



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан, Точные вспомогательные функции в задачах оптимизации, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1990, том 30, номер 1, 43–57

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.148.107.193

5 ноября 2024 г., 00:21:41



Ю. Г. ЕВТУШЕНКО, В. Г. ЖАДАН
(Москва)

ТОЧНЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Вводится новое понятие точной вспомогательной функции, задача минимизации которой имеет то же множество решений, что и исходная оптимизационная задача. Даны достаточные условия для того, чтобы вспомогательная функция была точной, приведены примеры таких функций. Введение точных вспомогательных функций позволяет редуцировать решение исходной задачи к однократной минимизации вспомогательной функции. Во многих случаях задача условной минимизации сводится к задаче безусловной минимизации.

§ 1. Основные определения

Рассмотрим задачу нелинейного программирования: найти

$$(1.1) \quad f_* = \min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x \in E^n \mid g(x) \leq 0\}.$$

Здесь E^n есть n -мерное евклидово пространство, $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, осуществляющие, соответственно, отображения $f: E^n \rightarrow E^1$, $g: E^n \rightarrow E^m$. Решением задачи (1.1) является любая точка x_* из множества

$$X_* = \{x_* \in X \mid f(x) - f(x_*) \geq 0 \quad \forall x \in X\},$$

которое всюду ниже предполагается не пустым. Все результаты данной работы получены без использования условий выпуклости и дифференцируемости функций f и g по x .

Введем функцию $R(x, y)$, зависящую от исходных переменных $x \in E^n$ и от некоторого вектора y из множества Y . Размерность y и вид множества Y пока не конкретизируем. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$(1.2) \quad \min_{x \in P} R(x, y),$$

где P — некоторое замкнутое множество из E^n , содержащее X . В частности, в качестве P может быть взято либо все пространство E^n , либо само непустое множество X , либо его часть.

Предполагая, что решение задачи (1.2) существует, определим точечное-множественное отображение

$$X(y) = \text{Arg} \min_{x \in P} R(x, y).$$

Определение. Функция $R(x, y)$ — точная вспомогательная функция (т.в.ф.) для задачи (1.1) на $P \times Y$, если $X(y) \neq \emptyset$ и $X(y) = X_*$ для любого $y \in Y$.

Изучение т.в.ф. исключительно важно с точки зрения построения численных методов, так как знание таких функций позволяет решить исходную задачу (1.1) в результате однократной минимизации (1.2) вспомогательной функции. При этом желательно, чтобы множество Y было возмож-

но «шире», чтобы не возникали дополнительные трудности определения точек из Y . Крайне неудобны в этом отношении функции, для которых Y состоит из одной точки.

Впервые т.в.ф. были построены в работах [1], [2], где были обнаружены так называемые точные штрафные функции, являющиеся т.в.ф. В дальнейшем этим функциям было посвящено огромное число исследований, однако, насколько известно авторам, кроме [3] — [5] не было предложено никаких других принципиально новых т.в.ф. Ниже развивается подход, использованный авторами в [6] — [8]. Даются достаточные условия т.в.ф., приведены примеры таких функций.

Удобно строить т.в.ф. в виде ограниченной снизу функции. Пусть $R(x, y)$ — т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $P \times Y$. Возьмем функцию

$$(1.3) \quad M(x, y) = R(x, y) - R(x_*, y), \quad x \in X, y \in Y.$$

Для любых $x \in P, y \in Y, x \in X$. функция M неотрицательна. Множество точек x , доставляющих минимум функции $M(x, y)$ по x на P , совпадает с множеством $X(y)$ и — если $y \in Y$ — с множеством X_* . Оно является также множеством решений уравнения $M(x, y) = 0$, принадлежащих P , при каждом фиксированном векторе y из Y . Выбор конкретного элемента x . из X . не влияет на значения функции $M(x, y)$ при $y \in Y$, так как $R(x, y)$ принимает одно и то же значение при всех x из X_* . Поэтому

$$M(x, y) = 0 \quad \forall x \in X(y) = X_*, \quad \forall y \in Y.$$

Если $R(x, y)$ — т.в.ф., то функция $M(x, y)$ также т.в.ф. Верно и обратное: если построенная в виде (1.3) функция $M(x, y)$ является т.в.ф., то и $R(x, y)$ т.в.ф. Поэтому вместо доказательства того, что $R(x, y)$ — т.в.ф., достаточно показать, что т.в.ф. является соответствующая ей функция $M(x, y)$.

Для того чтобы построенная в виде (1.3) функция $M(x, y)$ была т.в.ф. на множестве $P \times Y$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$(1.4) \quad M(x, y) \geq 0 \quad \forall x \in P, \quad \forall y \in Y,$$

$$(1.5) \quad \forall y \in Y \text{ из } M(x, y) = 0 \text{ следует, что } x \in X(y) = X_*.$$

Если функция $M(x, y)$ дифференцируема по y , множество Y открытое, то необходимо, чтобы

$$M_y(x, y) = 0 \quad \forall x \in X(y) = X_*, \quad \forall y \in Y.$$

Это условие можно добавить к (1.5), их совместное рассмотрение во многих случаях позволяет легко показывать, что $X(y) = X_*$.

Умножение т.в.ф. на любое положительное число оставляет вспомогательную функцию точной. Сумма точных вспомогательных функций на одном и том же множестве $P \times Y$ есть т.в.ф. на том же самом множестве. Если множества $P \times Y$ разные, то следует взять их пересечение.

Пусть функция $Q(z)$ задана на множестве $Z \subseteq E^s$; полярную к ней функцию $Q^0(z_0 | Z)$ на множестве $Z_0 \subseteq E^s$ определим с помощью соотношений

$$(1.6) \quad Q^0(z_0 | Z) = \inf_{\mu \in M(z_0)} \mu, \quad M(z_0) = \{ \mu \in \bar{E}^1 | \langle z, z_0 \rangle \leq \mu Q(z) \quad \forall z \in Z \},$$

где $z_0 \in Z_0, \bar{E}^1$ — расширенная прямая E^1 , т. е. прямая E^1 , к которой добавлены элементы $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$. Из приведенного определения следует не-

равенство Минковского — Малера

$$(1.7) \quad \langle z, z_0 \rangle \leq Q(z) Q^0(z_0 | Z) \quad \forall z \in Z, \quad \forall z_0 \in Z_0.$$

Если функция $Q(z)$ принимает только положительные значения на Z , то наряду с (1.6) можно пользоваться следующим определением:

$$(1.8) \quad Q^0(z_0 | Z) = \sup_{z \in Z} \frac{\langle z, z_0 \rangle}{Q(z)}.$$

Если $Q(z)$ неположительна на Z , то

$$(1.9) \quad Q^0(z_0 | Z) = \inf_{z \in Z} \frac{\langle z, z_0 \rangle}{Q(z)}.$$

Обозначим через E_+^n и E_-^n неотрицательный и неположительный ортанты E^n , т. е. совокупности таких векторов из E^n , у которых все координаты, соответственно, неотрицательны, неположительны.

Для каждой скалярной функции $\varphi(z)$ векторного аргумента z определим

$$\varphi_+(z) = \max[0, \varphi(z)], \quad \varphi_-(z) = \min[0, \varphi(z)].$$

Аналогично, для векторов $z \in E^s$

$$z_+ = [z_+^1, \dots, z_+^s], \quad z_+^i = \max[0, z^i], \quad z_- = [z_-^1, \dots, z_-^s], \\ z_-^i = \min[0, z^i].$$

Определим p -ю гёльдеровскую норму вектора z :

$$(1.10) \quad \|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^s |z^i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Сопряженной к ней будет норма $\|z\|_{p^*}$, где $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$.

Функцию (1.10) будем рассматривать и при ненулевых $p < 1$, а также при $p = 0$ и $p = \pm\infty$, доопределив ее следующим образом:

$$\|z\|_0 = s^{1/2} \left(\prod_{i=1}^s |z^i| \right)^{1/s}, \quad \|z\|_{+\infty} = \max_{1 \leq i \leq s} |z^i|,$$

$$\|z\|_{-\infty} = \min_{1 \leq i \leq s} |z^i|.$$

При $p < 0$ считается, что функция (1.10) равна нулю, если хотя бы одна координата вектора z обращается в нуль.

Приведем некоторые примеры для $Z_0 = E_+^s$:

$$p > 1, \quad p_* > 1, \quad Q(z) = \|z_+\|_p, \quad Q^0(z_0 | E^s) = \|z_0\|_{p_*}, \\ p < 1, \quad p_* < 1, \quad Q(z) = -\|z_-\|_p, \quad Q^0(z_0 | E_-^s) = \|z_0\|_{p_*}.$$

Здесь p и p_* связаны между собой той же зависимостью $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$. Укажем отдельно особые случаи:

$$p = 0, \quad p_* = 0, \quad Q(z) = -\|z_-\|_0, \quad Q^0(z_0 | E_-^s) = \|z_0\|_0, \\ p = +\infty, \quad p_* = 1, \quad Q(z) = \|z_+\|_{+\infty}, \quad Q^0(z_0 | E^s) = \|z_0\|_1, \\ p = -\infty, \quad p_* = 1, \quad Q(z) = -\|z_-\|_{-\infty}, \quad Q^0(z_0 | E_-^s) = \|z_0\|_1.$$

Введем вектор $w \in E_+^m$ и составим функцию Лагранжа:

$$L(x, w) = f(x) + \langle w, g(x) \rangle.$$

Будем говорить, что функция Лагранжа обладает седловой точкой $[x_*, w_*] \in P \times E_+^m$, если

$$(1.11) \quad L(x_*, w) \leq L(x_*, w_*) \leq L(x, w_*) \quad \forall x \in P, \quad \forall w \in E_+^m.$$

Известно [9], что если существует такой вектор $w_* \in E_+^m$, что x_* вместе с w_* образуют седловую точку функции Лагранжа, то $x_* \in X$.

Введем сложную функцию $B(g(x))$. Через $g(P)$ обозначим образ множества P при отображении g . Тогда, используя неравенство (1.7), из правой части (1.11) получаем

$$(1.12) \quad f_* \leq L(x, w_*) \leq f(x) + B(g(x))B^0(w_* | g(P)) \quad \forall x \in P.$$

Если $B(g(x)) \geq 0$ для всех $x \in E^n$, то можно эту оценку ослабить, введя проще вычисляемые полярные функции $B^0(w_* | g(E^n))$ и $B^0(w_* | E^m)$, так как, согласно (1.8),

$$B^0(w_* | g(P)) \leq B^0(w_* | g(E^n)) \leq B^0(w_* | E^m).$$

Поэтому неравенство (1.12) в дальнейшем будем записывать в виде

$$(1.13) \quad f_* \leq L(x, w_*) \leq f(x) + B(g(x))B^0(w_* | E^m) \quad \forall x \in P.$$

Аналогично, если $B(g(x)) \leq 0$ на E^n , то, используя (1.9), получаем

$$B^0(w_* | g(P)) \geq B^0(w_* | g(E^n)) \geq B^0(w_* | E^m)$$

и неравенство (1.13) по-прежнему имеет место.

§ 2. Аддитивные т. в. ф.

Будем строить т. в. ф. в виде

$$(2.1) \quad R(x, y) = A(f(x), y) + B(g(x)),$$

где $A(f, y)$ — произвольная непрерывная функция двух аргументов, $B(g(x))$ — строго внешняя штрафная функция, т. е. $B(g(x))$ непрерывна и принимает неотрицательные значения всюду на E^n ; кроме того, $B(g(x)) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in X$. Хорошо известным примером строго внешней штрафной функции является

$$B(g(x)) = \|g_+(x)\|_p, \quad p \geq 1, \quad B^0(w_* | E^m) = \|w_*\|_p.$$

На введенные функции наложим еще два условия.

Условие А. Функции A и B таковы, что

$$(2.2) \quad A(f, y) - A(f_*, y) \geq [(f - f_*) / B^0(w_* | E^m)]_- \quad \forall y \in Y, \quad \forall f \in E^1.$$

Условие Б. Для каждой точки y из множества Y совокупность решений системы

$$(2.3) \quad A(f(x), y) + B(g(x)) = A(f_*, y), \quad x \in P,$$

совпадает с X .

В случае если A дифференцируема по y , Y — открытое множество, из (2.3) следует система

$$A_y(f(x), y) = A_y(f_*, y), \quad x \in P,$$

решение которой часто проще, чем решение исходной системы (2.3).

Теорема 1. Пусть в задаче (1.1) существует седловая точка $[x_*, w_*] \in P \times E_+^m$ функции Лагранжа. Пусть, кроме того, $B(g(x))$ является строго внешней штрафной функцией, $0 < B^0(w_* | E^m) < +\infty$, функции A и B удовлетворяют условиям А и Б. Тогда задаваемая (2.1) функция $R(x, y)$ является т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $P \times Y$.

Доказательство. Учитывая, что функция $B(g(x))$ равна нулю на X_* , получаем

$$(2.4) \quad M(x, y) = A(f(x), y) - A(f_*, y) + B(g(x)).$$

Условие (1.4) можно записать в данном случае в виде

$$(2.5) \quad A(f(x)) + B(g(x)) \geq A(f_*, y) \quad \forall x \in P, \quad \forall y \in Y.$$

По условиям теоремы, $B^0(w_* | E^m) > 0$, поэтому из (1.13) получаем

$$B(g(x)) \geq [f_* - f(x)] / B^0(w_* | E^m) \quad \forall x \in P.$$

Учитывая, что функция B принимает только неотрицательные значения, уточним эту нижнюю оценку:

$$(2.6) \quad B(g(x)) \geq [[f_* - f(x)] / B^0(w_* | E^m)]_+ \quad \forall x \in P.$$

Запишем это неравенство в виде

$$B(g(x)) \geq -[[f(x) - f_*] / B^0(w_* | E^m)]_- \quad \forall x \in P.$$

Применяя его вместе с (2.2) к правой части (2.4), получаем (1.4). Условие Б обеспечивает выполнение условия (1.5). Таким образом, функция (2.4) является т.в.ф. на множестве $P \times Y$ и, следовательно, функция (2.1) также является т.в.ф. на том же множестве $P \times Y$. Теорема доказана.

Условиям теоремы удовлетворяет широкий класс функций. Не предполагается точное знание f_* , поэтому функция A должна строиться так, чтобы при любом f выполнялись условия А и Б. Из (2.2) следует, что для этого функция $A(f, y)$ должна быть по меньшей мере возрастающей функцией f . Кроме того, ее график должен лежать не ниже выпуклого конуса с началом в точке $N = [f_*, A(f_*, y)]$ и с двумя граничными лучами. Первый луч исходит из точки N и направлен вдоль положительного направления оси f , второй исходит из N и направлен вдоль полупрямой

$$D = (f - f_*) / B^0(w_* | E^m), \quad f \leq f_*.$$

Заметим также, что утверждение теоремы не изменится, если условие А выполнено не для всех $f \in E^1$, а только для f , принадлежащих образу $f(P)$ множества P при отображении $f(x)$.

Пусть $A(f, y)$ — выпуклая функция по f при каждом $y \in Y$, тогда

$$(2.7) \quad A(f, y) - A(f_*, y) \geq \xi(f - f_*) \quad \forall y \in Y, \quad \forall f \in E^1, \quad \forall \xi \in \partial_f A(f_*, y).$$

Здесь $\partial_f A(f_*, y)$ — субдифференциал функции $A(f, y)$ по f в точке f_* . Условие (2.2) будет заведомо выполняться, если

$$\xi(f - f_*) \geq [(f - f_*) / B^0(w_* | E^m)]_- \quad \forall y \in Y, \quad \forall f \in E^1,$$

$$\forall \xi \in \partial_f A(f_*, y).$$

Вместе с условием неубывания функции $A(f, y)$ по f это условие эквивалентно следующему:

$$(2.8) \quad 0 \leq \inf_{\xi \in \partial A_f(f_*, y)} \xi \leq \sup_{\xi \in \partial A_f(f_*, y)} \xi \leq 1 / B^0(w_* | E^m).$$

Приведенные неравенства можно использовать для определения множества Y , при этом дополнительно должны быть рассмотрены граничные точки Y . Заметим, что если, помимо (2.8), функция $B(g)$ выпукла и не убывает по g , функции $f(x)$ и $g(x)$ выпуклы по x , то вспомогательная функция $R(x, y)$ также выпукла по x .

В качестве примеров т.в.ф., удовлетворяющих условиям теоремы 1 и условиям (2.8) с $P=E^n$, $Y \subset E^1$, приведем следующие функции и соответствующие им множества Y :

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= y^{-1}f(x) + B(g(x)), & Y_1 &= \{y: y > B^0(w, |E^m)\}, \\ R_2(x, y) &= y^{-1}e^{f(x)} + B(g(x)), & Y_2 &= \{y: y > B^0(w, |E^m)e^{f^*}\}, \\ R_3(x, y) &= [y - f(x)]^\alpha + B(g(x)), \\ Y_3 &= \{y: y > f_* + [-\alpha B^0(w, |E^m)]^{1/(1-\alpha)}\}, \\ R_4(x, y) &= [f(x) - y]_+^\beta + B(g(x)), \\ Y_4 &= \{y: f_* \geq y > f_* - [\beta B^0(w, |E^m)]^{1/(1-\beta)}\}, \end{aligned}$$

где $\alpha < 0$, $\beta > 1$. В случае R_3 следует считать, что $R_3(x, y) = +\infty$, когда $f(x) \geq y$. Если известно, что функция $f(x) > 0$ для любых $x \in E^n$, то можно воспользоваться функциями

$$\begin{aligned} R_5(x, y) &= y^{-1} \operatorname{sh} f(x) + B(g(x)), & Y_5 &= \{y: y > B^0(w, |E^m) \operatorname{ch} f_*\}, \\ R_6(x, y) &= y^{-1} [f(x)]^\gamma + B(g(x)), & Y_6 &= \{y: y > \gamma f_*^{\gamma-1} B^0(w, |E^m)\}. \end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ неположительна на E^n , то можно рассмотреть функцию

$$\begin{aligned} R_7(x, y) &= y^{-1} \operatorname{arctg} f(x) + B(g(x)), \\ Y_7 &= \{y: y > B^0(w, |E^m) / (1 + f_*^2)\}. \end{aligned}$$

Функция R_7 будет т.в.ф. и в случае, когда $f(x)$ принимает любые значения, однако множество Y_7 следует заменить на $Y_7 = \{y: y > B^0(w, |E^m)\}$. Отметим также, что входящие в R_3, R_4, R_6 параметры α, β и γ можно было бы рассматривать как вторые компоненты вектора y .

Первая из приведенных функций — это хорошо известная точная штрафная функция [1], [2], [9], [10]. Функция R_4 использовалась многими авторами для последовательной безусловной минимизации, при этом строилась последовательность векторов y_k , сходящаяся к f . (см. [9], [11]). Если взять замыкание множеств $Y_1 - Y_7$, то функции $R_1 - R_7$ перестают быть т.в.ф., так как для них вместо (1.5) выполнено более слабое условие: из $M(x, y) = 0$ следует, что $X_* \subseteq X(y)$.

Обозначим $X^0 = \{x \in E^n | g(x) < 0\}$ и рассмотрим далее случай, когда $B(g(x))$ является внутренней штрафной функцией, т. е. $B(g(x))$ непрерывна и неположительна на E^m и $B(g(x)) < 0$ при $x \in X^0$. Если дополнительно предположить, что $B(g(x)) < 0$ тогда и только тогда, когда $g(x) < 0$, то такую функцию будем называть строго внутренней штрафной функцией. В качестве примера внутренних штрафных функций укажем

$$(2.9) \quad B(g(x)) = -\|g_-(x)\|_p, \quad -\infty \leq p < 1.$$

При $p \leq 0$ эта функция будет строго внутренней штрафной функцией.

Ниже при рассмотрении внутренних штрафных функций предполагается, что выполнено условие регулярности ограничений, т. е. множество X^0 не пусто и его замыкание совпадает с X .

Построим т.в.ф. в виде (2.1), взяв в качестве P допустимое множество X . Условие (2.2) заменим на

$$(2.10) \quad A(f, y) - A(f_*, y) \geq (f - f_*) / B^0(w, |E_-^m) \quad \forall y \in Y, \quad \forall f \geq f_*$$

Теорема 1 в данном случае может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2. Пусть в задаче (1.1) существует седловая точка $[x_*, w_*]$ функции Лагранжа. Пусть, кроме того, функция $B(g(x))$ в (2.1) является внутренней штрафной функцией и $0 < B^0(w, |E_-^m) < +\infty$. Для того чтобы $R(x, y)$ была т.в.ф. на $X \times Y$, достаточно, чтобы удовлетворялось условие (2.10) и всякое допустимое решение x системы (2.3) было таково, что $x \in X_*$.

Доказательство. Так как функция Лагранжа имеет седловую точку, $B^0(w, |E_-^m) > 0$ и $B(g(x)) \leq 0$ на X , имеем

$$f_* \leq f(x) + B(g(x)) B^0(w, |E_-^m) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Отсюда, аналогично (2.6),

$$(2.11) \quad [f_* - f(x)] / B^0(w, |E_-^m) \leq B(g(x)) \leq 0 \quad \forall x \in X.$$

Взяв в левой части произвольную точку $x \in X_*$, получим $B(g(x)) = 0$. Таким образом, всюду на X_* функция $B(g(x))$ принимает равное нулю значение. Поэтому для того, чтобы имело место (1.4), достаточно, чтобы для всех $x \in X$ выполнялось неравенство (2.5). Но, согласно (2.11), выполнение (2.5) обеспечивается (2.10).

Справедливость (1.5) следует из предположения, что всякое допустимое решение $x_* \in X$ системы (2.3) таково, что $x_* \in X_*$, поскольку, как было установлено, $B(g(x_*)) = 0$, когда $x_* \in X_*$. Теорема доказана.

Как видно из доказательства теоремы 2, требование $B^0(w, |E_-^m) > 0$ приводит к тому, что в точке $x_* \in X_*$ выполнено равенство $B(g(x_*)) = 0$. Таким образом, в силу условия регулярности ограничений, точка x_* обязательно должна быть в этом случае граничной точкой множества X . Если в качестве $B(g(x))$ взята функция (2.9) при $0 < p < 1$, то $B(g(x))$ является внутренней (но не строго) штрафной функцией и неравенство $B^0(w, |E_-^m) = \|w\|_p > 0$ имеет место в том и только том случае, когда все компоненты вектора w строго положительны. Это означает, что все ограничения в точке x_* одновременно обращаются в нуль, или, другими словами, являются активными. Если (2.9) — строго внутренняя штрафная функция (что имеет место при $p \leq 0$), то для справедливости неравенства $\|w\|_p > 0$ достаточно, чтобы активным было хотя бы одно ограничение.

Обратим внимание, что если A — выпуклая функция f при каждом $y \in Y$, то для выполнимости неравенства (2.10) достаточно, чтобы

$$\xi \geq 1 / B^0(w, |E_-^m) \quad \forall \xi \in \partial_f A(f_*, y), \quad \forall y \in Y.$$

Условиям теоремы 2 удовлетворяют функции $R_1 - R_4$, однако вместо строго внешней штрафной функции $B(g(x))$ следует взять внутреннюю штрафную функцию (например, (2.9)) и заменить множества Y_i следующими:

$$Y_1 = \{y: 0 < y < B^0(w, |E_-^m)\}, \quad Y_2 = \{y: 0 < y < e^* B^0(w, |E_-^m)\},$$

$$Y_3 = \{y: f_* < y < f_* + [-\alpha B^0(w_* | E_-^m)]^{1/(1-\alpha)}\}, \quad \alpha < 0,$$

$$Y_4 = \{y: y < f_* - [\beta B^0(w_* | E_-^m)]^{1/(1-\beta)}\}, \quad \beta > 1.$$

Отметим также, что поскольку при предположениях теоремы 2 функция $B(g(x))$ неположительна и на X принимает равное нулю значение, то вспомогательная функция $R(x, y) = f(x) - yB(g(x))$ будет также т.в.ф. на $X \times E_+^1$.

Введем новый класс штрафных функций, обладающих как свойствами строго внешних, так и свойствами строго внутренних штрафных функций. Непрерывная функция $B(g(x))$ называется строго смешанной штрафной функцией, если $B(g(x)) > 0$, когда $x \notin X$, и $B(g(x)) < 0$, когда $x \in X^0$.

В качестве примера строго смешанных штрафных функций приведем следующие две функции:

$$(2.12) \quad B(g(x)) = \|g_+(x)\|_p - \|g_-(x)\|_{-p}, \quad 1 < p < +\infty,$$

$$(2.13) \quad B(g(x)) = \max_{1 \leq i \leq m} g^i(x).$$

Изменим условия (2.2) и (2.10), положив для любого $y \in Y$

$$(2.14) \quad A(f, y) - A(f_*, y) \geq \begin{cases} (f - f_*)/B^0(w_* | E_-^m), & \text{если } f \geq f_*, \\ (f - f_*)/B^0(w_* | E^m), & \text{если } f < f_*. \end{cases}$$

Имеет место

Теорема 3. Пусть в задаче (1.1) существует седловая точка $[x_*, w_*]$ функции Лагранжа. Пусть, кроме того, функция $B(g(x))$ является строго смешанной штрафной функцией и $0 < B^0(w_* | E^m) < B^0(w_* | E_-^m) < +\infty$. Для того чтобы $R(x, y)$ была т.в.ф. на $P \times Y$, достаточно, чтобы удовлетворялись условия (2.14) и Б.

Доказательство. Так как $B^0(w_* | E_-^m) > 0$, то, аналогично тому как это делалось при доказательстве теоремы 2, убеждаемся, что $B(g(x_*)) = 0$. Поэтому согласно (2.14) выполнено (1.4). Условие (1.5) следует из (2.3). Теорема доказана.

Условие (2.14) для гладкой функции оказывается справедливым в том и только том случае, когда $B^0(w_* | E^m) \leq B^0(w_* | E_-^m)$. Так, например, функция $R_1(x, y)$ со строго смешанной штрафной функцией $B(g(x))$ является т.в.ф. Соответствующее множество Y_1 для нее

$$Y_1 = \{y: B^0(w_* | E^m) < y < B^0(w_* | E_-^m)\}.$$

В частности, если $B(g(x))$ имеет вид (2.12), получаем

$$Y_1 = \{y: \|w_*\|_p < y < \|w_*\|_r\},$$

где $p^{-1} + p^{-1} = 1$, $-p^{-1} + r^{-1} = 1$. Так как $p > 1$, $1 > r > 1/2$, то $\|w_*\|_r > \|w_*\|_p$. Для функции (2.13) множество Y_1 пусто.

§ 3. Нелинейные т. в. ф.

Предположим теперь, что вспомогательная функция $R(x, y)$ строится в виде

$$(3.1) \quad R(x, y) = H(A(f(x), y), B(g(x))),$$

где $B(g(x))$ — строго внешняя штрафная функция, $H(t, \tau)$ — непрерывная неубывающая функция двух аргументов, т. е. $H(t_1, \tau_1) \geq H(t, \tau)$ для любых

$t_1 \geq t$, $\tau_1 \geq \tau$. Относительно функции $A(f, y)$ предполагается, что она является монотонно возрастающей и выпуклой функцией первого аргумента. Считаем также, что существует такая константа D , что

$$(3.2) \quad 0 < \sup_{y \in Y} \sup_{\xi \in \partial A_j(f_*, y)} \xi \leq D < +\infty.$$

Приведем условия, достаточные для того, чтобы функция (3.1) была т.в.ф. для задачи (1.1). Обозначим $N_1 = DB^0(w_* | E^m)$.

Теорема 4. Пусть в задаче (1.1) существует седловая точка $[x_*, w_*]$ функции Лагранжа, $A(f, y)$ — выпуклая, монотонно возрастающая функция первого аргумента, для которой выполнено (3.2). Пусть, кроме того, $B(g(x))$ — строго внешняя штрафная функция и $0 < N_1 < +\infty$. Тогда если найдется такое множество $T \subseteq E^1$, что $A(f_*, y) \in T$ для любых $y \in Y$ и

$$(3.3) \quad H(t, (t, -t)_+ / N_1) > H(t, 0) \quad \forall t \in T, \quad \forall t \neq t_*,$$

то (3.1) — т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $P \times Y$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in P$. Так как функция $H(t, \tau)$ не убывает по второй переменной, то, согласно (2.6),

$$(3.4) \quad R(x, y) = H(A(f(x), y), B(g(x))) \geq \\ \geq H(A(f(x), y), [f_* - f(x)]_+ / B^0(w_* | E^m)).$$

В силу выпуклости функции $A(f, y)$ по f справедливо неравенство (2.7), из которого с учетом (3.2) получаем

$$(3.5) \quad A(f_*, y) - A(f, y) \leq D(f_* - f) \quad \forall f \leq f_*.$$

Но $A(f, y)$ — монотонно возрастающая функция по f , поэтому наряду с (3.5) имеет место неравенство

$$(A(f_*, y) - A(f, y))_+ \leq D(f_* - f)_+ \quad \forall f \in E^1.$$

Подставляя его в (3.4) и используя условие (3.3), получаем в случае, когда $A(f(x), y) \neq A(f_*, y)$,

$$R(x, y) \geq H(A(f(x), y), [A(f_*, y) - A(f(x), y)]_+ / N_1) > \\ > H(A(f_*, y), 0) = R(x_*, y).$$

Предположим теперь, что $A(f(x), y) = A(f_*, y)$. В этом случае если $x \neq x_*$, то обязательно $x \notin X$, $B(g(x)) > 0$. Поэтому, в силу монотонности функции $H(t, \tau)$ по t и (3.3),

$$R(x, y) = H(A(f_*, y), B(g(x))) \geq \\ \geq H(A(f_*, y) - N_1 B(g(x)), B(g(x))) > H(A(f_*, y), 0) = R(x_*, y).$$

Таким образом, в любом случае $R(x, y) > R(x_*, y)$, если $x \neq x_*$, и, следовательно, (3.1) является т.в.ф. на множестве $P \times Y$. Теорема доказана.

Рассмотрим два важных частных случая функции (3.1). Предположим вначале, что $A(f, y)$ имеет вид

$$(3.6) \quad A(f, y) = f - y.$$

Для этой функции условие (3.2) выполняется для любого $Y \subseteq E^1$, причем $D = 1$. Поэтому, согласно утверждению теоремы 4, если найдется множество $T \subseteq E^1$, для которого имеет место (3.3), то функция (3.1) с функцией

$A(f, y)$, представимой в виде (3.6), является т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $P \times Y$, где $Y = f - T$.

Рассмотрим другую функцию:

$$(3.7) \quad A(f, y) = y^{-1}f.$$

В этом случае если выполнено (3.3) при некотором $0 < D < +\infty$, то функция (3.1) с функцией $A(f, y)$ вида (3.7) также является т.в.ф. на $P \times Y$, однако здесь $Y = \{y \geq D^{-1} : y^{-1}f \in T\}$.

Обратим внимание, что если функция $H(t, \tau)$ линейная и имеет вид $H(t, \tau) = ct + \tau$, то для выполнения условия (3.3) необходимо и достаточно, чтобы $c < 1/B^0(w, |E^m)$. Множество T в данном случае совпадает со всей действительной прямой E^1 . Поэтому если перейти от y к переменной $\bar{y} = y/c$, то получаем, что функция $R(x, \bar{y}) = H(y^{-1}f(x), B(g(x))) = \bar{y}^{-1}f(x) + B(g(x))$ — т.в.ф. в том и только том случае, когда $\bar{y} > B^0(w, |E^m)$, что полностью согласуется с полученной выше формулой для Y_1 .

Обозначим через $K_1(t)$ конус:

$$K_1(t) = \{[t, \tau] \in E^2 \mid \tau \geq (t-t)_+ / N_1\}.$$

Условие (3.3) геометрически означает, что для любого $t \in T$ линия уровня функции $H(t, \tau)$, соответствующая значению $H(t, 0)$, не должна пересекать конус $K_1(t)$, за исключением, разумеется, самой точки $[t, 0]$.

Условие (3.3) сравнительно просто проверяется, когда $H(t, \tau)$ — квазивыпуклая функция. Действительно, пусть $H(t, \tau)$ — непрерывно дифференцируемая квазивыпуклая функция на E^2 и можно указать такое множество $T_1 \subseteq E^1$, что

$$(3.8) \quad H_t(t, 0) > 0, \quad H_\tau(t, 0) / H_t(t, 0) > N_1 \quad \forall t \in T_1.$$

Тогда функция одного переменного $\varphi(t) = H(t, (t-t)_+ / N_1)$ также является квазивыпуклой справа и слева от точки t и имеет в этой точке обе односторонние производные, причем, согласно (3.8), $\varphi_t^+(t) = H_t(t, 0) > 0$, $\varphi_t^-(t) = H_t(t, 0) - H_\tau(t, 0) / N_1 < 0$. Поэтому функция $\varphi(t)$ достигает в точке t своего строгого минимума по t и, следовательно, справедливо неравенство (3.3). К множеству T_1 можно добавить точки множества

$$T_2 = \{t_* \notin T_1 \mid t_* = \lim_{t \nearrow t_*} t_k, t_k \in T_1\}.$$

Тогда, если имеет место (3.8), для любого $t \in T = T_1 \cup T_2$ выполнено (3.3). Отметим также, что условия (3.8) сохраняются и в том случае, когда функция $H(t, \tau)$ дифференцируема только в точках некоторого множества, содержащего отрезок $\{z \in E^2 \mid z^{(1)} \in T_1, z^{(2)} = 0\}$.

Приведем примеры т.в.ф., множества Y для которых могут быть найдены с помощью теоремы 4 и условий (3.8). Пусть

$$H(t, \tau) = \begin{cases} t / (1 - t\tau), & \text{если } 1 - t\tau > 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эта функция квазивыпукла на E^2 . При $t < 0$ имеем $H_t(t, 0) = 1$, $H_\tau(t, 0) = t^{-2}$. Условия (3.8) выполняются, если $t < -[B^0(w, |E^m)]^{1/2}$. Таким образом, $T = (-\infty, -[B^0(w, |E^m)]^{1/2})$ и, следовательно, вспомогательная функция

$$R_s(x, y) = [f(x) - y] / \{1 - [f(x) - y] \cdot B(g(x))\}$$

является т.в.ф. на множестве $E^n \times Y_s$, где $Y_s = \{y \in E^1 \mid y > f_* + [B^0(w, |E^m)]^{1/2}\}$.

Если $f_+ > 0$, то, применяя функцию $H(t, \tau) = \tau + (\tau^2 + 4t_+^3)^{1/2}$, приходим к следующей т.в.ф.:

$$R_9(x, y) = B(g(x)) + \{[B(g(x))]^2 + 4y^{-3}[f_+(x)]^3\}^{1/2}$$

для задачи (1.1) на множестве $E^n \times Y_9$, где

$$Y_9 = \{y: y > \max\{1, 9f_+ [B^0(w_* | E^m)]^2\}\}.$$

Рассмотрим достаточные условия в случае, когда функция $B(g(x))$ в (3.1) является внутренней штрафной функцией, предполагая по-прежнему, что функция $H(t, \tau)$ неубывающая на E^2 , а функция $A(f, y)$ — выпуклая, монотонно возрастающая функция первого аргумента. Вместо (3.2) на функцию $A(f, y)$ наложим условие существования такой константы C , что

$$(3.9) \quad 0 < C \leq \inf_{v \in Y} \inf_{\xi \in \partial A(N_*, v)} \xi < +\infty.$$

Обозначим $N_2 = CB^0(w_* | E^m)$.

Теорема 5. Пусть в задаче (1.1) существует седловая точка $[x_*, w_*]$ функции Лагранжа, $A(f, y)$ — выпуклая, монотонно возрастающая функция первого аргумента, для которой выполнено (3.9). Пусть, кроме того, $B(g(x))$ — внутренняя штрафная функция, $0 < N_2 < +\infty$. Тогда если найдется такое множество $T \subseteq E^1$, что $A(f_*, y) \in T$ для любых $y \in Y$ и

$$(3.10) \quad H(t, (t-t)/N_2) > H(t, 0) \quad \forall t \in T, \quad \forall t > t_*,$$

то (3.1) — т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $X \times Y$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in X$. В случае когда $x \notin X_*$, используя неравенства (2.7), (3.9) и (3.10), получаем

$$\begin{aligned} R(x, y) &= H(A(f(x), y), B(g(x))) \geq \\ &\geq H(A(f(x), y), [f_* - f(x)]/B^0(w_* | E^m)) \geq \\ &\geq H(A(f(x), y), [A(f_*, y) - A(f(x), y)]/N_2) > \\ &> H(A(f_*, y), 0) = R(x_*, y). \end{aligned}$$

Если $x \in X_*$, то, согласно (2.11), $B(g(x)) = 0$. Поэтому $R(x, y) = H(A(f(x), y), 0) = R(x_*, y)$. Таким образом, $R(x, y)$ является т.в.ф. на $X \times Y$. Теорема доказана.

Если функция $A(f, y)$ представима в виде (3.6) или (3.7), то, зная T в условии (3.10), можно указать конкретный вид множества Y . Так, для первой функции получаем, что $Y = f_* - T$, для второй — что $Y = \{y \leq C^{-1} : y^{-1}f_* \in T\}$.

Условие (3.10) геометрически означает, что для любого $t_* \in T$ линия уровня функции $H(t, \tau)$, соответствующая значению $H(t_*, 0)$, при $t > t_*$ не может иметь общих точек с конусом

$$K_2(t_*) = \{[t, \tau] \in E^2 \mid \tau \geq (t - t_*)/N_2, t \geq t_*\}.$$

Можно привести условия, аналогичные условиям (3.8), упрощающие проверку неравенства (3.10) и дающие возможность сравнительно просто устанавливать вид множества T . Предположим, что $H(t, \tau)$ — непрерывно дифференцируемая квазивыпуклая функция на E^2 и можно указать такое множество $T_1 \subseteq E^1$, что для любых $t_* \in T_1$ имеет место первое неравенство (3.8) и

$$H_{\tau}(t_*, 0)/H_t(t_*, 0) < N_2.$$

Тогда для всех $t \in T = T_1 \cup T_2$ выполнено неравенство (3.10), где

$$T_2 = \{t \notin T_1 \mid t = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k, t_k \in T_1\}.$$

В качестве примера использования теоремы 5 приведем рассмотренные ранее функции $R_8(x, y)$ и $R_9(x, y)$, в которых $B(g(x))$ — внутренняя штрафная функция. Обе эти функции — т.в.ф., соответственно, на множествах $X \times Y_8$ и $X \times Y_9$, однако множества Y_8 и Y_9 в данном случае принимают следующий вид:

$$Y_8 = \{y \in E^1 \mid f_* \leq y < f_* + [B^0(w_* | E^m)]^{1/2}\},$$

$$Y_9 = \{y \in E^1 \mid 0 < y < \min[1, 9f_* [B^0(w_* | E^m)]^2]\}.$$

Отметим, что утверждения теорем 4 и 5 не изменятся, если условия (3.3), (3.10) выполняются не для всех $t \in E^1$, а только для тех, которые принадлежат некоторому подмножеству E^1 , содержащему образ множества $P \times Y$ при отображении $A(f(x), y)$. С учетом этого свойства в [8] показано, что функция

$$R_{10}(x, y) = (f(x) - y)_+ / \{1 + [f(x) - y]_+ B(g(x))\},$$

где $B(g(x))$ — внутренняя штрафная функция, также является т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $X \times Y_{10}$. При этом

$$Y_{10} = \{y : f_* - ([f^* - f_*]^2 + 4B^0(w_* | E^m))^{1/2} - (f^* - f_*) / 2 < y \leq f_*\},$$

$$f^* = \sup_{x \in X} f(x).$$

Рассмотрим т.в.ф. вида (3.1) со строго смешанными штрафными функциями $B(g(x))$. Условия на функцию $H(t, \tau)$ в данном случае получаются объединением соответствующих условий для строго внешних и внутренних штрафных функций.

Теорема 6. Пусть в задаче (1.1) существует седловая точка $[x_*, w_*]$ функции Лагранжа, $A(f, y)$ — выпуклая, монотонно возрастающая функция первого аргумента, для которой выполнены условия (3.2) и (3.9). Пусть, кроме того, $B(g(x))$ — строго смешанная штрафная функция и $0 < N_1 < +\infty$, $0 < N_2 < +\infty$. Тогда если найдется такое множество $T \subseteq E^1$, что $A(f_*, y) \in T$ для любых $y \in Y$ и

$$H(t_*, 0) < \begin{cases} H(t, (t_* - t)/N_1), & t < t_*, \\ H(t, (t_* - t)/N_2), & t > t_*, \end{cases} \quad \forall t_* \in T,$$

то (3.1) — т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $P \times Y$.

Доказательство теоремы опускается, поскольку легко может быть получено комбинированием соответствующих рассуждений, проведенных при доказательстве теорем 4 и 5.

Функция $R_8(x, y)$ со строго смешанной штрафной функцией $B(g(x))$ остается т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $P \times Y$, если $B(g)$ такова, что $B^0(w_* | E^m) < B^0(w_* | E^m)$. Множество Y_8 в данном случае имеет вид

$$Y_8 = \{y : f_* + [B^0(w_* | E^m)]^{1/2} < y < f_* + [B^0(w_* | E^m)]^{1/2}\}.$$

§ 4. Точные модифицированные функции Лагранжа

Перепишем правую часть неравенства (1.11) в виде

$$L(x_*, w_*) \leq L(x, w) + \langle g(x), w_* - w \rangle.$$

Если $B^0(w_* - w | g(P)) > 0$, то, применяя неравенство Минковского — Малера:

(1.7), отсюда получаем

$$(4.1) \quad B(g(x)) \geq [L(x_*, w_*) - L(x, w)] / B^0(w_* - w | g(P)).$$

Неравенство (4.1) позволяет построить целый класс т.в.ф., основанный на использовании функции Лагранжа $L(x, w)$. Положим

$$(4.2) \quad R(x, y) = A(L(x, w), v) + B(g(x)).$$

Здесь $y = [w, v] \in Y \subseteq E_+^m \times E^1$.

Обозначим

$$W_Y = \{w \in E_+^m \mid \exists v \in E^1, [w, v] \in Y\}, \quad V_w = \{v \in E^1 \mid [w, v] \in Y\}.$$

Множество W_Y — проекция Y на E_+^m , множество V_w — сечение Y при фиксированном $w \in W_Y$.

Пусть функции A, B и множества P, Y таковы, что справедливы следующие условия.

Условие В.

$$A(L, v) - A(L_*, v) \geq (L - L_*) / B^0(w_* - w | g(P))$$

$$\forall L \in E^1, \quad \forall w \in W_Y, \quad \forall v \in V_w,$$

где $L_* = L(x_*, w_*) = f_*$.

Условие Г. Для каждой точки $y \in Y$ совокупность решений системы

$$A(L(x, w), v) + B(g(x)) = A(L(x_*, w_*), v), \quad x \in P,$$

совпадает с X .

К этим двум условиям добавим требование

$$(4.3) \quad L(x_*, w) = L(x_*, w_*) \quad \forall w \in W_Y.$$

Заметим, что если $w_* \neq 0$, то для множества

$$(4.4) \quad W_Y = W_* = \{0 \leq w \leq w_* \mid w^i < w_*^i, \text{ если } w_*^i > 0\}$$

условие (4.3) заведомо выполняется.

Теорема 7. Пусть в задаче (1.1) существует седловая точка $[x_*, w_*]$ функции Лагранжа, выполнены условия В; Г и (4.3). Пусть, кроме того, $B(g(x))$ — строго внешняя или внутренняя штрафная функция (в последнем случае $P \subseteq X$) и $0 < B^0(w_* - w | g(P)) < +\infty$ для любых $w \in W_Y$. Тогда функция (4.2) — т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $P \times Y$.

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательства теорем 1 и 2. Заметим также, что в случае внешней штрафной функции $B(g(x))$ условие В можно ослабить, потребовав выполнения только неравенства

$$A(L, v) - A(L_*, v) \geq [(L - L_*) / B^0(w_* - w | g(P))] -$$

$$\forall L \in E^1, \quad \forall w \in W_Y, \quad \forall v \in V_w.$$

В качестве примеров функции (4.2), являющихся т.в.ф. на множестве $E^n \times Y$, где $Y = \{[w, v] \mid w \in W_*, v \in V_w\}$, можно взять функции $R_1 - R_4$, заменив в них $f(x)$ на $L(x, w)$. Множества V_w для этих функций строятся так же, как соответствующие множества Y для функций $R_1 - R_4$. Поэтому приведем эти т.в.ф. с указанием множеств V_w только для случая, когда $B(g(x))$ — строго внешняя штрафная функция:

$$R_{11}(x, y) = v^{-1}L(x, w) + B(g(x)), \quad V_w = \{v : v > B^0(w_* - w | E^m)\},$$

$$R_{12}(x, y) = v^{-1} e^{L(x, w)} + B(g(x)), \quad V_w = \{v : v > B^0(w_* - w | E^m) e^f\},$$

$$R_{13}(x, y) = [v - L(x, w)]_+^\alpha + B(g(x)),$$

$$V_w = \{v : v > f_* + [-\alpha B^0(w_* - w | E^m)]^{1/(1-\alpha)}\},$$

$$R_{14}(x, y) = [L(x, w) - v]_+^\beta + B(g(x)),$$

$$V_w = \{v : f_* \geq v > f_* - [\beta B^0(w_* - w | E^m)]^{1/(1-\beta)}\}.$$

Отсюда видно, что при приближении w к w_* соответствующие множества V_w расширяются. Для т.в.ф. с внутренними штрафными функциями они, напротив, сужаются. Функция R_{11} была предложена в [3].

Рассмотрим теперь нелинейные т.в.ф., составленные с применением функции Лагранжа:

$$(4.5) \quad R(x, y) = H(A(L(x, w), v), B(g(x))),$$

где, как и прежде, $H(t, \tau)$ — непрерывная неубывающая функция двух переменных, $A(L, v)$ — монотонно возрастающая выпуклая функция первого аргумента. Предположим также, что функция A и множество Y таковы, что для любого $w \in W_Y$ существуют константы $C(w)$ и $D(w)$, для которых

$$(4.6) \quad 0 < \sup_{y \in Y} \sup_{\xi \in \partial A_L(L_*, v)} \xi \leq D(w) < +\infty,$$

$$(4.7) \quad 0 < C(w) \leq \sup_{y \in Y} \sup_{\xi \in \partial A_L(L_*, v)} \xi < +\infty.$$

Кроме того, считаем, что

$$(4.8) \quad L(x, w) > L(x_*, w_*) = L_*, \quad \forall w \in W_Y, \quad \forall x \in X \setminus X_*,$$

а вместо (3.3), (3.10) на функцию $H(t, \tau)$ наложены условия: для каждого $w \in W_Y$ существует такое множество $T(w) \subseteq E^1$, что $A(L_*, v) \in T(w)$ для всех $v \in V_w$ и для любых $t_* \in T(w)$ будет

$$(4.9) \quad H(t, (t_* - t)_+ / D(w) B^0(w_* - w | E^m)) > H(t_*, 0) \quad \forall t \neq t_*,$$

$$(4.10) \quad H(t, (t_* - t) / C(w) B^0(w_* - w | E^m)) > H(t_*, 0) \quad \forall t > t_*.$$

Отметим, что если множество Y таково, что соответствующее множество W_Y имеет вид (4.4), то при выполнении (4.3) условие (4.8) также выполнено. Действительно, если $x \in X$ и $f(x) > f_*$, то в случае, когда $\langle g(x), w \rangle = 0$, получаем $L(x, w) = f(x) > f_* = L_*$. Если же $\langle g(x), w \rangle < 0$, то $\langle g(x), w \rangle > \langle g(x), w_* \rangle$ и поэтому $L(x, w) > L(x, w_*) \geq L_*$.

Теорема 8. Пусть в задаче (1.1) существует седловая точка $[x_*, w_*]$ функции Лагранжа, $A(L, v)$ — выпуклая, монотонно возрастающая функция первого аргумента, имеет место (4.3), (4.4). Тогда если $B(g(x))$ — строго внешняя штрафная функция, $0 < B^0(w_* - w | E^m) < +\infty$ для любого $w \in W_Y$ и выполнено (4.6), (4.9), то (4.5) — т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $P \times Y$. Если $B(g(x))$ — внутренняя штрафная функция, $0 < B^0(w_* - w | E^m) < +\infty$ для любого $w \in W_Y$ и выполнено (4.7), (4.10), то (4.5) — т.в.ф. для задачи (1.1) на множестве $X \times Y$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем 4 и 5.

Предположим, что функция $A(L, v)$ имеет вид $A(L, v) = L - v$. Тогда из утверждения теоремы 8 следует, что $V_w = f_* - T^1(w)$ для любого $w \in W_Y$. На основании этого свойства приходим к следующей т.в.ф.:

$$R_{15}(x, y) = [L(x, w) - v]_- / \{1 - [L(x, w) - v]_- B(g(x))\}.$$

Если $B(g(x))$ — строго внешняя штрафная функция, то R_{15} — т.в.ф. на множестве $P \times Y_{15}$, где

$$(4.11) \quad Y_{15} = \{ [w, v] : w \in W_*, \quad v > f_* + [B^0(w, -w | E^m)]^{1/2} \}.$$

В случае когда $B(g(x))$ — внутренняя штрафная функция, R_{15} будет т.в.ф. на множестве $X \times Y_{15}$, однако множество (4.11) следует теперь заменить на

$$Y_{15} = \{ [w, v] : w \in W_*, \quad f_* \leq v < f_* + [B^0(w, -w | E_-^m)]^{1/2} \}.$$

Можно рассмотреть также т.в.ф. вида (4.5) со строго смешанными штрафными функциями $B(g(x))$. Достаточные условия при этом остаются прежними, за исключением условия (4.9), выполнение которого требуется только при $t < t_*$.

В заключение отметим, что функции (2.1), (3.1) являются частными случаями функций (4.2), (4.5). Чтобы их получить, достаточно в (4.2), (4.5) положить множители $w=0$.

Отметим также, что если в задаче (1.1) существует более чем одна седловая точка $[x_*, w_*]$, то при оценке множеств Y с целью их расширения следует взять верхние или нижние границы по всем возможным значениям множителей Лагранжа w_* .

Список литературы

1. Еремин И. И. Метод «штрафов» в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173. № 4. С. 748–751.
2. Zangwill W. Non-linear programming via penalty function // Manag. Sci. 1967. С. 344–358.
3. Скарин В. Д. Об одной модификации метода штрафных функций в выпуклом программировании // Нелинейная оптимизация и приложения в планировании. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. С. 51–62.
4. Evans J. P., Gould F. J., Tolle J. W. Exact penalty functions in nonlinear programming // Math. Program. 1973. V. 4. P. 72–97.
5. Голиков А. И. Метод внешних центров и негладкие штрафные функции // Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования. VII Всес. симпозиум. М., 1982. С. 125–126.
6. Евтушенко Ю. Г. Оценки точности в методах штрафных функций // Пробл. прикл. матем. и информатики. М.: Наука, 1987. С. 199–208.
7. Жадан В. Г. О некоторых оценках коэффициента штрафа в методах точных штрафных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 8. С. 1164–1171.
8. Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г. К вопросу о систематизации численных методов нелинейного программирования. Методы последовательной безусловной минимизации // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР. 1988.
9. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
10. Han S.-P., Mangasarian O. L. Exact penalty functions in nonlinear programming // Math. Program. 1979. V. 17. P. 251–269.
11. Morrison D. D. Optimization by least squares // SIAM J. Numer. Anal. 1968. V. 5. № 1. P. 83–88.

Поступила в редакцию 27.02.89