Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан, Численные методы решения некоторых задач исследования операций, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1973, том 13, номер 3, 583–598

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 13 Май 1973 Июнь № 3

УДК 518.90

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Ю. Г. ЕВТУШЕНКО, В. Г. ЖАДАН

(Москва)

Предлагаются методы поиска минимума выпуклых функций при ограничениях ресурсного типа на область изменения аргумента. Дано обобщение алгоритмов для минимизации негладких функций. Методы используются для решения непрерывных игр и нахождения седловых точек. Приведены некоторые результаты численных расчетов.

§ 1. Алгоритмы отыскания минимума выпуклых функций

Во многих задачах исследования операций возникает необходимость построения численных методов решения следующей задачи: найти

$$\min_{z\in Z} F(z), \text{ где } Z=\left\{z:\ \sum_{i=1}^{n} z^i = R, z\geqslant 0\right\}; \tag{1.1}$$

$F(z)$ — функция n-мерного вектора $z=\{z^1, z^2, \ldots, z^n\}\in E_n$; E_n есть n-мерное евклидово пространство; R — некоторое положительное число; неравенство $z\geqslant 0$ означает, что все $z^i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Предположим, что $F(z)$ — выпуклая (вниз), дифференцируемая функция и ее градиент на Z и некоторой окрестности множества Z удовлетворяет условию Липшица с константой M. Тогда для любых $z_1, z_2\in Z$ имеем

$$\begin{gathered}(\nabla F(z_1), z_2-z_1)\leqslant F(z_2)-F(z_1),\\ \|\nabla F(z_2)-\nabla F(z_1)\|\leqslant M\|z_2-z_1\|.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь (a, b) — скалярное произведение векторов a и b, $\|a\|=\sqrt{(a, a)}$, $\nabla F= \{\partial F/\partial z^1, \partial F/\partial z^2, \ldots, \partial F/\partial z^n\}$ — вектор градиента функции F.

Для решения поставленной задачи предлагается отыскивать предельные точки траекторий $z(t)$ при $t\to\infty$ следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz^i(t)}{dt}=z^i(t)\left[\frac{1}{R}(\nabla F(z(t)), z(t))-\nabla F_i(z(t))\right]=w_i(z), \tag{1.3}$$

где $i=1, 2, \ldots, n$, $z(0)=z_0\in Z$.

Из условия (1.2) следует, что правые части системы (1.3) удовлетворяют условию Липшица на Z и на некоторой его окрестности. Поэтому решение задачи Коши для (1.3) существует и единственно для всех $z_0 \in Z$.

Аналогично выглядит дискретный вариант метода

$$(1.4) \qquad z_{s+1}^i = z_s^i + \alpha w_i(z_s), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$, α — некоторый положительный коэффициент.

Введем в рассмотрение множества

$$\omega = \{\tilde{z} : \tilde{z} \in Z, \ \min_{z \in Z} F(z) = F(\tilde{z})\},$$

$$\sigma = \{\tilde{z}: \ \tilde{z} \in Z, w_i(\tilde{z}) = 0, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Здесь ω — множество решений задачи (1.1), σ — совокупность особых точек или, что то же самое, положений равновесия для системы (1.3). В теории итеративных процессов множество σ обычно называют неподвижными точками преобразования (1.4). В дальнейшем, чтобы объединить утверждения относительно методов (1.3) и (1.4), будем σ называть множеством положений равновесия.

Всюду в дальнейшем нас будут интересовать точки, лежащие на плоскости $\sum_{i=1}^{n} z^i = R$. Поэтому граничными точками множества Z будем называть такие векторы $z \in Z$, у которых хотя бы одна координата равна нулю. Векторы $z \in Z$, не имеющие нулевых координат, назовем внутренними точками множества Z.

Из теоремы Куна — Таккера следует, что для того, чтобы точка z_* была решением задачи (1.1), $z_* \in \omega$, необходимо, а в случае, если z_* — внутренняя точка Z, то и достаточно, чтобы $z_* \in \sigma$. Отсюда следует, что $\omega \subset \sigma$ и все точки множества $\sigma \setminus \omega$ принадлежат границе множества Z.

Как известно [1], множество ω выпуклое, компактное и не пустое. Если функция $F(z)$ строго выпуклая, тогда ω состоит из единственной точки z_*.

Сходимость методов (1.3) и (1.4) будет следовать из доказанной ниже с помощью прямого метода Ляпунова асимптотической устойчивости множества ω для этих систем. При рассмотрении дискретного варианта метода будут использованы известные обобщения определений и теорем Ляпунова для такого рода систем (см., например, [2, 3]).

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ — строго выпуклая, дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию* (1.2), *тогда для решений системы* (1.3) *и при $\alpha < \bar{\alpha}$ для решений* (1.4) *верны утверждения* *):

1) *решение задачи* (1.1) — *точка z_* является асимптотически устойчивым положением равновесия;*

2) *все точки положения равновесия, не совпадающие с z_*, неустойчивы;*

3) *функции $F(z(t))$ и $F(z_s)$ строго монотонно убывают при $t \geqslant 0$ и $s = 0, 1, 2, \ldots$;*

*) Оценка для величины $\bar{\alpha}$ будет получена в процессе доказательства.

4) *решения* $z(t)$ *и* z_s *сходятся к* z_* *для любых начальных точек* $z_0 \in Z$, *лежащих внутри неотрицательного октанта* (*т. е. если* $z_0 > 0$).

Доказательство. Рассмотрим вначале непрерывный вариант метода. Обозначим

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} z^i(t) - R,$$

где $z(t)$ — некоторое решение (1.3). Дифференцируя $p(t)$ в силу (1.3), получим, что $dp/dt = p(\nabla F(z), z)/R$. Поэтому если $z(0) = z_0 \in Z$, то $p(0) = 0$, $p(t) \equiv 0$ и $\sum_{i=1}^{n} z^i(t) \equiv R$ вдоль траектории (1.3). Условие $z^i(t) \geqslant 0$ при $z_0 \in Z$ также выполняется для системы (1.3). Это следует из единственности решения и из того свойства правых частей, что если $z^i(t') = 0$, то $z^i(t) \equiv 0$ при $t \geqslant t'$. Таким образом, если $z_0 \in Z$, то $z(t) \in Z$ для всех $t \geqslant 0$, причем когда z_0 — не граничная точка множества Z, то $z(t)$ также не является граничной точкой на любом конечном интервале $[0, t]$. Отсюда заключаем, что Z является инвариантным множеством для системы (1.3).

Если $\bar{z} \in \sigma$, то никакая траектория системы (1.3), отличная от $z(t) \equiv \bar{z}$, не может при продолжении ($t > 0$) достигнуть точки $\bar{z}$ в конечный момент t. Действительно, если бы это имело место, то через эту точку проходили бы две траектории, что невозможно.

Докажем, что точка z_* является асимптотически устойчивым положением равновесия. В качестве функции Ляпунова возьмем положительно определенную на Z функцию, равную разности $F(z) - F(z_*)$, где $z_* \in \omega$.

Функция $F(z)$ в процессе интегрирования системы (1.3) строго монотонно убывает. Действительно, дифференцируя в силу уравнений (1.3), имеем

$$\frac{dF}{dt} = (\nabla F(z), w(z)) = \frac{1}{R}(\nabla F(z), z)^2 - \sum_{i=1}^{n} z^i \nabla F_i^2(z).$$

Учитывая, что все координаты $z^i \geqslant 0$, представим $(\nabla F(z), z)$ в виде скалярного произведения векторов $a = \{(\partial F/\partial z^1)\sqrt{z^1}, (\partial F/\partial z^2)\sqrt{z^2}, \ldots$ $\ldots, (\partial F/\partial z^n)\sqrt{z^n}\}$ и $b = \{\sqrt{z^1}, \sqrt{z^2}, \ldots, \sqrt{z^n}\}$. Применяя, далее, неравенство Коши — Буняковского и учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} z^i = R$, получим

$$(\nabla F, z)^2 \leqslant R \sum_{i=1}^{n} z^i \nabla F_i^2.$$

Поэтому $dF/dt \leqslant 0$, причем когда $\|\nabla F\| \neq 0$, то $dF/dt = 0$ в том и только том случае, если векторы a и b коллинеарны. Из вида правых частей системы (1.3) следует, что это возможно только в точках $z \in \sigma$. Случай, когда $\|\nabla F(z)\| = 0$ при $z \neq z_*$, невозможен.

Действительно, из условия строгой выпуклости функции $F(z)$ следует

$$0 < F(z) - F(z_*) < (\nabla F(z), z - z_*) \leqslant \|\nabla F(z)\| \|z - z_*\|,$$

откуда видно, что всегда при $z \neq z_*$ норма вектора ∇F строго больше нуля. Мы получили, что $dF(z(t))/dt < 0$, если $z(t) \in Z \setminus \sigma$, т. е. полная производная функции Ляпунова в силу (1.3) отрицательно определена. Поэтому точка z_* является асимптотически устойчивым положением равновесия для (1.3).

Покажем, что любое другое положение равновесия $\bar{z}$, не совпадающее с z_*, неустойчиво для системы (1.3). Составим функцию $V(z) = F(z) - F(\bar{z})$. В силу выпуклости $F(z)$ и выпуклости множества Z на отрезке $(1-\lambda)\bar{z} + \lambda z_*$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, функция $V(z)$ монотонно убывает от нуля (при $\lambda = 0$) до $F(z_*) - F(\bar{z})$ (при $\lambda = 1$), следовательно, V не является знакоположительной. Вместе с тем в некоторой окрестности точки $\bar{z}$ эта функция имеет отрицательно определенную производную по времени. Согласно теореме Ляпунова о неустойчивости, положение равновесия $\bar{z}$ неустойчиво. Кроме того нетрудно показать, что найдется хотя бы одна координата, по которой система (1.3) в $\bar{z}$ неустойчива [4].

Докажем теперь, что траектории (1.3) сходятся к точке z_* в большом (т. е. для любых $z_0 \in Z$, $z_0 > 0$). Для этого достаточно доказать асимптотическую устойчивость z_* в большом. Так как траектория (1.3), начинающаяся из $z_0 \in Z$, продолжима при $t \to \infty$ и не выходит при $t > 0$ за пределы Z, то множество ω-предельных точек $\Omega(z_0)$ для z_0 не пусто [5]. Отметим, что $\Omega(z_0)$ замкнуто, связно и является инвариантным множеством.

Покажем, что $\Omega(z_0) \subset \sigma$. Предположим, что $z' \in \Omega(z_0)$ и $z' \bar{\in} \sigma$. Проведем через z' траекторию $z(z', t)$, тогда для любого конечного t имеем $z(z', t) \bar{\in} \sigma$. Все точки этой траектории также являются ω-предельными для z_0. В силу известных теорем теории устойчивости $F(z(z', t)) \equiv F(z')$. Поэтому $dF(z(z', t))/dt \equiv 0$, а это возможно лишь при условии, что $z(z', t) \in \sigma$. Следовательно, $z' \in \sigma$.

Так как $F(z)$ строго выпукла, то σ содержит только конечное число точек. Поэтому $\Omega(z_0)$ состоит из одной единственной точки $\tilde{z}$, к которой $z(z_0, t)$ приближается при $t \to \infty$. Докажем, что $\tilde{z} = z_*$. Возможны два случая. Если $\tilde{z}$ — внутренняя точка Z, то, очевидно, $\tilde{z} = z_*$. Предположим, что $\tilde{z}$ принадлежит границе Z. Представим (1.3) в виде

$$z^i(t) = z_0^i \exp\left(\int_0^t f_i(\tau)\,d\tau\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.5}$$

где $f_i(\tau) = (\nabla F(z(\tau)), z(\tau))/R - \nabla F_i(z(\tau))$. При $t \to \infty$ траектория $z(z_0, t) \to \tilde{z}$, поэтому $f_i(t) \to \bar{f}_i = f_i(\tilde{z})$. Покажем, что все $\bar{f}_i \leqslant 0$, причем $\bar{f}_i = 0$, если $\tilde{z}^i > 0$. Пусть $\bar{f}_j = \varepsilon_j > 0$ для некоторого индекса j. Так как $f_j(t) \to \bar{f}_j$, то найдется достаточно большое T такое, что $|f_j(t) - \varepsilon_j| \leqslant \varepsilon_j / 2$ при $t \geqslant T$. Отсюда получаем неравенство

$$\int_0^t f_j(\tau)\,d\tau \geqslant \int_0^T f_j(\tau)\,d\tau + \frac{\varepsilon_j}{2}(t - T),$$

из которого вытекает, что $\int\limits_0^t f_j(\tau)\,d\tau \to +\infty$, когда $t \to \infty$. Однако из (1.5) видно, что это невозможно, так как $z_0^j > 0$ и $\tilde{z} \in Z$. Нам остается показать, что $\bar{f}_i = 0$ при $\tilde{z}^i > 0$. Но это следует из $\tilde{z} \in \sigma$. Таким образом, установлено, что существует константа $\beta = (\nabla F(\tilde{z}),\ \tilde{z})\,/\,R$, для которой $\nabla F_i(\tilde{z}) \geqslant \beta$, причем $\nabla F_i(\tilde{z}) = \beta$, если $\tilde{z}^i > 0$. Так как $F(z)$ — выпуклая функция, то это означает, что в точке $\tilde{z}$ выполнены достаточные условия теоремы Куна — Таккера и, следовательно, $\tilde{z}$ совпадает с z_*.

Перейдем к изучению дискретного варианта (1.4). Складывая координаты вектора z_s, путем индукции убеждаемся, что если $z_0 \in Z$, то на каждом шаге итеративного процесса $\sum\limits_{i=1}^{n} z_s^i = R$. Обозначим через r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, вектор с координатами $r_i^j = 0$ при $j \neq i$ и $r_i^i = R$. Тогда $w_i(z_s) = z_s^i(\nabla F(z_s),\ z_s - r_i)$, и из вида правых частей (1.4) получаем, что при $z_s \in Z$, $z_s > 0$ и $\alpha < \min\limits_i [R\,/\,|(\nabla F(z_s),\ z_s - r_i)|]$ точка $z_{s+1} > 0$. Так как для любого $z \in Z$ и произвольного i

$$\frac{R}{|(\nabla F(z), z - r_i)|} \geqslant \frac{R}{\|\nabla F(z)\|\|z - r_i\|} \geqslant \frac{1}{\max\limits_{z \in Z} \|\nabla F(z)\| \sqrt{2}} = \alpha^{(1)},$$

то отсюда следует, что если в процессе (1.4) взять $\alpha < \alpha^{(1)}$ и $z_0 \in Z$, $z_0 > 0$, то на каждом шаге $z_s \in Z$, причем $z_s > 0$.

Покажем, что при достаточно малых значениях α функция $F(z_s)$ монотонно убывает в процессе итераций (1.4). Это утверждение интуитивно понятно: при $\alpha \to 0$ решение (1.4) стремится к решению системы (1.3) и свойство монотонного убывания функции $F(z_s)$ должно существовать. Докажем это строго и одновременно уточним диапазон возможных значений коэффициента α, при которых метод (1.4) сходится.

Воспользуемся известной формулой, связывающей значение функции с ее градиентом:

$$F(z_{s+1}) - F(z_s) = \int\limits_0^1 (\nabla F(z_s + t(z_{s+1} - z_s)), z_{s+1} - z_s)\,dt.$$

Подставим в эту формулу выражение (1.4), воспользуемся (1.2) и получим

$$F(z_{s+1}) - F(z_s) = \alpha \int\limits_0^1 (\nabla F(z_s + \alpha t w(z_s)), w(z_s))\,dt =$$

$$= \alpha(\nabla F(z_s), w(z_s)) + \alpha \int\limits_0^1 (\nabla F(z_s + \alpha t w(z_s)) - \nabla F(z_s), w(z_s))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(\nabla F(z_s), w(z_s)) + \alpha \int_0^1 (\|\nabla F(z_s + \alpha t w(z_s)) - \nabla F(z_s)\| \|w(z_s)\|) dt \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(\nabla F(z_s), w(z_s)) + \frac{\alpha^2 M}{2} \|w(z_s)\|^2 \leqslant \alpha \|w(z_s)\|^2 \left(-d(z_s) + \frac{\alpha M}{2} \right)$$

где $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, $d(z_s) = -(\nabla F(z_s), w(z_s)) / \|w(z_s)\|$.

В силу доказанного выше $(\nabla F(z_s), w(z_s)) \leqslant 0$, поэтому $d(z_s) \geqslant 0$.

Оценим величину $d(z_s)$. Так как все $z^i \leqslant R$, то для любого $z \in Z$

$$d(z) = R \sum_{i=1}^n \nabla F_i z^i [R \nabla F_i - (\nabla F, z)] \left\{ \sum_{i=1}^n (z^i)^2 [R \nabla F_i - \right.$$

$$\left. - (\nabla F, z)]^2 \right\}^{-1} \geqslant \sum_{i=1}^n \nabla F_i z^i [R \nabla F_i - (\nabla F, z)] \left\{ \sum_{i=1}^n z^i [R \nabla F_i - \right.$$

$$\left. - (\nabla F, z)]^2 \right\}^{-1} = \left[R \sum_{i=1}^n z^i \nabla F_i^2 - (\nabla F, z)^2 \right] \left[R^2 \sum_{i=1}^n z^i \nabla F_i^2 - \right.$$

$$\left. - 2R(\nabla F, z)^2 + R(\nabla F, z)^2 \right]^{-1} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, получим, что $F(z_{s+1}) - F(z_s) < 0$ при $\alpha < \alpha^{(2)} = 2/MR$.

Итак, если в алгоритме (1.4) взять $0 < \alpha < \bar{\alpha} = \min\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\}$, то на каждом шаге итеративного процесса функция $F(z_s)$ будет монотонно убывать и вектор $z_s \in Z$. Следовательно, при $\alpha < \bar{\alpha}$ положительно определенная функция $F(z) - F(z_*)$ имеет отрицательно определенную первую разность и, согласно модифицированной теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости для разностных уравнений [3], положение равновесия z_* является асимптотически устойчивым. Как и в случае (1.3), здесь можно доказать, что все остальные положения равновесия неустойчивы и процесс (1.4) сходится к z_* для любых начальных точек $z_0 \in Z$, лежащих внутри неотрицательного октанта.

Замечание 1. Теорема 1 обобщается на тот случай, когда функция $F(z)$ является просто выпуклой (а не строго выпуклой). В этом случае вместо асимптотической устойчивости точки z_* следует доказать асимптотическую устойчивость множества ω. Следуя [5], множество ω называем асимптотически устойчивым для систем (1.3), (1.4), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что если расстояние между z_0 и ω будет $\rho(z_0, \omega) < \delta$, то $\varepsilon \geqslant \rho(z(t), \omega) \to 0$ при $0 \leqslant t \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть $F(z)$ — выпуклая дифференцируемая функция, удовлетворяющая* (1.2); *тогда для решений системы* (1.2) *и для* $\alpha < \bar{\alpha}$ *имеем*:

1) *множество ω асимптотически устойчиво*;
2) *множество $\sigma \setminus \omega$ неустойчиво*;
3) *функции $F(z(t))$, $F(z_s)$ строго монотонно убывают*;
4) *решения $z(t)$ и z_s сходятся к множеству ω для любых $0 < z_0 \in Z$.*

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет предыдущее.

Замечания. 2. Область возможных начальных значений вектора z_0 можно несколько расширить по сравнению с условиями теоремы. Действительно, если в алгоритме (1.3) положить некоторое $z_0^i = 0$, то $z^i(t) \equiv 0$ и алгоритм (1.3) сходится к решению задачи об отыскании минимума $F(z)$ на множестве

$$\left\{z\colon \sum_{j=1}^{n} z^j = R,\ z^j \geqslant 0,\ j \neq i,\ z^i = 0\right\}.$$

Поэтому если заранее известно, что некоторые координаты вектора z_* равны нулю, то следует положить нулю соответствующие координаты вектора z_0.

3. Если в методе (1.3) изменять t от 0 до $-\infty$, а в алгоритме (1.4) положить $\alpha < 0$ и считать, что функция $F(z)$ вогнутая, тогда методы будут сходиться к решению задачи об отыскании $\max F(z)$ на множестве Z.

4. Напомним, что Z является инвариантным множеством для (1.3). Поэтому, учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} z^i(t) \equiv R$, можно понизить порядок системы на одну единицу либо использовать это тождество для контроля точности. Аналогично можно поступить и в дискретном случае (1.4).

5. Возможен вариант метода (1.4), аналогичный методу скорейшего спуска. На каждом s-м шаге величина коэффициента α выбирается из условия минимизации значения функции $F(z_s + \alpha w(z_s))$ при условии $z_{s+1} \geqslant 0$. Ниже будут приведены результаты расчетов при таком построении метода.

Рассмотрим некоторые обобщения предложенных выше методов.

1. Алгоритмы (1.3), (1.4) можно применить для нахождения минимума функции $F(z)$ на симплексе

$$Z_1 = \left\{z : z \in E_n,\ z \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} z^i \leqslant R\right\}.$$

В этом случае в качестве начального приближения z_0 следует взять любую внутреннюю точку множества Z_1 $\left(z_0 > 0,\ \sum_{i=1}^{n} z_0^i < R\right)$.

2. Задача об отыскании минимума функции $F(z)$ на множестве $Z_2 = \{z\colon z \in E_n,\ (z, c) = R,\ z \geqslant 0,\ c > 0\}$ решается аналогично. В частности, один из возможных вариантов метода (1.3) имеет вид

$$\frac{dz^i}{dt} = z^i \left[\frac{1}{R}(\nabla F, z) - \frac{\nabla F_i}{c^i}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Изложенные выше численные методы были использованы для решения следующих задач.

Задача 1. В E_n задан конечный набор точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Обозначим через G выпуклую оболочку, натянутую на эти точки:

$$G = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{m} z^i x_i \,|\, z \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} z^i = 1\right\}.$$

Требуется найти точку $x_* \in G$, ближайшую к началу координат. Задача сводится к определению m-мерного вектора z_* из условия

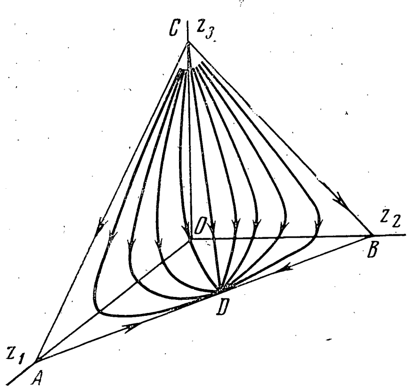
$$\rho(z_*) = \min_{z\in Z} \rho(z) = \min_{z\in Z} \left\| \sum_{i=1}^{m} z^i x_i \right\|,$$

где

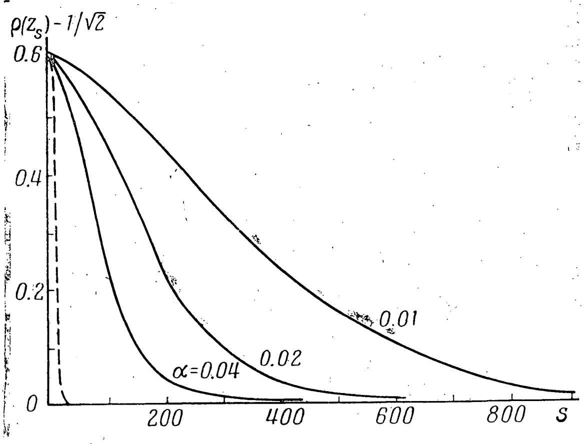
$$Z = \left\{ z : z \in E_m,\ z \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} z^i = 1 \right\}.$$

В [6] для решения этой задачи был предложен специальный алгоритм.

Чтобы пояснить особенности работы метода (1.3), рассмотрим простейший вариант задачи, имеющий очевидное решение. Пусть $m = 3$, $x_1 = \{1, 0\}$, $x_2 = \{0, 1\}$, $x_3 = \{1, 1\}$. Ясно, что $z_* = \{1/2, 1/2, 0\}$ и $\rho(z_*) = 1/\sqrt{2}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 показан качественный характер интегральных кривых системы (1.3) для разных значений z_0. Точки A, B, C, D, из которых состоит множество σ, имеют в 3-мерном пространстве $0z_1z_2z_3$ координаты, соответственно, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1/2, 1/2, 0)$. Из фигуры видно, что если начальное приближение взято внутри области Z, то все интегральные кривые сходятся к точке D — решению задачи.

На фиг. 2 показан характер изменения величины $\rho(z_s) - 1/\sqrt{2}$ в зависимости от номера итераций s для различных значений коэффициента α. Скорость сходимости метода растет с увеличением α, однако брать большие значения α нельзя, так как при невыполнении ограничений на α либо z_s может выйти из множества Z, либо нарушается сходимость метода. Штриховой линией показано изменение величины $\rho(z_s) - 1/\sqrt{2}$ при использовании варианта скорейшего спуска. Величина α отыскивалась с помощью удвоенного изменения шага.

Задача 2. В E_n заданы совокупности векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$. Требуется определить наименьшее расстояние от выпуклой оболочки, натянутой на точки x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, до конуса, порожденного векторами y_j, $j = 1, 2, \ldots, l$.

В этом случае следует найти векторы $z_* = \{z_*^1, \ldots, z_*^k\}$ и $u_* = \{u_*^1, \ldots, u_*^l\}$ такие, что

$$\rho(z_*, u_*) = \min_{z\in Z,\ u\in U} \rho(z, u) = \min_{z\in Z,\ u\in U} \left\| \sum_{i=1}^{k} z^i x_i - \sum_{j=1}^{l} u^j y_j \right\|.$$

Здесь

$$Z = \left\{ z : z \in E_k,\ z \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} z^i = 1 \right\},\quad U = \{u : u \in E_l,\ u \geqslant 0\}.$$

При отыскании минимума функции ρ по u использовался метод, предложенный И. И. Дикиным, в котором

$$\frac{du^j}{dt} = -u^j \frac{\partial \rho}{\partial u^j},\qquad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Многочисленные расчеты этих и ряда других задач, проведенные в ВЦ АН СССР, показали эффективность предложенных методов.

§ 2. Метод минимизации негладких функций

В дальнейшем, в § 3, нам потребуется модификация метода (1.4), пригодная для минимизации негладкой выпуклой функции $F(z)$ на множестве Z. Предложенный ниже алгоритм и доказательство его сходимости близки к методу обобщенного градиентного спуска. Этот метод впервые был предложен в [7], его сходимость доказана в [8]. Так же как и в методе обобщенного градиентного спуска, в приведенном ниже алгоритме вместо вектора градиента $\nabla F(z)$ используется любой из опорных функционалов функции $F(z)$. В процессе счета минимизируемая функция $F(z)$, вообще говоря, не убывает монотонно и сходимость метода обеспечивается специальным выбором зависимости шага α от номера итерации s.

Пусть задано начальное приближение $z_0 \in Z$. Для решения задачи (1.1) построим последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_s, \ldots$ по рекуррентным формулам

$$z_{s+1}^i = z_s^i \left[1 + \alpha_s \left(\frac{1}{R}(l_s, z_s) - l_s^i \right) \right],\qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

где l_s — произвольный вектор из множества опорных функционалов $L(z_s)$ функции $F(z)$ в точке z_s:

$$L(z_s) = \{l\colon l \in E_n,\ (l, z - z_s) \leqslant F(z) - F(z_s)\ \forall z \in Z\}.$$

Множество $L(z)$ является замкнутым, ограниченным и выпуклым. Предположим, что для всех $z \in Z$

$$\max_{l\in L(z)} \|l\| = \bar{l}(z) \leqslant C < \infty. \tag{2.2}$$

Зависимость $\alpha(s)$ выберем таким образом, чтобы

$$\alpha_s > 0,\qquad \lim_{s\to\infty} \alpha_s = 0,\qquad \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s = \infty. \tag{2.3}$$

Итеративный процесс (2.1) построен так, что на каждом шаге $\sum_{i=1}^{n} z_s^i = R$, причем если z_0 — внутренняя точка Z, то при

$$(2.4) \qquad \alpha_s \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2C}}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

всегда $z_s > 0$ для любого конечного номера s. Следовательно, в процессе счета все $z_s \in Z$.

Теорема 3. *Пусть $F(z)$ — строго выпуклая функция и пусть для всех $z \in Z$ выполнено* (2.2). *Предположим также, что зависимость $\alpha(s)$ удовлетворяет условиям* (2.3), (2.4). *Тогда для любого начального приближения z_0, лежащего внутри области Z, имеем*

$$\lim_{s\to\infty} \|z_s - z_*\| = 0, \qquad \lim_{s\to\infty} F(z_s) = \min_{z\in Z} F(z) = F(z_*),$$

где z_* — единственное решение (1.1).

Доказательство. Если на некотором s-м шаге все координаты вектора l_s равны между собой $l_s^1 = l_s^2 = \ldots = l_s^n$, то $(l_s, z - z_s) = 0$ для любого $z \in Z$ и, следовательно, $l_s \in \Gamma^*(z_s)$, где $\Gamma^*(z_s)$ — конус, сопряженный к конусу возможных направлений в точке z_s. При этом процесс прекращается, точка z_s является решением поставленной задачи, так как выполнены необходимые и достаточные условия экстремума $\Gamma^*(z_s) \cap L(z_s) \neq \varnothing$. Отбросим этот случай и в дальнейшем будем предполагать, что последовательность $\{z_s\}$ бесконечна.

Обозначим через I_1 множество индексов, для которых $z_*^i = 0$, через I_2 — множество оставшихся индексов. Положим $\bar{Z} = \{z\colon z \in Z,\ z^i \geqslant 0$, если $i \in I_1$, $z^i > 0$, если $i \in I_2\}$. Введем в рассмотрение строго выпуклую на множестве $\bar{Z}$ функцию

$$V(z) = \sum_{i=1}^{n} z_*^i (\ln z_*^i - \ln z^i).$$

Используя неравенство между арифметическим и геометрическим средним (см. [9]), нетрудно показать, что $V(z) \geqslant 0$ для всех $z \in \bar{Z}$, причем равенство возможно только при $z = z_*$.

Определим множества

$$D(c) = \{z\colon z \in Z,\ \|z - z_*\| \leqslant c\},$$

$$\bar{D}(c) = \{z\colon z \in \bar{Z},\ \|z - z_*\| = c\},$$

$$Q(c) = \{z\colon z \in \bar{Z},\ V(z) \leqslant c\}, \qquad \bar{Q}(c) = \{z\colon z \in \bar{Z},\ V(z) = c\},$$

$$B(c) = \{z\colon z \in Z, F(z) - F(z_*) \leqslant c\},$$

где c — положительное число.

Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Введем обозначения

$$\gamma = \min_{z\in \bar{D}(\varepsilon)} V(z) \text{ и } \delta = \min_{z\in \bar{Q}(\gamma/2)} F(z) - F(z_*), \qquad \gamma > 0, \qquad \delta > 0.$$

Множества $D(\varepsilon)$, $Q(\gamma/2)$ и $B(\delta)$ выпуклые, замкнутые и такие, что имеют место включения $B(\delta)\subseteq Q(\gamma/2)\subset D(\varepsilon)$. Действительно, докажем, например, последнее.

Предположим противное: пусть $z_1\in Q(\gamma/2)$ и $z_1\overline{\in}D(\varepsilon)$. Из определений множеств $Q(\gamma/2)$ и $D(\varepsilon)$ вытекает, что $z_*\in Q(\gamma/2)$ и $z_*\in D(\varepsilon)$. Соединим точки z_1 и z_* отрезком $\lambda z_1+(1-\lambda)z_*$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Так как $z_*\in D(\varepsilon)$, а $z_1\overline{\in}D(\varepsilon)$, то найдется такое $\bar\lambda$, при котором $\bar z=\bar\lambda z_1+(1-\bar\lambda)z_*\in\bar D(\varepsilon)$. Поскольку $V(z)$ — строго выпуклая функция, то справедливо неравенство

$$V(\bar z)<\bar\lambda V(z_1)+(1-\bar\lambda)V(z_*)=\bar\lambda V(z_1)\leqslant\gamma/2.$$

Мы пришли к противоречию.

Покажем теперь существование такого номера N_ε, что $z_s\in B(\delta)$ при $s=N_\varepsilon$ и $z_s\in D(\varepsilon)$ при $s>N_\varepsilon$. Через W_s обозначим вектор, у которого каждая i-я координата есть $(l_s,z_s)/R-l_s^i$. Тогда изменение функции V за один шаг итеративного процесса (2.1) будет равно

$$\Delta V_s=V(z_{s+1})-V(z_s)=-\sum_{i=1}^n z_*^i\ln(1+\alpha_sW_s^i).$$

Используя разложение в ряд Тейлора, представим ΔV_s в виде

$$\Delta V_s=\alpha_s\left[-\sum_{i=1}^n z_*^iW_s^i+\frac{\alpha_s}{2}\sum_{i=1}\frac{z_*^i(W_s^i)^2}{(1+\alpha_s\Theta_s^iW_s^i)^2}\right],$$

где $0\leqslant\Theta_s^i\leqslant 1$, $i=1,2,\ldots,n$.

Так как $\alpha_s\to 0$, то найдется такое S_ε, что $\alpha_s<\min\{\gamma/4C\sqrt{2},\ \delta/8C^2\}$ при $s\geqslant S_\varepsilon$. Отсюда из неравенств (2.2), (2.4) легко получить, что если $s\geqslant S_\varepsilon$, то

$$\Delta V_s<\frac{\gamma}{2},\qquad \frac{\alpha_s}{2}\sum_{i=1}^n\frac{z_*^i(W_s^i)^2}{(1+\alpha_s\Theta_s^iW_s^i)^2}<\frac{\delta}{2}. \tag{2.5}$$

Выберем $N_\varepsilon\geqslant S_\varepsilon$ настолько большим, что

$$-\sum_{i=1}^n z_*^iW_s^i+\frac{\alpha_s}{2}\sum_{i=1}^n\frac{z_*^i(W_s^i)^2}{(1+\alpha_s\Theta_s^iW_s^i)^2}>-\frac{\delta}{2}. \tag{2.6}$$

Такое N_ε обязательно найдется, так как в противном случае для всех $s\geqslant S_\varepsilon$ будут выполнены неравенства

$$-\sum_{i=1}^n z_*^iW_s^i+\frac{\alpha_s}{2}\sum_{i=1}^n\frac{z_*^i(W_s^i)^2}{(1+\alpha_s\Theta_s^iW_s^i)^2}\leqslant-\frac{\delta}{2}. \tag{2.7}$$

Суммируя их от S_ε до $S_\varepsilon + m - 1$, где m — некоторое целое число, получим

(2.8) $$V(z_{S_\varepsilon+m}) - V(z_{S_\varepsilon}) = \sum_{s=S_\varepsilon}^{S_\varepsilon+m-1} \Delta V_s \leqslant -\frac{\delta}{2} \sum_{s=S_\varepsilon}^{S_\varepsilon+m-1} \alpha_s.$$

В силу (2.3), при $m \to \infty$ правая часть (2.8) неограниченно убывает, что противоречит неотрицательности функции $V(z)$.

Теперь при $s = N_\varepsilon$ из неравенств (2.5) и (2.6) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} z_*^i W_s^i = (l_s, z_s - z_*) < \delta.$$

Поскольку $l_s \in L(z_s)$, то отсюда получим, что

$$F(z_s) - F(z_*) \leqslant (l_s, z_s - z_*) < \delta.$$

Следовательно, если $s = N_\varepsilon$, то $z_s \in B(\delta)$. При $s > N_\varepsilon$ могут быть две возможности: либо выполнено неравенство (2.7), из которого вытекает, что $V(z_{s+1}) < V(z_s)$, а значит, $z_{s+1} \in Q(\gamma)$, если $z_s \in Q(\gamma)$; либо справедливо (2.6), но тогда, как показано выше, $z_s \in B(\delta) \subset Q(\gamma/2)$, и, учитывая (2.6), получаем, что $z_{s+1} \in Q(\gamma)$. В обоих случаях для $s \geqslant N_\varepsilon$ будет $z_s \in D(\varepsilon)$.

Так как ε произвольно, то это и доказывает, что $\lim_{s\to\infty} \|z_s - z_*\| = 0$. Из непрерывности функции $F(z)$ следует $\lim_{s\to\infty} F(z_s) = F(z_*)$.

§ 3. Численный метод решения игровых задач

Пусть $K(x, y)$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица с константой Λ на прямом произведении компактных множеств X и Y, $x \in X \subset E_n$, $y \in Y \subset E_m$; H и P — множества вероятностных мер μ и ν, определенных на σ-алгебре подмножеств множеств X и Y соответственно.

Решение антагонистической игры двух лиц с бесконечным множеством состояний сводится к нахождению пары мер μ_*, ν_* такой, что для любых $\mu \in H$, $\nu \in P$ имеют место неравенства

(3.1) $$J(\mu, \nu_*) \leqslant J(\mu_*, \nu_*) \leqslant J(\mu_*, \nu),$$

где

$$J(\mu, \nu) = \int_X \int_Y K(x, y)\, \mu(dx)\, \nu(dy), \qquad J_* = J(\mu_*, \nu_*).$$

В теории игр [10, 11] показывается, что при сделанных предположениях выполнены необходимые и достаточные условия существования седловой точки у функционала J:

$$\min_{\nu\in P} \max_{\mu\in H} J(\mu, \nu) = \max_{\mu\in H} \min_{\nu\in P} J(\mu, \nu) = J_*,$$

т. е. решение (3.1) существует. При этом всякая пара μ_*, ν_* называется оптимальными смешанными стратегиями, J_* — ценой игры.

Численное решение (3.1) оказывается весьма сложной задачей. В настоящее время разработаны лишь алгоритмы решения матричных игр. Укажем на методы Брауна, Неймана и многочисленные их модификации [11]. Некоторые подходы к решению непрерывных игр приведены в [12, 13], однако предложенные в них алгоритмы оказываются весьма громоздкими в случае, когда x и y — многомерные векторы.

Значительно проще, чем (3.1), задачи об отыскании наилучших гарантированных оценок

$$v_1 = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} K(x, y), \qquad v_2 = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} K(x, y). \tag{3.2}$$

Для них созданы алгоритмы, которые можно использовать для векторов x и y довольно большой размерности (см., например, [14, 15]).

Приведенная ниже теорема позволяет в некотором смысле приблизить (3.1) к задачам (3.2). Во всяком случае, для определения J_* вместо двух мер μ_*, ν_* достаточно найти хотя бы одну. Такой подход будет особенно эффективен, когда один из векторов x или y скаляр. Эта теорема фактически является простым следствием известных результатов из теории игр, однако, чтобы изложение было последовательное, приведем ее формулировку.

Теорема 4. *Для того чтобы меры μ_* и ν_* были решениями* (3.1), *необходимо и достаточно, чтобы они были решениями, соответственно, задач*

$$J_1 = \max_{\mu\in H} \min_{y\in Y} \int_X K(x, y)\,\mu(dx), \qquad J_2 = \min_{\nu\in P} \max_{x\in X} \int_Y K(x, y)\,\nu(dy), \tag{3.3}$$

причем

$$v_1 \leqslant J_1 = J_* = J_2 \leqslant v_2.$$

Обсудим вопрос о численном решении (3.3). Ограничимся рассмотрением лишь второй задачи. Отыскание функции $g(\nu) = \max_{x\in X} \int_Y K(x, y)\,\nu(dy)$ назовем внутренней задачей, нахождение $J_* = \min_{\nu\in P} g(\nu)$ — внешней.

При численной реализации меру ν придется аппроксимировать атомической, сосредоточенной в узлах равномерной сетки, покрывающей множество Y с шагом, равным h. В этом случае с погрешностью $\sim\Lambda h$ значение J_* можно найти, решая следующую минимаксную задачу:

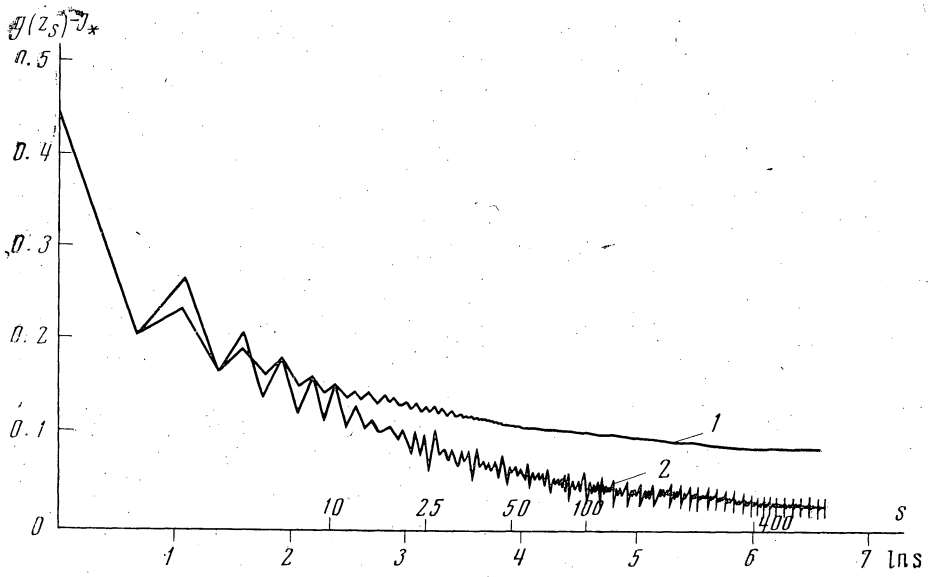
$$\Phi_* = \min_{z\in Z} \max_{x\in X} \Phi(x, z), \qquad \Phi(x, z) = \sum_{i=1}^{N} K(x, y_i) z^i. \tag{3.4}$$

Здесь N — число узлов, y_i — узлы сетки, z^i — мера, сосредоточенная в y_i, $z^i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{N} z^i = 1$.

Для решения (3.4), в принципе, можно воспользоваться каким-либо известным методом нахождения минимакса, однако большая размерность вектора z резко усложнила бы такие расчеты. Существенным упрощением задачи (3.3) является выпуклость, вообще говоря, негладкой функции g по ν. Действительно, нетрудно показать, что для любых ν_1, ν_2 из P и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$g(\lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2) \leqslant \lambda g(\nu_1) + (1-\lambda) g(\nu_2).$$

Отсюда следует, что внешняя задача (3.4) фактически является задачей вида (1.1) с негладкой функцией $g(z) = \max\limits_{x \in X} \Phi(x, z)$, поэтому для ее минимизации можно применить метод предыдущего параграфа. В качестве обобщенного градиента будем брать вектор $\nabla_z \Phi(x_s, z_s)$, где x_s — произвольное решение внутренней задачи на s-м шаге итеративного процесса.



Фиг. 3

При нахождении $g(z_s)$, однако, придется использовать алгоритмы, не требующие вогнутости функции $\Phi(x, z_s)$ (выше предполагалось, что $K(x, y)$, как функция x, удовлетворяет только условию Липшица).

Таким образом, для решения (3.3) предлагается комбинировать два метода: для решения внутренней задачи использовать метод отыскания глобального максимума функции, удовлетворяющей условию Липшица (см., например, [16]), для решения внешней задачи применять метод § 2 минимизации выпуклых функций. Очевидно, что точность решения внутренней задачи не следует брать более высокой, чем Λh.

Первая задача (3.3) решается аналогично. Однако численный алгоритм ее решения будет значительно проще, если, используя результаты решения второй задачи (3.3), мы определим множество

$$\bar{X} = \left\{ x : x \in X, \int\limits_Y K(x, y) \nu_*(dy) = J_* \right\}.$$

Как известно из теории игр [10], спектр меры μ_* принадлежит $\bar{X}$. Отсюда следует, что для определения μ_* нет необходимости строить сетку на всем множестве X, достаточно покрыть ее узлами только $\tilde{X} \subset X$. В ряде случаев это может привести к резкому сокращению размерности внешней задачи.

В качестве примера приведем результаты решения второй задачи (3.1) для случая, когда $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $K(x, y) = \cos 2\pi x \cos 2\pi y + x + y$. В [10] дано приближенное значение цены этой игры $J_* = 1.05$.

На множестве Y строилась сетка с шагом $h = 10^{-2}$. При решении внутренней задачи использовалась модификация метода [16], точность решения ее равнялась 0.05. В качестве начальной меры ν_0 бралось равномерное распределение на множестве Y.

Исследовалась сходимость метода при разных способах стремления $\alpha \to 0$. На фиг. 3 показано изменение $g(z_s)$ в зависимости от номера итерации s для случаев, когда $\alpha_1(s) = \alpha_0 / s$ (график 1) и $\alpha_2(s) = \alpha_0 / \sqrt{s}$ (график 2). При построении графиков использовалась линейная интерполяция по двум соседним точкам. Из приведенных графиков видно, что первая зависимость $\alpha_1(s)$ менее удачна. Это связано с тем, что в этом случае величина α быстро уменьшается и функция $g(z_s)$ изменяется очень медленно.

§ 4. Отыскание седловых точек

Рассмотрим задачу

$$q = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y), \tag{4.1}$$

где

$$Y = \left\{ y : y \in E_s, \ \sum_{i=1}^{s} y^i = R_1 > 0, \ y \geqslant 0 \right\},$$

$$X = \left\{ x : x \in E_t, \ \sum_{i=1}^{t} x^j = R_2 > 0, \ x \geqslant 0 \right\},$$

$K(x, y)$ — дифференцируемая функция.

Предполагаем, что при каждом $x \in X$ функция $K(x, y)$ строго выпукла по y и при каждом $y \in Y$ строго вогнута по x. В этом случае для любых допустимых x, $\bar{x}$, y и $\bar{y}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &(\nabla_y K(x, y), \bar{y} - y) < K(x, \bar{y}) - K(x, y), \\ &(\nabla_x K(x, y), \bar{x} - x) > K(\bar{x}, y) - K(x, y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\nabla_y K = \{\partial K / \partial y^1, \ldots, \partial K / \partial y^s\}$, $\nabla_x K = \{\partial K / \partial x^1, \ldots, \partial K / \partial x^t\}$.

Задача (4.1) имеет единственное седловое решение, т. е. пару точек x_* и y_* такую, что для любых $x \in X$, $y \in Y$

$$K(x, y_*) \leqslant K(x_*, y_*) \leqslant K(x_*, y). \tag{4.3}$$

Для отыскания седловой точки предлагается следующий метод:

$$\frac{dy^i}{dt} = y^i[(\nabla_y K, y)/R_1 - \nabla_y K_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{4.4}$$

$$\frac{dx^j}{dt} = -x^j[(\nabla_x K, x)/R_2 - \nabla_x K_j], \qquad j = 1, 2, \ldots, t. \tag{4.4}$$

Теорема 5. *Пусть для $K(x, y)$ выполнены условия* (4.2) *и* $\|\nabla_y K\|$, $\|\nabla_x K\|$ *удовлетворяют на* $X \times Y$ *условию Липшица. Тогда решение* (4.4) *при* $t \to \infty$ *сходится к решению* x_*, y_* *для любых начальных* $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, *лежащих внутри неотрицательных квадрантов.*

Доказательство теоремы легко провести, если взять в качестве функции Ляпунова положительно определенную функцию

$$V = \sum_{i=1}^{s} y_*^i (\ln y_*^i - \ln y^i) + \sum_{j=1}^{t} x_*^j (\ln x_*^j - \ln x^j).$$

Используя (4.2), (4.3), получим, что производная V в силу (4.4) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leqslant K(x, y_*) - K(x_*, y) \leqslant 0.$$

Для решения (4.1) можно использовать и дискретные варианты метода (4.4).

Поступила в редакцию 22.05.1972

Цитированная литература

1. Дж. Хедли. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.
2. А. Халанай, Д. Векслер. Качественная теория импульсных систем. М., «Мир», 1971.
3. П. В. Бромберг. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М., «Наука», 1967.
4. В. В. Румянцев. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4, 9—16.
5. В. И. Зубов. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., Изд-во ЛГУ, 1957.
6. Б. Ф. Митчелл, В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. Нахождение ближайшей к началу координат точки многогранника. Вестн. ЛГУ, 1971, № 13, 38—45.
7. Н. З. Шор. О структуре алгоритмов численного решения задачи оптимального планирования и проектирования. Дисс. канд. физ.-матем. н., Киев, Ин-т кибернетики АН УССР, 1964.
8. Ю. М. Ермольев. Методы решения нелинейных экстремальных задач. Кибернетика, 1966, № 4, 1—17.
9. Э. Беккенбах, Р. Беллман. Неравенства. М., «Мир», 1965.
10. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр. М., Физматгиз, 1960.
11. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
12. Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан. Численные методы решения игровых задач. В сб. «Иссл. операций». Вып. 3. М., ВЦ АН СССР, 1972, 95—110.
13. Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан. Численные алгоритмы поиска решения игровых задач. В сб. «Иссл. операций». Вып. 3. М., ВЦ АН СССР, 1972, 111—119.
14. В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. Введение в минимакс. М., «Наука», 1972.
15. Ю. Г. Евтушенко. Численный метод отыскания наилучших гарантированных оценок. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, **12**, № 1, 89—104.
16. Ю. Г. Евтушенко. Численный метод поиска экстремума функций (перебор на неравномерной сетке). Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, **11**, № 6, 1390—1403.