ГЕОМЕТРИЯ ТВИСТОРОВ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

А.Г.Сергеев

2 мая 2018

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Главной темой курса является изложение основ теории твисторов и их применений к решению уравнений калибровочной теории поля, таких как уравнения Янга–Миллса и др.

Твисторы были введены Роджером Пенроузом для того, чтобы с их помощью описывать решения конформно инвариантных уравнений теории поля на пространстве Минковского. Его "твисторная программа" заключалась в том, чтобы с помощью построенного им твисторного соответствия сопоставить решениям уравнений указанного типа объекты комплексной аналитической геометрии (такие как сечения голоморфных расслоений, когомологии с коэффициентами в пучках голоморфных функций и т.д.) на пространстве твисторов. Как подчеркивал сам Пенроуз, эта программа близка по духу к идее Эйнштейна, лежащей в основе общей теории относительности. По мысли Эйнштейна, в метрике, создаваемой силой тяготения астрономических объектов, тела движутся по геодезическим. Образно говоря, уравнения гравитации "исчезают" , а остается только риманова геометрия. Подобно этому, можно говорить о том, что при переходе к твисторному описанию конформно инвариантные уравнения "исчезают" , а остается только комплексная геометрия.

Первая часть курса, посвященная геометрии твисторов, открывается построением твисторной модели пространства Минковского, после чего мы переходим к исследованию твисторного соответствия. Это соответствие сопоставляет геометрическим объектам в пространстве Минковского отвечающие им объекты комплексной геометрии пространства твисторов. Наряду с твисторной рассматривается также клейнова модель пространства Минковского, в которой указанное пространство отождествляется с квадрикой в 5-мерном проективном пространстве $\mathbb{CP}^5$. Затем, следуя известной работе Атьи–Хитчина–Зингера, строятся твисторные расслоения над произвольными римановыми многообразиями четной размерности.

Во второй части курса построенная теория твисторов применяется к исследованию решений уравнений калибровочной теории поля. В качестве первого примера рассматриваются уравнения дуальности Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ и их решения, называемые инстантонами. Теорема Атьи–Уорда дает твисторную интерпретацию инстантонов, а основанная на этой теореме конструкция Атьи–Дринфельда–Манина–Хитчина позволяет полностью описать пространство модулей инстантонов.

Следующим примером уравнений калибровочной теории поля служат уравнения монополей в $\mathbb{R}^3$, называемые также уравнениями Богомольного. Их твисторная интерпретация была предложена Намом.

Дальнейшие примеры относятся к двумерным моделям. В качестве первой из них рассматриваются автодуальные уравнения Янга–Миллса–Хиггса в $\mathbb{R}^2$, называемые иначе вихревыми уравнениями. Пространство модулей их решений описывается теоремой Таубса. Другим примером двумерных моделей служат уравнения Хитчина на римановых поверхностях. Эти уравнения тесно связаны с расслоениями Хиггса, задаваемыми парами (E, Φ), состоящими из голоморфного векторного расслоения E и голоморфного сечения Φ (поля Хиггса) расслоения эндоморфизмов этого расслоения. Соответствие Хитчина–Кобаяши устанавливает связь между стабильными расслоениями Хиггса и решениями уравнений Хитчина. В заключение мы обращаемся к двумерным σ-моделям, или в математической терминологии, гармоническим отображения двумерной сферы в римановы многообразия. Твисторная интерпретация таких отображений была подробно исследована Иллсом и его коллегами.

Все приведенные уравнения имеют глубокий физический смысл, поэтому их изучение представляет несомненный интерес как для физиков, так и для математиков.

Данный курс лекций читался автором в весеннем семестре 2018-го года Научно-образовательного центра Математического института имени В.А.Стеклова РАН. Я глубоко благодарен всем слушателям курса и в особенности И.В.Маресину за их замечания, которые способствовали улучшению первоначального текста статьи.

При подготовке курса автор пользовался частичной финансовой поддержкой со стороны грантов РФФИ 16-01-00117, 13-02-91330 и программой Президиума РАН "Нелинейная динамика" .

Москва А.Г.Сергеев

Глава 1

ТВИСТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1 Твисторная модель пространства Минковского

1.1.1 Пространство Минковского

Пространство Минковского M есть 4-мерное вещественное векторное пространство, наделенное *метрикой Лоренца*. Квадрат длины вектора $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M$ в этой метрике задается формулой

$$|x|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Группа L линейных преобразований пространства M, сохраняющих метрику Лоренца, называется *группой Лоренца*.

Особый интерес представляют векторы x, имеющие нулевую длину: $|x|^2 = 0$. Такие векторы называются *световыми* или *изотропными*. *Световая прямая* — это прямая, направляющий вектор которой является световым. Световые прямые, проходящие через точку 0, образуют *световой конус* с вершиной в 0:

$$C = C_0 = \{x \in M : \ |x|^2 = 0\} = \{x \in M : \ (x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\}.$$

Внутренность светового конуса $V = \{x \in M : \ |x|^2 > 0\}$ состоит из двух компонент: *конуса будущего*

$$V_+ = \{x \in M : \ |x|^2 > 0, x^0 > 0\}$$

и *конуса прошлого*

$$V_- = \{x \in M : \ |x|^2 > 0, x^0 < 0\}.$$

Световой конус C_{x_0} с вершиной в произвольной точке $x_0 \in M$ определяется похожим образом:

$$C_{x_0} = \{x \in M : \ |x - x_0|^2 = 0\}.$$

Комплексное пространство Минковского $\mathbb{C}M$ есть комплексификация пространства Минковского M, совпадающая с 4-мерным комплексным векторным пространством, состоящим из векторов $z = (z^0, z^1, z^2, z^3) \in \mathbb{C}^4$. Также, как в вещественном случае, вектор $z \in \mathbb{C}M$ называется *комплексным световым вектором*, если

$$|z|^2 := (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 = 0.$$

Комплексный световой конус с вершиной в точке $z_0 \in \mathbb{C}M$ задается уравнением: $(z - z_0)^2 = 0$. Аналогами конусов будущего и прошлого в комплексном случае являются *труба будущего*

$$\mathbb{C}M_+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C}M : \ |y|^2 > 0, y^0 > 0\}$$

и *труба прошлого*

$$\mathbb{C}M_- = \{z = x + iy \in \mathbb{C}M : \ |y|^2 > 0, y^0 < 0\}.$$

Евклидово пространство E является 4-мерным вещественным векторным подпространством в $\mathbb{C}M$, задаваемым уравнениями

$$z^0 = x^0, z^1 = ix^1, z^2 = ix^2, z^3 = ix^3,$$

где x^0, x^1, x^2, x^3 – произвольные вещественные числа.

1.1.2 Спинорная модель пространства Минковского

Отображение Паули сопоставляет вектору $x \in M$ комплексную 2×2-матрицу X по формуле:

$$M \ni x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longmapsto X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} .$$

Используя *матрицы Паули*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,$$

отображение Паули можно записать в виде

$$x \longmapsto X = x^0\sigma_0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3,$$

где $\sigma_0 = I$ – единичная 2×2-матрица.

Отображение Паули реализует пространство Минковского M в виде пространства $\mathrm{Herm}(2)$ эрмитовых 2×2-матриц. При этом отображении квадрат нормы Лоренца $|x|^2$ вектора $x \in M$ переходит в $\det X$.

На пространстве $\mathrm{Herm}(2)$ эрмитовых матриц действует группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ комплексных 2×2-матриц с единичным детерминантом по правилу:

$$X \longmapsto AXA^*, \quad X \in \mathrm{Herm}(2),$$

где $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, а A^* есть эрмитово сопряженная матрица: $A^* = \bar{A}^t$. Указанное действие сохраняет $\det X$ и потому, в силу соответствия Паули, порождает линейное преобразование пространства Минковского, сохраняющее метрику Лоренца. При этом матрицы $\pm A$ порождают одно и то же преобразование Лоренца, иначе говоря, группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ является 2-кратным накрытием группы Лоренца L (докажите последнее утверждение!.

Комплексное отображение Паули, задаваемое формулой

$$\mathbb{C}M \ni z \longmapsto \sum_{\mu=0}^{3} z^i\sigma_i =: Z \in \mathbb{C}[2 \times 2],$$

реализует комплексное пространство Минковского $\mathbb{C}M$ в виде пространства $\mathbb{C}[2 \times 2]$ комплексных 2×2-матриц.

При этом труба будущего $\mathbb{C}M_+$ переходит в *матричную верхнюю полуплоскость*

$$H_+ = \{Z \in \mathbb{C}[2 \times 2] : \ \mathrm{Im}\, Z := \frac{1}{2i}(Z - Z^*) \gg 0\}.$$

Неравенство $\mathrm{Im}\, Z \gg 0$ означает, что эрмитова матрица $\mathrm{Im}\, Z$ положительно определена, т.е. ее собственные значения положительны. Если применить к H_+, по аналогии со скалярным случаем, *преобразование Кэли*

$$Z \longmapsto W = (I - iZ)^{-1}(I + iZ),$$

то матричная верхняя полуплоскость H_+ перейдет в *матричный диск*

$$D = \{W \in \mathbb{C}[2 \times 2] : \ I - W^*W) \gg 0\}.$$

Это *классическая область Картана 1-го типа.* Пространство эрмитовых матриц $\mathrm{Herm}(2)$ под действием преобразования Кэли переходит в остов матричного диска D, совпадающий с группой унитарных матриц $\mathrm{U}(2)$.

Пользуясь сквозным отображением из M в <u>компактную</u> группу $\mathrm{U}(2)$, мы можем построить компактификацию пространства M, определяя ее как обратный образ $\mathrm{U}(2)$ при отображении $M \to \mathrm{U}(2)$. Это так называемая *конформная компактификация* пространства Минковского, используемая в общей теории относительности.

Задача 1. Опишите топологию компактифицированного пространства Минковского. Какова топология "бесконечно удаленной части" этого пространства?

Комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^2$, на котором группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ действует как группа матриц, называется *пространством спиноров*.

1.1.3 Твисторная модель пространства Минковского

Перейдем к построению твисторной модели пространства Минковского. Обозначим через $\mathbb{T}$ 4-мерное комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^4$, элементы которого удобно записывать в виде пар $\zeta = (\omega, \pi)$, где $\omega, \pi \in \mathbb{C}^2$. Сопоставим матрице $Z \in \mathbb{C}[2 \times 2]$ двумерное комплексное подпространство в $\mathbb{T}$, задаваемое системой из двух комплексных уравнений

$$\omega = Z\pi.$$

Тем самым, определяется вложение пространства матриц $\mathbb{C}[2 \times 2]$ в грассманово многообразие $G_2(\mathbb{T})$, состоящее из 2-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{T}$.

В композиции с отображением Паули получаем вложение

$$\mathbb{C}M \longrightarrow \mathbb{C}[2 \times 2] \longrightarrow G_2(\mathbb{T}) \qquad (1.1)$$

комплексного пространства Минковского $\mathbb{C}M$ в грассманово многообразие $G_2(\mathbb{T})$. Учитывая, что это многообразие компактно, естественно считать $G_2(\mathbb{T})$ моделью *компактифицированного комплексифицированного пространства Минковского* $\mathbb{CM}$. Само пространство $\mathbb{T}$ называется *пространством твисторов*. Его проективизация $\mathbb{PT}$ состоит из четверок $[\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \zeta_4]$ комплексных чисел $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$, заданных с точностью до пропорциональности, т.е.

$$[\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \zeta_4] = [\lambda\zeta_1 : \lambda\zeta_2 : \lambda\zeta_3 : \lambda\zeta_4]$$

для любого ненулевого комплексного числа λ. Пространство $\mathbb{PT}$ называется *пространством проективных твисторов*. Грассманово многообразие $G_2(\mathbb{T})$ можно также рассматривать как грассманово многообразие $G_1(\mathbb{PT})$ проективных прямых в $\mathbb{PT} = \mathbb{CP}^3$. Проективная прямая в $\mathbb{PT}$ задается парой комплексных <u>однородных</u> уравнений в пространстве твисторов $\mathbb{T}$.

Рассмотрим "идеальные элементы" пространства $\mathbb{CM}$, т.е. точки $G_2(\mathbb{T})$, не принадлежащие образу отображения (1.1). Обозначим через P_∞ "бесконечно удаленное" подпространство в $\mathbb{T}$, задаваемое уравнением

$$P_\infty : \ \pi = 0.$$

К дополнению образа отображения (1.1) принадлежат 2-подпространства в $\mathbb{T}$, имеющие ненулевое пересечение с P_∞. Любое 2-подпространство в $\mathbb{T}$ задается системой уравнений

$$Z_1\omega = Z_2\pi,$$

где комплексные 2×2-матрицы Z_1, Z_2 определены с точностью до умножения слева на невырожденную 2×2-матрицу. Такое подпространство имеет ненулевое пересечение с P_∞, если $\det Z_1 = 0$. Как мы отмечали ранее, уравнение $\det Z_2 = 0$ описывает в $\mathbb{C}M$ комплексный световой конус в нуле. Поэтому множество решений уравнения $\det Z_1 = 0$ естественно интерпретировать как комплексный световой конус "в бесконечности". Тем самым, "идеальное" множество $\mathbb{CM} \setminus \mathbb{C}M$ отождествляется с комплексным световым конусом "в бесконечности".

Построенное отображение (1.1): $\mathbb{C}M \to G_2(\mathbb{T}) = G_1(\mathbb{PT})$ называется *твисторным соответствием* или *соответствием Пенроуза*.

1.2 Твисторное соответствие

1.2.1 Твисторное соответствие в случае комплексного пространства Минковского

По определению твисторного соответствия

$$\{\text{точка } \mathbb{C}M\} \longrightarrow \{\text{проективная прямая в } \mathbb{PT}\}$$

Отождествляя точку в $\mathbb{PT}$ с пучком проходящих через нее проективных прямых, получим, что точке $\mathbb{PT}$ отвечает 2-мерная комплексная изотропная плоскость в $\mathbb{C}M$, называемая *α-плоскостью*:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{2-мерная комплексная изотроп-}\\ \text{ная плоскость} \equiv \alpha\text{-плоскость}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{точка } \mathbb{PT} \equiv \text{пучок проективных пря-}\\ \text{мых, проходящих через эту точку}\end{array}\right\}$$

Плоскость в $\mathbb{C}M$ называется *изотропной*, если она натянута на два линейно независимых световых вектора. Двойственный тип изотропных плоскостей в $\mathbb{C}M$, называемых *β-плоскостями*, отвечает двойственному объекту в $\mathbb{PT}$, а именно, проективной плоскости, отождествляемой с системой лежащих в ней проективных прямых:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{2-мерная комплексная изотроп-}\\ \text{ная плоскость} \equiv \beta\text{-плоскость}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{проективная плоскость в } \mathbb{PT} \equiv \text{систе-}\\ \text{ма проективных прямых, лежащих в}\\ \text{этой плоскости}\end{array}\right\}$$

Взяв пересечение двух последних диаграмм, найдем твисторный образ комплексной световой прямой

$$\left\{\begin{array}{l}\text{комплексная световая}\\ \text{прямая в } \mathbb{C}M\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(0,2)\text{-флаг в } \mathbb{PT} \equiv (\text{точка } \mathbb{PT}, \text{ содержащая}\\ \text{ее проективная плоскость}) \equiv \text{ пучок про-}\\ \text{ективных прямых, лежащих в указанной}\\ \text{плоскости и проходящих через указанную}\\ \text{точку}\end{array}\right\}$$

Из последних утверждений следует, что

$$\left\{\begin{array}{l}\text{комплексный световой конус в } \mathbb{C}M \equiv\\ \text{пучок комплексных световых пря-}\\ \text{мых, проходящих через фиксирован-}\\ \text{ную точку } \mathbb{C}M\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{проективная прямая в } \mathbb{PT} \equiv\\ \text{семейство } (0,1,2)\text{-флагов в } \mathbb{PT}\\ \text{с фиксированной проективной}\\ \text{прямой}\end{array}\right\}$$

1.2.2 Твисторное соответствие в случае вещественного пространства Минковского

Твисторная норма элемента $\zeta = (\omega, \pi) \in \mathbb{T}$ по определению равна

$$\Phi(\zeta) = \mathrm{Im}\langle \omega, \pi \rangle,$$

где $\langle \omega, \pi \rangle$ – эрмитово скалярное произведение векторов $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ и $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ в $\mathbb{C}^2$:

$$\langle \omega, \pi \rangle = \omega_1 \bar{\pi}_1 + \omega_2 \bar{\pi}_2.$$

Обозначим через $\mathbb{N}$ квадрику в $\mathbb{T}$, задаваемую уравнением

$$\mathbb{N}: \ \Phi(\zeta) = 0,$$

а через $\mathbb{PN}$ отвечающую ей проективную квадрику.

При твисторном соответствии точки M переходят в проективные прямые, целиком лежащие на $\mathbb{PN}$:

$$\{\text{точка } M\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{проективная прямая,}\\ \text{лежащая на } \mathbb{PN}\end{matrix}\right\}$$

Образом световой прямой в M при твисторном соответствии является точка $\mathbb{PN}$, которая отождествляется с пучком проективных прямых, лежащих в пересечении комплексной касательной плоскости к $\mathbb{PN}$ в фиксированной точке, с квадрикой $\mathbb{PN}$:

$$\{\text{световая прямая в } M\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{точка } \mathbb{PN} \equiv (\text{точка } \mathbb{PN}, \text{ комплексная касатель-}\\ \text{ная плоскость к } \mathbb{PN} \text{ в этой точке}) \equiv \text{ пучок про-}\\ \text{ективных прямых на } \mathbb{PN}, \text{ лежащих в комплекс-}\\ \text{ной касательной плоскости и проходящих через}\\ \text{фиксированную точку}\end{matrix}\right\}$$

Световой конус в M отождествляется с проективной прямой на $\mathbb{PN}$:

$$\left\{\begin{matrix}\text{световой конус в } M \equiv \text{ пучок}\\ \text{световых прямых, проходящих}\\ \text{через фиксированную точку } M\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{проективная прямая в } \mathbb{PN} \equiv \text{ пересе-}\\ \text{чение } \mathbb{PN} \text{ с комплексной касательной}\\ \text{плоскостью в каждой точке фикси-}\\ \text{рованной проективной прямой}\end{matrix}\right\}$$

Тем самым, в случае вещественного пространства Минковского твисторное соответствие определяет двойственность следующего вида:

$$\{\text{точки } M\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{проективные прямые на}\\ \mathbb{PN}\end{matrix}\right\}$$

$$\{\text{световые прямые в } M\ \} \longrightarrow \{\text{точки } \mathbb{PN}\ \}$$

Следовательно, световые прямые, которые могут пересекаться друг с другом в M, распадаются на отдельные точки $\mathbb{PN}$. Этот факт имеет фундаментальное значение для всей теории твисторов.

Квадрика $\mathbb{N}$ делит пространство твисторов $\mathbb{T}$ на две части — *пространство положительных твисторов* $\mathbb{T}_+ = \{\zeta \in \mathbb{T} : \ \Phi(\zeta) > 0\}$ и *пространство отрицательных твисторов* $\mathbb{T}_- = \{\zeta \in \mathbb{T} : \ \Phi(\zeta) < 0\}$. Ограничение твисторного соответствия на трубы будущего и прошлого дает:

$$\{\text{точка } \mathbb{C}M_+\ \} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{проективная прямая, ле-}\\ \text{жащая в } \mathbb{PT}_+\end{matrix}\right\}$$

$$\{\text{точка } \mathbb{C}M_-\ \} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{проективная прямая, ле-}\\ \text{жащая в } \mathbb{PT}_-\end{matrix}\right\}$$

Квадрика $\mathbb{N} = \{\zeta \in \mathbb{T} : \ \Phi(\zeta) = 0\}$ имеет сигнатуру (2,2), поэтому в подходящем базисе пространства $\mathbb{T}$ ее можно записать в виде

$$\tilde{\Phi}(z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2.$$

Группа $\mathrm{SU}(2,2)$ линейных преобразований $\mathbb{T}$, сохраняющих квадрику $\mathbb{N}$, отвечает преобразованиям компактифицированного пространства Минковского $\mathbb{M}$, переводящим световые прямые в световые прямые и световые конусы в световые конусы.

Напомним, что преобразование пространства Минковского $\mathbb{M}$ называется *конформным*, если оно обладает указанным свойством. Группа конформных преобразований пространства $\mathbb{M}$ обозначается через $\mathrm{C}(1,3)$.

Мы только что показали, что преобразования из группы $\mathrm{SU}(2,2)$ порождают конформные преобразования компактифицированного пространства Минковского $\mathbb{M}$. При этом элементы $\pm A$, $\pm iA$ из $\mathrm{SU}(2,2)$ порождают одно и тоже преобразование $\mathbb{M}$. Иными словами, группа $\mathrm{SU}(2,2)$ является 4-кратным накрытием конформной группы $\mathrm{C}(1,3)$ пространства Минковского $\mathbb{M}$.

Рассмотрим более подробно групповую структуру твисторной модели $G_2(\mathbb{T})$ пространства Минковского. Группа

$$G := \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})/\{\pm I, \pm iI\}$$

действует естественным образом на $G_2(\mathbb{T})$. Фиксируем базис $\{e_i\}$ пространства $\mathbb{T}$, в котором квадрика $\mathbb{N}$ задается уравнением

$$\tilde{\Phi}(z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2 = 0.$$

Запишем произвольное линейное преобразование пространства твисторов $\mathbb{T}$ в виде блочной 4×4-матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где A, B, C, D – комплексные 2×2-матрицы. Обозначим через P_0 двумерное подпространство из $G_2(\mathbb{T})$ следующего вида

$$P_0 = \{z \in \mathbb{T}: \ z_3 = z_4 = 0\}.$$

Подгруппа изотропии G_0 группы G в точке P_0 состоит из блочных матриц (1.2), в которых $C = 0$, $\det A \cdot \det D = 1$. Поэтому $G_2(\mathbb{T})$ можно отождествить с однородным пространством группы G вида G/G_0.

Обозначим через $G^{\mathbb{R}}$ вещественную форму группы G вида

$$G^{\mathbb{R}} = \mathrm{SU}(2,2)/\{\pm I, \pm iI\}.$$

Подгруппа изотропии $G_0^{\mathbb{R}}$ в точке P_0 совпадает с $G_0 \cap G^{\mathbb{R}}$.

Покажем, что однородное пространство $G^{\mathbb{R}}/G_0^{\mathbb{R}}$ можно отождествить с твисторной моделью трубы будущего $\mathbb{C}M_+$. Действительно, твисторный образ $\mathbb{C}M_+$ совпадает с множеством 2-подпространств, лежащих в $\mathbb{T}_+$. Будем называть такие подпространства *положительными* и обозначать множество всех положительных подпространств через $G_2^+(\mathbb{T})$. Так как подпространство P_0 положительно, а группа $G^{\mathbb{R}}$ сохраняет свойство положительности и действует транзитивно на $G_2^+(\mathbb{T})$, то однородное пространство $G^{\mathbb{R}}/G_0^{\mathbb{R}}$ совпадает с $G_2^+(\mathbb{T}) = \mathbb{C}M_+$.

1.2.3 Твисторное соответствие в случае евклидова пространства

Образом точки евклидова пространства при твисторном соответствии является проективная прямая в $\mathbb{PT}$, инвариантная относительно отображения $j : [\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \zeta_4] \mapsto [-\zeta_2 : \zeta_1 : -\zeta_4 : \zeta_3]$:

$$\{\text{точка } E\ \} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{проективная } j\text{-инвариантная} \\ \text{прямая в } \mathbb{PN}\end{matrix}\right\}$$

Указанные j-инвариантные прямые не пересекаются друг с другом. Более того, в рассматриваемом случае твисторное соответствие совпадает с *расслоением Хопфа*

$$\pi : \mathbb{CP}^3 \xrightarrow{\mathbb{CP}^1} \mathbb{E},$$

где $\mathbb{E}$ – *компактифицированное евклидово пространство*, совпадающее со сферой S^4. Также как в 2-мерном случае, в котором сфера S^2 отождествляется с комплексной проективной прямой, в 4-мерном случае сферу S^4 можно отождествить с кватернионной проективной прямой.

Для того, чтобы пояснить это утверждение, напомним основные определения, относящиеся к кватернионам. *Пространство кватернионов* $\mathbb{H}$ состоит из элементов вида

$$x = x_1 + ix_2 + ix_3 + kx_4,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – произвольные вещественные числа, а i, j, k – мнимые единицы, т.е. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, связанные соотношением: $ij = -ji = k$. Как вещественное векторное пространство, $\mathbb{H}$ изоморфно $\mathbb{R}^4$ с покомпонентными операциями сложения и умножения на вещественные числа. Приведенное соотношение между мнимыми единицами позволяет ввести операцию *умножения* кватернионов.

Операция *сопряжения* кватернионов определяется формулой

$$\bar{x} = x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4.$$

С ее помощью можно ввести *норму* кватерниона, полагая

$$|x|^2 = x\bar{x} = \bar{x}x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

С алгебраической точки зрения пространство кватернионов является некоммутативным полем (или телом), поскольку каждый ненулевой кватернион x обладает обратным:

$$x^{-1} = \bar{x}/|x|^2.$$

Кватернионы удобно записывать в комплексной форме

$$x = z_1 + jz_2, \quad \text{где } z_1 = x_1 + ix_2,\ z_2 = x_3 + ix_4.$$

Как комплексное векторное пространство, $\mathbb{H}$ изоморфно $\mathbb{C}^2$.

Другой удобный способ представления кватернионов — матричный. А именно, кватернионы можно реализовать в виде комплексных 2×2-матриц, сопоставляя кватерниону $x = z_1 + jz_2$ матрицу

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} .$$

При этом умножение кватернионов переходит в произведение матриц. "Единичная окружность" в $\mathbb{H}$, совпадающая с

$$\mathrm{Sp}(1) = \{x \in \mathbb{H} : \ |x|^2 = 1\},$$

отождествляется с группой $\mathrm{SU}(2)$ унитарных 2×2-матриц с определителем 1.

Теперь мы можем вернуться к интерпретации сферы S^4 как кватернионной проективной прямой. *Кватернионная проективная прямая* $\mathbb{HP}^1$ состоит из пар кватернионов $[(z_1 + jz_2) : (z_3 + jz_4)]$, определенных с точностью до умножения справа на ненулевые кватернионы.

Упомянутое выше отображение $\pi : \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{HP}^1$ задается тавтологической формулой

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \longmapsto [(z_1 + jz_2) : (z_3 + jz_4)],$$

где четверка $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ определена с точностью до умножения на ненулевое комплексное число, а пара $[(z_1 + jz_2) : (z_3 + jz_4)]$ – с точностью до умножения справа на ненулевой кватернион.

Отображению

$$j : [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \longmapsto [-z_2 : z_1 : -z_4 : z_3]$$

отвечает умножение пары $(z_1 + jz_2, z_3 + jz_4)$ на мнимую единицу j справа, не меняющее проективного класса $[(z_1 + jz_2) : (z_3 + jz_4)]$. Поэтому слои расслоения π являются j-инвариантными проективными прямыми, а твисторное соответствие в евклидовом случае совпадает с отображением поднятия с помощью π.

1.2.4 Клейнова модель пространства Минковского

Любое подпространство из $G_2(\mathbb{T})$ задается с точностью до умножения на ненулевое комплексное число бивектором $p = p_1 \wedge p_2$, где p_1, p_2 –

пара линейно независимых векторов, лежащих в рассматриваемом 2-подпространстве. Фиксируем ортонормированный базис $\{e_i\}$ в пространстве $\mathbb{T}$. Тогда бивекторы $e_i \wedge e_j$, $i < j$, будут образовывать базис внешнего квадрата $\bigwedge^2 \mathbb{T}$. Поэтому, разлагая произвольный бивектор p по этому базису, можно представить его в виде

$$p = \sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j .$$

Тем самым, любому 2-подпространству из $G_2(\mathbb{T})$ можно сопоставить набор $[p_{ij}]$ его *плюккеровых координат*, заданных с точностью до умножения на ненулевое комплексное число.

Плюккеровы координаты удовлетворяют соотношению

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0, \tag{1.3}$$

которое вытекает из очевидного условия $p \wedge p = 0$.

Построенное соответствие позволяет отождествить пространство $G_2(\mathbb{T})$ с проективной квадрикой $\mathbb{PQ}$ в 5-мерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^5$, задаваемой уравнением (1.3). Эта квадрика называется *клейновой моделью* компактифицированного комплексифицированного пространства Минковского $\mathbb{CM}$. В подходящих координатах $(u, v) = (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ на пространстве $\mathbb{C}^6$ квадрику $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{C}^6$, задаваемую уравнением (1.3), можно записать в виде

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \tag{1.4}$$

или, короче, $u^2 = v^2$.

Основные объекты геометрии пространства Минковского $\mathbb{C}M$ допускают следующую интерпретацию в терминах клейновой модели.

$$\{\text{точка } \mathbb{C}M\} \longrightarrow \{\text{точка квадрики } \mathbb{PQ}\}$$

Квадрика $\mathbb{Q}$, задаваемая уравнением (1.4), имеет два семейства прямолинейных образующих, представленных 3-подпространствами, определяемыми уравнениями

$$u = Av, \quad \text{где } A \in \mathrm{O}(3, \mathbb{C}).$$

Группа $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$, сохраняющих форму $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, состоит из двух связных компонент, выделяемых знаком $\det A$. Прямолинейные образующие $\{u = Av\}$ с $\det A = 1$

отвечают в силу твисторного соответствия α-плоскостям, а образующие $\{u = Av\}$ с $\det A = -1$ отвечают β-плоскостям.

$$\left\{\begin{matrix}\text{комплексный световой}\\ \text{конус в } \mathbb{C}M \text{ с вершиной}\\ \text{в заданной точке}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{касательный конус к квадрике } \mathbb{PQ} \equiv \text{пере-}\\ \text{сечение касательного пространства к } \mathbb{PN} \text{ в}\\ \text{заданной точке с квадрикой } \mathbb{PQ}\end{matrix}\right\}$$

Вещественное пространство Минковского $\mathbb{M}$ и евклидово пространство $\mathbb{E}$ допускают следующую интерпретацию в терминах квадрики $\mathbb{PQ}$

$$\{\text{точка } \mathbb{M}\ \} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{точка вещественной квадрики}\\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0 \text{ в}\\ \mathbb{PQ}\end{matrix}\right\}$$

$$\{\text{точка } \mathbb{E}\ \} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{точка вещественной квадрики}\\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 = 0 \text{ в}\\ \mathbb{PQ}\end{matrix}\right\}$$

Группа $G = \mathrm{SL}(4, \mathbb{C})/\{\pm I, \pm iI\}$, действующая на пространстве $G_2(\mathbb{T})$, порождает преобразования $\mathbb{C}^6$, сохраняющие квадрику $\mathbb{Q}$, т.е. преобразования из группы $\mathrm{O}(6, \mathbb{C})/\{\pm I\}$. Тем самым, имеется гомоморфизм

$$G \longrightarrow \mathrm{O}(6, \mathbb{C})/\{\pm I\}.$$

Аналогично, клейнова интерпретация вещественного пространства Минковского $\mathbb{M}$ связана с локальным изоморфизмом $\mathrm{SU}(2, 2) \cong \mathrm{SO}(4, 2)$, а клейнова интерпретация евклидова пространства $\mathbb{E}$ — с локальным изоморфизмом $\mathrm{SL}(2, \mathbb{H}) \cong \mathrm{SO}(5, 1)$.

Твисторная программа Пенроуза состоит в том, что твисторное соответствие должно переводить решения конформно инвариантных уравнений теории поля, заданных на пространстве Минковского $\mathbb{M}$, в объекты комплексной геометрии на твисторном пространстве $\mathbb{PT}$.

1.2.5 Твисторные расслоения

Построенное выше расслоение Хопфа $\pi : \mathbb{CP}^3 \to S^4$ допускает красивую интерпретацию в терминах комплексных структур на евклидовом пространстве $E = \mathbb{R}^4$, принадлежащую Атье.

Отображение π над $\mathbb{R}^4$ совпадает с расслоением

$$\pi : \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1_\infty \longrightarrow E,$$

где выброшенная проективная прямая $\mathbb{CP}^1_\infty$ отождествляется со слоем $\pi^{-1}(\infty)$ расслоения Хопфа над $\infty \in S^4$.

Пространство $\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1_\infty$ расслаивается на параллельные проективные плоскости $\mathbb{CP}^2$, пересекающиеся в $\mathbb{CP}^3$ на проективной прямой $\mathbb{CP}^1_\infty$. Рассмотрим слой $\pi^{-1}(p)$ расслоения π над произвольной точкой $p \in E$. Через любую точку z этого слоя проходит аффинная комплексная плоскость $\mathbb{C}^2_z$ из нашего семейства. Сопоставим точке z комплексную структуру J_z на касательном пространстве $T_pE \cong \mathbb{R}^4$, отождествляя T_pE с $\mathbb{C}^2_z$ с помощью касательного отображения π_*. Таким образом слой $\pi^{-1}(p)$ твисторного расслоения π над точкой p отождествляется с пространством комплексных структур на касательном пространстве T_pE. Все построенные структуры совместимы с метрикой и ориентацией $\mathbb{R}^4$ в том смысле, что операторы комплексной структуры J_z на T_pE задаются кососимметричными матрицами с нулевым следом.

Эта конструкция допускает распространение на произвольные четномерные ориентируемые римановы многообразия X. А именно, рассмотрим расслоение $\pi : \mathcal{J}(X) \to X$ комплексных структур на X, слой которого в точке $p \in X$ совпадает с пространством $\mathcal{J}(T_pX) \cong \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ комплексных структур на касательном пространстве T_pX, совместимых с римановой метрикой и ориентацией. Такие комплексные структуры на $T_pX \cong \mathbb{R}^{2n}$ задаются кососимметрическими линейными операторами J с нулевым следом и квадратом $J^2 = -I$. Пространство этих структур отождествляется с комплексным однородным пространством

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$$

и потому обладает канонической комплексной структурой.

Расслоение $\pi : \mathcal{J}(X) \to X$ называется *твисторным расслоением* над X. Покажем, что оно обладает естественной почти комплексной структурой. Риманова связность на X порождает естественную связность на главном $\mathrm{SO}(2n)$-расслоении $\mathcal{SO}(X) \to X$ ортонормированных базисов на X, а эта связность порождает вертикально-горизонтальное разложение

$$T\mathcal{J}(X) = V \oplus H$$

ассоциированного расслоения комплексных структур. Введем на расслоении $\mathcal{J}(X)$ почти комплексную структуру $\mathcal{J}^1$, полагая

$$\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}^v \oplus \mathcal{J}^h.$$

Значение вертикальной компоненты $\mathcal{J}^v_z \in \mathrm{End}(V_z)$ в точке $z \in \mathcal{J}(X)$ совпадает с канонической комплексной структурой на комплексном однородном пространстве $V_z \cong \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$. Значение горизонтальной компоненты $\mathcal{J}^h_z \in \mathrm{End}(H_z)$ в точке z совпадает с комплексной структурой $J(z) \leftrightarrow z$ на пространстве H_z, отождествляемом с касательным пространством $T_{\pi(z)}X$ с помощью касательного отображения π_*. Напомним, что слой $\pi^{-1}(p)$ расслоения $\mathcal{J}(X) \to X$ в точке $p = \pi(z) \in X$ состоит из комплексных структур на T_pX и мы обозначаем через $J(z)$ комплексную структуру на T_pX, отвечающую точке $z \in \pi^{-1}(p)$.

Построенная почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$ на $\mathcal{J}(X)$ превращает пространство $\mathcal{J}(X)$ в почти комплексное многообразие. Эта структура была введена *Атьей–Хитчином–Зингером*.

Глава 2

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

2.1 Инстантоны и поля Янга–Миллса

2.1.1 Уравнения Янга–Миллса

Пусть X есть компактное 4-мерное риманово многообразие и G – компактная группа Ли, называемая *калибровочной группой*.

Калибровочный потенциал A есть связность в главном G-расслоении $P \to X$, задаваемая 1-формой на P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Обозначим через $\operatorname{ad} P = P \times_G \mathfrak{g}$ присоединенное расслоение, где G действует на $\mathfrak{g}$ с помощью присоединенного представления. В терминах этого расслоения калибровочный потенциал A задается 1-формой

$$A \in \Omega^1(X, \operatorname{ad} P).$$

Основным примером калибровочной группы G будет для нас группа $\mathrm{SU}(2)$, в этом случае калибровочный потенциал A в локальных координатах $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ задается 1-формой вида

$$A \sim \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu(x) dx^\mu,$$

где A_μ – комплексные косоэрмитовы 2×2-матрицы с нулевым следом, а знак $\sim$ означает выражение в локальных координатах. В частном случае $G = \mathrm{U}(1)$ калибровочный потенциал совпадает с обычным электромагнитным вектор-потенциалом (точнее, с его евклидовым аналогом).

Кривизна F связности A называется *калибровочным полем* и задается 2-формой на P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ или 2-формой $F \in \Omega^2(X, \operatorname{ad} P)$, равной

$$F = DA = dA + \frac{1}{2}[A, A],$$

где D – оператор *ковариантного внешнего дифференцирования*

$$D : \Omega^p(X, \operatorname{ad} P) \longrightarrow \Omega^{p+1}(X, \operatorname{ad} P),$$

порождаемый связностью A. В случае $G = \mathrm{SU}(2)$ калибровочное поле F задается в локальных координатах (x^μ) 2-формой

$$F \sim \sum_{\mu,\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad \text{с } \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu.$$

В частном случае $G = \mathrm{U}(1)$ тензор $(F_{\mu\nu})$ совпадает с евклидовым аналогом тензора Ё Максвелла электромагнитного поля.

Калибровочным преобразованием называется послойный диффеоморфизм $g : P \to P$, который G-*эквивариантен* в том смысле, что

$$g(hp) = gh(p)$$

для любых $h \in G$, $p \in P$. Иначе говоря, g есть сечение расслоения $P \times_G G$. Локально, калибровочное преобразование задается гладкой функцией $g(x)$ на X со значениями в группе G, а ее действие на калибровочный потенциал A и калибровочное поле F определяется формулами

$$A_g = (\operatorname{Ad} g^{-1}) dg + (\operatorname{Ad} g^{-1}) A, \quad F_g = (\operatorname{Ad} g^{-1}) F,$$

где Ad – присоединенное действие группы G на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

В случае группы $G = \mathrm{SU}(2)$ эти формулы можно переписать в виде

$$A_g = g^{-1} dg + g^{-1} A g, \quad F_g = g^{-1} F g.$$

В частном случае $G = \mathrm{U}(1)$ калибровочное преобразование совпадает с фазовым преобразованием вида $g(x) = e^{i\theta(x)}$, которое действует на A как градиентное преобразование $A \mapsto A + i d\theta$, а поле F при этом не изменяется.

Функционал *действия Янга–Миллса* задается формулой

$$S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}\int_X \|F\|^2 \mathrm{vol},$$

где норма $\|\cdot\|$ задается скалярным произведением на пространстве форм, порождаемым римановой метрикой на X и инвариантным скалярным произведением tr на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а vol – элемент формы объема на X.

Задача 2. Найдите явное выражение для этого скалярного произведения на формах в локальных координатах.

В случае группы $G = \mathrm{SU}(2)$ эту формулу можно переписать, пользуясь $*$-оператором Ходжа, в следующем виде

$$S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}\int_X \mathrm{tr}(F \wedge *F).$$

Критические точки этого функционала называются *полями Янга–Миллса*. Они удовлетворяют *уравнению Эйлера–Лагранжа*

$$D^*F = 0,$$

где

$$D^* = *D* : \Omega^{p+1}(X, \mathrm{ad}\, P) \longrightarrow \Omega^p(X, \mathrm{ad}\, P)$$

– оператор, сопряженный к оператору D. Это уравнение называется *уравнением Янга–Миллса* и чаще записывается в виде

$$D(*F) = 0.$$

2.1.2 Инстантоны

Калибровочное поле F называется *автодуальным* (соотв. *анти-автодуальным*), если

$$*F = F \text{ (соотв.} * F = -F).$$

В силу тождества Бианки $DF = 0$, вытекающего из соотношения $F = DA$, калибровочные поля, удовлетворяющие *уравнениям дуальности* $*F = \pm F$, автоматически являются полями Янга–Миллса.

Полагая $F_\pm = \frac{1}{2}(*F \pm F)$, представим поле F в виде

$$F = F_+ + F_-, \quad \text{где } * F_\pm = \pm F_\pm.$$

(Заметим, что поля $F_\pm$ не обязаны удовлетворять тождеству Бианки, а потому и уравнениям Янга–Миллса.) В их терминах функционал Янга–Миллса можно переписать в виде

$$S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}\int_X \left(\|F_+\|^2 + \|F_-\|^2\right)\mathrm{vol}.$$

Обозначим через $E \to X$ векторное расслоение, ассоциированное с главным расслоением $P \to X$. Сопоставим E топологический инвариант, совпадающий с *1-м классом Понтрягина*, который вычисляется по формуле

$$p_1(E) = \frac{1}{8\pi^2}\int_X \left(\|F_+\|^2 - \|F_-\|^2\right)\mathrm{vol} = \frac{1}{8\pi^2}\int_X \mathrm{tr}(F \wedge F) \tag{2.1}$$

и называется *топологическим зарядом* F.

Задача 3. Проверьте, что выписанная формула действительно задает топологический инвариант поля F.

Очевидно, что

$$S_{\mathrm{YM}}(A) \geq 4\pi^2 |p_1(E)|,$$

причем равенство достигается здесь как раз на решениях уравнений дуальности. Иными словами, эти решения задают локальные минимумы функционала $S_{\mathrm{YM}}(A)$.

В физической литературе принято называть *инстантонами* антиавтодуальные (ASD)-решения уравнений Янга–Миллса, в математической литературе больше внимания уделяется автодуальным (SD)-решениям, которые естественно называть *анти-инстантонами*.

Основной интерес для нас представляет изучение *пространства модулей инстантонов* :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{пространство модулей ин-}\\ \text{стантонов}\end{array}\right\} = \frac{\{\text{инстантоны}\}}{\{\text{калибровочные преобразования}\}}$$

2.1.3 Поля Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$

Любое поле Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ с конечным действием Янга–Миллса по теореме Уленбек может быть продолжено до поля Янга–Миллса на S^4 со значениями в некотором главном расслоении $P \to S^4$ в том смысле, что ограничение этого поля на $\mathbb{R}^4$ калибровочно эквивалентно исходному полю Янга–Миллса. Сферическая метрика на $S^4 \setminus \{\infty\}$ конформно эквивалентна евклидовой метрике на $\mathbb{R}^4$, поэтому вопрос о продолжении поля Янга–Миллса с $\mathbb{R}^4$ на S^4 сводится к отысканию подходящих асимптотических условий на бесконечности, которые и определяют искомое главное расслоение $P \to S^4$. Это рассуждение показывает, что задача изучения полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ с конечным действием Янга–Миллса является частью общей проблемы исследования полей Янга–Миллса на компактных 4-мерных римановых многообразиях.

Пусть A есть калибровочный потенциал на $\mathbb{R}^4$ с калибровочной группой G. Для того, чтобы обеспечить конечность действия Янга–Миллса, наложим на A асимптотическое условие, состоящее в том, что потенциал A должен стремиться к тривиальному, т.е. чисто-калибровочному, на бесконечности. Иными словами, будем предполагать, что $A(x)$ эквивалентен потенциалу вида $g(x)^{-1}dg(x)$ при $|x| \to \infty$. Если это условие выполнено, то, ограничивая g^{-1} на сферу S^3_R достаточно большого радиуса R, получим гладкое отображение

$$g^{-1} : S^3_R \longrightarrow G,$$

задающее гомотопический класс $[S^3_R, G]$. В случае группы $G = \mathrm{SU}(2)$ это дает нам еще одно определение топологического заряда. А именно, он совпадает со степенью отображения $g^{-1} : S^3_R \to \mathrm{SU}(2) \cong S^3$.

Задача 4. Докажите это утверждение.

Конечность действия Янга–Миллса для инстантона на $\mathbb{R}^4$ означает "физически", что он локализован как в пространстве $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, так и во "времени" $(x^0) \subset \mathbb{R}^4$, чем и объясняется его название.

Размерность пространства $\mathcal{M}_k$ модулей $\mathrm{SU}(2)$-инстантонов на $\mathbb{R}^4$, имеющих топологический заряд $-k$, k целое положительное, может быть найдена с помощью теоремы Атьи–Зингера об индексе и равна $8k - 3$.

Задача 5. Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно.

Рассмотрим более подробно случай $k = 1$. Отождествим пространство $\mathbb{R}^4$ с пространством кватернионов $\mathbb{H}$, а группу $\mathrm{SU}(2)$ с группой $\mathrm{Sp}(1)$ кватернионов, по модулю равных 1. Алгебра Ли этой группы совпадает с алгеброй чисто мнимых кватернионов, поэтому калибровочный потенциал на $\mathbb{R}^4$ задается в этом случае 1-формой на $\mathbb{H}$, коэффициенты которой являются чисто мнимыми кватернионами.

Первый пример 1-инстантона был построен Белавиным–Поляковым–Тюпкиным–Шварцем. В кватернионных обозначениях он задается калибровочным потенциалом вида

$$A(x) = \operatorname{Im}\left\{\frac{\bar{x}dx}{1+|x|^2}\right\} = \frac{\bar{x}dx - d\bar{x}\cdot x}{2(1+|x|^2)},$$

где $x = x^0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$. Отвечающее ему калибровочное поле имеет вид

$$F(x) = \frac{d\bar{x}\wedge dx}{(1+|x|^2)^2} = \operatorname{Im}\left\{\frac{d\bar{x}\wedge dx}{(1+|x|^2)^2}\right\}$$

и является анти-автодуальным.

Его топологический заряд равен -1. Действительно, при $|x|\to\infty$ имеем

$$A(x) \sim \operatorname{Im}\left\{\frac{\bar{x}dx}{|x|^2}\right\} = \operatorname{Im}\{x^{-1}dx\}.$$

Но при $x\neq 0$ последний потенциал является чисто калибровочным, так как

$$\operatorname{Im}\{x^{-1}dx\} = g(x)^{-1}dg(x), \quad \text{где } g(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Поэтому топологический заряд поля F совпадает со степенью отображения $g^{-1} : S^3 \to S^3$, действующего по формуле:

$$g^{-1}(x) = \frac{\bar{x}}{|x|},$$

степень которого равна -1. Тем самым, калибровочный потенциал A действительно определяет 1-инстантон на $\mathbb{R}^4$.

Для того, чтобы получить SD-решение с зарядом $+1$, достаточно заменить формулу для $A(x)$ на

$$A(x) = \operatorname{Im}\left\{\frac{xd\bar{x}}{1+|x|^2}\right\}.$$

Построим главное $\mathrm{Sp}(1)$-расслоение над S^4, отвечающее этому инстантону. Для этого применим к A калибровочное преобразование g^{-1}. Получим

$$A_{g^{-1}}(x) = A(y), \quad \text{где } y := x^{-1}.$$

Рассмотрим теперь стандартное покрытие $\mathbb{HP}^1$ открытыми подмножествами

$$U_0 = \{[x:y] \in \mathbb{HP}^1 :\ y \neq 0\} \quad \text{и} \quad U_\infty = \{[x:y] \in \mathbb{HP}^1 :\ x \neq 0\}$$

и введем функцию перехода

$$g_{0\infty} : U_0 \cap U_\infty \longrightarrow \mathrm{Sp}(1),$$

полагая $g_{0\infty}(x) = g(x)^{-1} = \bar{x}/|x|$. Тем самым, мы построили главное $\mathrm{Sp}(1)$-расслоение $P \to S^4$ и 1-форму A, равную $A(x)$ на U_0 и $A(y)$ на U_∞ с $y = x^{-1}$, задающую ASD-связность на расслоении P.

Произвольный 1-инстантон на $\mathbb{R}^4$ задается калибровочным потенциалом вида

$$A(x) = \mathrm{Im}\left\{\frac{(\bar{x} - \bar{x}_0)dx}{\lambda^2 + |x - x_0|^2}\right\}, \quad \text{где } x_0 \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R},$$

зависящим от 5 вещественных параметров.

Обобщая приведенный метод построения 1-инстантонов, будем искать формулу для произвольного ASD-потенциала на $\mathbb{R}^4$ в виде следующего анзаца

$$A(x) = \mathrm{Im}\{\varphi(x)^{-1}\partial\varphi(x)\},$$

где $\varphi(x)$ – произвольная гладкая вещественно-значная функция от $x \in \mathbb{H}$, а

$$\partial\varphi(x) := \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx.$$

Для того, чтобы потенциал A задавал ASD-связность, необходимо потребовать, чтобы выполнялось уравнение

$$\partial\bar{\partial}\varphi = \Delta\varphi = 0.$$

Нетривиальное *решение т'Хофта* можно получить, если положить в этом анзаце

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j^2}{|x - x_j|^2}\,,$$

где $(x_1, \ldots, x_k)$ – набор различных точек на $\mathbb{R}^4$, а $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ –набор ненулевых вещественных параметров. Этой функции отвечает калибровочный потенциал A, содержащий особенности вида $\mathrm{Im}\{(x - x_j)^{-1}dx\}$ в точках x_j. Если применить к $A(x)$, как в случае 1-инстантона, калибровочное преобразование

$$g_j(x) := \frac{x - x_j}{|x - x_j|}$$

в проколотой окрестности точки x_j, то получим калибровочно эквивалентный потенциал вида

$$A_j(x) = \mathrm{Im}\left\{\frac{(\bar{x} - \bar{x}_j)dx}{\lambda_j^2 + |x - x_j|^2}\right\} + \ldots,$$

уже не имеющий особенности при $x = x_j$.

По построению, калибровочный потенциал A определяет ASD-связность вне точек $\{x_j\}$. Чтобы сопоставить связности A инстантон на S^4, нужно рассмотреть покрытие S^4 открытыми шарами U_j с центрами в точках x_j, не содержащими точек x_k с $k \neq j$, и дополнением U_∞ к объединению этих точек в S^4. Искомое расслоение над S^4 задается функциями перехода g_j на пересечениях $U_j \cap U_\infty$ и $g_{jk} = g_j g_k^{-1}$ на пересечениях $U_j \cap U_k$. Формы A_j на U_j и A на U_∞ определяют ASD-связность в этом расслоении.

Построенное решение зависит от $5k$ вещественных параметров, что при $k \gg 1$ сильно отличается от общего числа $8k - 3$ вещественных параметров пространства модулей k-инстантонов. В следующем параграфе мы приведем конструкцию, позволяющую построить полное семейство k-инстантонов при любом k.

2.2 Теорема Атьи–Уорда и ADHM-конструкция

2.2.1 Теорема Атьи–Уорда

Эта теорема дает твисторное описание G-инстантонов в главном G-расслоении $P \to S^4$.

Начнем с твисторного описания инстантонов в главном SU(2)-расслоении $P \to S^4$. Обозначим через $E \to S^4$ комплексное векторное расслоение ранга 2, ассоциированное с главным расслоением $P \to S^4$. Мы предполагаем, что E наделено эрмитовой структурой и связностью A, согласованной с эрмитовой структурой. Это означает, что в любой унитарной калибровке $A^* = -A$.

Если E является голоморфным векторным расслоением, можно также ввести связности, совместимые с голоморфной структурой. Связность называется *голоморфной*, если ее потенциал A имеет тип (1,0) в любой голоморфной калибровке.

Имеется естественная связь между эрмитовыми и голоморфными связностями, устанавливаемая в следующей задаче.

Задача 6. Пусть E – голоморфное векторное расслоение, наделенное эрмитовой структурой. Тогда существует единственная связность на E, согласованная с обеими структурами. Кривизна этой связности имеет тип (1,1).

Справедливо также обращение этого результата.

Теорема 1 (Атья–Хитчин–Зингер)**.** *Пусть E – голоморфное векторное расслоение над комплексным многообразием X, наделенное эрмитовой структурой. Если E обладает эрмитовой связностью, кривизна которой имеет тип (1,1), то на E существует единственная голоморфная структура, с которой эта связность согласована.*

Вернемся к векторному расслоению $E \to S^4$, наделенному эрмитовой связностью A. Рассмотрим ее ограничение на $\mathbb{R}^4$. Имеет место следующее утверждение.

Задача 7. Связность A является анти-автодуальной (ASD) тогда и только тогда, когда ее кривизна имеет тип (1,1) относительно любой комплексной структуры на $\mathbb{R}^4$, согласованной с метрикой и ориентацией.

Это утверждение на самом деле является инфинитезимальным и доказывается прямым вычислением в локальных координатах.

Рассмотрим теперь построенное выше твисторное расслоение

$$\pi : \mathbb{CP}^3 \longrightarrow S^4.$$

Обозначим через $\tilde{E} := \pi^* E$ подъем расслоения E на $\mathbb{CP}^3$ с помощью отображения π и через $\tilde{\nabla} = \nabla_{\tilde{A}}$ поднятие ковариантной производной $\nabla = \nabla_A$ на расслоение $\tilde{E}$. Если связность A является ASD-связностью, то из задачи 7 вытекает, что ее подъем $\tilde{A}$ на $\tilde{E}$ задает голоморфную структуру на $\tilde{E}$, т.е. кривизна $\tilde{A}$ имеет тип (1,1).

Полученное голоморфное расслоение $\tilde{E} \to \mathbb{CP}^3$ по построению голоморфно тривиально на j-инвариантных проективных прямых в $\mathbb{CP}^3$, являющихся слоями отображения π.

Рассмотрим далее вопрос о том, каким образом построенное соответствие между расслоениями E над S^4 и $\tilde{E}$ над $\mathbb{CP}^3$ ведет себя по отношению к *эрмитовой структуре*на E. Задание такой структуры равносильно введению антилинейного изоморфизма $\tau : E \to E^*$ такого, что форма $(\xi, \tau\eta)$ положительно определена. Поднимая этот изоморфизм на $\tilde{E}$, получим эрмитову структуру на $\tilde{E}$, т.е. антилинейный изоморфизм $\tilde{\tau} : \tilde{E} \to \tilde{E}^*$, накрывающий отображение j на $P \to S^4$. Этот изоморфизм обладает следующим свойством:

$$(\xi, \tilde{\tau}\eta) = \overline{(\xi, \tilde{\tau}\eta},$$

т.е. задает положительную вещественную форму на $\tilde{E}$.

Теорема 2 (Теорема Атьи–Уорда)**.** *Имеется взаимно-однозначное соответствие между*

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{пространство}\\ \textit{модулей } SU(2)\textit{-}\\ \textit{инстантонов}\\ \textit{на } S^4\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\textit{голоморфные векторные расслоения ранга 2 над}\\ \mathbb{CP}^3\textit{, голоморфно тривиальные на } \pi\textit{-слоях и об-}\\ \textit{ладающие положительной вещественной фор-}\\ \textit{мой}\end{array}\right\}$$

Для эрмитовых векторных расслоений $E \to S^4$ ранга n будем получать в силу соответствия Атьи–Уорда голоморфные векторные расслоения $\tilde{E} \to S^4$, которые голоморфно тривиальны на π-слоях и обладают положительной вещественной формой.

Теорема Атьи–Уорда переносится также на произвольные $\mathrm{Sp}(n)$-инстантоны, где $\mathrm{Sp}(n)$ – группа обратимых кватернионных матриц, сохраняющих стандартную эрмитову форму $\langle x, y\rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots \bar{x}_n y_n$ на $\mathbb{H}^n$. В силу соответствия Атьи–Уорда им будут отвечать голоморфные векторные расслоения ранга $2n$ на $\mathbb{CP}^3$, обладающие дополнительной кватернионной структурой. Пусть E, как и выше, векторное расслоение ранга $2n$ с эрмитовой связностью. *Кватернионная структура* на E задается кососимметричным изоморфизмом α, согласованным со связностью. Поднимая этот изоморфизм на $\tilde{E}$, получим кососимметричный голоморфный изоморфизм $\tilde{\tau} : \tilde{E} \to \tilde{E}^*$. Этот кососимметричный голоморфный изоморфизм задает невырожденную голоморфную кососимметричную форму на $\tilde{E}$. В композиции с антилинейным изоморфизмом $\tilde{\tau}^{-1}$ получим антилинейный изоморфизм $\tilde{j} : \tilde{E} \to \tilde{E}$, накрывающий отображение j на $P \to S^4$.

Таким образом, справедлив следующий вариант теоремы Атьи–Уорда для $\mathrm{Sp}(n)$-инстантонов.

Теорема 3. *Имеется взаимно-однозначное соответствие между*

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{пространство}\\ \textit{модулей}\ \ Sp(n)\text{-}\\ \textit{инстантонов}\\ \textit{на}\ S^4\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\textit{голоморфные векторные расслоения ранга } 2n\\ \textit{над } \mathbb{CP}^3\textit{, голоморфно тривиальные на } \pi\textit{-слоях,}\\ \textit{обладающие невырожденной голоморфной косо-}\\ \textit{симметричной формой, согласованной с анти-}\\ \textit{линейным изоморфизмом } \tilde{j} : \tilde{E} \to \tilde{E}\end{array}\right\}$$

Согласованность с кососимметричной формой означает, что

$$(\tilde{j}\xi, \tilde{j}\eta) = \overline{(\xi, \eta}.$$

Заметим, что голоморфные векторные расслоения $\tilde{E}$ на $\mathbb{CP}^3$ должны быть голоморфно тривиальны на π-слоях. Кроме того, ограничение эрмитовой формы $(\xi, \tilde{j}\eta)$ на π-слои должно быть положительно определено.

Имеется и чисто комплексное обобщение этой теоремы. Рассмотрим его сначала для трубы будущего $\mathbb{C}M_+$. Пусть E –голоморфное векторное расслоение ранга n над $\mathbb{C}M_+$ и ∇ – голоморфная ковариантная производная, действующая на сечениях расслоения E, порожденная голоморфной связностью A. Назовем эту связность *анти-автодуальной* (ASD), если ее кривизна зануляется на α-плоскостях. *Комплексный вариант теоремы Атьи–Уорда* утверждает, что имеется взаимно-однозначное соответствие между

$$\left\{\begin{array}{l}\text{пространство модулей}\\ \text{голоморфных ASD-}\\ \text{связностей на } \mathbb{C}M_+\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{голоморфные векторные расслоения ран-}\\ \text{га n на } \mathbb{PT}_+\text{, голоморфно тривиальные на}\\ \text{проективных прямых, лежащих в } \mathbb{PT}_+\end{array}\right\}$$

Эта теорема основана на следующей конструкции Уорда. Пусть $\tilde{E}$ – голоморфное векторное расслоение над $\mathbb{PT}_+$, голоморфно тривиальное на проективных прямых в $\mathbb{PT}_+$. Слой E_z отвечающего ему голоморфного векторного расслоения $E \to \mathbb{C}M_+$ в точке $z \in \mathbb{C}M_+$ состоит по определению из голоморфных сечений расслоения $\tilde{E}$ над проективной прямой $\mathbb{CP}^1_z$, отвечающей точке z. Если две проективные прямые $\mathbb{CP}^1_z$ и $\mathbb{CP}^1_{z'}$ пересекаются, т.е. точки z и z' лежат на одной комплексной световой прямой, то мы можем отождествить слои E_z и $E_{z'}$ друг с другом. Тем самым, на E определен параллельный перенос вдоль комплексных световых прямых в $\mathbb{C}M_+$, порождающий голоморфную связность в расслоении E. Поскольку α-плоскость в $\mathbb{C}M_+$ отвечает пучку проективных прямых, проходящих через фиксированную точку $\mathbb{CP}^3$, то построенная связность автоматически является анти-автодуальной.

Для обратной конструкции (от E к $\tilde{E}$) удобно воспользоваться двойной диаграммой

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{F}_+ \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{PT}_+ & & \mathbb{C}M_+ \end{tikzcd}$$

где $\mathbb{F}_+$ – пространство $(0,1)$-флагов в $\mathbb{PT}_+$, т.е. пар (точка $\mathbb{PT}_+$, содержащая ее проективная прямая в $\mathbb{PT}_+$). Пространство $\mathbb{C}M_+$ отождествляется при этом с грассмановым многообразием $G_1(\mathbb{PT}_+)$ проективных прямых, лежащих в $\mathbb{PT}_+$, а μ, ν – естественные проекции. Обозначим через E' подъем расслоения E до расслоения над $\mathbb{F}_+$ с помощью отображения ν и через ∇' подъем связности ∇ на расслоение E'. Определим слой расслоения $\tilde{E} \to \mathbb{PT}_+$ в точке $\zeta \in \mathbb{PT}_+$ как пространство голоморфных сечений $s' \in \Gamma(\mu^{-1}(Z), E')$, удовлетворяющих уравнению

$$\nabla'_\mu s' = 0,$$

где ∇'_μ – составляющая связности ∇', действующая вдоль слоев отображения μ. Иными словами, слой $\tilde{E}_\zeta$ состоит из горизонтальных голоморфных сечений расслоения E' над $\mu^{-1}(\zeta)$. Это определение корректно ввиду анти-автодуальности связности ∇.

Приведенная комплексная версия теоремы Атьи–Уорда остается справедливой, если заменить в ней $\mathbb{PT}_+$ на область $\tilde{D}$ в $\mathbb{CP}^3$ такую, что лежащие в ней проективные прямые отвечают точкам некоторой области D в $\mathbb{C}M$. Эта область должна обладать дополнительным свойством, состоящим в том, что пересечение с ней любой комплексной световой прямой связно и односвязно.

2.2.2 ADHM-конструкция

ADHM-конструкция дает описание инстантонов на S^4. Мы изложим ее для случая $\mathrm{Sp}(n)$-инстантонов. Теорема Атьи–Уорда сводит задачу описания инстантонов на S^4 к задаче классификации голоморфных векторных расслоений на $\mathbb{CP}^3$, голоморфно тривиальных на j-инвариантных проективных прямых.

В рассматриваемом случае $\mathrm{Sp}(n)$-инстантонов нам задано кватернионное векторное расслоение $E \to S^4$ со слоем $\mathbb{H}^n$, наделенное ASD-связностью и порождаемой ею ковариантной производной ∇. Предположим, что число Понтрягина этого расслоения равно $p_1(E) = -k$ с натуральным k.

Обозначим через $[x : y]$ однородные кватернионные координаты на $S^4 = \mathbb{HP}^1$ с левым умножением на кватернионы и рассмотрим однородную матричную функцию на $\mathbb{H}^2$ вида

$$\Delta(x, y) = xC + yD,$$

где C, D – кватернионные $k \times (k+n)$-матрицы. Предположим, что $\Delta(x, y)$ имеет максимальный ранг при всех $(x, y) \neq (0,)$. Тогда матрица Δ будет задавать невырожденное линейное преобразование

$$\Delta : \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{R}} W \longrightarrow V,$$

где V есть $(k+n)$-мерное кватернионное векторное пространство, а W – его k-мерное подпространство. Тогда пространство

$$E_{(x,y)} = \operatorname{Ker} \Delta^*(x, y),$$

имеющее при фиксированных (x, y) кватернионную размерность n, является слоем искомого кватернионного векторного расслоения.

Обозначим через $P_{(x,y)} : V \to E_{(x,y)}$ оператор ортогонального проектирования и наделим E стандартной ковариантной производной Леви-Чивита ∇. Если ограничить E на евклидово пространство $\mathbb{R}^4 \subset S^4$, заменяя $[x : y]$ на $x := [x : 1]$, то ковариантная производная ∇ в расслоении E будет задаваться формулой $\nabla = Pd/dx$, а ее кривизна F будет равна

$$F = P^* C d\bar{x} \left[\Delta(x)\Delta^*(x)\right]^{-1} dx CP.$$

Если матрица $\Delta(x)\Delta^*(x)$ является вещественной при всех $x \in \mathbb{H}$, то матрица $\left[\Delta(x)\Delta^*(x)\right]^{-1}$ будет коммутировать с кватернионом $d\bar{x}$ и выражение для F будет содержать единственную ASD-форму $d\bar{x} \wedge dx$, т.е. форма F будет анти-автодуальной.

Задача 8. Покажите, что топологический заряд построенной связности равен $-k$.

Приведенная конструкция инстантонов допускает простую геометрическую интерпретацию. А именно, расслоение $E \to S^4$ является прообразом классифицирующего расслоения при подходящем выборе отображения f из S^4 в грассманово многообразие. Более подробно, рассмотрим на грассмановом многообразии $G_n(\mathbb{H}^{n+k})$ n-мерных подпространств в $\mathbb{H}^{n+k}$ стандартное тавтологическое расслоение. Оно наделяется канонической $\mathrm{Sp}(n+k)$-инвариантной связностью, задаваемой ортогональным проектированием. Построенное расслоение $E \to S^4$ является прообразом указанного классифицирующего расслоения при отображении $f : S^4 \to G_n(\mathbb{H}^{n+k})$, задаваемого матричной функцией $\Delta(x, y)$. При этом связность ∇ на E совпадает со связностью, индуцированной канонической связностью при отображении f.

В частности, построенное ранее решение т'Хофта описывается в этих терминах как $\mathrm{Sp}(1)$-расслоение со связностью на S^4, совпадающее с обратным образом классифицирующего $\mathrm{Sp}(1)$-расслоения над $\mathbb{HP}^k$ при следующем отображении: его ограничение на $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ задается формулой

$$x \longmapsto [1 : (x - x_1)^{-1} : \ldots : (x - x_k)^{-1}].$$

Чтобы доопределить его при $x = x_j$, нужно домножить его компоненты на кватернион $(x - x_j)$, что не меняет образа отображения в однородных координатах.

Заметим, следуя Дональдсону, что условие вещественности, налагаемое на матричную функцию $\Delta(x)$, можно переписать в виде коммутационных соотношений на компоненты ее матричных коэффициентов. С другой стороны, уравнения дуальности на $\mathbb{R}^4$ можно также записать в виде коммутационных соотношений на компоненты связности $\nabla(x)$. Таким образом, ADHM-конструкцию можно рассматривать как преобразование, связывающее коммутационные соотношения для матричных функций на $\mathbb{R}^4$ с коммутационными соотношениями для дифференциальных операторов первого порядка в $\mathbb{R}^4$.

2.3 Монополи и уравнения Нама

2.3.1 Уравнения Богомольного

Пусть G – компактная группа Ли и A – G-связность на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$. Предположим, что связность A является *статической* в том смысле, что сдвиг по "времени" x^0 порождает калибровочное преобразование связности A. Такая связность задается 1-формой вида

$$A = \Phi dx^0 + \sum_{j=1}^{3} A_i dx^i,$$

коэффициенты которой принимают значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и не зависят от x^0.

Уравнения дуальности для такой формы принимают вид

$$D'\Phi = \pm *' F',$$

где A' есть G-связность на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, $F' = F_{A'}$ – ее кривизна, $D' = D_{A'}$ – оператор ковариантного дифференцирования, порожденный связностью A', а $*'$ – оператор Ходжа на $\mathbb{R}^3$. Далее мы опускаем штрихи, поскольку будем рассматривать только связности на $\mathbb{R}^3$.

Итак, с этого момента A есть G-связность в (тривиальном) главном G-расслоении $P \to \mathbb{R}^3$, Φ – сечение присоединенного расслоения $\operatorname{ad} P$ и нас интересуют решения уравнения

$$D_A\Phi = \pm * F_A,$$

называемого *уравнением Богомольного*. Обозначая форму $*F_A$ через B и опуская индекс A, это уравнение можно переписать в виде

$$D\Phi = \pm B.$$

На физическом языке Φ называется *полем Хиггса*, а форма B интерпретируется как магнитное поле.

Введем функционал *действия Янга–Миллса–Хиггса*

$$S_{\mathrm{YMH}}(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\|F\|^2 + \|D\Phi\|^2 \right) d^3x.$$

Критические точки этого функционала называются *полями Янга–Миллса–Хиггса* и удовлетворяют *уравнению Эйлера–Лагранжа*, имеющему вид

$$\begin{cases} *D(*F) = [D\Phi, \Phi] \\ \qquad \Box\Phi = 0, \end{cases}$$

где $\Box\Phi = *D(*D\Phi)$.

Для того, чтобы обеспечить конечность действия S_{YMH}, наложим на рассматриваемые поля следующие асимптотические условия, называемые иначе *пределом Прасада–Зоммерфельда*:

$$\|\Phi\| \longrightarrow 1, \quad \|D\Phi\| \longrightarrow 0, \quad \|F\| \longrightarrow 0$$

равномерно при $|x| \to \infty$.

Рассмотрим теперь более подробно случай $G = \mathrm{SU}(2)$. Сопоставим полю Янга–Миллса–Хиггса *топологический инвариант*, который задается формулой

$$k = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{tr}(F \wedge D\Phi) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S^2_R} \mathrm{tr}(\Phi F).$$

Указанный инвариант совпадает со степенью отображения сферы S^2_R достаточно большого радиуса R в алгебру Ли $\mathrm{su}(2)$, задаваемого полем Хиггса:

$$\Phi : S^2_R \longrightarrow \{\Phi \in \mathrm{su}(2) : \|\Phi\| \approx 1\} = S^2.$$

Этот инвариант, называемый *топологическим зарядом* k, можно также вычислить по формуле

$$k = -\frac{1}{4\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{S^2_R} \mathrm{tr}(\Phi d\Phi \wedge d\Phi).$$

Действие Янга–Миллса–Хиггса можно переписать в виде

$$S_{\mathrm{YMH}}(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|F \mp D\Phi\|^2 d^3x \pm 4\pi.$$

Это так называемое *преобразование Богомольного*. Из последней формулы следует, что

$$S_{\mathrm{YMH}}(A, \Phi) \geq 4\pi|k|,$$

причем равенство здесь достигается только на решениях *уравнения Богомольного*

$$D\Phi = \pm * F.$$

Иными словами, решения уравнения Богомольного с конечным действием реализуют локальные минимумы действия S_{YMH}. Эти решения называются *монополями* (или *BPS-монополями* в честь Богомольного–Прасада–Зоммерфельда) ввиду их тесной связи с *монополем Дирака*.

Для монополей с зарядом k асимптотические условия для поля Хиггса Φ можно записать в уточненном виде

$$\|\Phi\| = 1 - \frac{k}{r} + O(\frac{1}{r^2}) \quad \text{при } r = |x| \to \infty.$$

Кроме монополей, функционал S_{YMH} имеет и другие критические точки, найденные Таубсом [16]. Все они неустойчивы (т.е. являются седловыми точками) и имеют достаточно большой индекс Морса (именно, индекс μ критической точки функционала $S_{\mathrm{YMH}}(A, \Phi)$ не минимального поля Янга–Миллса–Хиггса с топологическим зарядом k превышает $|k| + 1$).

Мы ввели монополи как решения статических уравнений дуальности в $\mathbb{R}^4$. Их можно также получить из осесимметричных решений уравнений дуальности в $\mathbb{R}^4$, рассматривая предел таких решений с топологическим зарядом k при $k \to \infty$.

2.3.2 Примеры монополей

Отождествим $\mathbb{R}^3$ с пространством чисто мнимых кватернионов, так что

$$x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow x = ix^1 + jx^2 + kx^3 \in \operatorname{Im}\mathbb{H}.$$

Монополь с зарядом ± 1, построенный Прасадом и Зоммерфельдом, имеет вид

$$A = \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\mathrm{sh}|x|}\right) \operatorname{Im}\left\{\frac{dx \cdot x}{|x|}\right\}, \quad \Phi = \pm\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\mathrm{th}|x|}\right) \frac{x}{|x|}. \tag{2.2}$$

Произвольный (± 1)-монополь можно получить из указанного, совершив в последней формуле замену $x \mapsto x - x_0$, где x_0 – произвольная точка $\mathbb{R}^3$. Полученное решение будет зависеть от 3 вещественных параметров.

Можно показать, что размерность пространства $\mathcal{M}_k$ модулей монополей с зарядом $-k$ равна $4k - 1$. Имеется конструкция Таубса, позволяющая построить семейство монополей, зависящее от $3k$ вещественных параметров. А именно, согласно теореме Таубса существует положительная константа d такая, что для любого набора точек $\{x_1, \ldots, x_k\}$ в $\mathbb{R}^3$, расстояние между которыми больше d, найдется монополь (A, Φ) с топологическим зарядом $-k$. Решение Таубса устроено приближенно как сумма BPS-монополей с центрами в заданных точках $x_1, \ldots, x_k$ в том смысле, что нули поля Хиггса Φ близки к точкам $x_1, \ldots, x_k$, а локальный топологический заряд Φ в этих нулях равен -1.

2.3.3 Конструкция Нама–Хитчина

Каждому монополю отвечает его спектральная кривая. Для того, чтобы построить ее, воспользуемся твисторными соображениями, взяв в качестве твисторного пространства касательное расслоение $T\mathbb{P}^1$ к римановой сфере. Это расслоение можно отождествить с пространством ориентированных прямых в $\mathbb{R}^3$, задавая такую прямую направляющим вектором u и вектором кратчайшего расстояния v.

Сопоставим точке $x \in \mathbb{R}^3$ пучок проходящих через нее ориентированных прямых. Его можно отождествить с голоморфным сечением касательного расслоения $T\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, которое является вещественным относительно вещественной структуры, задаваемой изменением ориентации прямой в $\mathbb{R}^3$ на противоположную. Тем самым, в этом случае имеется аналог твисторного соответствия

$$\{\text{точка } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{пучок ориентированных прямых, проходящих}\\ \text{через эту точку} \equiv \text{голоморфное вещественное}\\ \text{сечение } T\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\end{array}\right\}$$

С другой стороны,

$$\{\text{ориентированная прямая в } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow \{\text{точка } T\mathbb{P}^1\}$$

В отличие от твисторного пространства $\mathbb{CP}^3$ пространство $T\mathbb{P}^1$ некомпактно. Его можно компактифицировать, заменив линейное расслоение $T\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ расслоением $\widehat{T\mathbb{P}^1} \to \mathbb{P}^1$ касательных проективных прямых.

Построенное твисторное соответствие позволяет применить к монополям идеи и методы, разработанные для инстантонов. В частности, теорема Атьи–Уорда приобретает в случае монополей следующий вид

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\text{решения } (A,\Phi) \text{ урав-}\\ \text{нений Богомольного}\\ \text{на } \mathbb{R}^3\end{array}\right\}}{\{\text{калибр. эквив.}\}} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{классы эквив. голоморфных векторных}\\ \text{расслоений ранга 2 на } T\mathbb{P}^1\text{, голоморф-}\\ \text{но тривиальных на вещественных голо-}\\ \text{морфных сечениях и наделенных поло-}\\ \text{жительной вещественной формой}\end{array}\right\}$$

Конструкция указанного соответствия близка к исходной конструкции Уорда. Обозначим через $E \to \mathbb{R}^3$ векторное расслоение ранга 2, ассоциированное с главным расслоением $P \to \mathbb{R}^3$. Пусть ∇ есть ковариантная производная, порождаемая связностью A, действующая на гладких сечениях E. Тогда слой $\tilde{E}_z$ расслоения $\tilde{E}$ ранга 2 над $T\mathbb{P}^1$ в точке

$z \in T\mathbb{P}^1$ строится следующим образом. Обозначим через γ_z ориентированную прямую в $\mathbb{R}^3$, отвечающую точке z. Слой $\tilde{E}_z$ состоит, по определению, из гладких сечений $s \in \Gamma(\gamma_z, E)$ расслоения E над прямой γ_z, удовлетворяющих уравнению

$$(\nabla_\gamma - i\Phi)s = 0, \tag{2.3}$$

где ∇_γ – компонента ∇, действующая вдоль γ_z.

Таким образом, уравнение Богомольного сводится к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.3) на прямых в $\mathbb{R}^3$. Главной характеристикой этого семейства является его *спектральная кривая*, состоящая из точек $z \in T\mathbb{P}^1$, для которых уравнение (2.3) имеет L^2-решение вдоль прямой γ_z.

Мы описали переход от монополей к спектральным кривым. Опишем теперь связь между монополями и уравнениями Нама. Указанная связь устанавливается с помощью бесконечномерного аналога ADHM-конструкции.

Уравнения Нама — это система обыкновенных дифференциальных уравнений на матричные функции T_1, T_2, T_3 размера $k \times k$ от переменной $t \in [0, 2]$ следующего вида

$$\frac{dT_1}{dt} = [T_2, T_3], \quad \frac{dT_2}{dt} = [T_3, T_1], \quad \frac{dT_3}{dt} = [T_1, T_2]. \tag{2.4}$$

Предполагается, что функции $T_i(t)$ продолжаются до мероморфных матричных функций, заданных в комплексной окрестности отрезка $[0, 2]$ с единственными простыми полюсами в точках $t = 0, 2$. Кроме того, на них накладываются условия *вещественности*

$$T_i(z) + \bar{T}_i(2 - z) = 0, \quad T_i^*(z) + T_i(z) = 0 \tag{2.5}$$

и *невырожденности*: представления группы $\mathrm{SU}(2)$, задаваемые вычетами функций $T_i(z)$ в полюсах, должны быть неприводимы.

Рассмотрим теперь, как в ADHM-конструкции, кватернионную матричную функцию $\Delta(x, y)$ от однородных кватернионных координат x, y, ограничение которой на пространство $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ имеет вид $\Delta(x) = xC + D$. Оператор $\Delta(x) : W \to V$, отображающий вещественное векторное пространство W в кватернионное векторное пространство V, в случае монополей является обыкновенным дифференциальным оператором, а пространства W и V бесконечномерны.

Опишем конструкцию Нама более подробно. Поскольку уравнения Богомольного совпадают с уравнениями дуальности для статических полей Янга–Миллса, не зависящих от переменной x^0, то искомое отображение должно удовлетворять следующему условию

1) $\Delta(x+y^0) = U(y^0)^{-1}\Delta(x)U(y^0)$, где $y^0 \mapsto U(y^0)$ есть представление группы $\mathbb{R}$ в группе кватернионных унитарных преобразований пространства V.

Кроме того, должны выполняться те же условия, что и в случае инстантонов, а именно:

2) отображение $\Delta^*(x)\Delta(x)$ должно быть вещественно при всех $x \in \mathbb{H}$;

3) отображение $\Delta^*(x)\Delta(x)$ должно быть обратимо при всех $x \in \mathbb{H}$;

4) ядро отображения $\Delta^*(x)$ должно иметь кватернионную размерность 1 при всех $x \in \mathbb{H}$.

Введем теперь пространство V. Обозначим через H^0 пространство $L^2(0,2)$ и определим на H^0 вещественную структуру по формуле: $\sigma(f)(z) := \bar{f}(2-z)$. Пространство V, равное

$$V = H^0 \otimes \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{H},$$

является кватернионным векторным пространством. В качестве вещественного подпространства W возьмем

$$W = \{f \in H^1 \otimes \mathbb{R}^k : \ f(0) = f(2) = 0\},$$

где H^1 есть соболевское пространство $H^1(0,2)$.

Обозначим через e_1, e_2, e_3 операторы левого умножения на мнимые единицы i, j, k соответственно и положим $e_0 = 1$. В качестве отображения $\Delta(x) : W \to V$ возьмем дифференциальный оператор вида

$$\Delta(x)f = \left(\sum_{j=0}^{3} x^j e_j\right) f + i\frac{df}{dz} + i\sum_{j=1}^{3} T_j(z)e_j f,$$

где $T_j(z)$ – $(k \times k)$-матричные функции, мероморфные по z в комплексной окрестности отрезка $[0,2]$ с единственными простыми полюсами в его концах. Этот оператор имеет нужный нам вид $xC + D$, где $C = I$, а

$D = id/dz + i\sum_{j=1}^{3} T_j e_j$. Построенный оператор $\Delta(x)$ удовлетворяет условиям 1)-4), наложенным выше, если матричные функции T_j удовлетворяют уравнению Нама и условиям вещественности и невырожденности. Тогда ADHM-конструкция, примененная к оператору $\Delta(x)$, будет давать решение SU(2)-уравнений Богомольного.

Как отмечалось выше, уравнения Богомольного совпадают с уравнениями дуальности для статических полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$, т.е. полей, не зависящих от переменной x^0. С другой стороны, уравнения Нама (2.4) эквивалентны уравнениям дуальности для связности

$$\sum_{j=0}^{3} T_j dx^j,$$

где $T_0 = 0$, а T_1, T_2, T_3 зависят только от переменной $x^0 = t$. Таким образом, конструкцию Нама можно рассматривать как преобразование, связывающее решения уравнений дуальности, зависящих от одной переменной, с решениями уравнений дуальности, зависящих от трех переменных. Напомним, что ADHM-конструкция также является преобразованием, связывающим матрицы — решения системы коммутационных соотношений — с решениями уравнений дуальности, зависящими от четырех переменных. Таким образом, обе конструкции являются нетривиальными преобразованиями двойственности между различными типами коммутационных соотношений.

Глава 3

ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ

3.1 Двумерная модель Янга–Миллса–Хиггса

3.1.1 Уравнения Янга–Миллса–Хиггса на $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ функционал *действия типа Янга–Миллса–Хиггса* с параметром $\lambda > 0$ следующего вида

$$S^{\lambda}_{\mathrm{YMH}}(A,\Phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\|F\|^2 + \|D\Phi\|^2 + \frac{\lambda}{4}(\|\Phi\|^2 - 1)^2\right\} d^2x.$$

Снова наложим асимптотические условия:

$$\|\Phi\| \longrightarrow 1, \quad \|D\Phi\| \longrightarrow 0, \quad \|F\| \longrightarrow 0$$

равномерно при $|x| \to \infty$.

Ограничимся вначале абелевым случаем, т.е. будем предполагать, что

$$A = -iA_0 dx^0 - iA_1 dx^1$$

есть форма на $\mathbb{R}^2$ с гладкими вещественнозначными коэффициентами A_0, A_1, а Φ – комплексное скалярное поле, задаваемое гладкой комплекснозначной функцией на $\mathbb{R}^2$. Введем *топологический заряд*, задаваемый формулой

$$k = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} F.$$

Его также можно определить как степень отображения окружности S^1_R достаточно большого радиуса R в топологическую окружность, совпадающую с образом $\Phi(S^1_R)$.

Уравнения Эйлера–Лагранжа для действия $S^{\lambda}_{\mathrm{YMH}}$ имеют вид

$$\begin{cases} *d(*F) = \bar{\Phi}D\Phi - \Phi\overline{D\Phi} \\ \Box\Phi = \dfrac{\lambda}{2}(|\Phi|^2 - 1)\Phi. \end{cases}$$

где $\Box\Phi = *D(*D\Phi)$.

В автодуальном случае ($\lambda = 1$) функционал S^1_{YMH} можно переписать, пользуясь *преобразованием Богомольного*, в следующем виде

$$S^1_{\mathrm{YMH}}(A,\Phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\|D\Phi \mp i(*D\Phi)\|^2 + \left|*F \pm \frac{1}{2}(|\Phi|^2-1)^2\right|^2\right\} d^2x \ \pm \pi k,$$

откуда следует, что

$$S^1_{\mathrm{YMH}}(A,\Phi) \geq \pi|k|,$$

причем равенство достигается здесь только тогда, когда обращаются в нуль члены в скобках. Перепишем их в комплексной форме, полагая $z = x^0 + ix^1$, $\alpha = \frac{1}{2}(A_0 - iA_1)$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(A_0 + iA_1)$. Тогда локальные минимумы функционала S^1_{YMH} при $k \geq 0$ будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\alpha\Phi = 0 \\ F_{01} + \dfrac{1}{2}(|\Phi|^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

где $F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0$, $\bar{\partial}_\alpha = \bar{\partial} - i\bar{\alpha}$, $\bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z}$.

При $k < 0$ будут выполняться аналогичные уравнения

$$\begin{cases} \partial_\alpha\Phi = 0 \\ F_{01} - \dfrac{1}{2}(|\Phi|^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Решения первой системы уравнений называются *вихрями*, решения второй — *анти-вихрями*. В отличие от уравнений Янга–Миллса–Хиггса в $\mathbb{R}^3$ локальные минимумы функционала S^1_{YMH} в $\mathbb{R}^2$ исчерпывают все его критические точки. Это эффект двумерности рассматриваемой задачи.

3.1.2 Теоремы Таубса

Описание решений вихревых уравнений было получено Таубсом (см. [**?**]). Пусть сначала $k \geq 0$ и $\{z_1, \dots, z_k\}$ – произвольный набор из k точек на комплексной плоскости, некоторые из которых могут совпадать. Обозначим через k_j кратность, с которой точка z_j входит в набор $\{z_1, \dots, z_k\}$. Тогда существует единственное (с точностью до калибровочной эквивалентности) C^∞-гладкое решение (A, Φ) вихревых уравнений, обладающее следующими свойствами:

1) множество нулей функции Φ совпадает в точности с набором точек $\{z_1, \dots, z_k\}$ (с учетом кратности), причем в окрестности точки z_j

$$\Phi \sim c_j(z - z_j)^{k_j}, \; c_j \neq 0;$$

2) топологический заряд k решения (A, Φ) равен сумме $\sum k_j$ по различным точкам в наборе $\{z_1, \dots, z_k\}$.

При $k < 0$ результат формулируется аналогичным образом, нужно только заменить в первом условии Φ на $\bar{\Phi}$ и положить k равным $-\sum k_j$.

Любое решение уравнений Эйлера–Лагранжа с конечным действием калибровочно эквивалентно либо какому-либо k-вихревому, либо $|k|$-антивихревому решению в зависимости от знака k (см. [?]).

Укажем некоторые общие свойства решений уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала S^λ_{YMH} с калибровочной группой SU(2) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ с произвольным d. В этом случае уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} D(*F) = *[D\Phi, \Phi] \\ \quad \Box\Phi = \dfrac{\lambda}{2}\Phi(\|\Phi\|^2 - 1). \end{cases}$$

Рассмотрим сначала функционал Янга–Миллса, отвечающий $\lambda = 0$, $\Phi = 0$. Сведения о наличии гладких решений уравнений Эйлера–Лагранжа для этого функционала собраны в нижеследующей таблице

размерность	нетривиальные решения	локальные минимумы	неминимальные решения
$d > 4$	нет	нет	нет
$d = 4$	есть	инстантоны и антиинстантоны	есть
$d < 4$	нет	нет	нет

Все эти утверждения распространяются и на общие калибровочные компактные группы G.

Обратимся теперь к SU(2)-уравнениям Янга–Миллса–Хиггса для функционала $S^{\lambda}_{\mathrm{YMH}}$ на $\mathbb{R}^d$. При $d > 4$ нетривиальных решений нет, а в размерности $d = 4$ любое решение калибровочно эквивалентно поля Янга–Миллса. При $\lambda = 0$ имеем следующую таблицу:

размерность	нетривиальные решения	локальные минимумы	неминимальные решения
$d > 4$	нет	нет	нет
$d = 4$	есть	инстантоны и анти-инстантоны	есть
$d = 3$	есть	монополи	есть
$d = 2$	нет	нет	нет

Случай $\lambda = 1$ был рассмотрен выше. В общем случае $\lambda > 0$ имеется только гипотеза Таубса, утверждающая, что для абелевой модели Янга–Миллса–Хиггса, управляемой функционалом $S^{\lambda}_{\mathrm{YMH}}$ на $\mathbb{R}^2$, в случае $\lambda < 1$ для каждого заряда k должна существовать (с точностью до калибровочной эквивалентности и сдвигов $\mathbb{R}^2$) только одна критическая точка этого функционала, являющаяся локальным минимумом. При этом весь топологический заряд будет сосредоточен в единственном нуле функции Φ, а решение (A, Φ) будет центрально симметрично относительно этого нуля. При $\lambda > 1$ функционал $S^{\lambda}_{\mathrm{YMH}}$ должен иметь единственную критическую точку, которая устойчива только если топологический заряд $k = 0, \pm 1$.

Из некоторых физических соображений можно ожидать, что имеется двойственность между критическими точками функционала $S^{\lambda}_{\mathrm{YMH}}$ и (возможно сингулярными) решениями уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала $S^{1/\lambda}_{\mathrm{YMH}}$.

3.2 Расслоения Хиггса и уравнения Хитчина

3.2.1 Уравнения Хитчина

Рассмотрим уравнения дуальности в $\mathbb{R}^2$, которые получаются из уравнений дуальности в $\mathbb{R}^4$ при условии, что коэффициенты связности не зависят от двух переменных.

Пусть

$$\mathcal{A} = \sum_{j=0}^{3} A_j dx^j$$

есть G-связность на $\mathbb{R}^4$, коэффициенты которой не зависят от переменных x^2 и x^3. Обозначим через A форму

$$A = A_0 dx^0 + A_1 dx^1$$

и

$$\varphi_1 := A_2,\ \varphi_2 := A_3,\ \varphi := \varphi_1 - i\varphi_2.$$

Тогда уравнения автодуальности для связности $\mathcal{A}$ можно будет переписать в виде

$$\begin{cases} [\nabla_0 + i\nabla_1, \varphi] = 0 \\ F_A = \dfrac{i}{2}[\varphi, \varphi^*], \end{cases}$$

где F_A – кривизна связности A на $\mathbb{R}^2$, ∇ – ковариантная производная, порождаемая связностью A.

Введем комплексную координату $z = x^0 + ix^1$ на $\mathbb{R}^2$ и положим

$$\Phi = \frac{1}{2}\varphi dz,\ \Phi^* = \frac{1}{2}\varphi^* d\bar{z}.$$

Тогда уравнения автодуальности примут вид

$$\begin{cases} \bar{\partial}_A \Phi = 0 \\ F_A + [\Phi, \Phi^*] = 0. \end{cases}$$

Здесь A есть связность в главном G-расслоении $P \to \mathbb{C}$, Φ – гладкая $(1,0)$-форма на $\mathbb{C}$ со значениями в комплексифицированном присоединенном расслоении $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}} P$, $\bar{\partial}_A$ – $\bar{\partial}$-оператор ковариантного внешнего дифференцирования, порождаемый $(0,1)$-компонентой $A^{0,1}$ связности A. Выписанные уравнения, называемые *уравнениями Хитчина*, конформно инвариантны, поэтому их можно рассматривать на произвольной римановой поверхности M (в дальнейшем мы ограничиваемся компактными римановыми поверхностями).

Пусть $G = \mathrm{SU}(2)$ и $E \to M$ – комплексное векторное расслоение ранга 2, ассоциированное с главным $\mathrm{SU}(2)$-расслоением $P \to M$. Уравнения

Хитчина для римановых поверхностей M рода 0 и 1 нетривиальных решений не имеет. В то же время на поверхностях M рода $g > 1$ такие решения существуют и будут подробно изучаться ниже.

Завершим этот параграф следующими замечаниями. Предположим, что род M строго больше 1, а расслоение E *разложимо*, т.е. $E = L \oplus L^*$ для некоторого линейного голоморфного расслоения L. Тогда уравнения Хитчина принимает вид *уравнения вихрей*

$$F_1 + 2(1 - \|\alpha\|^2)\omega = 0,$$

где α – квадратичный дифференциал на M, ω – кэлерова форма на M, нормированная условием: $\int_M \omega = 2\pi$, F_1 – кривизна U(1)-связности на L. Единственное для заданного α решение последнего уравнения определяет на M метрику постоянной отрицательной кривизны -4. Более того, пространство квадратичных дифференциалов на M, параметризующее множество всех решений этого уравнения, естественно диффеоморфно пространству Тейхмюллера метрик постоянной отрицательной кривизны на M.

Нам неизвестно, имеется ли аналог ADHM-конструкции для уравнений Хитчина. Если такая конструкция существует, то, по аналогии с 4-мерным и 3-мерным случаями, она должна представлять собой нетривиальное преобразование двойственности между решениями уравнений Хитчина.

3.2.2 Расслоения Хиггса

Пусть M есть компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, а $E \to M$ – эрмитово векторное расслоение, снабженное гладкой эрмитовой метрикой H. Предположим, что E наделено *голоморфной структурой*, задаваемой $\bar\partial$-оператором $\bar\partial_E$. Подчеркивая наличие голоморфной структуры, мы будем обозначать это голоморфное расслоение через $(E, \bar\partial_E)$, а пучок его голоморфных сечений через $\mathcal{E}$. В дальнейшем мы часто отождествляем $(E, \bar\partial_E)$ с пучком $\mathcal{E}$.

Если $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ – голоморфное векторное подрасслоение с фактор-пучком $\mathcal{Q}$, то гладкое расщепление $E = S \oplus Q$ позволяет представить $\bar\partial_E$ в виде

$$\bar\partial_E = \begin{pmatrix} \bar\partial_S & \beta \\ 0 & \bar\partial_Q \end{pmatrix} , \tag{3.1}$$

где $\beta \in \Omega^{0,1}(M, \mathrm{Hom}(Q, S))$ называется *2-й фундаментальной формой подрасслоения* S. В этом случае S задается ортогональным проектором $\pi : E \to S$, обладающим следующими свойствами:

$$\pi^2 = \pi, \ \pi^* = \pi \quad \text{и} \quad (I - \pi)\bar{\partial}_E = 0. \tag{3.2}$$

Из этих условий вытекает, что $\mathrm{tr}\, \pi = \mathrm{const}$ и $\beta = -\bar{\partial}_E \pi$. Тем самым, имеется взаимно-однозначное соответствие между

$$\left\{\begin{matrix}\text{голоморфные под-}\\ \text{расслоения в } \mathcal{E}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ортогональные проекторы в } E\text{, удо-}\\ \text{влетворяющие условиям (3.2)}\end{matrix}\right\}$$

Предположим, что расслоение E наделено связностью A с ассоциированной ковариантной производной $\nabla \equiv \nabla_A$, согласованной с эрмитовой структурой. Такая связность называется *эрмитовой* и удовлетворяет условию

$$d\langle s_1, s_2 \rangle_H = \langle d_A s_1, s_2 \rangle_H + \langle s_1, d_A s_2 \rangle_H,$$

где d_A есть ковариантный внешний дифференциал, порожденный связностью A, а s_1, s_2 – гладкие сечения расслоения E. Кривизна F_A эрмитовой связности A задается 2-формой $F_A \in \Omega^2(M, \mathrm{ad}\, E)$, где $\mathrm{ad}\, E$ обозначает расслоение эрмитовых эндоморфизмов E. Если связность A индуцирует фиксированную связность на расслоении $\det E$ (что будет часто предполагаться в дальнейшем), то $\mathrm{ad}_0 E$ (соотв. $\mathrm{ad}_0^{\mathbb{C}} E$) обозначает расслоение бесследовых косоэрмитовых (соотв. комплексных бесследовых) эндоморфизмов E.

Голоморфные линейные раслоения $L \to M$ задаются, как известно, *дивизорами* вида

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i,$$

где m_i, $i = 1, \ldots, N$, – целые числа, $z_1, \ldots, z_N$ – точки M. Голоморфное линейное расслоение, отвечающее дивизору $\mathcal{D}$, обозначается через $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\mathcal{D})$, а его *степень* $\deg L$, равная $c_1(L)$, совпадает со степенью дивизора $\deg \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{N} m_i$. *Степенью векторного расслоения* E называется величина

$$\deg E := \deg(\det E).$$

Наклоном голоморфного векторного расслоения $\mathcal{E}$ называется величина

$$\mu(E) = \deg E / \mathrm{rank}\, E.$$

В случае, если линейное расслоение $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\mathcal{D})$ обладает ненулевым голоморфным сечением, отвечающий ему дивизор линейно эквивалентен *эффективному* (для которого все $m_i \geq 0$), поэтому $\deg L \geq 0$.

Введем *оператор свертки* $\Lambda : \Omega^2(M) \to \Omega^0(M)$, определяемый равенством

$$\Lambda(f\omega) = f$$

для любой гладкой функции f на M. Это определение распространяется на формы из $\Omega^2(M, \operatorname{ad} E)$.

Если $\mathcal{S}$ – голоморфное векторное подрасслоение эрмитова голоморфного векторного расслоения $\mathcal{E}$, задаваемое ортогональным проектором π, то имеется явная формула для его степени, аналогичная формуле Черна–Вейля

$$\deg \mathcal{S} = \frac{1}{2\pi} \int_M \operatorname{tr}\left(\pi i \Lambda F_{(\bar{\partial}_E, H)}\right) \omega - \frac{1}{2\pi} \int_M |\beta|^2 \omega. \tag{3.3}$$

Определение 1. Голоморфное векторное расслоение $\mathcal{E}$ называется *стабильным* (соотв. *полустабильным*), если для любого голоморфного векторного подрасслоения $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ ранга $0 < \operatorname{rank} \mathcal{S} < \operatorname{rank} \mathcal{E}$, выполняется неравенство

$$\mu(\mathcal{S}) < \mu(\mathcal{E}) \text{ (соотв. } \mu(\mathcal{S}) \leq \mu(\mathcal{E})).$$

Расслоение $\mathcal{E}$ называется *полистабильным*, если оно является прямой суммой стабильных расслоений с одним и тем же наклоном.

Очевидно, все голоморфные линейные расслоения стабильны. Кроме того, если голоморфное векторное расслоение $\mathcal{E}$ (полу)стабильно, и $\mathcal{L}$ – голоморфное линейное расслоение, то расслоение $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$ также (полу)стабильно.

Расширением голоморфного векторного расслоения $\mathcal{S}$ *с помощью* голоморфного подрасслоения $\mathcal{Q}$ называется голоморфное векторное расслоение $\mathcal{E}$, которое можно включить в точную последовательность гомоморфизмов пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0. \tag{3.4}$$

Последовательность (3.4) *расщепляется*, если существует отображение $\mathcal{Q} \to \mathcal{E}$, являющееся правым обратным к проекции $\mathcal{E} \to \mathcal{Q}$.

Задача 9. Опишите расширения вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}(p) \longrightarrow 0.$$

Каким из них отвечают расщепляющиеся точные последовательности? Какие из этих расширений стабильны?

Связность ∇ называется *проективно плоской*, если

$$i\Lambda F_{\nabla} = \mu I,$$

где $\mu = \mathrm{const}$. В этом случае обязательно $\mu = \mu(E)$.

Теорема 4 (Нарасимхан–Шешадри)**.** *Голоморфное векторное расслоение $\mathcal{E} \to M$ допускает проективно плоскую связность тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ полистабильно.*

Определение 2. *Расслоением Хиггса* называется пара $(\mathcal{E}, \Phi)$, состоящая из голоморфного векторного расслоения $\mathcal{E}$ и голоморфного сечения Φ расслоения $K \otimes \operatorname{ad} E$, где K – каноническое расслоение многообразия M. Пара $(\mathcal{E}, \Phi)$ называется *стабильной* (соотв. *полустабильной*), если для любого Φ-инвариантного голоморфного подрасслоения $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ ранга $0 < \operatorname{rank} \mathcal{S} < \operatorname{rank} \mathcal{E}$ выполняется неравенство

$$\mu(\mathcal{S}) < \mu(\mathcal{E}) \text{ (соотв. } \mu(\mathcal{S}) \leq \mu(\mathcal{E})).$$

Расслоение Хиггса $(\mathcal{E}, \Phi)$ называется *полистабильным*, если оно является прямой суммой стабильных расслоений Хиггса с одним и тем же наклоном.

Задача 10. Пусть $f : (\mathcal{E}_1, \Phi_1) \to (\mathcal{E}_2, \Phi_2)$ – голоморфный гомоморфизм расслоений Хиггса, т.е. выполняется условие $\Phi_2 f = f \Phi_1$. Предположим, что расслоения $(\mathcal{E}_i, \Phi_i)$, $i = 1, 2$, полустабильны и $\mu(\mathcal{E}_1) > \mu(\mathcal{E}_2)$. Тогда $f \equiv 0$. Если же $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{E}_2)$ и одно из этих расслоений стабильно, то либо $f \equiv 0$, либо f – изоморфизм.

Подрасслоением Хиггса в расслоении Хиггса $(\mathcal{E}, \Phi)$ называется Φ-инвариантное голоморфное подрасслоение $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Сужение $\Phi_S := \Phi|_S$ превращает такое подрасслоение в расслоение Хиггса $(\mathcal{S}, \Phi_S)$, для которого вложение $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ является отображением расслоений Хиггса. Аналогичным образом определяется структура расслоения Хиггса на факторе $\mathcal{Q} = \mathcal{E}/\mathcal{S}$.

Определение 3. Пусть $(\mathcal{E},\Phi)$ есть расслоение Хиггса. *Фильтрацией Хардера–Нарасимхана* на $(\mathcal{E},\Phi)$ (кратко: HN-фильтрацией) называется фильтрация подрасслоениями Хиггса, имеющая вид

$$0 = (\mathcal{E}_0,\Phi_0) \subset (\mathcal{E}_1,\Phi_1) \subset \ldots \subset (\mathcal{E}_l,\Phi_l) = (\mathcal{E},\Phi),$$

в которой факторы $(\mathcal{Q}_i,\Phi_{Q_i}) = (\mathcal{E}_i,\Phi_i)/(\mathcal{E}_{i-1},\Phi_{i-1})$ полустабильны. Требуется также, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu(\mathcal{Q}_i) > \mu(\mathcal{Q}_{i-1}).$$

Ассоциированный градуированный объект

$$\mathrm{gr}_{HN}(\mathcal{E},\Phi) = \bigoplus_{i=1}^{l}(\mathcal{Q}_i,\Phi_{Q_i})$$

в этом случае однозначно определяется классом изоморфизма расслоения $(\mathcal{E},\Phi)$.

Набор $\vec{\mu}(\mathcal{E},\Phi) = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ из n чисел, где каждое μ_i повторяется столько раз, каков ранг Q_i, называется *HN-типом*(*типом Хардера–Нарасимхана*) расслоения Хиггса $(\mathcal{E},\Phi)$. Он является важным инвариантом расслоений Хиггса.

3.2.3 Пространства модулей расслоений Хиггса

Обозначим через $\mathcal{A}_E$ пространство эрмитовых связностей в эрмитовом векторном расслоении $E \to M$ ранга n. Это бесконечномерное аффинное многообразие с локальной моделью $\Omega^1(M, \mathrm{ad}\,E)$.

Группа калибровочных преобразований есть по определению

$$\mathcal{G}_E = \{g \in \Omega^0(M, \mathrm{End}\,E):\ gg^* = I\}$$

(в случае, когда фиксируется расслоение $\det E$ в определении группы $\mathcal{G}_E$ добавляется еще одно условие $\det g = 1$). Эта группа действует на $\mathcal{A}_E$, переводя ковариантный дифференциал d_A в новый ковариантный дифференциал

$$d_{g(A)} = g \circ d_A \circ g^{-1}.$$

Пространство $\mathcal{A}_E$ можно рассматривать также как пространство комплексных структур на $E \to M$. Действительно, по каждой эрмитовой связности на $E \to M$ можно построить $\bar{\partial}$-оператор, задаваемый (0,1)-компонентой связности. Этот оператор определяет комплексную структуру на E, поскольку (0,2)-компонента кривизны зануляется в случае римановой поверхности. С другой стороны, $\bar{\partial}$-оператор на $E \to M$ определяет единственную эрмитову связность на E, (0,1)-компонента которой совпадает с исходным $\bar{\partial}$-оператором. Такая связность называется *связностью Черна*. Отвечающий ей ковариантный дифференциал d_A разлагается в сумму двух составляющих d'_A и d''_A, переводящих сечения расслоения E в формы из $\Omega^{1,0}(M,E)$ и $\Omega^{0,1}(M,E)$ соответственно.

Рассматривая $\mathcal{A}_E$ как пространство комплексных структур на $E \to M$, можно определить действие *комплексифицированной группы калибровочных преобразований* $\mathcal{G}_E^{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{A}_E$. А именно, если исходная связность отвечает $\bar{\partial}$-оператору $\bar{\partial}_E = d''_A$, то преобразованная связность $g(A)$ будет отвечать $\bar{\partial}$-оператору $g \circ \bar{\partial}_E \circ g^{-1}$.

Пространство расслоений Хиггса, по определению, отождествляется с

$$\mathcal{B}_E = \{(A,\Phi) \in \mathcal{A}_E \times \Omega^0(M, K \otimes \operatorname{ad}{}^{\mathbb{C}} E) :\ d''_A\Phi = 0\},$$

а его подпространство, состоящее из полустабильных расслоений Хиггса, обозначается через $\mathcal{B}_E^{ss}$.

Определение 4. *Пространство модулей полустабильных расслоений Хиггса* ранга n (с фиксированным $\det E$) на M отождествляется с категорным фактором

$$\mathfrak{M}_E^{(n)} = \mathcal{B}_E^{ss}//\mathcal{G}_E^{\mathbb{C}}.$$

Напомним определение категорного фактора. Пусть X – комплексное многообразие, на котором задано голоморфное действие комплексной группы Ли $G^{\mathbb{C}}$. Введем на X следующее отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда $f(x_1) = f(x_2)$ для всех голоморфных функций f, инвариантных относительно группы $G^{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\pi : X \to X/\sim$ естественную проекцию. Назовем *категорным фактором* $X//G^{\mathbb{C}}$ хаусдорфово топологическое пространство $X/\sim$, снабженное структурным пучком $\mathcal{O}(X//G^{\mathbb{C}})$, который определяется следующим образом. Для произвольного открытого подмножества $U \subset X/\sim$ алгебра $\mathcal{O}(X//G^{\mathbb{C}})(U)$ состоит из непрерывных комплекснозначных функций на U, которые поднимаются посредством отображения π до голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-инвариантных функций на $\pi^{-1}(U)$.

В случае, когда X является штейновым пространством, а группа $G^{\mathbb{C}}$ редуктивна (т.е. является комплексификацией вещественной компактной группы Ли), пространство $X//G^{\mathbb{C}}$ также является штейновым, а проекция π – голоморфным открытым отображением. Более того, каждый слой проекции π связен и содержит единственную замкнутую орбиту. Заметим, что эти утверждения, вообще говоря, не имеют места для обычного фактора, совпадающего с пространством орбит $X/\sim$.

Фактор $\mathcal{G}_E^{\mathbb{C}}/\mathcal{G}_E$ можно отождествить с пространством эрмитовых метрик на E. Поэтому изучать поведение различных функционалов на орбитах группы $\mathcal{G}_E^{\mathbb{C}}$ в $\mathcal{A}_E/\mathcal{G}_E$ можно двумя способами: либо меняя комплексную структуру $\bar{\partial}_E$, при этом фиксируя эрмитову метрику H, либо меняя эрмитову метрику H, фиксируя при этом комплексную структуру $\bar{\partial}_E$.

Введем обозначение:

$$D'' = d''_A + \Phi, \quad D' = d'_A + \Phi^*.$$

Кэлерова форма ω и эрмитова метрика H на E задают L^2-скалярное произведение на E и $\operatorname{End} E$. Для этого скалярного произведения в случае $\Phi = 0$ выполняются *тождества Кэлера*:

$$(D'')^* = -i[\Lambda, D'],\ (D')^* = i[\Lambda, D''].$$

Задача 11. Какой вид принимают тождества Кэлера в случае $\Phi \neq 0$.

Инфинитезимальная структура пространства модулей задается деформационным комплексом $C(A,\Phi)$, который получается дифференцированием условия $d''_A\Phi = 0$ и действия группы калибровочных преобразований

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M, \operatorname{ad}^{\mathbb{C}} E) \xrightarrow{D''} \Omega^{1,0}(M, \operatorname{ad}^{\mathbb{C}} E) \oplus \Omega^{0,1}(M, \operatorname{ad}^{\mathbb{C}} E) \xrightarrow{D''}$$
$$\xrightarrow{D''} \Omega^{1,1}(M, \operatorname{ad}^{\mathbb{C}} E) \longrightarrow 0.$$

Зануление $(D'')^2 = 0$ гарантируется условием $d''_A\Phi = 0$.

Расслоение Хиггса называется *простым*, если $H^0(C(A,\Phi)) \cong \mathbb{C}$ (или нулю в случае фиксированного расслоения $\det E$). Заметим, что по двойственности Серра $H^0(C(A,\Phi)) \cong H^2(C(A,\Phi))$.

Задача 12. Докажите, что стабильное расслоение Хиггса обязательно является простым. Указание: используйте Задачу 10.

Предложение 1. *Для простого расслоения Хиггса $(\mathcal{E}, \Phi)$, наделенного эрмитовой связностью A, пространство модулей $\mathfrak{M}_E^{(n)}$ в точке (A, Φ) является гладким комплексным многообразием размерности $(n^2-1)(2g-2)$, а его касательное пространство в этой точке отождествляется с*

$$H^1(C(A,\Phi)) \cong \{(\varphi, \beta) : \ d_A''\varphi = -[\Phi, \beta], \ (d_A'')^*\beta = i\Lambda[\Phi^*, \varphi]\}.$$

Задача 13. Опишите пространство модулей $\mathfrak{M}_E^2$ расслоений Хиггса ранга 2 для расслоения $E = K^{1/2} \oplus K^{-1/2}$, где K – каноническое расслоение.

Для заданного расслоения Хиггса $(\mathcal{E}, \Phi)$ коэффициент при λ^{n-i} в разложении $\det(\lambda + \Phi)$ является голоморфным сечением расслоения $\mathcal{K}^i$, $i = 1, \ldots, n$. (В случае фиксированного $\det E$ имеем $\operatorname{tr}\Phi = 0$, поэтому разложение начинается с $i = 2$). Указанные сечения инвариантны относительно действия группы $\mathcal{G}_E^{\mathbb{C}}$ сопряжениями, поэтому корректно определено *отображение Хитчина*

$$h : \mathfrak{M}_E^{(n)} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} H^0(M, \mathcal{K}^i),$$

которое обязательно является собственным.

3.2.4 Соответствие Хитчина–Кобаяши

Уравнение Хитчина для расслоения Хиггса $(\mathcal{E}, \Phi)$ с тривиальным расслоением E имеет вид

$$F_A + [\Phi, \Phi^*] = 0, \tag{3.5}$$

где Φ есть (1,0)-форма со значениями в $\operatorname{End} E$. В случае расслоений E ненулевой степени это уравнение принимает вид

$$f_{(A,\Phi)} := i\Lambda(F_A + [\Phi, \Phi^*]) = \mu, \tag{3.6}$$

где $\mu = \mu(E)$.

Как отмечалось выше, уравнение (3.5) можно рассматривать с двух точек зрения: либо как уравнение на эрмитову метрику H при фиксированной комплексной структуре $\bar{\partial}_E$, либо как уравнение на комплексную структуру $\bar{\partial}_E$ при фиксированной метрике H.

Уравнение (3.5) является уравнением на минимумы *функционала Янга–Миллса–Хиггса* , задаваемого на голоморфных парах (A, Φ) формулой

$$YMH(A, \Phi) = \int_M \|F_A + [\Phi, \Phi^*]\|^2 \omega.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для этого функционала имеют вид

$$d_A f_{(A,\Phi)} = 0, \quad [\Phi, f_{(A,\Phi)}] = 0. \tag{3.7}$$

Метрику, для которой выполняются эти уравнения, называется *критической*. Для такой метрики расслоение $(\mathcal{E}, \Phi)$ расщепляется в прямую сумму расслоений Хиггса, являющихся решениями уравнений (3.5) с различными наклонами.

Предложение 2. *Если расслоение Хиггса* $(\mathcal{E}, \Phi)$ *допускает метрику, удовлетворяющую уравнению* (3.5)*, то оно является полистабильным.*

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ есть собственное Φ-инвариантное подрасслоение. Обозначим через π оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{S}$ и через $\beta = -\bar{\partial}_E \pi$ его 2-ю фундаментальную форму. Так как $\mathcal{S}$ является Φ-инвариантным, то $(I - \pi)\Phi\pi = 0$, т.е. $\Phi\pi = \pi\Phi\pi$ и $\pi\Phi^* = \pi\Phi^*\pi$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(\pi[\Phi, \Phi^*]) = \operatorname{tr}(\pi\Phi\Phi^*) - \operatorname{tr}(\pi\Phi^*\Phi) = \operatorname{tr}(\pi\Phi\Phi^*) - \operatorname{tr}(\Phi\pi\Phi^*) = \\
&= \operatorname{tr}(\pi\Phi\Phi^*\pi) - \operatorname{tr}(\Phi\pi\Phi^*\pi) = \operatorname{tr}(\pi\Phi\Phi^*\pi) - \operatorname{tr}(\pi\Phi\pi\Phi^*\pi) = \\
&= \operatorname{tr}(\pi\Phi(I-\pi)\Phi^*\pi) = \operatorname{tr}(\pi\Phi(I-\pi)(I-\pi)\Phi^*\pi) = \operatorname{tr}(\pi\Phi(I-\pi)(\pi\Phi(I-\pi)^*),
\end{aligned}$$

откуда $\operatorname{tr}(\pi i\Lambda[\Phi, \Phi^*]) = |\pi\Phi(I-\pi)|^2$. Теперь из уравнения (3.5) и формулы для степени (3.3) получаем

$$\deg \mathcal{S} = \operatorname{rank}(\mathcal{S})\mu(\mathcal{E}) - \frac{1}{2\pi}\left(\|\pi\Phi(I - \pi)\|^2 + \|\beta\|^2\right),$$

откуда следует, что $\mu(\mathcal{S}) \leq \mu(\mathcal{E})$, причем равенство здесь возможно только в том случае, когда два последних члена справа в последней формуле зануляются, иными словами, если голоморфная структура и поле Хиггса расщепляются. Продолжая этот процесс, докажем справедливость предложения. □

Теорема 5 (Хитчин–Симпсон)**.** *Если расслоение Хиггса* $(\mathcal{E}, \Phi)$ *полистабильно, то оно допускает метрику, удовлетворяющую уравнению* (3.5).

Заметим, что в случае линейных расслоений $\mathcal{L}$ утверждение доказывается относительно просто. Действительно, в этом случае член $[\Phi, \Phi^*]$ исчезает и уравнение (3.6) эквивалентно условию существования метрики постоянной кривизны на L. Пусть H – эрмитова метрика на E. Рассмотрим конформно эквивалентную ей метрику $H_\varphi = e^\varphi H$. Для нее

$$F_{(\bar\partial_L, H_\varphi)} = F_{(\bar\partial_L, H)} + \partial\bar\partial\varphi$$

и задача отыскания нужной метрики сводится к поиску функции φ, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\varphi = 2i\Lambda F_{(\bar\partial_L, H)} - 2\deg L.$$

Необходимым и достаточным условием его разрешимости является зануление интеграла от правой части, которое очевидно выполняется.

Доказательство теоремы в общем случае использует следующее рассуждение, принадлежащее Дональдсону. Введем для эрмитова эндоморфизма φ величины

$$\nu(\varphi) = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|, \quad N^2(\varphi) + \int_M \nu^2(\varphi)\frac{\omega}{2\pi},$$

где $\{\lambda_j\}$ – собственные значения φ. Рассмотрим функционал

$$J(A, \Phi) = N\left(f_{(A,\Phi)} - \mu(E)\right).$$

Основную роль в доказательстве теоремы Хитчина–Симпсона играет

Лемма 1. *На любой орбите комплексной группы $\mathcal{J}_E^{\mathbb{C}}$ калибровочных преобразований можно найти последовательность точек $\{A_j, \Phi_j\}$, обладающую следующими свойствами:*

1. *последовательность $\{A_j, \Phi_j\}$ является минимизирующей для функционала J;*
2. $\sup|f_{(A_j,\Phi_j)}|$ *ограничены равномерно по j;*
3. $\|d_{A_j} f_{(A_j,\Phi_j)}\|_{L^2}$ *и* $\|[f_{(A_j,\Phi_j)}, \Phi_j]\|_{L^2}$ *стремятся к нулю при $j \to \infty$.*

Пользуясь этой леммой и теоремой Уленбек о компактности можно построить расслоение Хиггса с метрикой, удовлетворяющей уравнению Хитчина (3.5).

Доказательство приведенной леммы использует поток, задаваемый функционалом Янга–Миллса–Хиггса.

Определение 5. *Потоком Янга–Миллса–Хиггса* для пары (A, Φ) называется поток, определяемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} = -d_A^*(F_A + [\Phi, \Phi^*]) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = [\Phi, i\Lambda(F_A + [\Phi, \Phi^*])] \end{cases}$$

Эти уравнения следует дополнить условием $d_A''\Phi = 0$, которое играет роль связи для выписанной системы, поскольку оно сохраняется под действием комплексной группы калибровочных преобразований. Приведенные уравнения задают L^2-градиентный поток для функционала Янга–Миллса–Хиггса. Более того, справедлива

Лемма 2. *Для всех* $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} YMH(A, \Phi) = -2\|d_A f_{(A,\Phi)}\|^2_{L^2} - 4\|[\Phi, f_{(A,\Phi)}]\|^2_{L^2}.$$

Из этой леммы следует, что функционал Янга–Миллса–Хиггса убывает вдоль потока, причем справедливо неравенство

$$\int_0^\infty dt \left\{2\|d_A f_{(A,\Phi)}\|^2_{L^2} + 4\|[\Phi, f_{(A,\Phi)}]\|^2_{L^2}\right\} \leq YMH(A_0, \Phi_0).$$

Обозначим через $\mathcal{B}_E^{\min}$ множество расслоений Хиггса, удовлетворяющих уравнению Хитчина (3.5). Введенный поток Янга–Миллса–Хиггса определяет бесконечномерную теорию Морса, в которой точки $\mathcal{B}_E^{\min}$ отвечают минимумам функционала Янга–Миллса–Хиггса, а критические метрики — критическим точкам высших индексов Морса. На самом деле, справедлива

Теорема 6 (Уилкин)**.** *Поток Янга–Миллса–Хиггса задает* $\mathcal{G}_E$*-инвариантную деформационную ретракцию пространства* $\mathcal{B}_E^{ss}$ *на пространство* $\mathcal{B}_E^{min}$*.*

3.3 Гармонические отображения и σ-модели

3.3.1 Гармонические отображения

Пусть заданы римановы многообразия M^m и N^n, снабженные римановыми метриками g и h соответственно. Пусть $\varphi : M \to N$ есть гладкое отображение. Его *энергией* называется функционал вида

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi(p)|^2 \mathrm{vol},$$

где $d\varphi$ – дифференциал отображения φ, vol – элемент объема римановой метрики g.

Выберем в точке $p \in M$ локальные координаты (x^i), а в ее образе $q = \varphi(p) \in N$ локальные координаты (u^α). В этих координатах локальное выражение для $|d\varphi(p)|^2$ будет иметь вид

$$|d\varphi(p)|^2 = \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta} g^{ij}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\, h_{\alpha\beta},$$

где $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x)$ – компоненты отображения φ, g^{ij} – матрица, обратная к матрице (g_{ij}) метрического тензора g. Элемент объема vol задается в выбранных локальных координатах формулой вида

$$\mathrm{vol} \sim \sqrt{|\det(g_{ij}|}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Дифференциал отображения $\varphi : M \to N$ можно определить более инвариантным образом как сечение $d\varphi$ расслоения

$$T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN) \longrightarrow M,$$

где $\varphi^{-1}(TN)$ – обратный образ касательного расслоения TN при отображении φ. По определению, слой $\varphi^{-1}(TN)_p$ в точке $p \in M$ есть касательное пространство $T_{\varphi(p)}N$ к N в точке $q = \varphi(p)$.

Расслоение $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$ наделяется естественной римановой метрикой, индуцированной метриками g и h.

Задача 14. Найдите явное выражение для этой метрики в локальных координатах.

В случае, когда M и N являются открытыми подмножествами евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, норма дифференциала отображения $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n) : M \to N$ задается выражением

$$|d\varphi(x)|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right|^2 ,$$

а энергия $E(\varphi)$ задается *интегралом Дирихле*

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right|^2 dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Экстремалями этого функционала являются отображения $\varphi = (\varphi^\alpha)$, компоненты φ^α которых суть гармонические функции.

Гладкое отображение $\varphi : M \to N$ римановых многообразий называется *гармоническим*, если оно является экстремальным для функционала энергии $E(\varphi)$ по отношению к гладким вариациям φ с компактными носителями.

Найдем уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала $E(\varphi)$. Приведем сначала их вид в локальных координатах (x^i) в точке $p \in M$ и (u^α) в точке $q = \varphi(p) \in N$. Пусть римановы связности ${}^M\nabla$ многообразия M и ${}^N\nabla$ многообразия N задаются в этих координатах *символами Кристоффеля*

$${}^M\nabla \sim {}^M\Gamma^k_{ij} \quad \text{и} \quad {}^N\nabla \sim {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$$

соответственно. В этих координатах *уравнения Эйлера–Лагранжа* для функционала $E(\varphi)$ принимают вид

$$\sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k {}^M\Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \right\} =$$
$$= \Delta_M \varphi^\gamma + \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} = 0, \quad \gamma = 1, \dots, n.$$

Оператор

$$\Delta_M = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k {}^M\Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \right)$$

называется *оператором Лапласа–Бельтрами* многообразия M, задаваемым метрикой g. Это линейный дифференциальный оператор 2-го порядка по φ^γ. Входящий в уравнения Эйлера–Лагранжа член

$$\sum_{i,j} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j},$$

зависящий от геометрии многообразия N, т.е. от геометрии образа отображения φ, задается выражением, квадратичным по производным отображения φ.

При $N = \mathbb{R}^n$ выписанные выше уравнения Эйлера–Лагранжа превращаются в систему уравнений Лапласа–Бельтрами на компоненты φ^γ отображения φ, решениями которой являются гармонические функции φ^γ на многообразии M.

Запишем теперь уравнения Эйлера–Лагранжа для энергии отображения $\varphi : M \to N$ в более инвариантном виде. Напомним, что дифференциал $d\varphi$ можно рассматривать как сечение расслоения

$$T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN) \longrightarrow M.$$

Римановы связности ${}^M\nabla$ и ${}^N\nabla$ порождают естественную связность ∇ на этом расслоении. В ее терминах уравнение Эйлера–Лагранжа может быть записано в кратком виде

$$\mathrm{tr}(\nabla d\varphi) = 0.$$

Векторное поле $\tau_\varphi := \mathrm{tr}(\nabla d\varphi)$ называется *полем напряжений* отображения φ.

Перейдем теперь к более важному для нас случаю почти комплексных многообразий. Будем предполагать, что риманова метрика g на почти комплексном многообразии (M, J) является *эрмитовой*, т.е. совместима с почти комплексной структурой J в том смысле, что $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для любых векторных полей $X, Y \in TM$. Почти комплексное многообразие (M, J), наделенное эрмитовой метрикой g, называется *почти эрмитовым*. В случае, когда почти комплексная структура J интегрируема, такое многообразие называется *эрмитовым*.

Введем на почти эрмитовом многообразии (M, g, J) форму ω, полагая $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ для $X, Y \in TM$. Многообразие M называется *почти* *кэлеровым*, если форма ω замкнута. В этом случае ω называется *кэлеровой формой*. Если форма ω к тому же невырождена (в этом случае ω задает симплектическую структуру на M), а почти комплексная структура интегрируема, такое многообразие (M, g, J, ω) называется *кэлеровым*.

Пусть теперь $\varphi : M \to N$ есть гладкое отображение почти комплексных многообразий. Оно называется *почти голоморфным* или *псевдоголоморфным*, если касательное к нему отображение $\varphi_* : TM \to TN$ коммутирует с почти комплексными структурами, т.е.

$$\varphi_* \circ {}^M J = {}^N J \circ \varphi_*,$$

где ${}^M J$ (соотв. ${}^N J$) есть почти комплексная структура на многообразии M (соотв. N). Отображение φ называется *почти антиголоморным*, если φ_* антикоммутирует с почти комплексными структурами, т.е.

$$\varphi_* \circ {}^M J = -{}^N J \circ \varphi_*.$$

Пусть $\varphi : M \to N$ есть гладкое отображение почти комплексных многообразий. Продолжим касательное к нему отображение $\varphi_* : TM \to TN$ комплексно-линейным образом до отображения $\varphi_* : T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}N$ комплексифицированных касательных расслоений. Полученное отображение, в соответствии с разложениями

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M, \quad T^{\mathbb{C}}N = T^{1,0}N \oplus T^{0,1}N,$$

можно представить в блочном виде с блоками, задающимися четырьмя операторами

$$\begin{aligned} \partial'\varphi :& T^{1,0}M \longrightarrow T^{1,0}N, \quad \partial''\varphi : T^{0,1}M \longrightarrow T^{1,0}N, \\ \partial'\bar{\varphi} = \overline{\partial''\varphi} :& T^{1,0}M \longrightarrow T^{0,1}N, \quad \partial''\bar{\varphi} = \overline{\partial'\varphi} : T^{0,1}M \longrightarrow T^{0,1}N. \end{aligned}$$

Если отождествить φ_* с дифференциалом $d\varphi$, рассматриваемым как сечение расслоения

$$T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N) \longrightarrow M,$$

то введенные операторы также получат аналогичную интерпретацию как сечения соответствующих подрасслоений указанного расслоения. Например, оператор $\partial'\varphi$ можно отождествить с сечением расслоения

$$\Lambda^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}N).$$

В терминах введенных операторов отображение φ почти голоморфно (соотв. почти антиголоморфно), если

$$\partial''\varphi = 0 \text{ (соотв. } \partial'\varphi = 0).$$

В случае, когда многообразия M и N почти эрмитовы, энергия гладкого отображения $\varphi : M \to N$ представляется в виде суммы

$$E(\varphi) = E'(\varphi) + E''(\varphi),$$

где

$$E'(\varphi) = \int_M |\partial'\varphi|^2 \mathrm{vol}, \quad E''(\varphi) = \int_M |\partial''\varphi|^2 \mathrm{vol}.$$

Критерий голоморфности отображения φ можно, пользуясь этим разложением, переформулировать следующим образом: *φ голоморфно* (соотв. *антиголоморфно*) $\iff$ $E''(\varphi) = 0$ *(соотв.* $E'(\varphi) = 0$*)*.

Спрашивается, являются ли (анти)голоморфные отображения почти эрмитовых многообразий автоматически гармоническими? Ответ на этот вопрос положителен для компактных почти кэлеровых многообразий.

Пусть $\varphi : M \to N$ есть гладкое отображение компактных почти кэлеровых многообразий. Тогда величина

$$k(\varphi) = E'(\varphi) - E''(\varphi)$$

зависит только от гомотопического класса отображения φ. Так как

$$E(\varphi) = 2E'(\varphi) - k(\varphi) = 2E''(\varphi) + k(\varphi)$$

то отсюда вытекает, что критические точки функционалов $E(\varphi), E'(\varphi)$ и $E''(\varphi)$ в этом случае совпадают и

$$E(\varphi) \geq |k(\varphi)|.$$

Поэтому (анти)голоморфные отображения φ реализуют абсолютные минимумы энергии $E(\varphi)$ в заданном топологическом классе: при $k(\varphi) \geq 0$ минимумы реализуются на почти голоморфных отображениях с $E''(\varphi) = 0$, при $k(\varphi) \leq 0$ — на почти антиголоморфных отображениях с $E'(\varphi) = 0$.

В заключение остановимся более подробно на случае гармонических отображений из римановых поверхностей в римановы многообразия. Пусть $\varphi : M \to N$ есть гладкое отображение из римановой поверхности M в риманово многообразие N. Касательное отображение $\varphi_* : TM \to TN$ можно продолжить комплексно-линейным образом до отображения $\varphi_* : T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}N$ комплексифицированных касательных расслоений и отождествить с сечением $d\varphi$ расслоения

$$T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N) \longrightarrow M.$$

Поэтому дифференциал $d\varphi$ можно представить в виде суммы

$$d\varphi = \delta\varphi + \bar{\delta}\varphi,$$

где $\delta\varphi$ есть сечение расслоения $\Lambda^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, а $\bar{\delta}\varphi$ – сечение расслоения $\Lambda^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$.

Обозначим, как и ранее, через ∇ естественную связность на расслоении $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$, порожденную римановыми связностями ${}^M\nabla$ и ${}^N\nabla$, и продолжим ее комплексно-линейным образом на комплексифицированное расслоение $T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$. Введем операторы, действующие на сечениях указанного расслоения, которые в терминах локальной комплексной координаты z на M определяются следующим образом

$$\delta := \nabla_{\partial/\partial z}\ , \quad \bar{\delta} := \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}\ .$$

Тогда условие гармоничности отображения $\varphi : M \to N$ будет записываться в виде

$$\bar{\delta}\delta\varphi = \nabla_{\partial/\partial\bar{z}}(\delta\varphi) = \nabla_{\partial/\partial\bar{z}}(\nabla_{\partial/\partial z}\varphi) = 0$$

или, в эквивалентной форме

$$\delta\bar{\delta}\varphi = \nabla_{\partial/\partial z}(\bar{\delta}\varphi) = \nabla\partial/\partial z(\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\varphi) = 0.$$

В случае, когда многообразие N является кэлеровым, полученные условия гармоничности можно упростить и далее, воспользовавшись соотношениями

$$\delta\varphi = \partial'\varphi + \overline{\partial''\varphi}, \quad \bar{\delta}\varphi = \partial''\varphi + \overline{\partial'\varphi}.$$

Так как для кэлерового многообразия N связность ${}^N\nabla$ сохраняет разложение $T^{\mathbb{C}}N = T^{1,0}N \oplus T^{0,1}N$ в прямую сумму $(1,0)$- и $(0,1)$-подпространств, то условие гармоничности можно переписать в виде

$$\bar{\delta}\partial'\varphi = 0 \Leftrightarrow \delta\partial''\varphi = 0.$$

3.3.2 Пример: гармонические отображения римановой сферы в себя

Начнем со следующей задачи, возникающей в теории ферромагнетизма. Предположим, что в каждой точке $x = (x_1, x_2)$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ задан вектор $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ единичной длины, гладко зависящий от точки x. Иными словами, задано гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^2$, $x \mapsto \varphi(x)$, плоскости $\mathbb{R}^2$ в единичную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Энергия отображения φ задается интегралом Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |d\varphi|^2 dx_1 dx_2,$$

где $|d\varphi|^2 = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|^2$.

Для того, чтобы обеспечить конечность энергии $E(\varphi) < \infty$, естественно наложить на φ следующее *асимптотическое условие*:

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi_0 \quad \text{равномерно при } |x| \to \infty,$$

где φ_0 – некоторая фиксированная точка S^2. При этом условии отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^2$ будет продолжаться до непрерывного отображения

$$\varphi : S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2.$$

Такие отображения $\varphi : S^2 \to S^2$ обладают топологическим инвариантом, а именно *степенью отображения*, задаваемым формулой

$$\deg\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^*\omega,$$

где ω – нормированная форма объема на сфере: $\int_{S^2}\omega = 1$, $\varphi^*\omega$ – прообраз формы ω при отображении φ.

Поставим перед собой следующую задачу: найти все экстремали функционала $E(\varphi)$ в классе гладких отображений $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^2$ с конечной энергией и заданной степени $k = \deg\varphi$.

Для решения указанной задачи удобно ввести комплексную координату $z = x_1 + ix_2$ в области определения $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ и стереографическую комплексную координату w в образе $S^2 \setminus \{\infty\}$. В этих координатах выражение для энергии отображения $\varphi = w(z)$ примет вид

$$E(\varphi) = 2\int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w/\partial z|^2 + |\partial w/\partial\bar{z}|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|dz \wedge d\bar{z}|,$$

а формула для степени φ преобразуется в

$$\deg\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w/\partial z|^2 - |\partial w/\partial\bar{z}|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|dz\wedge d\bar{z}|.$$

Сравнивая две последние формулы, мы видим, что

$$E(\varphi) \geq 4\pi|\deg\varphi|.$$

При этом равенство здесь может достигаться только в следующих случаях:

- если $k = \deg\varphi \geq 0$, то при $\partial w/\partial\bar{z} \equiv 0$, т.е. на голоморфных функциях $\varphi = w(z)$;

- если $k = \deg\varphi < 0$, то при $\partial w/\partial z \equiv 0$, т.е. на антиголоморфных функциях $\varphi = w(z)$.

Следовательно, голоморфные отображения $\varphi = w(z)$ задают минимумы энергии $E(\varphi)$ в топологических классах с $k \geq 0$, тогда как антиголоморфные отображения $\varphi = w(z)$ задают минимумы энергии $E(\varphi)$ в топологических классах с $k < 0$. Для минимизирующих отображений φ значение энергии $E(\varphi)$ равно $4\pi|k|$.

Найдем конкретные формулы для минимизирующих отображений. Предположим для определенности, что $k = \deg\varphi > 0$. Пользуясь инвариантностью $E(\varphi)$ относительно вращений сферы S^2 в образе, зафиксируем асимптотическое значение φ_0, полагая его равным $\varphi_0 = w_0 = 1$.

Нам нужно описать голоморфные отображения римановой сферы $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ в себя, имеющие степень k и равные 1 на бесконечности. Такие отображения задаются рациональными функциями вида

$$\varphi = w(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{z-a_j}{z-b_j}$$

где $a_j \neq b_j$ – произвольные комплексные числа. Аналогичное описание допускают антиголоморфные отображения, минимизирующие $E(\varphi)$ при $k < 0$.

Заметим, что пространство решений нашей задачи зависит от $4k$ вещественных параметров (или $4k+2$ вещественных параметров, если добавить вращения сферы S^2 в образе).

Мы описали все локальные минимумы функционала энергии $E(\varphi)$.

Задача 15. Долажите, что у функционала энергии $E(\varphi)$ нет других экстремалей помимо локальных минимумов. Это эффект двумерности рассматриваемой задачи.

Можно показать, что других экстремалей у $E(\varphi)$ нет — это эффект двумерности рассматриваемой задачи.

3.3.3 Твисторная интерпретация гармонических отображений

В параграфе 1.2.5 мы построили для произвольного четномерного риманова многообразия N твисторное расслоение

$$\pi : Z = \mathcal{J}(N) \longrightarrow N$$

и наделили твисторное пространство Z почти комплексной структурой $\mathcal{J}^1$. В этом параграфе мы покажем, каким образом можно использовать указанное твисторное расслоение для решения задачи построения гармонических отображений из компактных римановых поверхностей в римановы многообразия.

Напомним, что согласно твисторной программе Пенроуза любая задача римановой геометрии на многообразии N должна сводиться к некоторой задаче комплексной геометрии на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$. Если верить в этот тезис Пенроуза, то можно предположить, что гармонические отображения $\varphi : M \to N$ из компактной римановой поверхности M в многообразие N должны возникать из псевдоголоморфных отображений $\psi : M \to (Z, \mathcal{J}^1)$ как проекции последних отображений на N, т.е. $\varphi = \pi \circ \psi$:

$$\begin{tikzcd} & Z = \mathcal{J}(N) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

И это почти верно. Оказывается, что проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \to (Z, \mathcal{J}^1)$ на N действительно удовлетворяют дифференциальным уравнениям 2-го порядка на N, но это не гармонические уравнения, а *ультрагиперболические*, т.е. уравнения типа гармонических, но с "неправильной" сигнатурой (n, n) вместо нужной нам сигнатуры $(2n, 0)$.

Поэтому для того, чтобы строить гармонические отображения $\varphi : M \to N$ как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \to Z$, нужно поменять определение почти комплексной структуры на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$.

А именно, в терминах вертикально-горизонтального разложения

$$T\mathcal{J}(N) = V \oplus H$$

искомая почти комплексная структура $\mathcal{J}^2$ на $\mathcal{J}(N)$ должна задаваться как

$$\mathcal{J}^2 = (-\mathcal{J}^v) \oplus \mathcal{J}^h.$$

Указанная почти комплексная структура на $\mathcal{J}(N)$ была введена Иллсом и Саламоном и, как мы увидим, именно она отвечает за твисторную интерпретацию гармонических отображений.

Прежде, чем переходить к построению гармонических отображений как проекций псевдоголоморфных, остановимся более подробно на вопросе об интегрируемости введенных почти комплексных структур $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$.

Имеет место следующая *теорема Ронсли* [15]: почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$ на расслоении $\mathcal{J}(N)$ интегрируема тогда и только тогда, когда N конформно плоско, т.е. N конформно эквивалентно плоскому пространству. Напомним, что отображение $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ римановых многообразий называется *конформным*, если индуцируемая им метрика $\varphi^* h$ на M конформно эквивалентна римановой метрике g многообразия M, т.е. $\varphi^* h = \lambda g$ для некоторой гладкой положительной функции λ на M.

Что касается почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на $\mathcal{J}(N)$, то она никогда не интегрируема. Пояснить этот факт можно следующим образом. Исходя из определения почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$, нетрудно показать, что если бы она была интегрируема, все локальные $\mathcal{J}^2$-голоморфные кривые $f : U \to \mathcal{J}(N)$ должны были быть горизонтальными, т.е. касательные к ним пространства принадлежали бы горизонтальному распределению H. С другой стороны, если бы $(\mathcal{J}(N), \mathcal{J}^2)$ было комплексным многообразием, то локальную голоморфную кривую на нем можно было бы выпустить в любом комплексном касательном направлении.

Учитывая не интегрируемость почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$, может возникнуть сомнение в ее полезности для описания гармонических отображений. Действительно, не интегрируемые почти комплексные структуры могут оказаться "дикими" — например, они могут не иметь даже локально непостоянных голоморфных функций. Однако в рассматриваемой задаче мы имеем дело, к счастью, не с голоморфными функциями $f : Z \to \mathbb{C}$ на твисторном пространстве Z, а с двойственным объектом — голоморфными отображениями $\psi : M \to Z$ из римановых поверхностей M в Z. Такое отображение ψ голоморфно относительно почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на Z тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнению Коши–Римана $\bar{\partial}_J \psi = 0$ относительно индуцированной почти комплексной структуры $J := \psi^*(\mathcal{J}^2)$ на M. Но на римановой поверхности любая почти комплексная структура интегрируема. В частности, выписанное выше уравнение Коши–Римана имеет много локальных решений.

Следующая теорема лежит в основе твисторного подхода к построению гармонических отображений.

Теорема 7 (теорема Иллса–Саламона)**.** *Твисторное расслоение*

$$\pi : (\mathcal{J}(N), \mathcal{J}^2) \longrightarrow N$$

обладает следующим свойством: проекция $\varphi = \pi \circ \psi$ произвольного $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi : M \to \mathcal{J}(M)$ на N является гармоническим отображением.

Поскольку проекция любой $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой $\psi : M \to \mathcal{J}(M)$ является гармоническим отображением, эти псевдоголоморфные кривые можно использовать для построения гармонических отображений $\varphi : M \to N$. Спрашивается, когда таким методом можно построить все гармонические отображения указанного вида? Иными словами, когда заданное гармоническое отображение $\varphi : M \to N$ является проекцией некоторой $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой $\psi : M \to \mathcal{J}(M)$? Оказывается, "воспоминанием" отображения $\varphi : M \to N$ о том, что оно получено как проекция $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой в $\mathcal{J}(M)$, служит, помимо его гармоничности, еще и конформность отображения φ.

А именно, любое гармоническое конформное отображение $\varphi : M \to N$ из компактной римановой поверхности M в ориентированное риманово многообразие N локально является проекцией некоторой $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой $\psi : M \to \mathcal{J}(M)$.

Рассмотренное нами расслоение эрмитовых структур $\mathcal{J}(M) \to N$ является далеко не единственным твисторным расслоением, с помощью которого можно строить гармонические отображения. Исходя из расслоения $\mathcal{J}(M) \to N$, можно строить и другие твисторные расслоения $Z \to N$, пользуясь следующим методом, предложенным Ронсли [15].

Пусть задано гладкое расслоение $p : Z \to N$, слои которого являются комплексными многообразиями с комплексной структурой, гладко зависящей от точки $q \in N$:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{J}(N) \arrow[dl, "\pi"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Допустим, что имеется послойное отображение $j : Z \to \mathcal{J}(N)$, которое голоморфно на слоях. Предположим, далее, что на расслоении $p : Z \to N$ имеется гладкое горизонтальное распределение ${}^Z H$, которое переводится отображением j_* в горизонтальное распределение H на $\mathcal{J}(N)$. Тогда на ${}^Z H$ возникает почти комплексная структура ${}^Z\mathcal{J}^h$, задаваемая прообразом почти комплексной структуры $\mathcal{J}^h$ на H при отображении j. Используя эту горизонтальную почти комплексную структуру ${}^Z\mathcal{J}^h$ на ${}^Z H$ и заданную вертикальную комплексную структуру на слоях расслоения $p : Z \to N$, мы можем ввести на Z почти комплексные структуры ${}^Z\mathcal{J}^1$ и ${}^Z\mathcal{J}^2$ также, как в случае расслоения $\pi : \mathcal{J}(N) \to N$. Ясно, что отображение j является почти голоморфным по отношению к обеим введенным структурам, так что $p : Z \to N$ есть твисторное расслоение над N также, как и $\pi : \mathcal{J}(N) \to N$.

Приведем конкретный пример применения описанного метода. Пусть N есть кэлерово многообразие размерности m. Обозначим через

$$Z := G_r(T^{1,0}N) \longrightarrow N$$

комплексное грассманово расслоение, слоем которого в точке $q \in N$ является грассманово многообразие $G_r(T_q^{1,0}N)$ комплексных подпространств размерности r в комплексном векторном пространстве $T_q^{1,0}N$. Если обозначить через $\mathcal{U}(N) \to N$ главное $\mathrm{U}(m)$-расслоение унитарных реперов на N, то

$$Z = \mathcal{U}(N) \otimes_{\mathrm{U}(m)} G_r(\mathbb{C}^m).$$

В случае кэлерова многообразия N риманова связность ${}^N\nabla$ определяет связность на расслоении $\mathcal{U}(N)$ и потому задает горизонтальное распределение на пространстве Z. Комплексная структура на слоях $Z \to N$ индуцируется естественной комплексной структурой на грассмановом многообразии $G_r(\mathbb{C}^m)$. Построим теперь отображение

$$j : Z \longrightarrow \mathcal{J}(N),$$

полагая для подпространства $W \in G_r(T_q^{1,0}N)$:

$$j(W) = \begin{cases} {}^N J & \text{на } (W \oplus \overline{W}) \cap T_q N \ , \\ -{}^N J & \text{на } \left[(W \oplus \overline{W}) \cap T_q N\right]^{\perp} \ . \end{cases}$$

Построенное отображение $j : Z \to \mathcal{J}(N)$ удовлетворяет условиям метода Ронсли, откуда следует, что грассманово расслоение $G_r(T^{1,0}N) \to N$ является твисторным, иными словами, проекция любого $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi : M \to G_r(T^{1,0}N)$ из компактной римановой поверхности M на многообразие N является гармоническим отображением $\varphi : M \to N$. Как было указано выше, такое отображение обязательно конформно.

В случае $r = 1$ можно построить и обращение приведенной твисторной конструкции, иными словами, построить для произвольного конформного гармонического отображения $\varphi : M \to N$ его твисторное поднятие до $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi : M \to G_1(T^{1,0}N)$. Заметим, что грассманово расслоение
$G_1(T^{1,0}N) \to N$ совпадает с проективизацией $\mathbb{P}(T^{1,0}N) \to N$ расслоения $T^{1,0}N \to N$.

Предположим, что задано конформное гармоническое отображение $\varphi : M \to N$, не являющееся антиголоморфным (для антиголоморфных, как и голоморфных отображений задача о построении их твисторных поднятий не стоит). Его дифференциал $\delta\varphi$ записывается в виде

$$\delta\varphi = \partial'\varphi + \overline{\partial''\varphi} \ .$$

Если отображение φ не является антиголоморфным, то $\partial'\varphi(\partial/\partial z)$ задает не равное тождественно нулю сечение расслоения $\varphi^{-1}(T^{1,0}N)$, которое голоморфно относительно комплексной структуры на этом расслоении, индуцированной римановой связностью ${}^N\nabla$. Это сечение может иметь только изолированные нули, вне которых твисторное поднятие $\psi : M \to \mathbb{P}(T^{1,0}N)$ задается, по определению, посредством

$$\psi = [\partial'\varphi(\partial/\partial z)] \, .$$

Иными словами, значение $\psi(p)$ отображения ψ в точке $p \in M$ совпадает с комплексной прямой в $T^{1,0}_{\varphi(p)}N$, порождаемой $(1,0)$-компонентой вектора $\varphi_*(\partial/\partial z)$. Пользуясь голоморфностью построенного линейного подрасслоения в расслоении $\varphi^{-1}(T^{1,0}N)$, можно продолжить его на изолированные нули сечения $\partial'\varphi(\partial/\partial z)$ (вариант теоремы Римана о стирании изолированных особенностей голоморфных функций), получив, тем самым, искомое отображение

$$\psi : M \to \mathbb{P}(T^{1,0}N).$$

Построенное отображение ψ является $\mathcal{J}^2$-голоморфным, если φ конформно.

Сужая класс допустимых римановых многообразий (как в примере, где мы ограничились классом кэлеровых многообразий N), можно с помощью метода Ронсли строить новые примеры твисторных пространств. Общая идея состоит в том, чтобы для каждого класса римановых многообразий N выбирать в качестве подходящего твисторного расслоения расслоение комплексных структур, так или иначе связанных с геометрией многообразий изучаемого класса.

3.3.4 Гипотеза о гармонических сферах

В параграфе 2.2.2 мы привели ADHM-конструкцию, позволяющую полностью описать пространство модулей инстантонов на $\mathbb{R}^4$. У этой конструкции есть двумерная редукция, предложенная Дональдсоном [8].

Теорема Дональдсона утверждает, что существует естественное взаимнооднозначное соответствие между пространством модулей G-инстантонов на $\mathbb{R}^4$ и множеством классов центрированной эквивалентности голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-расслоений на $\mathbb{CP}^2$, голоморфно тривиальных на "бесконечно удаленной" проективной прямой $\mathbb{CP}^1_\infty$. *Центрированная эквивалентность* означает, что допускаются только изоморфизмы голоморфных расслоений, которые тождественны в отмеченной точке на $\mathbb{CP}^1_\infty$.

Для нас удобнее другая формулировка теоремы Дональдсона, данная в работе Атьи [1]. В этой формулировке пространство модулей G-инстантонов на $\mathbb{R}^4$ отождествляется с множеством классов центрированной эквивалентности голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-расслоений на произведении $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, голоморфно тривиальных на объединении $\mathbb{CP}^1_\infty \cup \mathbb{CP}^1_\infty$ ”бесконечно удаленных" проективных прямых:

$$\left\{\begin{matrix}\text{пространство моду-}\\ \text{лей } G\text{-инстантонов}\\ \text{на } \mathbb{R}^4\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{классы эквивалентности голоморф-}\\ \text{ных } G^{\mathbb{C}}\text{-расслоений на } \mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1,\\ \text{тривиальных на } \mathbb{CP}^1_\infty\cup\mathbb{CP}^1_\infty\end{matrix}\right\}.$$

Роль отмеченной точки в определении центрированной эквивалентности в данном случае играет точка пересечения бесконечно удаленных проективных прямых.

Множество классов эквивалентности голоморфных расслоений в правой части этого соответствия можно, в соответствии с теоремой Атьи, отождествить с пространством центрированных голоморфных отображений $f:\mathbb{CP}^1\to\Omega G$, переводящих $\infty\in\mathbb{CP}^1$ в начало $o\in\Omega G$.

Действительно, фиксируем некоторую точку $z\in\mathbb{CP}^1$. Сужение заданного голоморфного $G^{\mathbb{C}}$-расслоения над $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ на проективную прямую $\mathbb{CP}^1_z := \mathbb{CP}^1\times\{z\}$ задается функцией перехода

$$F_z : S^1\subset\mathbb{CP}^1_z \longrightarrow G^{\mathbb{C}},$$

которая продолжается в некоторую окрестность U экватора S^1 в $\mathbb{CP}^1_z$ до голоморфного отображения $F_z : U\subset\mathbb{CP}^1_z\to G^{\mathbb{C}}$. Функцию $F_z : S^1\to G^{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как элемент группы петель $LG^{\mathbb{C}}$, поэтому получаем отображение

$$F:\mathbb{CP}^1\ni z\longmapsto F_z\in LG^{\mathbb{C}}.$$

В композиции с проекцией $LG^{\mathbb{C}}\longrightarrow\Omega G^{\mathbb{C}} = LG^{\mathbb{C}}/L_+G^{\mathbb{C}}$ оно дает отображение

$$f:\mathbb{CP}^1\longrightarrow\Omega G.$$

Построенное отображение f является центрированным и голоморфным, если исходное $G^{\mathbb{C}}$-расслоение над $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ было голоморфным и тривиальным на $\mathbb{CP}^1_\infty\cup\mathbb{CP}^1_\infty$. Теорема Атьи утверждает, что имеется взаимнооднозначное соответствие

$$\left\{\begin{matrix}\text{пространство моду-}\\ \text{лей } G\text{-инстантонов}\\ \text{на } \mathbb{R}^4\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{пространство центрирован-}\\ \text{ных голоморфных отобра-}\\ \text{жений } f:\mathbb{CP}^1\to\Omega G\end{matrix}\right\}.$$

Имея указанный результат Атьи–Дональдсона, естественно выдвинуть гипотезу, которая получается "реалификацией" (иначе говоря, "овеществлением") приведенного соответствия. Согласно этой гипотезе, должно существовать следующее взаимно-однозначное соответствие

$$\left\{\begin{matrix}\text{пространство модулей } G\text{-}\\ \text{полей Янга–Миллса на } \mathbb{R}^4\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{пространство центрированных}\\ \text{гармонических отображений } h:\\ \mathbb{CP}^1 \to \Omega G\end{matrix}\right\}.$$

Сформулированная гипотеза остается пока недоказанной. Главная трудность заключается в отсутствии "вещественного" аналога теоремы Дональдсона. Имеющееся доказательство этой теоремы основано на методе монад и является чисто голоморфным.

Литература

[1] M.F.Atiyah, Instantons in two and four dimensions, Commun. Math. Phys. **93**(1984), 437-451 [Имеется русский перевод в сборнике: Монополи. Топологические и вариационные методы, Мир, Москва, 1989; 231-254].

[2] М.Атья, Геометрия полей Янга–Миллса, В книге: *Геометрия и физика узлов*, Мир, Москва, 1995.

[3] M.F.Atiyah, V.G.Drinfeld, N.J.Hitchin, Yu.I.Manin, Construction of instantons, Phys. Lett. **65A**(1978), 185-187.

[4] M.F.Atiyah, N.J.Hitchin, I.M.Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. London **362**(1978), 425-461.

[5] M.F.Atiyah, R.S.Ward, Instantons and algebraic geometry, Comm. Math. Phys. **55**(1977), 117-124.

[6] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwarz, Yu.S.Tyupkin, Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations, Phys. Lett. **59B**(1975), 85-87.

[7] Е.Б.Богомольный, Устойчивость классических решений, Яд. Физ. **24**(1976), 449-454.

[8] S.K.Donaldson, Instantons and geometric invariant theory, Commun. Math. Phys. **93**(1984), 453-460 [Имеется русский перевод в сборнике: Монополи. Топологические и вариационные методы, Мир, Москва, 1989; 255-267].

[9] J.Eells, S.Salamon, Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds, Ann Scula Norm. Super. **12**(1975), 589-640.

[10] N.J.Hitchin, Monopoles and geodesics, Comm. Math. Phys. **83**(1982), 579-602 [Имеется русский перевод в сборнике: Монополи. Топологические и вариационные методы, Мир, Москва, 1989; 11-48].

[11] N.J.Hitchin, On the construction of monopoles, Comm. Math. Phys. **89**(1983), 145-190 [Имеется русский перевод в сборнике: Монополи. Топологические и вариационные методы, Мир, Москва, 1989; 49-122].

[12] N.J.Hitchin, Self-duality equations on a Riemann surface, Proc. London Math. Soc. **55**((1987), 59-126.

[13] W.Nahm, All self-dual multimonolopes for arbitrary gauge groups, CERN preprint **TH.3172**(1981).

[14] M.K.Prasad, C.M.Sommerfield, Exact classical solutions of the t'Hooft monopole and the Julia–Zee dyon, Phys. Rev. Letters **35**(1975), 760-762.

[15] J.H.Rawnsley, f-structures, f-twistor spaces and harmonic maps, Lecture Notes Math. **1164**(1985), 84-159.

[16] C.H.Taubes, Stability in Yang–Mills theories, Comm. Math. Phys. **91**(1983), 257-320.

[17] C.H.Taubes, Min-Max theory for the Yang–Mills–Higgs equations, Commun. Math. Phys. **97**(1985), 473-540 [Имеется русский перевод в сборнике: Монополи. Топологические и вариационные методы, Мир, Москва, 1989; 379-491].

[18] R.S.Ward, On self-dual gauge fields, Phys. Lett. **61A**(1977), 81-82.

[19] R.A.Wenthworth, Higgs bundles and local systems on Riemann surfaces, preprint, 2015.