Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан, Применение метода функций Ляпунова для исследования сходимости численных методов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1975, том 15, номер 1, 101–112

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 15 Январь 1975 Февраль № 1

УДК 518:519.3:62-50

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Ю. Г. ЕВТУШЕНКО, В. Г. ЖАДАН

(Москва)

Предлагается использовать некоторые обобщения метода функций Ляпунова для доказательства сходимости численных методов оптимизации. Сформулированы и доказаны теоремы о достаточных условиях сходимости непрерывных и дискретных схем. Приведены примеры, иллюстрирующие применение теорем.

Теоремы второго метода Ляпунова об асимптотической устойчивости и их обобщения [1–8] применялись рядом авторов для доказательства сходимости алгоритмов оптимизации [9–14]. В данной работе с помощью метода, аналогичного методу функций Ляпунова, даются достаточные условия сходимости решений дифференциальных уравнений и их разностных аналогов. Приведены примеры, где есть сходимость решений к множествам, которые не являются асимптотически устойчивыми по Ляпунову. Даны примеры применения полученных теорем к исследованию сходимости численных методов оптимизации.

§ 1. Основные определения

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.1) \qquad \dot{x}=f(x,t), \qquad x(0)=x_0, \qquad (\dot{\ })=d/dt.$$

Здесь $f(x, t)$ — непрерывная n-мерная вектор-функция, определенная в $H=D\times I$, где $I=\{0\leq t<\infty\}$, D — некоторая открытая область из евклидова пространства E_n. Предположим, что в H функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям существования и единственности решений. Символ $\{t_k\}$ обозначает бесконечную возрастающую последовательность моментов t, стремящуюся к бесконечности, t_k — ее k-й элемент. Черта над символом множества обозначает его замыкание. Последовательность $\{x_k\}$ называется допустимой относительно множества M, если каждый ее элемент x_k принадлежит M. Через $\rho(x, \Omega)$ обозначим расстояние от точки x до множества Ω. В дальнейшем будем изучать сходимость решений системы (1.1) к множеству Ω, которое будем всюду предполагать непустым, замкнутым.

Если решения системы (1.1) продолжимы при $t\to\infty$, то можно дать следующие четыре определения.

Определение 1. Множество $M\subset D$ положительно-инвариантно относительно системы (1.1), если из того, что $x_0\in M$, следует, что ее решение $x(x_0, t)\in M$ для всех $t\in I$.

Определение 2. Точка $\bar{x}\in E_n$ есть ω-предельная точка решения $x(x_0, t)$ системы (1.1), если существует последовательность $\{t_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x(x_0, t_k)=\bar{x}$. Совокупность $\omega(x_0)$ всех ω-предельных точек решения $x(x_0, t)$ называется его ω-предельным множеством.

Определение 3. Решения (1.1) сходятся к Ω на множестве $M\subset D$ или сходятся в большом, если $\omega(x_0)\subset\Omega$ для любых $x_0\in M$.

Приведенное определение эквивалентно следующему: решения (1.1) сходятся к Ω на M, если для любого $x_0\in M$ и любого $\varepsilon>0$ существует такое $T(x_0, \varepsilon)$, что при всех $t\geqslant T(x_0, \varepsilon)$ будет $\rho(x(x_0, t), \Omega)\leqslant\varepsilon$.

В случае когда D совпадает с E_n, можно ввести

Определение 4. Решения (1.1) сходятся к Ω в целом, если $\omega(x_0)\subset\Omega$ для любых $x_0\in E_n$.

Определения сходимости аналогичны определениям асимптотической устойчивости по Ляпунову (в большом и в целом) множества Ω для системы (1.1) [3, 5–7]. Сравнивая их, приходим к выводу, что из каждого вида асимптотической устойчивости множества Ω следует соответствующая сходимость (в большом и в целом) решений (1.1) к Ω. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 5. Непрерывная, неотрицательная на M функция $v(x)$ положительно определена (относительно Ω на M), если $v(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x\in\Omega\cap M$.

Определение 6. Функция $v(x)$ сильно положительно определена (относительно Ω на M), если она положительно определена (относительно Ω на M); кроме того, для любого $\varepsilon>0$ можно указать $l>0$ такое, что $v(x)>l$, когда $\rho(x, \Omega)>\varepsilon$, и для любого сколь угодно малого $d>0$ существует $\delta>0$ такое, что $v(x)<d$, когда $\rho(x, \Omega)<\delta$.

Определение 7. Заданную на $M\times I$ непрерывную, неотрицательную функцию $v(x, t)$ назовем положительно-определенной в пределе (относительно Ω на M), если для любой допустимой последовательности $\{x_k\}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\bar{x}$, из условия $\lim\limits_{k\to\infty} v(x_k, t_k)=0$ для некоторой $\{t_k\}$ следует, что $\bar{x}\in\Omega$.

Определение 8. Функция $v(x, t)$ на $E_n\times I$ допускает бесконечно большой низший предел, если существует функция $w(x)$ такая, что $w(x)\leqslant v(x, t)$ для всех $t\geqslant 0$ и $w(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$.

Пусть $v(x, t)$ — дифференцируемая функция, $\dot{v}(x, t)=(v_x(x, t), f(x, t))+v_t(x, t)$ — полная производная $v(x, t)$ в силу системы (1.1). Будем говорить, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет условию А, если из $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\bar{x}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dot{v}(x_k, t_k)=0$ для некоторой $\{t_k\}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} v(x_k, t_k)=0$.

§ 2. Теоремы о сходимости

Сформулируем вначале лемму, являющуюся обобщением леммы 5.1 из [4].

Лемма 1. *Пусть $v(x, t)$ — дифференцируемая, неотрицательная на H функция, $\dot{v}(x, t)\leqslant 0$ всюду на H и для некоторого $x_0\in D$ решение $x(x_0, t)$ системы (1.1) продолжимо при $t\to\infty$; тогда:*

а) *для любой последовательности* $\{t_k\}$ *определен* $\lim\limits_{k\to\infty} v(x(x_0, t_k), t_k)$, *этот предел не зависит от конкретного выбора* $\{t_k\}$;

б) *существует последовательность* $\{t_i\}$ *такая, что* $\lim\limits_{i\to\infty} \dot v(x(x_0, t_i), t_i)=0$.

Доказательство. Так как $\dot v(x, t)\leqslant 0$ и $v(x, t)\geqslant 0$ на H, то определен $\lim\limits_{t\to\infty} v(x(x_0, t), t)=\tilde v(x_0)$. Следовательно, и для любой последовательности $\{t_k\}$ выполнено утверждение а). Предположим, что не существует последовательности $\{t_i\}$, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} \dot v(x(x_0, t_i), t_i)=0$. Тогда можно указать $\delta>0$ и $T(\delta)>0$ такие, что $\dot v(x(x_0, t), t)<-\delta$ при $t\geqslant T(\delta)$. Отсюда следует, что $v(x(x_0, t), t)\to-\infty$, но это противоречит неотрицательности $v(x, t)$ на H.

Лемма 2. *Пусть M — ограниченное множество; решение $x(x_0, t)$ системы* (1.1), *где $x_0\in M$, продолжимо при $t\to\infty$ и $x(x_0, t)\in M$ для всех $t\in I$; функция $v(x, t)$ дифференцируемая, положительно-определенная в пределе (относительно Ω на M) и удовлетворяет условию A, $\dot v(x, t)\leqslant 0$ всюду на $M\times I$. Тогда существуют точки из Ω, принадлежащие M, решение $x(x_0, t)$ системы* (1.1) *сходится к* Ω.

Доказательство. Согласно лемме 1, найдется последовательность $\{t_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dot v(x(x_0, t_k), t_k)=0$. В силу ограниченности M, из последовательности $\{x(x_0, t_k)\}$ можно выделить сходящуюся к $\bar x\in\overline{M}$ подпоследовательность $\{x(x_0, t_{k_i})\}$. Так как $\lim\limits_{i\to\infty} \dot v(x(x_0, t_{k_i}), t_{k_i})=0$, то одновременно $\lim\limits_{i\to\infty} v(x(x_0, t_{k_i}), t_{k_i})=0$. Отсюда, учитывая лемму 1, получим, что $\lim\limits_{s\to\infty} v(x(x_0, t_s), t_s)=0$ для любой $\{t_s\}$. Поэтому для всякой последовательности $\{x(x_0, t_j)\}$, сходящейся к некоторой точке $\tilde x\in\omega(x_0)$, будем иметь $\lim\limits_{\to\infty} v(x(x_0, t_j), t_j)=0$. На основании положительной определенности $v(x, t)$ в пределе заключаем, что при этом $\tilde x\in\Omega$. Таким образом, решение $x(x_0, t)$ сходится к Ω.

Теорема 1. *Пусть функция $v(x, t)$ дифференцируемая, положительно-определенная в пределе (относительно Ω на E_n), удовлетворяет условию* А *и допускает бесконечно большой низший предел, $\dot v(x, t)\leqslant 0$ всюду на $E_n\times I$. Тогда решения системы* (1.1) *неограниченно продолжимы вправо и сходятся к Ω в целом.*

Доказательство. В силу сделанных предположений, система (1.1) устойчива по Лагранжу, т. е. для любого $x_0\in E_n$ решение $x(x_0, t)$ продолжимо вправо при $t\to\infty$ и $\|x(x_0, t)\|$ ограничена на I. Поэтому, согласно лемме 2, решение $x(x_0, t)$ сходится к Ω. Отсюда, в силу произвольности x_0, следует утверждение теоремы.

Приведем достаточные условия сходимости в большом на множестве M. Через Γ обозначим граничные точки $\overline{M}$.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1.1) *можно указать дифференцируемую функцию $v(x, t)$ такую, что выполняется следующее:*

1) $v(x, t)$ *положительно-определенная в пределе* (*относительно* Ω *на* M) *и удовлетворяет условию* А, $\dot{v}(x, t) \leqslant 0$ *всюду на* $M \times I$;

2) *если* M *неограниченно, то* $v(x, t)$ *допускает бесконечно большой низший предел*;

3) *для любой допустимой сходящейся к точке из* Γ *последовательности* $\{x_k\}$ *функция* $v(x_k, t) \to \infty$ *при* $k \to \infty$ *равномерно по* t *на любом конечном интервале* $[0, T]$, $T < \infty$.

Тогда решения (1.1) *продолжимы вправо при* $t \to \infty$ *и сходятся к* Ω *в большом* (*на* M).

Доказательство. Покажем, что множество M положительно-инвариантно относительно (1.1). Действительно, если бы при некотором T решение $x(x_0, t)$ пересекло границу Γ, то $\lim\limits_{t_k \to T-} v(x(x_0, t_k), t_k) = \infty$, что противоречит неположительности $\dot{v}(x, t)$. Кроме того из условий 1) и 2) следует, что все решения ограничены и, следовательно, продолжимы при $t \to \infty$. Отсюда на основании леммы 2 заключаем, что решения (1.1) сходятся к Ω на M. Заметим, что условие 3) допускает случай, когда $\lim\limits_{k \to \infty} x(x_0, t_k) = \bar{x} \in \Gamma$ и при этом

$$\overline{\lim_{k \to \infty}}\, v(x(x_0, t_k), t_k) < \infty.$$

В качестве примеров рассмотрим следующие два простейших уравнения:

$$\dot{x} = -1 - \gamma e^t x^3, \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = -1 + \gamma e^{-t} x^{-2}. \tag{2.2}$$

Здесь $\gamma > 0$. В обоих случаях точка $0 = \Omega$ не является положением равновесия. Во втором уравнении правые части даже не определены при $x \in \Omega$. Поэтому не имеет смысла говорить об устойчивости Ω по Ляпунову. В обоих уравнениях, однако, имеет место сходимость решений к Ω (в первом — в целом, во втором — в большом на инвариантном относительно (2.2) множестве $x > 0$). В качестве функций $v(x, t)$ для (2.1) и (2.2) возьмем, соответственно, $v_1(x, t) = 2x^2 + 9(4\gamma e^t)^{-1/3}$, $v_2(x, t) = x + \gamma e^{-t} x^{-1}$. Их производные, в силу соответствующих систем, таковы:

$$\dot{v}_1(x, t) = -4x - 4\gamma e^t x^4 - 3(4\gamma e^t)^{-1/3} \leqslant 0,$$

$$\dot{v}_2(x, t) = -(1 - \gamma e^{-t} x^{-2})^2 - \gamma e^{-t} x^{-1} < 0.$$

Из теорем 1 и 2 следует сходимость решений (2.1), (2.2) к нулю.

Используя лемму 2, можно доказать ряд хотя и более слабых, но зато более удобных для проверки условий сходимости решений (1.1). В качестве примера рассмотрим случай, когда $\Omega \subset \overline{M}$, причем допустимо, чтобы $\Omega \cap (\overline{M} \setminus M) \neq \varnothing$.

Теорема 3. *Пусть* M — *ограниченное, положительно-инвариантное относительно* (1.1) *множество, функция* $v(x, t)$ *дифференцируемая и удовлетворяет условию* А, $\dot{v}(x, t) \leqslant 0$ *всюду на* $M \times I$, *функция* $w(x)$ *сильно по-*

ложительно-определенная (относительно Ω на M) и $w(x) \leqslant v(x, t)$ для любых $x \in M$, $t \in I$. Тогда решения (1.1) *сходятся к Ω на M.*

Особенно просто формулируются теоремы 1—3 в случае автономных систем

$$\text{(2.3)} \qquad \dot{x}=f(x), \qquad x(0)=x_0.$$

Теорема 1 переходит в следующий вариант теоремы Барбашина — Красовского.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на каждом компактном множестве из E_n, функции $v(x)$, $-\dot{v}(x)$ положительно-определенные (относительно Ω на E_n) и функция $v(x)$ бесконечно большая. Тогда решения* (2.3) *сходятся к Ω в целом.*

Теорема 5. *Пусть M — ограниченное, инвариантное относительно системы* (2.3) *множество, $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на открытом покрытии M, функции $v(x)$, $-\dot{v}(x)$ сильно положительно-определенные (относительно Ω на M). Тогда решения* (2.3) *сходятся к Ω на M.*

В приведенных теоремах можно отказаться от условия единственности решений, при этом надо сделать некоторые уточнения в определениях 1—4. Тогда от правых частей системы (1.1), помимо условий, указанных в теоремах, следует потребовать лишь непрерывности правых частей по x и измеримости по t.

§ 3. Сходимость итеративных процессов

Рассмотрим дискретный вариант системы (1.1)

$$\text{(3.1)} \qquad x_{s+1}=x_s+\alpha(x_s, t_s)f(x_s, t_s), \qquad t_{s+1}=t_s+\alpha(x_s, t_s).$$

Индекс s указывает номер шага итеративного процесса (3.1), он принимает значения из натурального ряда $N=\{0, 1, \ldots\}$. Последовательность, задаваемую (3.1), назовем основной и обозначим $\{x(x_0)\}_N$, а ее s-й элемент — через $x_s(x_0)$. Символы $T, S, \ldots$ обозначают бесконечные возрастающие подпоследовательности N. Аналогично, $\{x(x_0)\}_T$ — подпоследовательность $\{x(x_0)\}_N$, порожденная T. Через $\omega(x_0)$ обозначим совокупность пределов всех сходящихся подпоследовательностей последовательности $\{x(x_0)\}_N$.

Определение 9. Решения (3.1) сходятся к Ω в целом (в большом на M), если $\omega(x_0) \subset \Omega$ $\forall x_0 \in E_n$ ($\forall x_0 \in M$).

Определение 10. Множество $M \subset D$ является инвариантным по отношению к системе (3.1), если из условия $x_0 \in M$ следует, что $\{x(x_0)\}_N \subset M$.

В системе (3.1) возможен случай, когда на некотором шаге $x_s(x_0) \in \Omega$ и $f(x_s, t_s)=0$. Тогда итеративный процесс прекращается: он сошелся к Ω. В дальнейшем предполагается, что процесс бесконечношаговый. Справедлива следующая доказанная в [12]

Лемма 3. *Пусть для системы* (3.1) *на множестве H существует неотрицательная функция $v(x, t)$ такая, что ее первая разность, взятая в силу* (3.1), *$u(x_s, t_s)=v(x_{s+1}, t_{s+1})-v(x_s, t_s)$, неположительна на H; тогда для* *любой последовательности T определены*

$$\lim_{s\to\infty} v(x_s(x_0)t_s), \quad \lim_{s\to\infty} u(x_s(x_0), t_s) = 0,$$

причем пределы не зависят от конкретного выбора последовательности T.

Используя лемму 3, можно доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть M — ограниченное, инвариантное относительно (3.1) множество, существует на $M\times I$ неотрицательная функция $v(x,t)$ такая, что ее первая разность, в силу системы (3.1), $u(x,t)$ отрицательно определена в пределе (относительно Ω на M); тогда решения (3.1) сходятся к Ω в большом (на M).*

Для многих систем, однако, условия теоремы 6 оказываются трудно проверяемыми. Теоремы § 2 в этом отношении оказываются значительно удобней. Поэтому попытаемся найти те условия, которые вместе с условиями теорем предыдущего параграфа были бы достаточными для сходимости системы (3.1). Другими словами, пусть доказана сходимость непрерывного варианта систем. Какие дополнительные условия надо наложить, чтобы имела место сходимость в системе (3.1)? Как увидим ниже, в случае автономных систем связь особенно проста.

Рассмотрим частный случай (3.1):

$$x_{s+1}=x_s+\alpha_s f(x_s, t_s), \qquad t_{s+1}=t_s+\alpha_s. \tag{3.2}$$

Определение 11. Последовательность $\{\alpha\}_N$ регулярная, если ее элементы положительные, $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha_s=0$ и $\sum\limits_{s=0}^{\infty}\alpha_s=\infty$.

На функцию $f(x,t)$ и последовательность $\{\alpha\}_N$ наложим условие

$$\lim_{s\to\infty}\|f(x, t_s)\|^2\alpha_s = 0 \tag{3.3}$$

равномерно по x на любом компактном множестве из D. Если система (3.2) автономная, то для регулярных последовательностей условие (3.3) автоматически выполняется.

Обозначим $z=[x,t]\in E_{n+1}$, $f(z)=f(x,t)$, $p(z)=[f(z),1]\in E_{n+1}$, $v(z)=v(x,t)$ и $v_z=[v_x, v_t]$. Функция $v_z(z)$ удовлетворяет условию Липшица, если существует число L такое, что для любых z_1, z_2 имеет место

$$\|v_z(z_1)-v_z(z_2)\|\leqslant L\|z_1-z_2\|. \tag{3.4}$$

Воспользуемся формулой Ньютона — Лейбница

$$v(z_{s+1})-v(z_s)=\alpha_s\dot v(z_s)+\alpha_s\int_0^1(v_z(z_s+\tau\alpha_s p(z_s))-v_z(z_s), p(z_s))d\tau.$$

Здесь сохранено обозначение предыдущего параграфа: $\dot v(z)=\dot v(x,t)=(v_x, f)+v_t$. Используя неравенство Коши — Буняковского и условие Липшица, получим

$$v(x_{s+1}, t_{s+1})-v(x_s, t_s)\leqslant\alpha_s\dot v(x_s,t_s)+\frac{\alpha_s^2L}{2}(1+\|f(x_s, t_s)\|^2). \tag{3.5}$$

Теорема 7. *Пусть $f(x,t)$ — непрерывная по x и измеримая по t на $E_n \times I$ вектор-функция; функция $v(x,t)$ дифференцируемая, положительно-определенная в пределе (относительно Ω на E_n) и удовлетворяет условию* А, $\dot v(x,t) \leqslant 0$ *всюду на* $E_n \times I$; *выполнены условия* (3.3), (3.4); *последовательность* $\{\alpha\}_N$ *регулярная; все элементы* $\{x(x_0)\}_N$ *принадлежат компактному множеству* $M \subset E_n$. *Тогда* $\omega(x_0) \subset \Omega$.

Доказательство. Множество $\omega(x_0) \neq \varnothing$. Существует хотя бы одна подпоследовательность $\{x(x_0)\}_T$, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} \dot v(x_i(x_0), t_i) = 0$. Действительно, в противном случае найдутся $\varepsilon > 0$ и $K > 0$ такие, что $\dot v(x_s(x_0), t_s) \leqslant -\varepsilon$ при $s \geqslant K$. В силу (3.3), можно K выбрать настолько большим, чтобы $\alpha_s L(1 + \|f(x_s(x_0), t_s)\|^2) < \varepsilon$. Но тогда из (3.5) следует, что $v(x_{s+1}(x_0), t_{s+1}) \leqslant v(x_s(x_0), t_s) - \varepsilon\alpha_s/2$. Для любого целого $j \geqslant 1$, имеем

$$v(x_{s+j}(x_0), t_{s+j}) < v(x_s(x_0), t_s) - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{l=s}^{j-1}\alpha_l.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$, получим противоречие с неотрицательностью v.

Из условия теоремы следует, что одновременно

$$\lim_{i\to\infty} v(x_i(x_0), t_i) = 0.$$

Покажем теперь (от противного), что для любой сходящейся подпоследовательности $\varlimsup\limits_{i\to\infty} v(x_i(x_0), t_i) = 0$. Пусть $\varlimsup\limits_{i\to\infty} v(x_i(x_0), t_i) = \xi > 0$ для некоторой $\{x(x_0)\}_T$. Разобьем основную последовательность на две подпоследовательности:

$$\{x(x_0)\}_S = \{x_s(x_0):\ v(x_s(x_0), t_s) < \xi/4\},$$

$$\{x(x_0)\}_R = \{x_s(x_0):\ v(x_s(x_0), t_s) \geqslant \xi/4\}.$$

В последовательности $\{x(x_0)\}_R$ выделим подпоследовательность $\{x(x_0)\}_P$, элементы которой удовлетворяют условию $\xi/4 \leqslant v(x_s(x_0), t_s) \leqslant \xi/2$. Найдутся $K_1 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что если $x_s(x_0) \in \{x(x_0)\}_R$, $s \geqslant K_1$, то $\dot v(x_s(x_0), t_s) < -\delta$. В противном случае существовала бы сходящаяся подпоследовательность $\{x_k\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} \dot v(x_k, t_k) = 0$, а $\varlimsup\limits_{k\to\infty} v(x_k, t_k) \geqslant \xi/4 > 0$, что невозможно. Выберем $K_2 \geqslant K_1$ настолько большим, чтобы $\alpha_s L(1 + \|f(x, t_s)\|^2) \leqslant \delta$ и $\alpha_s^2 L(1 + \|f(x, t_s)\|^2) \leqslant \xi/2$ для всех $x \in M$, $s \geqslant K_2$. Но тогда если $m \geqslant K_2$, $x_m(x_0) \in \{x(x_0)\}_S$, то все последующие элементы основной последовательности принадлежат $\{x(x_0)\}_S \cup \{x(x_0)\}_P$. Поэтому $\varlimsup\limits_{i\to\infty} v(x_i(x_0), t_i) \leqslant \xi/2$ для $\{x(x_0)\}_T$. Мы пришли к противоречию. Так как $v(x,t)$ положительно определена в пределе, то отсюда следует, что предел любой сходящейся подпоследовательности принадлежит Ω.

Замечание. Условие (3.3) можно заменить следующим: для любого компактного множества $M \subset E_n$ можно указать $C > 0$ и $\tau > 0$ такие, что $-\dot v(x,t)/\|f(x,t)\|^2 \geqslant C$ для всех $x \in M$, $t \geqslant \tau$.

Условия теоремы 7 существенно упрощаются в случае автономных систем

(3.6) $x_{s+1}=x_s+\alpha_s f(x_s)$.

Лемма 4. *Пусть функции $f(x)$, $v(x)$, $\dot{v}(x)$ непрерывны на E_n, функции $v(x)$, $-\dot{v}(x)$ положительно определены (относительно Ω на E_n), функция $v(x)$ бесконечно большая, v_x удовлетворяет условию Липшица на каждом компактном множестве из E_n, последовательность $\{\alpha\}_N$ регулярная, монотонно убывающая. Тогда для любого x_0 найдется $\bar{\alpha}_0$ такое, что при всех $\alpha_0<\bar{\alpha}$ решения* (3.6) *ограничены и содержатся в множестве $M=\{x\in E_n\colon\ v(x)\leqslant v(x_0)\}$.*

Доказательство. Из условий леммы следует, что M ограничено и содержит в себе множество $Q=\{x\in E_n\colon\ v(x)\leqslant v(x_0)/2\}$. Пусть $\lambda>0$ таково, что $U=\{x\in E_n\colon\ \rho(x,\Omega)\leqslant\lambda\}\subset Q$. Так как множество $Z=\overline{M\setminus U}$ непустое, компактное, $-\dot{v}$ положительно определена, то $\dot{v}(x)\leqslant-\varepsilon<0$ для всех $x\in Z$. На основании (3.3) можно подобрать α_0 настолько малым, чтобы

$$\alpha_0 L\|f(x)\|^2<\varepsilon \text{ и } \alpha_0^2 L\|f(x)\|^2\leqslant v(x_0) \quad \forall x\in Z.$$

Тогда, используя аналог формулы (3.5) для автономной системы, получим для $x_s\in Z$

$$v(x_{s+1})-v(x_s)\leqslant\alpha_s\dot{v}(x_s)+\frac{\alpha_s^2}{2}L\|f(x_s)\|^2<-\frac{\alpha_s\varepsilon}{2}<0.$$

Отсюда видно, что если $x_s(x_0)\in Z$, то $x_{s+1}(x_0)\in M$. С другой стороны, если на некотором шаге $x_s(x_0)\in U$, а $x_{s+1}(x_0)\overline{\in}U$, то обязательно $v(x_{s+1}(x_0))\leqslant v(x_0)$ и, следовательно, $x_{s+1}(x_0)\in Z$. Поэтому вся последовательность $\{x(x_0)\}_N\subset M$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия леммы* 4; *тогда решения* (3.6) *сходятся к Ω в целом, при любых x_0, если $\alpha_0(x_0)$ достаточно мало.*

Как видно из формулировки, после того как с помощью теоремы 4 была доказана сходимость решений непрерывной системы (2.3) к Ω, для доказательства сходимости дискретного варианта (3.6) достаточно лишь показать, что функция $v_x(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Как и в § 2, все полученные результаты справедливы и в случае систем, имеющих не единственное решение. В (3.2) правая часть системы может быть многозначная. В этом случае

(3.7) $x_{s+1}\in x_s+\alpha_s f(x_s,t_s)=V(x_s,t_s,\alpha_s)$,

где V задает замкнутое точечно-множественное отображение из компактного множества M на M. Символ $\{x(x_0)\}_N$ обозначает теперь всю совокупность решений системы (3.7). Формулировки теорем и их доказательства для (3.7) почти дословно повторяют приведенные выше. Непрерывный вариант метода описывается дифференциальным включением

(3.8) $\dot{x}\in f(x,t)$.

Вопрос о существовании решения такой системы исследован в ряде работ (см., например, [15]).

§ 5. Некоторые приложения

Приведем ряд примеров доказательства сходимости численных методов с помощью сформулированных выше теорем. Во всех рассмотренных ниже задачах оптимизации символ Ω будет обозначать множество решений, которое предполагается компактным.

Пример 1. Пусть требуется найти

$$(4.1)\qquad F_* = \min_{x\in G} F(x),\quad G = \{x \in E_n,\ Ax = b,\ g_j(x) \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Здесь $F(x)$, $-g_1(x), \ldots, -g_r(x)$ — выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции, A — матрица размером $n\times m$, b есть m-мерный вектор. Предполагаем, что ограничение $Ax=b$ определяет $(n-m)$-мерное линейное многообразие в E_n, множество $G^0=\{x\in G, g_j(x)>0, j=1, 2, \ldots, r\}$ не пусто и ограничено.

Для решения (4.1) предлагается следующая модификация метода штрафных функций [16]:

$$(4.2)\qquad \dot{x}=A^{\mathrm{T}}w-\nabla P(x, t)=p(x, t),\qquad \nabla=\partial/\partial x,$$

где

$$P(x, t) = F(x) + e^{-t}\sum_{j=1}^{r} g_j^{-1}(x),$$

A^{T} — транспонированная матрица к A, $x(0)=x_0\in G^0$; вектор w выбираем таким образом, чтобы $A\dot{x}=0$.

Функция $v(x, t)=P(x, t)-F_*$ положительно-определенная в пределе (относительно Ω на G^0) и удовлетворяет условию 3) теоремы 2. Дифференцируя v, в силу (4.2) получим

$$(4.3)\qquad \dot{v} = -\|\dot{x}\|^2 - e^{-t}\sum_{j=1}^{r} g_j^{-1}(x) < 0.$$

Покажем, что $v(x, t)$ удовлетворяет условию А. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\bar{x}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \dot{v}(x_k, t_k)=0$ для некоторой $\{t_k\}$. Так как оба члена в правой части (4.3) отрицательны, то

$$(4.4)\qquad \lim_{k\to\infty}\Big\|\nabla F(x_k) - \sum_{j=1}^{r} u_j(x_k, t_k)\nabla g_j(x_k) + A^{\mathrm{T}}w(x_k, t_k)\Big\| = 0.$$

Здесь $u_j(x, t)=e^{-t}/g_j^2(x)$. Рассмотрим множество $B=\{j : g_j(\bar{x})=0\}$. Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_j(x_k, t_k)=0$, когда $j\notin B$. Обозначим через $\beta_k=\sum\limits_{j\in B} u_j(x_k, t_k)$. Если допустить, что $\beta_k\to\infty$, то, разделив $\|\dot{x}(x_k, t_k)\|$ на β_k и перейдя к пределу, получим, в силу (4.4), следующее: найдутся числа $\alpha_i\geqslant 0$, $\sum\limits_{i\in B}\alpha_i=1$ и вектор γ такие, что $\sum\limits_{i\in B}\alpha_i\nabla g_i(\bar{x})-A^{\mathrm{T}}\gamma=0$, а это противоречит условию $G^0\neq\varnothing$. Поэтому из $\{u(x_k, t_k)\}$ и, следовательно, из $\{w(x_k, t_k)\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Пусть $u(x_{k_s}, t_{k_s})\to u^*$, $w(x_{k_s}, t_{k_s})\to w^*$. Очевидно, что $u_j^* \geqslant 0$ и $u_j^* = 0$, если $j \in B$. Кроме того, из (4.4) имеем

$$\nabla F(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{r} u_j^* \nabla g_j(\bar{x}) + A^{\mathrm{T}} w^* = 0,$$

т. е. в $\bar{x}$ выполнены условия Куна — Таккера, достаточные для того, чтобы $\bar{x} \in \Omega$. Отсюда и из (4.3) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} v(x_k, t_k) = 0$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 и решения (4.2) сходятся к Ω для любых $x_0 \in G^0$.

Пример 2. Найти $\min\limits_{x \in G} F(x)$, где

$$G = \left\{ x \in E_n, \sum_{i=1}^{n} x^{(i)} = R > 0,\ x^{(i)} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

$F(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция, градиент которой удовлетворяет условию Липшица. Для решения этой задачи в [17] предложен следующий метод:

$$\dot{x}^{(i)} = x^{(i)} [(\nabla F(x), x)/R - \nabla F_i(x)] = w_i(x), \tag{4.5}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $x(0) = x_0 \in G^0 = \{x \in G, x^{(i)} > 0\}$. В [17] показано, что при сделанных предположениях решение задачи Коши существует и единственно для любых $x_0 \in G^0$. Кроме того система (4.5) построена таким образом, что множество G^0 инвариантное.

На прямом произведении множеств $G^0 \times \Omega$ определим функцию

$$g(x, z) = \sum_{i=1}^{n} z^{(i)} (\ln z^{(i)} - \ln x^{(i)}).$$

Функция $g(x, z)$ неотрицательная. Действительно, из неравенства между арифметическим и геометрическим средним вытекает, что

$$g(x, z) = -R \sum_{i=1}^{n} \frac{z^{(i)}}{R} \ln \frac{x^{(i)}}{z^{(i)}} = -R \ln \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{x^{(i)}}{z^{(i)}} \right]^{z^{(i)}/R} \geqslant$$

$$\geqslant -R \ln \left(R^{-1} \sum_{i=1}^{n} x^{(i)} \right) = 0,$$

причем равенство имеет место только при $x = z$. Пусть $v(x) = \min\limits_{z \in \Omega} g(x, z)$. Нетрудно убедиться, что $v(x)$ — сильно положительно-определенная на G^0 функция. Из строгой выпуклости $g(x, z)$ по z и выпуклости Ω следует, что минимум функции $g(x, z)$ по z достигается в единственной точке $z(x)$, поэтому $v(x)$ является дифференцируемой функцией. Вычислим производную $v(x)$ в силу (4.5), используя свойство выпуклости $F(x)$; получим

$$\dot{v} = (\nabla_x g(x, z(x)), w(x)) = (\nabla F(x), z(x) - x) \leqslant F(z(x)) - F(x).$$

Так как $z(x) \in \Omega$, то $\dot{v} \leqslant 0$, причем равенство имеет место только при $x \in \Omega$. Таким образом, выполнены условия теоремы 5 и из нее следует сходимость решений (4.5) к Ω на G^0.

Пример 3. Для решения (4.1) рассмотрим дискретный вариант метода (4.2):

$$(4.6)\qquad x_{s+1}=x_s+\alpha(x_s,t_s)\,p(x_s,t_s),\qquad t_{s+1}=t_s+\alpha(x_s,t_s),\qquad x_0\in G^0.$$

Шаг $\alpha(x_s, t_s)$ выбирается таким образом, чтобы функция $q_s(\alpha)=$ $=P(x_s+\alpha p(x_s,t_s),t_s)$ принимала минимальное значение и точка x_{s+1} оставалась при этом внутри области G.

Вычислим первую разность функции $v(x,t)=P(x,t)-F_*$ в силу (4.6):

$$u(x_{s+1},t_{s+1})=v(x_{s+1},t_{s+1})-v(x_s,t_s)=$$
$$=v(x_{s+1},t_{s+1})+v(x_{s+1},t_s)-v(x_{s+1},t_s)-v(x_s,t_s).$$

Если предположить, что $F(x)$ и все $g_j(x)$ удовлетворяют на G вместе со своими градиентами условию Липшица, то можно показать, что

$$u_1(x_s,t_s)=v(x_{s+1},t_s)-v(x_s,t_s)\leqslant-{}^1/_2\bar{\alpha}(x_s,t_s)\,\|p(x_s,t_s)\|^2<0,$$

$$u_2(x_s,t_s)=v(x_{s+1},t_{s+1})-v(x_{s+1},t_s)=$$
$$=\exp(-t_s)\{\exp[-\alpha(x_s,t_s)]-1\}\sum_{j=1}^{r}g_j^{-1}(x)<0.$$

Здесь

$$\bar{\alpha}(x_s,t_s)\leqslant\alpha(x_s,t_s),\qquad \sum_{s=1}^{\infty}\bar{\alpha}(x_s,t_s)=\infty.$$

Пусть

$$\lim_{s\to\infty}x_s=\bar{x},\qquad \lim_{s\to\infty}t_s=\infty\quad\text{и}\quad \lim_{s\to\infty}u(x_s,t_s)=0,$$

тогда $\lim\limits_{s\to\infty}u_1(x_s,t_s)=0.$

Используя сделанные предположения можно показать, что найдется подпоследовательность $\{x_{s_i}\}$ такая, что $\lim\limits_{i\to\infty}\|p(x_{s_i},t_{s_i})\|=0$. Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве примера 1, получим, что в точке $\bar{x}$ выполнены достаточные условия Куна — Таккера, т. е. $x\in\Omega$. Следовательно, $-u(x,t)$ положительно определена в пределе (относительно Ω на M), поэтому, согласно теореме 6, решения (4.6) сходятся к Ω на G^0.

Пример 4. Рассмотрим задачу об отыскании минимума выпуклой функции $F(x)$ на E_n. Воспользуемся методом обобщенного градиента [18]:

$$(4.7)\qquad x_{s+1}=x_s-\alpha_s f(x_s),\qquad f(x)=\{y\in E_n:\ (y,z-x)\leqslant F(z)-F(x)\ \forall z\}.$$

Положим $v(x)=\rho^2(x,\Omega)/2$; тогда, используя выпуклость $F(x)$, получим

$$\dot{v}=(f(x),x_*-x)\leqslant F(x_*)-F(x)\leqslant 0,$$
$$v(x_{s+1})\leqslant v(x_s)+\alpha_s\dot{v}(x_s)+\frac{\alpha_s^2}{2}\|f(x_s)\|^2.$$

Здесь $x_*\in\Omega$. Несложно показать, что для всех $x\in E_n$ множество $f(x)$ не пусто, компактно и выпукло, отображение $f(x)$ полунепрерывно сверху. Поэтому существует по меньшей мере одно решение непрерывного аналога (3.8) системы (4.7). Выпуклая функция $F(x)$, достигающая своего минимума на компактном множестве Ω, является бесконечно большой. Поэтому решения непрерывного варианта сходятся к Ω. Функция $v_x(x)$ линейная, удовлетворяет условию Липшица. Согласно теореме 8, для любого x_0 существует $\bar{\alpha}$ такое, что для всякой регулярной, монотонно убывающей последовательности $\{\alpha\}_N$ такой, что $\alpha_0 \leqslant \bar{\alpha}$, решения (4.7) сходятся к Ω. Сходимость имеет место также, если отказаться от условия монотонного убывания α_s, при этом следует считать, что $\|f(x_s)\|$ ограничена для любого s. Именно в такой формулировке сходимость (4.7) впервые была доказана в [13] (см. также [14]).

Авторы выражают благодарность В. В. Румянцеву за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила в редакцию 28.12.1973

Цитированная литература

1. *А. М. Ляпунов.* Общая задача об устойчивости движения. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
2. *В. В. Румянцев.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. В сб. «Механ. в СССР за 50 лет». Т. 1. М., «Наука», 1968, 7—66.
3. *В. И. Зубов.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1957.
4. *Е. А. Барбашин.* Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967.
5. *В. М. Матросов.* Об устойчивости множеств неизолированных положений равновесия неавтономных систем. Тр. Казанского авиац. ин-та, 1965, 89, 20—32.
6. *L. Gambardella, L. Salvadori.* On the asymptotic stability of sets. Ricerche mat., 1971, 20, № 1, 143—154.
7. *J. P. La Salle.* Stability theory for ordinary differential equations. J. Different. Equat., 1968, 4, № 1, 57—65.
8. *N. Rouche.* Attractivity of certain sets proved by using several Liapunov functions. In: «Symposia Math.» Vol. 6. London — New York, Acad. Press., 1971, 331—342.
9. *С. Карлин.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
10. *К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во ин. лит., 1962.
11. *М. В. Рыбашов.* Метод дифференциальных уравнений в задаче отыскания экстремума функций с помощью аналоговых вычислительных машин. Автоматика и телемехан., 1969, № 5, 181—194.
12. *У. И. Зангвилл.* Нелинейное программирование. Единый подход. М., «Сов. Радио», 1973.
13. *Ю. М. Ермольев.* Методы решения нелинейных экстремальных задач. Кибернетика, 1966, № 4, 1—17.
14. *Е. А. Нурминский.* Условия сходимости алгоритмов нелинейного программирования. Кибернетика, 1972, № 6, 79—81.
15. *А. Ф. Филиппов.* О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений. Матем. заметки, 1971, 10, № 3, 307—313.
16. *А. Фиакко, Г. Мак-Кормик.* Нелинейное программирование. М., «Мир», 1972.
17. *Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан.* Численные методы решения некоторых задач исследования операций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, 13, № 3, 583—598.
18. *Н. З. Шор.* О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования. Дисс. канд. физ.-матем. н., Киев, ИК АН УССР, 1964.