В. Г. Жадан, Допустимый двойственный аффинно-масштабирующий метод с наискорейшим спуском для линейной задачи полуопределенного программирования, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016, том 56, номер 7, 1248–1266

DOI: 10.7868/S0044466916070188

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2016, том 56, № 7, с. 1248–1266

УДК 519.658

ДОПУСТИМЫЙ ДВОЙСТВЕННЫЙ АФФИННО-МАСШТАБИРУЮЩИЙ МЕТОД С НАИСКОРЕЙШИМ СПУСКОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1)]

© 2016 г. В. Г. Жадан

(119333 Москва, ул. Вавилова 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН)

e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила в редакцию 02.08.2015 г.

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Для ее решения предлагается двойственный аффинно-масштабирующий метод, в котором все текущие итерации принадлежат допустимому множеству. Более того, допускается выход на границы допустимого множества. Метод является обобщением на задачи полуопределенного программирования одного из вариантов двойственного аффинно-масштабирующего метода, разработанного ранее для задач линейного программирования. Библ. 11.

Ключевые слова: линейная задача полуопределенного программирования, двойственный аффинно-масштабирующий метод, наискорейший спуск.

DOI: 10.7868/S0044466916070188

ВВЕДЕНИЕ

Задача полуопределенного программирования является задачей оптимизации на конусе симметричных положительно полуопределенных матриц. Теории и методам решения таких задач уделяется много внимания. В частности, были разработаны прямые, двойственные и прямо-двойственные аффинно-масштабирующие методы их решения (см. [1]).

В [2] был предложен один из вариантов двойственного аффинно-масштабирующего метода, в котором шаг брался достаточно малым и фиксированным. В настоящей работе рассматривается допустимый вариант этого метода, когда как начальная итерация, так и все последующие итерации принадлежат допустимому множеству. В отличие от метода из [2] здесь шаг на каждой итерации выбирается максимально возможным при условии, что последующая итерация остается в допустимом множестве. Так как в этом случае возможен выход на границу допустимого множества, то предлагаются специальные модификации правых частей в методе, позволяющие двигаться вдоль границы, а также перескакивать с одной граничной грани на другую. Идея данных модификаций аналогична той, которая раньше использовалась для разработки двойственного мультипликативно-барьерного метода с наискорейшим спуском для задач линейного программирования (см. [3]). При попадании в крайние точки допустимого множества метод может вести себя как симплекс-метод, если направление, уводящее траекторию с минимальной грани, берется из сопряженной грани. Различные варианты симплекс-метода для полуопределенного программирования предлагались, например, в [4], [5].

Приведем некоторые обозначения, которые понадобятся в дальнейшем. Единичная матрица порядка n обозначается как I_n. Нулевой n-мерный вектор и нулевая $(m \times n)$-матрица обозначаются соответственно как 0_n и 0_{mn}. Символ $\otimes$ между матрицами означает их произведение по Кронекеру.

Если M – квадратная матрица порядка n, то символом $\operatorname{vec} M$ обозначается прямая сумма ее столбцов, т.е. вектор-столбец длины n^2, в котором последовательно один под другим располагаются столбцы матрицы M. Для симметричных матриц вводится вектор-столбец $\operatorname{hvec} M$. В него также помещаются последовательно сверху вниз столбцы матрицы M, но не полностью, а только их нижние части, начинающиеся с диагонального элемента. Аналогичным образом определяет-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 01-08259), а также при содействии Программы РАН I. 33 П и Программы ведущих научных школ (НШ-8860.2016.1).

ся вектор-столбец svec M. От hvec M он отличается только тем, что все элементы, не стоящие на диагонали матрицы M, при помещении в svec M умножаются на $\sqrt{2}$. Как вектор hvec M, так и вектор svec M имеют длину, равную n-ому "треугольному числу": $n_\Delta = n(n+1)/2$.

Для перехода от вектора vec M к вектору hvec M и для обратного перехода используются специальные элиминационные и дуплицирующие матрицы (см. [6], [7]). Элиминационная матрица $\mathcal{L}_n$ для каждой квадратной матрицы M порядка n совершает преобразование $\mathcal{L}_n$vec M = hvec M. Напротив, дуплицирующая матрица $\mathcal{D}_n$ для каждой симметричной матрицы M порядка n осуществляет обратное преобразование $\mathcal{D}_n$hvec M = vec M. Матрица $\mathcal{L}_n$ имеет размер $n_\Delta \times n^2$, матрица $\mathcal{D}_n$ – размер $n^2 \times n_\Delta$. Обе матрицы $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ являются матрицами полного ранга, равного n_Δ. Матрица $\mathcal{L}_n$ полуортогональная, т.е. $\mathcal{L}_n\mathcal{L}_n^{\mathrm{T}} = I_{n_\Delta}$. Кроме того, $\mathcal{L}_n\mathcal{D}_n = I_{n_\Delta}$.

Пусть E_n – квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны единице. Пусть, кроме того, D_2 – диагональная матрица, порядка n_Δ, на диагонали которой располагается вектор svec E_n. Наряду с матрицами $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ в дальнейшем будем пользоваться также матрицами $\tilde{\mathcal{L}}_n = D_2\mathcal{L}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n\mathcal{D}_2^{-1}$.

Таким образом, если M – симметричная матрица порядка n, то

$$\operatorname{svec} M = \tilde{\mathcal{L}}_n \operatorname{vec} M = \tilde{\mathcal{D}}_n^{\mathrm{T}} \operatorname{vec} M, \quad \operatorname{vec} M = \tilde{\mathcal{D}}_n \operatorname{svec} M.$$

Для матриц $\tilde{\mathcal{L}}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n$, сохраняется свойство: $\tilde{\mathcal{L}}_n\tilde{\mathcal{D}}_n = I_{n_\Delta}$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Пусть $\mathbb{S}^n$ – пространство симметричных матриц порядка n, и пусть $\mathbb{S}^n_+$ – конус в $\mathbb{S}^n$, состоящий из положительно полуопределенных матриц. Внутренность $\mathbb{S}^n_+$, обозначаемая $\mathbb{S}^n_{++}$, состоит из положительно определенных матриц и также является конусом. В дальнейшем используются дополнительно неравенства $M \succcurlyeq 0$ или $M \succ 0$, чтобы указать на принадлежность квадратной матрицы M соответственно конусам $\mathbb{S}^n_+$ или $\mathbb{S}^n_{++}$. Пространство $\mathbb{S}^n$ конечномерное, его размерность равна n_Δ.

Скалярное (внутреннее) произведение между двумя матрицами L и M одного размера определяется как след матрицы $L^{\mathrm{T}}M$ и обозначается через

$$L \bullet M = \operatorname{tr}(L^{\mathrm{T}}M) = \sum_{i,j} l_{ij}m_{ij},$$

где l_{ij} и m_{ij} – (ij)-е элементы матриц L и M соответственно. Если L и M – две положительно полуопределенные матрицы из $\mathbb{S}^n$, то обязательно $L \bullet M \geqslant 0$. Более того, $L \bullet M = 0$ в том и только в том случае, когда $LM = ML = 0_{nn}$.

Рассмотрим линейную задачу полуопределенного программирования в стандартной форме: найти

$$\begin{gathered} \min C \bullet X, \\ A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1,\dots,m, \quad X \succcurlyeq 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где матрицы C, X и A_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, принадлежат пространству $\mathbb{S}^n$, вектор $b = (b_1, \dots, b^m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ ненулевой. Двойственной к (1) является задача

$$\begin{gathered} \max \langle b, u \rangle, \\ \sum_{i=1}^m u^i A_i + V = C, \quad V \succcurlyeq 0, \end{gathered} \tag{2}$$

в которой $u \in \mathbb{R}^m$ и $V \in \mathbb{S}^n$. Угловые скобки указывают на обычное евклидово скалярное произведение в конечномерном векторном пространстве. Предполагается, что задачи (1) и (2) имеют решения и что матрицы A_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, линейно независимы.

Пусть

$$V(u) = C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i, \quad u \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathcal{F}_D$ допустимое множество в двойственной задаче (2), т.е.

$$\mathcal{F}_D = \{[u, D] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n_+ : V = V(u)\}.$$

Проекциями $\mathcal{F}_D$ на пространство $\mathbb{R}^m$ и конус $\mathbb{S}^n_+$ являются множества

$$\mathcal{F}_{D,u} = \{u \in \mathbb{R}^m : [u, V] \in \mathcal{F}_D \text{ для некоторого } V \in \mathbb{S}^n_+\},$$

$$\mathcal{F}_{D,V} = \{V \in \mathbb{S}^n_+ : [u, V] \in \mathcal{F}_D \text{ для некоторого } u \in \mathbb{R}^m\}$$

соответственно. Через $\mathcal{F}^0_{D,u}$ будем обозначать внутренность множества $\mathcal{F}_{D,u}$, через $\partial\mathcal{F}_{D,u}$ – его границу.

Из предположения о существовании решений задач (1) и (2) следует, что система равенств и неравенств

$$\begin{gathered} X \bullet V = 0, \\ A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \le i \le m, \\ V = C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i, \\ X \succcurlyeq 0, \quad V \succcurlyeq 0, \end{gathered} \tag{4}$$

обязательно имеет решение.

Обозначим через $X \circ V$ симметризованное произведение матриц X и V из $\mathbb{S}^n$, т.е. матрицу $X \circ V = (XV + VX)/2$. Для симметричных матриц $X \succcurlyeq 0$ и $V \succcurlyeq 0$ равенство $X \circ V = 0_{nn}$ возможно в том и только в том случае, когда $XV = VX = 0_{nn}$. Поэтому первое равенство в (4) может быть заменено на следующее:

$$X \circ V = 0_{nn}. \tag{5}$$

Запишем равенство (5) и второе и третье равенства из (4) в векторном виде:

$$\operatorname{vec}(X \circ V) = 0_{n^2}, \quad \mathcal{A}_{\mathrm{vec}} \operatorname{vec} X = b, \quad \operatorname{vec} V = \operatorname{vec} C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{vec}} u. \tag{6}$$

Здесь и ниже через $\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}$ обозначается $(m \times n^2)$-матрица, строками которой являются векторы $\operatorname{vec} A_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Более того, в силу известной формулы

$$\operatorname{vec}(ABC) = (C^{\mathrm{T}} \otimes A) \operatorname{vec} B, \tag{7}$$

справедливой для любых матриц A, B и C, для которых определено произведение ABC, получаем, что

$$\operatorname{vec}(X \circ V) = V^{\otimes} \operatorname{vec} X, \tag{8}$$

где $V^{\otimes} = [V \otimes I_n + I_n \otimes V]/2$ – кронекеровская сумма матрицы V.

Учтем далее симметричность матриц. Тогда из (6) и (8) следует, что система равенств (6) может быть представлена в виде

$$\tilde{V}^{\otimes} \operatorname{svec} X = 0_{n_\Delta}, \quad \mathcal{A}_{\mathrm{svec}} \operatorname{svec} X = b, \quad \operatorname{svec} V = \operatorname{svec} C - \mathcal{A}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{svec}} u. \tag{9}$$

В (9) через $\tilde{V}^{\otimes}$ обозначена матрица $\tilde{V}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n V^{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n$, через $\mathcal{A}_{\mathrm{svec}}$ – $(m \times n_\Delta)$-матрица со строками $\operatorname{svec} A_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Система условий оптимальности (9) является стандартной для пары взаимодвойственных задач (1) и (2) и используется при построении многих методов решения линейных задач полуопределенного программирования.

Отметим также, что согласно условиям (4), если положительно полуопределенные матрицы X_* и V_* являются решениями задач (1) и (2), то матрицы X_* и V_* коммутируют между собой. Поэтому $X_* = QD(\eta_*)Q^{\text{т}}$, $V_* = QD(\theta_*)Q^{\text{т}}$ для некоторой ортогональной матрицы Q и для диагональных матриц $D(\eta_*)$ и $D(\theta_*)$, на диагоналях которых расположены собственные значения матриц X_* и V_* соответственно. Собственные векторы таких матриц, соответствующие положительным собственным значениям, определяются столбцами матрицы Q, причем опять же из-за первого равенства в (4) они находятся в разных подпространствах, ортогональных друг другу. Если $\eta_* + \theta_* > 0_n$, то решения называются *строго дополнительными*.

2. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС И ОСНОВНОЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Наша цель состоит в том, чтобы построить численный метод решения двойственной задачи (2), в котором точки итерационного процесса принадлежали бы допустимому множеству $\mathcal{F}_{D,u}$, включая граничные точки $\mathcal{F}_{D,u}$. Будем строить его как итерационный процесс решения системы уравнений, получающейся из условий оптимальности (9) в пространстве двойственной переменной u:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k \mathcal{G}(u_k), \tag{10}$$

где $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$, α_k – некоторый положительный шаг перемещения. Алгоритмическое отображение $\mathcal{G}(u)$ определяет направление перемещения, причем его вид зависит от того, является ли точка u внутреннней или граничной.

Рассмотрим сначала случай внутренней точки u. Для нахождения $\mathcal{G}(u)$ преобразуем равенства, входящие в условия оптимальности (9), таким образом, чтобы они зависели только от u. Для этого умножим второе равенство из (9) на матрицу $\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}$ и сложим его с первым равенством. В результате получим линейное уравнение относительно svec X

$$\Phi(V)\,\text{svec}\, X = \mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}} b, \tag{11}$$

где $\Phi(V) = \mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}\mathcal{A}_{\text{svec}} + \tilde{V}^{\otimes}$.

В случае, когда матрица $\Phi(V)$ неособая, разрешая уравнение (11), находим

$$\text{svec}\, X = \Phi^{-1}(V)\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}} b. \tag{12}$$

Таким образом, чтобы удовлетворить условию (11), в качестве $X = X(V)$ может быть взята такая симметричная матрица, у которой соответствующий вектор svec X имеет вид (12).

Введем понятие невырожденной точки $u \in \mathcal{F}_{D,u}$, следуя [8]. Оно определяется через невырожденность точки $[u, V] \in \mathcal{F}_D$. Предположим, что ранг матрицы $V = V(u) \in \mathbb{S}^n_+$ равен s. Тогда, если положить $r = n - s$, то V может быть представлена в виде

$$V = HD(\theta)H^{\text{т}}, \quad D(\theta) = \text{Diag}(0,\ldots,0,\theta^{r+1},\ldots,\theta^n), \tag{13}$$

где H – ортогональная матрица, $\theta^i > 0$, $r < i \leqslant n$. Если $s < n$, то V принадлежит границе конуса $\mathbb{S}^n_+$. Касательное подпространство к подмножеству матриц ранга s, для которых справедливо (13), имеет следующий вид (см. [9]):

$$\mathcal{T}_V = \left\{ H \begin{bmatrix} 0_{rr} & G^{\text{т}} \\ G & F \end{bmatrix} H^{\text{T}} : F \in \mathbb{S}^r,\, G \in \mathbb{R}^{s \times r} \right\}.$$

Пусть далее $\mathcal{R}_A$ – подпространство в $\mathbb{S}^n$, порожденное матрицами A_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Определение 1. Точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ называется *невырожденной в двойственной задаче* (2), если $\mathcal{T}_{V(u)} + \mathcal{R}_A = \mathbb{S}^n$.

Точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ будет невырожденной в том и только в том случае, когда выполняется неравенство $m \geqslant r_\Delta$. Поэтому заведомо любая точка из $\mathcal{F}^0_{D,u}$ будет невырожденной. Имеет место следующее утверждение (см. [2]).

Утверждение 1. *Пусть точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ является невырожденной и пусть $V = V(u)$. Тогда матрица $\Phi(V)$ неособая.*

Ниже предполагается, что задача (2) невырожденная, т.е. все точки из $\mathcal{F}_{D,u}$ невырожденные. Тогда матрица $\Phi(V)$ неособая для любого $V \in \mathcal{F}_{D,V}$.

Если воспользоваться равенством (3), связывающим u и V, то зависимость $X(V)$ переходит в следующую: $X(u) = X(V(u))$. После подстановки svec $X(u)$ во второе равенство из (9) получаем систему m уравнений относительно m переменных:

$$[I_m - \mathcal{A}_{\text{svec}}\Phi^{-1}(V(u))\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}]b = 0_m. \tag{14}$$

Требуется найти такую точку $u \in \mathcal{F}_{D,u}$, которая удовлетворяла бы уравнению (14) и для которой соответствующая матрица $X(u)$ была бы положительно полуопределенной.

Утверждение 2. *Пусть точки* $[u, V(u)]$ *и* $X = X(u)$ *допустимы. Тогда они являются решениями соответственно задач* (2) *и* (1). *Кроме того, u – решение системы* (14).

Доказательство. Покажем, что в этом случае выполняются условия оптимальности (9). В самом деле, из допустимости точки X следует равенство $\mathcal{A}_{\text{svec}}\text{svec}\, X = b$ и, стало быть, равенство $\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}\mathcal{A}_{\text{svec}}\text{svec}\, X = \mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}b$. Но тогда равенство (11) сводится к следующему: $\tilde{V}^{\otimes}\text{svec}\, X = 0_{n_\Delta}$. Таким образом, выполняются все условия, входящие в (9), откуда с учетом положительной полуопределенности матриц X и $V(u)$ получаем, что X и $[u, V(u)]$ – решения соответственно задач (1) и (2). То, что u является решением системы (14), следует из представления (12) для вектора svec X. Утверждение доказано.

Следующее утверждение является в некотором смысле обратным по отношению к утверждению 2.

Утверждение 3. *Пусть* $[u_*, V_*]$, *где* $V_* = V(u_*)$, *есть решение двойственной задачи* (2), *и пусть* X_* – *решение прямой задачи* (1). *Тогда* u_* *удовлетворяет системе* (14) *и* $X(u_*) = X_*$.

Доказательство. Так как X_* и $[u_*, V_*]$ – решения задач (1) и (2), то для них выполняются условия оптимальности (9), из которых выводим, что имеет место равенство

$$[\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}\mathcal{A}_{\text{svec}} + \tilde{V}^{\otimes}_*]\text{svec}\, X_* = \mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}b.$$

Но матрица, стоящая в левой части этого равенства, есть не что иное, как матрица $\Phi(V_*)$ из (11). При предположении о невырожденности двойственной задачи она неособая. Поэтому решение этой системы единственно. Отсюда заключаем, что svec $X(u_*) = \Phi^{-1}(V(u_*))\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}b = \text{svec}\, X_*$. Следовательно,

$$b - \mathcal{A}_{\text{svec}}\,\text{svec}\, X(u_*) = b - \mathcal{A}_{\text{svec}}\Phi^{-1}(V(u_*))\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}b = b - \mathcal{A}_{\text{svec}}\,\text{svec}\, X_* = 0_m.$$

Таким образом, u_* удовлетворяет системе (14). Утверждение доказано.

Для решения системы (14) могут применяться различные численные методы решения систем нелинейных уравнений, в частности, метод простой итерации. Согласно этому методу итерации проводятся по рекуррентной схеме (10), в которой $\mathcal{G}(u)$ совпадает со следующим отображением (левой частью равенства (14)):

$$\mathcal{G}_0(u) = [I_m - \mathcal{A}_{\text{svec}}\Phi^{-1}(V(u))\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}]b. \tag{15}$$

Если будет найдено $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ такое, что $X(u) \succcurlyeq 0$, то тем самым будет найдено решение обеих задач (1) и (2).

В случае, когда $u \in \mathcal{F}^0_{D,u}$, выражение для $\mathcal{G}_0(u)$ можно несколько упростить. Действительно, тогда $V = V(u) \succ 0$. Отсюда следует, что и $\tilde{V}^{\otimes} \succ 0$. Поэтому можно обратить матрицу $\Phi(V)$ с помощью формулы Шермана–Моррисона–Вудбери:

$$\Phi^{-1}(V) = (\tilde{V}^{\otimes})^{-1} - (\tilde{V}^{\otimes})^{-1}\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}[I_m + \mathcal{A}_{\text{svec}}(\tilde{V}^{\otimes})^{-1}\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}]^{-1}\mathcal{A}_{\text{svec}}(\tilde{V}^{\otimes})^{-1}.$$

После подстановки данного выражения в (15) приходим к выводу, что $\mathcal{G}_0(u)$ может быть записано как

$$\mathcal{G}_0(u) = [I_m + \mathcal{A}_{\text{svec}}(\tilde{V}^{\otimes}(u))^{-1}\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}}]^{-1}b. \tag{16}$$

Для $\mathcal{G}_0(u)$, когда $u \in \mathcal{F}^0_{D,u}$, справедливо еще одно представление. Воспользуемся снова разложением $V = HD(\theta)H^{\text{T}}$, где H – ортогональная матрица, θ – вектор собственных значений. Поскольку $V \succ 0$, то $\theta > 0_n$. Ортогональная матрица H задает ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Матрица A_i в этом базисе записывается как $A_i^H = H^{\text{т}}A_iH$. Обозначим через $\mathcal{A}^H_{\text{svec}}$ матрицу размера $m \times n_\Delta$, строками которой являются векторы $\text{svec}\,A_i^H$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{A}_{\text{svec}} = \mathcal{A}^H_{\text{svec}}\tilde{\mathcal{D}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{17}$$

Доказательство. Согласно формуле (7) $\text{vec}(H^{\text{т}}A_iH) = (H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\text{vec}\,A_i$. Отсюда $(\mathcal{A}^H_{\text{vec}})^{\text{т}} = (H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{vec}}$. Поэтому

$$\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{vec}} = (H \otimes H)(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{vec}} = (H \otimes H)(\mathcal{A}^H_{\text{vec}})^{\text{т}}.$$

Переходя от векторов $\text{vec}\,A_i$ к векторам $\text{svec}\,A_i$, получаем с учетом того, что матрицы A_i симметричные, $\mathcal{A}^{\text{т}}_{\text{svec}} = \tilde{\mathcal{D}}^{\text{т}}_n(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}^H_{\text{svec}})^{\text{т}}$ или, после транспонирования, $\mathcal{A}_{\text{svec}} = \mathcal{A}^H_{\text{svec}}(\tilde{\mathcal{D}}^{\text{т}}_n(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n)^{\text{т}}$. Так как $(H \otimes H)^{\text{т}} = H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}}$, то отсюда следует (17). Лемма доказана.

Обозначим через $\Theta = D^{\otimes}(\theta)$ кронекеровскую сумму матрицы $D(\theta)$, где θ берется из разложения $V = HD(\theta)H^{\text{т}}$. Матрица Θ диагональная. Обозначим также через $\theta^{\otimes}$ ее диагональ, через $\tilde{\theta}^{\otimes}$ – вектор $\tilde{\theta}^{\otimes} = \mathcal{L}_n\theta^{\otimes}$. Введем в рассмотрение диагональную матрицу $\tilde{\Theta}$ порядка n_Δ с вектором $\tilde{\theta}^{\otimes}$ на диагонали. Для этой матрицы, как можно проверить, справедливо представление $\tilde{\Theta} = \mathcal{L}_n\Theta\mathcal{D}_n$. Если $\theta > 0_n$, то $\tilde{\theta}^{\otimes} > 0_{n_\Delta}$, следовательно, матрица $\tilde{\Theta}$ будет положительно определенной.

Утверждение 4. *Пусть $u \in \mathcal{F}^0_{D,u}$, и пусть для матрицы $V = V(u)$ имеет место разложение $V = HD(\theta)H^{\text{т}}$.* Тогда

$$\mathcal{G}_0(u) = W(u)b, \quad W(u) = [I_m + \mathcal{A}^H_{\text{svec}}\tilde{\Theta}^{-1}(\mathcal{A}^H_{\text{svec}})^{\text{т}}]^{-1}. \tag{18}$$

Доказательство. Из разложения $V = HD(\theta)H^{\text{т}}$ следует, что кронекеровская сумма $V^{\otimes}$ может быть записана в виде

$$V^{\otimes} = (H \otimes H)\Theta(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}}),$$

т.е. $\tilde{V}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n(H \otimes H)\Theta(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n$. Но для любой квадратной матрицы M справедлива формула (см. [6]) $\mathcal{D}_n\mathcal{L}_n(M \otimes M)\mathcal{D}_n = (M \otimes M)\mathcal{D}_n$, а, стало быть, и формула

$$\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n(M \otimes M)\tilde{\mathcal{D}}_n = (M \otimes M)\tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{19}$$

Поэтому

$$\tilde{V}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n(H \otimes H)\Theta(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n = \tilde{\mathcal{L}}_n(H \otimes H)\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{20}$$

У нас $\Theta = D^{\otimes}(\theta)$ является кронекеровской суммой. Следовательно, выполняется равенство $\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n = \Theta^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n$. Отсюда вытекает, что наряду с (20) справедливо представление

$$\tilde{V}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n.$$

Но тогда с помощью формулы $[\tilde{\mathcal{L}}_n(M \otimes M)\tilde{\mathcal{D}}_n]^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_n(M^{-1} \otimes M^{-1})\tilde{\mathcal{D}}_n$, имеющей место для любой неособой матрицы M (см. [6]), получаем

$$(\tilde{V}^{\otimes})^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_n(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n(\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n)^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n.$$

После подстановки выражения (17) с учетом формулы (19) приходим к равенству

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{svec}}(\tilde{V}^{\otimes})^{-1} &= \mathcal{A}^H_{\text{svec}}\tilde{\mathcal{D}}^{\text{т}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n(\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n)^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n = \\ &= \mathcal{A}^H_{\text{svec}}\tilde{\mathcal{D}}^{\text{т}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n(\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n)^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n = \\ &= \mathcal{A}^H_{\text{svec}}\tilde{\mathcal{D}}^{\text{т}}_n\tilde{\mathcal{D}}_n(\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n)^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{A}^H_{\text{svec}}(\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n)^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\text{т}} \otimes H^{\text{т}})\tilde{\mathcal{D}}_n.\end{aligned}$$

Здесь учтено также, что $\tilde{\mathcal{D}}^{\text{т}}_n\tilde{\mathcal{D}}_n = I_{n_\Delta}$.

Найдем теперь выражение для матрицы $\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\mathrm{T}} \otimes H^{\mathrm{T}})\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}}$. Примем во внимание, что все столбцы матрицы $(H^{\mathrm{T}} \otimes H^{\mathrm{T}})\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}}$ соответствуют прямым суммам столбцов симметричных матриц. Тогда, используя (17), получаем

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\mathrm{T}} \otimes H^{\mathrm{T}})\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\mathrm{T}} \otimes H^{\mathrm{T}})\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{D}}_n^{\mathrm{T}}(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}} =$$
$$= \tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\mathrm{T}} \otimes H^{\mathrm{T}})\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{D}}_n^{\mathrm{T}}\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\mathrm{T}} \otimes H^{\mathrm{T}})\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}} =$$
$$= \tilde{\mathcal{L}}_n(H^{\mathrm{T}} \otimes H^{\mathrm{T}})(H \otimes H)\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathcal{L}}_n\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}} = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{svec}}(\tilde{V}^{\otimes})^{-1}\mathcal{A}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{svec}} = \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}}(\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n)^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}} =$$
$$= \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}}D_2(\tilde{\mathcal{L}}_n\Theta\tilde{\mathcal{D}}_n)^{-1}D_2^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}} = \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}}D_2\tilde{\Theta}^{-1}D_2^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}}.$$

Отсюда и из (16), поскольку матрицы D_2 и $\tilde{\Theta}$ диагональные, приходим к (18). Утверждение доказано.

Замечание 1. Зависимость матрицы $W(u)$ от вектора u в (18) опосредованная через матрицу $V = V(u)$ и через разложение $V = HD(\theta)H^{\mathrm{T}}$.

Уточним теперь вид итерационного процесса (10) в случае строго внутренних точек u_k. В качестве стартовой точки u_0 в (10) берем точку $u_0 \in \mathcal{F}^0_{D,u}$. Шаг α_k на каждой итерации подбираем таким образом, чтобы последующая точка u_{k+1} оставалась бы в множестве $\mathcal{F}^0_{D,u}$. Тогда рекуррентная схема (10) с учетом представления (18) для отображения $\mathcal{G}_0(u)$ принимает вид

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k[I_m + \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}}\tilde{\Theta}_k^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}}]^{-1}b, \tag{21}$$

где матрица $\tilde{\Theta}_k$ определяется через собственные значения матрицы $V(u_k)$.

Положим $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$. Согласно (21)

$$\langle b, \Delta u_k\rangle = \alpha_k \left\langle b, [I_m + \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}}\tilde{\Theta}_k^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}})^{\mathrm{T}}]^{-1}b\right\rangle > 0 \tag{22}$$

в любой точке $u_k \in \mathcal{F}^0_{D,u}$. Таким образом, метод (21) является релаксационным.

В [2] было доказано при стандартных предположениях о невырожденности обеих задач (1) и (2) и строгой дополнительности их решений, что метод обладает локальной сходимостью при достаточно малом постоянном шаге α_k.

3. АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ $\mathcal{G}_1(u)$

Из формулы (22) следует, что чем больше берется шаг α_k, тем больше возрастает значение целевой функции в двойственной задаче. Единственным ограничением является только принадлежность следующей точки u_{k+1} допустимому множеству $\mathcal{F}_{D,u}$. Но выбор шага из условия наибольшего увеличения значения целевой функции в (22) может привести к тому, что точка u_{k+1} окажется на границе $\partial\mathcal{F}_{D,u}$ множества $\mathcal{F}_{D,u}$. В этом случае формула (16) для определения значения отображения $\mathcal{G}_0(u)$ в этой точке становится неприемлемой и надо использовать более общее выражение (15). Однако и это более общее выражение не очень годится для использования в итерационном процессе (10), поскольку, например, может выводить за пределы допустимого множества $\mathcal{F}_{D,u}$ или “застревать” в точках, не являющихся решением задачи (2). В связи с этим рассмотрим другое отображение $\mathcal{G}_1(u)$, которое лишено, по крайней мере, первого недостатка.

Предположим, что u является граничной точкой множества $\mathcal{F}_{D,u}$ и $V = V(u)$. Тогда обязательно $s = \mathrm{rank}\, V < n$. Считаем для определенности, что для V справедливо разложение (13). Обозначим через $\theta = [\theta^1, \ldots, \theta^n]^{\mathrm{T}}$ вектор собственных значений V и запишем его как $\theta = [\theta_B, \theta_N]^{\mathrm{T}}$, где $\theta_B = 0_r$, $\theta_N > 0_s$. Матрицу H также можно разбить на две подматрицы: $H = [H_B\ H_N]$. Матрица H_B состоит из первых r столбцов H, а H_N – из последующих s столбцов H.

В соответствии с данным разбиением матрицы H пространство $\mathbb{S}^n$ можно разложить на два линейных подпространства $\mathbb{S}^n_B$ и $\mathbb{S}^n_N$, первое из которых $\mathbb{S}^n_B$ состоит из таких матриц $M \in \mathbb{S}^n$, у которых правый нижний блок нулевой. Второе подпространство $\mathbb{S}^n_N$, напротив, состоит из матриц M, у которых только правый нижний блок порядка s может содержать ненулевые элементы. Эти два подпространства ортогональны друг другу, и любую матрицу $M \in \mathbb{S}^n$ можно представить как $M = M_1 + M_2$, где $M_1 \in \mathbb{S}^n_N$, $M_2 \in \mathbb{S}^n_B$.

Обратимся к матрице V и запишем ее в блочном виде как

$$V = \begin{bmatrix} V_{BB} & V_{BN} \\ V_{NB} & V_{NN} \end{bmatrix},$$

где диагональные блоки V_{BB} и V_{NN} имеют порядки r и s соответственно. Разлагая V в сумму двух матриц V_B и V_N, где $V_B \in \mathbb{S}^n_B$, $V_N \in \mathbb{S}^n_N$, имеем

$$V = V_B + V_N, \quad V_B = \begin{bmatrix} V_{BB} & V_{BN} \\ V_{NB} & 0_{ss} \end{bmatrix}, \quad V_N = \begin{bmatrix} 0_{rr} & 0_{rs} \\ 0_{sr} & V_{NN} \end{bmatrix}.$$

Ниже нас будет интересовать не сама матрица V, а матрица $V^H = H^{\mathrm{T}}VH$. Для данной матрицы V^H получаем: $V^H = V_B^H + V_N^H$, где

$$V_B^H = H^{\mathrm{T}}V_BH = 0_{nn}, \quad V_N^H = H^{\mathrm{T}}V_NH = \begin{bmatrix} 0_{rr} & 0_{rs} \\ 0_{sr} & D(\theta_N) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Аналогично разбиению матрицы V^H можно разбить и все остальные матрицы: $X^H = H^{\mathrm{T}}XH$, $C^H = H^{\mathrm{T}}CH$ и $A_i^H = H^{\mathrm{T}}A_iH$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Например, $X^H = X_B^H + X_N^H$, где

$$X_B^H = \begin{bmatrix} H_B^{\mathrm{T}}XH_B & H_B^{\mathrm{T}}XH_N \\ H_N^{\mathrm{T}}XH_B & 0_{ss} \end{bmatrix}, \quad X_N^H = \begin{bmatrix} 0_{rr} & 0_{rs} \\ 0_{sr} & H_N^{\mathrm{T}}XH_N \end{bmatrix}.$$

Условия оптимальности (4), а именно условие комплементарности и условие допустимости для прямой задачи, могут быть записаны как

$$X_B^H \bullet V_B^H + X_N^H \bullet V_N^H = 0, \tag{24}$$

$$A_{i,B}^H \bullet X_B^H + A_{i,N}^H \bullet X_N^H = b^i, \quad 1 \le i \le m. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что если матрица X^H окажется такой, что для нее выполняются равенства (24), (25) и при этом $X_B^H \succcurlyeq 0$, $X_N^H \succcurlyeq 0$, то $X \succcurlyeq 0$ и, согласно утверждению 2, X – решение прямой задачи (1), а V вместе с соответствующим u – решение двойственной задачи (2).

Потребуем дополнительно, чтобы $X_B^H \succcurlyeq 0$ и $X_N^H \succcurlyeq 0$. Тогда с учетом (23) условие (24) распадается на два равенства:

$$X_B^H \bullet V_B^H = 0, \quad X_N^H \bullet V_N^H = 0, \tag{26}$$

причем первое равенство в силу того, что $V_B^H = 0_{nn}$, заведомо выполняется как тривиальное. Заменим второе равенство в (26) симметризованным матричным произведением $X_N^H \circ V_N^H = 0$ и запишем его в векторной форме:

$$(\tilde{V}_N^H)^{\otimes} \operatorname{svec} X_N^H = 0_{n_\Delta}. \tag{27}$$

Положим далее для сокращения записи $n_N = s_\Delta$, $n_B = n_\Delta - s_\Delta$. Кроме того, первые компоненты векторов типа svec в количестве n_B штук будем обозначать как svec_B, а последующие компоненты в количестве n_N штук – как svec_N. Так как $\mathrm{svec}_B X_N^H = 0_{n_B}$, то равенство (27) сводится к более простому

$$(\tilde{V}_N^H)_N^{\otimes} \operatorname{svec}_N X_N^H = 0_{n_N}, \tag{28}$$

где $(\tilde{V}_N^H)_N^{\otimes}$, – правая нижняя квадратная подматрица порядка n_N матрицы $(\tilde{V}_N^H)^{\otimes}$. Матрица $(\tilde{V}_N^H)_N^{\otimes}$ диагональная ненулевая, причем полного ранга. Обозначим ее $\tilde{\Theta}_N$.

Пусть $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$ — $(m \times n_B)$-матрица, строками которой являются векторы $\mathrm{svec}_B A_i^H$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Аналогично, пусть $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}$ — $(m \times n_N)$-матрица, строками которой являются векторы $\mathrm{svec}_N A_i^H$. С помощью этих матриц равенства из условия допустимости (25) можно записать в виде

$$\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} \mathrm{svec}_B X_B^H + \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N} \mathrm{svec}_N X_N^H = b. \tag{29}$$

Умножим (29) слева на матрицу $(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}$. Тогда приходим к равенству

$$(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} \mathrm{svec}_B X_B^H + (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N} \mathrm{svec}_N X_N^H = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} b. \tag{30}$$

Умножим опять равенство (29) слева на матрицу $(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}$ и сложим получившееся равенство с (28). В результате имеем

$$(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} \mathrm{svec}_B X_B^H + (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N} \mathrm{svec}_N X_N^H + \tilde{\Theta}_N \mathrm{svec}_N X_N^H = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} b. \tag{31}$$

Будем решать систему уравнений (30) и (31) относительно неизвестных $\mathrm{svec}_B X_B^H$ и $\mathrm{svec}_N X_N^H$. Система (30), (31) есть система n_Δ-линейных уравнений относительно n_Δ неизвестных. В матричном виде она записывается как

$$\begin{bmatrix} (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} & (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N} \\ (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} & (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N} + \tilde{\Theta}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{svec}_B X_B^H \\ \mathrm{svec}_N X_N^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} b \\ (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} b \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Если матрица системы

$$\Phi = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} & (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N} \\ (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} & (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N} + \tilde{\Theta}_N \end{bmatrix} \tag{33}$$

неособая, то решение системы единственное и может быть выражено через подматрицы матрицы Φ.

Пусть блоки матрицы Φ обозначаются следующим образом:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix},$$

где $\Phi_{12} = \Phi_{21}^{\mathrm{T}}$ и

$$\Phi_{11} = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}, \quad \Phi_{12} = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}, \quad \Phi_{22} = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N} + \tilde{\Theta}_N.$$

Так как $\tilde{\Theta}_N \succ 0$, то матрица Φ_{22} положительно определенная, поэтому вся матрица Φ будет неособой, если дополнение по Шуру $\mathfrak{Q}$ матрицы Φ_{22} также будет неособой матрицей. Имеем согласно определению $\mathfrak{Q} = \Phi_{11} - \Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}$. Кроме того, согласно формуле Шермана—Моррисона—Вудбери

$$\Phi_{22}^{-1} = \tilde{\Theta}_N^{-1} - \tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}[I_m + G_N]^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\tilde{\Theta}_N^{-1}, \tag{34}$$

где через G_N обозначена матрица

$$G_N = \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}. \tag{35}$$

Выясним условия, при которых матрица $\mathfrak{Q}$ неособая. Предварительно введем новое определение.

Определение 2. Точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ называется *сильно невырожденной*, если у матрицы $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$, где H — ортогональная матрица из разложения (13) для $V(u)$, столбцы линейно независимы, т.е. $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$ имеет полный ранг по столбцам.

Непосредственно из определения 2 следует, что если точка u сильно невырожденная, то обязательно $n_B \leqslant m$. В случае, когда все точки из $\mathcal{F}_{D,u}$ сильно невырожденные, о задаче (2) будем говорить как о сильно невырожденной.

Утверждение 5. *Пусть точка u сильно невырожденная. Тогда она невырожденная.*

Доказательство. Размерность подпространства $\mathbb{S}^n_B \subset \mathbb{S}^n$ равна n_B. Отсюда в силу того, что ранг по строкам матрицы $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$ совпадает с ее рангом по столбцам n_B, получаем, что матрицы $A^H_{1,B}, \ldots, A^H_{m,B}$ порождают все подпространство $\mathbb{S}^n_B$. Тем более подматрицы $A_i^{H_B} = H_B^{\mathrm{T}} A_i H_B$ матриц $A^H i$, B, $1 \leqslant i \leqslant m$, порождают пространство $\mathbb{S}^r$. А это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ была невырожденной (см. [8]). Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Пусть точка u сильно невырожденная. Тогда $\mathcal{Q}$ — неособая матрица.*

Доказательство. Подставляя соответствующие выражения для матриц Φ_{12} и Φ_{22}^{-1}, получаем

$$\mathcal{Q} = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}[I_m - G_N + G_N(I_m + G_N)^{-1}G_N]\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}.$$

Но

$$\begin{aligned} I_m - G_N + G_N(I_m + G_N)^{-1}G_N &= I_m - G_N + G_N(I_m + G_N)^{-1}(I_m + G_N - I_N) = \\ &= I_m - G_N(I_m + G_N)^{-1} = (I_m + G_N)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{Q} = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}[I_m + G_N]^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}. \tag{36}$$

Из (36) видно, что матрица $\mathcal{Q}$ будет положительно определенной, если столбцы матрицы $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$ линейно независимы, т.е. когда $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$ имеет полный ранг по столбцам. Утверждение доказано.

Утверждение 7. *Пусть точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ сильно невырожденная. Тогда матрица Φ^{-1} имеет блочный вид*

$$\Phi^{-1} = \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} \tag{37}$$

с блоками

$$\Psi_{11} = \{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}, \tag{38}$$

$$\Psi_{21} = -\tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{22} = -\tilde{\Theta}_N^{-1} - \tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\tilde{\Theta}_N^{-1} + \tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} \times \\ \times \{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\tilde{\Theta}_N^{-1}, \end{aligned} \tag{40}$$

причем $\Psi_{12} = \Psi_{21}^{\mathrm{T}}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Фробениуса. Согласно этой формуле

$$\begin{gathered} \Psi_{22} = \Phi_{22}^{-1} + \Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}\mathcal{Q}^{-1}\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}, \quad \Psi_{11} = \mathcal{Q}^{-1}, \\ \Psi_{21} = -\Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}\mathcal{Q}^{-1}, \quad \Psi_{12} = -\mathcal{Q}^{-1}\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1} = \Psi_{12}^{\mathrm{T}}, \end{gathered}$$

причем для $\mathcal{Q}$ справедливо выражение (36).

Проведем необходимые выкладки, учитывая (34) и (35). Вычислим сначала

$$\begin{aligned} \Phi_{22}^{-1}\Phi_{21} &= \{\tilde{\Theta}_N^{-1} - \tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}[I_m + \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}]^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}\tilde{\Theta}_N^{-1}\}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} = \\ &= \tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}\{I_m - (I_m + G_N)^{-1}G_N\}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} = \tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}. \end{aligned}$$

Подставляя данное выражение, получаем

$$\Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}\mathcal{Q}^{-1} = \tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}$$

и

$$\begin{aligned} \Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}\mathcal{Q}^{-1}\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1} = \tilde{\Theta}_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1} \times \\ \times (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\tilde{\Theta}_N^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\Psi_{22} = \tilde\Theta_N^{-1} - \tilde\Theta_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\tilde\Theta_N^{-1} + \tilde\Theta_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\times$$
$$\times\{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\tilde\Theta_N^{-1},$$

что совпадает с (40).

После проведения дальнейших вычислений получаем выражения (38) и (39). Доказательство утверждения завершено.

Определим теперь векторы $\mathrm{svec}_B X_B^H$ и $\mathrm{svec}_N X_N^H$. Чтобы их представить в более простом виде, введем обозначения

$$W_N = (I_m + G_N)^{-1},\quad G_B = (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} W_N \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B},\quad W_B = \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} G_B^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}. \tag{41}$$

Принимая во внимание представление (37) матрицы Φ^{-1}, после соответствующих выкладок получаем

$$\mathrm{svec}_N X_N^H = \tilde\Theta_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\{I_m + \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}\times$$
$$\times(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}G_N - \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}\}b.$$

С помощью введенных обозначений (41) вектор $\mathrm{svec}_N X_N^H$ можно записать как

$$\mathrm{svec}_N X_N^H = \tilde\Theta_N^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N})^{\mathrm{T}}[W_N - W_N W_B W_N]b.$$

Для вектора $\mathrm{svec}_B X_B^H$ получаем аналогичным образом

$$\mathrm{svec}_B X_B^H = -\{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}G_N b +$$
$$+\{(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}(I_m + G_N)^{-1}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\}^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}b$$

или, опять используя введенные матрицы,

$$\mathrm{svec}_B X_B^H = G_B^{-1}(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} W_N b. \tag{42}$$

После подстановки найденных $\mathrm{svec}_B X_B^H$ и $\mathrm{svec}_N X_N^H$ в левую часть равенства (29) приходим к тому, что данная левая часть имеет вид

$$\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\mathrm{svec}_B X_B^H + \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_N}\mathrm{svec}_N X_N^H = W_B W_N b + G_N[W_N - W_N W_B W_N]b.$$

Так как $G_N W_N = G_N(I_m + G_N)^{-1} = I_m - W_N$, то само равенство (29) запишется следующим образом:

$$[W_N - W_N W_B W_N]b = 0_m, \tag{43}$$

оно фактически является системой m уравнений относительно m переменных – компонент вектора двойственных переменных u.

Поскольку точка $u \in \partial\mathcal{F}_{D,u}$ взята произвольной, то понятно, что в общем случае векторы $\mathrm{svec}_B X_B^H$ и $\mathrm{svec}_N X_N^H$ не удовлетворяют равенству (29) и получается невязка. Теперь делать один шаг методом простой итерации, чтобы устранить невязку, мы должны не разрешая уравнение (14), а разрешая уже уравнение (43). В качестве алгоритмического отображения $\mathcal{G}(u)$ в итерационном процессе (10) брать не $\mathcal{G}_0(u)$, а следующее отображение:

$$\mathcal{G}_1(u) = [W_N - W_N W_B W_N]b, \tag{44}$$

являющееся левой частью уравнения (43). Снова обратим внимание, что на самом деле в правой части (44) от u зависит только диагональная матрица $\tilde\Theta_N$, составленная с помощью собственных значений матрицы $V(u)$ и входящая в матрицы W_B и W_N.

4. НАПРАВЛЕНИЕ ИЗ МИНИМАЛЬНОЙ ГРАНИ

Исследуем свойства отображения $\mathcal{G}_1(u)$ в точках $u \in \partial\mathcal{F}_{D,u}$. Обратимся сначала к минимальной грани множества $\mathcal{F}_{D,V}$, содержащей точку $V = V(u)$. Согласно определению (см., например, [10]), минимальная грань конуса $\mathbb{S}^n_+$, проходящая через точку $V \in \mathbb{S}^n_+$, определяется как

$$\Gamma_{\min}(V; \mathbb{S}^n_+) = \{V_1 \in \mathbb{S}^n_+ : \mathcal{R}(V_1) \subseteq \mathcal{R}(V)\},$$

где $\mathcal{R}(V)$ – пространство столбцов матрицы V.

Обозначим далее через $\mathcal{V}_D$ множество $\mathcal{V}_D = \{V \in \mathbb{S}^n : V = V(u),\ u \in \mathbb{R}^m\}$. Множество $\mathcal{V}_D$ аффинное. Так как допустимое множество $\mathcal{F}_{D,V}$ является пересечением конуса $\mathbb{S}^n_+$ и $\mathcal{V}_D$, то минимальная грань множества $\mathcal{F}_{D,V}$ есть пересечение минимальной грани $\Gamma_{\min}(V; \mathbb{S}^n_+)$ и аффинного множества $\mathcal{V}_D$, т.е. имеет вид

$$\Gamma_{\min}(V; \mathcal{F}_{D,V}) = \Gamma_{\min}(V; \mathbb{S}^n_+) \cap \mathcal{V}_D.$$

Утверждение 8. *Пусть $u \in \partial\mathcal{F}_{D,u}$, и пусть для матрицы $V = V(u)$ справедливо представление* (13) *с ортогональной матрицей H. Тогда направление $\Delta u = \mathcal{G}_1(u)$ в u-пространстве определяет направление $\Delta V = -\sum_{i=1}^m (\Delta u)^i A_i$ в V-пространстве, которое принадлежит минимальной грани $\Gamma_{\min}(V; \mathcal{F}_{D,V})$.*

Доказательство. Согласно формуле (44), задающей отображение $\mathcal{G}_1(u)$, направление Δu оказывается таким, что

$$(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \Delta u = 0_{n_B}, \tag{45}$$

т.е. матрица V^H_B при движении вдоль направления Δu не меняется. Может меняться только матрица V^H_N, но это и означает, что в V-пространстве движение происходит только в минимальной грани $\Gamma_{\min}(V; \mathcal{F}_{D,V})$, которой принадлежит точка $V = V(u)$. Утверждение доказано.

Для матрицы $V = V(u)$, для которой справедливо разложение (13), пространство столбцов $\mathcal{R}(V)$ совпадает с пространством столбцов матрицы H_N. Согласно утверждению 8 при движении вдоль направления $\Delta u = \mathcal{G}_1(u)$ может измениться только матрица V^H_N.

Рассмотрим вопрос о том, какие точки из $\partial\mathcal{F}_{D,u}$ могут оказаться неподвижными для отображения $\mathcal{G}_1(u)$, т.е. такими, что $\mathcal{G}_1(u) = 0_m$.

Лемма 2. *Пусть точка $u \in \partial\mathcal{F}_{D,u}$ сильно невырожденная. Тогда u будет неподвижной точкой отображения $\mathcal{G}_1(u)$ в том и только в том случае, когда вектор b принадлежит линейному подпространству, порожденному столбцами матрицы $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$.*

Доказательство. Матрица W_N является положительно определенной, следовательно, существует квадратный корень $W_N^{1/2}$ из нее. С учетом этого обстоятельства отображение $\mathcal{G}_1(u)$ можно записать также как

$$\mathcal{G}_1(u) = W_N^{1/2}[I_m - \bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B}((\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{-1}(\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}]\bar{b}, \tag{46}$$

где $\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B} = W_N^{1/2}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$, $\bar{b} = W_N^{1/2}b$.

Матрица, стоящая в квадратных скобках в (46), есть матрица ортогонального проектирования. Она проектирует на ортогональное дополнение к подпространству $\mathcal{L}_B$, порожденному столбцами матрицы $\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B}$. Поэтому $\mathcal{G}_1(u) = 0_m$ в том и только в том случае, когда вектор $\bar{b}$ принадлежит подпространству $\mathcal{L}_B$, т.е. когда выполняется равенство $b = \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\lambda$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}^{n_B}$. Лемма доказана.

Граням множества $\mathcal{F}_{D,V} \subset \mathbb{S}^n$ соответствуют грани множества $\mathcal{F}_{D,u} \subset \mathbb{R}^m$, причем их размерности совпадают. Минимальная грань $\Gamma_{\min}(V; \mathcal{F}_{D,V})$ нулевой размерности является крайней точкой множества $\mathcal{F}_{D,V}$. Точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ будет крайней точкой $\mathcal{F}_{D,u}$, если крайней будет соответствующая точка $V(u)$. Для того чтобы точка $V(u)$ из $\mathcal{F}_{D,V}$ была крайней, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A^H_{i,B}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, были линейно независимы. Отсюда следует неравенство на ранг матрицы $V(u)$, а именно $m \leqslant n_B$ (см., например, [10]). Сильно невырожденная точка может оказаться крайней только тогда, когда $m = n_B$. Это накладывает определенное ограничение на количество равенств в задаче (1). Крайние точки $u \in \mathcal{F}_{D,u}$, в которых $m = n_B$, в дальнейшем называются *регулярными*, в противном случае, когда $m < n_B$, они называются *нерегулярными*.

Утверждение 9. *Пусть $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ является сильно невырожденной регулярной крайней точкой $\mathcal{F}_{D,u}$. Тогда u — неподвижная точка отображения $\mathcal{G}_1(u)$.*

Доказательство. Так как u — крайняя точка, то строки матрицы $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$ линейно независимы. Это означает, что матрица $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$ имеет ранг m и ее столбцы в количестве m штук порождают пространство $\mathbb{R}^m$. Поэтому обязательно вектор b принадлежит подпространству, натянутому на столбцы матрицы $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$. По лемме 2 это означает, что u — неподвижная точка отображения $\mathcal{G}_1(u)$. Утверждение доказано.

Замечание 2. Если крайняя точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ нерегулярная, то она заведомо не может быть сильно невырожденной. В этом случае столбцы матрицы $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$, которых более чем m штук, по-прежнему порождают все пространство $\mathbb{R}^m$ и вектор b может быть выражен в виде линейной комбинации этих столбцов, причем, возможно, неединственным способом. Пусть $b = \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\, \mathrm{svec}_B\, \tilde{X}^H_B$ для некоторой матрицы $\tilde{X}^H$. Но тогда, полагая $\tilde{X}^H_N$ нулевой матрицей, получаем, что векторы $\mathrm{svec}_B \tilde{X}^H_B$ и $\mathrm{svec}_N \tilde{X}^H_N = 0_r$ удовлетворяют основному уравнению (29).

Далее рассматриваем случай только регулярных крайних точек.

Утверждение 10. *Пусть u — сильно невырожденная регулярная крайняя точка $\mathcal{F}_{D,u}$ и матрица $X^H_B = X^H_B(u)$ положительно полуопределенная. Тогда u вместе с $V(u)$ есть решение двойственной задачи.*

Доказательство. При сделанных предположениях согласно утверждению 9 u является неподвижной точкой отображения $\mathcal{G}_1(u)$. Поэтому по лемме 2 вектор b принадлежит пространству столбцов матрицы ($\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$), которая, поскольку $n_B = m$, есть квадратная неособая матрица. Тогда можно указать такую матрицу $X^H \in \mathbb{S}^n$, что у соответствующего вектора $\mathrm{svec}\, X^H$ последние n_N компоненты все нулевые. При этом выполняется ($\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$)$\mathrm{svec}_B X^H = b$, т.е. $X^H = X^H_B$. Понятно, что в этом случае векторы $\mathrm{svec}_B X^H$ и $\mathrm{svec}_N X^H = 0_{n_N}$ будут решениями системы (32), которое всегда единственное.

Матрица $X^H = X^H_B$ положительно полуопределенная, как и матрица V^H. Кроме того, имеем $X^H \bullet V^H = 0$. Поэтому в силу условий оптимальности (4) пара положительно полуопределенных матриц X и $V = V(u)$ будет решениями соответственно задач (1) и (2). Утверждение доказано.

Если сильно невырожденная точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ не является неподвижной точкой отображения $\mathcal{G}_1(u)$, то можно сдвинуться из этой точки с помощью направления Δu, задаваемого этим отображением, причем с увеличением значения целевой функции в двойственной задаче (2).

Утверждение 11. *Пусть сильно невырожденная точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ не является неподвижной точкой отображения $\mathcal{G}_1(u)$. Тогда $\langle b, \mathcal{G}_1(u)\rangle > 0$.*

Доказательство следует из представления (46) для отображения $\mathcal{G}_1(u)$.

В заключение этого раздела отметим, что если точка u вутренняя, т.е. $u \in \mathcal{F}^0_{D,u}$, то матрица H_N совпадает со всей матрицей H, матрица H_B при этом пропадает. Это приводит к тому, что отображение $\mathcal{G}_1(u)$ переходит в отображение $\mathcal{G}_0(u)$ вида (16).

5. АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ $\mathcal{G}_2(u)$

Направление Δu, задаваемое отображением $\mathcal{G}_1(u)$, обладает важным свойством: оно не выводит за пределы допустимого множества $\mathcal{F}_{D,u}$. Однако согласно утверждению 8, если траектория определяется только этим отображением, то она остается в некоторой грани $\mathcal{F}_{D,u}$, даже если эта грань не содержит решение задачи. Поэтому нужно более универсальное направление, которое позволило бы покидать такие грани. Рассмотрим один возможный подход к построению данного направления.

Считаем, что u является сильно невырожденной граничной точкой множества $\mathcal{F}_{D,u}$. Считаем также, что для $V = V(u)$ справедливо разложение (13). Обратимся к вектору $\text{svec}_B X_B^H$ из (42). Ему соответствует симметричная матрица X_B^H порядка n, принадлежащая подпространству $\mathbb{S}_B^n \subset \mathbb{S}^n$. У этой матрицы $\text{svec}_N X_B^H = 0_{n_N}$. Кроме того, для X_B^H, как для каждой симметричной матрицы, справедливо разложение $X_B^H = QD(\eta)Q^{\text{т}}$ или $X_B^H = \sum_{i=1}^n \eta_i q_i q_i^{\text{т}}$, где η_i и $q_i \in \mathbb{R}^n$ – соответственно собственные значения и собственные векторы матрицы X_B^H. Ортогональная матрица Q составлена из собственных векторов q_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, вектор $\eta \in \mathbb{R}^n$ – из собственных значений. Но тогда в силу формулы (7)

$$\text{svec}\, X_B^H = \tilde{\mathcal{L}}_n \,\text{vec}\, X_B^H = \tilde{\mathcal{L}}_n \sum_{i=1}^n \eta_i \,\text{vec}\, q_i q_i^{\text{т}} = \tilde{\mathcal{L}}_n \sum_{i=1}^n \eta_i (q_i \otimes q_i).$$

Напомним также, что для вектора $\text{svec}_B X_B^H$ справедливо выражение (42).

Возможны два случая, зависящие от наличия или отсутствия отрицательных собственных значений у матрицы X_B^H.

Утверждение 12. *Пусть все собственные значения матрицы X_B^H неотрицательные. Тогда X_B^H является блочно-диагональной матрицей с неотрицательно определенным левым верхним блоком.*

Доказательство. Поскольку X_B^H есть симметричная матрица окаймления, то при наличии у нее ненулевых внедиагональных блоков у нее обязательно имелись бы собственные значения разных знаков (см., например, [11]). Поэтому случай, когда все собственные значения неотрицательные, возможен только тогда, когда внедиагональные блоки нулевые, а левый верхний блок является неотрицательно определенной матрицей. Утверждение доказано.

Обратимся теперь ко второму случаю, когда у матрицы X_B^H имеются отрицательные собственные значения. Пусть собственное значение $\eta_j < 0$ и пусть q_j – соответствующий этому отрицательному собственному значению собственный вектор. Введем в рассмотрение матрицу единичного ранга

$$T_j = \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j)(q_j^{\text{т}} \otimes q_j^{\text{т}}) \tilde{\mathfrak{D}}_n^B,$$

где $\tilde{\mathcal{L}}_n^B$ – верхняя $(n_B \times n^2)$-подматрица матрицы $\tilde{\mathcal{L}}_n$. Аналогично, $\tilde{\mathfrak{D}}_n^B$ – левая $(n^2 \times n_{\text{B}})$-подматрица матрицы $\tilde{\mathfrak{D}}_n$.

Зададимся некоторым $\sigma > 0$ и добавим T_j в матрицу (33) системы линейных уравнений (32), поместив ее в левую верхнюю блочную подматрицу. Теперь матрица (33) принимает вид

$$\begin{bmatrix} (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_B})^{\text{т}} \mathcal{A}^H_{\text{svec}_B} + \sigma T_j & (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_B})^{\text{т}} \mathcal{A}^H_{\text{svec}_N} \\ (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_N})^{\text{т}} \mathcal{A}^H_{\text{svec}_B} & (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_N})^{\text{т}} \mathcal{A}^H_{\text{svec}_N} + \tilde{\Theta}_N \end{bmatrix},$$

а сама система (32) перепишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_B})^{\text{т}} \mathcal{A}^H_{\text{svec}_B} + \sigma T_j & (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_B})^{\text{т}} \mathcal{A}^H_{\text{svec}_N} \\ (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_N})^{\text{т}} \mathcal{A}^H_{\text{svec}_B} & (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_N})^{\text{т}} \mathcal{A}^H_{\text{svec}_N} + \tilde{\Theta}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{svec}_B\, X_B^H \\ \text{svec}_N\, X_N^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_B})^{\text{т}} b \\ (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_N})^{\text{т}} b \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Решение системы (47) с такой матрицей отличается от ее решения с исходной матрицей (33). Вместо матрицы $\mathfrak{Q}$ вида (36) появится матрица

$$\mathfrak{Q} = \sigma T_j + (\mathcal{A}^H_{\text{svec}_B})^{\text{т}} W_N \mathcal{A}^H_{\text{svec}_B} = \sigma T_j + G_B,$$

обращая которую с помощью формулы Шермана–Моррисона–Вудбери, получаем

$$\mathfrak{Q}^{-1} = G_B^{-1} - c(\sigma) G_B^{-1} \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j)(q_j^{\text{т}} \otimes q_j^{\text{т}}) \tilde{\mathfrak{D}}_n^B G_B^{-1} = G_B^{-1} - c(\sigma) G_B^{-1} T_j G_B^{-1}.$$

Здесь $c(\sigma)$ обозначает константу:

$$c(\sigma) = \frac{1}{1 + \sigma(q_j^{\mathrm{T}} \otimes q_j^{\mathrm{T}})\tilde{\mathcal{D}}_n^B G_B^{-1} \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j)} > 0.$$

Введем еще одно обозначение: $P_j = G_B^{-1} T_j G_B^{-1}$. Тогда отображение $\mathcal{G}_1(u)$ трансформируется в

$$\mathcal{G}_2(u) = \{W_N - W_N \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}[G_B^{-1} - c(\sigma)P_j](\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} W_N\} b.$$

Если, упрощая запись, положить $\tilde{W}_B^j = \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} P_j (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}$, то получаем, что

$$\mathcal{G}_2(u) = \mathcal{G}_1(u) + c(\sigma) W_N \tilde{W}_B^j W_N b. \tag{48}$$

Утверждение 13. *Пусть точка $u \in \partial \mathcal{F}_{D,u}$ является сильно невырожденной. Пусть, кроме того, у матрицы X_B^H существует собственный вектор q_j, соответствующий собственному значению $\eta_j < 0$. Тогда отображение $\mathcal{G}_2(u)$ определяет направление перемещения $\Delta u = \mathcal{G}_2(u)$ в u-пространстве, которому соответствует направление $\Delta V_B^H = -\sum_{i=1}^m (\Delta u)^i (A_i)_B^H$ в подпространстве $\mathbb{S}_B^n$, равное*

$$\Delta V_B^H = -c(\sigma)\eta_j (Q_j)_B, \tag{49}$$

где $Q_j = q_j q_j^{\mathrm{T}}$.

Доказательство. Проведем векторизацию матрицы ΔV_B^H относительно первых n_B компонент: $\mathrm{svec}_B \Delta V_B^H = -(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} \mathcal{G}_2(u)$ или, поскольку справедливо представление (48) и равенство (45),

$$\begin{aligned} \mathrm{svec}_B \Delta V_B^H &= -c(\sigma)(\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} W_N \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B} P_j (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} W_N b = -c(\sigma) G_B G_B^{-1} T_j G_B^{-1} (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} W_N b = \\ &= -c(\sigma) T_j G_B^{-1} (\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}} W_N b = -c(\sigma) T_j \,\mathrm{svec}_B X_B^H. \end{aligned} \tag{50}$$

У вектора $\mathrm{svec} X_B^H$ последние n_N компоненты нулевые. Поэтому

$$\tilde{\mathcal{D}}_n^B \,\mathrm{svec}_B X_B^H = \tilde{\mathcal{D}}_n \,\mathrm{svec}\, X_B^H = \mathrm{vec}\, X_B^H.$$

С учетом этого равенства, а также равенства $(e_j^{\mathrm{T}} \otimes e_j^{\mathrm{T}}) \,\mathrm{vec}\, D(\eta) = \eta_j$, имеем

$$\begin{aligned} T_j \,\mathrm{svec}_B X_B^H &= \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j)(q_j^{\mathrm{T}} \otimes q_j^{\mathrm{T}}) \tilde{\mathcal{D}}_n^B \,\mathrm{svec}_B X_B^H = \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j)(q_j^{\mathrm{T}} \otimes q_j^{\mathrm{T}}) \,\mathrm{vec}\, X_B^H = \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j)(q_j^{\mathrm{T}} \otimes q_j^{\mathrm{T}})(Q \otimes Q) \,\mathrm{vec}\, D(\eta) = \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j)(q_j^{\mathrm{T}} Q) \otimes (q_j^{\mathrm{T}} Q) \,\mathrm{vec}\, D(\eta) = \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j)(e_j^{\mathrm{T}} \otimes e_j^{\mathrm{T}}) \,\mathrm{vec}\, D(\eta) = \eta_j \tilde{\mathcal{L}}_n^B (q_j \otimes q_j) = \eta_j \,\mathrm{svec}_B Q_j. \end{aligned} \tag{51}$$

Из (50) и (51) приходим к выводу, что справедлива формула (49). Утверждение доказано.

Следствие 1. *Если матрица Q_j принадлежит грани $\Gamma^*_{\min}(V^H; \mathbb{S}^n_+)$, то ΔV_B^H — положительно полуопределенная матрица.*

Доказательство. Так как пространство столбцов $\mathcal{R}(V^H)$ матрицы V^H является подпространством $\mathbb{R}^n_N = \{y \in \mathbb{R}^n : y^i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, то сопряженная грань $\Gamma^*_{\min}(V^H; \mathbb{S}^n_+)$ состоит из матриц, у которых пространство столбцов совпадает с подпространством $\mathbb{R}^n_B = \{y \in \mathbb{R}^n : y^i = 0,\ r < i \leqslant n\}$. Поэтому, если $Q_j \in \Gamma^*_{\min}(V^H; \mathbb{S}^n_+)$, то обязательно у вектора q_j последние s компонент нулевые. Отсюда следует, что матрица Q_j является блочной диагональной матрицей, у которой только левый верхний блок порядка r ненулевой, причем, как нетрудно видеть, этот блок будет положительно полуопределенной матрицей. Таким образом, матрица ΔV_B^H согласно формуле (49) также будет положительно полуопределенной матрицей. Следствие установлено.

Так как $\mathcal{G}_1(u) = 0_m$ в любой сильно невырожденной регулярной крайней точке $u \in \mathcal{F}_{D,u}$, то, согласно (48), $\mathcal{G}_2(u) = c(\sigma) W_N \tilde{W}_B^j W_N b$ в таких точках.

Модифицированное направление Δu, задаваемое отображением $\mathcal{G}_2(u)$, является комбинированным, в нем сочетается направление, лежащее в минимальной грани, и направление, выводящее за пределы этой грани. Величина $c(\sigma)$ играет роль весового коэффициента.

6. ВЫБОР ШАГА И СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим вопрос о выборе шага в итерационном процессе (10), в котором

$$\mathcal{G}(u) = \begin{cases} \mathcal{G}_0(u), & u \in \mathcal{F}^0_{D,u}, \\ \mathcal{G}_1(u) \quad \text{или} \quad \mathcal{G}_2(u), & u \in \partial\mathcal{F}_{D,u}. \end{cases}$$

Этот выбор осуществляется на основе идеологии наискорейшего спуска и, разумеется, зависит от используемого в точке u конкретного отображения $\mathcal{G}_i(u)$, $i = 0, 1, 2$. Поскольку, как уже отмечалось, отображение $\mathcal{G}_1(u)$ переходит в отображение $\mathcal{G}_0(u)$, когда $u \in \mathcal{F}^0_{D,u}$, то фактически нам достаточно проанализировать только два случая: $\mathcal{G}(u) = \mathcal{G}_1(u)$ и $\mathcal{G}(u) = \mathcal{G}_2(u)$. Брать отображение $\mathcal{G}_1(u)$ или $\mathcal{G}_2(u)$, определяется наличием или отсутствием у матрицы X^H_B отрицательных собственных значений.

Формуле пересчета (10) соответствует формула пересчета слабых двойственных переменных $V^H(u)$ в пространстве $\mathbb{S}^n$, а именно,

$$V^H_{k+1} = V^H_k - \alpha_k \Delta V^H_k, \quad \Delta V^H_k = \sum_{i=1}^m \Delta u^i_k A^H_i. \tag{52}$$

Шаг α_k берется максимально возможным при условии, что матрица V_{k+1} будет положительно полуопределенной. Это приводит к наибольшему возрастанию значения целевой функции в двойственной задаче (2) на текущей итерации.

Пусть каждая из матриц A_i разбита на четыре блока

$$A_i = \begin{bmatrix} A^{BB}_i & A^{BN}_i \\ A^{NB}_i & A^{NN}_i \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le m,$$

где порядки диагональных блоков A^{BB}_i и A^{NN}_i равны соответственно r и s.

Наряду с разбиением матриц A_i разобьем матрицы V^H_k, V^H_{k+1} и ΔV^H_k. Матрица V^H_k в текущей точке $u_k \in \partial\mathcal{F}_{D,u}$ имеет следующий блочный вид:

$$V^H_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega^{NN} \end{bmatrix}, \quad \Omega^{NN} = D(\theta^N_k),$$

где θ^N_k – вектор, составленный из положительных собственных значений матрицы $V_k = V(u_k)$.

Представим матрицу-приращение ΔV^H_k как

$$\Delta V^H_k = \begin{bmatrix} \Delta\Omega^{BB} & \Delta\Omega^{BN} \\ \Delta\Omega^{NB} & \Delta\Omega^{NN} \end{bmatrix},$$

в которой $\Delta\Omega^{NB} = (\Delta\Omega^{BN})^{\mathrm{T}}$ и

$$\Delta\Omega^{BB} = \sum_{i=1}^m A^{BB}_i \mathcal{G}^i(u_k), \quad \Delta\Omega^{BN} = \sum_{i=1}^m A^{BN}_i \mathcal{G}^i(u_k), \quad \Delta\Omega^{NN} = \sum_{i=1}^m A^{NN}_i \mathcal{G}^i(u_k). \tag{53}$$

Утверждение 14. *Пусть $u_k \in \partial\mathcal{F}_{D,u}$, и пусть $\mathcal{G}(u_k) = \mathcal{G}_1(u_k)$. Тогда*

$$V^H_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D(\theta^N_k) - \alpha_k \Delta\Omega^{NN} \end{bmatrix}, \tag{54}$$

где $\Delta\Omega^{NN}$ *– матрица, имеющая векторное представление*

$$\operatorname{svec}\Delta\Omega^{NN} = (\mathcal{A}^{H}_{\operatorname{svec}_N})^{\mathrm{T}}\mathcal{G}_1(u) = (\mathcal{A}^{H}_{\operatorname{svec}_N})^{\mathrm{T}}[W_N - W_N W_B W_N]b. \tag{55}$$

Доказательство. Если в качестве алгоритмического отображения $\mathcal{G}(u)$ берется отображение $\mathcal{G}_1(u)$, то в силу (45) $\Delta\Omega^{BB} = 0_{rr}$ и $\Delta\Omega^{BN} = (\Delta\Omega^{NB})^{\mathrm{T}} = 0_{rs}$. Вид матрицы $\Delta\Omega^{NN}$ опять же следует из общих формул пересчета (52) матриц V^H. Утверждение обосновано.

В случае, когда точка $u_k \in \partial\mathcal{F}_{D,u}$ является крайней, возможен переход в новую точку. При этом из формулы (54) видно, матрица V^H_{k+1} будет оставаться положительно полуопределенной при α_k достаточно малом. Максимально возможный шаг $\alpha_{\max}$ (именно он берется в конечном счете в качестве α_k) определится из условия, при котором у симметричной матрицы $D(\theta^N_k) - \alpha\Delta\Omega^{NN}$ какое-то собственное значение становится равным нулю. Найти $\alpha_{\max}$ можно, например, используя конгруэнтное приведение двух симметричных матриц, одна из которых положительно определена к диагональному виду.

Рассмотрим теперь случай, когда в качестве отображения $\mathcal{G}(u)$ берется отображение $\mathcal{G}_2(u)$.

Утверждение 15. *Пусть* $u_k \in \partial\mathcal{F}_{D,u}$, *и пусть* $\mathcal{G}(u_k) = \mathcal{G}_2(u_k)$. *Тогда можно указать* $\bar{\alpha}_k > 0$ *такое, что* $V_{k+1} \succcurlyeq 0$ *для любого* $0 < \alpha_k \leqslant \bar{\alpha}_k$.

Доказательство. Разобьем вектор q_j, входящий в отображение $\mathcal{G}_2(u)$, на два подвектора:

$$q_j = \begin{bmatrix} q_j^B \\ q_j^N \end{bmatrix}, \quad q_j^B \in \mathbb{R}^r, \quad q_j^N \in \mathbb{R}^s.$$

Тогда согласно (49) $\Delta\Omega^{BB} = c(\sigma)\eta_j q_j^B (q_j^B)^{\mathrm{T}}$ и $\Delta\Omega^{BN} = (\Delta\Omega^{NB})^{\mathrm{T}} = c(\sigma)\eta_j q_j^B (q_j^N)^{\mathrm{T}}$. Векторное представление (55) матрицы $\Delta\Omega^{NN}$ заменяется на следующее:

$$\operatorname{svec}\Delta\Omega^{NN} = (\mathcal{A}^{H}_{\operatorname{svec}_N})^{\mathrm{T}}\mathcal{G}_2(u_k) = (\mathcal{A}^{H}_{\operatorname{svec}_N})^{\mathrm{T}}\mathcal{G}_1(u_k) + c(\sigma)(\mathcal{A}_{\operatorname{svec}_N})^{\mathrm{T}} W_N \tilde{W}^j_B W_N b. \tag{56}$$

Положим $\beta_j = -c(\sigma)\eta_j > 0$. Беря $\mathcal{G}(u_k) = \mathcal{G}_2(u_k)$, получаем

$$V^H_{k+1} = \begin{bmatrix} \alpha_k\beta_j q_j^B (q_j^B)^{\mathrm{T}} & \alpha_k\beta_j q_j^B (q_j^N)^{\mathrm{T}} \\ \alpha_k\beta_j q_j^N (q_j^B)^{\mathrm{T}} & D(\theta^N_k) - \alpha_k\Delta\Omega^{NN} \end{bmatrix},$$

где матрица $\Delta\Omega^{NN}$ определяется своим векторным представлением (56). Правая нижняя матрица $Y^{NN}_k = D(\theta^N_k) - \alpha_k\Delta\Omega^{NN}$ будет оставаться положительно определенной при α_k достаточно малом. Поэтому вся матрица V^H_{k+1} будет положительно полуопределенной, если дополнение по Шуру матрицы Y^{NN}_k, т.е. матрица

$$\bar{Y}^{BB}_k = \alpha_k\beta_j\{q_j^B (q_j^B)^{\mathrm{T}} - \alpha_k\beta_j q_j^B (q_j^N)^{\mathrm{T}}[D(\theta^N_k) - \alpha_k\Delta\Omega^{NN}]^{-1} q_j^N (q_j^B)^{\mathrm{T}}\},$$

также будет положительно полуопределенной.

Полагая, что

$$p_j(\alpha_k) = (q_j^N)^{\mathrm{T}}[D(\theta^N_k) - \alpha_k\Delta\Omega^{NN}]^{-1} q_j^N, \tag{57}$$

получаем, что

$$\bar{Y}^{BB}_k = \alpha_k\beta_j[1 - \alpha_k\beta_j p_j(\alpha)] q_j^B (q_j^B)^{\mathrm{T}}. \tag{58}$$

Таким образом, матрица $\bar{Y}^{BB}_k$ также остается положительно полуопределенной при α_k достаточно малом. Отсюда делаем вывод, что можно указать $\bar{\alpha}_k > 0$ такое, что вся матрица V^H_{k+1} при $0 < \alpha_k \leqslant \bar{\alpha}_k$ будет положительно полуопределенной. Утверждение доказано.

Замечание 3. Согласно (57) и (58) матрица $\bar{Y}^{BB}_k$ заведомо будет положительно полуопределенной при любом $\alpha_k > 0$, если вектор q_j такой, что $q_j^N = 0_s$. Это соответствует случаю, когда матрица Q_j принадлежит грани $\Gamma^*_{\min}(V^H_k;\ \mathbb{S}^n_+)$, являющейся сопряженной по отношению к грани $\Gamma_{\min}(V^H_k;\ \mathbb{S}^n_+)$. Данная грань

$\Gamma^*_{\min}(V_k^H; \mathbb{S}^n_+)$ определяется первыми r единичными ортами пространства $\mathbb{R}^n$, образующими ее пространство столбцов.

Покажем, что итерационный процесс (10) позволяет при определенных дополнительных предположениях относительно задачи попасть из любой стартовой точки $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$ в некоторую окрестность $\mathcal{D}(u_*)$ решения задачи (2) – точки u_*, где уже можно применять основное отображение (15). Как уже отмечалось, итерационный процесс с основным отображением $\mathcal{G}(u)$ обладает локальной сходимостью при использовании постоянного достаточно малого шага α_k. Считаем также, что при использовании отображения $\mathcal{G}_2(u)$ берется тот собственный вектор q_j, который соответствует максимальному по модулю отрицательному собственному значению матрицы X_B^H.

Предположим, что для решения X_* прямой задачи (1) и решения $[u_*, V_*]$ двойственной задачи (2) выполнено условие строгой дополнительности. Тогда u_* – единственное решение двойственной задачи (2) (вместе с соответствующей слабой двойственной переменной V_*). Положим $\mathcal{U}_f = \{u \in \mathcal{F}_{D,u} : \langle b, u\rangle \geqslant f\}$. Если f_* – оптимальное значение целевой функции в двойственной задаче, то можно указать $\tilde{f} < f_*$ такое, что $\mathcal{U}_{\tilde{f}} \subseteq \mathcal{D}(u_*)$.

Мы скажем, что двойственная задача (2) b-согласована, если для любого $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ вектор b принадлежит пространству столбцов соответствующей матрицы $\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$ в том и только в том случае, когда u – крайняя точка $\mathcal{F}_{D,u}$.

Теорема 1. *Пусть двойственная задача* (2) *сильно невырожденная и b-согласованная. Пусть, кроме того, точка $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$ такова, что множество $\mathcal{U}_{f_0}$, где $f_0 = \langle b, u_0\rangle$, ограничено. Тогда можно указать номер $K \geqslant 1$ такой, что $u_k \in \mathcal{U}_{\tilde{f}}$ при $k \geqslant K$.*

Доказательство. Предположим, что итерационный процесс (10) генерирует бесконечную последовательность точек, ни одна из которых не принадлежит множеству $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$. Так как множество $\mathcal{U}_{f_0}$ ограничено, то у последовательности $\{u_k\}$ существуют предельные точки. Пусть $u_{k_s} \to \bar{u}$, где $\bar{u} \notin \mathcal{U}_{\tilde{f}}$. Пусть, кроме того, $V_{k_s} = V(u_{k_s}) \to \bar{V}$ и $\bar{V} = \bar{H}D(\bar{\theta})\bar{H}^{\mathrm{T}}$, где $\bar{H}$ – ортогональная матрица.

Считаем для общности, что направление перемещения $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ определяется отображением $\mathcal{G}_2(u)$, вычисленным в соответствующих точках u_k. Так как матрица $W_N = W_N(u)$ положительно полуопределенная, то отображение $\mathcal{G}_2(u)$ можно представить в виде $\mathcal{G}_2(u) = W_N^{1/2}[\Psi_1(u) + c(\sigma)\Psi_2(u)]W_N^{1/2}b$ с матрицами

$$\Psi_1(u) = I_m - \bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B}((\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{-1}(\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}},$$
$$\Psi_2(u) = \bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B}((\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{-1}T_j((\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}}\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{-1}(\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B})^{\mathrm{T}},$$

в которых $\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B} = W_N^{1/2}\mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}$.

Обе матрицы $\Psi_1(u)$ и $\Psi_2(u)$ симметричные и положительно полуопределенные, первая из них является матрицей ортогонального проектирования. Все матрицы, входящие в $\Psi_1(u)$ и $\Psi_2(u)$, включая их самих и матрицы $W_N^{1/2}(u)$, ограничены по норме в некоторой окрестности точки $\bar{u}$. Отсюда следует, что длина шагов α_{k_s} не может стремиться к нулю, т.е. они ограничены снизу некоторым положительным числом. Кроме того, последовательность значений целевой функции $\{b^{\mathrm{T}}u_k\}$ – монотонно возрастающая и ограниченная сверху числом $b^{\mathrm{T}}\bar{u}$. Поэтому

$$\lim_{s\to\infty}\langle \bar{b}_{k_s}, \Psi_1(u_{k_s})\bar{b}_{k_s}\rangle = 0, \quad \lim_{s\to\infty}\langle \bar{b}_{k_s}, \Psi_2(u_{k_s})\bar{b}_{k_s}\rangle = 0, \quad \bar{b}_{k_s} = W_N^{1/2}(u_{k_s})b. \tag{59}$$

Предположим далее, что подпоследовательность $\{u_{k_s}\}$ выбрана такой, что у всех соответствующих матриц $V_{k_s} = V(u_{k_s})$ ранг один и тот же, равный s_1. Это приводит к одинаковым разбиениям матриц X^H на подматрицы X_B^H и X_N^H, вторая из которых обязательно нулевая. Более того, поскольку инвариантные подпространства близких по норме матриц близки друг к другу, то можно считать, что $H_{k_s} \to \bar{H}$.

Согласно (59) в предельной точке $\bar{u}$ должно выполняться $\Psi_1(\bar{u})W_N(\bar{u})b = 0_m$. Из этого равенства следует, что вектор $W_N(\bar{u})b$ принадлежит нуль-пространству матрицы $\Psi_1(\bar{u})$, совпадающему с пространством столбцов матрицы $\bar{\mathcal{A}}^H_{\mathrm{svec}_B}$, т.е. $b = \mathcal{A}^H_{\mathrm{svec}_B}\lambda$. Но тогда по лемме 2 точка $\bar{u}$ – крайняя точка множества $\mathcal{F}_{D,u}$.

При сделанном предположении о сильной невырожденности задачи крайняя точка $\bar{u}$ может быть только регулярной. Отсюда следует, что решение основной системы (32) сводится к отысканию m-мерного вектора $\mathrm{svec}_B X_B^{\bar{H}}$, удовлетворяющего системе линейных уравнений $\mathcal{A}^{\bar{H}}_{\mathrm{svec}_B} \mathrm{svec}_B X_B^{\bar{H}} = b$ с неособой квадратной матрицей $\mathcal{A}^{\bar{H}}_{\mathrm{svec}_B}$. Вектор $\mathrm{svec}_N X_N^{\bar{H}}$ берется нулевым. Но точка $\bar{u}$ не является решением задачи, поэтому у матрицы $X_B^{\bar{H}}$ имеется отрицательное собственное значение.

Так как собственные значения симметричных матриц непрерывны но Липшицу, то и у матриц $X_B^{H_{k_s}}$, вычисленных в точках u_{k_s} достаточно близких к $\bar{u}$, также будут отрицательные собственные значения. Это приводит к тому, что при u_{k_s}, достаточно близких к $\bar{u}$, значение целевой функции в двойственной задаче (2) возрастает на величину, ограниченную снизу положительным числом. В результате на некоторой итерации должно стать $\langle b, u_{k_s}\rangle > \langle b, \bar{u}\rangle$, что невозможно. Поэтому $u_k \in \mathcal{U}_{\tilde{f}}$ при k достаточно больших. Теорема доказана.

Замечание 4. В силу произвольности выбора уровня $\tilde{f}$ можно утверждать, что итерационный процесс (10) сходится глобально на множестве $\mathcal{F}_{D,u}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wolkowicz Q., Saigal R., Vandenberghe L.* (eds). Handbook of semidefinite programming. Boston, Dordrecht, London: Kluwor Academic Publishers, 2000.
2. *Жадан В.Г., Орлов А.А.* Двойственные методы внутренней точки для линейной задачи полуопределенного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 12. С. 2158–2180.
3. *Жадан В.Г.* Конечные барьерно-проективные методы для линейного программирования. 11-я Байкальская международная школа-семинар “Методы оптимизации и приложения”. Тр. конференции, пленарные доклады. Иркутск, 1998. С. 140–144.
4. *Lasserre J.B.* Linear programming with positive semi-definite matreces // MPE. V. 2. 1996. P. 499–522.
5. *Косолап А.И.* Симплекс-метод для решения задач полуопределенного программирования // Вестник Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естественные науки. Вып. 2. 2009. С. 365–369.
6. *Magnus J.R., Neudecker Q.* The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1980. V. 1. № 4. P. 422–449.
7. *Магнус Я.Р., Нейдеккер Х.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002.
8. *Alizadeh F., Xaeberly J.-P.A., Overton M.L.* Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Mathematical Programming. Series B. 1997. V. 7. № 2. P. 129–162.
9. *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров. Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. Вып. 2(158). С. 101–114.
10. *Potaki G.* On the rank of extreme matrices in semidefinite programs and the multiplicity of optimal eigenvalues // Mathematics of Operation Research. 1998. V. 23. № 2. P. 339–358.
11. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.