М. В. Втюрина, В. Г. Жадан, Барьерно-проективный метод с наискорейшим спуском для линейных задач дополнительности, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2005, том 45, номер 5, 792–812

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2005, том 45, № 5, с. 792–812

УДК 519.6:519.853.6

БАРЬЕРНО-ПРОЕКТИВНЫЙ МЕТОД С НАИСКОРЕЙШИМ СПУСКОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ[1)]

© 2005 г. М. В. Втюрина, В. Г. Жадан

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

Поступила в редакцию 01.11.2004 г.
Переработанный вариант 01.12.2004 г.

Рассматривается линейная задача дополнительности с положительно-определенной матрицей. Для ее решения предлагается численный метод, являющийся обобщением барьерно-проективного метода для задач линейного и нелинейного программирования. В методе как начальная, так и все последующие итерации принадлежат допустимому множеству. Выбор шага основан на идее наискорейшего спуска. Показывается, что помимо решения задачи у основного варианта метода существуют дополнительные стационарные точки. При выполнении определенного условия невырожденности данные стационарные точки совпадают с угловыми точками допустимого множества. Доказывается локальная сходимость основного варианта метода за число итераций, не превосходящее размерности задачи. Приводится модифицированный вариант метода, в котором отсутствуют дополнительные стационарные точки. Доказывается его конечная нелокальная сходимость. Библ. 12.

Ключевые слова: линейная задача дополнительности, барьерно-проективный метод, вычислительный алгоритм, наискорейший спуск.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим линейную задачу дополнительности (ЛЗД)

$$
\begin{aligned}
x \geq 0_n, &\quad y \geq 0_n, \\
y &= Mx + q, \\
0 &= y^{\mathrm{T}} x,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где M – положительно-определенная (не обязательно симметричная) матрица порядка n, $q \in \mathbb{R}^n$ и 0_n – нулевой n-мерный вектор. В силу положительной определенности матрицы M для любого $q \in \mathbb{R}^n$, решение задачи (1) существует и единственно. Решение $[x_*, y_*]$ задачи (1) назовем *невырожденным*, если

$$x_* + y_* > 0_n. \tag{2}$$

Предположим, что ЛЗД (1) неоднородна, т.е. $q \neq 0_n$.

Известна тесная связь ЛЗД с задачей квадратичного программирования (ЗКП) (см. [1]), а именно: если существует решение ЗКП с симметричной матрицей и с линейными ограничениями типа неравенства, то условия Каруша–Куна–Таккера (ККТ) определяют ЛЗД, в которой матрица M является бисимметричной. Обратно: всегда можно поставить в соответствие задаче (1) ЗКП, причем если допустимое множество в последней не пусто, то данная ЗКП обязательно имеет решение. Изучая ККТ-пары для ЗКП, можно исследовать вопросы существования и единственности решения ЛЗД. Отметим также, что к решению ЛЗД сводятся многие другие проблемы, например биматричные игры, линейные задачи рыночного равновесия (см. [2]).

К настоящему времени для решения ЛЗД разработано большое количество численных методов различных классов (см. [1], [3]). Среди них особое место принадлежит итеративным методам (см., например, [4]–[8]). В [9] для решения (1) предлагался метод, являющийся обобщением барь-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 03-01-00464) и гранта ведущих научных школ (НШ-1737.2003.1).

ерно-проективного метода для задач линейного программирования (см. [10]). По существу данный метод строился путем применения устойчивого варианта барьерно-проективного метода из [11] к решению соответствующей ЗКП.

Особый интерес вызывает частный случай этого метода, в котором все пары являются допустимыми. Пусть $D(z)$ – диагональная матрица с вектором z на диагонали, и пусть матрица $G(x, y)$ имеет следующий вид:

$$G(x, y) = MD(x)M^{\mathrm{T}} + D(y). \tag{3}$$

Дискретный вариант метода описывался следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= D(x_k)\{e - \alpha_k[I_n + M^{\mathrm{T}}G^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)D(x_k)]y_k\}, \\ y_{k+1} &= D(y_k)\{e - \alpha_k[I_n - G^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)D(y_k)]x_k\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где e есть n-мерный вектор, состоящий из единиц, I_n – единичная матрица порядка n, α_k – шаг перемещения ($\alpha_k > 0$). Допустимая начальная пара $[x_0, y_0]$ бралась строго внутренней, т.е. удовлетворяла условиям $x_0 > 0_n$, $y_0 > 0_n$. Было показано, что если $[x_*, y_*]$ – невырожденное решение задачи (1), то найдется такое α_*, что для всех постоянных $0 < \alpha_k < \alpha_*$ все последующие пары являются строго внутренними и итеративный процесс (4) локально линейно сходится к $[x_*, y_*]$. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы рассмотреть модификацию метода (4), обладающую конечной нелокальной сходимостью.

Если шаг α_k в (4) на каждой итерации выбирается таким образом, чтобы $x_{k+1} \geq 0_n$ и $y_{k+1} \geq 0_n$, то все пары $[x_k, y_k]$, $k \geq 0$, оказываются допустимыми. Это дает возможность взять шаг максимально возможным из условия минимизации значения билинейной функции $V(x, y) = y^{\mathrm{T}}x$ вдоль направлений перемещений, разумеется, не позволяя новым точкам покидать неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$. Однако в том случае, когда x_k или y_k оказываются на границе ортанта $\mathbb{R}^n_+$, рекуррентные соотношения (4) становятся непригодными для расчетов из-за наличия эффекта “прилипания”. Данный эффект заключается в том, что, в силу соотношений (4), любая нулевая компонента x_k^i вектора x_k или любая нулевая компонента y_k^j вектора y_k не могут в дальнейшем стать положительными. У отображений, стоящих в правых частях соотношений (4), могут появиться дополнительные неподвижные точки, не являющиеся решением задачи. Поэтому требуется как-то изменить численную схему (4), чтобы устранить указанный недостаток. Один из таких подходов рассматривается в данной статье.

В разд. 1 вводятся обозначения и даются необходимые в дальнейшем определения. В разд. 2 описываются рекуррентные соотношения, соответствующие основному варианту метода, и вводится понятие особых пар, являющихся стационарными точками метода. Показывается, что при выполнении некоторых предположений о невырожденности задачи особыми парами являются лишь угловые точки допустимого множества. В разд. 3 обсуждается вопрос выбора шага на основе идеи наискорейшего спуска. В разд. 4 доказывается конечная локальная сходимость основного варианта метода за количество итераций, не превышающее размерность задачи. При этом предполагается, что метод не попадает в особые пары, не совпадающие с решением задачи. В разд. 5 исследуются свойства правых частей в особых парах. В разд. 6 рассматривается модифицированный вариант барьерно-проективного метода. Он отличается от основного лишь направлениями, вычисляемыми в особых парах. Предлагается определять в таких парах направления в измененных точках. Это приводит к тому, что особые пары, за исключением решения задачи, перестают быть стационарными точками итеративного процесса. Геометрически подсчет правых частей в измененных точках может быть проинтерпретирован как сдвиг одного из ограничений $x^i \geq 0$ или $y^i \geq 0$ в этой паре. Для задач линейного программирования аналогичный прием применялся в [12]. В разд. 7 доказывается конечная нелокальная сходимость модифицированного варианта метода. Хотя, разумеется, численные расчеты по предлагаемому методу целесообразно проводить лишь в одном пространстве, например в пространстве x-в, однако для простоты изложения и теоретического обоснования метода его описание дается с привлечением обоих пространств.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть J – множество индексов от 1 до n, и пусть $v = [v^1, \ldots, v^n]^{\mathrm{T}}$ есть n-мерный вектор с компонентами $v^i = x^i y^i$, $i \in J$.

Приведем ряд определений, которые потребуются в дальнейшем.

Определение 1. Пара $[x, y] \in \mathbb{R}^{2n}$ называется *внутренней* (*строго внутренней*), если $x \geq 0_n$, $y \geq 0_n$ ($x > 0_n$, $y > 0_n$).

Определение 2. Внутренняя пара $[x, y] \in \mathbb{R}^{2n}$ называется *допустимой*, если $Mx - y + q = 0_n$.

Определение 3. Пара $[x, y] \in \mathbb{R}^{2n}$ называется *комплементарной*, если $v^i = 0$, $i \in J$.

Ниже множество допустимых пар обозначается через $\mathcal{X}_+$. Допустимая комплементарная пара есть решение задачи (1).

Для внутренней пары $[x, y]$ ведем четыре подмножества множества J, зависящих от этой пары (некоторые из них могут оказаться пустыми):

$$\begin{aligned} J_P(x, y) &= \{i \in J : x^i > 0, y^i > 0\}, \\ J_B(x, y) &= \{i \in J : x^i > 0, y^i = 0\}, \\ J_N(x, y) &= \{i \in J : x^i = 0, y^i > 0\}, \\ J_Z(x, y) &= \{i \in J : x^i = 0, y^i = 0\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для определенности везде ниже считаем, что в рассматриваемой паре $[x, y]$ они идут последовательно одно за другим в порядке, указанном в (5). Матрица M в соответствии с (5) делится на блоки:

$$M = \begin{bmatrix} M_{PP} & M_{PB} & M_{PN} & M_{PZ} \\ M_{BP} & M_{BB} & M_{BN} & M_{BZ} \\ M_{NP} & M_{NB} & M_{NN} & M_{NZ} \\ M_{ZP} & M_{ZB} & M_{ZN} & M_{ZZ} \end{bmatrix}.$$

Аналогичное обозначение будем использовать для разбиения любых n-мерных векторов на подвекторы, например x^P – часть вектора x, состоящая из компонент, индексы которых принадлежат множеству $J_P(x, y)$.

Введем еще два определения.

Определение 4. Внутренняя пара $[x, y] \in \mathbb{R}_+^{2n}$ называется *регулярной*, если $J_Z(x, y) = \emptyset$. В противном случае пара $[x, y]$ называется *нерегулярной*.

Определение 5. Допустимая пара $[x, y] \in \mathcal{X}_+$ называется *слабо невырожденной*, если подматрица

$$\begin{bmatrix} M_{BP} & M_{BB} \\ M_{ZP} & M_{ZB} \end{bmatrix} \tag{6}$$

матрицы M имеет полный ранг, равный $|J_B(x, y)| + |J_Z(x, y)|$. При этом считаем, что пара $[x, y]$ заведомо слабо невырожденна, если оба множества $J_B(x, y)$ и $J_Z(x, y)$ пусты.

Согласно данному определению слабо невырожденной пары, в ней число столбцов у матрицы (6) должно быть не меньше числа строк, т.е.

$$|J_B(x, y)| + |J_Z(x, y)| \leq |J_B(x, y)| + |J_P(x, y)|.$$

Таким образом, в любой слабо невырожденной паре имеет место неравенство $|J_Z(x, y)| \leq |J_P(x, y)|$.

Если допустимая пара регулярна, то она обязательно является слабо невырожденной парой. Действительно, в этом случае множество $J_Z(x, y)$ пусто, поэтому либо множество $J_B(x, y)$ пусто, либо матрица (6) состоит только из верхней строки, содержащей матрицу M_{BB}. Для положительно-определенной матрицы M главная ее подматрица M_{BB} также положительно определена и, следовательно, является неособой матрицей.

Заметим также, что поскольку невырожденное решение $[x_*, y_*]$ задачи (1), удовлетворяющее (2), есть регулярная допустимая пара, то эта пара слабо невырожденна (в смысле данного выше определения).

Предложение 1. *Пусть* $[x, y]$ – *слабо невырожденная допустимая пара. Тогда матрица* $G(x, y) = MD(x)M^{\text{т}} + D(y)$ *неособая.*

Доказательство. Представим матрицу $G(x, y)$ в виде матрицы Грама $G(x, y) = W^{\text{т}}(x, y)W(x, y)$, где $W(x, y)$ есть $2n \times n$-матрица

$$W(x, y) = \begin{bmatrix} W_1(x) \\ W_2(y) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

состоящая из двух квадратных подматриц $W_1(x) = D^{1/2}(x)M^{\text{т}}$ и $W_2(y) = -D^{1/2}(y)$. Блочное представление матриц, транспонированных к этим двум матрицам, следующее:

$$W_1^{\text{т}}(x) = \begin{bmatrix} M_{PP}D^{1/2}(x^P) & M_{PB}D^{1/2}(x^B) & 0 & 0 \\ M_{BP}D^{1/2}(x^P) & M_{BB}D^{1/2}(x^B) & 0 & 0 \\ M_{NP}D^{1/2}(x^P) & M_{NB}D^{1/2}(x^B) & 0 & 0 \\ M_{ZP}D^{1/2}(x^P) & M_{ZB}D^{1/2}(x^B) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_2^{\text{т}}(y) = -\begin{bmatrix} D^{1/2}(y^P) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{1/2}(y^N) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому матрица $G(x, y)$ будет неособой, если удастся показать, что ранг матрицы $W(x, y)$ равен n. Убедимся с этой целью, что столбцы матрицы $W(x, y)$ линейно независимы. Действительно, если рассмотреть решение линейной однородной системы

$$W(x, y)\lambda = 0_{2n}, \tag{8}$$

то из подсистемы $W_2(y)\lambda = 0$ системы (8) сразу получаем, что $\lambda^P = 0$, $\lambda^N = 0$. Поэтому другая подсистема $W_1(x)\lambda = 0$ системы (8) сводится к следующей:

$$\begin{bmatrix} M_{BP}^{\text{т}} & M_{ZP}^{\text{т}} \\ M_{BB}^{\text{т}} & M_{ZB}^{\text{т}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^B \\ \lambda^Z \end{bmatrix} = 0.$$

Данная система, в силу слабой невырожденности пары $[x, y]$, имеет только тривиальное решение $\lambda^B = 0$, $\lambda^Z = 0$. Таким образом, $\lambda = 0_n$ и, следовательно, $W(x, y)$ – матрица полного ранга.

Задачу (1) назовем *слабо невырожденной*, если все допустимые пары слабо невырожденны. Как следует из утверждения предложения 1, для слабо невырожденной задачи матрица $G(x, y)$ является неособой всюду на множестве $\mathscr{X}_+$. В силу непрерывности данная матрица будет оставаться неособой и в некоторой окрестности множества $\mathscr{X}_+$. В дальнейшем предполагается, что задача (1) является слабо невырожденной.

2. ОСНОВНОЙ ВАРИАНТ МЕТОДА И ОСОБЫЕ ПАРЫ

Пусть угловые скобки обозначают евклидово скалярное произведение. Введем функцию Лагранжа

$$L(x, y, u) = \langle x, y\rangle + \langle u, Mx - y + q\rangle$$

и определим функцию $u(x, y)$ из условия

$$MD(x)L_x(x, y, u) = D(y)L_y(x, y, u), \tag{9}$$

где через $L_x(x, y, u) = y + M^\mathrm{т}u$ и $L_y(x, y, u) = x - u$ обозначены производные функции $L(x, y, u)$ по x и y соответственно. Если пара $[x, y] \in \mathscr{X}_+$ слабо невырожденна, то из (9) получаем

$$u(x, y) = G^{-1}(x, y)(I_n - M)D(x)y. \tag{10}$$

Положим далее

$$\begin{aligned} F_0^{(1)}(x, y) &= D(x)[y + M^\mathrm{т}u(x, y)] = D(x)[I_n + M^\mathrm{т}G^{-1}(x, y)(I_n - M)D(x)]y, \\ F_0^{(2)}(x, y) &= D(y)[x - u(x, y)] = D(y)[I_n - G^{-1}(x, y)(I_n - M)D(y)]x. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда барьерно-проективный метод (4) можно переписать в виде

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \Delta x_k, \quad y_{k+1} = y_k - \alpha_k \Delta y_k, \tag{12}$$

где

$$\Delta x_k = F_0^{(1)}(x_k, y_k), \quad \Delta y_k = F_0^{(2)}(x_k, y_k). \tag{13}$$

Если начальная пара $[x_0, y_0]$ допустима, то при выборе шага α_k на каждой k-й итерации из условия, чтобы новые точки x_{k+1}, y_{k+1} не покидали ортанта $\mathbb{R}^n_+$, получаем, что все последующие пары также оказываются допустимыми.

Исследуем вопрос о том, какие допустимые пары могут быть стационарными точками процесса (12), или, другими словами, для каких пар $[x, y] \in \mathscr{X}_+$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} F_0^{(1)}(x, y) &= D(x)[y + M^\mathrm{т}u(x, y)] = 0_n, \\ F_0^{(2)}(x, y) &= D(y)[x - u(x, y)] = 0_n. \end{aligned} \tag{14}$$

Ниже допустимые пары $[x, y]$, в которых выполняется (14), называются *особыми*. В противном случае они называются *неособыми*.

Обозначим через $\mathrm{fr}\,\mathbb{R}^{2n}_+$ границу неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^{2n}_+$.

Предложение 2. *Пусть пара* $[x, y]$ *является особой. Тогда* $[x, y] \in \mathrm{fr}\,\mathbb{R}^{2n}_+$.

Доказательство от противного. Предположим, что пара $[x, y]$ строго внутренняя. Тогда из (14) следует, что $y + M^\mathrm{т}u = 0_n$ и $x - u = 0_n$. Перепишем первое равенство в виде $M^\mathrm{т}x = -y$. Если теперь его умножить слева на $x^\mathrm{т}$ и учесть, что все компоненты векторов x и y строго положительны, то получим $\langle x, M^\mathrm{т}x\rangle = -\langle x, y\rangle < 0$, что невозможно, так как, по предположению, матрица M положительно определена.

Ниже через $N_0(x, y)$ обозначается число нулевых компонент в паре $[x, y]$, т.е.

$$N_0(x, y) = 2|J_Z(x, y)| + |J_B(x, y)| + |J_N(x, y)|.$$

Для особых пар $[x, y]$, как следует из утверждения предложения 2, это число строго положительно. Так как в любой паре выполняется равенство

$$|J_P(x, y)| + |J_B(x, y)| + |J_N(x, y)| + |J_Z(x, y)| = n,$$

то $N_0(x, y) + |J_P(x, y)| = n + |J_Z(x, y)|$ и, следовательно,

$$N_0(x, y) = n + |J_Z(x, y)| - |J_P(x, y)|.$$

Таким образом, в любой слабо невырожденной паре число нулевых компонент не может быть больше, чем n.

Предложение 3. *Пусть задача* (1) *слабо невырожденна. Тогда любая угловая точка множества* $\mathscr{X}_+$ *является особой парой.*

Доказательство. Допустим, что слабо невырожденная допустимая пара $[x, y]$ такова, что $N_0(x, y) = n$, т.е. пара $[x, y]$ является угловой точкой множества $\mathscr{X}_+$. Если эта пара регулярная, то она должна быть решением задачи (1). Предположим дополнительно, что данная пара нерегулярна. Вектор $u = u(x, y)$ удовлетворяет равенству (9). Так как $y^B = 0$, $y^Z = 0$, $x^N = 0$ и $x^Z = 0$, то отсюда приходим к следующей однородной системе уравнений относительно L_x^P и L_x^B:

$$\begin{aligned} M_{BP}D(x^P)L_x^P + M_{BB}D(x^B)L_x^B &= 0, \\ M_{ZP}D(x^P)L_x^P + M_{ZB}D(x^B)L_x^B &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Но при $N_0(x, y) = n$ в нерегулярной паре обязательно $|J_P(x, y)| = |J_Z(x, y)|$. В этом случае матрица линейной системы (15) квадратная, причем из-за слабой невырожденности пары $[x, y]$ и положительности всех компонент векторов x^P и x^B следует, что она неособая. Поэтому $L_x^P = 0$, $L_x^B = 0$ и, поскольку $x^N = 0$, $x^Z = 0$, получаем, что $D(x)L_x(x, y, u) = 0_n$. Кроме того, согласно (9), $D(y)L_y(x, y, u) = 0_n$. Таким образом, для данной пары $[x, y]$ выполнены равенства (14).

Так как решение задачи (1), удовлетворяющее (2), есть угловая точка множества $\mathcal{X}_+$, то она является особой парой. Допустим теперь, что слабо невырожденная особая пара $[x, y]$ отлична от решения ЛЗД (1). Тогда должно найтись такое $u = u(x, y)$, что

$$D(x)(y + M^{\mathrm{T}}u) = 0_n, \quad D(y)(x - u) = 0_n.$$

Так как $y^P > 0$, $y^N > 0$, то из второго равенства получаем $u^P = x^P$, $u^N = x^N = 0$, а из первого, с учетом $x^P > 0$, $x^B > 0$,

$$y^P + (M^{\mathrm{T}}u)^P = 0, \quad y^B + (M^{\mathrm{T}}u)^B = 0.$$

Данные равенства можно переписать в более подробном виде:

$$\begin{aligned} M_{BP}^{\mathrm{T}}u^B + M_{ZP}^{\mathrm{T}}u^Z &= -y^P - M_{PP}^{\mathrm{T}}x^P, \\ M_{BB}^{\mathrm{T}}u^B + M_{ZB}^{\mathrm{T}}u^Z &= -M_{PB}^{\mathrm{T}}x^P. \end{aligned} \tag{16}$$

Матрица системы линейных алгебраических уравнений (16) является транспонированной матрицей (6) и, в силу предположения о слабой невырожденности пары $[x, y]$, имеет полный ранг, равный

$$n_1(x, y) = |J_B(x, y)| + |J_Z(x, y)|.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(x, y)$ пространство строк матрицы (6). Если пара $[x, y]$ есть угловая точка множества $\mathcal{X}_+$, то матрица (6) является квадратной, пространство $\mathcal{L}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^{n_2(x, y)}$, где $n_2(x, y) = |J_B(x, y)| + |J_P(x, y)|$. Если же пара $[x, y]$ отлична от угловой точки множества $\mathcal{X}_+$, то из-за того, что $|J_Z(x, y)| < |J_P(x, y)|$, имеет место неравенство $n_1(x, y) < n_2(x, y)$ и $\mathcal{L}$ является собственным подпространством размерности $n_1(x, y)$ пространства $\mathbb{R}^{n_2(x, y)}$. Система (16) в этом случае оказывается переопределенной и имеет решение тогда и только тогда, когда вектор

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} y^P + M_{PP}^{\mathrm{T}}x^P \\ M_{PB}^{\mathrm{T}}x^P \end{bmatrix}$$

принадлежит подпространству $\mathcal{L}$. Отметим, что, в силу положительной определенности матрицы M_{PP} и положительности всех компонент вектора y^P, вектор $p(x, y)$ обязательно отличен от нулевого.

Введем дополнительно

Определение 6. Допустимая пара $[x, y]$ называется *невырожденной*, если она слабо невырожденна и вектор $p(x, y)$ принадлежит $\mathcal{L}$ в том и только том случае, когда $|J_Z(x, y)| = |J_P(x, y)|$.

Мы скажем, что задача (1) *невырожденна*, если все допустимые пары являются невырожденными. Согласно предложению 3 и сказанному выше, имеет место следующее

Предложение 4. *Пусть задача* (1) *невырожденна. Тогда для того, чтобы пара* $[x, y]$ *была особой, необходимо и достаточно, чтобы она была угловой точкой множества* $\mathcal{X}_+$.

3. НАИСКОРЕЙШИЙ СПУСК

Рассмотрим поведение функции $V(x, y) = \langle x, y\rangle$ вдоль направлений, обратных Δx_k и Δy_k, выпущенных из произвольной допустимой пары $[x_k, y_k]$. Взяв $\alpha \ge 0$, получаем

$$\phi(\alpha) = V(x_k - \alpha\Delta x_k, y_k - \alpha\Delta y_k) = V(x_k, y_k) - c_1(x_k, y_k)\alpha + c_2(x_k, y_k)\alpha^2, \tag{17}$$

где

$$c_1(x, y) = \langle \Delta x, y\rangle + \langle \Delta y, x\rangle, \quad c_2(x, y) = \langle \Delta x, \Delta y\rangle.$$

Имеем $x_k^N = 0$, $x_k^Z = 0$, $y_k^B = 0$ и $y_k^Z = 0$. Кроме того, согласно (13),

$$\Delta x_k^N = 0, \quad \Delta x_k^Z = 0, \quad \Delta y_k^B = 0, \quad \Delta y_k^Z = 0.$$

Поэтому выражения для коэффициентов c_1 и c_2 упрощаются:

$$c_1(x_k, y_k) = \langle \Delta x_k^P, y_k^P\rangle + \langle \Delta y_k^P, x_k^P\rangle, \quad c_2(x_k, y_k) = \langle \Delta x_k^P, \Delta y_k^P\rangle,$$

т.е. фактически они зависят только от компонент с индексами из множества $J_P(x_k, y_k)$.

Как было установлено, для невырожденной ЛЗД $\Delta x_k = 0$, $\Delta y_k = 0$ в том и только том случае, когда пара $[x_k, y_k]$ является угловой точкой множества $\mathcal{L}_+$. Поэтому если пара $[x_k, y_k]$ является угловой точкой множества $\mathcal{L}_+$, то $c_1(x_k, y_k) = c_2(x_k, y_k) = 0$. Покажем, что для неособых пар $[x_k, y_k]$ коэффициенты $c_1(x_k, y_k)$ и $c_2(x_k, y_k)$ обязательно ненулевые.

Предложение 5. *Пусть задача* (1) *является невырожденной. Пусть, кроме того,* $[x, y]$ – *неособая пара. Тогда* $c_1(x, y) > 0$.

Доказательство. Воспользуемся матрицей $W(x, y)$ вида (7). Введем вектор-функцию

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} w_1(x, y) \\ w_2(x, y) \end{bmatrix} \tag{18}$$

с компонентами $w_1(x, y) = D^{1/2}(x)y$, $w_2(x, y) = D^{1/2}(y)x$. Определим также матрицы

$$\begin{aligned} \hat{W}(x, y) &= [W^{\text{т}}(x, y)W(x, y)]^{-1}W^{\text{т}}(x, y), \\ P(x, y) &= W(x, y)\hat{W}(x, y) \end{aligned} \tag{19}$$

и векторы

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= w_1(x, y) - W_1(x)\hat{W}(x, y)w(x, y), \\ h_2(x, y) &= w_2(x, y) - W_2(y)\hat{W}(x, y)w(x, y). \end{aligned}$$

Симметричная идемпотентная матрица $P(x, y)$ является матрицей ортогонального проектирования.

Тогда $F_0^{(1)}(x, y)$ и $F_0^{(2)}(x, y)$ можно представить в виде

$$F_0^{(1)}(x, y) = D^{1/2}(x)h_1(x, y), \quad F_0^{(2)}(x, y) = D^{1/2}(y)h_2(x, y). \tag{20}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} c_1(x, y) &= \langle y, D^{1/2}(x)h_1(x, y)\rangle + \langle x, D^{1/2}(y)h_2(x, y)\rangle = \langle w_1(x, y), h_1(x, y)\rangle + \langle w_2(x, y), h_2(x, y)\rangle = \\ &= \langle w(x, y), (I_{2n} - P(x, y))w(x, y)\rangle = \|(I_{2n} - P(x, y))w(x, y)\|^2 \ge 0, \end{aligned} \tag{21}$$

где $\|z\|$ – евклидова норма вектора z.

Из предположения, что $[x, y]$ – неособая пара, вытекает, что $w(x, y)$ – ненулевой вектор. Поэтому равенство $c_1(x, y) = 0$ возможно в том и только том случае, когда $w(x, y)$ принадлежит пространству столбцов матрицы $W(x, y)$. Для невырожденной задачи данное включение выполняется лишь в особых парах. Таким образом, $c_1(x, y) > 0$.

Предложение 6. *Пусть выполнены условия предложения* 5. *Тогда* $c_2(x, y) > 0$.

Доказательство. Обозначим

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} h_1(x, y) \\ h_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Вектор $h(x, y)$ является проекцией вектора $w(x, y)$ на ортогональное дополнение к пространству столбцов матрицы $W(x, y)$. Поэтому он может быть представлен в виде

$$h = E(x, y)\lambda, \quad E(x, y) = \begin{bmatrix} E_1(x, y) \\ E_2(x, y) \end{bmatrix},$$

где столбцы матрицы $E(x, y)$ ортогональны столбцам матрицы $W(x, y)$.

Имеем $W^{\mathrm{T}}(x, y)E(x, y) = 0_{nn}$ или, в более подробном виде,

$$MD^{1/2}(x)E_1(x, y) - D^{1/2}(y)E_2(x, y) = 0_{nn}. \tag{22}$$

После умножения левой и правой частей (22) на матрицу $D^{1/2}(x)$ получаем

$$D^{1/2}(x)MD^{1/2}(x)E_1(x, y) - D^{1/2}(v)E_2(x, y) = 0_{nn}. \tag{23}$$

Так как $h_1(x, y) = E_1(x, y)\lambda$, $h_2(x, y) = E_2(x, y)\lambda$, то на основании (20) и (23) получаем

$$\begin{gathered} c_2(x, y) = \langle \Delta x, \Delta y \rangle = \langle D^{1/2}(x)h_1(x, y), D^{1/2}(y)h_2(x, y) \rangle = \\ = \langle E_1(x, y)\lambda, D^{1/2}(v)E_2(x, y)\lambda \rangle = \langle E_1(x, y)\lambda, D^{1/2}(x)MD^{1/2}(x)E_1(x, y)\lambda \rangle \geq 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Равенство в (24) возможно в том и только том случае, когда $D^{1/2}(x)E_1(x, y)\lambda = 0_n$, или, что то же самое, $D^{1/2}(x)h_1(x, y) = 0_n$. Таким образом, в данной паре $F_0^{(1)}(x, y) = 0_n$. Но тогда из $F_0^{(2)}(x, y) = MF_0^{(1)}(x, y)$ следует, что $F_0^{(2)}(x, y) = 0_n$, т.е. $[x, y]$ – особая пара. Отсюда заключаем, что $c_2(x, y) > 0$.

Если пара $[x_k, y_k]$ неособая, то, как следует из (17) и предложений 5 и 6, движение вдоль направлений, противоположных Δx_k, Δy_k, приводит к уменьшению значения функции $V(x, y)$, по крайней мере при достаточно малых α. Чтобы получить наибольшее убывание функции $V(x, y)$, целесообразно взять шаг α_k равным

$$\alpha_k = \min\{\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}\}, \tag{25}$$

где

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{c_1(x_k, y_k)}{2c_2(x_k, y_k)}, \tag{26}$$

$$\alpha_k^{(2)} = \arg\max\{\alpha \geq 0 : x_k - \alpha\Delta x_k \geq 0_n, y_k - \alpha\Delta y_k \geq 0_n\}. \tag{27}$$

Итерационный процесс (12), (13) с выбором шага согласно (25) назовем основным вариантом барьерно-проективного метода с наискорейшим спуском. Он позволяет находить решение невырожденной ЛЗД лишь в том случае, когда в ходе итеративного процесса все пары $[x_k, y_k]$ не являются угловыми точками множества $\mathcal{X}_+$, за исключением, быть может, пары $[x_*, y_*]$. Если же на некоторой итерации текущая пара оказывается угловой точкой $\mathcal{X}_+$, то данный вариант метода останавливается и может не найти решения. Ниже исследуется поведение основного варианта метода в предположении, что это событие не происходит.

4. КОНЕЧНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим вопрос о локальной сходимости основного варианта метода. По-прежнему считаем, что решение задачи (1) является невырожденным, т.е. выполнено неравенство (2). Пусть $\varepsilon > 0$. Через $\mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$ обозначим ε-окрестность решения $[x_*, y_*]$, определяемую следующим образом:

$$\mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*) = \{[x, y] \in \mathcal{X}_+ : \max\{\|x - x_*\|_\infty, \|y - y_*\|_\infty\} \leq \varepsilon\}.$$

Кроме того, для произвольного $c > 0$ положим

$$\mathcal{W}_c(x_*, y_*) = \{[x, y] \in \mathcal{L}_+ : V(x, y) \le c\}. \tag{28}$$

Понятно, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно подобрать константу $c > 0$ таким образом, чтобы $\mathcal{W}_c(x_*, y_*) \subseteq \mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$.

Лемма 1. *Пусть* $[x_k, y_k]$ – *неособая допустимая пара. Тогда для шага* $\alpha_k^{(1)}$, *определяемого согласно формуле* (26), *имеет место оценка*

$$\alpha_k^{(1)} \ge \left[\max_{i \in J_P(x_k, y_k)} \sqrt{v_k^i}\right]^{-1}. \tag{29}$$

Доказательство. Из (21) следует, что

$$c_1 = c_1(x_k, y_k) = \|[I_{2n} - P(x_k, y_k)]w_k\|^2, \tag{30}$$

где $w_k = w(x_k, y_k)$. Представим теперь величину $c_2 = c_2(x_k, y_k)$ в виде

$$c_2 = \frac{1}{2}\langle [I_{2n} - P(x_k, y_k)]w_k, \mathcal{Q}(x_k, y_k)[I_{2n} - P(x_k, y_k)]w_k\rangle. \tag{31}$$

Здесь $\mathcal{Q}(x, y)$ – квадратная симметричная матрица порядка $2n$, имеющая блочный вид:

$$\mathcal{Q}(x, y) = \begin{bmatrix} 0_{nn} & D^{1/2}(v) \\ D^{1/2}(v) & 0_{nn} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Собственными значениями этой матрицы являются числа $\lambda = \pm\sqrt{v^i}$, $i \in J$. В силу предложений 5 и 6, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Пусть

$$\lambda_* = \max_{i \in J_P(x_k, y_k)} \sqrt{v_k^i}.$$

На основании соотношений Рэлея получаем

$$\frac{1}{\alpha_k^{(1)}} = \frac{\langle (I-P)w_k, \mathcal{Q}(x_k, y_k)(I-P)w_k\rangle}{\|(I-P)w_k\|^2} \le \lambda_*.$$

Поскольку $\alpha_k^{(1)} > 0$, то отсюда приходим к неравенству (29).

Лемма 2. *Пусть* $[x_k, y_k]$ – *неособая пара. Тогда*

$$\max_{i \in J_P(x_k, y_k)} \max\{\Delta x_k^i, \Delta y_k^i\} > 0. \tag{32a}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости неравенства (32a), достаточно показать, что найдется по крайней мере один индекс $i \in J_P(x_k, y_k)$, для которого либо $\Delta x_k^i > 0$, либо $\Delta y_k^i > 0$.

Предположим противное. Пусть имеют место неравенства $\Delta x_k^i \le 0$, $\Delta y_k^i \le 0$ для всех $i \in J_P(x_k, y_k)$. Тогда с учетом того, что $\Delta x_k^N = 0$, $\Delta x_k^Z = 0$, $\Delta y_k^B = 0$, $\Delta y_k^Z = 0$, получаем

$$c_1(x_k, y_k) = \langle y_k, \Delta x_k\rangle + \langle x_k, \Delta y_k\rangle \le 0.$$

Но, согласно утверждению предложения 5, $c_1(x_k, y_k) > 0$ для неособых пар. Пришли к противоречию.

Следствие 1. Пусть $[x_k, y_k]$ – неособая пара. Тогда $\alpha_k^{(2)} < +\infty$.

Доказательство следует из неравенства

$$\alpha_k^{(2)} = \max\{\alpha > 0 : x_k - \alpha\Delta x_k \ge 0_n, y_k - \alpha\Delta y_k \ge 0_n\} \le \max\{\alpha > 0 : x_k^P - \alpha\Delta x_k^P \ge 0, y_k^P - \alpha\Delta y_k^P \ge 0\}$$

и утверждения леммы.

Обозначим $\beta_k = \beta(x_k, y_k) = \max\{\beta^{(1)}(x_k, y_k), \beta^{(2)}(x_k, y_k)\}$, где

$$\beta^{(1)}(x_k, y_k) = \max_{i \in J_P(x_k, y_k)} \frac{\Delta x_k^i}{x_k^i}, \quad \beta_k^{(2)}(x_k, y_k) = \max_{i \in J_P(x_k, y_k)} \frac{\Delta y_k^i}{y_k^i}.$$

Тогда, очевидно, $\alpha_k^{(2)} \le \beta_k^{-1}$. Для пары $[x_*, y_*]$, являющейся решением задачи (1), положим также

$$\rho_* = \min\left\{\min_{i \in J_B(x_*, y_*)} x_*^i, \min_{i \in J_N(x_*, y_*)} y_*^i\right\}.$$

Из неоднородности ЛЗД следует, что $\rho_* > 0$.

Лемма 3. *Пусть* $[x_*, y_*]$ *– невырожденное решение задачи* (1). *Тогда можно указать такую окрестность* $\mathcal{W}_c(x_*, y_*)$ *пары* $[x_*, y_*]$, *что* $\beta(x_k, y_k) \ge \rho_*/2$ *для всех* $[x_k, y_k] \in \mathcal{W}_c(x_*, y_*)$.

Доказательство. Из неравенства (2) и из невырожденности матрицы M следует, что существует такое $\bar{\varepsilon} > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ окрестность $\mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$ пары $[x_*, y_*]$ содержит только регулярные пары. Поэтому любая пара из такой окрестности, отличная от решения задачи, является неособой.

Пусть $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, причем возьмем ε настолько малым, чтобы выполнялись неравенства $\|x - x_*\|_\infty \le \rho_*/4$, $\|y - y_*\|_\infty \le \rho_*/4$ для всех $[x, y] \in \mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$. Кроме того, выберем $c > 0$ таким образом, чтобы имело место включение $\mathcal{W}_c(x_*, y_*) \subseteq \mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$. Пусть $[x_k, y_k] \in \mathcal{W}_c(x_*, y_*)$ и $[x_k, y_k] \ne [x_*, y_*]$. При этом обязательно $J_P(x_k, y_k) \ne \emptyset$. Обозначим $a_k^P = D^{-1}(x_k^P)\Delta x_k^P$, $b_k^P = D^{-1}(y_k^P)\Delta y_k^P$. Имеем, на основании (11) и (13),

$$\begin{aligned} a_k^P &= y_k^P + M_{JP}^{\mathrm{T}} G^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)v_k, \\ b_k^P &= x_k^P - G_{PJ}^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)v_k. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь M_{JP} – подматрица матрицы M, состоящая из столбцов с номерами из множества $J_P(x_k, y_k)$, $G_{PJ}^{-1}(x_k, y_k)$ – подматрица матрицы $G^{-1}(x_k, y_k)$, состоящая из строк с номерами из $J_P(x_k, y_k)$.

Используя векторную норму $\|\cdot\|_\infty$ и согласованную с ней матричную норму, получаем

$$\begin{aligned} \|M_{JP}^{\mathrm{T}} G^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)v_k\|_\infty &\le \|M_{JP}^{\mathrm{T}} G^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)\|_\infty \|v_k\|_\infty, \\ \|G_{PJ}^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)v_k\|_\infty &\le \|G_{PJ}^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)\|_\infty \|v_k\|_\infty. \end{aligned} \tag{34}$$

Так как все пары $[x_k, y_k] \in \mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$ регулярны, то они слабо невырожденны. Поэтому матрица $G^{-1}(x_k, y_k)$ для этих пар существует и непрерывным образом зависит от параметров. Тогда из компактности множества $\mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$ и из конечности числа подмножеств $J_P(x_k, y_k)$ множества J следует, что существует такая константа $0 < K < +\infty$, что

$$\|M_{JP}^{\mathrm{T}} G^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)\|_\infty \le K,$$
$$\|G_{PJ}^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)\|_\infty \le K$$

для всех $[x_k, y_k] \in \mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$ и, следовательно, для всех $[x_k, y_k] \in \mathcal{W}_c(x_*, y_*)$.

Отсюда и из (34) приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \|M_{JP}^{\mathrm{T}} G^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)v_k\|_\infty &\le K\|v_k\|_\infty \le KV(x_k, y_k), \\ \|G_{PJ}^{-1}(x_k, y_k)(I_n - M)v_k\|_\infty &\le K\|v_k\|_\infty \le KV(x_k, y_k). \end{aligned} \tag{35}$$

Считаем далее, что константа $c > 0$ взята настолько малой, что $Kc \le \rho_*/4$. Тогда из (33) и (35) следует, что

$$a_k^i \ge y^i - \rho_*/4, \quad b_k^i \ge x^i - \rho_*/4, \quad i \in J_P(x_k, y_k), \tag{36}$$

для всех $[x_k, y_k] \in \mathcal{W}_c(x_*, y_*)$.

Так как $\mathcal{W}_c(x_*, y_*) \subseteq \mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$, то для этих $[x_k, y_k]$ также выполняются неравенства

$$x^i \ge x^i_* - \rho_*/4, \quad y^i \ge y^i_* - \rho_*/4, \quad i \in J_P(x_k, y_k), \tag{37}$$

причем, в силу невырожденности решения $[x_*, y_*]$ задачи (1), обязательно одна из двух величин, x^i_* или y^i_*, является строго положительной, принимающая значение не меньшее, чем ρ_*.

Поэтому, согласно (36) и (37), $\max\{a^i_k, b^i_k\} \ge \rho_*/2$ для всех индексов $i \in J_P(x_k, y_k)$. Отсюда делаем вывод, что $\beta_k \ge \rho_*/2$.

Следствие 2. Пусть решение $[x_*, y_*]$ задачи (1) является невырожденным. Тогда существует такая окрестность $\mathcal{W}_c(x_*, y_*)$ пары $[x_*, y_*]$, что $\alpha_k^{(2)} \le 2/\rho_*$ для всех $[x_k, y_k] \in \mathcal{W}_c(x_*, y_*)$.

Теорема 1. *Пусть решение $[x_*, y_*]$ задачи* (1) *является невырожденным. Тогда найдется такая окрестность $\mathcal{W}_c(x_*, y_*)$ пары $[x_*, y_*]$, что для любой начальной пары $[x_0, y_0]$ из этой окрестности основной вариант метода наискорейшего спуска находит $[x_*, y_*]$ не более чем за n итераций.*

Доказательство. Возьмем начальную пару $[x_0, y_0] \in \mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$, причем, как уже отмечалось при доказательстве леммы 3, параметр ε можно выбрать настолько малым, что все пары из $\mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$, кроме самого решения $[x_*, y_*]$, являются неособыми. Положим $c = V(x_0, y_0)$. Пусть c таково, что $\mathcal{W}_c(x_*, y_*) \subseteq \mathcal{S}_\varepsilon(x_*, y_*)$. Последовательность $\{V(x_k, y_k)\}$ является монотонно убывающей. Поэтому $[x_k, y_k] \in \mathcal{W}_c(x_*, y_*)$ на всех последующих итерациях. Шаг α_k на каждой итерации, определяемый согласно (25), должен равняться либо $\alpha_k^{(1)}$, либо $\alpha_k^{(2)}$. Но, в силу утверждений леммы 1 и следствия 2, для c достаточно малых $\alpha_k^{(1)} > \alpha_k^{(2)}$, т.е. $\alpha_k = \alpha_k^{(2)}$. Это означает, что на этой итерации какая-то компонента x^i вектора x или какая-то компонента y^j вектора y становится равной нулю и далее не меняется. Так как максимальное число ненулевых компонент у каждого из векторов равно n, то не более чем за n итераций будет получено решение задачи.

5. ПРАВЫЕ ЧАСТИ В ОСОБЫХ ПАРАХ

Пусть $[x, y]$ – особая пара, не совпадающая с решением задачи. Тогда $J_P(x, y) \ne \emptyset$ и из определения невырожденной пары следует, что $J_Z(x, y) \ne \emptyset$, причем $|J_Z(x, y)| = |J_P(x, y)|$. Имеем в этой паре

$$L_x^P(x, y, u) = 0, \quad L_x^B(x, y, u) = 0, \tag{38}$$

$$L_y^P(x, y, u) = 0, \quad L_y^N(x, y, u) = 0. \tag{39}$$

Здесь и ниже $u = u(x, y)$. Из (39) получаем, что $u^P = x^P$, $u^N = 0$.

Так как матрица M положительно определена, она достаточна по строкам (см. [1]). Это означает, что она не обращает знак ни одного вектора z из $\mathbb{R}^n$, т.е. из неравенства $D(z)M^{\mathrm{T}}z \le 0_n$ следует, что $D(z)M^{\mathrm{T}}z = 0_n$.

Предложение 7. *Пусть $[x, y]$ – особая пара, не совпадающая с решением задачи* (1). *Тогда найдется по крайней мере один индекс $i \in J_Z(x, y)$, для которого $L_x^i(x, y, u) < 0$ или $L_y^i(x, y, u) < 0$.*

Доказательство от противного. Предположим, что $L_x^Z(x, y, u) \ge 0$ и $L_y^Z(x, y, u) \ge 0$. Данные неравенства можно переписать в виде

$$L_x^Z(x, y, u) = y^Z + (M^{\mathrm{T}}u)^Z = (M^{\mathrm{T}}u)^Z \ge 0,$$

$$L_y^Z(x, y, u) = x^Z - u^Z = -u^Z \ge 0,$$

откуда приходим к неравенству

$$D(u^Z)(M^{\mathrm{T}}u)^Z \le 0. \tag{40}$$

Рассмотрим далее подобные соотношения относительно матрицы M для индексов из других множеств. Прежде всего, согласно (38) и (39),

$$L_x^P(x, y, u) = y^P + (M^{\mathrm{T}}u)^P = 0,$$
$$L_y^P(x, y, u) = x^P - u^P = 0.$$

Поэтому $(M^{\mathrm{T}}u)^P = -y^P < 0$, $u^P = x^P > 0$ и, следовательно,

$$D(u^P)(M^{\mathrm{T}}u)^P < 0. \tag{41}$$

Для индексов из множества $J_B(x, y)$, опять же согласно (38), выполняется $L_x^B(x, y, u) = y^B + (M^{\mathrm{T}}u)^B = (M^{\mathrm{T}}u)^B = 0$, что приводит к равенству

$$D(u^B)(M^{\mathrm{T}}u)^B = 0. \tag{42}$$

Точно так же для множества $J_N(x, y)$ имеем $L_y^N(x, y, u) = x^N - u^N = 0$, или $u^N = x^N = 0$, откуда следует

$$D(u^N)(M^{\mathrm{T}}u)^N = 0. \tag{43}$$

Объединяя теперь равенства (42), (43) и неравенства (40), (41), приходим к выводу, что

$$D(u)(M^{\mathrm{T}}u) \le 0_n. \tag{44}$$

Но положительно-определенная матрица M достаточна по строкам, поэтому выполнение неравенства (44) фактически означает выполнение равенства $D(u)M^{\mathrm{T}}u = 0_n$. На основании данного равенства получаем $u^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}u = e^{\mathrm{T}}D(u)M^{\mathrm{T}}u = 0$, что для положительно-определенной матрицы M^{T} может иметь место в том и только том случае, когда $u = 0_n$. С другой стороны, так как $J_P(x, y) \ne \emptyset$ и $u^P = x^P > 0$, то $u \ne 0_n$. Пришли к противоречию.

6. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ БАРЬЕРНО-ПРОЕКТИВНЫЙ МЕТОД

Опишем теперь алгоритм решения задачи (1), основанный на измененных рекуррентных соотношениях (12), но по-прежнему использующий наискорейший спуск. Характерной особенностью этого алгоритма является его монотонность по отношению к множеству индексов $J_P(x, y)$ в том смысле, что если какой-либо индекс i покидает данное множество, то в дальнейшем он обратно в него не возвращается. Число индексов в множестве $J_P(x, y)$ постепенно уменьшается в ходе итеративного процесса.

Пусть задана начальная допустимая пара $[x_0, y_0]$. Предположим, что на некоторой k-й итерации получена допустимая пара $[x_k, y_k]$. Если данная пара есть решение задачи, то процесс останавливается. Иначе определяем новую пару $[x_{k+1}, y_{k+1}]$. При этом возможны два случая:

1) пара $[x_k, y_k]$ не является угловой точкой множества $\mathcal{L}_+$; тогда новую пару вычисляем по формулам (12), где направления Δx_k и Δy_k вычисляются согласно (13);

2) пара $[x_k, y_k]$ есть угловая точка множества $\mathcal{L}_+$ и $J_P(x_k, y_k) \ne \emptyset$; в силу невырожденности задачи (1), при этом обязательно $J_Z(x_k, y_k) \ne \emptyset$ и $|J_Z(x_k, y_k)| = |J_P(x_k, y_k)|$.

Обозначим

$$J_Z^-(x, y) = \{i \in J_Z(x, y) : (M^{\mathrm{T}}u(x, y))^{(i)} < 0\},$$
$$J_Z^+(x, y) = \{i \in J_Z(x, y) : u^{(i)}(x, y) > 0\}.$$

Выберем произвольный индекс j, принадлежащий либо непустому множеству $J_Z^-(x_k, y_k)$, либо непустому множеству $J_Z^+(x_k, y_k)$. Согласно предложению 7, по крайней мере одно из данных множеств не пусто. Пусть, для определенности, это $J_Z^-(x_k, y_k)$. Зададимся $\varepsilon > 0$ и положим

$$\bar{x}_k = x_k + \varepsilon e_j, \quad \bar{y}_k = y_k, \tag{45}$$

где e_j является j-м единичным ортом.

Если $j \in J_Z^+(x_k, y_k)$, то вместо (45) возьмем

$$\bar{x}_k = x_k, \quad \bar{y}_k = y_k + \varepsilon e_j. \tag{46}$$

Правую часть (13) вместо пары $[x_k, y_k]$ теперь вычисляем в паре $[\bar{x}_k, \bar{y}_k]$.

1. *Случай* $\bar{x} = x + \varepsilon e_j$, $\bar{y} = y$. Найдем $u(\bar{x}, \bar{y}) = u(x + \varepsilon e_j, y)$. Пусть m_j есть j-й столбец матрицы M. Имеем

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = MD(\bar{x})M^{\mathrm{T}} + D(\bar{y}) = MD(x)M^{\mathrm{T}} + D(y) + \varepsilon m_j m_j^{\mathrm{T}} = G(x, y) + \varepsilon m_j m_j^{\mathrm{T}}.$$

Так как матрица $G(x, y)$ неособая, то по формуле Шермана–Моррисона получаем

$$G^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) = (G(x, y) + \varepsilon m_j m_j^{\mathrm{T}})^{-1} = G^{-1}(x, y) - d_j(x, y)G^{-1}(x, y)m_j m_j^{\mathrm{T}} G^{-1}(x, y), \tag{47}$$

где

$$d_j(x, y) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon m_j^{\mathrm{T}} G^{-1}(x, y)m_j} > 0.$$

Введем обозначение

$$q_j(x, y) = d_j(x, y)G^{-1}(x, y)m_j m_j^{\mathrm{T}} u(x, y). \tag{48}$$

Тогда, согласно (10) и (47),

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{y}) &= G^{-1}(\bar{x}, \bar{y})[(I_n - M)D(\bar{x})\bar{y}] = G^{-1}(\bar{x}, \bar{y})[(I_n - M)D(x)y] = \\ &= [I_n - d_j(x, y)G^{-1}(x, y)m_j m_j^{\mathrm{T}}]G^{-1}(x, y)(I_n - M)D(x)y = \\ &= [I_n - d_j(x, y)G^{-1}(x, y)m_j m_j^{\mathrm{T}}]u(x, y) = u(x, y) - q_j(x, y). \end{aligned} \tag{49}$$

Здесь учтено, что $y^j = 0$ и, следовательно, $D(e_j)y = 0_n$.

Пусть M_{JP}, M_{JB}, M_{JN} и M_{JZ} – подматрицы матрицы M, составленные из столбцов с номерами, соответственно, из множеств $J_P(x, y)$, $J_B(x, y)$, $J_N(x, y)$ и $J_Z(x, y)$. Обозначим также

$$F_1(x, y, j) = \begin{bmatrix} F_1^{(1)}(x, y, j) \\ F_1^{(2)}(x, y, j) \end{bmatrix}, \quad F_1^{(i)}(x, y, j) = F_0^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}), \quad i = 1, 2.$$

На основании (11) и (49) приходим к соотношению

$$F_1^{(1)}(x, y, j) = D(x + \varepsilon e_j)[y + M^{\mathrm{T}} u(\bar{x}, \bar{y})] = D(x + \varepsilon e_j)[y + M^{\mathrm{T}}(u(x, y) - q_j(x, y))],$$

или, с разбиением на подвекторы,

$$\begin{aligned} (F_1^{(1)}(x, y, j))^P &= D(x^P)[y^P + M_{JP}^{\mathrm{T}}(u(x, y) - q_j(x, y))] = (F_0^{(1)}(x, y))^P - D(x^P)M_{JP}^{\mathrm{T}} q_j(x, y), \\ (F_1^{(1)}(x, y, j))^B &= D(x^B)[M_{JB}^{\mathrm{T}}(u(x, y) - q_j(x, y))] = (F_0^{(1)}(x, y))^B - D(x^B)M_{JB}^{\mathrm{T}} q_j(x, y), \\ (F_1^{(1)}(x, y, j))^N &= D(x^N)[y^N + M_{JN}^{\mathrm{T}}(u(x, y) - q_j(x, y))] = (F_0^{(1)}(x, y))^N = 0, \\ (F_1^{(1)}(x, y, j))^Z &= \varepsilon D(e_j^Z)M_{JZ}^{\mathrm{T}}(u(x, y) - q_j(x, y)). \end{aligned} \tag{50}$$

Таким образом, по сравнению с $F_0^{(1)}(x, y)$ меняются только первые два из подвекторов (50) и одна компонента последнего подвектора, а именно та, которая соответствует индексу j:

$$(F_1^{(1)}(x, y, j))^j = \varepsilon m_j^{\mathrm{T}}(u(x, y) - q_j(x, y)) = d_j(x, y)m_j^{\mathrm{T}} u(x, y).$$

Отметим, что поскольку $j \in J_Z^-(x, y)$, то $m_j^{\mathrm{T}} u(x, y) = L_x^j(x, y, u) < 0$.

Для $F_1^{(2)}(x, y, j)$ получаем, соответственно,

$$F_1^{(2)}(x, y, j) = F_0^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) = D(y)[x + \varepsilon e_j - u(\bar{x}, \bar{y})] = D(y)[x + \varepsilon e_j - u(x, y) + q_j(x, y)],$$

или, опять же после разбиения на подвекторы,

$$(F_1^{(2)}(x, y, j))^P = D(y^P)[x^P - u^P(x, y) + q_j^P(x, y)] = (F_0^{(2)}(x, y))^P + D(y^P)q_j^P(x, y),$$

$$(F_1^{(2)}(x, y, j))^B = D(y^B)[x^B - u^B(x, y) + q_j^B(x, y)] = (F_0^{(2)}(x, y))^B = 0,$$

$$(F_1^{(2)}(x, y, j))^N = D(y^N)[x^N - u^N(x, y) + q_j^N(x, y)] = (F_0^{(2)}(x, y))^N + D(y^N)q_j^N(x, y),$$

$$(F_1^{(2)}(x, y, j))^Z = D(y^Z)[x^Z - u^Z(x, y) + q_j^Z(x, y)] = (F_0^{(2)}(x, y))^Z = 0.$$

По сравнению с $F_0^{(2)}(x, y)$ меняются только первая и третья составляющие, вторая и четвертая остаются равными нулевым векторам.

Беря теперь вместо (13)

$$\Delta x_k = F_1^{(1)}(x_k, y_k, j), \quad \Delta y_k = F_1^{(2)}(x_k, y_k, j), \tag{51}$$

новую пару $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ вычисляем по формулам (12).

2. *Случай* $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y + \varepsilon e_j$. Определяем $u(\bar{x}, \bar{y}) = u(x, y + \varepsilon e_j)$. Из (3) вытекает равенство

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = MD(x)M^{\mathrm{T}} + D(y) + \varepsilon D(e_j) = G(x, y) + \varepsilon e_j e_j^{\mathrm{T}}.$$

Применяя формулу Шермана–Моррисона, находим

$$G^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) = G^{-1}(x, y) - f_j(x, y)G^{-1}(x, y)e_j e_j^{\mathrm{T}} G^{-1}(x, y) = (I_n - f_j(x, y)G^{-1}(x, y)D(e_j))G^{-1}(x, y), \tag{52}$$

где

$$f_j(x, y) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon e_j^{\mathrm{T}} G^{-1}(x, y)e_j} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon G_{jj}^{-1}(x, y)},$$

$G_{jj}^{-1}(x, y)$ есть j-й диагональный элемент матрицы $G^{-1}(x, y)$. В силу положительной определенности матрицы $G(x, y)$, а следовательно, и матрицы $G^{-1}(x, y)$, он строго положительный, поэтому $f_j(x, y) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Подставляя (52) в (10) и принимая во внимание, что $D(x)e_j = 0_n$, получаем

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = G^{-1}(\bar{x}, \bar{y})(I_n - M)D(\bar{x})\bar{y} = G^{-1}(\bar{x}, \bar{y})(I_n - M)D(x)y =$$

$$= [I_n - f_j(x, y)G^{-1}(x, y)D(e_j)]G^{-1}(x, y)(I_n - M)D(x)y = u(x, y) - p_j(x, y).$$

Здесь введено обозначение

$$p_j(x, y) = f_j(x, y)G^{-1}(x, y)D(e_j)u(x, y). \tag{53}$$

Вычислим теперь вместо $F_1(x, y, j)$

$$F_2(x, y, j) = \begin{bmatrix} F_2^{(1)}(x, y, j) \\ F_2^{(2)}(x, y, j) \end{bmatrix}, \quad F_2^{(i)}(x, y, j) = F_0^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}), \quad i = 1, 2.$$

Имеем

$$F_2^{(1)}(x, y, j) = D(x)[y + \varepsilon e_j + M^{\mathrm{T}} u(\bar{x}, \bar{y})] = D(x)[y + \varepsilon e_j + M^{\mathrm{T}}(u(x, y) - p_j(x, y))],$$

$$F_2^{(2)}(x, y, j) = D(y + \varepsilon e_j)[x - u(\bar{x}, \bar{y})] = D(y + \varepsilon e_j)[x - u(x, y) + p_j(x, y)],$$

или, с разбиением на подвекторы,

$$(F_2^{(1)}(x, y, j))^P = D(x^P)[y^P + M_{JP}^{\mathrm{T}}(u(x, y) - p_j(x, y))] = (F_0^{(1)}(x, y))^P - D(x^P)M_{JP}^{\mathrm{T}} p_j(x, y),$$

$$(F_2^{(1)}(x, y, j))^B = D(x^B)[M_{JB}^{\mathrm{T}}(u(x, y) - p_j(x, y))] = (F_0^{(1)}(x, y))^B - D(x^B)M_{JB}^{\mathrm{T}} p_j(x, y),$$

$$(F_2^{(1)}(x, y, j))^N = D(x^N)[y^N + M_{JN}^{\mathrm{T}}(u(x, y) - p_j(x, y))] = (F_0^{(1)}(x, y))^N = 0,$$

$$(F_2^{(1)}(x, y, j))^Z = D(x^Z)[\varepsilon e_j^Z + M_{JZ}^{\mathrm{T}}(u^Z(x, y)) - p_j^Z(x, y))] = (F_0^1)^Z(x, y) = 0,$$

$$(F_2^{(2)}(x, y, j))^P = D(y^P)[x^P - u^P(x, y) + p_j^P(x, y)] = (F_0^{(2)}(x, y))^P - D(y^P)p_j^P(x, y),$$

$$(F_2^{(2)}(x, y, j))^B = D(y^B)[x^B - u^B(x, y) + p_j^B(x, y)] = (F_0^{(2)}(x, y))^B = 0,$$

$$(F_2^{(2)}(x, y, j))^N = D(y^N)[p_j^N(x, y) - u^N(x, y)] = (F_0^{(2)}(x, y))^N + D(y^N)p_j^N(x, y),$$

$$(F_2^{(2)}(x, y, j))^Z = \varepsilon D(e_j^Z)[p_j^Z(x, y) - u^Z(x, y)].$$

У вектора $(F_2^{(2)}(x, y, j))^Z$ все компоненты, кроме той, которая соответствует индексу j, равны нулю. Проводя соответствующие вычисления, приходим к выводу, что j-я компонента равна $(F_2^{(2)}(x, y, j))^j = -f_j(x, y)u^{(j)}(x, y)$ и, поскольку $j \in J_Z^+(x, y)$, строго отрицательна.

Теперь вместо (13) полагаем

$$\Delta x_k = F_2^{(1)}(x_k, y_k, j), \quad \Delta y_k = F_2^{(2)}(x_k, y_k, j) \tag{54}$$

и новую пару $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ вычисляем по формулам (12).

Отметим, что так как $u_k = u(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ находится из условия

$$[MD(\bar{x}_k)M^{\mathrm{T}} + D(\bar{y}_k)]u_k + (M - I_n)D(\bar{x}_k)\bar{y}_k = 0_n,$$

то в любом случае получаем $M\Delta x_k - \Delta y_k = 0_n$. Это означает, что если пара $[x_k, y_k]$ удовлетворяет равенству $y - Mx - q = 0_n$, то и последующая пара будет удовлетворять этому равенству.

Предложение 8. *Пусть* $[x_k, y_k]$ *является особой парой, отличной от решения задачи* (1). *Пусть, кроме того,* Δx_k, Δy_k *выбираются согласно* (51) *при* $j \in J_Z^-(x_k, y_k)$ *и* (54) *при* $j \in J_Z^+(x_k, y_k)$. *Тогда* $c_1 = c_1(x_k, y_k) > 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что Δx_k, Δy_k определяются согласно (51). Имеем в этом случае

$$c_1 = \langle y_k, [D(x_k) + \varepsilon D(e_j)][y_k + M^{\mathrm{T}}u_k - M^{\mathrm{T}}q_j(x_k, y_k)]\rangle + \langle x_k, D(y_k)[x_k - u_k + \varepsilon e_j + q_j(x_k, y_k)]\rangle,$$

где $u_k = u(x_k, u_k)$.

Принимая во внимание, что $D(x_k)(y_k + M^{\mathrm{T}}u_k) = 0_n$, $D(y_k)(x_k - u_k) = 0_n$ и $D(e_j)x_k = 0_n$, получаем

$$c_1 = \langle D(x_k)y_k, (I_n - M^{\mathrm{T}})q_j(x_k, y_k)\rangle = \langle (I_n - M)D(x_k)y_k, q_j(x_k, y_k)\rangle.$$

Из (10) следует, что $(I_n - M)D(x_k)y_k = G(x_k, y_k)u_k$. Поэтому с учетом выражения (48) для $q_j(x, y)$ имеем

$$c_1 = d_j(x_k, y_k)\langle u_k, m_j m_j^{\mathrm{T}} u_k\rangle = d_j(x_k, y_k)\langle m_j, u_k\rangle^2 = d_j(x_k, y_k)[L_x^j(x_k, y_k)]^2. \tag{55}$$

Поскольку $j \in J_Z^-(x_k, y_k)$, отсюда заключаем, что $c_1 > 0$.

Если Δx_k, Δy_k выбираются согласно (54), то

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle y_k, D(x_k)(y_k + \varepsilon D(e_j) + M^{\mathrm{T}}u_k - M^{\mathrm{T}}p_j(x_k, y_k))\rangle + \langle x_k, (D(y_k) + \varepsilon D(e_j))(x_k - u_k + p_j(x_k, y_k))\rangle = \\ &= \langle D(x_k)y_k, (I_n - M^{\mathrm{T}})p_j(x_k, y_k)\rangle = \langle G(x_k, y_k)u_k, p_j(x_k, y_k)\rangle. \end{aligned} \tag{56}$$

Из (56) и (53) следует, что

$$c_1 = f_j(x_k, y_k)\langle u_k, D(e_j)u_k\rangle = f_j(x_k, y_k)(u^j)^2 = f_j(x_k, y_k)[L_y^j(x_k, y_k, u_k)]^2. \quad (57)$$

Опять же из того, что $j \in J_Z^+(x_k, y_k)$, вытекает неравенство $c_1 > 0$. Предложение доказано.

Для константы $c_2 = \langle \Delta x_k, \Delta y_k\rangle$ в случае (51) получаем выражение

$$c_2 = -\langle q_j(x_k, y_k), MD(v_k)q_j(x_k, y_k)\rangle, \quad (58)$$

где $v_k = D(x_k)y_k$. Соответственно, в случае (54) имеем

$$c_2 = -\langle p_j(x_k, y_k), MD(v_k)p_j(x_k, y_k)\rangle. \quad (59)$$

Предложение 9. *Пусть выполнены условия предложения* 8. *Тогда* $c_2 = c_2(x_k, y_k) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда Δx_k, Δy_k выбираются согласно (54). Обозначим $s_1 = M^{\mathrm{T}}p_j(x_k, y_k)$, $s_2 = p_j(x_k, y_k)$. Тогда выражение (59) для c_2 перепишется так:

$$c_2 = -\langle s_1, D(v_k)s_2\rangle. \quad (60)$$

Имеем, в силу (53),

$$MD(x_k)s_1 + D(y_k)s_2 = G(x_k, y_k)p_j(x_k, y_k) = f_j(x_k, y_k)D(e_j)u_k. \quad (61)$$

Умножим левую и правую части (61) на матрицу $D(x_k)$ и учтем, что $D(x_k)D(e_j) = 0_{nn}$. В результате получим $D(x_k)MD(x_k)s_1 + D(v_k)s_2 = 0_n$. Отсюда $D(v_k)s_2 = -D(x_k)MD(x_k)s_1$, и после подстановки в (60) приходим к выражению

$$c_2 = \langle s_1, D(x_k)MD(x_k)s_1\rangle \ge 0, \quad (62)$$

причем равенство в (62) возможно в том и только том случае, когда $D(x_k)s_1 = 0_n$, или, поскольку $f_j(x_k, y_k) > 0$,

$$D(x_k)M^{\mathrm{T}}G^{-1}(x_k, y_k)D(e_j)u_k = 0_n. \quad (63)$$

Покажем, что равенство (63) в действительности не выполняется. В противном случае после умножения левой и правой частей на матрицу M получим $MD(x_k)M^{\mathrm{T}}G^{-1}(x_k, y_k)D(e_j)u_k = 0_n$, или

$$[-D(y_k) + G(x_k, y_k)]G^{-1}(x_k, y_k)D(e_j)u_k = 0_n.$$

Отсюда следует, что

$$D(e_j)u(x_k, y_k) = D(y_k)G^{-1}(x_k, y_k)D(e_j)u_k. \quad (64)$$

В левой части равенства (64) стоит вектор $D(e_j)u_k$, все компоненты которого равны нулю, кроме j-й компоненты, равной $u_k^j > 0$. С другой стороны, у вектора $D(y_k)G^{-1}(x_k, y_k)D(e_j)u_k$ компоненты с индексами из множества $J_B(x_k, y_k) \cup J_Z(x_k, y_k)$ также равны нулю, в том числе и j-я компонента. Пришли к противоречию. Таким образом, равенство (63) не выполняется.

Рассмотрим теперь случай, когда Δx_k, Δy_k выбираются согласно (51). Обозначая $s_1 = M^{\mathrm{T}}q_j(x_k, y_k)$, $s_2 = q_j(x_k, y_k)$, из (58) приходим к

$$c_2 = -\langle D(v_k)s_1, s_2\rangle. \quad (65)$$

Равенство (61) заменяется на следующее:

$$MD(x_k)s_1 + D(y_k)s_2 = G(x_k, y_k)q_j(x_k, y_k) = d_j(x_k, y_k)m_jm_j^{\mathrm{T}}u(x_k, y_k) = d_j(x_k, y_k)MD(e_j)M^{\mathrm{T}}u_k. \quad (66)$$

После умножения левой и правой частей (66) слева на матрицу $D(y_k)M^{-1}$ получаем с учетом того, что $D(y_k)D(e_j) = 0_{nn}$,

$$D(v_k)s_1 + D(y_k)M^{-1}D(y_k)s_2 = 0_n.$$

Отсюда $D(v_k)s_1 = -D(y_k)M^{-1}D(y_k)s_2$. Таким образом, согласно (65),

$$c_2 = \langle s_2, D(y_k)M^{-1}D(y_k)s_2\rangle \ge 0, \quad (67)$$

причем равенство в (67) имеет место в том и только том случае, когда $D(y_k)s_2 = 0_n$ или, так как $d_j(x_k, y_k) > 0$, когда

$$D(y_k)G^{-1}(x_k, y_k)m_j m_j^{\mathrm{T}} u_k = 0_n. \tag{68}$$

Кроме того, поскольку $m_j^{\mathrm{T}} u_k = L_x^j(x_k, y_k, u_k) < 0$, то наряду с (68) должно выполняться равенство

$$D(y_k)G^{-1}(x_k, y_k)m_j = 0_n. \tag{69}$$

Покажем, что равенство (69) невозможно. Действительно, если оно выполняется, то имеет место равенство

$$[-MD(x_k)M^{\mathrm{T}} + G(x_k, y_k)]G^{-1}(x_k, y_k)m_j = 0_n,$$

или

$$MD(x_k)M^{\mathrm{T}}G^{-1}(x_k, y_k)m_j = m_j. \tag{70}$$

Обозначим $b(x_k, y_k) = D(x_k)M^{\mathrm{T}}G^{-1}(x_k, y_k)m_j$. У вектора $b(x_k, y_k)$ компоненты $b^i(x_k, y_k)$ для $i \in J_N(x_k, y_k) \cup \cup J_Z(x_k, y_k)$ нулевые. Поэтому из (70) следует, что ненулевой вектор m_j является линейной комбинацией столбцов m_i матрицы M с номерами $i \in J_P(x_k, y_k) \cup J_B(x_k, y_k)$. Данное множество индексов не пусто, поскольку не пусто множество $J_P(x_k, y_k)$. Так как $j \in J_Z(x_k, y_k)$, то это означает, что столбцы матрицы M линейно зависимы. Следовательно, матрица M особая, что противоречит ее положительной определенности. Предложение доказано.

На основании предложений 8 и 9 приходим к выводу, что верхняя оценка для шага α_k, обеспечивающая наибольшее убывание функции $V(x, y)$, остается прежней, равной $\alpha_k^{(1)} = c_1/(2c_2)$. Однако теперь величины c_1 и c_2 определяются согласно формулам (55), (57), (58) и (59).

7. КОНЕЧНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

Ниже последовательность $\{[x_k, y_k]\}$ называется *траекторией.*

Лемма 4. *Пусть траектория $\{[x_k, y_k]\}$ сходится к особой паре $[\bar{x}, \bar{y}]$, не совпадающей с решением задачи* (1). *Тогда существует такая константа $C > 0$, что $\alpha_k^{(2)} \le C$ для всех $k \ge 0$.*

Доказательство. Так как особая пара $[\bar{x}, \bar{y}]$ не совпадает с решением задачи, то $J_P(\bar{x}, \bar{y}) \ne \emptyset$. Из условия невырожденности задачи следует, что $[\bar{x}, \bar{y}]$ является угловой точкой множества $\mathcal{L}_+$ и $|J_Z(\bar{x}, \bar{y})| = |J_P(\bar{x}, \bar{y})|$. Опять же в силу невырожденности задачи можно указать окрестность

$$\mathcal{S}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) = \{[x, y] \in \mathcal{L}_+ : \max\{\|x - \bar{x}\|_\infty, \|y - \bar{y}\|_\infty\} \le \varepsilon\} \tag{71}$$

пары $[\bar{x}, \bar{y}]$ такую, что в этой окрестности нет других особых пар, кроме самой пары $[\bar{x}, \bar{y}]$. Для допустимых пар из этой окрестности выполняются включения

$$J_P(x, y) \subseteq J_P(\bar{x}, \bar{y}), \quad J_B(x, y) \subseteq J_B(\bar{x}, \bar{y}) \cup J_Z(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$J_Z(x, y) \subseteq J_Z(\bar{x}, \bar{y}), \quad J_N(x, y) \subseteq J_N(\bar{x}, \bar{y}) \cup J_Z(\bar{x}, \bar{y}).$$

Введем также в рассмотрение индексные множества

$$J_+^{(1)}(x, y) = \{i \in J : L_x^i(x, y, u(x, u)) > 0\},$$

$$J_-^{(1)}(x, y) = \{i \in J : L_x^i(x, y, u(x, u)) < 0\},$$

$$J_+^{(2)}(x, y) = \{i \in J : L_y^i(x, y, u(x, u)) > 0\},$$

$$J_-^{(2)}(x, y) = \{i \in J : L_y^i(x, y, u(x, u)) < 0\}.$$

В силу сходимости последовательности $\{[x_k, y_k]\}$ к $[\bar{x}, \bar{y}]$ можно указать достаточно большой номер $K_1 \geq 0$ такой, что при $k \geq K_1$ обязательно

$$x_k^i = 0, \quad i \in J_-^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) \cap (J_N(\bar{x}, \bar{y}) \cup J_Z(\bar{x}, \bar{y})),$$
$$y_k^i = 0, \quad i \in J_-^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) \cap (J_B(\bar{x}, \bar{y}) \cup J_Z(\bar{x}, \bar{y})),$$

иначе эти компоненты увеличивались бы от итерации к итерации, что противоречит сходимости $\{[x_k, y_k]\}$ к $[\bar{x}, \bar{y}]$.

Обозначим далее

$$J_*^{(1)} = (J_N(\bar{x}, \bar{y}) \cup J_Z(\bar{x}, \bar{y})) \cap J_+^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$J_*^{(2)} = ((J_B(\bar{x}, \bar{y}) \cup J_Z(\bar{x}, \bar{y})) \cap J_+^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}).)$$

Для $[x_k, y_k]$ достаточно близких к $[\bar{x}, \bar{y}]$ шаг $\alpha_k^{(2)}$ удовлетворяет неравенству

$$\alpha_k^{(2)} \leq \min\left\{\min_{i \in J_*^{(1)}} \frac{1}{L_x^i(x_k, y_k, u_k)}, \min_{i \in J_*^{(2)}} \frac{1}{L_y^i(x_k, y_k, u_k)}\right\},$$

поэтому он ограничен сверху.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Тогда* $\alpha_k^{(1)} \longrightarrow +\infty$.

Доказательство. Как показано при доказательстве леммы 4, все пары $[x_k, y_k]$ для k достаточно больших являются неособыми. Коэффициенты c_1 и c_2 в неособых парах определяются формулами (30) и (31), где матрица $Q(x, y)$ имеет вид (32). Собственными значениями $Q(x, y)$ являются числа $\lambda = \pm\sqrt{v^i}$, $i \in J$, а собственными векторами – столбцы ортогональной матрицы

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix},$$

причем первые n столбцов соответствуют собственным значениям $\sqrt{v^i}$, $i \in J$, а последующие n столбцов – значениям $-\sqrt{v^i}$, $i \in J$.

Обозначим $\bar{v} = v(\bar{x}, \bar{y})$. В особой паре $[\bar{x}, \bar{y}]$ выполняется $\bar{v}^P > 0$, $\bar{v}^B = 0$, $\bar{v}^N = 0$, $\bar{v}^Z = 0$. Обозначим также $n_1 = |J_P(\bar{x}, \bar{y})|$, $n_2 = |J_B(\bar{x}, \bar{y})|$, $n_3 = |J_N(\bar{x}, \bar{y})|$ и $n_4 = |J_Z(\bar{x}, \bar{y})|$. Так как пара $[\bar{x}, \bar{y}]$ не является решением задачи, то $n_1 > 0$. Первые n_1 столбцов и столбцы с номерами от $n + 1$ до $n + n_1$ матрицы U соответствуют ненулевым собственным значениям $\pm\sqrt{v^i}$, $i \in J_P(\bar{x}, \bar{y})$, матрицы $\mathcal{Q}(\bar{x}, \bar{y})$. Остальные столбцы U соответствуют нулевому собственному значению матрицы $\mathcal{Q}(\bar{x}, \bar{y})$.

Пусть $\overline{W} = W(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{w} = w(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{P} = P(\bar{x}, \bar{y})$, где $W(x, y)$, $w(x, y)$ и $P(x, y)$ определяются согласно (7), (18) и (19). Пусть, кроме того, $\mathcal{H}(x, y)$ – подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, порожденное столбцами матрицы $W(x, y)$, $\mathcal{H}^\perp(x, y)$ – его ортогональное дополнение. Матрица $\bar{P}$ проектирует на подпространство $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y})$, матрица $I_{2n} - \bar{P}$ – на ортогональное подпространство $\overline{\mathcal{H}}^\perp$. Матрицы $\overline{W}_1 = W_1(\bar{x})$ и $\overline{W}_2 = W_2(\bar{y})$ имеют вид

$$\overline{W}_1 = \begin{bmatrix} D^{1/2}(\bar{x}^P)M_{JP}^{\mathrm{T}} \\ D^{1/2}(\bar{x}^B)M_{JB}^{\mathrm{T}} \\ 0_{n_3n} \\ 0_{n_4n} \end{bmatrix}, \quad \overline{W}_2 = \begin{bmatrix} -D^{1/2}(\bar{y}^P) & 0_{n_1n_2} & 0_{n_1n_3} & 0_{n_1n_4} \\ 0_{n_2n_1} & 0_{n_2n_2} & 0_{n_2n_3} & 0_{n_2n_4} \\ 0_{n_3n_1} & 0_{n_3n_2} & -D^{1/2}(\bar{y}^N) & 0_{n_3n_4} \\ 0_{n_4n_1} & 0_{n_4n_2} & 0_{n_4n_3} & 0_{n_4n_4} \end{bmatrix}.$$

Из условия невырожденности задачи (1) следует, что матрица $\overline{W}$ имеет полный ранг, равный n. Поэтому ортогональное подпространство $\overline{\mathcal{H}}^{\perp}$ также имеет размерность n. Нетрудно видеть, что таким подпространством $\overline{\mathcal{H}}^{\perp}$ является подпространство векторов $z = [z_1, z_2] \in \mathbb{R}^{2n}$, у которых $z_1 \in \mathbb{R}^n$, $z_2 \in \mathbb{R}^n$ и $z_1^P = 0_{n_1}$, $z_1^B = 0_{n_2}$, $z_2^P = 0_{n_1}$, $z_2^N = 0_{n_4}$. Подпространство $\overline{\mathcal{H}}^{\perp}$ принадлежит подпространству $\mathcal{L}$, порожденному столбцами матрицы U с номерами от $n_1 + 1$ до n и от $n + n_1 + 1$ до $2n$. Как уже отмечалось, все они соответствуют нулевому собственному значению матрицы $\mathfrak{Q}(\bar{x}, \bar{y})$.

Поэтому если рассмотреть оптимизационную задачу

$$\beta_1(x, y) = \max_{\substack{z \in \mathcal{H}^{\perp}(x, y) \\ \|z\| = 1}} |\langle z, \mathfrak{Q}(x, y)z\rangle|,$$

то выполняется неравенство $\beta_1(\bar{x}, \bar{y}) \le \beta_2(\bar{x}, \bar{y})$, где

$$\beta_2(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\substack{z \in \mathcal{L} \\ \|z\| = 1}} |\langle z, \mathfrak{Q}(\bar{x}, \bar{y})z\rangle|.$$

Но, в силу вариационного описания собственных значений симметричной матрицы, $\beta_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Следовательно, $\beta_1(\bar{x}, \bar{y}) = \beta_2(\bar{x}, \bar{y})$.

Для допустимых неособых пар $[x, y]$, близких к $[\bar{x}, \bar{y}]$, выполняется

$$\frac{1}{\alpha^{(1)}(x, y)} = \frac{\langle [I - P(x, y)]w(x, y), \mathfrak{Q}(x, y)[I - P(x, y)]w(x, y)\rangle}{\|[I - P(x, y)]w(x, y)\|^2} \le$$
$$\le \frac{|\langle [I - P(x, y)]w(x, y), \mathfrak{Q}(x, y)[I - P(x, y)]w(x, y)\rangle|}{\|[I - P(x, y)]w(x, y)\|^2} \le \beta_1(x, y),$$

где величина $\beta_1(x, y)$ в силу непрерывности стремится к $\beta_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ при $[x, y] \longrightarrow [\bar{x}, \bar{y}]$. Так как $\alpha^{(1)}(x, y) > 0$ для таких пар, то отсюда заключаем, что $\alpha^{(1)}(x, y) \longrightarrow +\infty$ при $[x, y] \longrightarrow [\bar{x}, \bar{y}]$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть задача* (1) *является невырожденной. Пусть, кроме того, функция* $V(x, y)$ *принимает разные значения в разных угловых точках множества* $\mathfrak{X}_+$. *Тогда для любой начальной допустимой пары* $[x_0, y_0]$ *метод наискорейшего спуска находит решение за конечное число итераций.*

Доказательство. Возьмем множество $\mathcal{W}_c(x_*, y_*)$, определяемое согласно (28). Согласно утверждению теоремы 1, всегда можно указать достаточно малое $c > 0$ такое, что если пара $[x_k, y_k]$ на некоторой итерации попадает в окрестность $\mathcal{W}_c(x_*, y_*)$, то в дальнейшем не более чем за n шагов будет получено решение. Поэтому, для того чтобы обосновать конечную сходимость, достаточно показать, что для любой допустимой начальной пары $[x_0, y_0]$ траектория в последующем обязательно окажется в $\mathcal{W}_c(x_*, y_*)$.

От противного: пусть $[x_k, y_k] \notin \mathcal{W}_c(x_*, y_*)$ для всех $k \ge 1$. Обозначим $c_0 = V(x_0, y_0)$. Из положительной определенности матрицы M следует, что множество $\mathcal{W}_{c_0}(x_*, y_*)$ ограничено. Поэтому ограниченным будет множество $\Omega = \mathcal{W}_{c_0}(x_*, y_*) \setminus \mathcal{W}_c(x_*, y_*)$, а также его замыкание $\overline{\Omega}$. Таким образом, последовательность $\{[x_k, y_k]\}$ принадлежит ограниченному множеству и, следовательно, имеет предельные точки. Поскольку соответствующая последовательность $\{V(x_k, y_k)\}$ является монотонно убывающей, то функция $V(x, y)$ принимает одинаковое значение во всех предельных точках.

Пусть $[\bar{x}, \bar{y}]$ – произвольная предельная точка, и пусть подпоследовательность $\{[x_{k_s}, y_{k_s}]\}$ сходится к $[\bar{x}, \bar{y}]$. Имеем $\bar{c} = V(\bar{x}, \bar{y}) \ge c > 0$. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Пара $[\bar{x}, \bar{y}]$ неособая. Для невырожденной задачи это означает, что $[\bar{x}, \bar{y}]$ не является угловой точкой множества $\mathfrak{X}_+$. Следовательно, найдется такая окрестность $\mathcal{S}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ пары

$[\bar{x}, \bar{y}]$ вида (71), в которой отсутствуют особые пары. Поэтому для любой пары $[x_{k_i}, y_{k_i}]$ из этой окрестности направления $\Delta x_{k_i}, \Delta y_{k_i}$, определяемые согласно формулам (13), непрерывным образом зависят от той пары, в которой они вычисляются. Кроме того, вектор-функция $u(x_{k_i}, y_{k_i})$ также непрерывна. Отсюда и из (26), (27) следует непрерывная зависимость обоих шагов $\alpha_{k_i}^{(1)}$, $\alpha_{k_i}^{(2)}$ и определяемого через них результирующего шага $\alpha_{k_i} = \min\{\alpha_{k_i}^{(1)}, \alpha_{k_i}^{(2)}\}$.

Обозначим

$$\Delta V = \Delta V(x, y) = V(x, y) - V(x - \alpha(x, y)\Delta x(x, y), y - \alpha(x, y)\Delta y(x, y)),$$

где $\Delta x(x, y)$, $\Delta y(x, y)$ и $\alpha(x, y)$ – направления и шаг, вычисляемые согласно (13), (25) при $x_k = x$, $y_k = y$. Пусть $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$. Так как $[\bar{x}, \bar{y}]$ – неособая пара, то $\bar{\alpha} > 0$ и $\Delta V(\bar{x}, \bar{y}) = \gamma > 0$. Более того, в силу непрерывности существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\Delta V(x, y) \geq \gamma/2 \tag{72}$$

для всех $[x, y] \in \mathcal{S}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$.

Выберем теперь номер $K_1 > 0$ настолько большим, чтобы $[x_{k_i}, y_{k_i}] \in \mathcal{S}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ при $k_i \geq K_1$. Кроме того, возьмем $K_2 \geq K_1$, для которого

$$V(x_{k_i}, y_{k_i}) \leq V(\bar{x}, \bar{y}) + \gamma/4, \tag{73}$$

если только $k_i \geq K_2$. Из стремления последовательности $\{V(x_k, y_k)\}$ к $V(\bar{x}, \bar{y})$ сверху такой номер K_2 всегда можно указать.

Из (72) и (73) для $k_i \geq K_2$ получаем

$$V(x_{k_i+1}, y_{k_i+1}) \leq V(x_{k_i}, y_{k_i}) - \frac{\gamma}{2} \leq V(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\gamma}{4},$$

что невозможно, так как $V(x_k, y_k) \geq V(\bar{x}, \bar{y})$ для всех $k \geq 0$. Пришли к противоречию.

Случай 2. Предположим теперь, что предельная точка $[\bar{x}, \bar{y}]$ является особой парой. Для простоты считаем сначала, что последовательность $\{[x_k, y_k]\}$ сходится к $[\bar{x}, \bar{y}]$. В силу утверждений лемм 4 и 5, для k достаточно больших шаг α_k будет определяться только $\alpha_k^{(2)}$. В результате на каждой такой итерации по крайней мере одна ненулевая компонента x_k^i вектора x или одна ненулевая компонента y_k^j вектора y становится равной нулю и не меняет своего значения в дальнейшем, причем $i, j \notin J_P(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда следует, что найдется такой конечный номер $\bar{k}$, при котором пара $[x_{\bar{k}}, y_{\bar{k}}]$ совпадет с особой парой $[\bar{x}, \bar{y}]$. Как следует из определения направлений и шага в особых парах, на следующей итерации получим $V(x_{\bar{k}+1}, y_{\bar{k}+1}) < V(x_{\bar{k}}, y_{\bar{k}})$, что противоречит сходимости последовательности $\{V(x_k, y_k)\}$ к $V(\bar{x}, \bar{y})$ сверху.

Допустим теперь, что подпоследовательность $\{[x_{k_s}, y_{k_s}]\}$ последовательности $\{[x_k, y_k]\}$ сходится к особой паре $[\bar{x}, \bar{y}]$ и имеется другая подпоследовательность $\{[x_{k_r}, y_{k_r}]\}$ той же последовательности $\{[x_k, y_k]\}$, сходящаяся к другой предельной точке $[\tilde{x}, \tilde{y}]$. Повторяя те же рассуждения, что и при анализе случая 1, приходим к выводу, что пара $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ также является особой и, следовательно, угловой точкой множества $\mathcal{X}_+$. Но тогда в силу монотонного убывания последовательности $\{V(x_k, y_k)\}$ получаем, что $V(\bar{x}, \bar{y}) = V(\tilde{x}, \tilde{y})$, т.е. функция $V(x, y)$ в двух разных угловых точках множества $\mathcal{X}_+$ принимает одинаковые значения, что противоречит сделанному предположению.

Таким образом, траектория обязательно попадет в множество $\mathcal{W}_c(x_*, y_*)$, поэтому решение ЛЗД будет найдено за конечное число итераций.

Замечание. Предположение, что функция $V(x, y)$ в разных угловых точках множества $\mathcal{X}_+$ принимает разные значения, сделано только с целью упрощения доказательства и может быть опущено.

Возможен также вариант метода, в котором одновременно изменяются несколько компонент вектора x_k^i в (45) или несколько компонент вектора y_k^j в (46). Важно только, чтобы индексы i и j входили в соответствующие множества $J_Z^-(x_k, y_k)$, $J_Z^+(x_k, y_k)$ и не совпадали между собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cottle R.W., Pang J.-S., Stone R.E.* The linear complementarity problem. Boston: Acad. Press, Inc., 1992.
2. *Ferris M.C., Pang J.-S.* Engineering and economic applications of complementarity probems // SIAM Rev. 1997. V. 39. P. 669–713.
3. *Берщанский Я.М., Мееров М.В.* Теория и методы решения задач дополнительности // Автоматика и телемехан. 1983. № 6. С. 5–31.
4. *Kojima M., Mizuno Sh., Yoshize A.* A polinomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems // Math. Program. 1989. V. 44. P. 1–26.
5. *Mangasarian O.L.* Convergence of iterates of an inexact matrix splitting algorithm for the symmetric monotone linear complementarity problem // SIAM J. Optimizat. 1991. P. 114–122.
6. *Monteiro R.D.C., Wright S.J.* Superlinear primal-dual affine scaling algorithms for LCP // Math. Program. 1995. V. 69. P. 311–333.
7. *Fischer A., Kanzov Ch.* On finite termination of an iterative method for linear complementarity problems // Math. Program. 1996. V. 74. P. 279–292.
8. *Burke J.M., Xu S.* The global linear convergence of non-interior path-following algorithm for linear complementarity problems // Math. Operat. Res. 1998. V. 23. P. 719–734.
9. *Втюрина М.В., Жадан В.Г.* Барьерно-градиентные методы для линейных задач дополнительности // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ РАН, 2003.
10. *Evtushenko Yu.G., Zhadan V.G.* Stable barrier-projection and barrier-Newton methods in linear programming // Comput. Optimizat. and Applic. 1994. V. 3. № 4. P. 289–304.
11. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Барьерно-проективные методы решения задач нелинейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 5. С. 669–684.
12. *Zhadan V.G.* Dual barrier-projection and barrier-Newton methods in linear programming // System Modelling and Optimizat. 1995. P. 502–510.