволюций в B_n, D_n носитель определён однозначно, а для C_n мы считаем, что $2\epsilon_i \in D$ при $w(i) = -i$. Обозначим тогда через Ω_w коприсоединённую B-орбиту линейной формы

$$f_w = \sum_{\alpha \in D} e^*_\alpha.$$

Определение 1. Будем говорить, что B-орбита Ω_w *ассоциирована* с инволюцией w.

Отметим, что большинство орбит, сколь-нибудь полно изученных к настоящему времени, ассоциированы с теми или иными инволюциями в группе Вейля.

Будем через $\leqslant_B$ обозначать порядок Брюа на W. Широко известно, что он возникает во многих важных геометрических вопросах,

[6]Работа поддержана грантом РФФИ 16–01–00154a.

связанных с группой G. Оказывается, он допускает геометрическую трактовку и в терминах коприсоединённых орбит.

Теорема 1 ([Ig1], [Ig2])**.** *Пусть* $\Phi = A_{n-1}$ *или* C_n, σ, τ *— инволюции в группе Вейля* W*. Орбита* Ω_σ *лежит в замыкании орбиты* Ω_τ *тогда и только тогда, когда* $\sigma \leqslant_B \tau$*.*

Основной результат доклада — следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi = B_n$ *или* D_n, σ, τ *— базисные инволюции в группе Вейля* W*. Если орбита* Ω_σ *лежит в замыкании орбиты* Ω_τ*, то* $\sigma \leqslant_B \tau$*.*

Также в докладе мы обсудим гипотетическую достаточность этого условия.

Литература

[BB] A. Bjorner, F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, Graduate Texts in Mathematics **231**, Springer, 2005.

[Ig1] M.V. Ignatyev, Combinatorics of B-orbits and the Bruhat–Chevalley order on involutions, Transformation Groups **17** (2012), no. 3, 747–780, arXiv: `math.RT/1101.2189`.

[Ig2] М.В. Игнатьев, Порядок Брюа–Шевалле на инволюциях в гипероктаэдральной группе и комбинаторика замыканий B-орбит, Записки научных семинаров ПОМИ **400** (2012), 166–188, English translation: J. Math. Sci. **192** (2013), no. 2, 220–231, arXiv: `math.RT/1112.2624`.

[Ki] A. A. Kirillov, Lectures on the orbit method, Grad. Studies in Math. **64**, AMS, 2004.

О МНОГОГРАННИКЕ НЬЮТОНА ДИСКРИМИНАНТА СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ

Е. А. Клешкова[7] **(Красноярск, Россия)**

Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$P_i := \sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_\lambda^{(i)} y^\lambda = 0, \ \ i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

с неизвестными $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, переменными коэффициентами $a_\lambda^{(i)}$, $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$ – фиксированные конечные подмножества, содержащие нулевой элемент, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$. Решение $y(a) = (y_1(a), \dots, y_n(a))$ системы () обладает свойством полиоднородности, поэтому она, как правило, допускает приведение с помощью мономиального преобразования коэффициентов $F : a \mapsto x$ (см. [1]). Для этого необходимо выделить набор показателей $\omega^{(i)} \in A^{(i)}, \ i = 1, \dots, n$, со свойством $\det\left(\omega_j^{(i)}\right) \neq 0$. В результате получим *приведенную систему* вида

$$y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \ \ i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где матрица $\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})$ невырожденная, а матрица $\Lambda^{(i)} := A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, \bar{0}\}$.

Наша задача – найти нормальные векторы граней максимальной размерности (гиперграней) многогранника Ньютона дискриминанта системы (2).

Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$, и запишем его в виде матрицы $\Lambda = (\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}) = (\lambda^1, \dots, \lambda^N)$, здесь N– количество коэффициентов в системе (2). Строки полученной матрицы Λ обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Теорема 1. *Векторы*

$$\varkappa_1 = (-1, 0, \dots, 0), \dots, \ \ \varkappa_N = (0, 0, \dots, -1), \ \ \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

являются нормальными к многограннику Ньютона дискриминанта системы (2).

---

[7]Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ №НШ-9149.2016.1.

Литература

[1] Антипова И. А., Цих А. К. *Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных,* 19 pp., Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 29–56.

О ТОЧКАХ ПЕРЕГИБА ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Вик. С. Куликов[8]

(Москва, Математический институт им. В.А. Стеклова)

kulikov@mi.ras.ru

Пусть $F(\overline{a},\overline{z})=\sum_{i+j+k=d}a_{i,j,k}z_1^iz_2^jz_3^k$ – однородный многочлен степени d относительно переменных z_1,z_2,z_3 и степени один относительно переменных $a_{i,j,k}$, $i+j+k=d$. Обозначим через $\mathcal{C}_d\subset\mathbb{P}^{K_d}\times\mathbb{P}^2$, где $K_d=\frac{d(d+3)}{2}$, полное семейство кривых степени d, заданное уравнением $F(\overline{a},\overline{z})=0$. Пусть $\mathcal{I}_d=\mathcal{C}_d\cap\mathcal{H}_d$, где

$$\mathcal{H}_d=\{(\overline{a},\overline{z})\in\mathbb{P}^{K_d}\times\mathbb{P}^2\mid\det(\frac{\partial^2F(\overline{a},\overline{z})}{\partial z_i\partial z_j})=0\}.$$

Обозначим $f_d:\mathcal{C}_d\to\mathbb{P}^{K_d}$ – ограничение проекции $pr_1:\mathbb{P}^{K_d}\times\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^{K_d}$ на $\mathcal{C}_d$. Хорошо известно (см., например, [1]), что для общей точки $\overline{a}_0\in\mathbb{P}^{K_d}$ пересечение кривой $C_{\overline{a}_0}=f_d^{-1}(\overline{a})$ и ее кривой Гессе $H_{C_{\overline{a}_0}}$, заданной уравнением $\frac{\partial^2F(\overline{a}_0,\overline{z})}{\partial z_i\partial z_j})=0$, состоит из точек перегиба кривой $C_{\overline{a}_0}$ и содержит $3d(d-2)$ точек. Поэтому при $d\geq3$ морфизм $h_d=f_{d|\mathcal{I}_d}:\mathcal{I}_d\to\mathbb{P}^{K_d}$ имеет степень $\deg h_d=3d(d-2)$.

Пусть $\mathcal{S}_d\subset\mathbb{P}^{K_d}$ – это многообразие, состоящее из точек $\overline{a}$, для которых кривые $C_{\overline{a}}$ являются особыми, и пусть $\mathcal{M}_d\subset\mathbb{P}^{K_d}$ – это многообразие точек $\overline{a}$, для которых кривые $C_{\overline{a}}$ имеют r-кратную точку перегиба с $r\geq2$. Пусть $\mathcal{B}_d=\mathcal{S}_d\cup\mathcal{M}_d$ (если $d=3$, то $\mathcal{M}_3=\emptyset$). Легко показать ([6]), что многообразие $\mathcal{M}_d$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{K_d}$ при $d\geq4$. Также хорошо известно, что $\mathcal{S}_d$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{K_d}$, $\deg\mathcal{S}_d=3(d-1)^2$.

Морфизм $h_d:\mathcal{I}_d\setminus h_d^{-1}(\mathcal{B}_d)\to\mathbb{P}^{K_d}\setminus\mathcal{B}_d$ является неразветвленным накрытием и, следовательно, это накрытие определяет гомоморфизм $h_{d*}:\pi_1(\mathbb{P}^{K_d}\setminus\mathcal{B}_d,\overline{a}_0)\to\mathbb{S}_{3d(d-2)}$ (здесь $\mathbb{S}_{3d(d-2)}$ – симметрическая группа, действующая на множестве $I_{\overline{a}}=C_{\overline{a}_0}\cap\mathcal{I}_d$). Группа $\mathcal{G}_d=\operatorname{Im}h_{d*}$ называется *группой монодромии точек перегиба плоских кривых степени d.*

Теорема 1. ([2]) *Группа $\mathcal{G}_d$ совпадает с симметрической группой $\mathbb{S}_{3d(d-2)}$, если $d\geq4$, и $\mathcal{G}_3$ – это группа порядка 216, изоморфная группе проективных преобразований плоскости $\mathbb{P}^2$, оставляющей инвариантным множество точек перегиба кривой Ферма степени три.*

[8] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-01-02158.

Proposition 2. ([6]) *Локальная монодромия*[9] *морфизма* h_d *в общей точке* $\overline{a} \in \mathcal{M}_d$ *– это подгруппа* $\mathbb{Z}_2$ *симметрической группы* $\mathbb{S}_{3d(d-2)}$*, порожденная транспозицией, и локальная монодромия морфизма* h_d *в общей точке* $\overline{a} \in \mathcal{S}_d$ *– это группа* $\mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{S}_{3d(d-2)}$*, порожденная произведением двух непересекающихся циклов длины три.*

Напомним, что *пучком Лефшеца* называется расслоение $f_d : C_L = f_d^{-1}(L) \to L$ на кривые степени d над L (а также линейная система $\{C_{\overline{a}}\}_{\overline{a} \in L}$ кривых степени d в $\mathbb{P}^2$), где L – прямая в $\mathbb{P}^{K_d}$, находящаяся в общем положении с дивизором $\mathcal{S}_d$. Тело C_L пучка Лефшеца является неособой поверхностью. Линейная система $\{C_{\overline{a}}\}_{\overline{a} \in L}$ имеет d^2 базисных точек и ограничение проекции pr_2 на C_L является композицией d^2 σ-процессов с центрами в базисных точках. Скажем, что пучок Лефшеца $f_d : C_L \to L$ является *общим*, если L и $\mathcal{M}_d \setminus \mathcal{S}_d$ пересекаются в $m_d = \deg \mathcal{M}_d$ точках.

Proposition 3. *Имеем* $\deg \mathcal{M}_d = 6(d-3)(3d-2)$*.*

Пусть L – прямая в $\mathbb{P}^{K_d}$, $L \not\subset \mathcal{S}_d$, и $I_L = h_d^{-1}(L)$. Назовем $H_L = pr_2(I_L) \subset \mathbb{P}^2$ *кривой Гессе пучка* $\{C_{\overline{a}}\}_{\overline{a} \in L}$.

Так как кривая I_L неприводима для общего пучка Лефшеца $\{C_{\overline{a}}\}_{\overline{a} \in L}$, то простые вычисления показывают, что число элементов общего пучка Лефшеца, имеющих точку перегиба в базисной точке пучка, не превосходит трех. Кроме того, имеем $\deg H_L = (H_L, \mathbb{P}^1)_{\mathbb{P}^2} = (I_L, B)_{C_L} = 6(d-1)$. Тем самым имеет место

Теорема 4. *Кривая Гессе* H_L *общего пучка Лефшеца* $\{C_{\overline{a}}\}_{\overline{a} \in L}$ *плоских кривых степени* $d \geq 3$ *обладает следующими свойствами:*

(*i*) $\deg H_L = 6(d-1)$ *и ее геометрический род равен* $3(4d^2 - 13d + 8) + 1$*;*

(*ii*) H_L *имеет* d^2 *особых точек кратности три в базисных точках пучка* $\{C_{\overline{a}}\}_{\overline{a} \in L}$ *и* $3(d-1)^2$ *обыкновенных ноудов в особых точках вырожденных слоев пучка;*

(*iii*) $H_L \cap C_{\overline{a}}$*,* $\overline{a} \in L$*, состоит из точек перегиба кривой* $C_{\overline{a}}$ *и базисных точек пучка, и если* $p \in H_L \cap C_{\overline{a}}$ *– двукратная точка перегиба, то* H_L *и* $C_{\overline{a}}$ *касаются в* p*.*

[9] Определение локальной группы монодромии доминантного морфизма $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ в точке $p \in \mathbb{P}^m$ можно найти, например, в [4] или [5].

Литература

[1] E. Brieskorn and H. Knörrer, *Plane algebraic curves.* Birkhäuser Verlag (1986), Basel. Boston.

[2] J. Harris, *Galois groups of enumerative problems,* Duke Math.J., **46:4** (1979), 685 – 724.

[3] Vik. S. Kulikov, *A Remark on Classical Plücker's formulae.* Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math., **25:5** (2016), 959 – 967.

[4] Вик.С. Куликов, *Плоские рациональные квартики и* $K3$-*поверхности,* Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, **294** (2016), 105–140, МАИК, М.

[5] Вик.С. Куликов, *Дуализирующие накрытия плоскости,* Изв. РАН. Сер. матем., **79:5** (2015), 163–192.

[6] Vik.S. Kulikov, *On the monodromy of the inflection points of plane curves,* 19 pp., arXiv:1703.10430.

О ВЫЧЕТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Кытманов[10]

(Красноярск, Сибирский федеральный университет)

aakytm@gmail.com

В работах [1, 2, 4] для систем нелинейных алгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ на основе многомерного логарифмического вычета были получены формулы для нахождения степенных сумм корней системы, не вычисляя самих корней. Такие формулы зависят от конкретного вида системы.

На их основе Л. А. Айзенбергом в работе [1] был предложен новый метод исключения неизвестных, а его разработка была продолжена в монографиях [2, 3]. Основная идея метода заключается в нахождении степенных сумм корней системы с последующим использованием рекуррентных формул Ньютона. В отличие от классического метода исключения (метода базисов Гребнера) он менее трудоемок, не увеличивает кратности корней и может быть адаптирован для систем трансцендентных уравнений.

В данной работе мы рассматриваем системы вида $f_1(z) = 0, \ldots, f_n(z) = 0$, где функции $f_i(z)$ имеют вид

$$f_i(z_1, \ldots, z_n) = q_i(z_1, \ldots, z_n) + Q_i(z_1, \ldots, z_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь

$$q_i(z_1, \ldots, z_n) = (1 - a_{i1}z_1)^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{in}z_n)^{m_{in}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

m_{ij} – натуральные числа, $a_{ij} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а $Q_i(z)$ – целые функции для $i = 1, \ldots, n$.

Для данных систем мы получаем формулы для вычисления вычетных интегралов, тесно связанных со степенными суммами корней этих систем, что является важной составляющей в разработке мето-

[10] Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для поддержки молодых ученых – докторов наук МД-197.2017.1

дов исключения неизвестных.

Литература

[1] L. A. Aizenberg, On a formula of the gereralized multidimensional logarithmic residue and the solution of system of nonlinear equations, Sov. Math. Doc., 1977, 18, 691–695.

[2] L. A. Aizenberg and A. P. Yuzhakov, Integral representations and residues in multidimensional complex analysis, Trans. Amer. Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[3] V. Bykov, A. Kytmanov, M. Lazman, and M. Passare, (ed), Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra, Math. and Appl., Vol. 448, Kluwer Acad. Publ., Dordreht, Boston, London, 1998.

[4] A. K. Tsikh, Multidimensional residues and their applications, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 103. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ НЬЮТОНА–ПЬЮИЗО С ПОМОЩЬЮ ПРИМЕНЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА И РАЗРЕШЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

И. А. Лопатин[11] (Красноярск, ИМиФИ СФУ)
elijah.alexander.lopatin@gmail.com

Рассматривается уравнение вида:

$$a_n(t)z^n + a_{n-1}(t)z^{n-1} + \cdots + a_0(t) = 0 \tag{1}$$

где коэффициенты $a_i(t) \in \mathbb{C}\{\{t\}\}$, $i = 0, \ldots, n$ представляют собой формальные дробно-степенные ряды Пьюизо. В 1850–1851 годах Пьюизо [Pui1850], [Pui1851] было доказано, что в случае, если все коэффициенты $a_i(t)$ уравнения (1) представляют собой ряды, сходящиеся в некоторой окрестности нуля и определяющие в данной окрестности голоморфную функцию переменной t, то решение данного уравнения также явлется рядом, представляющим некоторую голоморфную функцию в окрестности нуля. Однако доказательство Пьюизо крайне громоздко и трудно для обозрения. В настоящем докладе будет предложено краткое доказательство данной теоремы, основанное на применении обобщенного логарифмического вычета [Yuz75] и последовательности сигма-процессов.

Литература

[Pui1850] V. A. Puiseux, Recherches sur les fonctions algébraiques, J. Math. Pures Appl, 1850, 15: 365–480.

[Pui1851] V. A. Puiseux, Nouvelles recherches sur les fonctions algébraiques, J. Math. Pures Appl, 1851, 16: 228–240.

[11] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y.26.31.0006)

[Yuz75] А. П. Южаков, О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды, Математический сборник, 1975, 97:2: 177–192.

ТОРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ В ДОПОЛНЕНИИ КОМПЛЕКСНОЙ КРИВОЙ В $(\mathbb{C}^{\times})^2$

А. К. Лушин[12], Д. Ю. Почекутов[13] (Красноярск, СФУ)
lushinalx@gmail.com, dpotchekutov@sfu – kras.ru

Рассмотрим алгебраическую гиперповерхность V, заданную нулями многочлена P в комплексном торе $(\mathbb{C}^{\times})^n = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Образ гиперповерхности V при логарифмическом проектировании

$$\mathrm{Log}(z) = (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$$

называется *амёбой* $\mathcal{A}_P$ многочлена P (или гиперповерхности V). Дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_P$ распадается на конечное число выпуклых и открытых компонент связности E_ν, кодируемых целочисленными точками многогранника Ньютона Δ_P. С каждой компонентой E_ν можно связать *торический цикл* Γ_ν в $(\mathbb{C}^{\times})^n \setminus V$, определённый как n-мерный вещественный тор

$$\Gamma_\nu = \mathrm{Log}^{-1}(x),\ x \in E_\nu.$$

В [MY] было доказано, что торические циклы, связанные с компонентами, закодированными вершинами многогранника Δ_P, составляют гомологически независимое семейство в группе $H_n((\mathbb{C}^{\times})^n \setminus V)$. В случае, когда V представляет собой набор гиперплоскостей в оптимальном положении в [FPT] было показано, что семейство $\{\Gamma_\nu\}$ является базисом в $H_n((\mathbb{C}^{\times})^n \setminus V)$. В общем вопрос о гомологической независимости семейства $\{\Gamma_\nu\}$ остаётся открытым (см. [BT]).

В двумерном случае выделяется класс многочленов, амёбы которых ведут себя наиболее простым образом. Так, дополнение амёбы распадается на максимальное число компонент связности, а её площадь $\mathrm{Area}(\mathcal{A}_P)$ равна $\pi^2\mathrm{Area}(\Delta_P)$. Такие многочлены называют *гарнаковскими* [Pa]. Мы доказали, что справедлива

Теорема 1. *Пусть кривая $V \subset (\mathbb{C}^{\times})^2$ задана гарнаковским многочленом P. Тогда торические циклы Γ_ν составляют гомологически независимое семейство в группе гомологий $H_2((\mathbb{C}^{\times})^2 \setminus V)$.*

[12] Поддержан в рамках гранта Президента РФ НШ-9149.2016.1.
[13] Поддержан в рамках гранта Правительства РФ 14.Y26.31.0006.

Литература

[MY] M. Mkrtchian, A. Yuzhakov. Izv. Akad. Nauk ArmSSR 17, 99-105 (1982)

[FPT] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh. Adv. in Math., 2000, 151, 45–70

[BT] N.A. Bushueva, A.K. Tsikh. Proc. Steklov Inst. Math. 279, 52-63 (2012)

[Pa] M. Passare. Jour. of Sib. Fed. Uni. Math. & Physics 9, 347-352 (2016)

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНЫХ РАЗБИЕНИЙ И РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЕЙ

А. П. Ляпин (Сибирский федеральный университет),
S. Chandragiri[14](Сибирский федеральный университет)
aplyapin@sfu – kras.ru

В основании одного из разделов исчисления конечных разностей – теории суммирования функций – лежит простое тождество, практически тавтология

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \sum_{k=1}^{x} \left(\varphi(k) - \varphi(k-1)\right). \tag{1}$$

Если для заданной функции $h(x)$ удается найти функцию $\varphi(x)$, такую, что $\varphi(x) - \varphi(x-1) = h(x)$, то формула (1) принимает вид

$$\varphi(k)\,\Big|_0^x = \sum_{k=1}^{x} h(k)$$

и называется дискретным аналогом формулы Ньютона-Лейбница, а функция $\varphi(x)$ – дискретной первообразной для функции $h(x)$.

Для производящей функции $\Phi(\xi) = \sum\limits_{x=0}^{\infty} \varphi(x)\xi^x$ тождество (1) равносильно тождеству

$$\Phi(\xi) - \frac{\Phi(0)}{1-\xi} = \frac{1}{1-\xi} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\varphi(x) - \varphi(x-1)\right) \xi^x.$$

или тождеству

$$(1-\xi)\Phi(\xi) - \Phi(0) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\varphi(x) - \varphi(x-1)\right) \xi^x. \tag{2}$$

В данной работе приведен многомерный аналог тождества (2) и некоторые его следствия для функций векторного разбиения и решеточных путей.

Для формулировки основного результата нам потребуются следующие определения и обозначения. Пусть $V = \{J\}$ – множество всех упорядоченных наборов $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant N, k = 0, 1, 2, \ldots, N, \#J = k$ – число элементов множества J. Число таких наборов, включая пустое множество, равно 2^N. Обозначим π_j

[14]Второй автор поддержан грантом PhD СФУ №14.

– оператор проектирования вдоль j-ой координатной оси в $\mathbb{R}^N$, т.е. $\pi_j x = (x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_N)$, а его действие на функцию $\varphi(x)$ определим следующим образом:

$$\pi_j \varphi(x) = \varphi(\pi_j x), j = 1, \ldots, N.$$

Действие оператора π_j на производящий ряд $\Phi(\xi) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \varphi(x)\xi^x$ из кольца формальных степенных рядов Лорана $\mathbb{C}[[\xi]]$ естественным образом определяется формулой

$$\pi_j \Phi(\xi) = \sum_{x \geqslant 0} \varphi(\pi_j x)\xi^{\pi_j x} = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_N).$$

Далее, если $J \in V$, то $\pi_J = \pi_{j_1} \circ \cdots \circ \pi_{j_k}$ – композиция операторов $\pi_{j_1}, \ldots, \pi_{j_k}$ и $\pi_\emptyset = 1$ – тождественный оператор.

На комплекснозначных функциях $\varphi(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_N)$ определим оператор сдвига δ_j по j-ой переменной

$$\delta_j \varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_N), j = 1, \ldots, N,$$

и для $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^N$ положим $\delta^\mu \varphi(x) = \delta_1^{\mu_1} \cdots \delta_N^{\mu_N} \varphi(x) = \varphi(x + \mu)$.

С произвольным набором векторов $\{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^N\} \subset \mathbb{R}^n$ ассоциируем порожденную ими конус

$$K = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda = x_1\alpha^1 + \cdots + x_N\alpha^N, x \in \mathbb{R}_+^N\},$$

причем будем предполагать, что конус K заостренный, т.е. не содержит прямых.

Рассмотрим $(n \times N)$-матрицу A, составленную из вектор-столбцов $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^N$. Следуя работе [Brion], функцию

$$P_A(\lambda; \varphi) = \sum_{x : Ax = \lambda} \varphi(x), x \in \mathbb{Z}^N$$

будем называть функцией векторного разбиения, ассоциированной с $\varphi(x)$. В [3] исследованы свойства функций векторного разбиения, в частности найдены вычетные формулы для ее производящей функции и получен аналог формулы Эйлера-Маклорена для суммы значений полинома по целым точкам рационального политопа. Если $\varphi(x) \equiv 1$, то функция $P_A(\lambda; \varphi)$ есть число целых неотрицательных решений системы линейных диофантовых уравнений $\alpha^1 x_1 + \ldots + \alpha^N x_N = \lambda$ (см. [1]).

Опеределенное матрицей A линейное преобразование $A : \mathbb{R}^N_{\geqslant} \longrightarrow K$ индуцирует проектирование π_j^A точки $\lambda \in K$ вдоль вектора α^j по правилу:

$$\pi_j^A \lambda = A(\pi_j x) = x_1\alpha^1 + \cdots + x_{j-1}\alpha^{j-1} + x_{j+1}\alpha^{j+1} + \cdots + x_N\alpha^N.$$

Для кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ формальных степенных рядов Лорана вида $F(z) = \sum\limits_{\lambda \in K \cap \mathbb{Z}^n} f(\lambda) z^\lambda$ с носителями в конусе K тем же символом π_j^A обозначим оператор, действующий на элементы из $\mathbb{C}_K[[z]]$ по правилу $\pi_j^A F(z) = \sum\limits_{\lambda \in K \cap \Lambda} f(\pi_j^A \lambda) z^{\pi_j^A \lambda}$. Для набора $J \in V$ определим оператор $\pi_J^A = \pi_{j_1}^A \circ \cdots \circ \pi_{j_k}^A$.

Обозначим δ^{α^j} оператор сдвига, действующий на функцию $f(\lambda)$ по правилу $\delta^{\alpha^j} f(\lambda) = f(\lambda + \alpha^j), j = 1, \ldots, N$. Для $\alpha, \lambda \in K$ определим отношение $\underset{K}{\geqslant}$ следующим образом: неравенство $\lambda \underset{K}{\geqslant} \alpha$ означает, что $\lambda - \alpha \in K$. Также обозначим $z^A = (z^{\alpha^1}, \ldots, z^{\alpha^N}), \delta^{-A} = (\delta^{-\alpha^1}, \ldots, \delta^{-\alpha^N})$.

Сформулируем многомерный аналог тождества (2).

Теорема 1. *Пусть $P_A(\lambda; \varphi)$ функция векторного разбиения, ассоциированная с функцией $\varphi : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{C}$, и $\Phi(\xi) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \varphi(x)\xi^x \in \mathbb{C}[[\xi]]$ – производящий ряд для $\varphi(x)$, тогда справедливо тождество*

$$\sum_{J \in V} (-1)^{\# J} \pi_J^A (1 - \langle I, z^A \rangle) \Phi(z^A) = \sum_{\lambda \underset{K}{\geqslant} \alpha} (1 - \langle I, \delta^{-A} \rangle) P_A(\lambda; \varphi) z^\lambda,$$

где $\langle I, z^A \rangle = z^{\alpha_1} + \cdots + z^{\alpha_N}$.

Отметим, что при $N = 1$ и $A = (1)_{1\times 1}$, из утверждения теоремы получается тождество (2).

Сформулируем задачу о числе обобщенных решеточных путей: на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$ найти число путей $f(\lambda)$, которыми можно попасть из начала координат в точку $\lambda \in K \cap \mathbb{Z}^n$, используя только шаги из набора $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^N\}$ (см. [2]).

В (важном) частном случае задачи об обобщенных решеточных путях, когда набор шагов состоит из векторов ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ (то есть $n = N$ и $\alpha^j = e^j, j = 1, \ldots, N$), искомое число путей, которыми можно попасть из начала координат в точку $x \in \mathbb{Z}^N$, обозначим $\varphi(x)$. Очевидно, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет основному рекуррентному соотношению комбинаторного анализа:

$$\varphi(x) = \varphi(x - e^1) + \cdots + \varphi(x - e^N).$$

Следующая теорема устанавливает связь между решениями основного рекуррентного соотношения и ассоциированной с ним функцией векторного разбиения.

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет основному рекуррентному соотношению, то ассоциированная с ней функциия векторного разбиения $P_A(\lambda;\varphi)$ удовлетворяет разностному уравнению*

$$(1 - \langle I, \delta^{-A} \rangle) P_A(\lambda;\varphi) = 0.$$

Если при этом $\varphi(x)$ является числом решеточных путей, то $P_A(\lambda;\varphi) = f(\lambda)$, а ее производящая функция имеет вид $F(z) = (1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2} - \cdots - z^{\alpha^N})^{-1}$.

Литература

[1] Р. Стенли, Перечислительная комбинаторика М., «Мир» 1990.

[2] M. Bousquet-Melou, M. Petkovsek, Linear recurrences with constant coefficients: The multivariate case, Discrete Math. 225 (2000), 51-75.

[3] M. Brion, M. Vergne, Residue formulae, Vector partition functions and Lattice points in Rational polytopes, Journal of the American Math. Society 10 (1997), 797-833.

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ МНОГООБРАЗИЙ МАТРИЦ РАНГА ОДИН

В. В. Мещеряков[15] (Коломна, ГОУ ВО МО «ГСГУ»)
metcherykov@mail.ru

Обозначим через $M^1(m, n, \mathbb{R})$ (соответственно $M^1(m, n, \mathbb{C})$) многообразие вещественных (соответственно комплексных) $m \times n$ матриц ранга 1. В книге [1] установлено, что при $m, n \geqslant 3$ фундаментальная группа многообразия $M^1(m, n, \mathbb{R})$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$. В докладе будет вычислена фундаментальная группа $M^1(2, n, \mathbb{R})$ при $n \geqslant 2$, доказана односвязность $M^1(m, n, \mathbb{C})$ при $m, n \geqslant 2$ и установлена связь высших гомотопических групп многообразий $M^1(m, n, \mathbb{R})$ и $M^1(m, n, \mathbb{C})$ с гомотопическими группами сфер.

Теорема 1. *Если $k, m, n \geqslant 2$, то*

$$\pi_k(M^1(m, n, \mathbb{R})) = \pi_k(S^{m-1}) \times \pi_k(S^{n-1});$$

$$\pi_1(M^1(2, n, \mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & n = 2; \\ \mathbb{Z}, & n > 2. \end{cases}$$

Теорема 2. *Если $k \geqslant 1$, $m, n \geqslant 2$, то*

$$\pi_k(M^1(m, n, \mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 2; \\ \pi_k(S^{2m-1}) \times \pi_k(S^{2n-1}), & k \neq 2. \end{cases}$$

Также будет показано, что при четных n многообразие $M^1(2, n, \mathbb{R})$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Литература

[1] M. Manetti, Topology / M. Manetti. — Switzerland: Springer International Publishing, 2015. — 309 p.

[15] Работа выполнена при при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-51-150005)

О СТРУКТУРЕ КЛАССИЧЕСКОГО ДИСКРИМИНАНТА

Е. Н. Михалкин, А. К. Цих [16] **(Красноярск, Сибирский федеральный университет)**
mikhalkin@bk.ru, atsikh@sfu – kras.ru

Мы рассматриваем общий многочлен степени n:

$$f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n. \tag{1}$$

Его дискриминантом называется неприводимый многочлен $\Delta_n = \Delta(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ с целочисленными коэффициентами, который зануляется тогда и только тогда, когда многочлен (1) имеет кратные корни.

Напомним, что *многогранником Ньютона* $\mathcal{N}(\Delta)$ многочлена $\Delta(a_0, \ldots, a_n)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^{n+1}$ множества всех показателей $k = (k_0, k_1, \ldots k_n)$ мономов, участвующих в Δ. Справедлива следующее утверждение, доказанное в [[1], с. 412] (другое доказательство представлено в рукописи (видимо неопубликованной) В. Батырева).

Теорема 1. *Многогранник Ньютона дискриминанта многочлена (1) комбинаторно эквивалентен $(n-1)$-мерному кубу; он содержит 2^{n-1} вершин, которые находятся в биективном соответствии со всевозможными подмножествами*

$$I \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Мы будем рассматривать (1) при $a_0 = a_n = 1$, т.е. *приведенный (редуцированный) многочлен*

$$f_{red}(y) = 1 + a_1 y + \ldots + a_{n-1} y^{n-1} + y^n. \tag{2}$$

Многогранник Ньютона дискриминанта этого многочлена лежит в $\mathbb{R}^{n-1}$. Дискриминант многочлена (2) также будем называть *приведенным дискриминантом.*

[16] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ №НШ-9149.2016.1, а также гранта министерства образования РФ (гос. задание для Сибирского федерального университета в 2017 г., № 1.2604.2017/пч).

В статье [2] приведены неравенства, определяющие многогранник Ньютона $\mathcal{N}(\Delta)$ для дискриминанта уравнения (2). Таких неравенств $2 \cdot (n-1)$ штук, и они следующие:

$$t_k \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n-1} min(j,k)[n - max(j,k)]t_j \leq nk(n-k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В дальнейшем нам удобно использовать обозначения для некоординатных гиперграней, определяющих многогранник Ньютона:

$$g_k := \left\{ t \in \mathcal{N}(\Delta) : \sum_{j=1}^{n-1} min(j,k)[n - max(j,k)]t_j = nk(n-k) \right\},$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Определение. Многогранник G размерности d, представленный в виде суммы по Минковскому $(d-1)$-мерного многогранника и отрезка, назовем *d-призмой.*

Теорема 2. *Гиперграни g_2 и g_{n-2} многогранника Ньютона $\mathcal{N}(\Delta)$ дискриминанта приведенного многочлена (2) степени n являются $(n-2)$-призмами*

Определение. *Срезкой* (сужением) дискриминанта Δ на гипергрань g_k его многогранника Ньютона мы называем многочлен $\Delta\Big|_{g_k}$, состоящий из всех мономов Δ, показатели которых принадлежат g_k.

Теорема 3. *Для степеней $n = 2, 3, 4, 5, 6$ срезки $\Delta_n\Big|_{g_k}$ дискриминанта многочлена степени n факторизуются с точностью до монома в виде произведения $\Delta_k(1, a_1, \ldots, a_k)\Delta_{n-k}(1, a_{n-1}, \ldots, a_k)$ дискриминантов многочленов степеней k и $n-k$.*

Авторам кажется правдоподобной гипотеза о том, что утверждение Теоремы 3 верно для любой степени n.

Литература

[1] I.Gelfand, M.Kapranov, A.Zelevinsky, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhäuser: Boston, 1994.

[2] M.Passare, A.Tsikh, Algebraic equations and hypergeometric series, *The legacy of Niels Henrik Abel*, Springer: Berlin-Heidelberg-New York, (2004), 653-672.

[3] I.A. Antipova, A.K. Tsikh. The discriminant locus of a sistem of n Laurent polynomials in n variables// *Izv. Math.* **76** (2012), № 5, 881-906.

[4] E.N.Mikhalkin, A.K.Tsikh. Singular strata of cuspidal type for the classical discriminant// *Sb.: Math.* **206** (2015), № 2, 282-310.

ФОРМУЛА ДЛЯ СТЕПЕННОЙ СУММЫ КОРНЕЙ ОДНОГО ТИПА НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Е. К. Мышкина[17] (Красноярск)
elfifenok@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений $f_1(z),\ f_2(z), \ldots, f_n(z)$ вида

$$f_i(z_1, \ldots, z_n) = P_i(z_1, \ldots, z_n) + Q_i(z_1, \ldots, z_n), \tag{1}$$

где P_i — младшая однородная часть разложения Тейлора функции $f_i(z)$. Степень всех мономов, входящих в P_i, равна m_i. В функциях Q_i степени всех мономов строго больше чем m_i.

$$Q_i(z) = \sum_{\|\alpha\| > m_i} a^i_\alpha z^\alpha \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$— мультииндекс, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$. Будем предполагать, что система многочленов $P_1, \ldots, P_n$ невырождена, и что для каждого i-го уравнения выполнены условия $\deg_{z_i} P_i < \deg_{z_i} Q_i, \quad \deg_{z_j} P_i \geq \deg_{z_j} Q_i, \quad i \neq j$.

Делая замену в системе (1) $z_i = \dfrac{1}{w_i}$, предполагая, что все $w_j \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, получаем

$$\widetilde{f}_i(w) = \widetilde{P}_i(w) + \widetilde{Q}_i(w), \tag{3}$$

где функции

$$\widetilde{Q}_i(w_1, \ldots, w_n) = w_1^{m_i^1 - s_i^1} \cdot \ldots \cdot [w_i] \cdot \ldots \cdot w_n^{m_i^n - s_i^n} \cdot \sum_{\|\alpha\| > 0} a^i_\alpha w_1^{m_i^1 - \alpha_i^1} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_i^n - \alpha_i^n}$$

при чем $\deg Q_i = s_i, \quad \deg \widetilde{P}_i > \deg \widetilde{Q}_i,\ i = \overline{1, n}$.

Обозначим через $z_j = (z_{j1}, \ldots, z_{jn})$, $j = 1, \ldots p$ — корни системы (1) с функциями Q_i вида (2), не лежащими на координатных плоскостях.

Теорема 1.

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \cdot \ldots \cdot z_{jn}^{\gamma_n+1}} =$$

$$= \sum_{\|K\| \leqslant \|\gamma\| + n} \frac{(-1)^{\|K\|+n} \prod_{s=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_{sj} \right)!}{\prod_{s,j=1}^n (k_{sj})!} \mathfrak{M} \left[\frac{w^{\gamma+I} \cdot \widetilde{\Delta} \cdot detA \cdot \widetilde{Q}^\alpha \prod_{s,j=1}^n a_{sj}^{k_{sj}}}{\prod_{j=1}^n w_j^{\beta_j N_j + \beta_j + N_j}} \right]$$

[17] Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 15-01-00277, 16-31-00173.

где $\|K\| = \sum_{s,j=1}^{n} k_{sj}$, $\beta_j = \sum_{j=1}^{n} k_{js}$, $\alpha_j = \sum_{s=1}^{n} k_{sj}$, $\widetilde{\Delta}$ – якобиан системы (3), $g_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} f_k$, $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n}$, а $\mathfrak{M}$ – линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.

О ГЕОМЕТРИИ РАССЛОЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕИЗОТРИВИАЛЬНЫХ ГЛАДКИХ СЕМЕЙСТВ РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ РОДОМ 1

О. В. Орешкина[18] **(Владимир)**
papichonok@yandex.ru

Пусть $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ – гладкое проективное семейство регулярных поверхностей с геомертическим родом 1 над гладкой проективной кривой C. Всюду в дальнейшем предполагается, что отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2\pi_{k*}\mathbb{Q}$, непостоянно (такие семейства поверхностей называются неизотривиальными). В этом случае существует такое счётное подмножество $\Delta_{\text{countable}} \subset C$, что функция $s \mapsto \operatorname{rank}\operatorname{NS}(X_{ks})$ постоянна на множестве $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ [1, с. 447].

Для любой точки $s \in C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ обозначим через $\operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}$ сумму всех неприводимых $\mathbb{Q}-$подструктур Ходжа в $H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$ размерности ≥ 2 (это $\mathbb{Q}-$подпространство трансцендентных классов когомологий). Согласно теореме Лефшеца о дивизорах имеется каноническое разложение $\mathbb{Q}-$структур Ходжа

$$H^2(X_{ks}, \mathbb{Q}) = \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) \oplus \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp},$$

где $\operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) = \operatorname{NS}(X_{ks}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Группа Ходжа $\operatorname{Hg}(X_{ks})$ [2, определение B.51] естественным образом действует в $\mathbb{Q}-$пространстве $H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$, причём $H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\operatorname{Hg}(X_{ks})} = \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})$ в силу теоремы Лефшеца о дивизорах.

Используя замену базы, определённую некоторым разветвлённым накрытием $\widetilde{C} \to C$, мы можем (и будем) считать, что замыкание $G_k^{(2)}$ образа представления монодромии $\pi_1(C, s) \to \operatorname{GL}(H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$ связное в топологии Зариского; кроме того, можно считать, что для любой точки $s \in C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ группа $G_k^{(2)}$ - нормальная подгруппа в группе Ходжа $\operatorname{Hg}(X_{ks})$ [3, теорема 7.3].

Будем предполагать в дальнейшем, что

$$p_k \stackrel{\text{def}}{=} b_2(X_{ks}) - \operatorname{rank}\operatorname{NS}(X_{ks}) \neq 4$$

$\forall s \in C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ и каноническое представление группы $\operatorname{Hg}(X_{ks})$ в $\mathbb{Q}-$пространстве $\operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}$ абсолютно неприводимо, что эквивалентно равенству $\operatorname{End}_{\operatorname{Hg}(X_{ks})} \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp} = \mathbb{Q}$ в силу леммы Шура.

[18]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 16-31-00266)

Тогда из описания Ю.Г. Зархиным группы Ходжа структуры Ходжа $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}$ легко следует, что алгебра Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(X_{ks})\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}$ имеет тип $B_{\frac{p_k-1}{2}}$ (если p_k- нечётное число) или $D_{\frac{p_k}{2}}$ (если p_k- чётное число) [4, теорема 2.2.1].

Если $p_1 \neq p_2$, то стандартные вычисления и сильная теорема Лефшеца показывают, что для любого $r \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}-$пространство $H^{2r}(X_1 \times_C X_2, \mathbb{Q})$ порождается классами алгебраических циклов на расслоенном произведении $X = X_1 \times_C X_2$ [1, с. 455-459].

Если же $X_1 = X_2$ и $\pi_1 = \pi_2$, то в случае, когда $p_1 \neq 4$ и $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$, мы снова получаем, что $\mathbb{Q}-$пространство $H^{2r}(X_1 \times_C X_2, \mathbb{Q})$ порождается классами алгебраических циклов (заметим, что в рассматриваемых случаях $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{ks})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp} = \mathbb{Q}$ для *всех* точек $s \in C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$, потому что группа $G_k^{(2)}$ бесконечна (в силу неизотривиальности семейства π_k) и является нормальной подгруппой в группе $\mathrm{Hg}(X_{ks})$, так что $G_k^{(2)} = \mathrm{Hg}(X_{ks})$ для всех $s \in C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$).

Эти рассуждения доказывают следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ – гладкое проективное неизотривиальное семейство регулярных поверхностей с геометрическим родом 1 над гладкой проективной кривой. Если для общего геометрического слоя X_{ks} $p_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} b_2(X_{ks}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{ks}) \neq 4$ и $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{ks})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp} = \mathbb{Q}$, то в случае $p_1 \neq p_2$ или в случае $X_1 = X_2$, $\pi_1 = \pi_2$ пространство когомологий чётной степени $H^{2r}(X_1 \times_C X_2, \mathbb{Q})$ порождается классами алгебраических циклов. Более того, для многообразия $X = X_1 \times_C X_2$ верна стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца.*

Следствие 2. *Предположим, что гладкие морфизмы $\pi_k (k = 1, 2)$ удовлетворяют условиям теоремы, $X = X_1 \times_C X_2$, причём существуют такое открытое по Зарискому подмножество $X' \hookrightarrow X$ и гладкий проективный морфизм $\tau' : X' \to B'$ на гладкую алгебраическую кривую B', что все слои $X'_t\,(t \in B')$ удовлетворяют стандартной гипотезе $B(X'_t)$ типа Лефшеца. Тогда для семейства $\tau' : X' \to B'$ верна гипотеза Гротендика об инвариантных циклах: если существует такое глобальное сечение $\alpha \in H^0(B', R^{2r}\tau'_*\mathbb{Q})$, что для некоторой точки $t_0 \in B'$ класс $\alpha(t_0)$ алгебраический в $H^{2r}(X'_{t_0}, \mathbb{Q})$, то для всех точек $t \in B'$ класс $\alpha(t)$ алгебраический в $H^{2r}(X'_t, \mathbb{Q})$.*

Это следует из теоремы Андре [5], потому что $\overline{X'} = X$ удовлетворяет стандартной гипотезе $B(X)$.

Литература

[1] Никольская О. В., "Об алгебраических циклах на расслоенных произведениях неизотривиальных семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:4 (2016), 440–465.

[2] Gordon B. B., "A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties", Appendix in: J.D. Lewis, *A survey of the Hodge conjecture*, Second edition, CRM Monograph Series, American Mathematical Society, Providence, RI, V. **10** (1999), 297–356.

[3] Зархин Ю. Г., "Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; English transl.: Zarhin Yu. G. "Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties", *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.

[4] Zarhin Yu. G., "Hodge groups of $K3$ surfaces", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **341** (1983), 193–220.

[5] Y. André, "Déformation et spécialisation de cycles motivés", *J. Inst. Math. Jussieu*, **5**:4 (2006), 563–603.

О КОМПОНЕНТАХ ВЕДЕРНИКОВА–ЭЙНА СТАБИЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{P}^3$

Н. Н. Осипов (Красноярск, СФУ), С. А. Тихомиров (Ярославль, ЯГПУ)
nnosipov@rambler.ru, satikhomirov@mail.ru

В последние годы повысился интерес к изучению полустабильных когерентных пучков на трёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, в том числе стабильных векторных расслоений ранга два на $\mathbb{P}^3$ (см., например, [CCM-2016] и [JMT-2017]). В этих исследованиях одним из главных является вопрос о географии неприводимых компонент пространств модулей таких расслоений и, в частности, вопрос о точном числе компонент того или иного типа в пространстве модулей.

В настоящем докладе приводятся новые результаты в направлении исследования, начатого в статье [KOT-2016]. В частности, предлагается метод нахождения точного числа неприводимых компонент Ведерникова—Эйна первого и второго типов в пространствах модулей $M(0, n)$ стабильных расслоений ранга два с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n \geqslant 1$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Также приводятся формулы для числа компонент Ведерникова—Эйна и находится достаточное условие существования этих компонент для произвольного $n \geqslant 1$.

Литература

[CCM-2016] J. Choi, K. Chung, M. Maican, Moduli of sheaves supported on quartic space curves, Michigan Mathematical Journal, 2016, V. 65, № 3, 637–671.

[JMT-2017] M. Jardim, D. Markushevich, A.S. Tikhomirov, Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on $\mathbb{P}^3$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2017, 1–36, DOI:10.1007/s10231-016-0630-3.

[KOT-2016] А.А. Кытманов, Н.Н. Осипов, С.А. Тихомиров, Нахождение компонент Эйна в пространствах модулей стабильных 2-

расслоений на проективном пространстве, Сибирский математический журнал, 2016, Т. 57, № 2, 410–419.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

А. Б. Певный (Сыктывкар, Сыктывкарский госуниверситет), С. М. Ситник (Воронеж, Воронежский институт МВД России)
pevnyi@syktsu.ru, mathsms@yandex.ru

Определение 1. Пусть L — линейное пространство. Функция $f : L \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой функцией (п.о.ф., см., например, [1]), если для любого n, любых $z_1, \ldots, z_n \in L$ и любых $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,j=1}^{n} f(z_k - z_j) w_k \bar{w}_j \geq 0.$$

В докладе рассматриваются результаты авторов по обобщению известных неравенств М.Г.Крейна [2] и Е.А.Горина [3] для п.о.ф. Показано, что многоточечное неравенство Е.А.Горина выводится с помощью промежуточных оценок, представляющих самостоятельный интерес, из классического двухточечного неравенства М.Г.Крейна. Получены также некоторые уточнения неравенства Ю.В.Линника для частного случая п.о.ф. — характеристических функций. Рассмотрены приложения полученных результатов в теории сигналов и аппроксимации функций суммами целочисленных сдвигов квадратичных экспонент, намечены некоторые дальнейшие обобщения, см. также [4]–[5].

Результаты основаны на использовании комплексного анализа и особенно основной теоремы теории п.о.ф. — теоремы Бохнера.

Литература

[1] R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton University Press, 2007.

[2] M. G. Krein, Selected Works, vol. 1, Kiev, 1993.

[3] E. A. Gorin, Inequalities for positive–definite functions, Functional Analysis and Its Applications, 2015, 49:4, 301–303.

[4] A. B. Pevnyi, S. M. Sitnik, Inequalities for strictly positive definite functions, Scientific Bulletin of the Belgorod State University, 2015, 40, 106–114. (in Russian).

[5] A. B. Pevnyi, S. M. Sitnik, Inequalities of M.G. Krein, Yu.V. Linnik and E.A. Gorin for positive definite functions, 2016, arXiv:1609.01218, 9 p.

О МОНОДРОМНОЙ ШКАЛЕ НИЛЬСОНА ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Сенашов[19] (Красноярск, ИМиФИ СФУ)
asenashov@mail.ru

В статье рассматривается классификация неалгебраических функций с помощью теоемы Нильсона[1].

Чтобы ее сформулировать нам потребуется ввести следующие определения. Мы будем работать в комплексном n-мерном пространстве с точками $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Определение 1. $K(C^n)$ – класс всех комплексно значных (в общем многозначных) функций, которые определены и регулярно аналитичны в области вида $C^n \backslash V(f)$, где $V(f)$ алгебраическое многообразие в C^n, но не C^n.

В основе определения шкалы Нильсона лежат монодромные свойства многозначных функций. Уточним класс путей в $C^n \backslash V(f)$, вдоль которых будут рассматриваться вариации ветвей функций.

Определение 2. $B(V)$ – класс всех замкнутых путей γ в $C^n \backslash V$, со свойством: существует алгебраическая функция $\alpha\ C \to C^n$ такая, что для $r >> 1$ замкнутый путь $\gamma_r(\alpha) : t \to \alpha(re^{2\pi it}), t \in [0, 1]$, гомотопен γ в $C^n \backslash V(f)$.

Для всякого пути γ через T_γ обозначим оператор, переводящий росток аналитической функции в его аналитическое продолжение при обходе пути γ.

Определение 3. Для натурального m, определим $P_m(C^n)$ как класс всех функций $f \epsilon K(C^n)$ таких, что для каждого пути $\gamma \in B(V(f))$ и каждой ветви f_0 многозначной функции f выполняется равенство $(T^k_\gamma - I)^m f_0 = 0$ для некоторого положительного целого $k = k(\gamma, f_0)$, где I – тождественный оператор.

Интеграл с параметром

$$g(y) = \int_{E_n} f(x, y) dx,$$

[19] Работа поддержана грантом Российского правительства поддержки исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (№14.У26.31.0006) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ №НШ-9149.2016.1.

по n-мерному симплексу E_n.

Для определения определения принадлежности классу $P_m(C^n)$ важна следующая теорема:

Теорема 1 (Nilson[1])**.** *Предположим, что функция f в из* $P_m(C^{n+l})$ *(может быть аналитически продолжено к функции из* $P_m(C^{n+l})$*). Тогда функция g класса* $P_{m+n}(C^l)$*.*

Используя эту теорему, найдены классы диагоналей следующих функций из книги А.К Циха[2] и Д.Ю. Почекутова[3] .

1. Диагональ $d(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k)!}{(k!)^3} y^k$ рациональной функции $\frac{1}{1-z_1-z_2-z_3}$ допускает интегральное представление:

$$F(1/2, 1/2, 1, y) = 2/\pi \int_0^{\frac{1}{2}} dz/(1-x^2)(1-x^2 y).$$

Показано, что $F(y)$ класса $P_2(C^1)$.

2. Для функции:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{x_1^2 x_2 - 4x_1 x_2 + x_1 x_2^2 + 1}.$$

односторонняя диагональ имеет представление в виде:

$$d_{(1,1)}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma_1} \frac{dz_2}{(x_1^2 x_2 - 4x_1 x_2 + x_1 x_2^2 + 1)(x_1 x_2 - y)}\Bigg|_V .$$

Показано, что $d_{(1,1)}(t)$ принадлежит классу $P_2(C^1)$.

Литература

[1] Nils. Nilsson, Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals. Ark. Mat. 18 (1980), no. 1-2, 181–198.

[2] А. К. Цих Многомерные вычеты и их приложения. Новосибирск, Наука, 1988.

[3] Д. Ю. Почекутов Диагонали рядов Лорана рациональных функций: Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50 (6). С.1370–1383.

BEGINNINGS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY ON ADMISSIBLE SCHEMES

N. V. Timofeeva
ntimofeeva@list.ru

The (classical) Kobayashi–Hitchin correspondence provides explicit description of moduli for antiselfdual connections on Hermitian vector bundle over compact Hermitian manifold in terms of moduli of algebraic slope-stable vector bundles on it.

In the series of papers ([1],[2] and references within) the author constructed a new compactification $\widetilde{M}$ for moduli of stable vector bundles of fixed rank and Hilbert polynomial on a smooth projective algebraic surface S over a field $k = \overline{k}$ of zero characteristic. In this compactification families of stable vector bundles on the projective polarized surface (S, L) are completed by vector bundles (of some prescribed view) on projective polarized algebraic schemes $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ of certain class. These schemes $\widetilde{S}$ were called *admissible schemes* and are constructed from the initial surface S. Now we restrict ourselves by the field of complex numbers.

The prospective goal is to expand the Kobayashi–Hitchin correspondence to the whole of the new compactification $\widetilde{M}$. In the talk I plan to describe the modifications of some basic differential geometry notions for admissible schemes and vector bundles on them.

Литература

[1] N. V. Timofeeva, On a morphism of compactifications of moduli scheme of vector bundles, SEMR, 2015, 12, 577 – 591.

[2] N. V. Timofeeva, Isomorphism of compactifications of vector bundles moduli: nonreduced moduli, Modeling and Analysis of Information Systems, 2015, 22:5, 629–647 (in Russian). English translation in arXiv:1411.7872

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РЕЗОЛЬВЕНТА ЦИКЛА, РАЗДЕЛЯЮЩЕГО НАБОР ПОВЕРХНОСТЕЙ

Р. В. Ульверт[20] (Красноярск)
ulvertrom@yandex.ru

Пусть $Y = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ — набор замкнутых подмножеств вещественного многообразия X размерности d.

Определение 1. Будем говорить, что $(d-m)$-мерный цикл Γ в $X \setminus (Y_1 \cup \ldots \cup Y_m)$ разделяет набор Y, если Γ гомологичен нулю в $X \setminus (Y_1 \cup \ldots [k] \ldots \cup Y_m)$ для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Понятие разделяющего цикла появилось в комплексном анализе в связи с теорией многомерных вычетов. Пусть X — комплексно аналитическое многообразие комплексной размерности n $(d = 2n)$. Можно показать, что n-циклы, участвующие в определении локальных вычетов для набора n дивизоров в X (*локальные* циклы), разделяют данный набор дивизоров. В качестве замкнутых множеств Y_j выступают аналитические гиперповерхности.

Другой пример разделяющих циклов связан с известным нетривиальным зацеплением, состоящем из трех топологических окружностей, которые попарно незацеплены (*кольца Борромео*). В данном случае, каждая из окружностей как одномерный цикл разделяет набор двух других окружностей.

Соотнесем понятие разделяющего цикла с понятием $\mathcal{U}$-резольвенты, данным Э. Глисоном в [Glsn63]. Обозначим $\mathcal{U}_j = X \setminus Y_j$, $\mathcal{U}_{j_0 j_1 \ldots j_p} = \mathcal{U}_{j_0} \cap \mathcal{U}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{j_p}$. Рассмотрим двойной комплекс $(S_{p,q})$ групп сингулярных цепей для открытого покрытия $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_j\}$ многообразия $X \setminus (Y_1 \cap \ldots \cap Y_m)$, где

$$S_{p,q} = \bigoplus_{j_0 < j_1 < \ldots < j_p} S_q(\mathcal{U}_{j_0 j_1 \ldots j_p}), \quad p, q = 0, 1, \ldots,$$

с граничными операторами $\delta \colon S_{p,\bullet} \to S_{p-1,\bullet}$ (оператор Чеха) и $\partial \colon S_{\bullet,q} \to S_{\bullet,q-1}$.

Определение 2. $\mathcal{U}$-резольвентой $(d-m)$-мерного цикла Γ из $X \setminus (Y_1 \cup \cdots \cup Y_m)$ будем называть последовательность $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^{m-1}$, для которой выполняются следующие условия: 1) $\xi_i \in S_{m-i-1,d-m+i}$; 2) $\xi_0 = \Gamma$; 3) $\delta(\xi_{i-1}) = \partial(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, m-1$.

[20]Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ №НШ-9149.2016.1.

Заметим, что цикл $\Gamma = \xi_0 \in S_{m-1,d-m}$ разделяет набор замкнутых множеств Y тогда, и только тогда, когда существует цепь $\xi_1 \in S_{m-2,d-m+1}$, для которой $\delta(\xi_0) = \partial(\xi_1)$. Таким образом, для существования $\mathcal{U}$-резольвенты необходимо, чтобы цикл был разделяющим (а при $m = 2$ это условие является еще и достаточным). Если для цикла Γ имеется $\mathcal{U}$-резольвента $\xi = \{\xi_i\}$, то цепь $\varepsilon(\xi_{m-1}) \in S_{d-1}(X \setminus (Y_1 \cap \ldots \cap Y_m))$, равная сумме компонент цепи ξ_{m-1} по всем элементам покрытия $\{\mathcal{U}_j\}$, является циклом. При этом можно показать, что если $\xi = \{\xi_i\}$ и $\xi' = \{\xi'_i\}$ — $\mathcal{U}$-резольвенты циклов Γ и Γ' соответственно, то из гомологичности циклов $\varepsilon(\xi_{m-1})$ и $\varepsilon(\xi'_{m-1})$ следует гомологичность циклов Γ и Γ'. Таким образом, при описании гомологий разделяющих циклов можно использовать информацию о $(d-1)$-гомологиях многообразия $X \setminus (Y_1 \cap \ldots \cap Y_m)$.

При доказательстве следующих двух теорем существенно использовалась возможность построения $\mathcal{U}$-резольвент для разделяющих циклов. Первая из этих теорем была ранее доказана А. К. Цихом с использованием точной последовательности Майера — Виеториса для гомологий объединения (см. [Tsikh92]). Во второй теореме обобщается тот геометрически наглядный факт, что для колец Борромео на каждое из колец можно натянуть «пленку», лежащую в дополнении к другим двум кольцам. В качестве набора замкнутых множеств выступает набор замкнутых вещественных поверхностей.

Теорема 1. *Пусть X — многообразие Штейна размерности n, и $Y = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ — набор гиперповерхностей в X. Тогда n-цикл Γ из $X \setminus (Y_1 \cup \cdots \cup Y_n)$ разделяет набор Y тогда, и только тогда, когда Γ гомологичен линейной комбинации локальных циклов, соответствующих изолированным точкам из $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$.*

Теорема 2. *Пусть X — сфера S^{2n+1} размерности $2n+1$, $n \geqslant 1$, и Y — набор из $n+2$ попарно непересекающихся поверхностей, гомеоморфных S^n, в котором каждая из поверхностей разделяет остальные. Тогда каждая сфера из набора Y гомологически тривиальна в дополнении остальных сфер.*

Литература

[Glsn63] A. M. Gleason, The Cauchy-Weil theorem, J. of Math. and Mechanics, 1963, V.12, №3, 429–444.

[Tsikh92] A. K. Tsikh, Multidimensional residues and their applications, AMS, 103, Providence, 1992.

A CLASS OF TOEPLITZ OPERATORS IN SEVERAL COMPLEX VARIABLES

D. P. Fedchenko[21] **(Krasnoyarsk, SibFU)**
fdp@bk.ru

In order to study the Toeplitz algebras related to a Dirac operators in a neighborhood of a closed bounded domain $\mathcal{D}$ with smooth boundary in $\mathbb{C}^n$ we introduce a singular Cauchy type integral. We compute its principal symbol, thus initiating the index theory.

[21]This work is supported by the Russian Federation Government grant to conduct research under the guidance of leading scientists at Siberian Federal University (contract 14.Y26.31.0006) and by the grant of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation №1.2604.2017/PCh

КАСАТЕЛЬНЫЕ КОНУСЫ К МНОГООБРАЗИЯМ ШУБЕРТА ДЛЯ ТИПОВ E_6, E_7, E_8

А. А. Шевченко[22] **(Самара, Самарский университет)**
shevchenko.alexander.1618@gmail.com

Пусть G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, T — максимальный тор, B — содержащая его борелевская подгруппа, W — группа Вейля G относительно T. Обозначим через $F = G/B$ многообразие флагов. Оно распадается в объединение клеток Шуберта $F = \sqcup_{w \in W} X_w^o$. Замыкание клетки Шуберта X_w^o обозначается X_w и называется многообразием Шуберта, соответствующим элементу w. Обозначим через C_w касательный конус к X_w в точке $p = eB$, рассматриваемый как подсхема в касательном пространстве $T_pX_w \subset T_pF$. Описание касательных конусов — сложная задача теории алгебраических групп [BL]. В 2011 году Д.Ю. Елисеев и А.Н. Панов [EP] вычислили касательные конусы в явном виде для $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $n \leqslant 5$. На основании полученных результатов А.Н. Панов выдвинул следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Пусть w_1, $w_2 \in W$ — различные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.*

Легко показать, что гипотезу достаточно проверить для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней. В 2013 году гипотеза была доказана Д.Ю. Елисеевым и М.В. Игнатьевым [EI] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типов A_n, F_4, G_2. В 2013 году гипотеза была доказана совместно М.А. Бочкарёвым, М.В. Игнатьевым и автором [BIS] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типов B_n и C_n. В 2014 году гипотеза была доказана для так называемых базисных инволюций совместно М.В. Игнатьевым и автором [IS] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типа D_n.

В докладе будут рассказаны полученные результаты на пути к

[22]Работа поддержана грантом РФФИ 16–01–00154а.

доказательству для исключительных групп Вейля типа E.

Литература

[BIS] M. A. Bochkarev, M. V. Ignatyev, A. A. Shevchenko, Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n, J. Algebra, **465** (2016), 259–286, `arXiv: math.RT/1310.3166`.

[BL] S. Billey, S. Lakshmibai, Singular loci of Schubert varieties, Progr. in Math. **182** (2000), Birkhäuser.

[EI] Д. Ю. Елисеев, М. В. Игнатьев, Многочлены Костанта–Кумара и касательные конусы к многообразиям Шуберта для инволюций в A_n, F_4, G_2, Записки научных семинаров ПОМИ **414** (2013), 82–105, `arXiv: math.RT/1210.5740`.

[EP] Д. Ю. Елисеев, А. Н. Панов, Касательные конусы многообразий Шуберта для A_n малого ранга, Записки научных семинаров ПОМИ **394** (2011), 218–225, `arXiv: math.RT/1109.0399`.

[IS] М. В. Игнатьев, А. А. Шевченко, О касательных конусах к многообразиям Шуберта типа D_n, Алгебра и анализ, **27** (2015), no. 4, 28–49, `arXiv: math.AG/1410.4025`.

ОПЕРАТОР ТОДДА И МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ

О. А. Шишкина[23] (Красноярск)
olga_a_sh@mail.ru

Рассмотрены обобщения чисел и многочленов Бернулли нескольких переменных. Строится разностный оператор, действующий на функциях в рациональном конусе, доказывается многомерный аналог основного свойства многочленов Бернулли.

Кроме того, вычислены значения интегралов от многочлена Бернулли по сдвигам фундаментального параллелотопа, и найден многомерный аналог формулы Бернулли для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа.

Пусть $a^1, \ldots, a^n$ *линейно независимые* векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a_1^j, \ldots, a_n^j\right)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ - целые числа.

Определение 1. *Рациональным конусом*, построенным на векторах $a^1, \ldots, a^n$, назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \ldots, n\}$.

Определение 2. Коэффициенты b_μ^A разложения функции $Td\,(\xi) = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1}$ в ряд

$$Td\,(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \xi^\mu,$$

где $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$, $\mu! = \mu_1!...\mu_n!$, $\xi^\mu = {\xi_1}^{\mu_1}...{\xi_n}^{\mu_n}$, а $\mu \geq 0$ означает, что $\mu_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$, назовем *числами Бернулли, ассоциированными с конусом K.*

Определение 3. Соответствующий функции $Td\,(\xi)$ дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$Td\,(\partial) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \partial^\mu,$$

Обозначим $\Lambda = \{y \in \mathbb{Z}^n : y = \lambda_1 a^1 + ... + \lambda_n a^n, \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, ..., n\}$ подрешетка решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, ..., a^n$. Обозначим Π_a — фундаментальный параллелотоп $\Pi_a = \left\{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{<} a\right\}$, где $a =$

[23]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006) и в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ №НШ-9149.2016.1

$a^1 + ... + a^n$. Отметим, что множество точек с целыми координатами, лежащих в фундаментальном паралелотопе Π_a конечно и равно $d\left(\Lambda\right)$ — индексу подрешетки Λ в решетке $\mathbb{Z}^n$, кроме того, $d\left(\Lambda\right) = \Delta$.

Нам потребуется следующее преобразование векторов $v = \xi_1 a^1 + ... + \xi_n a^n$, заданных в базисе $a^1, ..., a^n$ координатами $(\xi_1, ..., \xi_n)$:

$$\chi_a\left(v\right) = \sum_k \chi\left(\xi_k\right) a^k,$$

где

$$\chi\left(\xi\right) = \begin{cases} 1, \xi = 0; \\ 0, \xi \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть x лежит на подрешетке Λ решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, ..., a^n$. Для суммы значений мономов t^μ в целых точках рационального параллелотопа $\Pi_K\left(x\right) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} x\}$ справедлива формула:*

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} t^\mu = \frac{1}{\Delta} \sum_{v \in \Pi_a} \int\limits_{\Pi_K(v; v + x + \chi_a(v))} Td\left(\partial\right) \tau^\mu d\tau,$$

где $\Pi_K\left(v; v + x + \chi_a\left(v\right)\right) = \{t \in \mathbb{R}^n : v \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} v + x + \chi_a\left(v\right)\}$

Литература

[1] M. Brion, N. Berline, Local Euler-Maclaurin formula for polytopes, Moscow Mathematical Society Journal, 2007, 7, 355–383.

[2] M. Brion, M. Vergne, Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes, Journal of the American Mathematical Society, 1997, 10, 4, 797-833.

[3] A. V. Ustinov, A discrete analoge of Euler's summation formula, Mat. Zametki, 2002, 71, 6, 931-936, (in Russian).

[4] O. A. Shishkina, The Euler-Maclaurin formula for rational parallelotope, Izvestia Irkutskogo Gosydarstvennogo Universiteta, seria „Matematika", 2015, 13, 56–71, (in Russian).

[5] O. A. Shishkina, The Euler-Maclaurin Formula and Differential Operators of Infinite Order, Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics, 2015, 8, 1, 86–93.