Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан, Барьерно-проективные методы решения задач нелинейного программирования, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1994, том 34, номер 5, 669–684

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 34, 1994 № 5

УДК 519.853.6

© 1994 г. Ю. Г. ЕВТУШЕНКО, В. Г. ЖАДАН

(Москва)

БАРЬЕРНО-ПРОЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ [1)]

Рассматривается класс барьерно-проективных методов решения задач нелинейного программирования. Развивается общий подход к их построению, основанный на преобразовании пространств. Основное внимание уделено асимптотически устойчивым вариантам методов. Доказывается сходимость непрерывных и дискретных вариантов методов, приводятся оценки скорости сходимости.

Введение

Метод проекции градиента был одним из первых численных методов решения задач линейного и нелинейного программирования [1] — [5]. Впоследствии возник подход, в котором объединялись идеи проектирования градиента и метода барьерных функций. В [6], [7] он был использован для решения задач линейного и квадратичного программирования. В работах [8] — [12] данный подход был распространен на случай общих задач нелинейного программирования и исследования операций. Интерес к этому направлению значительно усилился после публикации в 1984 г. статьи Кармаркара [13]. В появившихся вслед за ней статьях [14]—[16] были вновь предложены варианты методов внутренней точки для задач линейного программирования.

Настоящая работа является развитием результатов, полученных в [8]—[12]. Здесь описывается единый подход к построению барьерно-проективных методов, основанный на переходе к новым пространствам, в которых структура допустимого множества существенно проще, чем в исходном пространстве. Это позволяет использовать для отыскания решений в преобразованном пространстве метод проекции градиента в чистом виде. После возвращения в исходное пространство получаются различные варианты методов, названные в [12] барьерно-проективными. При этом основное внимание уделяется их устойчивым вариантам, для которых не требуется, чтобы начальное приближение принадлежало допустимому множеству. В случае когда начальные приближения для этих методов взяты из допустимого множества, они ведут себя, как релаксационные методы внутренней точки, т. е. порождаемые ими траектории не покидают допустимого множества и минимизируемая функция убывает вдоль траекторий. Для допустимых множеств достаточно общего вида по-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01379).

казано, что если выбранное преобразование пространств удовлетворяет определенным условиям, то для всех непрерывных вариантов барьерно-проективных методов решение поставленной задачи нелинейного программирования является асимптотически устойчивым положением равновесия, а их дискретные аналоги локально сходятся к этому решению со скоростью геометрической прогрессии.

§ 1. Устойчивый вариант метода проекции градиента для решения задач с ограничениями типа равенства

Пусть x — вектор из n-мерного евклидова пространства E^n. Всюду на E^n определена скалярная функция $f(x)$ и вектор-функция $g(x): E^n \to E^m$. Предполагаем, что f и g непрерывны вместе со своими первыми производными. Всюду считаем, что все поставленные ниже оптимизационные задачи имеют решения. Пусть ищется

$$(1.1) \qquad f_* = \min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x \in E^n : g(x) = 0_m\}.$$

Здесь и ниже 0_{ij} — нулевая матрица размером $i \times j$, 0_i – нулевой i-мерный вектор, I_i — единичная матрица порядка i. В тех случаях, когда это очевидно, индексы при нулевых и единичных матрицах и векторах будем опускать.

Введем вектор двойственных переменных $u \in E^m$ и, составив функцию Лагранжа, вычислим ее градиент:

$$L(x, u) = f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x), \quad L_x(x, u) = f_x(x) + g_x^{\mathrm{T}}(x)\, u.$$

Здесь g_x – матрица первых производных размером $m \times n$.

Введем в рассмотрение следующую систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1.2) \qquad dx/dt = -L_x(x, u(x)), \quad x(x_0, 0) = x_0.$$

Функцию $u(x)$ в правой части (1.2) выберем таким образом, чтобы все траектории системы при $t \to +\infty$ приближались к допустимому множеству X. Для этого потребуем, чтобы

$$(1.3) \qquad dg/dt = -\tau g(x), \quad \tau > 0.$$

Дифференцируя функцию $g(x)$ в силу системы (1.2) и используя (1.3), получаем

$$(1.4) \qquad dg/dt = -g_x(x)[f_x(x) + g_x^{\mathrm{T}}(x)\, u(x)] = -\tau g(x).$$

Если матрица Грама $\Gamma(x) = g_x(x)\, g_x^{\mathrm{T}}(x)$ не вырождена, то из этого условия определяем функцию $u(x)$:

$$u(x) = \Gamma^{-1}(x)[\tau g(x) - g_x(x) f_x(x)].$$

Подставив эту функцию в правую часть (1.2), получим

$$(1.5) \qquad dx/dt = -\{f_x(x) + g_x^{\mathrm{T}}(x)\, \Gamma^{-1}(x)[\tau g(x) - g_x(x) f_x(x)]\}.$$

Производная функции $f(x)$ в силу этой системы равна

(1.6) $$df/dt = -\|L_x(x, u(x))\|^2 + \tau u^{\tau}(x)\, g(x).$$

Здесь и ниже $\|\cdot\|$ – евклидова норма в E^n, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – евклидово скалярное произведение.

Если точка $x_0 \in X$ или $\tau = 0$, то система (1.2), (1.4) переходит в метод проекции градиента, в котором

(1.7а) $$dx/dt = -[f_x(x) + g_x^{\tau}(x)\, u(x)], \quad x_0 \in X,$$

(1.7б) $$g_x(x)\, g_x^{\tau}(x)\, u(x) + g_x(x)\, f_x(x) = 0.$$

Согласно (1.6), в данном случае функция $f(x(x_0, t))$ монотонно убывает. В общем случае эта функция может изменяться немонотонно, и лишь на множестве X и вблизи множества X, где норма $\|g(x)\|$ мала, эта функция монотонно убывает. Система (1.7) является нейтрально устойчивой по отношению к допустимому множеству, так как если $g(x_0) = c$, $\|c\| \neq 0$, то $g(x(x_0, t)) \equiv c$. Система (1.5) согласно (1.4) является асимптотически устойчивой по отношению к ограничениям. Действительно, если решения системы (1.5) продолжимы при $t \to \infty$, то

$$g(x(x_0, t)) = g(x_0)\, e^{-\tau t}, \quad \lim_{t\to\infty} g(x(x_0, t)) = 0.$$

Следовательно, при $t \to +\infty$ траектории системы приближаются к точкам допустимого множества X.

Определение 1. В точке $x \in E^n$ выполнено *условие регулярности ограничений* (у.р.о.) для задачи (1.1), если столбцы матрицы $g_x^{\tau}(x)$ линейно независимы.

Обозначим через $K^{\perp}(x)$ векторное подпространство, порожденное векторами $g_x^1(x), \ldots, g_x^m(x)$. Если в точке x выполнено у.р.о., то размерность подпространства $K^{\perp}$ равна m, ортогональным дополнением к нему будет подпространство $K(x) = \{\bar{x} \in E^n : g_x(x)\,\bar{x} = 0_m\}$ размерности $d = n - m$.

Пусть W — матрица $m \times n$, ее ранг максимальный, равен m. Матрица W^+ размера $n \times m$ обозначает правую псевдообратную для матрицы W, т. е. $W^+ = W^{\tau}(WW^{\tau})^{-1}$, $WW^+ = I_m$. Через $\pi(W)$ обозначим матрицу $\pi(W) = I_n - W^+W$. Систему (1.5) можно записать в проективном виде:

(1.8) $$dx/dt = -\pi(g_x(x))\, f_x(x) - \tau(g_x(x))^+ g(x).$$

Первый вектор, стоящий в правой части, является проекцией антиградиента функции $f(x)$ на касательное подпространство $K(x)$ к многообразию $g(x) = \mathrm{const}$, второй вектор лежит в ортогональном подпространстве $K^{\perp}(x)$.

Те точки $x \in E^n$, в которых правые части (1.8) обращаются в нуль, называются *стационарными*.

Лемма 1. *Точка x_*, в которой выполнено у.р.о., является стационарной тогда и только тогда, когда пара $[x_*, u_*]$, где $u_* = u(x_*)$, образует точку Куна—Таккера, т. е.*

(1.9) $$L_x(x_*, u_*) = 0_n, \quad g(x_*) = 0_m.$$

Доказательство. Достаточность очевидна, поэтому докажем только необходимость. Пусть x_* – стационарная точка. Тогда с учетом ортогональности векторов, стоящих в правой части (1.8), получаем, что

$$\pi(g_x(x_*))f_x(x_*) = 0_n, \quad (g_x(x_*))^+g(x_*) = 0_n.$$

Здесь первые n соотношений совпадают с первыми n соотношениями (1.9). В силу у.р.о., вторые n соотношений могут быть удовлетворены только при $g(x_*) = 0$. Таким образом, $[x_*, u_*]$ является точкой Куна — Таккера. Что и требовалось доказать.

Если в стационарной точке x_* выполнены достаточные условия второго порядка изолированного локального минимума в задаче (1.1), приведенные в [17], то траектории системы (1.8) локально экспоненциально сходятся к x_*, троектории системы (1.7) локально сходятся к X_* на допустимом множестве X. Справедливость этого утверждения следует из более общего результата, полученного в § 3.

§ 2. Учет дополнительных ограничений простой структуры

Изложенный в предыдущем параграфе подход можно использовать для задач, имеющих более сложные ограничения. Пусть решается задача об отыскании

$$(2.1) \qquad f_* = \min_{x\in X} f(x), \quad X = \{x \in E^n : g(x) = 0_m, \quad x \in \Pi\},$$

где $\Pi \subset E^n$ – выпуклое замкнутое множество, имеющее непустую внутренность.

Введем новое n-мерное евклидово пространство E^n с координатами $[y^1, \ldots, y^n]$. Осуществим переход от этого пространства к исходному с помощью преобразования $x = \xi(y)$. Это преобразование построим так, чтобы оно было сюръекцией из E^n в Π или по крайней мере из E^n в $\operatorname{int}\Pi$. Тогда каждый элемент из Π (или $\operatorname{int}\Pi$) есть образ не менее чем одного элемента из E^n и замыкание образа множества E^n совпадает с Π. Предполагаем также, что отображение $\xi(y)$ непрерывно дифференцируемо всюду на E^n. Исходную задачу (2.1) заменим следующей: найти

$$(2.2) \qquad \tilde{f}_* = \inf_{y\in Y} \tilde{f}(y), \quad Y = \{y \in E^n : \tilde{g}(y) = 0_m\}.$$

Здесь $\tilde{f}(y) = f(\xi(y))$, $\tilde{g}(y) = g(\xi(y))$, причем $\tilde{f}_* = f_*$.

Предположим, что точка y_* является решением задачи (2.2). Тогда точка $x_* = \xi(y_*)$ будет решением задачи (2.1). Поэтому можно применить для решения задачи (2.2) описанный в предыдущем параграфе метод, после этого совершить обратный переход к координатам $[x^1, \ldots, x^n]$ и получить таким образом метод решения задачи (2.1) в исходном пространстве. В пространстве $y \in E^n$ метод (1.2), (1.4) принимает следующий вид:

$$(2.3а) \qquad dy/dt = -[\tilde{f}_y(y) + \tilde{g}_y^T(y)\tilde{u}(y)], \quad y(y_0, 0) = y_0 \in E^n,$$

$$(2.3б) \qquad \tilde{g}_y(y)\tilde{g}_y^T(y)\tilde{u}(y) + \tilde{g}_y(y)\tilde{f}_y(y) = \tau\tilde{g}(y).$$

Градиенты функций $\tilde{f}, \tilde{g}$ и f, g связаны очевидными соотношениями

$\tilde{f}_y(y) = \tilde{J}^{\mathrm{T}}(y) f_x(\xi(y))$, $\tilde{g}_y^{\mathrm{T}}(y) = \tilde{J}^{\mathrm{T}}(y) g_x^{\mathrm{T}}(\xi(y))$. Здесь $\tilde{J}(y) = d\xi(y)/dy$ – матрица Якоби. В неособых точках преобразования $x = \xi(y)$, где якобиан отличен от нуля, существует обратное преобразование $y = \xi^{-1}(x)$. Если воспользоваться этим преобразованием и взять в качестве аргумента у матрицы Якоби вектор x, то получим матрицу $J(x) = \tilde{J}(\xi^{-1}(x))$, зависящую уже от x. Используя соотношения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi(y)}{dy}\frac{dy}{dt} = \tilde{J}(y)\frac{dy}{dt} = J(x)\frac{dy}{dt},$$

можно найти дифференциальные уравнения, определяющие в пространстве x траектории, которые соответствуют траекториям (2.3). При этом надо иметь в виду, что если для (2.3) условие $x_0 = \xi(y_0) \in \Pi$ выполняется автоматически, то в пространстве x надо потребовать, чтобы $x_0 \in \Pi$. Из (2.3) получим

(2.4а) $\quad dx/dt = -G(x) L_x(x, u(x)), \quad x(x_0, 0) = x_0 \in \Pi,$

(2.4б) $\quad \Gamma(x) u(x) + g_x(x) G(x) f_x(x) = \tau g(x).$

Здесь введены две матрицы Грама: $\Gamma(x) = g_x(x) G(x) g_x^{\mathrm{T}}(x)$, $G(x) = J(x) J^{\mathrm{T}}(x)$. Аналогом формулы (1.6) будет

(2.5) $\quad df/dt = -\|J^{\mathrm{T}}(x) L_x(x, u(x))\|^2 + \tau u^{\mathrm{T}}(x) g(x).$

При $\tau = 0$ метод переходит в следующий:

(2.6а) $\quad dx/dt = -G(x) L_x(x, u(x)), \quad x(x_0, 0) = x_0 \in X,$

(2.6б) $\quad \Gamma(x) u(x) + g_x(x) G(x) f_x(x) = 0.$

Методы типа (2.4), (2.6) назовем *барьерно-проективными.*

Обозначим, соответственно, через $K(x|\Pi)$ и $K^*(x|\Pi)$ конус допустимых направлений в точке x относительно множества Π и двойственный к нему:

$$K(x|\Pi) = \{z \in E^n: \ \exists \lambda(z) > 0 \text{ такое, что } x + \lambda z \in \Pi \ \ \forall\ 0 < \lambda < \lambda(z)\},$$

$$K^*(x|\Pi) = \{z \in E^n: \langle z, y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K(x|\Pi)\}.$$

Пусть $S(x|\Pi)$ – линейная оболочка конуса $K^*(x|\Pi)$.

Определение 2. В точке $x \in \Pi$ выполнено у.р.о. для задачи (2.1), если все векторы $g_x^i(x)$, $1 \leq i \leq m$, и произвольный ненулевой вектор $p \in S(x|\Pi)$ линейно независимы.

Наложим на преобразование $\xi(y)$ следующее

Условие А. В каждой точке $x \in \Pi$ матрица $J(x)$ определена и ядро $\ker J^{\mathrm{T}}(x)$ совпадает с $S(x|\Pi)$.

Из этого условия, в частности, следует, что во всех внутренних точках $x \in \operatorname{int} \Pi$ матрица $J(x)$ не вырождена, она становится особой только на границе множества Π.

Отметим также, что, согласно условию А, ортогональное к $S(x|\Pi)$ подпространство $S^{\perp}(x|\Pi)$ совпадает с пространством столбцов матрицы $J(x)$, и поскольку вектор $-J(x) J^{\mathrm{T}}(x) L_x(x, u(x))$ принадлежит этому пространству, то вектор скорости $\dot{x}$ всегда лежит в ортогональном подпространстве $S^{\perp}(x|\Pi)$.

Таким образом, если x — граничная точка П, то, в силу вырожденности матрицы $J^{\mathrm{T}}(x)$, вектор $\dot{x}$ будет принадлежать собственному подпространству пространства E^n, которое совпадает с пространством $M(x) - x$, где $M(x)$ – пересечение всех опорных плоскостей к множеству П в точке x. Это подпространство вырождается в единственную точку (начало координат), если конус $K^{\circ}(x \mid \Pi)$ имеет непустую внутренность.

Матрица $G(x)$ играет в (2.4) роль барьера, не позволяющего траекториям покидать множество П. Действительно, для того чтобы траектория $x(x_0, t)$, начинающаяся внутри множества П, в некоторый момент $t_1 > 0$ покидала его, необходимо, чтобы нашелся такой вектор $p \in K^{\circ}(x(x_0, t_1) \mid \Pi)$, что $\langle \dot{x}(x_0, t_1), p \rangle < 0$. Но вектор $\dot{x}$, как было отмечено, всегда лежит в подпространстве, ортогональном подпространству $S(x \mid \Pi)$, которому принадлежит вектор p.

Лемма 2. *Пусть преобразование $\xi(y)$ удовлетворяет условию А. Тогда если в точке x выполнено у.р.о., то матрица $\Gamma(x)$ положительно определена.*

Доказательство. Покажем, что ранг матрицы $B(x) = J^{\mathrm{T}}(x)\, g_x^{\mathrm{T}}(x)$ равен m. Тогда из того, что $\Gamma(x) = B^{\mathrm{T}}(x)\, B(x)$, будет следовать, что матрица $\Gamma(x)$ неособая, положительно-полуопределенная. Если $x \in \operatorname{int} \Pi$, то это утверждение очевидно, поскольку матрица $J(x)$ неособая, а ранг матрицы $g_x^{\mathrm{T}}(x)$ в силу условия регулярности равен m.

Пусть теперь $x \in \operatorname{fr} \Pi$. Если ранг матрицы $B(x)$ меньше, чем m, то существует такой ненулевой вектор $z \in E^m$, что $B(x)\, z = J^{\mathrm{T}}(x)\, g_x^{\mathrm{T}}(x)\, z = 0$. Но тогда, согласно условию А, вектор $p = g_x^{\mathrm{T}}(x)\, z$, не равный нулю, принадлежит пространству $S(x \mid \Pi)$. Поэтому векторы $g_x^i(x)$, $1 \le i \le m$, и вектор p оказываются линейно зависимы, что противоречит у.р.о. Таким образом, матрица $B(x)$ имеет полный ранг, равный m.

На основании утверждения леммы 2 получаем, что при выполнении у.р.о. во всех точках $x \in \Pi$ матрица $\Gamma(x)$ будет неособой. Поэтому зависимость $u(x)$ однозначным образом определяется из решения уравнения (2.4б):

$$u(x) = \Gamma^{-1}(x)\,[\tau g(x) - g_x(x)\, G(x)\, f_x(x)].$$

После подстановки $u(x)$ в правую часть (2.4а) метод (2.4) можно переписать в проективной форме, аналогичной (1.8):

$$dx/dt = -J(x)\,[\pi(g_x(x)\, J(x))\, J^{\mathrm{T}}(x)\, f_x(x) + \tau (g_x(x)\, J(x))^{+}\, g(x)]. \tag{2.7}$$

Определение 3. Точка $[x_*, u_*] \in \Pi \times E^m$ называется *точкой Куна — Таккера* для задачи (2.1), если

$$L_x(x_*, u_*) \in K^*(x_* \mid \Pi), \quad g(x_*) = 0. \tag{2.8}$$

В случае когда $L_x(x_*, u_*) \in S(x_* \mid \Pi)$ и имеет место второе равенство (2.8), то $[x_*, u_*]$ называется *слабой точкой Куна — Таккера.*

Лемма 3. *Пусть преобразование $\xi(y)$ удовлетворяет условию А. Тогда* *точка $x_\ast \in \Pi$, в которой выполнено у.р.о. является стационарной для системы* (2.7) *в том и только том случае, если пара* $[x_\ast, u_\ast]$, *где* $u_\ast = u(x_\ast)$, *есть слабая точка Куна — Таккера для задачи* ((2.1).

Доказательство. В стационарной точке выполнено

$$G(x_\ast)\, L_x(x_\ast, u_\ast) = 0,$$

т. е. $L_x(x_\ast, u_\ast) \in \ker G(x_\ast)$. Но матрицы $J^T(x_\ast)$ и $G(x_\ast) = J(x_\ast)\, J^T(x_\ast)$ имеют одинаковый ранг, равный m, и их нуль-пространства совпадают. Поэтому $L_x(x_\ast, u_\ast) \in \ker J^T(x_\ast)$ и, следовательно, имеет место первое включение (2.8). Справедливость равенства $g(x_\ast) = 0$ вытекает из (2.4б). Лемма доказана.

Будем полагать, что в точке Куна — Таккера $[x_\ast, u_\ast]$ выполнено *условие строгой дополняющей нежесткости* (у.с.д.н.), если

$$L_x(x_\ast, u_\ast) \in \operatorname{ri} K^\ast(x_\ast \mid \Pi), \tag{2.9}$$

где $\operatorname{ri} B$ — относительная внутренность множества B.

Предположим теперь, что все функции $f(x)$, $g^i(x)$, $1 \le i \le m$, дважды непрерывно дифференцируемы. Обозначим также $N(x) = \{h \in E^n : g_x(x)\, J(x)\, h = 0\}$. Достаточные условия второго порядка из [17] для задачи (2.1) могут быть переформулированы следующим образом.

Теорема 1. *Пусть функция $\xi(y)$ удовлетворяет условию А. Пусть, кроме того, в точке Куна — Таккера $[x_\ast, u_\ast]$ выполнено у.с.д.н. и*

$$\langle h, J^T(x_\ast)\, L_{xx}(x_\ast, u_\ast)\, J(x_\ast)\, h\rangle > 0 \tag{2.10}$$

для любых таких $h \in N(x_\ast)$, что $J(x_\ast)\, h \ne 0_n$. Тогда $x_\ast$ является точкой изолированного локального минимума в задаче (2.1).

Доказательство. Если $x_\ast$ не есть точка изолированного локального минимума в задаче (2.1), то найдется последовательность допустимых точек $\{x_k\}$, сходящаяся к $x_\ast$, такая, что $f(x_k) \le f(x_\ast)$. Представим x_k в виде $x_k = x_\ast + \lambda_k s_k$, где $\|s_k\| = 1$, $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \to 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $s_k \to s_\ast$, $\|s_\ast\| = 1$. Так как $s_k \in K(x_\ast \mid \Pi)$ для всех $k > 0$, то $s_\ast \in \operatorname{cl} K(x_\ast \mid \Pi)$, где $\operatorname{cl} B$ – замыкание множества B. Имеют место соотношения

$$f(x_k) - f(x_\ast) = \lambda_k \langle f_x(x_\ast + \lambda_k \theta_k^0 s_k),\ s_k\rangle \le 0, \tag{2.11}$$

$$g^i(x_k) = \lambda_k \langle g_x^i(x_\ast + \lambda_k \theta_k^i s_k), s_k\rangle = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{2.12}$$

Здесь $0 \le \theta_k^i \le 1$, $0 \le i \le m$. Умножая равенства (2.12) на $u_\ast^i$ и складывая их с (2.11), получаем после деления на λ_k и перехода к пределу $\langle L_x(x_\ast, u_\ast), s_\ast\rangle \le 0$. Но, согласно (2.9), $\langle L_x(x_\ast, u_\ast), s_\ast\rangle \ge 0$, причем $L_x(x_\ast, u_\ast) \ne 0_n$. Сопоставляя эти два неравенства, приходим к выводу, что $\langle L_x(x_\ast, u_\ast), s_\ast\rangle = 0$, т. е. вектор $s_\ast$ ортогонален вектору $L_x(x_\ast, u_\ast) \in S(x_\ast \mid \Pi)$.

Покажем, что вектор s_* принадлежит ортогональному подпространству $S^{\perp}(x_* \mid \Pi)$. В самом деле, если это не так, то вектор s_* можно представить в виде $s_* = a + b$, где $a \in S(x_* \mid \Pi)$, $b \in S^{\perp}(x_* \mid \Pi)$, $a \neq 0$. Имеем $\langle L_x(x_*, u_*), s_*\rangle = \langle L_x(x_*, u_*), a\rangle = 0$. Таким образом, эти два ненулевых вектора расположены в одном и том же подпространстве и ортогональны друг другу. Но линейная оболочка $\mathrm{ri}\, K^*(x_* \mid \Pi)$ совпадает с линейной оболочкой самого конуса $K^*(x_* \mid \Pi)$, равной $S(x_* \mid \Pi)$. Более того, если $p \in \mathrm{ri}\, K^*(x_* \mid \Pi)$, то любой вектор из подпространства $S(x_* \mid \Pi)$, лежащий в некоторой окрестности вектора p, также будет принадлежать $\mathrm{ri}\, K^*(x_* \mid \Pi)$. Поэтому, в силу (2.9), можно указать вектор $q \in \mathrm{ri}\, K^*(x_* \mid \Pi)$, для которого $\langle s_*, q\rangle < 0$, что противоречит включению $s_* \in \mathrm{cl}\, K(x_* \mid \Pi)$. Таким образом, $s_* \in S^{\perp}(x_* \mid \Pi)$. Из условия А следует, что $S^{\perp}(x_* \mid \Pi)$ совпадает с пространством столбцов матрицы $J(x_*)$. Поэтому $s_* = J(x_*) h_*$ для некоторого ненулевого вектора $h_* \in E^n$.

Разлагая теперь функции $f(x)$ и $g^i(x)$ в ряд Тейлора до второго члена включительно, получаем

$$f(x_k) - f(x_*) = \lambda_k\langle f_x(x_*), s_k\rangle + \frac{\lambda_k^2}{2}\langle s_k, f_{xx}(x_* + \lambda_k\theta_k^0 s_k) s_k\rangle \le 0, \tag{2.13}$$

$$g^i(x_k) = \lambda_k\langle g_x^i(x_*), s_k\rangle + \frac{\lambda_k^2}{2}\langle s_k, g_{xx}^i(x_* + \lambda_k\theta_k^i s_k) s_k\rangle = 0, \tag{2.14}$$

$0 \le \theta_k^i \le 1$, $0 \le i \le m$. Снова умножая равенства (2.14) на u_*^i и складывая их с (2.13), приходим к

$$\langle L_x(x_*, u_*), s_k\rangle + \frac{\lambda_k}{2}\Big[\langle s_k, f_{xx}(x_* + \lambda_k\theta_k^0 s_k) s_k\rangle + \\ + \sum_{i=1}^{m} u_*^i \langle s_k, g_{xx}^i(x_* + \lambda_k\theta_k^i s_k) s_k\rangle\Big] \le 0. \tag{2.15}$$

Из $s_k \in K(x_* \mid \Pi)$, $L_x(x_*, u_*) \in K^*(x_* \mid \Pi)$ следует, что $\langle L_x(x_*, u_*), s_k\rangle \ge 0$. Поэтому наряду с (2.15) имеют место неравенства

$$\langle s_k, f_{xx}(x_* + \lambda_k\theta_k^0 s_k) s_k\rangle + \sum_{i=1}^{m} u_*^i\langle s_k, g_{xx}^i(x_* + \lambda_k\theta_k^i s_k) s_k\rangle \le 0.$$

Переходя в них к пределу, получаем $\langle s_*, L_{xx}(x_*, u_*) s_*\rangle \le 0$, или

$$\langle h_*, J^T(x_*) L_{xx}(x_*, u_*) J(x_*) h_*\rangle \le 0, \tag{2.16}$$

причем $h_* \in N(x_*)$ и $\|J(x_*) h_*\| \neq 0$. Неравенство (2.16) противоречит (2.10). Теорема доказана.

В частном случае, когда множество Π совпадает со всем пространством E^n, беря в качестве $\xi(y)$ тождественное преобразование $x = y$, получаем, что утверждение теоремы сводится к достаточным условиям изолированного локального минимума для задачи (1.1), приведенным в [17].

§ 3. Сходимость барьерно-проективных методов

Исследуем локальное поведение траекторий системы (2.7) в окрестности точки $x_{\ast}$. Предположим теперь, что функция $\xi(y)$ такова, что матрица $G(x)$ непрерывно дифференцируема. Пусть $p \in E^n$. Обозначим через $G_x(x; p)$ квадратную матрицу порядка n, (i, j)-элемент которой равен

$$G_x^{ij}(x; p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G^{ik}(x)}{\partial x^j} p^k.$$

Наложим на преобразование $\xi(y)$ два дополнительных условия:

Условие Б. В каждой точке $x \in \Pi$ для любого вектора $p \in \operatorname{ri} K^{*}(x \mid \Pi)$ матрица $G_x(x; p)$ является симметрической и ее нуль-пространство совпадает с $S^{\perp}(x \mid \Pi)$.

Условие В. Если $x \in \Pi$, то $h^{\mathrm{T}} G_x(x; p)\, h > 0$ для любого ненулевого вектора $h \in S(x \mid \Pi)$ и для любого вектора $p \in \operatorname{ri} K^{*}(x \mid \Pi)$.

При выполнении условий А и Б матрицы $G(x)$ и $G_x(x; p)$ в каждой точке $x \in \Pi$ коммутируют между собой. Действительно, так как $J(x)\, a \in S^{\perp}(x \mid \Pi)$ для любого вектора $a \in E^n$, то $G_x(x; p)\, J(x)\, a \equiv 0_n$. Но это означает, что матрица $G_x(x; p)\, J(x)$ нулевая, поэтому $G_x(x; p)\, G(x) = G_x(x; p)\, J(x)\, J^{\mathrm{T}}(x) = 0_{nn}$. С другой стороны, в силу симметричности матрицы $G_x(x; p)$,

$$G(x)\, G_x(x; p) = J(x)\, J^{\mathrm{T}}(x)\, G_x(x; p) = J(x)\, [G_x(x; p)\, J(x)]^{\mathrm{T}} = 0_{nn}.$$

Отметим, что в точках $x \in \operatorname{int} \Pi$ из-за того, что $K^{*}(x \mid \Pi) = \{0\}$, сама матрица $G_x(x; p)$ всегда будет нулевой.

Теорема 2. *Пусть функция* $\xi(y)$ *удовлетворяет условиям* А—В. *Пусть, кроме того, в точке* x_{*}, *являющейся решением задачи* (2.1), *выполнено* у.р.о. *и достаточные условия второго порядка теоремы* 1. *Тогда для любого* $\tau > 0$ *точка* $x_{\ast}$ — *экспоненциально устойчивое положение равновесия для системы* (2.7).

Доказательство. Уравнение в вариациях для системы (2.7) имеет вид

$$\delta \dot{x} = -Q(x_{*}, u_{*})\, \delta x, \tag{3.1}$$

где

$$Q(x,u) = \widetilde{M}(x)\, [G(x)\, L_{xx}(x, u) + G_x(x; L_x(x, u))] + \tau G(x)\, \widetilde{P}(x), \tag{3.2}$$

$$\widetilde{M}(x) = I_n - G(x)\, \widetilde{P}(x), \quad \widetilde{P}(x) = g_x^{\mathrm{T}}(x)\, [g_x(x)\, G(x)\, g_x^{\mathrm{T}}(x)]^{-1} g_x(x).$$

Предположим для определенности, что точка x_{*} такова, что ранг матрицы $G(x_{\ast})$ равен s, причем $s < n$. Так как $G(x_{*})$ — симметрическая матрица, то можно указать такую ортогональную матрицу U, что $G(x_{*}) = UHU^{\mathrm{T}}$ и матрица H имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} H^B & 0_{s,n-s} \\ 0_{n-s,s} & 0_{n-s,n-s} \end{bmatrix}.$$

Здесь H^B – диагональная матрица порядка s, диагональные элементы которой представляют собой отличные от нуля собственные значения матрицы $G(x_*)$. Так как $G(x_*)$ является неотрицательно-определенной матрицей, то все они строго положительны. Более того, учитывая симметричность матрицы $G_x(x_*; L_x(x_*, u_*))$ и коммутативность матриц $G(x_*)$ и $G_x(x_*; L_x(x_*, u_*))$, матрицу U можно подобрать таким образом, чтобы матрица $Y = U^{\mathrm{T}}G_xU$ также была диагональной. Поэтому матрица $Q(x_*, u_*)$ представима в виде

$$Q(x_*, u_*) = URU^{\mathrm{T}}, \quad R = (I_n - HU^{\mathrm{T}}\widetilde{P}U)(HU^{\mathrm{T}}L_{xx}U + Y) + \tau HU^{\mathrm{T}}\widetilde{P}U$$

и, следовательно, ее собственные значения совпадают с собственными значениями матрицы R.

Пусть V и $V^{\perp}$ – соответственно, нуль-пространство матрицы H и его ортогональное дополнение:

$$V = \ker H = \{y \in E^n : y^1 = \ldots = y^s = 0\},$$

$$V^{\perp} = \{y \in E^n : y^{s+1} = \ldots = y^n = 0\}.$$

Имеет место связь между подпространствами $S(x_* \mid \Pi)$, $S^{\perp}(x_* \mid \Pi)$ и V, $V^{\perp}$, а именно: $S(x_* \mid \Pi) = UV$, $S^{\perp}(x_* \mid \Pi) = UV^{\perp}$.

Согласно условию Б, $G_x z = 0$, если $z \in S^{\perp}(x_* \mid \Pi)$. Поэтому $G_x Uy = 0$ для всех $y \in V^{\perp}$. Отсюда следует, что матрица Y имеет вид

$$Y = [0_{n,s}, B], \quad B^{\mathrm{T}} = [0_{n-s,s}, C],$$

где C — диагональная невырожденная матрица порядка $n - s$.

Обозначим через U^B и U^N подматрицы матрицы U, состоящие, соответственно, из первых s и последних $n - s$ ее столбцов. Обозначим также через H^B левую верхнюю квадратную подматрицу порядка s матрицы H. Положим

$$P^B = (U^B)^{\mathrm{T}} g_{x_B}^{\mathrm{T}} [g_{x_B} U^B H^B (U^B)^{\mathrm{T}} g_{x_B}^{\mathrm{T}}]^{-1} g_{x_B} U^B, \quad L_{xx}^B = (U^B)^{\mathrm{T}} L_{xx} U^B.$$

Тогда матрицу R можно записать в следующем блочно-диагональном виде:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_3 \\ 0_{n-s,s} & R_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$R_1 = (I_s - H^B P^B) H^B L_{xx}^B + \tau H^B P^B, \quad R_2 = (U^N)^{\mathrm{T}} G_x U^N.$$

Характеристическое уравнение для матрицы R расщепляется на два уравнения:

$$|R_1 - \lambda_i I_s| = 0, \quad |R_2 - \lambda_j I_{n-s}| = 0, \quad 1 \le i \le s, \quad s + 1 \le j \le n.$$

Найдем сначала решения второго уравнения. Если λ_j – собственное значение, соответствующее собственному вектору $z_j \in E^{n-s}$, то имеют место равенства

$$(U^N)^{\mathrm{T}} G_x U^N z_j = \lambda_j z_j, \quad s + 1 \le j \le n,$$

или после умножения их справа на z_j^{T}

$$z_j^{\mathrm{T}} (U^N)^{\mathrm{T}} G_x U^N z_j = \lambda_j \|z_j\|^2, \quad s + 1 \le j \le n.$$

Так как векторы $h_j = U^N z_j \in S(x_* | \Pi)$, то, согласно условию B, числа

(3.3) $$\lambda_j = z_j^{\mathrm{T}} (U^N)^{\mathrm{T}} G_x U^N z_j / \|z_j\|^2 = h_j^{\mathrm{T}} G_x h_j / \|z_j\|^2$$

должны быть действительными и строго положительными. Обозначим

$$\hat{\lambda}_1 = \min_{s+1 \le j \le n} \lambda_j > 0.$$

Пусть Λ – квадратный корень из матрицы H, Λ^B – верхняя левая квадратная подматрица порядка s. Отыскание корней первого уравнения можно заменить нахождением собственных значений матрицы $W_1 = (\Lambda^B)^{-1} R_1 \Lambda^B$, подобной матрице R_1. После элементарных преобразований получаем

$$| W_1 - \lambda_i I_s | = | \hat{M} \hat{L}_{xx}^B + \tau \hat{P} - \lambda_i I_s | = 0, \quad 1 \le i \le s,$$

где $\hat{M} = I_s - \hat{P}$, $\hat{P} = \Lambda^B P^B \Lambda^B$, $\hat{L}_{xx}^B = \Lambda^B L_{xx}^B \Lambda^B$.

Так введенные матрицы $\hat{M}$ и $\hat{P}$ являются идемпотентными, для них $\hat{M} \times \hat{M} = \hat{M}$, $\hat{P} \times \hat{P} = \hat{P}$, $\hat{M} \times \hat{P} = 0$. Матрица $\hat{M}$ осуществляет проектирование любого s-мерного вектора на касательное многообразие:

$$\hat{K}(x_*) = \{ \bar{x} \in E^s : g_{x_B}(x_*)\, U^B \Lambda^B \bar{x} = 0_m \}.$$

Матрица $\hat{P}$ проектирует s-мерные векторы на ортогональное дополнение $\hat{K}^{\perp}(x_*)$ к этому пространству.

Пусть z_i — собственный вектор и λ_i – соответствующее собственное значение матрицы W_1; тогда

(3.4) $$(\hat{M} \hat{L}_{xx}^B + \tau \hat{P})\, z_i = \lambda_i z_i, \quad z_i \in E^s.$$

Если ненулевой собственный вектор z_i таков, что $\|\hat{P} z_i\| \ne 0$, то, умножая (3.4) слева на матрицу $\hat{P}$, получаем $\lambda_i = \tau$. Если теперь $\|\hat{P} z_i\| = 0$, т. е. $z_i \in \hat{K}(x_*)$, то, умножая (3.4) слева на z_i^{T}, находим

(3.5) $$\lambda_i = z_i^{\mathrm{T}} \Lambda^B L_{xx}^B \Lambda^B z_i / \|z_i\|^2.$$

Учтем теперь, что $U^B \Lambda^B z_i = U \Lambda h_i = J h_i$ для некоторого вектора $h_i \in E^n$, у которого первые s компонент совпадают с соответствующими компонентами вектора z_i. Тогда (3.5) перепишется в виде

(3.6) $$\lambda_i = h_i^{\mathrm{T}} J^{\mathrm{T}} L_{xx} J h_i / \|z_i\|^2.$$

Из $z_i \in \hat{K}(x_*)$, $z_i \ne 0_s$, следует, что $h_i \in N(x_*)$, $J h_i \ne 0_n$. Поэтому на основании неравенства (2.10) заключаем, что всякому собственному вектору z_i матрицы W_1 из касательного многообразия $\hat{K}(x_*)$ соответствует положительное собственное значение λ_i и

$$\hat{\lambda}_2 = \min_{i \in \Delta(x_*)} \lambda_i > 0, \quad \Delta(x_*) = \{ i : z_i \in \hat{K}(x_*) \}.$$

Таким образом, собственные значения матрицы Q расщепляются на три группы: 1) $n - s$ корней (3.3), 2) k корней $\lambda = \tau$, 3) $s - k$ корней (3.6). Если $\tau > 0$, то все собственные значения матрицы Q строго положительны и, согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению, положение равновесия $x = x_*$ локально экспоненциально устойчиво.

Из доказательства теоремы 2 вытекает следующая оценка скорости сходимости решений системы (2.7):

$$(3.7)\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\ln |x^i(x_0, t) - x_*^i|}{t} \le -\lambda_*, \quad \lambda_* = \min\,[\tau, \hat\lambda_1, \hat\lambda_2], \quad 1 \le i \le n.$$

Отметим, что если $x_0 \in X$, то траектории системы (2.4) совпадают с траекториями системы (2.6). Поэтому на основании теоремы 2 можно утверждать, что и метод (2.6) локально экспоненциально сходится к точке x_* на допустимом множестве X. Для него сохраняется оценка (3.7), однако при этом λ_* должно быть заменено на $\lambda_* = \min\,[\hat\lambda_1, \hat\lambda_2]$. Заметим также, что если множество Π есть все пространство E^n, то, беря в качестве $\xi(y)$ преобразование $x = y$, приходим из (2.4) к методу (1.2). Для него также становятся справедливыми условия сходимости, приведенные в теореме 2.

Рассмотрим дискретный вариант метода (2.7); он может быть записан в виде

$$(3.8\text{а})\qquad x_{k+1} = x_k - \alpha_k G(x_k)\, L_x(x_k, u_k),$$

$$(3.8\text{б})\qquad u_k = \Gamma^{-1}(x_k)\,[\tau g(x_k) - g_x(x_k)\, G(x_k)\, f_x(x_k)\,],$$

где $\alpha_k > 0$ – шаг интегрирования системы (2.7) по схеме Эйлера.

Теорема 3. *Пусть в задаче* (2.1) *выполнены условия теоремы* 2. *Тогда метод* (3.8) *локально сходится к точке* x_* *со скоростью геометрической прогрессии, если шаг* α_k *постоянный, равный* α, *где*

$$(3.9)\qquad 0 < \alpha < 2/\lambda^*,$$

λ^* – *максимальное собственное значение матрицы* Q, *задаваемой формулой* (3.2).

Доказательство. Представим (3.8) как метод простой итерации:

$$(3.10)\qquad x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \Phi(x) = x - \alpha G(x)\, L_x(x, u(x)).$$

Точка $x = x_*$ является неподвижной точкой оператора $\Phi(x)$. Согласно теореме Островского (см. [18]), достаточным условием линейной локальной сходимости метода (3.10) является требование, чтобы спектральный радиус ρ матрицы $\Phi_x(x_*)$ был меньше единицы. Рассмотрим характеристическое уравнение $|\Phi_x(x_*) - \varkappa I_n| = 0$. Несложно видеть, что $\Phi_x(x_*) = I_n - \alpha Q$, где матрица Q определяется формулой (3.2). Пусть λ – произвольное собственное значение матрицы Q; тогда соответствующее ему значение $\varkappa$ равно $1 - \alpha\lambda$. При доказательстве теоремы 2 было установлено, что все собственные значения матрицы Q являются действительными положительными числами. Поэтому если шаг α удовлетворяет условию (3.9), то $|\varkappa| < 1$ и, следовательно, $\rho < 1$.

Теорема 3 дает достаточные условия локальной сходимости метода (3.8). Скорость сходимости линейная, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших k справедлива оценка

$$\|x_k - x_*\| \le C\,(\rho + \varepsilon)^k,$$

где $\rho = \max[|1-\alpha\lambda_*|, |1-\alpha\lambda^*|]$, λ_* – минимальное собственное значение матрицы Q, C — некоторая положительная константа.

Рассмотрим важный частный случай задачи (2.1), когда множество Π есть положительный ортант E^n_+ пространства E^n. Тогда преобразование координат можно строить в следующем сепарабельном виде: $x^i = \xi^i(y^i)$, $1 \le i \le n$. Матрицы $J(x)$ и $G(x)$ для таких преобразований будут диагональными:

$$J(x) = D(\gamma(x)) = \operatorname{diag}(\gamma^1(x^1), \ldots, \gamma^n(x^n)), \quad \gamma^i(t) = \dot{\xi}^i((\xi^i)^{-1}(t)),$$

$$G(x) = D(\theta(x)) = \operatorname{diag}(\theta^1(x^1), \ldots, \theta^n(x^n)), \quad \theta^i(t) = [\gamma^i(t)]^2.$$

Пусть $\sigma(x) = \{i\colon x^i = 0\}$ – множество активных индексов в точке $x \in \Pi$. Конус $K^*(x|\Pi)$ и подпространство $S(x|\Pi)$ для $\Pi = E^n_+$ имеют вид

$$K^*(x|\Pi) = \{z \in E^n_+ : z^i = 0,\ i \notin \sigma(x)\},$$

$$S(x|\Pi) = \{z \in E^n : z^i = 0,\ i \notin \sigma(x)\}.$$

Поэтому условие А в данном случае сводится к следующему: $\gamma^i(0) = 0$ и $\gamma^i(t) > 0$, если $t > 0$. Для того чтобы выполнялись условия Б и В, достаточно потребовать, чтобы функции $\theta^i(t)$, $1 \le i \le n$, были дифференцируемы и

(3.11) $\quad \dot{\theta}^i(0) > 0.$

В качестве простейших примеров преобразований данного вида можно указать следующие два:

$$x^i = (y^i)^2/4, \quad x^i = e^{-y^i}, \quad 1 \le i \le n.$$

Для них получаем, соответственно, $G(x) = D(x)$ и $G(x) = D^2(x)$. Условие (3.11) выполняется только для первого преобразования, для второго оно нарушено.

Рассмотрим еще один случай задачи (2.1), когда множество Π есть «параллелепипед»:

$$\Pi = \{x \in E^n : a \le x \le b\}, \quad a \in E^n, \quad b \in E^n.$$

Для него также удобно строить преобразование $\xi(y)$ в сепарабельном виде, приводящем к диагональным матрицам $G(x) = D(\theta(x))$. Если, например, воспользоваться преобразованиями

$$x = \frac{1}{2}[a + b + (b-a)\sin y], \quad x = \frac{1}{2}\left[a + b + \frac{2(b-a)}{\pi}\operatorname{arctg} y\right], \tag{3.12}$$

то получаем, соответственно,

$$\theta(x) = (b-x)(x-a), \quad \theta(x) = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\cos^4\frac{\pi(2x-a-b)}{2(b-a)}.$$

Условие В сводится к требованиям, чтобы $\dot{\theta}(a^i) > 0$, $\dot{\theta}(b^i) < 0$. Оно выполнено только для первого преобразовани (3.12).

§ 4. Задача с ограничениями типа неравенства

Рассмотрим задачу (2.1), в которой ограничения типа равенства заменены на неравенства:

(4.1) $$\min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x \in E^n : g(x) \leq 0_m, \ x \in \Pi\}$$

Введение дополнительных неотрицательных переменных позволяет свести эту задачу к виду (2.1) и применить для ее решения метод (2.4), причем в окончательных численных схемах удается избежать уравнений для дополнительных искусственных переменных. Данный прием для случая, когда $\Pi = E^n_+$, был исследован в [10], [12].

Возможен также другой подход к построению барьерно-проективных методов решения задачи (4.1), аналогичный рассмотренному в [19]. Составим модифицированную функцию Лагранжа:

$$M(x, u, \tau) = L(x, u) - \frac{1}{2\tau} \langle L_x(x, u), G(x) L_x(x, u) \rangle.$$

Зависимость $u(x)$, определяемая из (2.4б), является решением параметрической задачи безусловной максимизации

$$\max_{u \in E^m} M(x, u, \tau),$$

а метод (3.8) может интерпретироваться как метод простой итерации для решения системы уравнений

(4.2) $$G(x) L_x(x, u(x)) = 0_n.$$

Его обобщением на случай задачи (4.1) является следующий итеративный процесс:

(4.3) $$u_k = \arg\max_{u \in E^m_+} M(x_k, u, \tau), \quad x_{k+1} = x_k - \alpha G(x_k) L_x(x_k, u_k),$$

где $\alpha > 0$ — шаг интегрирования системы.

Обозначим $\sigma_0(x) = \{1 \leq i \leq m : g^i(x) = 0\}$, $N_1(x) = \{h \in E^n : g^i_x(x) J(x) h = 0, i \in \sigma_0(x)\}$. Для задачи (4.1) определения у.р.о. и у.с.д.н. могут быть переформулированы следующим образом.

Определение 4. В точке $x \in \Pi$ выполнено у.р.о. для задачи (4.1), если все векторы $g^i_x(x)$, $i \in \sigma_0(x)$, и произвольный ненулевой вектор $p \in S(x \mid \Pi)$ линейно независимы.

Определение 5. Точка $[x_*, u_*] \in \Pi \times E^m_+$ является точкой Куна — Таккера для задачи (4.1) и в ней выполнено у.с.д.н., если

$$L_x(x_*, u_*) \in \operatorname{ri} K^*(x_* \mid \Pi), \quad g(x_*) = L_u(x_*, u_*) \in -\operatorname{ri} K^*(u_* \mid E^m_+).$$

Аналогом теорем 1 и 2 являются два утверждения.

Теорема 4. *Пусть функция $\xi(y)$ удовлетворяет условию А. Пусть, кроме того, в точке Куна — Таккера $[x_*, u_*]$ выполнено у.с.д.н. для задачи (4.1) и для любых $h \in N_1(x_*)$ таких, что $J(x_*) h \neq 0_n$, имеет место неравенство*

(2.10). *Тогда* x_* *является точкой изолированного локального минимума в задаче* (4.1).

Теорема 5. *Пусть функция* $\xi(y)$ *удовлетворяет условиям* А — В. *Пусть, кроме того, в точке* x_*, *являющейся решением задачи* (4.1), *выполнено у.р.о. и достаточные условия второго порядка теоремы* 4. *Тогда для любого* $\tau > 0$ *и любого* α, *удовлетворяющего неравенству* (3.9), *итеративный процесс* (4.3) *локально сходится к* x_* *с линейной скоростью.*

Доказательство теоремы 5 основано на применении теоремы Островского и почти дословно повторяет доказательство теоремы 2. При этом матрица $\tilde{P}$, входящая в определение матрицы (3.2), составляется только из градиентов активных ограничений $g_x^i(x_*)$, $i \in \sigma_0(x_*)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rozen J. B.* The gradient projection method for nonlinear programming. Part I: Linear constraints//SIAM J. Appl. Math. 1960. V. 8. № 1. P. 181—217; Part II: Nonlinear constraints//1961. V. 9. № 4. P. 514—532.
2. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 5. С. 787—823.
3. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968.
4. *Антипин А. С.* Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования//Вопр. кибернетики. Вычисл. вопр. анализа больших систем. М.: Наука, 1989. С. 1—43.
5. *Tanabe K.* A geometric method in nonlinear programming//J. Optimizat. Theory and Appl. 1980. V. 30. № 2. P. 181—210.
6. *Дикин И. И.* Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования//Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 4. С. 745—747.
7. *Дикин И. И.* О сходимости одного итерационного процесса//Управляемые системы. Новосибирск, 1974. Вып. 12. С. 54—60.
8. *Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.* Численные методы решения некоторых задач исследования операций//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 3. С, 583—597.
9. *Евтушенко Ю. Г.* Два численных метода решения задач нелинейного программирования//Докл. АН СССР. 1974. Т. 215. № 1. С. 38—40.
10. *Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.* Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17. № 4. С. 890—904.
11. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
12. *Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.* Барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские численные методы оптимизации (случай нелинейного программирования)//Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
13. *Karmarcar N.* A new polinominal-time algorithm for linear programming//Combinatorica. 1984. № 4. P. 373—395.
14. *Barnes E. R.* A variation on Karmarcar's algorithm for solving linear programming problems//Math. Program. 1986. V. 36. P. 174—182.

15. *Vanderbei R. J., Meceton M. S., Freeman B. A.* On a modification of Karmarkar s linear programming algorithm//Algorithmica. 1986. V. 1. P. 395—407.
16. *Wei Zi-Luan.* An interior point method for linear programming//J. Comput. Math. 1987. Oct. P. 342—350.
17. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972.
18. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
19. *Жадан В. Г.* Модифицированные функции Лагранжа в нелинейном программировании//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 2. С. 296—308.

Поступила в редакцию 28.09.93