М. С. Бабынин, В. Г. Жадан, Прямой метод внутренней точки для линейной задачи полуопределенного программирования, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2008, том 48, номер 10, 1780–1801

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2008, том 48, № 10, с. 1780–1801

УДК 519.658

# ПРЯМОЙ МЕТОД ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1)]

© 2008 г. М. С. Бабынин, В. Г. Жадан

(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила в редакцию 09.11.2007 г.

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Для ее решения предлагается прямой метод внутренней точки, являющийся обобщением барьерно-проективного метода для задач линейного программирования. Обсуждаются его основные свойства, и дается обоснование локальной сходимости. Библ. 19.

**Ключевые слова**: задача полуопределенного программирования, прямой метод, метод внутренней точки, локальная сходимость.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная задача полуопределенного программирования является задачей условной оптимизации с линейными целевой функцией и ограничениями-равенствами, зависящими от симметричных положительно-полуопределенных матриц. В последнее время изучению таких задач уделяется большое внимание (см., например, [1]–[5]). Связано это главным образом с двумя обстоятельствами. Во-первых, многие оптимизационные задачи, например задачи квазивыпуклого нелинейного программирования, задачи минимизации квадратичной выпуклой функции при выпуклых квадратичных ограничениях, задачи управления системами, задачи комбинаторной оптимизации, могут быть переформулированы как задачи полуопределенного программирования. Во-вторых, удалось разработать эффективные численные методы решения задач полуопределенного программирования симплексного типа и типа методов внутренней точки. В общем классе методов внутренней точки выделяют два главных подкласса, а именно: прямо-двойственные методы центрального пути и методы редукции потенциальной функции (см. [6]–[8]).

В настоящей работе рассматривается метод решения линейной задачи полуопределенного программирования, который можно отнести к прямым методам внутренней точки. Он является обобщением предложенного ранее для решения задач линейного и нелинейного программирования барьерно-проективного метода (см. [9], [10]). При его построении для обычных задач условной оптимизации, зависящих от векторных переменных, с целью освобождения от ограничений простой структуры (например, неотрицательности переменных) используется переход к другим пространствам, где это ограничение отсутствует. Тогда можно применять различные методы решения задач условной оптимизации, работающие в целом пространстве, в частности метод проекции градиента. После возвращения в исходное пространство в этих методах в правой части появляются дополнительные матрицы, которые играют роль мультипликативных барьеров и не позволяют траекториям выходить за пределы множества простой структуры.

Для задач полуопределенного программирования, где переменными уже являются матрицы, вместо перехода в новое пространство используется разложение матрицы в произведение неособой матрицы на транспонированную к ней. Такое разложение позволяет освободиться от требования положительной полуопределенности матрицы и применить проективный метод уже только к неособой матрице, участвующей в разложении. Важно только, что, как и в задачах с векторными переменными, здесь можно вернуться к исходным матричным переменным и получить тем самым барьерно-проективный метод для задачи полуопределенного программирования в исход-

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00608), а также при содействии Программы ведущих научных школ НШ-5073.2008.1 и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН (проект 3-16).

ных матрицах. Построение с помощью указанного подхода непрерывного варианта метода, описываемого системой матричных дифференциальных уравнений, дается в [11]. В данной работе рассматривается дискретный вариант метода, получающийся путем дискретизации непрерывной системы. По существу его можно трактовать как специальную модификацию прямого аффинно-масштабирующего метода.

В разд. 2 дается постановка линейной задачи полуопределенного программирования (в дальнейшем просто задачи полуопределенного программирования) и приводятся основные результаты, касающиеся существования решения таких задач. В разд. 3 описывается общая итеративная схема метода, а также ее частный случай, когда от стартовой точки дополнительно требуется, чтобы она удовлетворяла ограничениям-равенствам. Разд. 4 посвящен исследованию простейших свойств метода. Локальная сходимость метода доказывается в разд. 6, при этом используются результаты предыдущего разд. 5, в котором вычисляется матрица Якоби правой части в решении. Наконец, в разд. 7 обсуждается вопрос выбора шага в методе.

Через $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ или просто $D(a)$ в работе обозначается диагональная матрица с компонентами вектора $a = [a_1, \ldots, a_n]$ на диагонали, через $\mathrm{diag}A$ – диагональ матрицы $A$. Символы $\otimes$ и $\circ$ используются для обозначения произведений матриц, соответственно, по Кронекеру и Адамару. Угловые скобки служат для обозначения евклидова скалярного произведения.

## 2. ЗАДАЧА ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть $\mathcal{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка $n$. Пусть, кроме того, $\mathcal{S}^n_+$ и $\mathcal{S}^n_{++}$ – подмножества из $\mathcal{S}^n$, состоящие, соответственно, из положительно-полуопределенных и положительно-определенных матриц. Множество $\mathcal{S}^n_+$ является конусом в $\mathcal{S}^n$, множество $\mathcal{S}^n_{++}$ – его внутренностью. Для указания на то, что матрица $M \in \mathcal{S}^n$ положительно полуопределена (положительно определена), будем пользоваться также неравенством $M \succeq 0$ ($M \succ 0$). Конус $\mathcal{S}^n_+$ не является полиэдральным, его размерность равняется так называемому “треугольному” числу $k_\Delta(n) = n(n+1)/2$.

Скалярное (внутреннее) произведение между двумя матрицами $L$ и $M$ из $\mathcal{S}^n$ определяется как след матрицы $L^{\mathrm{T}}M$ и обозначается через

$$L \bullet M = \mathrm{tr}(L^{\mathrm{T}}M) = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij}m_{ij},$$

где $l_{ij}$ и $m_{ij}$ суть $(ij)$-элементы, соответственно, матриц $L$ и $M$. Если $L$ и $M$ – две положительно-полуопределенные матрицы, то $M \bullet L \geq 0$ и $M \bullet L = 0$ в том и только том случае, когда $ML = LM = 0_{nn}$. Более того, согласно теореме Фейера (о следе), матрица $M \in \mathcal{S}^n$ положительно полуопределена тогда и только тогда, когда $M \bullet L \geq 0$ для всех $L \succeq 0$, т.е. конус $\mathcal{S}^n_+$ является *самосопряженным*.

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования следующего вида:

$$\begin{gathered} \min C \bullet X, \\ A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ X \succeq 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где матрицы $C$, $X$ и $A_i$, $1 \leq i \leq m$, принадлежат множеству $\mathcal{S}^n$. Если от всех матриц дополнительно потребовать, чтобы они были диагональными, то (1) переходит в обычную задачу линейного программирования.

Двойственной к (1) является задача

$$\max\langle b, u\rangle,$$
$$\sum_{i=1}^{m} u^i A_i + V = C, \quad V \geq 0, \tag{2}$$

в которой $b = (b^1, \ldots, b^m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $V \in \mathcal{S}^n$. Предполагается, что задача (1) имеет решение и что матрицы $A_i$, $1 \leq i \leq m$, линейно независимы.

Обозначим допустимые множества в прямой и двойственной задачах, соответственно, $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_D$, т.е.

$$\mathcal{F}_P = \{X \in \mathcal{S}^n_+ \colon A_i \bullet X = b^i, i = 1, 2, \ldots, m\},$$
$$\mathcal{F}_D = \left\{u \in \mathbb{R}^m \colon C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i \geq 0\right\}.$$

Для любых $X \in \mathcal{F}_P$ и $u \in \mathcal{F}_D$ выполняется неравенство *слабой двойственности* $\langle b, u\rangle \leq C \bullet X$.

**Определение 1.** В прямой задаче выполнено условие регулярности ограничений Слейтера, если не пусто множество

$$\mathcal{F}_P^0 = \{X \in \mathcal{S}^n_{++} \colon A_i \bullet X = b^i, i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

**Определение 2.** В двойственной задаче выполнено условие регулярности ограничений Слейтера, если не пусто множество

$$\mathcal{F}_D^0 = \left\{u \in \mathbb{R}^m \colon C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i > 0\right\}.$$

Введем обозначение

$$f_* = \inf_{X \in \mathcal{F}_P} C \bullet X, \quad f^* = \sup_{u \in \mathcal{F}_D} \langle b, u\rangle.$$

Если $f_* = f^*$, то говорят, что задачи (1) и (2) находятся в *совершенной двойственности* (однако при этом одно из значений $f_*$ или $f^*$ может не достигаться). В случае, когда $\langle b, u\rangle = C \bullet X$ для некоторых $X \in \mathcal{F}_P$ и $u \in \mathcal{F}_D$, имеет место *строгая двойственность*. Условия регулярности ограничений Слейтера позволяют гарантировать существование строгой двойственности (см., например, [4]).

**Теорема 1.** *Пусть в прямой и двойственной задачах выполнено условие регулярности ограничений Слейтера. Тогда $f_* = f^*$ и существуют решения обеих задач.*

Если $X_*$ и $V_*$ – оптимальные решения, соответственно, задач (1) и (2), то $X_* \bullet V_* = 0$. Но для матриц $X_*$ и $V_*$ из $\mathcal{S}^n_+$ данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $X_*V_* = V_*X_* = 0_{nn}$. Отсюда следует, что оптимальные матрицы $X_*$ и $V_*$ коммутируют. Поэтому найдется ортогональная матрица $Q$ такая, что

$$X_* = Q\,\mathrm{Diag}(\eta_*)Q^{\mathrm{T}}, \quad V_* = Q\,\mathrm{Diag}(\theta_*)Q^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

где $\eta_* = [\eta_*^1, \ldots, \eta_*^n]$ и $\theta_* = [\theta_*^1, \ldots, \theta_*^n]$ – собственные значения матриц $X_*$ и $V_*$ соответственно. Для самих собственных значений $\eta_*^i$ и $\theta_*^i$ выполняется *условие дополнительности*

$$\eta_*^i \theta_*^i = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4}$$

*Условие строгой дополнительности* означает, что для каждого $1 \le i \le n$ одно из значений $\eta_*^i$ или $\theta_*^i$ строго положительно. В этом случае решения $X_*$ и $V_*$ называют *строго комплементарными*.

В отличие от задач линейного программирования, для которых если существуют оптимальные решения, то существуют и строго комплементарные оптимальные решения, для задач полуопределенного программирования данное свойство не всегда выполняется.

Геометрические свойства множества $\mathcal{F}_P$ исследовались в [12], [13]. Если матрица $X_*$ является вершиной множества $\mathcal{F}_P$, то ее ранг $r$ удовлетворяет неравенству $k_\Delta(r) \le m$.

## 3. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Обозначим через $X * V$ симметризованное произведение двух квадратных матриц $X$ и $V$, определяемое в виде

$$X * V = \frac{1}{2}(XV + V^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}).$$

Если матрицы $X$ и $V$ симметричные, то $X * V = V * X$.

Пусть $X_0 \succ 0$. Рассмотрим итерационный процесс следующего вида:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \Delta X_k, \tag{5}$$

где $\alpha_k > 0$, $\Delta X_k = X_k * V_k$ и $V_k = C - \Sigma_{i=1}^m u_k^i A_i$. Вектор двойственных переменных $u_k \in \mathbb{R}^m$ выбирается из условия

$$A_i \bullet \Delta X_k = \tau(A_i \bullet X_k - b^i), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

в котором $\tau > 0$. Из (6) следует, что если $X_k \in \overset{0}{\mathcal{F}}_P$, то точка $X_{k+1}$ при достаточно малом шаге $\alpha_k$ также оказывается принадлежащей множеству $\overset{0}{\mathcal{F}}_P$.

Введем дополнительные обозначения. Пусть $U$ есть $(nm \times n)$-матрица, определяемая по вектору $u \in \mathbb{R}^n$ с помощью формулы $U = u \otimes I_n$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A}$ есть $(mn \times n)$-матрица, составленная из матриц $A_i$, $1 \le i \le m$:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Тогда $V_k = C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}} U_k$, $U_k = u_k \otimes I_n$.

Система линейных уравнений (6) для определения вектора $u_k$ с помощью введенных обозначений запишется в виде

$$A_i \bullet \{X * [C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}(u \otimes I_n)]\} = \tau(A_i \bullet X - b^i), \quad 1 \le i \le m,$$

где $X = X_k$. Ее можно также переписать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m [A_i \bullet (X * A_j)] u^j = A_i \bullet (X * C) + \tau(b^i - A_i \bullet X), \quad 1 \le i \le m. \tag{7}$$

Пусть $\mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^{\mathrm{T}})$ – квадратная матрица порядка $m$, в которой $(i, j)$-й элемент $(1 \le i, j \le m)$ равняется $(\mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^{\mathrm{T}}))_{ij} = A_i \bullet (X * A_j)$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A} \bullet X$ и $\mathcal{A} \bullet (X * C)$ суть $m$-мерные векторы. Их $i$-е элементы суть, соответственно,

$$(\mathcal{A} \bullet X)^i = A_i \bullet X, \quad (\mathcal{A} \bullet (X * C))^i = A_i \bullet (X * C).$$

Тогда систему (7) можно представить в следующем матричном виде:

$$[\mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^{\mathrm{T}})]u = \mathcal{A} \bullet (X * C) + \tau(b - \mathcal{A} \bullet X). \tag{8}$$

Пусть

$$\Gamma(X) = \mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^{\mathrm{T}}). \tag{9}$$

Если у матрицы $\Gamma(X)$ существует обратная, то, разрешая уравнение (8), получаем

$$u = u(X) = \Gamma^{-1}(X)[\mathcal{A} \bullet (X * C) + \tau(b - \mathcal{A} \bullet X)]. \tag{10}$$

Поэтому

$$V = V(X) = C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}\{[\Gamma^{-1}(X)(\mathcal{A} \bullet (X * C) + \tau(b - \mathcal{A} \bullet X))] \otimes I_n\}. \tag{11}$$

Матрица приращения $\Delta X_k$ зависит теперь только от $X_k$:

$$\begin{aligned} \Delta X_k = {} & X_k * \{C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}[(\Gamma^{-1}(X_k)(\mathcal{A} \bullet (X_k * C))) \otimes I_n]\} + \\ & + \tau X_k * \{\mathcal{A}^{\mathrm{T}}[(\Gamma^{-1}(X_k)(b - \mathcal{A} \bullet X_k)) \otimes I_n]\}, \end{aligned} \tag{12}$$

а сам итерационный процесс (5) может быть переписан следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{k+1} = {} & X_k - \alpha_k X_k * \{C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}[(\Gamma^{-1}(X_k)(\mathcal{A} \bullet (X_k * C))) \otimes I_n] + \\ & + \tau\mathcal{A}^{\mathrm{T}}[(\Gamma^{-1}(X_k)(b - \mathcal{A} \bullet X_k)) \otimes I_n]\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Матрица $\Gamma(X)$ является симметричной. Действительно, для симметричных матриц $A_i$, $X$ и $A_j$ с учетом равенства $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, справедливого для любых квадратных матриц $A$ и $B$, получаем

$$\begin{aligned} A_i \bullet (X * A_j) &= \mathrm{tr}[A_i(XA_j + A_jX)]/2 = \\ &= [\mathrm{tr}(A_iXA_j) + \mathrm{tr}(A_iA_jX)]/2 = \\ &= [\mathrm{tr}(A_jA_iX) + \mathrm{tr}(A_jXA_i)]/2 = \\ &= \mathrm{tr}[A_j(A_iX + XA_i)]/2 = \\ &= A_j \bullet (X * A_i), \end{aligned} \tag{14}$$

что и подтверждает симметричность матрицы $\mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^{\mathrm{T}})$. Кроме того, из (14) следуют равенства

$$\begin{aligned} A_i \bullet (X * A_j) &= [\mathrm{tr}(A_iXA_j) + \mathrm{tr}(A_jXA_i)]/2 = \\ &= [\mathrm{tr}(A_iXA_j) + \mathrm{tr}(XA_iA_j)]/2 = \\ &= (A_i * X) \bullet A_j. \end{aligned}$$

Поэтому представления $\mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^{\mathrm{T}})$ и $(\mathcal{A} * X) \bullet \mathcal{A}^{\mathrm{T}}$ матрицы $\Gamma(X)$ равносильны. Аналогичным образом убеждаемся, что

$$A_i \bullet (X * C) = (A_i * X) \bullet C, \quad \mathcal{A} \bullet (X * C) = (\mathcal{A} * X) \bullet C.$$

Если точка $X$ является допустимой, т.е. $X \in \mathcal{F}_P$, то выражение (11) для матрицы $V$ упрощается и принимает вид

$$V = V(X) = C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}\{[\Gamma^{-1}(X)(\mathcal{A} \bullet (X * C))] \otimes I_n\}, \tag{15}$$

итерационный процесс (5) принимает теперь вид

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k X_k * \{C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}[(\Gamma^{-1}(X_k)(\mathcal{A} \bullet (X_k * C))) \otimes I_n]\}. \tag{16}$$

От начальной матрицы $X_0$ дополнительно потребуем, чтобы $X_0 \in \mathcal{F}_P^0$. Тогда и последующие $X_k \in \mathcal{F}_P^0$, если шаг $\alpha_k$ выбирается достаточно малым. Итерационный процесс (16) назовем *допустимым вариантом* метода (5).

В случае обычной задачи линейного программирования, когда

$$C = D(c), \quad X = D(x), \quad A_i = D(a_i), \quad 1 \le i \le m,$$

имеем с учетом коммутативности диагональных матриц

$$A_i \bullet (X * C) = \langle a_i, D(x)c \rangle, \quad A_i \bullet (X * A_j) = \langle a_i, D(x)a_j \rangle.$$

Если ввести матрицу $A$ размером $m \times n$, строками которой являются векторы $a_i$, $1 \le i \le m$, то придем к выражению для вектора двойственных переменных

$$u = u(x) = (AD(x)A^{\mathrm{T}})^{-1}AD(x)c,$$

в точности совпадающему с выражением для $u(x)$ в допустимом варианте барьерно-проективного метода для задач линейного программирования (см. [9]).

## 4. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА МЕТОДА

Пусть $A$, $B$ и $X$ – произвольные матрицы из $\mathcal{S}^n$, причем матрица $X$ положительно определена. Положим, что $X^{1/2}$ – корень квадратный из $X$, т.е. $X = X^{1/2}X^{1/2}$. Тогда, учитывая симметричность всех матриц, получаем

$$\begin{aligned} A \bullet (X * B) &= A \bullet ((X^{1/2}X^{1/2}) * B) = \\ &= \mathrm{tr}(AX^{1/2}X^{1/2}B + ABX^{1/2}X^{1/2})/2 = \\ &= [\mathrm{tr}(X^{1/2}BAX^{1/2}) + \mathrm{tr}(X^{1/2}ABX^{1/2})]/2 = \\ &= [\mathrm{tr}(\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{A}) + \mathrm{tr}(\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{B})]/2, \end{aligned}$$

где обозначено $\bar{A} = AX^{1/2}$, $\bar{B} = BX^{1/2}$. Поэтому $A \bullet (X * B) = \mathrm{tr}(\bar{A}^{\mathrm{T}} * \bar{B})$, или

$$A \bullet (X * B) = \frac{1}{2}(\bar{A} \bullet \bar{B} + \bar{B} \bullet \bar{A}).$$

Поскольку $\bar{A} \bullet \bar{B} = \bar{B} \bullet \bar{A}$, то

$$A \bullet (X * B) = \bar{A} \bullet \bar{B} = \bar{B} \bullet \bar{A}. \tag{17}$$

Положим теперь $\bar{A}_i = A_iX^{1/2}$. Согласно сказанному выше, $(i, j)$-й элемент матрицы $\Gamma(X)$ представим в виде $\bar{A}_i \bullet \bar{A}_j$, поэтому $\Gamma$ является матрицей Грама. Для существования обратной к ней матрицы необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\bar{A}_i$, $1 \le i \le m$, были линейно независимы.

Обратимся к конусу положительно-полуопределенных матриц $\mathcal{S}^n_+$. Положим

$$\mathcal{M}_r = \{X \in \mathcal{S}^n: \mathrm{rank}\, X = r\}, \quad \mathcal{M}_r^+ = \mathcal{S}^n_+ \cap \mathcal{M}_r.$$

Тогда границы конуса $\mathcal{S}^n_+$ и его внутренность могут быть представлены как

$$\partial\mathcal{S}^n_+ = \mathcal{M}_0^+ \cup \ldots \cup \mathcal{M}_{n-1}^+, \quad \mathrm{int}\,\mathcal{S}^n_+ = \mathcal{M}_n^+.$$

Пусть $X$ – произвольная допустимая матрица из $\mathcal{F}_P$ и $\mathrm{rank}X = r$. Предположим также, что для $X$ имеет место разложение

$$X = Q\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)Q^{\mathrm{T}}, \tag{18}$$

где $Q$ – ортогональная матрица. Касательное пространство к $\mathcal{M}_r$ в $X$ определяется следующим образом (см. [14]):

$$\mathcal{T}_X = \left\{ Q\begin{bmatrix} G & H \\ H^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}: G \in \mathcal{S}^r \right\}. \tag{19}$$

Размерность $\mathcal{T}_X$ зависит от ранга матрицы $X$ и определяется по формуле

$$\dim \mathcal{T}_X = k_\Delta(n) - k_\Delta(n-r) = k_\Delta(r) + r(n-r).$$

Пусть

$$\mathcal{N}_A = \{Y \in \mathcal{S}^n : A_i \bullet Y = 0, 1 \le i \le m\},$$

и приведем определение невырожденной точки для прямой задачи (1), следуя [15].

**Определение 3.** Точка $X \in \mathcal{F}_P$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_X + \mathcal{N}_A = \mathcal{S}^n$.

Можно привести характеристику того, что $X \in \mathcal{F}_P$ является невырожденной точкой $\mathcal{F}_P$, используя представление (18). А именно, пусть $Q_1$ и $Q_2$ – подматрицы матрицы $Q$, состоящие, соответственно, из первых $r$ и последующих $n-r$ столбцов $Q$. Тогда $X$ будет невырожденной точкой $\mathcal{F}_P$ в том и только том случае, когда матрицы

$$B_i = \begin{bmatrix} Q_1^{\mathrm{T}} A_i Q_1 & Q_1^{\mathrm{T}} A_i Q_2 \\ Q_2^{\mathrm{T}} A_i Q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le m, \tag{20}$$

линейно независимы. Необходимое условие того, что точка $X \in \mathcal{F}_P$ является невырожденной, заключается в выполнении неравенства $m \le k_\Delta(n) - k_\Delta(n-r)$.

**Предложение 1.** *Пусть точка $X \in \mathcal{F}_P$ является невырожденной. Тогда матрица $\Gamma(X)$ неособая.*

**Доказательство.** Как отмечено выше, достаточно показать, что матрицы $\bar{A}_i = A_i X^{1/2}$, $1 \le i \le m$, линейно независимы.

От противного: пусть они линейно зависимы. Тогда найдутся числа $c_1, \ldots, c_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{i=1}^m c_i A_i X^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^m c_i A_i\right) X^{1/2} = 0_{nn}. \tag{21}$$

Предположим, что матрица $X$ имеет ранг $r$, и пусть $\lambda$ – вектор, составленный из собственных значений матрицы $X$, первые $r$ из которых строго положительны, а последующие $n-r$ равны нулю. Пусть, кроме того, для $X$ имеет место представление (18). Тогда $X^{1/2} = QD^{1/2}(\lambda)Q^{\mathrm{T}}$.

Равенство (21) может быть переписано в виде

$$Q\left(\sum_{i=1}^m c_i Q^{\mathrm{T}} A_i Q\right) D^{1/2}(\lambda) Q^{\mathrm{T}} = 0_{nn}. \tag{22}$$

Так как $Q$ – ортогональная матрица, то (22) выполняется в том и только том случае, когда

$$\left(\sum_{i=1}^m c_i Q^{\mathrm{T}} A_i Q\right) D^{1/2}(\lambda) = 0_{nn}.$$

Отсюда следует, что существуют такие $c_1, \ldots, c_m$, не равные нулю одновременно, для которых левая $(n \times r)$-подматрица матрицы

$$\sum_{i=1}^m c_i Q^{\mathrm{T}} A_i Q \tag{23}$$

является нулевой.

Используя представление (18), разобьем матрицы $Q^{\mathrm{T}} A_i Q$ на блоки:

$$Q^{\mathrm{T}} A_i Q = \begin{bmatrix} Q_1^{\mathrm{T}} A_i Q_1 & Q_1^{\mathrm{T}} A_i Q_2 \\ Q_2^{\mathrm{T}} A_i Q_1 & Q_2^{\mathrm{T}} A_i Q_2 \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le m.$$

В силу невырожденности точки $X$ и (20), матрицы

$$\begin{bmatrix} Q_1^{\mathrm{T}} A_i Q_1 & Q_1^{\mathrm{T}} A_i Q_2 \\ Q_2^{\mathrm{T}} A_i Q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le m,$$

линейно независимы. Но тогда линейно независимыми должны быть $(n \times r)$-матрицы:

$$\begin{bmatrix} Q_1^{\mathrm{T}} A_i Q_1 \\ Q_2^{\mathrm{T}} A_i Q_1 \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le m.$$

Поэтому не существует коэффициентов $c_1, \ldots, c_m$, обращаюших левую $n \times r$ подматрицу матрицы (23) в нулевую матрицу.

Согласно предложению 1, матрица приращения $\Delta X_k$, задаваемая формулой (12), полностью определена в любой невырожденной допустимой точке $X \in \mathcal{F}_P$. Задачу (1) назовем *невырожденной*, если все точки $X$, принадлежащие множеству $\mathcal{F}_P$, не вырождены. Ниже предполагается, что задача (1) является невырожденной. Тогда в силу непрерывности будет существовать некоторая окрестность множества $\mathcal{F}_P$, для точек из которой матрица приращения $\Delta X_k$ также будет полностью определена.

**Предложение 2.** *Пусть $X$ – граничная точка множества $\mathcal{F}_P$. Тогда $\Delta X \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{N}_A$.*

**Доказательство.** Включение $\Delta X \in \mathcal{N}_A$ следует из выбора вектора $u(X)$. Покажем, что $\Delta X \in \mathcal{T}_X$. Действительно, не умаляя общности, можно считать, что для точки $X$ справедливо представление (18), в котором $r < n$. Введем обозначения $\lambda_1 = [\lambda^1, \ldots, \lambda^r]$, $\lambda = [\lambda_1, 0_{n-r}]$ и $\Lambda = D(\lambda)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{1}{2}(XV(X) + V(X)X) = \\ &= \frac{1}{2}(Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} V + VQ\Lambda Q^{\mathrm{T}}) = \\ &= \frac{1}{2}Q(\Lambda Q^{\mathrm{T}} VQ + Q^{\mathrm{T}} VQ\Lambda)Q^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Пусть $Q = [Q_1, Q_2]$, где матрица $Q_1$ состоит из первых $r$ столбцов матрицы $Q$, матрица $Q_2$ – из оставшихся $n - r$ столбцов. Тогда, как несложно проверить, матрица $\Delta X$ имеет вид матрицы из касательного пространства (19), причем

$$G = \frac{1}{2}(D(\lambda_1)Q_1^{\mathrm{T}} VQ_1 + Q_1^{\mathrm{T}} VQ_1 D(\lambda_1)) \in \mathcal{S}^r,$$

$$H = \frac{1}{2}D(\lambda_1)Q_1^{\mathrm{T}} VQ_2.$$

Следовательно, $\Delta X \in \mathcal{T}_X$.

Точку $X_*$ назовем *стационарной* для итерационных процессов (13) или (16), если $X_* * V(X_*) = 0_{nn}$.

**Предложение 3.** *Пусть для задач* (1) *и* (2) *имеет место строгая двойственность. Пусть, кроме того, $X_*$ – невырожденное решение задачи* (1), $[u_*, V_*]$ – *решение двойственной задачи* (2). *Тогда $X_*$ есть стационарная точка для обоих процессов* (13) *и* (16).

**Доказательство.** Из условия строгой двойственности следует, что для матриц $X_*$ и $V_* = C - \sum_{i=1}^m \overset{i}{u}_* A_i$ выполняется равенство $X_* \bullet V_* = 0$. Поэтому $X_*$ и $V_*$ коммутируют между собой и $X_* V_* = V_* X_* = 0_{nn}$. Таким образом,

$$X_* * \left(C - \sum_{i=1}^m \overset{i}{u}_* A_i\right) = 0_{nn}. \tag{24}$$

С другой стороны, вектор $u(X_*)$ должен удовлетворять системе

$$\mathcal{A} \bullet \left[ X_* * \left( C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i \right) \right] = 0. \qquad (25)$$

Так как, по предположению, $X_*$ – невырожденное решение задачи (1), то, согласно предложению 1, система (25) имеет единственное решение. Но точка $u = u_*$ в силу (24) удовлетворяет уравнению (25). Поэтому $u(X_*) = u_*$. Отсюда следует, что для матрицы $V(X_*)$, в которой $u(X_*) = u_*$, выполнено $V(X_*) * X_* = 0_{nn}$. Таким образом, $X_*$ – стационарная точка для процесса (13).

Из совпадения правых частей рекуррентных соотношений (13) и (16) в допустимых точках следует также, что $X_*$ – стационарная точка и процесса (16).

## 5. МАТРИЦА ЯКОБИ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Ниже для обоснования локальной сходимости метода (5) нам потребуется знать матрицу Якоби симметричной матричной функции $X * V(X)$ в решении, когда $X = X_*$. Чтобы ее вычислить, воспользуемся некоторыми результатами из матричного дифференциального исчисления (см. [16]).

Если $X$ – квадратная матрица порядка $n$, то символом $\mathrm{vec}(X)$, или просто $\mathrm{vec}X$, обозначается прямая сумма ее столбцов, т.е. вектор-столбец длины $n^2$, в котором последовательно один под другим располагаются столбцы матрицы $X$. Если $A$, $B$ и $C$ – три матрицы таких размеров, что определено их произведение $ABC$, то справедлива следующая формула:

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{vec}\,B. \qquad (26)$$

Для симметричных матриц удобно вместо вектор-столбца $\mathrm{vec}X$ рассматривать вектор-столбец $\mathrm{vech}X$. Он имеет длину $k_\Delta(n)$, и в него помещаются последовательно сверху вниз столбцы матрицы $X$, но не полностью, а только их части, начинающиеся с диагонального элемента. Аналогичным образом определяется операция $\mathrm{vecs}X$. От предыдущей операции она отличается только тем, что все элементы, не стоящие на диагонали, при помещении в $\mathrm{vecs}X$ умножаются на два.

Пусть $F(X)$: $\mathbb{R}^{n \times q} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$ есть дифференцируемая матричная функция. Под первым дифференциалом этой функции в точке $X \in \mathbb{R}^{n \times q}$ понимается матрица $dF(X; dX)$ размера $m \times p$, которая задается условием

$$\mathrm{vec}(dF(X; dX)) = C(X)\mathrm{vec}(dX). \qquad (27)$$

Здесь $dX$ есть приращение, а $(mp \times nq)$-матрица $C(X)$ называется первой производной (или просто производной) функции $F(X)$ в точке $X$.

Все аналитические свойства матричных функций следуют непосредственно из соответствующих теорем о свойствах векторных функций, так как вместо матричной функции можно рассматривать векторную функцию $f(\mathrm{vec}X)$, определенную равенством $f(\mathrm{vec}X) = \mathrm{vec}(F(X))$. Дифференциалы функций $F$ и $f$ связаны между собой соотношением

$$\mathrm{vec}(dF(X; dX)) = df(\mathrm{vec}\,X; d\,\mathrm{vec}\,X). \qquad (28)$$

Матрица Якоби $F_X(X)$ матричной функции $F(X)$ определяется следующим образом:

$$F_X(X) = f_{\mathrm{vec}\,X}(\mathrm{vec}\,X),$$

где $f_{\mathrm{vec}X}(\mathrm{vec}X)$ есть $(mp \times nq)$-матрица, $(ij)$-й элемент которой есть частная производная $i$-й компоненты вектор-функции $f(\mathrm{vec}X)$ по $j$-му элементу $\mathrm{vec}X$. Для дифференцируемой функции $F(X)$ ее матрица Якоби $F_X(X)$ совпадает с матрицей $C(X)$ из определения дифференциала (27).

Если ограничиться рассмотрением лишь симметричных матричных функций от симметричных матричных аргументов, то в качестве соответствующего векторного аргумента и соответствующей векторной функции достаточно взять $\mathrm{vech}X$ и $f(\mathrm{vech}X) = \mathrm{vech}(F(X))$. Считая, что приращение $dX$ также является симметричной матрицей, вместо (28) получаем соотношение

$$\mathrm{vech}(dF(X; dX)) = df(\mathrm{vech}\,X; d\,\mathrm{vech}\,X).$$

Матрица Якоби теперь заменяется на следующую:

$$F_X^{\Delta}(X) = f_{\mathrm{vech}\,X}(\mathrm{vech}\,X).$$

Она имеет размер $k_{\Delta}(m) \times k_{\Delta}(n)$, где $m$ и $n$ – порядки, соответственно, матриц $F$ и $X$.

Для симметричных матриц $X$ порядка $n$ справедливы следующие формулы:

$$\frac{\partial\,\mathrm{vec}\,X}{\partial\,\mathrm{vech}\,X} = \mathcal{D}_n, \quad \frac{\partial\,\mathrm{vech}\,X}{\partial\,\mathrm{vec}\,X} = \mathcal{L}_n.$$

Здесь матрица $\mathcal{D}_n$ имеет размер $n^2 \times k_{\Delta}(n)$, матрица $\mathcal{L}_n$ – размер $k_{\Delta}(n) \times n^2$. Матрица $\mathcal{D}_n$ называется *дуплицирующей*, для симметричной матрицы $X$ она осуществляет преобразование $\mathcal{D}_n\mathrm{vech}X = \mathrm{vec}X$. Матрицу $\mathcal{L}_n$ назовем *элиминационной* (от elimination matrix, см. [17]). Она, напротив, действует на произвольную квадратную матрицу таким образом, что $\mathcal{L}_n\mathrm{vec}X = \mathrm{vech}X$. Матрицы Якоби $F_X^{\Delta}(X)$ и $F_X(X)$ оказываются связанными между собой следующим равенством:

$$F_X^{\Delta}(X) = \mathcal{L}_n F_X(X)\mathcal{D}_n. \tag{29}$$

Таким образом, чтобы вычислить матрицу $F_X^{\Delta}(X)$, достаточно знать матрицу $F_X(X)$.

Перейдем теперь непосредственно к вычислению матрицы Якоби $F_X(X)$ для матричной функции $F(X) = X * V(X)$. Находить ее удобнее не напрямую, вычисляя каждую частную производную, а с помощью определения дифференциала.

**Лемма 1.** *Матрица Якоби $F_X(X)$ для матричной функции $F(X) = XV(X)$ имеет вид*

$$F_X(X) = (V(X) \otimes I_n) + (I_n \otimes X)V_X(X). \tag{30}$$

**Доказательство.** Дифференциал произведения двух матричных функций определяется по формуле

$$dF(X) = (dX)V(X) + XdV(X).$$

В векторной форме это соотношение запишется в виде

$$d(\mathrm{vec}\,F(X)) = \mathrm{vec}(dF(X)) = \mathrm{vec}((dX)V(X)) + \mathrm{vec}(XdV(X)).$$

Тогда на основании формулы (26) получаем

$$d(\mathrm{vec}\,F(X)) = (V^{\mathrm{T}}(X) \otimes I_n)d\,\mathrm{vec}\,X + (I_n \otimes X)\mathrm{vec}(dV(X)). \tag{31}$$

Но по определению первого дифференциала имеем

$$\mathrm{vec}(dV(X)) = V_X(X)d\,\mathrm{vec}\,X.$$

Подставляя данное равенство в (31), приходим к

$$d(\mathrm{vec}\,F(X)) = [(V^{\mathrm{T}}(X) \otimes I_n) + (I_n \otimes X)V_X(X)]d\,\mathrm{vec}\,X.$$

Таким образом,

$$F_X(X) = (V^{\mathrm{T}}(X) \otimes I_n) + (I_n \otimes X)V_X(X). \tag{32}$$

Поскольку матрица $V(X)$ симметричная, то наряду с (32) имеет место формула (30).

Аналогичным образом доказывается

**Лемма 2.** *Матрица Якоби $F_X(X)$ для матричной функции $F(X) = V(X)X$ имеет вид*

$$F_X(X) = (X \otimes I_n)V_X(X) + (I_n \otimes V(X)).$$

Введем обозначения

$$X^{\otimes} = \frac{1}{2}[(X \otimes I_n) + (I_n \otimes X)], \quad V^{\otimes} = \frac{1}{2}[(V \otimes I_n) + (I_n \otimes V)]$$

и объединим утверждения лемм 1 и 2 в следующий результат.

**Лемма 3.** *Матрица Якоби* $F_X(X)$ *для матричной функции*

$$F(X) = X * V(X) \tag{33}$$

*имеет вид*

$$F_X(X) = V^{\otimes}(X) + X^{\otimes} V_X(X). \tag{34}$$

На основании леммы 3 и равенства (29) приходим к матрице Якоби $F_X^{\Delta}(X)$ для симметричной матричной функции (33):

$$F_X^{\Delta}(X) = \mathcal{L}_n[V^{\otimes}(X) + X^{\otimes} V_X(X)]\mathcal{D}_n. \tag{35}$$

Введем два набора пар индексов, с помощью которых удобно нумеровать строки и столбцы матриц $F_X(X)$ и $F_X^{\Delta}(X)$, а также других матриц, размеры которых совпадают с размерами данных матриц. Первый набор состоит из $n^2$ пар индексов

$$J = \{(1, 1), \ldots, (n, 1), (1, 2), \ldots, \ldots, (n, 2), \ldots, (1, n), \ldots, (n, n)\},$$

а второй набор – из $k_{\Delta}(n)$ пар индексов

$$J_{\Delta} = \{(1, 1), \ldots, (n, 1), (2, 2), \ldots, (n, 2), (3, 3), \ldots, (n, n)\}.$$

Так как матрица $(V(X)X)_X$ получается из $(XV(X))_X$ путем перестановки строк с несимметричными номерами $(i, j)$ и $(j, i)$, то у матрицы

$$(X * V(X))_X = \frac{1}{2}(XV(X) + V(X)X)_X$$

строки с несимметричными номерами $(i, j)$ и $(j, i)$ совпадают. Это означает, что каждому столбцу матрицы (34) соответствует симметричная матрица, т.е. каждый столбец есть прямая сумма столбцов симметричной матрицы. Поэтому наряду с формулой (35) справедлива формула

$$F_X^{\Delta}(X) = \mathcal{L}_n\mathcal{N}_n[V^{\otimes}(X) + X^{\otimes} V_X(X)]\mathcal{D}_n. \tag{36}$$

Матрица $\mathcal{N}_n$ в (36) определяется по формуле $\mathcal{N}_n = (I_n + \mathcal{K}_n)/2$, где $\mathcal{K}_n$ – коммутационная матрица размера $n^2 \times n^2$. Для каждой квадратной матрицы $M$ порядка $n$ матрица $\mathcal{K}_n$ осуществляет перестановку $\mathcal{K}_n \operatorname{vec} M = \operatorname{vec} M^{\mathrm{T}}$. Матрица $\mathcal{N}_n$ является симметричной и идемпотентной, т.е. $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n^{\mathrm{T}} = \mathcal{N}_n^2$. Если $M^S$ – симметричная часть квадратной матрицы $M$, равная $M^S = (M + M^{\mathrm{T}})/2$, то

$$\mathcal{N}_n \operatorname{vec} M = \operatorname{vec}(M^S). \tag{37}$$

Кроме того,

$$\mathcal{N}_n(M \otimes M) = (M \otimes M)\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n(M \otimes M)\mathcal{N}_n \tag{38}$$

для любой квадратной матрицы $M$ (см. [17]).

Формула (34) получена для общего случая, без предположений о конкретном виде матричной функции $V(X)$. Уточним ее для случая, когда $V(X)$ имеет вид

$$V(X) = C - \sum_{i=1}^{m} u^i(X)A_i = C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}(u(X) \otimes I_n).$$

Тогда

$$V_X(X) = -\sum_{i=1}^{m} (\operatorname{vec} A_i) u_X^i(X). \tag{39}$$

Каждый правый сомножитель $u_X^i(X)$ в (39) является $n^2$-мерной вектор-строкой, $(p, q)$-элемент которой есть частная производная $\partial u^i/\partial X_{pq}$. Здесь $(p, q) \in J$. Пусть $u_X(X)$ – матрица Якоби вектор-функции $u(X)$ размером $m \times n^2$, составленная из строк $u_X^i(X)$, $1 \le i \le m$. Пусть, кроме того,

$\mathcal{A}_{\text{vec}}$ есть $m \times n^2$ матрица, $i$-й строкой которой является вектор $\operatorname{vec} A_i$. Тогда матрицу Якоби $V_X(X)$ можно записать в виде

$$V_X(X) = -\mathcal{A}_{\text{vec}}^{\mathrm{T}} u_X(X). \tag{40}$$

Таким образом, вычисление $V_X(X)$ сводится к вычислению матрицы Якоби $u_X(X)$. Найдем ее для общего метода (13), в котором $V(X)$ имеет вид (11).

Дифференцируя равенства (6), которые переписываем в виде

$$A_i \bullet (X * V(X)) = -\tau(b^i - A_i \bullet X), \quad 1 \le i \le m, \tag{41}$$

получаем

$$d[A_i \bullet (X * V(X))] = \tau d(A_i \bullet X), \quad 1 \le i \le m, \tag{42}$$

или, учитывая симметричность матриц $A_i$, $X$ и $V$, имеем

$$\frac{1}{2}\{d\operatorname{tr}(A_i XV) + d\operatorname{tr}(A_i VX)\} = \tau d\operatorname{tr}(A_i X), \quad 1 \le i \le m.$$

Согласно правилам дифференцирования,

$$d\operatorname{tr}(A_i XV) = \operatorname{tr} d(A_i XV) = \operatorname{tr}(A_i dXV) + \operatorname{tr}(A_i XdV). \tag{43}$$

Но

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A_i dXV) &= (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} \operatorname{vec}(dXV) = \\ &= (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} (V^{\mathrm{T}} \otimes I_n) \operatorname{vec} dX = \\ &= (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} (V \otimes I_n) d\operatorname{vec} X. \end{aligned} \tag{44}$$

Для второго слагаемого в (43) получаем таким же образом

$$\operatorname{tr}(A_i XdV) = (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} (I_n \otimes X) V_X(X) d\operatorname{vec} X. \tag{45}$$

Если обозначить через $\phi(X)$ скалярную функцию от матричного аргумента $\phi(X) = \operatorname{tr}(A_i XV)$, то из (43)–(45) приходим к ее матрице Якоби:

$$\phi_X(X) = (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} [(V \otimes I_n) + (I_n \otimes X) V_X(X)].$$

Схожим образом получаем, что у функции $\psi(X) = \operatorname{tr}(A_i VX)$ ее матрица Якоби имеет вид

$$\psi_X(X) = (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} [(I_n \otimes V) + (X \otimes I_n) V_X(X)].$$

Для правой части равенства (42) находим

$$d\operatorname{tr}(A_i X) = \operatorname{tr} d(A_i X) = \operatorname{tr}(A_i dX) = (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} d\operatorname{vec} X,$$

откуда следует, что матрица Якоби для скалярной функции $\varphi(X) = \operatorname{tr}(A_i X)$ есть просто $\varphi_X(X) = (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}}$.

Приравнивая теперь матрицы Якоби от левой и правой частей (41), получаем

$$(\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} [V^{\otimes} + X^{\otimes} V_X(X)] = \tau (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}},$$

где $1 \le i \le m$. Объединим все эти равенства в одно с помощью матрицы $\mathcal{A}_{\text{vec}}$. Имеем

$$\mathcal{A}_{\text{vec}} [V^{\otimes} + X^{\otimes} V_X(X)] = \tau \mathcal{A}_{\text{vec}}. \tag{46}$$

Согласно (39), $V_X(X) = -\mathcal{A}_{\text{vec}}^{\mathrm{T}} u_X(X)$. Подставляя данное выражение в (46), получаем

$$\Gamma(X) u_X(X) = \mathcal{A}_{\text{vec}} V^{\otimes} - \tau \mathcal{A}_{\text{vec}}, \tag{47}$$

где через $\Gamma(X)$ обозначена матрица $\Gamma(X) = \mathcal{A}_{\text{vec}} X^{\otimes} \mathcal{A}_{\text{vec}}^{\mathrm{T}}$.

Если матрица $\Gamma(X)$ неособая, то из (47) находим

$$u_X(X) = (\mathcal{A}_{\mathrm{vec}} X^{\otimes} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}})^{-1} (\mathcal{A}_{\mathrm{vec}} V^{\otimes} - \tau \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}).$$

Следовательно, в силу (40),

$$V_X(X) = -\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}} (\mathcal{A}_{\mathrm{vec}} X^{\otimes} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}})^{-1} (\mathcal{A}_{\mathrm{vec}} V^{\otimes} - \tau \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}). \tag{48}$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$\mathcal{P}(X^{\otimes}) = X^{\otimes} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}} (\mathcal{A}_{\mathrm{vec}} X^{\otimes} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}})^{-1} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}.$$

Тогда после подстановки выражения (48) для $V_X(X)$ в формулу (34) приходим к следующей матрице Якоби:

$$F_X(X) = [I_{n^2} - \mathcal{P}(X^{\otimes})] V^{\otimes} + \tau \mathcal{P}(X^{\otimes}). \tag{49}$$

Введенная матрица $\Gamma(X)$ квадратная, порядка $m$. Она может быть записана в виде (9). Действительно, так как

$$(I_n \otimes X) \operatorname{vec} A_i = \operatorname{vec}(X A_i), \quad (X \otimes I_n) \operatorname{vec} A_i = \operatorname{vec}(A_i X),$$

то ее $(i, j)$-й элемент равен

$$\Gamma_{i,j} = (\operatorname{vec} A_i)^{\mathrm{T}} \operatorname{vec}(X * A_j) = A_i \bullet (X * A_j).$$

Отсюда приходим к (9). Поэтому в невырожденной допустимой точке $X \in \mathcal{F}_P$, согласно предложению 1, матрица $\Gamma(X)$ должна быть неособой.

## 6. ЛОКАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

В дальнейшем нас будет интересовать матрица Якоби $F_X^{\Delta}(X)$ в решении, когда $X = X_*$. В силу (36) и (49) она имеет вид

$$F_X^{\Delta}(X_*) = \mathcal{L}_n \mathcal{N}_n [(I_{n^2} - \mathcal{P}(X_*^{\otimes})) V_*^{\otimes} + \tau \mathcal{P}(X_*^{\otimes})] \mathcal{D}_n, \tag{50}$$

где $V_*^{\otimes} = V^{\otimes}(X_*)$. Матрица $F_X^{\Delta}(X_*)$ квадратная, порядка $k_{\Delta}(n)$. Найдем ее собственные значения.

**Лемма 4.** *Пусть симметричные матрицы $X$ и $V$ коммутируют. Тогда матрицы $X^{\otimes}$ и $V^{\otimes}$ также коммутируют.*

**Доказательство.** Непосредственными вычислениями с помощью равенства

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD), \tag{51}$$

имеющего место для любых матриц $A$, $B$, $C$ и $D$, для которых существуют произведения $AC$ и $BD$ (см., например, [18]), получаем

$$X^{\otimes} V^{\otimes} = [(I_n \otimes X)(I_n \otimes V) + (I_n \otimes X)(V \otimes I_n) + (X \otimes I_n)(I_n \otimes V) + (X \otimes I_n)(V \otimes I_n)]/4 =$$
$$= [I_n \otimes (XV) + V \otimes X + (XV) \otimes I_n + X \otimes V]/4.$$

С другой стороны,

$$V^{\otimes} X^{\otimes} = [I_n \otimes (VX) + X \otimes V + (VX) \otimes I_n + V \otimes X]/4.$$

Так как $XV = VX$, то отсюда приходим к требуемому утверждению.

Возьмем теперь в качестве $X$ матрицу $X_*$, а в качестве $V$ – матрицу $V_*$. Из того, что $X_* V_* = V_* X_* = 0_{nn}$, в силу утверждения леммы 4 получаем, что матрицы $X_*^{\otimes}$ и $V_*^{\otimes}$ коммутируют. Но тогда найдется ортогональная матрица $H$ порядка $n^2$ такая, что

$$X_*^{\otimes} = H D(\lambda_*) H^{\mathrm{T}}, \quad V_*^{\otimes} = H D(\mu_*) H^{\mathrm{T}}, \tag{52}$$

где $\lambda_*$ и $\mu_*$ суть $n^2$-мерные векторы, состоящие из собственных значений, соответственно, матриц $X_*^{\otimes}$ и $V_*^{\otimes}$. Все эти собственные значения, в силу симметричности матриц $X_*^{\otimes}$ и $V_*^{\otimes}$, вещественны.

Из того, что матрицы $X_*$ и $V_*$ коммутируют, следуют разложения

$$X_* = QD(\eta_*)Q^{\text{т}}, \quad V_* = QD(\theta_*)Q^{\text{т}} \tag{53}$$

для некоторой ортогональной матрицы $Q$. Здесь $\eta_*$ и $\theta_*$ суть $n$-мерные векторы, состоящие из собственных значений, соответственно, матриц $X_*$ и $V_*$.

Вычислим матрицу $X_*^{\otimes}$, используя представление (53). Имеем, согласно формуле (51),

$$X_* \otimes I_n = (QD(\eta_*)Q^{\text{т}}) \otimes I_n = ((QD(\eta_*)) \otimes I_n)(Q^{\text{т}} \otimes I_n) =$$
$$= (Q \otimes I_n)(D(\eta_*) \otimes I_n)(Q^{\text{т}} \otimes I_n).$$

Аналогичным образом находим

$$I_n \otimes X_* = I_n \otimes (QD(\eta_*)Q^{\text{т}}) = (I_n \otimes Q)(I_n \otimes (D(\eta_*)Q^{\text{т}})) =$$
$$= (I_n \otimes Q)(I_n \otimes D(\eta_*))(I_n \otimes Q^{\text{т}}).$$

Поэтому

$$X_*^{\otimes} = [(Q \otimes I_n)(D(\eta_*) \otimes I_n)(Q^{\text{т}} \otimes I_n) + (I_n \otimes Q)(I_n \otimes D(\eta_*))(I_n \otimes Q^{\text{т}})]/2.$$

Отметим, что матрица $Q^{\text{т}} \otimes I_n$ является обратной к матрице $Q \otimes I_n$, а матрица $I_n \otimes Q^{\text{т}}$ – обратной к матрице $I_n \otimes Q$.

Из вида матрицы $X_*^{\otimes}$ следует, что ее собственные значения являются полусуммами всевозможных значений матрицы $X_*$ (см., например, [18]). Представим этот результат в виде следующего утверждения.

**Лемма 5.** *Пусть $\eta_*$ – вектор собственных значений матрицы $X_*$. Тогда компоненты вектора*

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\operatorname{diag}[I_n \otimes D(\eta_*) + D(\eta_*) \otimes I_n] \tag{54}$$

*являются собственными значениями матрицы $X_*^{\otimes}$.*

**Доказательство.** Симметричные матрицы $X_* \otimes I_n$ и $I_n \otimes X_*$ коммутируют, что следует из формулы (51). Поэтому ортогональную матрицу $H$ в разложении (52) можно взять такую, что

$$X_* \otimes I_n = HD(\lambda_1)H^{\text{т}}, \quad I_n \otimes X_* = HD(\lambda_2)H^{\text{т}}, \tag{55}$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ суть $n^2$-мерные векторы, состоящие из собственных значений, соответственно, матриц $X_* \otimes I_n$ и $I_n \otimes X_*$.

Из (55) приходим к разложению

$$X_*^{\otimes} = HD\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)H^{\text{т}}, \tag{56}$$

т.е. $\lambda_* = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$.

Если положить $H = Q \otimes Q$, то $H^{\text{т}} = Q^{\text{т}} \otimes Q^{\text{т}}$ и

$$HH^{\text{т}} = (Q \otimes Q)(Q^{\text{т}} \otimes Q^{\text{т}}) = (QQ^{\text{т}}) \otimes (QQ^{\text{т}}) = I_n \otimes I_n = I_{n^2}.$$

Следовательно, матрица $H$ ортогональная. Имеем для матрицы $X = X_*$

$$\begin{aligned}H^{\mathrm{T}}(I_n \otimes X)H &= (Q^{\mathrm{T}} \otimes Q^{\mathrm{T}})(I_n \otimes X)(Q \otimes Q) = \\ &= (Q^{\mathrm{T}} \otimes (Q^{\mathrm{T}}X))(Q \otimes Q) = \\ &= (Q^{\mathrm{T}}Q) \otimes (Q^{\mathrm{T}}XQ) = \\ &= I_n \otimes D(\eta_*).\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned}H^{\mathrm{T}}(X \otimes I_n)H &= (Q^{\mathrm{T}} \otimes Q^{\mathrm{T}})(X \otimes I_n)(Q \otimes Q) = \\ &= (Q^{\mathrm{T}}X \otimes Q^{\mathrm{T}})(Q \otimes Q) = \\ &= (Q^{\mathrm{T}}XQ) \otimes (Q^{\mathrm{T}}Q) = \\ &= D(\eta_*) \otimes I_n.\end{aligned}$$

Обе матрицы – $D(\eta_*) \otimes I_n$ и $I_n \otimes D(\eta_*)$ – диагональные. Таким образом, данную ортогональную матрицу $Q \otimes Q$ можно взять в качестве $H$. Отсюда следует справедливость представления (54).

Пусть

$$D^{\otimes}(\eta_*) = [D(\eta_*) \otimes I_n + I_n \otimes D(\eta_*)]/2, \quad \eta_*^{\otimes} = \mathrm{diag}(D^{\otimes}(\eta_*)).$$

Тогда, в силу (54) и (56),

$$X_*^{\otimes} = (Q \otimes Q)D(\eta_*^{\otimes})(Q^{\mathrm{T}} \otimes Q^{\mathrm{T}}). \tag{57}$$

Поскольку, как нетрудно убедиться, все слагаемые в матрицах $X_*^{\otimes}$ и $V_*^{\otimes}$ также коммутируют между собой, то для той же самой ортогональной матрицы $H$ получаем, что

$$V_*^{\otimes} = HD\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)H^{\mathrm{T}},$$

где $\mu_1$ и $\mu_2$ суть $n^2$-мерные векторы, составленные из собственных значений, соответственно, матриц $V_* \otimes I_n$ и $I_n \otimes V_*$. Поэтому компоненты вектора $\mu_* = (\mu_1 + \mu_2)/2$ будут собственными значениями матрицы $V_*^{\otimes}$. Отсюда аналогично сказанному выше находим

$$V_*^{\otimes} = (Q \otimes Q)D(\theta_*^{\otimes})(Q^{\mathrm{T}} \otimes Q^{\mathrm{T}}), \tag{58}$$

где $\theta_*^{\otimes} = \mathrm{diag}(D^{\otimes}(\theta_*))$, $\theta_*$ есть $n$-мерный вектор, состоящий из собственных значений матрицы $V_* = V(X_*)$, и

$$D^{\otimes}(\theta_*) = [D(\theta_*) \otimes I_n + I_n \otimes D(\theta_*)]/2.$$

После подстановки выражений (57) и (58) в (50) и с учетом того, что $H = Q \otimes Q$, $H^{\mathrm{T}} = Q^{\mathrm{T}} \otimes Q^{\mathrm{T}}$, $HH^{\mathrm{T}} = I_{n^2}$, получаем

$$F_X^{\Delta}(X_*) = \mathcal{L}_n\mathcal{N}_nHW(\eta_*, \theta_*)H^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_n, \tag{59}$$

где введено обозначение

$$W(\eta_*, \theta_*) = [I_{n^2} - \mathcal{G}(\eta_*^{\otimes})]D(\theta_*^{\otimes}) + \tau\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}).$$

Матрица $\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes})$ имеет вид

$$\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}) = D(\eta_*^{\otimes})H^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}(\eta_*^{\otimes})\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}H,$$

в ней

$$\Gamma(\eta_*^{\otimes}) = \mathcal{A}_{\mathrm{vec}} H D(\eta_*^{\otimes}) H^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}}.$$

Представим матрицу $F_X^{\Delta}(X_*)$ в более удобном для дальнейшего анализа виде. Прежде всего с помощью формулы (26) убеждаемся, что

$$H^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}} = (Q^{\mathrm{T}} \mathcal{A} Q)_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}}. \tag{60}$$

Здесь через $(Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vec}}$ обозначена $m \times n^2$-матрица, строками которой являются векторы

$$\mathrm{vec}(Q^{\mathrm{T}} A_1 Q), \quad \mathrm{vec}(Q^{\mathrm{T}} A_2 Q), \quad \ldots, \quad \mathrm{vec}(Q^{\mathrm{T}} A_m Q).$$

Так как все матрицы $Q^{\mathrm{T}} A_i Q$, $1 \le i \le m$, симметричные, то в матрице $(Q^{\mathrm{T}} \mathcal{A} Q)_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}}$ имеются одинаковые строки, а именно строка с номером $(i, j) \in J$, в которой $i \ne j$, совпадает со строкой с симметричным номером $(j, i) \in J$. Более того, вектор $\eta_*^{\otimes}$ также обладает аналогичным свойством: в нем элементы с номерами $(i, j)$ и $(j, i)$ равны между собой. Таким образом, каждый столбец матрицы $(Q^{\mathrm{T}} \mathcal{A} Q)_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}}$ и вектор $\eta_*^{\otimes}$ являются прямой суммой столбцов симметричной матрицы.

Ниже наряду с матрицей $(Q^{\mathrm{T}} \mathcal{A} Q)_{\mathrm{vec}}$ нам потребуются ее подматрица $(Q^{\mathrm{T}} \mathcal{A} Q)_{\mathrm{vech}}$ размера $m \times k_{\Delta}(n)$, строками которой являются, соответственно, векторы

$$\mathrm{vech}(Q^{\mathrm{T}} A_1 Q), \quad \mathrm{vech}(Q^{\mathrm{T}} A_2 Q), \quad \ldots, \quad \mathrm{vech}(Q^{\mathrm{T}} A_m Q).$$

Аналогичным образом определяется матрица $(Q^{\mathrm{T}} \mathcal{A} Q)_{\mathrm{vecs}}$. В ней вместо оператора векторизации vech используется оператор vecs.

Пусть $\mathcal{T}_n = \mathcal{L}_n \mathcal{N}_n H \mathcal{N}_n \mathcal{L}_n^{\mathrm{T}}$. Матрица $\mathcal{T}_n$ квадратная, порядка $k_{\Delta}(n)$. Так как матрица $H = Q \otimes Q$ неособая, а матрица $\mathcal{L}_n \mathcal{N}_n$ полного ранга, то матрица $\mathcal{T}_n$ также неособая. Учтем, далее, что обращение матрицы $\mathcal{D}_n$ по Муру–Пенроузу совпадает с $\mathcal{L}_n \mathcal{N}_n$, т.е. $\mathcal{D}_n^{+} = \mathcal{L}_n \mathcal{N}_n$ (см. [17]). Если квадратная матрица $M$ порядка $n$ неособая, то у матрицы $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}(M \otimes M)\mathcal{D}_n$ существует обратная и

$$[\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}(M \otimes M)\mathcal{D}_n]^{-1} = \mathcal{L}_n \mathcal{N}_n (M^{-1} \otimes M^{-1}) \mathcal{N}_n \mathcal{L}_n^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому если рассмотреть матрицу $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} \mathcal{D}_n$, то она является обратной по отношению к матрице $\mathcal{T}_n$, т.е.

$$\mathcal{T}_n^{-1} = \mathcal{D}_n^{\mathrm{T}} (Q^{\mathrm{T}} \otimes Q^{\mathrm{T}}) \mathcal{D}_n. \tag{61}$$

Пусть $M_{\Delta}$ обозначает нижнюю треугольную матрицу, получающуюся из квадратной матрицы $M$ путем замены всех ее элементов, стоящих выше диагонали, нулями. Квадратная матрица $\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}} \mathcal{L}_n$ диагональная идемпотентная ранга $k_{\Delta}(n)$. Для любой квадратной матрицы $M$ порядка $n$ она совершает преобразование

$$\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}} \mathcal{L}_n \mathrm{vec}\, M = \mathrm{vec}\, M_{\Delta}. \tag{62}$$

**Лемма 6.** *Пусть $X$ и $Y$ – симметричные матрицы порядка $n$. Тогда*

$$D(\mathrm{vec}\, X)\mathrm{vec}\, Y = \mathcal{N}_n \mathcal{L}_n^{\mathrm{T}} D(\mathcal{L}_n \mathrm{vec}\, X) \mathrm{vecs}\, Y.$$

**Доказательство.** Результат умножения матрицы $D(\mathrm{vec} X)$ на вектор $\mathrm{vec} Y$ можно представить как $\mathrm{vec} Z$, где $Z = X \circ Y$ (произведение матриц $X$ и $Y$ по Адамару). Из того, что обе матрицы $X$ и $Y$ симметричные, следует, что результирующая матрица $Z$ также будет симметричной.

Действуя матрицей $\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}} \mathcal{L}_n$ на вектор $\mathrm{vec} Z$, в силу (62) получаем

$$\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}} \mathcal{L}_n \mathrm{vec}\, Z = \mathrm{vec}\, Z_{\Delta}.$$

Поэтому согласно (37) имеем

$$\mathcal{N}_n\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}}\mathcal{L}_n\operatorname{vec}Z = \operatorname{vec}Z_\Delta^S.$$

У матрицы $Z_\Delta^S$ совпадают с матрицей $Z$ только диагональные элементы. Все ненулевые внедиагональные элементы по модулю меньше в два раза.

Введем в рассмотрение квадратную матрицу $C_2$ порядка $n$, у которой диагональные элементы равны единице, а внедиагональные элементы равны 2. Тогда

$$\operatorname{vec}Z = \mathcal{N}_n\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}}\mathcal{L}_n\operatorname{vec}(Z\circ C_2).$$

Но

$$\mathcal{L}_n\operatorname{vec}(Z\circ C_2) = \operatorname{vech}(Z\circ C_2) = \operatorname{vecs}(Z).$$

Осталось только заметить, что

$$\operatorname{vecs}(Z) = D(\operatorname{vech}X)\operatorname{vecs}Y = D(\mathcal{L}_n\operatorname{vec}X)\operatorname{vecs}Y.$$

Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Для матрицы $F_X^\Delta(X_*)$ имеет место представление*

$$F_X^\Delta(X_*) = \mathcal{T}_n\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^\otimes, \tilde{\theta}_*^\otimes)\mathcal{T}_n^{-1}, \tag{63}$$

*где* $\tilde{\eta}_*^\otimes = \mathcal{L}_n\eta_*^\otimes$, $\tilde{\theta}_*^\otimes = \mathcal{L}_n\theta_*^\otimes$ *и* $\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^\otimes, \tilde{\theta}_*^\otimes)$ – *квадратная матрица порядка* $k_\Delta(n)$, *имеющая вид*

$$\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^\otimes, \tilde{\theta}_*^\otimes) = [I_{k_\Delta(n)} - \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\eta}_*^\otimes)]D(\tilde{\theta}_*^\otimes) + \tau\tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\eta}_*^\otimes).$$

*В ней*

$$\tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\eta}_*^\otimes) = D(\tilde{\eta}_*^\otimes)(Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vecs}}^{\mathrm{T}}\tilde{\Gamma}^{-1}(\tilde{\eta}_*^\otimes)(Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vech}},$$

$$\tilde{\Gamma}(\tilde{\eta}_*^\otimes) = (Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vecs}}D(\tilde{\eta}_*^\otimes)(Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vech}}^{\mathrm{T}}.$$

**Доказательство.** Согласно (60) и утверждению леммы 6 имеем

$$D(\eta_*^\otimes)H^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}} = \mathcal{N}_n\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}}D(\tilde{\eta}_*^\otimes)(Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vecs}}^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому

$$\mathcal{L}_n\mathcal{N}_nHD(\eta_*^\otimes)H^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}} = \mathcal{T}_nD(\tilde{\eta}_*^\otimes)(Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vecs}}^{\mathrm{T}}.$$

Покажем далее, что $\mathcal{L}_n\mathcal{N}_nH = \mathcal{T}_n\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$. В самом деле, в силу симметричности матрицы $\mathcal{N}_n$ и формулы $\mathcal{D}_n\mathcal{L}_n\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n$, следующей из определений матриц $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$, выполняется равенство

$$\mathcal{N}_n\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}} = (\mathcal{D}_n\mathcal{L}_n\mathcal{N}_n)^{\mathrm{T}} = \mathcal{N}_n^{\mathrm{T}} = \mathcal{N}_n. \tag{64}$$

Но поскольку матрица $H$ имеет вид $H = Q\otimes Q$, то, в силу (38), имеем $\mathcal{N}_nH = \mathcal{N}_nH\mathcal{N}_n$. Отсюда и из (64) следует, что

$$\mathcal{L}_n\mathcal{N}_nH = \mathcal{L}_n\mathcal{N}_nH\mathcal{N}_n = \mathcal{L}_n\mathcal{N}_nH\mathcal{N}_n\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}} = \mathcal{T}_n\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}.$$

Кроме того, согласно определению матрицы $\mathcal{D}_n$ и (60), имеет место равенство $\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}H = (Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vecs}}\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$. Наконец, как несложно убедиться прямыми вычислениями, $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}D(\theta_*^\otimes) = D(\tilde{\theta}_*^\otimes)\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$.

Суммируя все сказанное выше и учитывая (61), приходим к выводу, что матрица (59) преобразуется к виду (63).

**Теорема 2.** *Пусть для прямой и двойственной задач* (1), (2) *имеет место строгая двойственность, причем их решения $X_*$ и $V_*$ строго комплементарны. Пусть, кроме того, точка $X_*$ есть вершина множества $\mathcal{F}_P$. Тогда итерации, определяемые по формуле* (13), *локально сходятся к $X_*$ с линейной скоростью.*

**Доказательство.** Используя операцию векторизации vech, процесс (5) запишем в виде

$$\operatorname{vech}X_{k+1} = \operatorname{vech}X_k - \alpha_k\operatorname{vech}(X_k * V_k), \tag{65}$$

где $V_k = V(X_k)$, $V(X)$ определяется согласно (11). Решение задачи (1) – вектор $\mathrm{vech}X_*$ является неподвижной точкой отображения

$$\mathcal{B}(\mathrm{vech}\,X) = \mathrm{vech}(X - \alpha X * V(X))$$

для любого $\alpha > 0$.

Пусть $\mathcal{B}_{\mathrm{vech}X}(\mathrm{vech}X_*)$ – матрица Якоби отображения $\mathcal{B}(\mathrm{vech}X)$ в точке $\mathrm{vech}X_*$. Покажем, что найдется $\bar{\alpha} > 0$, для которого при $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ спектральный радиус $\rho$ этой матрицы удовлетворяет условию

$$\rho(\mathcal{B}_{\mathrm{vech}\,X}(\mathrm{vech}\,X_*)) < 1. \tag{66}$$

Тогда, по теореме Островского (см., например, [19]), вектор $\mathrm{vech}X_*$ является точкой притяжения для итерационного процесса (65) и итерации, определяемые (65), локально сходятся к $\mathrm{vech}X_*$ с линейной скоростью.

Матрица $\mathcal{B}_{\mathrm{vech}X}(\mathrm{vech}X_*)$ имеет вид

$$\mathcal{B}_{\mathrm{vech}\,X}(\mathrm{vech}\,X_*) = I_{k_\Delta(n)} - \alpha F_X^\Delta(X_*). \tag{67}$$

Найдем собственные значения матрицы $F_X^\Delta(X_*)$. Так как, согласно (63), данная матрица подобна матрице $\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^\otimes, \tilde{\theta}_*^\otimes)$, то собственные значения $F_X^\Delta(X_*)$ совпадают с собственными значениями матрицы $\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^\otimes, \tilde{\theta}_*^\otimes)$.

Для нахождения собственных значений матрицы $\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^\otimes, \tilde{\theta}_*^\otimes)$ воспользуемся разложениями (3) для матриц $X_*$ и $V_*$. В силу условия дополнительности (4), для $X_*$ и $V_*$ имеет место равенство $D(\eta_*)D(\theta_*) = 0_{nn}$. Кроме того, поскольку $X_* \in \mathcal{S}_+^n$ и $V_* \in \mathcal{S}_+^n$, то $\eta_* \geq 0_n$, $\theta_* \geq 0_n$. Не умаляя общности, считаем, что первые $r$ собственных значений из $\eta_*$ положительны, а остальные равны нулю. Относительно же $\theta_*$ полагаем, наоборот, что последние $s$ значений положительны, а первые $n - s$ нулевые. Согласно предположению о строгой дополнительности имеем $r + s = n$. В этом случае

$$\begin{aligned} \eta_* &= [\eta_*^1, \ldots, \eta_*^r, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}}, \\ \theta_* &= [0, \ldots, 0, \theta_*^{r+1}, \ldots, \theta_*^n]^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{68}$$

причем $\eta_*^i > 0$ при $1 \leq i \leq r$ и $\theta_*^j > 0$ при $r < j \leq n$.

Обозначим с целью уменьшения записи $n_1 = k_\Delta(n)$, $m_1 = k_\Delta(r)$ и $m_2 = n_1 - k_\Delta(n - r)$. Так как $X_*$ – невырожденная вершина множества $\mathcal{F}_P$, то справедливы неравенства $m_1 \leq m \leq m_2$.

Рассмотрим векторы $\tilde{\eta}_*^\otimes$ и $\tilde{\theta}_*^\otimes$. Оба они имеют одинаковую размерность $n_1$. Из (68) следует, что у вектора $\tilde{\eta}_*^\otimes$ первые $m_2$ компонент положительны, а последующие $n_1 - m_2$ компонент нулевые. У вектора $\tilde{\theta}_*^\otimes$ имеется $n_1 - m_1$ положительных компонент, причем в их число обязательно входят последние $n_1 - m_2$ компонент.

Представим векторы $\tilde{\eta}_*^\otimes$ и $\tilde{\theta}_*^\otimes$ в виде

$$\tilde{\eta}_*^\otimes = [\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\eta}_*^N], \quad \tilde{\theta}_*^\otimes = [\tilde{\theta}_*^B, \tilde{\theta}_*^N].$$

Согласно сказанному выше имеем $\tilde{\eta}_*^N = 0_{n_1 - m_2}$, $\tilde{\theta}_*^N > 0_{n_1 - m_2}$.

Для сокращения записи введем также обозначения $Z_{\mathrm{vech}} = (Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vech}}$, $Z_{\mathrm{vech}}^B$ – подматрица матрицы $Z_{\mathrm{vech}}$, состоящая из ее первых $m_2$ столбцов. Аналогичным образом определяются матрицы $Z_{\mathrm{vecs}}$ и $Z_{\mathrm{vecs}}^B$, соответствующие матрице $(Q^{\mathrm{T}}\mathcal{A}Q)_{\mathrm{vecs}}$.

Так как $\tilde{\eta}_*^N = 0_{n_1 - m_2}$, то матрица $\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^{\otimes}, \tilde{\theta}_*^{\otimes})$ имеет структуру верхней блочной треугольной матрицы

$$\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^{\otimes}, \tilde{\theta}_*^{\otimes}) = \begin{bmatrix} \tilde{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B) & \tilde{W}_2(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B) \\ 0_{m_2(n_1 - m_2)} & D(\tilde{\theta}_*^N) \end{bmatrix}, \quad (69)$$

где $\tilde{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)$ – квадратная матрица порядка $m_2$ следующего вида:

$$\tilde{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B) = [I_{m_2} - \tilde{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)]D(\tilde{\theta}_*^B) + \tau\tilde{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B).$$

В ней

$$\tilde{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B) = D(\tilde{\eta}_*^B)(Z_{\mathrm{vecs}}^B)^{\mathrm{T}}[Z_{\mathrm{vech}}^B D(\tilde{\eta}_*^B)(Z_{\mathrm{vecs}}^B)^{\mathrm{T}}]^{-1} Z_{\mathrm{vech}}^B.$$

В силу (69), собственные значения матрицы $\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^{\otimes}, \tilde{\theta}_*^{\otimes})$ определяются собственными значениями матрицы $\tilde{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)$ и компонентами вектора $\tilde{\theta}_*^N$, все из которых строго положительны. Их число равняется $n_1 - m_2$.

Найдем собственные значения матрицы $\tilde{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)$. Так как $\tilde{\eta}_*^B > 0_{m_2}$, то она может быть представлена в виде

$$\tilde{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B) = D^{1/2}(\tilde{\eta}_*^B)\hat{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)D^{-1/2}(\tilde{\eta}_*^B),$$

где

$$\hat{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B) = [I_{m_2} - \hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)]D(\tilde{\theta}_*^B) + \tau\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B).$$

В $\hat{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)$ матрица $\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)$ имеет вид

$$\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B) = D^{-1/2}(\tilde{\eta}_*^B)\tilde{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)D^{1/2}(\tilde{\eta}_*^B).$$

Обе матрицы $\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)$ и $I_{m_2} - \hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)$ являются идемпотентными.

В силу подобия матриц $\tilde{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)$ и $\hat{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)$, собственные значения матрицы $\tilde{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)$ совпадают с собственными значениями последней, общее число которых с учетом кратности равно $m_2$.

Пусть $y \in \mathbb{R}^{m_2}$ – собственный вектор матрицы $\hat{W}_1(\tilde{\eta}_*^B, \tilde{\theta}_*^B)$, а $\lambda$ – соответствующее ему собственное значение. Тогда

$$[(I_{m_2} - \hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B))D(\tilde{\theta}_*^B) + \tau\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)]y = \lambda y. \quad (70)$$

После умножения равенства (70) слева на идемпотентную матрицу $\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)$ получаем $\tau\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)y = \lambda\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)y$. Если собственный вектор $y$ такой, что $Z_{\mathrm{vech}}^B D^{1/2}(\tilde{\eta}_*^B)y \neq 0_m$, то $\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)y \neq$ $\neq 0_m$. Поэтому $\lambda = \tau$ является собственным значением матрицы $\hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)$.

Предположим теперь, что

$$Z_{\mathrm{vech}}^B D^{1/2}(\tilde{\eta}_*^B)y = 0_m, \quad (71)$$

т.е. что вектор $y$ принадлежит нуль-пространству матрицы $Z_{\mathrm{vech}}^B D^{1/2}(\tilde{\eta}_*^B)$. Размерность этого нуль-пространства равняется $m_2 - m$. Тогда равенство (70) сводится к следующему:

$$[I_{m_2} - \hat{\mathcal{G}}^B(\tilde{\eta}_*^B)]D(\tilde{\theta}_*^B)y = \lambda y. \quad (72)$$

Пусть $\bar{y}$ – вектор $y$, но у которого все компоненты, соответствующие несимметричным номерам из множества $J_\Delta(n)$, в два раза меньше, чем у вектора $y$. Тогда после умножения равенства (72) слева на вектор $\bar{y}^{\mathrm{T}}$ приходим к формуле

$$\langle \bar{y}, D(\tilde{\theta}_*^B)y\rangle = \lambda\langle \bar{y}, y\rangle.$$

Поскольку $y$ – ненулевой вектор, отсюда следует, что

$$\lambda = \frac{\langle \bar{y}, D(\tilde{\theta}_*^B)y\rangle}{\langle \bar{y}, y\rangle} \geq 0.$$

Докажем от противного, что случай, когда $\lambda = 0$, невозможен. Действительно, пусть

$$J_\Delta^1(r) = \{(i, j) \in J_\Delta\colon 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r\},$$

$$J_\Delta^2(r) = \{(i, j) \in J_\Delta\colon i > r, j \leq r\}.$$

Имеем $|J_\Delta^1(r)| = m_1$, $|J_\Delta^1(r)| + |J_\Delta^2(r)| = m_2$. Пусть, кроме того, $Z_{\mathrm{vech}}^{B_1}$ есть $m \times m_1$-подматрица матрицы $Z_{\mathrm{vech}}^B$, составленная из столбцов последней с номерами $(i, j) \in J_\Delta^1(r)$. Так как точка $X_*$ – невырожденная вершина множества $\mathcal{F}_P$, то эта матрица имеет полный ранг, равный $m_1$.

У вектора $\tilde{\theta}_*^B$ все компоненты с номерами $(i, j) \in J_\Delta^1(r)$ равны нулю, а все компоненты с номерами $(i, j) \in J_\Delta^2(r)$ строго положительны. Поэтому равенство $\langle \bar{y}, D(\tilde{\theta}_*^B)y\rangle = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда у вектора $y$, а стало быть, и у вектора $\bar{y}$ все компоненты с номерами $(i, j) \in J_\Delta^2(r)$ нулевые.

Но тогда $m_1$-мерный вектор $z$, составленный из компонент вектора $D^{1/2}(\tilde{\eta}_*^B)y$ с номерами $(i, j) \in J_\Delta^1(r)$, будет ненулевым вектором и для него в силу (71) выполняется равенство $Z_{\mathrm{vech}}^{B_1}z = 0_{m_1}$. Это означает, что столбцы матрицы $Z_{\mathrm{vech}}^{B_1}$ линейно зависимы и, следовательно, ее ранг меньше $m_1$. Мы пришли к противоречию.

Таким образом, все собственные значения матрицы $\tilde{W}(\tilde{\eta}_*^{\otimes}, \tilde{\theta}_*^{\otimes})$, а стало быть, и $F_X^\Delta(X_*)$ действительные и строго положительные. Пусть $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное значение матрицы $F_X^\Delta(X_*)$. Так как, согласно (67), собственные значения матрицы $\mathcal{B}_{\mathrm{vech}X}(\mathrm{vech}X_*)$ равны $1 - \alpha\lambda$, где $\lambda$ – собственные значения матрицы $F_X^\Delta(X_*)$, то, беря $\bar{\alpha} < 2/\lambda_{\max}$, получаем, что при $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ выполнено условие (66). Поэтому процесс (65) и, следовательно, (13) локально сходятся с линейной скоростью к решению задачи (1).

Поведение итерационного процесса (16) полностью совпадает с поведением процесса (13), если в последнем в качестве начального приближения взять допустимую точку. Поэтому, в силу утверждения теоремы 2, процесс (16) также локально сходится к решению задачи (1).

## 7. ВЫБОР ШАГА

Рассмотрим вопрос о выборе шага $\alpha_k$ в итерационном процессе (5). Как следует из доказательства теоремы 2, чтобы обеспечить локальную сходимость, он должен быть меньше величины $\bar{\alpha}$. Значение величины $\bar{\alpha}$ определяется параметром $\tau$ и собственными значениями матрицы $V_*$, входящей в решение двойственной задачи (2). Кроме того, целесообразно выбирать шаг $\alpha_k$ таким образом, чтобы сохранялось свойство положительной определенности матрицы $X_k$ на каждой итерации, если начальная матрица взята также положительно-определенной. Тогда процесс (5) обладает свойством метода внутренней точки.

Пусть $Y_k = X_k * V_k$. Обе матрицы $X_k$ и $Y_k$ являются симметричными. Предположим дополнительно, что матрица $X_k$ является положительно-определенной. Тогда, используя конъюктивное приведение двух симметричных матриц, одна из которых является положительно-определенной (см., например, [18]), получаем, что для некоторой невырожденной матрицы $P$ выполняются соотношения

$$P^{\mathrm{T}} X_k P = I_n, \quad P^{\mathrm{T}} Y_k P = D(\omega_k), \tag{73}$$

где $\omega_k = [\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n]$ – вектор, составленный из собственных значений матрицы $Z_k = X_k^{-1} Y_k$.

Все значения $\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n$ действительные. Согласно (73) имеем

$$X_k = (P^{-1})^{\mathrm{T}} P^{-1}, \quad Y_k = (P^{-1})^{\mathrm{T}} D(\omega_k) P^{-1}.$$

Поэтому

$$X_{k+1} = (P^{-1})^{\mathrm{T}}[I_k - \alpha_k D(\omega_k)]P^{-1} =$$
$$= (P^{-1})^{\mathrm{T}} D(e - \alpha_k \omega_k) P^{-1},$$

где $e$ есть $n$-мерный вектор, состоящий из единиц. Отсюда сразу следует, что матрица $X_{k+1}$ будет положительно-определенной в том и только том случае, когда

$$e - \alpha_k \omega_k > 0_n. \tag{74}$$

Пусть $\omega_k^{\max}$ – максимальное положительное значение из набора собственных значений $\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n$, и пусть $\hat{\alpha}_k = 1/\omega_k^{\max}$. Если таких значений нет, то полагаем $\hat{\alpha}_k = +\infty$. Неравенство (74) заведомо выполняется, когда $\alpha_k < \hat{\alpha}_k$.

Обратимся теперь к допустимому варианту (16) метода (5), в котором $V(X)$ определяется согласно (15). Имеет место

**Предложение 4.** *Пусть точка $X_k$ является допустимой. Тогда справедливо неравенство $C \bullet \Delta X_k \geq 0$.*

**Доказательство.** Подставляя $\Delta X_k$, получаем

$$C \bullet \Delta X_k = C \bullet \{X_k * [C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}(u(X_k) \otimes I_n)]\} =$$
$$= C \bullet (X_k * C) - \Sigma_{i=1}^{m} u^i(X_k)[C \bullet (X_k * A_i)].$$

Согласно формуле (17),

$$C \bullet (X_k * C) = \bar{C} \bullet \bar{C}, \quad C \bullet (X_k * A_i) = \bar{C} \bullet \bar{A}_i,$$

где $\bar{C} = C X_k^{1/2}$.

Пусть $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} X_k^{1/2}$, и пусть $\bar{\mathcal{A}} \bullet \bar{C}$ есть $m$-мерный вектор с элементами $\bar{A}_i \bullet \bar{C}$, $1 \leq i \leq m$. На основании (10), так как $X_k \in \mathcal{F}_P$, имеем

$$u(X_k) = \Gamma^{-1}(X_k)(\bar{\mathcal{A}} \bullet \bar{C}).$$

Поэтому

$$C \bullet \Delta X_k = \bar{C} \bullet \bar{C} - (\bar{\mathcal{A}} \bullet \bar{C})^{\mathrm{T}} \Gamma^{-1}(X_k)(\bar{\mathcal{A}} \bullet \bar{C}). \tag{75}$$

Имеем также

$$\bar{C} \bullet \bar{C} = \langle \operatorname{vec} \bar{C}, \operatorname{vec} \bar{C} \rangle, \quad \bar{\mathcal{A}} \bullet \bar{C} = \bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}} \operatorname{vec} \bar{C}, \quad \Gamma(X_k) = \bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}} \bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}}, \tag{76}$$

где $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}}$ – матрица размером $m \times n^2$, строками которой являются векторы $\operatorname{vec} \bar{A}_i$, $1 \leq i \leq m$.

Пусть $\bar{\mathcal{P}}_{\mathrm{vec}} = \bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}}(\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}} \bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}}^{\mathrm{T}})^{-1} \bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}}$. Тогда

$$(\bar{C} \bullet \bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}})\Gamma^{-1}(X_k)(\bar{\mathcal{A}} \bullet \bar{C}) = \langle \operatorname{vec} \bar{C}, \bar{\mathcal{P}}_{\mathrm{vec}} \operatorname{vec} \bar{C} \rangle. \tag{77}$$

Матрица $\bar{\mathcal{P}}_{\mathrm{vec}}$ является матрицей ортогонального проектирования на пространство строк матрицы $\bar{\mathcal{A}}_{\mathrm{vec}}$, матрица $I_{n^2} - \bar{\mathcal{P}}_{\mathrm{vec}}$ – матрицей ортогонального проектирования на его дополнение. Так как обе эти симметричные матрицы идемпотентны, то в силу (75)–(77) имеем

$$C \bullet \Delta X_k = \langle \operatorname{vec} \bar{C}, (I_{n^2} - \bar{\mathcal{P}}_{\mathrm{vec}}) \operatorname{vec} \bar{C} \rangle =$$

$$= \langle \operatorname{vec} \bar{C}, (I_{n^2} - \bar{\mathcal{P}}_{\mathrm{vec}})^2 \operatorname{vec} \bar{C} \rangle =$$

$$= \left\| (I_{n^2} - \bar{\mathcal{P}}_{\mathrm{vec}}) \operatorname{vec} \bar{C} \right\|^2 \geq 0.$$

Предложение доказано.

Утверждение предложения 4 позволяет рассмотреть вариант метода (16) с *наискорейшим спуском*, когда шаг $\alpha_k$ выбирается из условия наибольшего убывания значения целевой функции. Пусть $\bar{\alpha}_k$ – максимальный шаг $\alpha$, для которого $X_k - \alpha\Delta X_k \in \mathcal{F}_P$. Тогда, вводя множитель $0 < \nu < 1$ и полагая $\alpha_k = \nu\bar{\alpha}_k$, приходим к тому, что при данном шаге $\alpha_k$ происходит уменьшение значения целевой функции при одновременном сохранении положительной определенности матрицы $X_{k+1}$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Vandenberghe L., Boyd S.* Semidefinite programming // SIAM Rev. 1996. V. 38. P. 49–95.
2. *Todd M.J.* Semidefinite optimization // Acta Numer. 2001. V. 10. P. 515–560.
3. *Laurent M., Rendle F.* Semidefinite programming and integer programming // Discrete Optimizat. Handbooks in Operat. Res. and Management Sci. Amsterdam: Elsevier, 2002.
4. *De Klerk E.* Aspects of semidefinite programming. interior point algorithms and selected applications. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publs, 2004.
5. Handbook of semidefinite programming. *Eds.* H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe. Dordrecht: Kluwer Acad. Publs, 2000.
6. *Alizadeh F.* Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization // SIAM J. Optimizat. 1995. V. 5. P. 13–51.
7. *Monteiro R.D.C.* Primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming // SIAM J. Optimizat. 1997. V. 7. P. 663–678.
8. *Monteiro R.D.C.* First- and second-order methods for semidefinite programming // Math. Program. Ser. B. 2003. V. 97. № 1–2. P. 209–244.
9. *Evtushenko Yu., Zhadan V.* Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming // Comput. Optimizat. and Appl. 1994. V. 3. P. 289–304.
10. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Барьерно-проективные методы решения задач нелинейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 5. С. 668–684.
11. *Бабынин М.С., Жадан В.Г.* Барьерно-проективный метод для полуопределенного программирования // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ РАН, 2007.
12. *Pataki G.* On the rank of extreme matrices in semidefinite programs and multiplicity of optimal eigenvalues // Math. Operat. Res. 1998. V. 23. № 2. P. 339–358.
13. *Pataki G.* The geometry of semidefinite programming // Handbook Semidefinite Programming. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publs, 2002. P. 29–66.
14. *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. Вып. 2(158). С. 101–114.
15. *Alizadeh F., Haeberly J.-P.F., Overton M.L.* Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Math. Program., Ser. B. 1997. V. 7. № 2. P. 129–162.
16. *Магнус Я.Р., Нейдеккер Ч.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002.
17. *Magnus J.R., Neudecker H.* The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM J. Algorithm Disc. Meth. 1980. V. 1. № 4. P. 422–449.
18. *Маркус М., Минк Ч.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
19. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.