В. Г. Жадан, В. И. Кушнирчук, Метод возможных направлений для решения задач выпуклой многокритериальной оптимизации, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1987, том 27, номер 6, 829–838

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 27, 1987 № 6

УДК 519.853

МЕТОД ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

ЖАДАН В. Г., КУШНИРЧУК В. И.

(Москва)

Предлагается обобщение метода возможных направлений для решения задач выпуклой многокритериальной оптимизации. Дается теоретическое обоснование метода, и приводятся результаты численных экспериментов.

§ 1. Введение

Метод возможных направлений одним из первых начал применяться для решения задач выпуклого программирования [1]. Впоследствии в [2] было показано, что он может использоваться также для решения задач нелинейного программирования. Существует несколько версий метода, отличающихся как видом вспомогательной задачи, типом нормирующих ограничений, выбором шага спуска, так и различными способами борьбы с «зигзагообразностью» движения [3]–[6].

Обычно при изложении метода основное внимание уделяется его геометрическим релаксационным свойствам — направленности вектора перемещения внутрь допустимой области и убыванию значений целевой функции вдоль траектории. Возможен также иной подход, когда метод трактуется как прямой метод минимизации некоторой вспомогательной функции, которая зависит не только от исходных прямых переменных, но и от оценки сверху оптимального значения целевой функции [7], [8]. Данная интерпретация позволяет построить обобщение метода на случай решения задач многокритериальной оптимизации, когда вместо минимизации одной функции требуется находить разные точки из паретовского множества оптимальных оценок. В настоящей статье дается обобщение наиболее распространенного варианта метода, приведенного, например, в [4], [5]. Подобно [9], метод является объединенным «двухфазным» в том смысле, что начальная точка у него может быть произвольной.

Рассмотрим задачу выпуклой многокритериальной минимизации:

$$\min_{x\in X} f(x),\qquad X=\{x\in R^n\,|\,g(x)\leqslant 0\}. \tag{1.1}$$

Здесь R^i есть i-мерное евклидово пространство, $f(x)$ и $g(x)$ — определенные на R^n выпуклые, непрерывно дифференцируемые вектор-функции, осуществляющие, соответственно, отображения $f:R^n\to R^r$ и $g:R^n\to R^m$. Значения вектор-функции $f(x)$ определяют в пространстве R^r множество достижимых оценок $F=\{y\in R^r\,|\,y=f(x),\ x\in X\}$. Множество F эффективно выпукло, т. е. выпукло множество $F_+=F+R_+{}^r$, где $R_+{}^r$ — неотрицательный ортант R^r.

Под решением задачи (1.1) понимается множество слабо оптимальных по Парето оценок, определяемое следующим образом:

$$F_*=\{y_*\in F\,|\,\max_{1\leqslant i\leqslant r}[y^i-y_*{}^i]\geqslant 0\ \ \forall y\in F\}.$$

Множеству F_* соответствует множество оптимальных точек $X_*=f^{-1}(F_*)$. Считается, что X_* не пусто. В силу непрерывности вектор-функции $f(x)$ и замкнутости множества X множество X_* всегда замкнуто (см. [10]).

Определение. Ограничения в задаче (1.1) удовлетворяют условию регулярности, если множество $X^0=\{x\in R^n | g(x)<0\}$ не пусто.

Всюду ниже данное условие предполагается выполненным.

Пусть $l=r+m$. Возьмем вектор $y\in R^r$ и через $h(x, y)$ обозначим l-мерную вектор-функцию, первыми r компонентами которой являются функции $f^i(x)-y^i$, $i=1, 2, \dots, r$, а последующими m компонентами – функции $g^j(x)$, $j=1, 2, \dots, m$. Составим вспомогательную функцию

$$H(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant l} h^i(x,y).$$

Из выпуклости функций $f(x)$ и $g(x)$ следует, что $H(x, y)$ выпукла по x на R^n.

Лемма 1. *Пусть существуют $x_*\in R^n$ и $y_*\in R^r$ такие, что*

$$H(x_*, y_*)=0, \tag{1.2}$$

$$x_*\in \operatorname{Arg}\min_{x\in R^n} H(x,y_*), \tag{1.3}$$

тогда $x_*\in X_*$.

Доказательство. Из равенства (1.2) вытекает, что $g^j(x_*)\leqslant 0$ для всех $j=1, 2, \dots, m$, поэтому $x_*\in X$.

Проверим теперь, что $x_*\in X_*$. На основании (1.2), (1.3), для любых $x\in X^0$ выполнено неравенство

$$H(x, y_*)\geqslant H(x_*, y_*)=0.$$

Если предположить, что $y_*^i\geqslant f^i(x_*)$, $i=1, 2, \dots, r$, то отсюда получаем

$$0\leqslant H(x,y_*)=\max_{1\leqslant i\leqslant r} [f^i(x)-y_*^i]\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant r} [f^i(x)-f^i(x_*)]. \tag{1.4}$$

В силу непрерывности $f(x)$, неравенство (1.4) остается справедливым и для всех $x\in X$. Таким образом, $x_*\in X_*$.

Покажем, что случай иного отношения y_* и $f(x_*)$ невозможен. Действительно, предположение, что существует i_0, $1\leqslant i_0\leqslant r$, такое, что $y_*^{i_0}<f^{i_0}(x_*)$, приводит к неравенству $H(x_*, y_*)\geqslant h^{i_0}(x_*, y_*)>0$, что противоречит условию (1.2). Лемма доказана.

Приведенная лемма обобщает результат леммы 2 из [8] на случай задачи многокритериальной оптимизации.

§ 2. Вспомогательная задача

Рассмотрим задачу линейного программирования: найти

$$\max_{s,\sigma} \sigma, \tag{2.1а}$$

$$\langle h_x^i(x, y), s\rangle+\sigma\leqslant 0, \qquad i\in I_\varepsilon(x, y), \tag{2.1б}$$

$$|s^j|\leqslant 1, \qquad j=1, 2, \dots, n, \tag{2.1в}$$

где $h_x^i(x, y)$ – градиент функции $h^i(x, y)$ по x, скобки означают скалярное произведение, ε – некоторый неотрицательный параметр, $I_\varepsilon(x, y)$ – множество индексов, определяемое следующим образом:

$$I_\varepsilon(x, y)=\{1\leqslant i\leqslant l | h^i(x, y)\geqslant H(x, y)-\varepsilon\}.$$

Решение задачи (2.1) в точке $[x, y]\in R^{n+r}$ при заданном ε обозначим $q_\varepsilon(x, y)=[\sigma_\varepsilon(x, y), s_\varepsilon(x, y)]$. В тех случаях, когда оно не единственно, $q_\varepsilon(x, y)$ будет обозначать произвольное решение (2.1). Из вида целевой функции задачи (2.1) следует, что величина $\sigma_\varepsilon(x, y)$ для любого ее решения одна и та же, причем, в силу допустимости нулевой точки, $\sigma_\varepsilon(x, y)\geqslant 0$.

Приведем ряд утверждений, касающихся свойств задачи (2.1).

Лемма 2. *Пусть точка* $[x, y]\in R^{n+r}$ *такова, что* $x\in X$, $H(x, y)=0$. *Тогда если* $x\overline{\in} X_*$, *то* $\sigma_0(x, y)>0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из равенства $H(x, y)=0$ вытекает $y\geqslant f(x)$.

Поскольку, по предположению, $x\overline{\in} X_*$, то найдется точка $x'\in X$ такая, что $f(x')<f(x)$. Кроме того, так как выполнено условие регулярности, то всегда точку x' можно выбрать таким образом, что $x'\in X^0$. Поэтому $h^i(x', y)<0$ для любого $i\in I_0(x, y)$. Из выпуклости функций $h^i(x, y)$ по x следует $\langle h_x^i(x, y), x'-x\rangle\leqslant h^i(x', y)-h^i(x, y)<0$. Взяв вектор $s'=(x'-x)/\lambda$, где λ — максимальная по модулю компонента вектора $x'-x$, получим, что s' удовлетворяет нормирующему ограничению (2.1в) и $\langle h_x^i(x, y), s'\rangle<0$ для всех $i\in I_0(x, y)$. Таким образом, $\sigma_0(x, y)>0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть точка* $[x, y]\in R^{n+r}$ *такова, что* $x\overline{\in} X$ *и* $y\geqslant f(x)$. *Тогда* $\sigma_0(x, y)>0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Ниже символом $\|\cdot\|$ обозначается евклидова норма в R^n, символами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ — соответственно, октаэдрическая и чебышёвская нормы.

Лемма 4. *Пусть точка* $[x_*, y_*]\in R^{n+r}$ *такова, что* $x_*\in X$, $H(x_*, y_*)=0$. *Тогда если* $\sigma_0(x_*, y_*)=0$, *то* $x_*\in X_*$.

Доказательство. Из равенства $\sigma_0(x_*, y_*)=0$ следует, что для любого направления $s\in R^n$ найдется индекс i_0 такой, что $\langle h_x^{i_0}(x_*, y_*), s\rangle\geqslant 0$. Поэтому для всех $s\in R^n$ производная по направлению

$$\frac{\partial_x H(x_*, y_*)}{\partial s}=\max_{i\in I_0(x_*, y_*)}\langle h_x^i(x_*, y_*), s\rangle\geqslant 0$$

и, стало быть,

$$\inf_{\|s\|\leqslant 1}\frac{\partial_x H(x_*, y_*)}{\partial s}\geqslant 0. \tag{2.2}$$

Так как функции $h^i(x, y)$, $i=1, 2, \ldots, l$, выпуклы по x, то, на основании теоремы 3.3.1 из [11], выполнение неравенства (2.2) означает, что имеет место (1.3). Отсюда, согласно лемме 1, $x_*\in X_*$. Лемма доказана.

Выпишем для задачи (2.1) двойственную к ней:

$$\min_{u, \mu_+, \mu_-}\left(\sum_{j=1}^n \mu_+^j+\sum_{j=1}^n \mu_-^j\right), \tag{2.3а}$$

$$\sum_{i\in I_\varepsilon(x,y)} u^i h_x^i(x, y)+\mu_+-\mu_-=0, \tag{2.3б}$$

$$\sum_{i\in I_\varepsilon(x,y)} u^i=1, \tag{2.3в}$$

$$u\geqslant 0, \qquad \mu_+\geqslant 0, \qquad \mu_-\geqslant 0. \tag{2.3г}$$

Здесь $u=\{u^i,\ i\in I_\varepsilon(x,\ y)\}$, $\mu_+=\{\mu_+^1,\ldots,\mu_+^n\}$, $\mu_-=\{\mu_-^1,\ldots,\mu_-^n\}$. Обозначим через $[u(x,\ y),\ \mu_+(x,\ y),\ \mu_-(x,\ y)]$ произвольное ее решение. На основании теоремы о двойственности, оптимальные значения целевых функций в (2.1) и (2.3) совпадают:

$$(2.4)\qquad \sum_{j=1}^{n}\mu_+^j(x,y)+\sum_{j=1}^{n}\mu_-^j(x,y)=\sigma_\varepsilon(x,y).$$

Обозначим

$$p(x,y)=\sum_{i\in I_\varepsilon(x,y)}u^i(x,y)h_x^i(x,y).$$

Из условия дополняющей нежесткости следует, что из двух компонент μ_+^j и μ_-^j только одна может быть отлична от нуля. Поэтому из (2.3б) и (2.4) вытекает, что $\|p(x,\ y)\|_1=\sigma_\varepsilon(x,\ y)$.

Обратимся теперь к задаче (2.1). На основании (2.1б) и (2.3в) имеем

$$\langle p(x,\ y),\ -s_\varepsilon(x,\ y)\rangle\geqslant\sigma_\varepsilon(x,\ y).$$

Но, в силу неравенства Гёльдера, для любого $s\in R^n$ такого, что $\|s\|_\infty=1$,

$$\langle p(x,\ y),\ s\rangle\leqslant\|p(x,\ y)\|_1\|s\|_\infty=\sigma_\varepsilon(x,\ y).$$

Таким образом, вектор $-s_\varepsilon(x,\ y)$ обладает тем свойством, что из всех векторов s, удовлетворяющих условию нормировки (2.1в), скалярное произведение его на вектор $p(x,\ y)$ наибольшее возможное. Как нетрудно проверить, вектор $p(x,\ y)$ является ε-субградиентом функции $H(x,\ y)$ по x в точке $[x,\ y]$.

§ 3. Численный метод

Приведем метод решения задачи (1.1), который основан на отыскании точек x_* и y_*, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.3).

Пусть заданы точка $x_0\in R^n$ и вектор $y_0\in F_+$. Пусть, кроме того, выбраны начальное значение параметра $\varepsilon=\varepsilon_0>0$ и направление e, лежащее внутри ортанта R_+^r.

Рассмотрим итеративный процесс

$$(3.1а)\qquad y_{k+1}=y_k-\beta(x_k,\ y_k,\ e)e,$$

$$(3.1б)\qquad x_{k+1}=x_k+\alpha_k s_k,$$

где s_k — произвольное решение $s_{\varepsilon_k}(x_k,\ y_{k+1})$ вспомогательной задачи (2.1) в точке $[x_k,\ y_{k+1}]$.

Параметр ε_k в ней полагается равным

$$(3.2)\qquad \varepsilon_k=2^{-j_k}\varepsilon_{k-1},\qquad j_k=\min\{j=0,1,\ldots\mid\sigma_\varepsilon(x_k,y_{k+1})>\varepsilon,\ \varepsilon=2^j\varepsilon_{k-1}\}.$$

Для его отыскания задача (2.1), вообще говоря, должна решаться несколько раз.

Коэффициент $\beta(x,\ y,\ e)$ в (3.1а) определяется по формуле

$$(3.3)\qquad \beta(x,y,e)=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\frac{y^i-f^i(x)}{e^i}.$$

Шаг α_k находится путем дробления пополам некоторого начального шага α до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$(3.4)\qquad H(x_k+\alpha_k s_k,\ y_{k+1})\leqslant H(x_k,\ y_{k+1})-\alpha_k\sigma_k/2.$$

Здесь σ_k — оптимальное значение целевой функции $\sigma_\varepsilon\ (x_k,\ y_{k+1})$ в задаче (2.1).

Обозначим через $\varphi(x, y)$ и $\psi(x)$ функции

$$\varphi(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}[f^i(x)-y^i],\qquad \psi(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant m} g_+{}^i(x),$$

где $g_+{}^i(x)=\max[0,\ g^i(x)]$. Очевидно, что для любых $y\in R^r$ и $x\bar{\in}X$

$$(3.5)\qquad H(x,\ y)=\max[\varphi(x,\ y),\ \psi(x)].$$

Равенство (3.5) остается справедливым, если $x\in X$, но $\varphi(x,\ y)\geqslant0$.

По терминологии, принятой в [12], сформулированный метод относится к прямым методам условной оптимизации. В нем безусловная минимизация функции $H(x,\ y)$ по x сочетается с одновременным решением на каждой итерации уравнения $\varphi(x_k,\ y)=0$. В тех случаях, когда точка x_k допустима, любое решение этого уравнения вместе с x_k удовлетворяют уравнению (1.2). Отметим также, что поскольку функция $H(x,\ y)$ негладкая, то для ее минимизации применяется ε-алгоритм (см. [11]). Параметр ε меняется в процессе расчетов по стандартной для метода возможных направлений схеме [4], [5].

Лемма 5. *На каждой итерации имеют место равенства*

$$(3.6)\qquad \varphi(x_k,\ y_{k+1})=0,\qquad H(x_k,\ y_{k+1})=\psi(x_k).$$

Доказательство. Согласно определению (3.3), для любых $i=1,\ 2,\ldots,r$

$$(3.7)\qquad f^i(x_k)-y_{k+1}^i=f^i(x_k)-y_k{}^i+\beta(x_k,y_k,e)e^i\leqslant0.$$

Поскольку хотя бы для одного индекса i неравенство (3.7) переходит в равенство, то из (3.7) следует, что на каждой итерации справедливо левое равенство (3.6). Из (3.5) приходим к правому равенству (3.6). Лемма доказана.

Введем множество

$$G(x_0)=\{x\in R^n\,|\,\psi(x)\leqslant\psi(x_0)\}.$$

В силу выпуклости функции $\psi(x)$, оно всегда выпукло. Отметим также, что $X\subseteq G(x_0)$ для любого $x_0\in R^n$.

Лемма 6. *На каждой итерации* $x_{k+1}\in G(x_k)$.

Доказательство. Допустим сначала, что $x_{k+1}\in X$. Тогда, как следует из сделанного выше замечания, обязательно $x_{k+1}\in G(x_k)$.

Предположим теперь, что $x_{k+1}\bar{\in}X$. Из (3.4) получаем, что $H(x_{k+1},\ y_{k+1})\leqslant H(x_k,\ y_{k+1})$. Но, согласно утверждению предыдущей леммы, $H(x_k,\ y_{k+1})=\psi(x_k)$. Кроме того, из формулы (3.5) вытекает, что $\psi(x_{k+1})\leqslant\leqslant H(x_{k+1},\ y_{k+1})$. Поэтому $\psi(x_{k+1})\leqslant\psi(x_k)$ и, стало быть, $x_{k+1}\in G(x_k)$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если $x_{k_1}\in X$ на некоторой итерации k_1, то все остальные $x_k\in X$, $k>k_1$.

Следствие 2. Для любого $x_0\in R^n$ последовательность $\{x_k\}$, вырабатываемая процессом (3.1), принадлежит $G(x_0)$.

Сделаем ряд дополнительных предположений относительно задачи (1.1).

Условие A_1. Градиенты функций $f^i(x)$, $i=1,\ 2,\ldots,r$, и $g^j(x)$, $j=1,\ 2,\ldots,\ m$, удовлетворяют на R^n условию Липшица с константой L, т. е.

$$\|f_x^i(x_1)-f_x^i(x_2)\|\leqslant L\|x_1-x_2\|, \qquad i=1, 2, \ldots, r,$$

$$\|g_x^j(x_1)-g_x^j(x_2)\|\leqslant L\|x_1-x_2\|, \qquad j=1, 2, \ldots, m,$$

для любых x_1, $x_2\in R^n$.

Условие A_2. Существует константа $K<+\infty$ такая, что

$$(3.8) \qquad \max_{1\leqslant i\leqslant r}\max_{x\in G(x_0)}\|f_x^i(x)\|\leqslant K, \qquad \max_{1\leqslant j\leqslant m}\max_{x\in G(x_0)}\|g_x^j(x)\|\leqslant K.$$

Условие A_3. Множество X ограничено.

Условия A_1 и A_2 позволяют оценить снизу значения шага α_k и параметра $\beta(x_k, y_k, e)$ на каждой итерации.

Лемма 7. *Шаг α_k удовлетворяет неравенству*

$$(3.9) \qquad \alpha_k\geqslant\bar\alpha_k=\min\left[\alpha, \frac{\sigma_k}{2Ln}, \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k+2n^{1/2}}\right].$$

Доказательство. Пусть $i\in I_{\varepsilon_k}(x_k, y_{k+1})$. Согласно лемме 9.3 из [4],

$$h^i(x_k+\alpha_k s_k, y_{k+1})\leqslant h^i(x_k, y_{k+1})+\alpha_k\langle h_x^i(x_k, y_{k+1}), s_k\rangle+{}^1/_2L\alpha_k^2\|s_k\|^2.$$

Но из условий задачи (2.1) следует, что $\langle h_x^i(x_k, y_{k+1}), s_k\rangle\leqslant-\sigma_k$. Кроме того, в силу (2.1в), $\|s_k\|\leqslant n^{1/2}$. Отсюда приходим к неравенству

$$h^i(x_k+\alpha_k s_k, y_{k+1})\leqslant h^i(x_k, y_{k+1})+\alpha_k[-\sigma_k+{}^1/_2Ln\alpha_k],$$

из которого вытекает, что при $\alpha_k\leqslant\sigma_k(Ln)^{-1}$ выполнено неравенство

$$(3.10) \qquad h^i(x_k+\alpha_k s_k, y_{k+1})\leqslant H(x_k, y_{k+1})-{}^1/_2\alpha_k\sigma_k.$$

Предположим теперь, что $i\bar\in I_{\varepsilon_k}(x_k, y_{k+1})$. Имеет место представление

$$h^i(x_k+\alpha_k s_k, y_{k+1})=h^i(x_k, y_{k+1})+\alpha_k\langle h_x^i(x_k+\theta_k^i s_k, y_{k+1}), s_k\rangle,$$

где $0\leqslant\theta_k^i\leqslant1$, и, значит, справедливо неравенство

$$h^i(x_k+\alpha_k s_k, y_{k+1})\leqslant H(x_k, y_{k+1})-\varepsilon_k+\alpha_k n^{1/2}\|h_x^i(x_k+\alpha_k\theta_k^i s_k, y_{k+1})\|\leqslant$$
$$\leqslant H(x_k, y_{k+1})-\varepsilon_k+\alpha_k n^{1/2}K.$$

Из него видно, что при $\alpha_k\leqslant2\varepsilon_k(\sigma_k+2n^{1/2}K)^{-1}$ будет опять выполнено (3.10).

Поскольку, согласно схеме метода, шаг α_k подбирается путем деления пополам начального шага α, то из (3.10) приходим к выводу, что имеет место оценка (3.9). Лемма доказана.

Таким образом, если точка $x_k\bar\in X_*$, то, в силу утверждения леммы 2, шаг α_k всегда отличен от нуля и может быть найден путем дробления α конечное число раз.

Лемма 8. *Пусть точка $x_{k-1}\bar\in X$. Тогда*

$$(3.11) \qquad \beta(x_k, y_k, e)\geqslant\frac{\sigma_{k-1}\bar\alpha_{k-1}}{2e_*}, \qquad \text{где} \qquad e_*=\max_{1\leqslant i\leqslant r}e^i.$$

Доказательство. Так как $x_{k-1}\bar\in X$, то, по лемме 5, $H(x_{k-1}, y_k)=0$. В этом случае из (3.4) следует неравенство $H(x_k, y_k)\leqslant-2^{-1}\sigma_{k-1}\alpha_{k-1}$ и, стало быть, $f^i(x_k)-y_k^i\leqslant-2^{-1}\sigma_{k-1}\alpha_{k-1}$ для любого $i=1, 2, \ldots, r$. Поэтому

$$\beta(x_k, y_k, e)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant r}\frac{y_k^i-f^i(x_k)}{e^i}\geqslant\frac{1}{2}\sigma_{k-1}\alpha_{k-1}e_*^{-1}.$$

Отсюда и из результата леммы 7 вытекает оценка (3.11). Лемма доказана.

Приведем теперь теоремы о сходимости процесса (3.1). Через $Y(x_0, e)$ обозначим множество предельных точек последовательности $\{x_k\}$.

Теорема. *Пусть выполнены предположения* A_1—A_3. *Тогда* $Y(x_0, e) \subseteq X_*$.

Доказательство. Из условия A_3 и выпуклости функции $\psi(x)$ следует, что множество $G(x_0)$ ограничено для любого $x_0 \in R^n$. Поэтому, на основании следствия 2, последовательность $\{x_k\}$ принадлежит компактному множеству и, значит, множество $Y(x_0, e)$ не пусто.

Предположим сначала, что все точки $\{x_k\}$ находятся вне допустимой области. В этом случае, в силу (3.5), на каждой итерации $H(x_k, y_{k+1}) = \psi(x_k)$. Кроме того, согласно лемме 7 имеет место оценка (3.9). Из (3.4) тогда приходим к неравенствам $\psi(x_{k+1}) \leqslant \psi(x_k) - 2^{-1}\sigma_k\bar{\alpha}_k$, суммируя которые, получаем

$$\psi(x_k) \leqslant \psi(x_0) - 2^{-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sigma_j\bar{\alpha}_j.$$

Поскольку функция $\psi(x)$ неотрицательна, то отсюда и из (3.9) следует, что $\sigma_k \to 0$ при $k \to \infty$. Одновременно из правила выбора параметра ε_k вытекает, что $\varepsilon_k \to 0$.

Пусть $\{x_{k_j}\}$ — произвольная сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, которая сходится к точке x_*. Покажем, что $x_* \in X$. Если это не так, то $\psi(x_*) > 0$. Обозначим $I_\varepsilon^{(1)}(x) = \{r < i \leqslant l \mid h^i(x, y) \geqslant \psi(x) - \varepsilon\}$. Используя утверждение леммы 5, получаем, что $I_{\varepsilon_k}(x_k, y_{k+1}) = I_{\varepsilon_k}^{(1)}(x_k)$ для k достаточно больших. Но для любого $x \equiv X$ всегда можно указать $\varepsilon(x) > 0$ такое, что $I_\varepsilon^{(1)}(x) = I_0^{(1)}(x)$, когда $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon(x)$. Кроме того, по лемме 7.1 из [11], найдется окрестность $\Delta(x_*)$ точки x_* такая, что $I_\varepsilon^{(1)}(x) \subseteq I_0^{(1)}(x_*)$ для всех $x \in \Delta(x_*)$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tilde{\varepsilon}(x_*) \leqslant \varepsilon(x_*)$. Поэтому из сходимости последовательности $\{x_{k_j}\}$ следует, что $I_{\varepsilon_k}(x_k, y_{k+1}) = I_{\varepsilon_k}^{(1)}(x_k) = I_0^{(1)}(x_*)$ для $k = k_j$ и j, бóльших некоторого номера j_*. Более того, для этих k, опять же в силу утверждения леммы 5, оптимальное значение целевой функции в задаче (2.1) при $\varepsilon = 0$ фактически не зависит от y_{k+1}, так что вместо $\sigma_0(x_k, y_{k+1})$ можно писать $\sigma_0(x_k)$.

Задача (2.1) при фиксированном множестве $I_\varepsilon(x, y)$, равном $I_0^{(1)}(x_*)$ по теореме 26.1 из [13], является f-устойчивой в точке x_* (в смысле определения, данного там же). Поэтому $\sigma_0(x_s) \to \sigma_0(x_*)$ для любой последовательности $x_s \to x_*$. Но $x_{k_j} \to x_*$ и $\sigma_0(x_{k_j}) \to 0$. Отсюда следует, что $\sigma_0(x_*) = 0$. Так как, по предположению, $\psi(x_*) > 0$, то одновременно с предыдущим равенством для любого $y_* \geqslant f(x_*)$ справедливо $\sigma_0(x_*, y_*) = 0$. Последнее, в силу утверждения леммы 3, невозможно. Таким образом, $x_* \in X$. Из монотонного убывания последовательности $\{\psi(x_k)\}$ вытекает также, что и все остальные предельные точки $\{x_k\}$ принадлежат X.

Пусть x_* — произвольная предельная точка $\{x_k\}$ и подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$ сходится к x_*. Покажем, что найдется подпоследовательность последовательности $\{y_{k_j+1}\}$, которая сходится к $y_* \in R^r$ и $\varphi(x_*, y_*) = 0$. Рассмотрим прямую линию $\Gamma(y_0) = \{y \in R^r \mid y = y_0 + \beta e,\ \beta \in R^1\}$. Все точки последовательности $\{y_k\}$ лежат на этой прямой. Так как, согласно (3.6), $y_{k_j+1} \geqslant f(x_{k_j})$ и $x_{k_j} \to x_*$, то можно указать $\bar{y} \in \Gamma(y_0)$ такой, что все y_k

начиная с некоторого номера будут принадлежать лучу $\Gamma_+(\bar{y})=\{y\in R^r|$ $y=\bar{y}+\beta e,\ \beta>0\}$. Если допустить, что последовательность $\{y_{k+1}\}$ не имеет предельных точек, то $y_{k_j}{}^i\to+\infty$ для любого $i=1, 2, \ldots, r$. Но, в силу (3.6), на каждом шаге $y^i_{k_j}=f^i(x_{k_j})$ хотя бы для одного индекса i. Поэтому найдется индекс i_1 такой, что $f^{i_1}(x_{k_s})\to+\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{x_{k_s}\}$, содержащейся в $\{x_k\}$. Это противоречит ограниченности непрерывной функции $f^{i_1}(x)$ на компактном множестве $G(x_0)$. Итак, для любой предельной точки x_* можно указать сходящуюся к ней подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$ такую, что соответствующая подпоследовательность $\{y_{k+1}\}$ сходится к точке y_* и $\varphi(x_*, y_*)=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда найдется номер k_1 такой, что $x_{k_1}\in X$. Тогда, в силу следствия 1, и все остальные точки $x_k\in X$, $k>k_1$. Поэтому если x_* — предельная точка последовательности $\{x_k\}$, то обязательно $x_*\in X$. Согласно утверждению леммы 8, все точки последовательности $\{y_k\}$ начиная с номера k_1 принадлежат лучу $\Gamma_-(y_{k_1})=\{y\in R^r|y=y_{k_1}-\beta e,$ $\beta\geqslant0\}$. Для $k>k_1$ имеем

$$y_k=y_{k_1}-\sum_{i=k_1}^{k-1}\beta(x_i, y_i, e)e.$$

Луч $\Gamma_-(y_{k_1})$ пересекает границу множества F_+. Поскольку все $x_k\in X$, когда $k\geqslant k_1$, то это означает, что ряд

$$\sum_{i=k_1}^{\infty}\beta(x_i,y_i,e)$$

сходится и, следовательно, $\beta(x_k, y_k, e)\to0$ при $k\to\infty$. Согласно оценке (3.11) и (3.2), отсюда получаем, что и $\sigma_k\to0$, $\varepsilon_k\to0$. Кроме того, так как последовательность $\{y_k\}$ для $k>k_1$ монотонно убывает и ограничена снизу, то она сходится к некоторой точке y_*. Из $\varphi(x_k, y_{k+1})=0$ вытекает, что $\varphi(x_*, y_*)=0$.

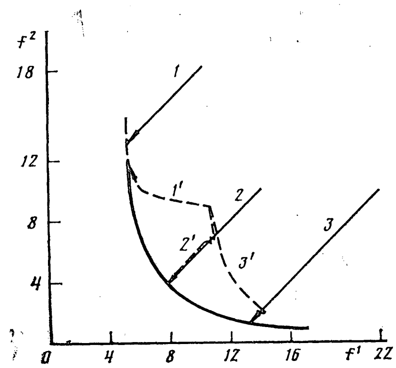
Таким образом, установлено, что в обоих случаях сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$ сходится к точке $x_*\in X$, $\sigma_{\varepsilon k_j}(x_{k_j}, y_{k_j+1})\to0$ и $\varphi(x_*,$ $y_*)=0$, где y_* — предел последовательности $\{y_{k_j+1}\}$. Отсюда сразу получаем, что $H(x_*, y_*)=0$. Далее, повторяя все рассуждения, проведенные выше, но применительно к точке $[x_*, y_*]$, можно убедиться, что $\sigma_0(x_{k_j}$ $y_{k_j+1})\to\sigma_0(x_*, y_*)$ и, стало быть, $\sigma_0(x_*, y_*)=0$. Поэтому, согласно лемме 4, $x_*\in X_*$. Теорема доказана.

В результате работы метода получается одна слабо оптимальная по Парето оценка. Выбор разных начальных векторов y_0 приводит к разным оптимальным оценкам из F_* и соответствующим им точкам из X_*. Имеется также другой способ находить разные решения задачи (1.1): зафиксировать $y_0\in F_+$ и менять направление e. Если вектор $y_0=[y_0{}^1, \ldots$ $\ldots, y_0{}^r]$ таков, что

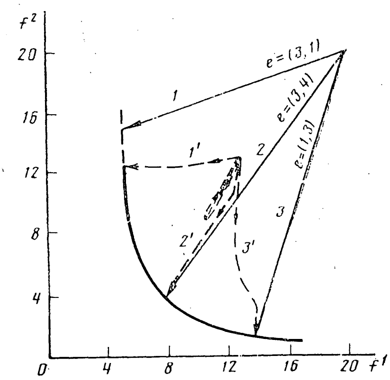
$$y_0{}^i>\max_{x\in X}f^i(x),\qquad i=1,2,\ldots,r,$$

то, варьируя направление e в пределах ортанта $R_+{}^r$, можно получить все оценки из F_*.

Предложенный метод был включен в раздел многокритериальной оптимизации диалоговой системы ДИСО [14]. Предназначен он для реше-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния задачи вида (1.1), в которую помимо ограничений типа неравенства могут входить также параллелепипедные ограничения и ограничения типа равенства, причем от последних требуется, чтобы они были линейными. Начальная точка x_0 выбирается таким образом, чтобы она удовлетворяла этим двум типам ограничений.

Для проверки работоспособности метода решалась следующая тестовая задача: минимизировать функции

$$f^1(x)=(x^1+3x^2+x^3)^2+4(x^1-x^3-1)^2,$$

$$f^2(x)=(x^1+3x^2+x^3)^2+4(x^1-x^3+1)^2$$

при условиях

$$g^1(x)=x^1+x^2+x^3-1=0, \qquad g^2(x)=3-4x^3-6x^2+(x^1)^3\leqslant 0,$$

$$x^1\geqslant 0, \qquad x^2\geqslant 0, \qquad x^3\geqslant 0.$$

Во всех расчетах были взяты следующие начальные значения: $\varepsilon_0=0.1$, $\alpha=1$, $x_0=(0.1,\ 0.7,\ 0.2)$. На приведенных графиках показаны два способа получения различных слабо оптимальных оценок из F_*. При этом сплошными линиями *1*, *2*, *3* отмечены пути движения по уровням y_k, а штриховые линии *1'*, *2'*, *3'* показывают, как осуществляется движение в критериальном пространстве из начального значения $f(x_0)=(10.6,\ 9.0)$. На фиг. 1 при фиксированном направлении $e=(1.1)$ выбраны различные начальные значения векторов y_0. На фиг. 2 показано, как получались оптимальные оценки исходя из фиксированного начального значения $y_0=$ $=(20,\ 20)$ при изменении направления e. В обоих случаях видно, что если последовательность y_k сходится к точке y_*, не принадлежащей множеству F, то соответствующая последовательность значений оценок сходится к крайней точке из F_*.

В заключение отметим, что многие другие варианты методов возможных направлений, отличные от рассмотренного выше, могут аналогичным образом быть обобщены для решения задач многокритериальной оптимизации.

Литература

1. *Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Богомолов Н. А., Карманов В. Г.* О методе вычисления стационарных точек общей задачи нелинейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17. № 1. С. 72–78.

3. *Topkis D. M., Veinott A. J.* On the convergence of some feasible directions algorithms for nonlinear programming // SIAM J. Control. 1967. V. 5. № 2. P. 268–279.
4. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
5. *Полак Э.* Численные методы оптимизации: Единый подход. М.: Мир, 1974.
6. *Meyer G. G. L.* An efficient method of feasible directions // SIAM J. Control and Optimizat. 1983. V. 21. № 1. P. 153–162.
7. *Гроссман К., Каплан А. А.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. Новосибирск: Наука, 1981.
8. *Жадан В. Г.* Метод возможных направлений в диалоговой системе оптимизации ДИСО // Пакеты прикл. программ: Методы оптимизации. М.: Наука, 1984. С. 93–102.
9. *Polak E., Trahan R., Mayne D. Q.* Combined phase 1 – phase 2 methods of feasible directions // Math. Program. 1979. V. 17. № 1. P. 61–73.
10. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
11. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
12. *Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.* Об одном подходе к систематизации численных методов нелинейного программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 1. С. 47–59.
13. *Еремин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.
14. *Веселов Е. Н., Евтушенко Ю. Г., Мазурик В. П.* Диалоговая система оптимизации ДИСО-2 // Пакеты прикл. программ: Пробл. и перспективы. М.: Наука, 1982. С. 46–57.

Поступила в редакцию 6.XII.1985
Переработанный вариант 13.V.1986