Н. Г. Четаев, Об устойчивых траекториях динамики, *Учен. зап. Казан. ун-та.*, 1931, том 91, книга 4, 3–8

Казанский Государственный Университет им. В. И. Ульянова-Ленина.

Математико-механическое отделение.

Редактор отдела проф. Н. Н. Парфентьев.

Об устойчивых траекториях динамики.

Н. Четаев.

Всякий раз, как мы подходим к объяснению тех или иных явлений природы с приемами классической механики, мы не должны забывать, что в действительности никакое явление не представится в чистом виде. Сколь бы точно не были определены действующие на материальную систему силы, всегда будут существовать неучтенными некоторые незначительные возмущения. Эти последние, сколь бы малы они не были, влияют на движение материальной системы в особенности, если движение неустойчиво. Общий характер будут сохранять таким образом лишь только устойчивые движения и поэтому только они более менее правильно описывают действительные движения.

Этот ясный принцип устойчивости действительных движений, блестяще зарекомендовавший себя во многих основных проблемах небесной механики, как я хочу сейчас показать, неожиданно дает картину почти квантовых явлений.

1. Уравнения в вариациях.

Вообразим некоторую материальную систему с n степенями свободы, и пусть ее отдельные состояния вполне описываются каноническими переменными.

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n;\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n.$$

Мы будем предполагать, что кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum \alpha_{ik}\, y_i\, y_k$$

не зависит явно от времени t, а силовая функция U действующих на материальную систему сил зависит лишь от переменных x_i. Пусть функция

$$-ht + V(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n;\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n),$$

зависящая от n постоянных α_i, из которых ни одна не является просто приданной, есть полный интеграл соответствующего нашей материальной системе дифференциального уравнения в частных производных Якоби. h обозначает зависящую от α_i постоянную живой силы.

Чтобы из возможных движений материальной системы выделить устойчивые, рассмотрим известные дифференциальные уравнения в вариациях Пуанкаре, установленные в *Les méthodes nouvelles de la mécanique célèste* t. 1, p. 166. Обозначим через ξ_i, η_i соответственно вариации переменных x_i, y_i; и пусть функция Гамильтона, отвечающая нашей материальной системе, есть $H=T-U$. Уравнения в вариациях Пуанкаре при этом суть:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_k} \xi_k + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} \eta_k \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} \xi_k - \sum \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_k} \eta_k \end{aligned}$$

Из всех возможных движений материальной системы мы условимся рассматривать лишь те, для которых постоянные α_i полного интеграла уравнения Якоби имеют некоторые фиксированные значения, и совокупность этих движений назовем пакетом. В этом предположении отвечающие возможным движениям материальной системы точки в фазовом пространстве переменных x_i будут двигаться фронтами $V=const.$ в том смысле, что, если точки для какого-либо значения времени $t=t_0$ находились на поверхности $V=c_0$, то они и для любого другого значения времени t будут находится на поверхности $V=c$; c_0, c—некоторые постоянные. Отсюда согласно известной теоремы Якоби имеем

$$\eta_i = \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \xi_j .$$

Согласно этих соотношений первую группу системы дифференциальных уравнений в вариациях Пуанкаре (1) возможно записать следующим образом:

$$(2)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_{ik} \frac{\partial V}{\partial x_k} \right) \xi_j .$$

2. Условия устойчивости.

Движение материальной системы при определенных начальных значениях переменных x_i, y_i будет устойчивым, если отвечающие ему дифференциальные уравнения в вариациях Пуанкаре (1) дают для ξ_i, η_i решения, изменяющиеся с ростом t вблизи очевидного решения $\xi_i = 0 = \eta_i$ $(i=1, 2,..., n)$ устойчивым образом. Вопрос об устойчивости изменений ξ_i, η_i весьма труден, так как случай канонических уравнений всегда принадлежит к тем исключительным, когда по первому приближению нельзя ничего серьезно судить об устойчивости.

Рассмотрим некоторое определенное движение материальной системы $x_i = x_i(t)$ и исследуем относящиеся к нему дифференциальные уравнения в вариациях. Система уравнений Пуанкаре (1), линейная относительно переменных ξ_i, η_i, имеет коэфициэнтами некоторые определенные функции, зависящие через переменные x_i от значений времени t. Характеристическое уравнение, составленное из коэфициэнтов этой системы, всегда принадлежит к типу возвратных. Поэтому абсолютная устойчивость рассматриваемого *ведущего* движения материальной системы невозможна, кроме как для случая, когда все характеристические числа Ляпунова системы независимых решений системы дифференциальных уравнений в вариациях Пуанкаре (1) суть нули.

Отсюда ясно, что и характеристические числа Ляпунова

$$\varkappa_1,\ \varkappa_2, \ldots,\ \varkappa_n$$

системы независимых решений системы дифференциальных уравнений (2) должны быть также все нулями, если ведущее движение материальной системы устойчиво.

Допустим, что каким-либо способом для уравнений (2) удалось найти систему n независимых частных решений

$$\xi_{s1},\ \xi_{s2}, \ldots,\ \xi_{sn} \qquad (s=1,\ 2, \ldots,\ n)$$

Известная теорема Абеля, если для сокращения систему (2) записать следующим образом

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum p_{ij}\,\xi_j,$$

дает

$$\|\xi_{ij}\| = Ce^{\int \Sigma p_{ii}\,dt},$$

где C отличная от нуля постоянная. Если система дифференциальных уравнений (2) есть правильная (что естественно предположить, когда мы имеем дело с природой), то сумма характеристических чисел Ляпунова $\sum\varkappa_s$ всех независимых решений равна согласно последнего соотношения характеристическому числу функции

$$e^{\int \Sigma p_{ii}\,dt}, \tag{3}$$

как это хорошо установил Ляпунов в классическом сочинении *Общая задача об устойчивости движений* стр. 28. Если ведущее движение материальной системы устойчиво, то, как мы установили выше, все $\varkappa_s$ должны быть нулями. Отсюда $\Sigma\varkappa_s = 0$, или, если принять во внимание значения выражений p_{ij}, для устойчивого пакета нулем должно быть характеристическое число выражения (3)

$$e^{\int L\,dt},$$

где

$$L = \sum_{i-1}^{n} \sum_{j-1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \right).$$

3. Дозволенные орбиты.

Условия устойчивости пакета $x_s = 0$ являются условиями первого приближения. Канонические же дифференциальные уравнения в вариациях принадлежат к тем исключительным, когда по первому приближению нельзя ничего серьезно судить об устойчивости движения, так как возмущающие силы могут изменять устойчивые в первом приближении движения на неустойчивые. Это хорошо доказано Ляпуновым.

Для нашей природы естественно предположить, что возмущающие силы допускают силовую функцию W, зависящую от переменных x_i. Возмущающие силы стремятся увеличить значение функции W; их влияние на пакет в произвольной точке x_s фазового пространства пропорционально плотности траэкторий в этой точке.

$$A^2 = \psi\psi^*.$$

Отсюда следует, что возмущающие силы относительно меньше возмущают пакет, для которого

$$\int W\psi\psi^* d\tau - maximum; \tag{4}$$

$d\tau$ обозначает элемент объема фазового пространства. Значит, из всей совокупности движений возмущающие силы допускают быть абсолютно устойчивым пакет, удовлетворяющий условию (4). Траэктории этого пакета назовем дозволенными орбитами. Для возможности сравнения мы примем при этом для измерения плотности естественное условие

$$\int \psi\psi^* d\tau = 1.$$

Чтобы определить дифференциальное уравнение вариационной задачи (4), рассмотрим движение материальной системы, которое имело бы место при тех же начальных данных, но под действием еще и сил возмущения. Всегда при этом существует интеграл живой силы

$$T = W + U + h.$$

Это позволяет интеграл (4) писать иначе

$$\int (T - U - h)\psi\psi^* d\tau,$$

где в T вместо переменных y_i следует вставить производные $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ отвечающие невозмущенному движению. Если принять во внимание выражение функции плотности

$$\psi = A e^{iV},$$

то можем заключить

$$2T\psi\psi^* = \sum \alpha_{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k} - \sum \alpha_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial x_k};$$

и значит интеграл (4) запишется следующим образом

$$-\frac{1}{2}\int\left[-\sum \alpha_{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k} + \sum \alpha_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial x_k} + 2(U+h)\psi\psi^*\right] d\tau.$$

Отсюда после очевидных переделок для определения дифференциального уравнения вариационной задачи (4) получаем следующее соотношение

$$\int \delta\psi^* \left[\varDelta\psi + 2(U+h)\psi - \frac{\varDelta A}{A}\psi\right] d\tau = 0;$$

откуда вытекает основное уравнение дозволенных орбит

$$\varDelta\psi + 2(U+h)\psi - \frac{\varDelta A}{A}\psi = 0. \tag{5}$$

Если $\varDelta A = 0$, то наше основное уравнение (5) принимает форму дифференциального уравнения, положенного в *Abhandlungen zur Wellenmechanik* Шредингером в основу своей так называемой волновой механики.

4. Общее замечание.

Решение дифференциального уравнения (4) однозначное, конечное и непрерывное для всех возможных значений переменных x_i или отвечающее тем или иным граничным условиям может существовать лишь при некоторых определенных значениях постоянных α_i, а значит и h. Совокупность значений α_i, для которых это возможно, зовут спектром. Устойчивые траэктории материальной системы расположены поэтому дискретным образом, и лишь в исключительном случае непрерывных спектров, они будут располагаться сплошно. Задача о спектрах α_i более менее изучена. Оставляя до конкретных приложений задачу о спектрах, остановимся на том представлении, какое получается из принципа устойчивости действительных движений.

Мы мыслим себе материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил в незначительном поле возмущения. Это последнее разрушает всякое движение, если только оно не является устойчивым и дозволенным. Таким образом сохраняются устойчивые, дозволенные движения. Но никогда нельзя допустить, чтобы в природе движение точно совершалось по устойчивой траектории. Всегда существуют незначительные отклонения, благодаря которым действительные движения материальной системы происходят в достаточно малой области, обволакивающей устойчивую траекторию

$$|\xi_i| < \varepsilon.$$

Смежные же траектории сколь угодно мало отличные от устойчивой должны около последней „колебаться“ ($\varkappa_s = 0$); это явление и дает представление о „волне“.

Июль 1930.