Ю. П. Гинзбург, И. С. Иохвидов, Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой, *УМН*, 1962, том 17, выпуск 4, 3–56

1962 г. июль—август *т. XVII, вып. 4 (106)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ С БИЛИНЕЙНОЙ МЕТРИКОЙ

Ю. П. Гинзбург и И. С. Иохвидов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

1. Интерес к бесконечномерным линейным пространствам с общей билинейной и, в частности, с эрмитово-индефинитной метрикой возник в начале сороковых годов, причем к рассмотрению таких пространств подошли почти одновременно с различных направлений как физики-теоретики, так и математики. Пространства с индефинитной метрикой в квантовой механике впервые встретились П. Дираку [1] и В. Паули [2] в начале 40-х годов. Примерно в то же время к необходимости изучения эрмитовых операторов в таких пространствах пришел С. Л. Соболев, отправлявшийся от конкретных динамических задач. В этих задачах метрика пространства («скалярное произведение») определялась бесконечной эрмитовой формой с конечным числом ($\varkappa$) отрицательных квадратов («индефинитность конечного ранга»). В 1944 г. Л. С. Понтрягин опубликовал фундаментальную работу [3], посвященную эрмитовым (самосопряженным) операторам в подобных пространствах с индефинитной метрикой конечного ранга $\varkappa$ (пространства $\Pi_\varkappa$). В этой же статье были рассмотрены некоторые вопросы геометрии пространств $\Pi_\varkappa$. Вещественные пространства Π_1 в связи с теорией так называемых лоренцовых преобразований гильбертова пространства изучал М. Г. Крейн [4]. Другие факты, относящиеся к геометрии этих же пространств, были получены М. Г. Крейном в 1948 г. при разработке теории винтовых линий в бесконечномерных пространствах Лобачевского [5] (см. также [8]). Наконец, в кандидатской диссертации И. С. Иохвидова

[6], а затем в монографии И. С. Иохвидова и М. Г. Крейна [7], [8] был развит общий аксиоматический подход к пространствам $\Pi_\varkappa$ $(0 < \varkappa < \infty)$ и попутно с изучением некоторых классов операторов в $\Pi_\varkappa$ получены новые факты, относящиеся к геометрии этих пространств.

С другой стороны, еще в 1947 г. М. И. Вишик [9] указал на связь теории проектирования в более общих, нежели $\Pi_\varkappa$, пространствах (т. е. пространствах с эрмитово-индефинитной метрикой «бесконечного ранга») с решением некоторых краевых задач для самосопряженных дифференциальных уравнений в частных производных. Позднее эта же идея была вторично выдвинута Р. Неванлинна, который в связи с ней в ряде статей [10] — [13] начал развивать теорию проектирования в пространствах с общей эрмитово-индефинитной метрикой. При этом на метрику налагалось условие ее мажорации некоторой гильбертовой метрикой (см. ниже, § 2, п. 5).

Исследования Р. Неванлинна были продолжены его учеником И. С. Лоухиваара [14], [15], применившим их затем [16] к доказательству существования и единственности решения обобщенной задачи Дирихле для самосопряженных дифференциальных операторов с частными производными второго порядка в ограниченной области. Вслед за этим Ф. Браудер [17], [18] и В. Литтман [19] обобщили результаты И. С. Лоухиваара, освободив их от требований самосопряженности оператора и ограниченности области. Обзор всех этих результатов читатель может найти в [20]. Геометрические выводы названных выше работ резюмированы также недавно в статье И. С. Лоухиваара [21].

2. Среди пространств с эрмитово-индефинитной метрикой бесконечного ранга особое место занимают так называемые J-пространства, т. е. гильбертовы пространства, в которых помимо обычного скалярного произведения (x,y) задается индефинитная метрика с помощью формы (Jx,y), где $J = P_+ - P_-$, а P_+ и P_- — ортопроекторы (вообще говоря, бесконечномерные), причем $P_+ + P_- = I$. Именно эти пространства нередко возникают в задачах теоретической и математической физики. Частным случаем J-пространств являются пространства $\Pi_\varkappa$ $(\varkappa = \min\{\dim P_+,\ \dim P_-\} < \infty)$.

В абстрактной форме J-пространства были введены Ю. П. Гинзбургом [22] — [24], который отправлялся от задач, связанных с теорией характеристических функций несамосопряженных операторов, развитой М. С. Лившицем [25], [26] и М. С. Бродским [26], [27]. Обобщая результаты В. П. Потапова [28] о мультипликативной структуре (конечномерных) аналитических J-нерастягивающих матриц-функций на соответствующие оператор-функции, Ю. П. Гинзбург пришел к необходимости рассмотрения основных фактов геометрии J-пространств и изучения некоторых классов операторов в этих пространствах. Почти одновременно с Ю. П. Гинзбургом и независимо от него с J-пространствами встретился Р. С. Филлипс [29] при изучении диссипативных гиперболических систем дифференциальных уравнений. При построении граничных подпространств для этих систем Р. С. Филлипс рассматривает так называемые неотрицательные, неположительные и нулевые подпространства некоторого J-пространства, в частности максимальные подпространства указанных типов. С этими же вопросами встретился Г. Лангер [30], [31] при изучении самосопряженных операторов в J-пространствах. Полная классификация всех подпространств J-пространства была дана Ю. П. Гинзбургом [32], [33] (см. § 6 настоящей работы).

3. В пятидесятых годах в теоретической физике снова время от времени возникала необходимость рассмотрения индефинитной метрики. В частности, в 1950 г. К. Блейлер [34] и С. Н. Гупта [35] применили ее к проблемам квантовой электродинамики. К этому же вопросу относятся дальнейшие работы С. Н. Гупта (см. [40]). Специальный параграф, посвященный применению индефинитной метрики в квантовой электродинамике, мы находим в известной книге А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого [36].

Однако новый (и вначале весьма значительный) интерес со стороны физиков к пространствам с индефинитной метрикой вызвали работы В. Гейзенберга [37], В. Паули и Г. Челлена [38], Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева и М. К. Поливанова [39] и многие другие [1]), связанные с построением квантовой теории поля (так называемая «теория призрачных состояний» и др.). У нас нет данных, чтобы судить о том, способствовало ли применение пространств с индефинитной метрикой устранению трудностей, стоящих на пути построения квантовой теории поля, тем более, что в среде физиков в последнее время появились на этот счет некоторые скептические высказывания [2]). Однако, поскольку это направление породило весьма обширную литературу, содержащую и чисто математические факты, возникла необходимость как-то их осмыслить и суммировать. Первые попытки такого рода были предприняты самими физиками (С. Н. Гупта [40], Р. Асколи и Э. Минарди [41], А. Ульман [42], [43], Л. К. Пандит [44], К. Л. Надь [45]).

В некоторых из этих работ, [40] — [43], предлагались варианты аксиоматического введения пространств с общей эрмитово-индефинитной метрикой, рассматривались элементы их геометрии, а также применялись «эрмитовы операторы», действующие в таких пространствах. К сожалению, нужно отметить, что математический уровень этих работ невысок, а некоторые из них просто содержат математические ошибки, подчас весьма грубые (см. ниже, § 5, п. 3).

Общим (математическим) недостатком многих работ этого цикла является произвольное употребление их авторами термина «гильбертово пространство с индефинитной метрикой», термина, которому в самих работах соответствует весьма расплывчатое содержание. Дело в том, что, как правило, рассматривается линейное пространство с заданной на нем эрмитово-индефинитной формой, но без всякой топологии, так что термин «гильбертово пространство» призван вызвать лишь некоторые геометрические ассоциации, которые порой заводят в тупик самих авторов. Заметим, что мы здесь совершенно не касаемся других грубых ошибок, связанных с переносом на бесконечно-

---

[1]) Относительно полный обзор их можно найти в статье К. Л. Надь [45]; там же указана весьма обширная литература.

[2]) Примечание при корректуре. В самое последнее время появилась заметка Ф. А. Березина [64], где индефинитная метрика вновь привлекается к вопросам квантовой теории поля.

мерные пространства некоторых предложений, верных лишь для конечномерных пространств, а также с распространением ряда фактов из теории унитарных и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве на соответствующие операторы в пространствах с индефинитной метрикой ([40] — [42]). Частично эти ошибки уже подвергались критике одним из авторов настоящей статьи (см. РЖМат (1961), рефераты 8Б 459—462).

Следует вместе с тем отметить, что, несмотря на свою ошибочность (а может быть, именно вследствие ее), упомянутые выше работы стимулировали новый интерес математиков к рассматриваемой области теории. Во всяком случае, в последнее время появился ряд новых работ Я. Богнара [46], [47], Ю. П. Гинзбурга [32], [33], И. С. Иохвидова [48], [49], Г. Лангера [30], [31], в которых геометрия пространств с эрмитово-индефинитной и общей билинейной метрикой получила дальнейшее развитие. С другой стороны, если исследования по геометрии пространств $\Pi_\varkappa$ были суммированы в монографии [7], [8], то для более общих пространств соответствующая работа до самого последнего времени не предпринималась. Первой и единственной пока попыткой в этом направлении является недавно вышедшая статья Э. Шайбе [50]. Ее несомненная заслуга — строгое математическое изложение основ геометрии пространств с эрмитово-билинейной метрикой (в частности, с J-метрикой). Однако статья Э. Шайбе [50] помещена в малодоступном для широкого читателя издании и содержит большие пробелы, поскольку ее автор, по-видимому, совершенно не знаком с работами, выполненными советскими математиками. Кроме того, несмотря на общую строгость изложения, Э. Шайбе в последнем параграфе своей работы (§ 8) допустил ошибки в формулировках и доказательствах ряда теорем (см. ниже, § 3, п. 6).

4. Предлагаемый читателям обзор имеет целью восполнить имеющийся в математической литературе пробел и дать по возможности полное и последовательное изложение геометрии пространств с общей билинейной метрикой. Мы надеемся, что он принесет пользу как математикам, так и физикам-теоретикам, интересующимся проблемами, в которых появляется необходимость рассмотрения индефинитной метрики.

Содержание статьи видно из оглавления. Мы предполагаем у читателя знание основ общей теории банаховых и гильбертовых пространств. В то же время, как и в статье Э. Шайбе, в обзоре используется аппарат теории локально выпуклых векторных топологических пространств, но с тем отличием, что все необходимые для чтения статьи сведения об этих пространствах кратко изложены в § 2, п. 2 (мелкий шрифт).

Часть теорем, содержащихся в статье, публикуется впервые. В этом случае они сопровождаются доказательствами. Доказательства приводятся и в тех случаях, когда авторам удалось внести некоторые усиления в формулировки известных предложений. В частности, это относится к некоторым предложениям §§ 2 и 3, которые для отделимых топологий («невырожденных метрик») непосредственно следуют из общих теорем теории двойственности, содержащихся в трактате Н. Бурбаки [51] (знакомства с которым мы не предполагаем у читателя). В общем же случае такой путь потребовал бы ряда дополнительных рассуждений.

Чтобы не нарушать хода изложения, мы в основном тексте статьи не касаемся истории возникновения и развития тех или иных понятий, а также авторства отдельных результатов. Соответствующие указания отнесены в конец статьи («Примечания и литературные указания»).

В заключение отметим, что многие из новых результатов статьи формулировались нами в совместном докладе на IV Всесоюзном математическом съезде в июле 1961 г. (см. [52]) и в совместном докладе на механико-математической секции Одесского дома ученых 18 декабря 1961 г.

§ 2. Различные топологии в пространствах с билинейной метрикой

1. Пусть заданы комплексное линейное пространство $\mathfrak{E}$ и на нем билинейная форма $G(x,y)$:

$$G(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,\ \beta_1 y_1+\beta_2 y_2)=$$
$$=\alpha_1\overline{\beta}_1 G(x_1,y_1)+\alpha_2\overline{\beta}_1 G(x_2,y_1)+\alpha_1\overline{\beta}_2 G(x_1,y_2)+\alpha_2\overline{\beta}_2 G(x_2,y_2).$$

Здесь $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathfrak{E}$; $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ — комплексные числа. Мы будем говорить в этом случае о *пространстве* $\mathfrak{E}$ *с* G*-метрикой* или, сокращенно, о G*-пространстве*. Наибольший интерес представляет тот случай, когда форма $G(x,\ y)$ эрмитова:

$$G(y,\ x)=\overline{G(x,\ y)}\qquad (x,\ y\in\mathfrak{E}),$$

но, вообще говоря, индефинитна ($G^э$*-пространство*).

Заметим, что теория конечномерных G-пространств разработана давно (Г. Фробениус [53]) и изложена довольно подробно в курсах линейной алгебры (см., например, [54], гл. X). Поэтому в нашем изложении пространство $\mathfrak{E}$ предполагается, вообще говоря, бесконечномерным.

Вектор $x(\in\mathfrak{E})$ назовем *левым* (*правым*) G*-ортогональным* к вектору $y\in\mathfrak{E}$, если $G(x,\ y)=0$ (соответственно $G(y,\ x)=0$). Эти определения естественно распространяются на любые подмножества из $\mathfrak{E}$. В случае $G^э$-пространства понятия левой и правой G-ортогональности, очевидно, совпадают. G-ортогональность множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{E}$ мы в дальнейшем будем символически записывать: $G(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N})=0$.

Вектор $x_0(\in\mathfrak{E})$ называется *левым изотропным в* $\mathfrak{E}$, если он G-ортогонален слева к $\mathfrak{E}: G(x_0,\mathfrak{E})=0$. Аналогично определяются *правые изотропные векторы в* $\mathfrak{E}$. В случае эрмитовой G-метрики мы будем говорить просто об *изотропных векторах в* $\mathfrak{E}$. Наличие отличного от нуля изотропного вектора в $\mathfrak{E}$ означает вырождение формы G на $\mathfrak{E}$. Такое G-пространство $\mathfrak{E}$ назовем *вырожденным*. Совокупность всех левых (правых) изотропных векторов G-пространства $\mathfrak{E}$ образует линеал (линейное многообразие) $\mathfrak{E}_0$, который мы назовем *левым* (*правым*) *изотропным линеалом в* $\mathfrak{E}$ [1]).

---

[1]) В случае конечномерного $\mathfrak{E}$ размерности левого и правого изотропных линеалов всегда одинаковы и равны так называемому дефекту пространства $\mathfrak{E}$ (см., например, [54], стр. 324).

Пусть задан произвольный линеал $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$. Форма $G(x, y)$, рассматриваемая на $\mathfrak{L}$, порождает на $\mathfrak{L}$ G-метрику, по отношению к которой $\mathfrak{L}$ может оказаться как вырожденным, так и невырожденным вне зависимости от вырожденности всего пространства $\mathfrak{E}$. В случае вырождения $\mathfrak{L}$, очевидно, $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_0$, где $\mathfrak{L}_0 (\neq \{0\})$ — соответствующий *изотропный линеал в* $\mathfrak{L}$.

2. Помимо формы $G(x, y)$ в пространстве $\mathfrak{E}$ может быть задана та или иная топология τ. Мы будем рассматривать только так называемые локально выпуклые топологии. Напомним в связи с этим некоторые основные определения.

Полунормой в линейном пространстве $\mathfrak{E}$ называется функционал $p(x)$, $x \in \mathfrak{E}$, удовлетворяющий следующим условиям (x, x_1, x_2 — произвольные элементы из $\mathfrak{E}$, λ — любое комплексное число):

α) $$p(x) \geqslant 0,$$

β) $$p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x),$$

γ) $$p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2).$$

Пусть в $\mathfrak{E}$ задано (конечное или бесконечное) семейство полунорм $p_\alpha(x)$ ($\alpha \in \mathrm{A}$). *Выпуклой окрестностью* $\mathfrak{U}(x_0) = \mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(x_0)$ точки $x_0 \in \mathfrak{E}$ называется совокупность всех точек $x \in \mathfrak{E}$, удовлетворяющих условиям

$$p_{\alpha_j}(x - x_0) < \delta \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где $\delta > 0$, а фиксированные $\alpha_j \in \mathrm{A}$ ($j = 1, 2, \ldots, k$). Система всех выпуклых окрестностей $\mathfrak{U}(x)$ ($x \in \mathfrak{E}$) называется *локально выпуклой топологией* τ, заданной в пространстве $\mathfrak{E}$, а само $\mathfrak{E}$ — *локально выпуклым линейным топологическим пространством*. Окрестности $\mathfrak{U}(x)$, определяющие топологию τ, мы будем кратко именовать τ-*окрестностями*.

Пусть множество $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}$. Точка x_0 ($\in \mathfrak{E}$) называется τ-*предельной точкой* [1]) *множества* $\mathfrak{M}$, если каждая τ-окрестность точки x_0 содержит точки из $\mathfrak{M}$. Совокупность τ-предельных точек множества $\mathfrak{M}$ называется его τ-*замыканием* и обозначается $\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$. Легко видеть, что $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$. Если же $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$, то $\mathfrak{M}$ называется τ-*замкнутым*.

Если в линейном пространстве $\mathfrak{E}$ заданы две топологии τ' и τ'', обладающие тем свойством, что всякая τ''-окрестность каждой точки x ($\in \mathfrak{E}$) содержит некоторую τ'-окрестность этой же точки, то говорят, что топология τ' *сильнее* топологии τ'' ($\tau' \geqslant \tau''$) или τ'' *слабее* τ' ($\tau'' \leqslant \tau'$). Если же одновременно $\tau' \geqslant \tau''$ и $\tau'' \geqslant \tau'$, то топологии τ' и τ'' называются *равносильными* ($\tau' = \tau''$).

Числовая функция (функционал) $f(x)$, $x \in \mathfrak{E}$, называется *непрерывной в топологии* τ («τ-*непрерывной*») в точке $x_0 \in \mathfrak{E}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая τ-окрестность $\mathfrak{U}(x_0)$, что для всех $x \in \mathfrak{U}(x_0)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Для τ-непрерывности линейного (т. е. аддитивного и однородного) функционала $f(x)$ во всем пространстве $\mathfrak{E}$, как обычно, достаточно его τ-непрерывности в точке $x = 0$.

В дальнейшем нам удобно будет пользоваться другим определением τ-непрерывности линейного функционала, сформулированным не в терминах τ-окрестностей, а непосредственно в терминах полунорм $p_\alpha(x)$ ($\alpha \in \mathrm{A}$) и вытекающим из следующего предложения:

1°. *Для того чтобы линейный функционал $f(x)$ был непрерывен на $\mathfrak{E}$ в топологии τ, определяемой семейством полунорм $\{p_\alpha(x)\}$, $\alpha \in \mathrm{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого конечного набора индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{A}$ и некоторого $M > 0$ при всех $x \in \mathfrak{E}$ имело место неравенство*

$$|f(x)| \leqslant M \max_{1 \leqslant k \leqslant n} p_{\alpha_k}(x). \tag{2.1}$$

---

[1]) В другой терминологии — *точкой прикосновения*.

В самом деле, если $f(x)$ удовлетворяет неравенству (2.1), то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $|f(x)| < \varepsilon$, коль скоро $x \in \mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(0)$, где $\delta = \varepsilon/M$ и, стало быть, $f(x)$ τ-непрерывен.

Обратно, пусть $f(x)$ — линейный τ-непрерывный функционал на $\mathfrak{E}$. Тогда существуют такой набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$ и такое $\delta > 0$, что при $q(x) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} p_{\alpha_k}(x) < \delta$ справедливо неравенство $|f(x)| < 1$. Пусть теперь x — произвольный вектор из $\mathfrak{E}$. Если $q(x) \neq 0$, то рассмотрим вектор $y = \dfrac{\delta}{2q(x)} x$; так как $q(y) = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, то $|f(y)| < 1$ и, следовательно, справедливо (2.1) при $M = \dfrac{2}{\delta}$. Если же $q(x) = 0$, то $q(\lambda x) = \lambda q(x) = 0$ при любом $\lambda > 0$ и, значит, $|f(\lambda x)| < 1$, $|f(x)| < \dfrac{1}{\lambda}$, откуда $f(x) = 0$. Таким образом, и в этом случае имеет место (2.1). Предложение 1° доказано.

Локально выпуклая топология τ называется *отделимой*, если для каждого $x \neq 0$ найдется индекс $\alpha \in A$ такой, что $p_\alpha(x) \neq 0$. Легко видеть, что отделимость топологии τ равносильна равенству $\overline{\{0\}}^{(\tau)} = \{0\}$, где $\{0\}$ — множество, состоящее из одного элемента $0 \in \mathfrak{E}$.

Нас в дальнейшем будут, в частности, интересовать такие локально выпуклые пространства, в которых отделимая топология задается счетным семейством полунорм $p_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Легко проверить, что такие локально выпуклые пространства [1] *метризуемы*, а именно, их топология может быть задана при помощи *расстояния*

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

Определенная таким образом метрика обладает свойством инвариантности относительно сдвигов:

$$\varrho(x+z, y+z) = \varrho(x, y) \qquad (x, y, z \in \mathfrak{E}). \tag{2.2}$$

В случае полноты по отношению к этой метрике рассматриваемое пространство $\mathfrak{E}$ называется *пространством Фреше* (*$\mathfrak{F}$-пространством*) [2].

Если локально выпуклая топология τ в $\mathfrak{E}$ задается конечным набором полунорм $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, то, очевидно, заменив их одной полунормой $q(x) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} p_k(x)$, мы получим равносильную топологию. В этом случае топологию τ и пространство $\mathfrak{E}$ будем называть *полунормируемыми*. Если полунормируемая топология отделима, то определяющая ее полунорма $q(x)$ есть просто *норма* $(q(x) = \|x\|)$, а $\mathfrak{E}$ — *нормированное пространство*. В случае полноты относительной этой нормы $\mathfrak{E}$ есть *банахово пространство* (*$\mathfrak{B}$-пространство*) — частный случай $\mathfrak{F}$-пространства.

Еще более частным случаем является *гильбертово пространство* $\mathfrak{E}$ (*$\mathfrak{H}$-пространство*) со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ (в случае полноты $\mathfrak{E}$ относительно этой нормы). Нам придется также встречаться с так называемыми *предгильбертовыми пространствами* $\mathfrak{E}$, т. е. такими полунормируемыми пространствами, в которых либо топология τ, задаваемая полунормой $q(x) = \sqrt{(x, x)}$, неотделима ((x, y) — положительно семидефинитное скалярное произведение в $\mathfrak{E}$), либо, в случае отделимости (т. е. дефинитности (x, y)), нормированное пространство $\mathfrak{E}$, вообще говоря, не полно относительно $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

3. Итак, пусть в G-пространстве $\mathfrak{E}$ задана некоторая локально выпуклая (эти эпитеты в дальнейшем всюду опускаются) топология τ. Топология τ

---

[1] И только такие (см. [51], стр. 122).

[2] Заметим, что в книге С. Банаха [55] пространствами типа (F) называются линейные полные метрические пространства, в которых операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр непрерывны, а расстояние обладает свойством (2.2). Таким образом, $\mathfrak{F}$-пространство есть пространство типа (F).

называется *левоподчиняющей* (*правоподчиняющей*) *данную G-метрику*, если все линейные функционалы $f_{y_0}(x)=G(x, y_0)$ (соответственно $h_{x_0}(y)=\overline{G(x_0, y)}$) τ-непрерывны на $\mathfrak{E}$. Топологию τ, являющуюся одновременно лево- и правоподчиняющей, назовем *подчиняющей G-метрику*. В случае эрмитовой G-метрики все эти три определения совпадают. Очевидным примером левоподчиняющей G-метрику топологии, широко используемой в дальнейшем, является так называемая *слабая топология* $\tau_0^{\text{л}}=\tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$, порождаемая самой G-метрикой с помощью семейства полунорм

$$p_y(x)=|G(x, y)| \qquad (y\in\mathfrak{E}).$$

Аналогично задается правоподчиняющая слабая топология $\tau_0^{\text{п}}$ в $\mathfrak{E}$ с помощью семейства полунорм

$$q_x(y)=|G(x, y)| \qquad (x\in\mathfrak{E}).$$

В случае эрмитовой G-метрики, разумеется, $\tau_0^{\text{л}}=\tau_0^{\text{п}}\equiv\tau_0$. При этом, *если $\mathfrak{E}$ не вырождено, то топология τ_0 отделима*. Это же относится к $\tau_0^{\text{л}}$ ($\tau_0^{\text{п}}$) в случае соответствующей невырожденности $\mathfrak{E}$, т. е. отсутствия в $\mathfrak{E}$ отличных от нуля левых (правых) изотропных векторов.

Из приведенных в п. 2 определений непосредственно вытекает следующее предложение:

2°. *Топология $\tau_0^{\text{л}}$ является слабейшей из топологий, левоподчиняющих данную G-метрику.*

Аналогичные предложения имеют место для топологий $\tau_0^{\text{п}}$ и τ_0.

4. В дальнейшем нас в основном будет интересовать *гильбертова* топология ($\mathfrak{H}$-топология), подчиняющая G-метрику. Такая топология, если существует в $\mathfrak{E}$, то определяется единственным образом. Более того, имеет место следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пространство $\mathfrak{E}$ с лево (право-) невырожденной G-метрикой допускает не более одной (с точностью до равносильности) лево (право-) подчиняющей топологии Фреше.*

Доказательство. Допустим, что в $\mathfrak{E}$ заданы две топологии Фреше τ' и τ'', например левоподчиняющие G-метрику. Каждая из них определяется соответствующим расстоянием $\varrho'(x, y)$ и $\varrho''(x, y)$ $(x, y\in\mathfrak{E})$, обладающим свойством (2.2). Введем в рассмотрение новую метрическую топологию τ''', определяемую расстоянием

$$\varrho'''(x, y)=\varrho'(x, y)+\varrho''(x, y) \qquad (x, y\in\mathfrak{E}), \tag{2.3}$$

которое тоже обладает свойством (2.2). Легко понять, что топология τ''' сильнее τ' и τ'':

$$\tau'\leqslant\tau''', \quad \tau''\leqslant\tau'''.$$

Пространство $\mathfrak{E}$, снабженное топологией τ' (соответственно τ'', τ'''), в дальнейшем будем обозначать $\mathfrak{E}_1$ (соответственно $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$).

Пространства $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ суть пространства Фреше, т. е. типа (F). Чтобы доказать, что и $\mathfrak{E}_3$ — типа (F), остается проверить его полноту. Пусть $\{x_n\}(\subset\mathfrak{E}_3)$ — τ''' - фундаментальная последовательность. В силу (2.3) она будет фундаментальной и в топологиях τ' и τ'', а так как пространства

$\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ полные, то существуют пределы x' и x'' последовательности $\{x_n\}$ в каждом из этих пространств соответственно. Поскольку обе топологии τ' и τ'' являются левоподчиняющими, то для любого $y \in \mathfrak{E}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} G(x_n,\ y) = G(x',\ y) = G(x'',\ y),$$

а так как $\mathfrak{E}$ левоневырождено, то $x' = x'' \equiv x$, и этот вектор является τ'''-пределом последовательности $\{x_n\}$. Этим доказана полнота $\mathfrak{E}_3$.

Рассмотрим теперь оператор I_{13}, относящий каждому вектору $x \in \mathfrak{E}_3$ этот же вектор $x \in \mathfrak{E}_1$. Оператор I_{13} отображает $\mathfrak{E}_3$ на $\mathfrak{E}_1$ линейно и взаимно однозначно, а в силу соотношения $\tau' \leqslant \tau'''$ он непрерывен. Так как для пространств $\mathfrak{E}_3$ и $\mathfrak{E}_1$ справедлива классическая теорема Банаха об обратном операторе [55], то и оператор $I_{31} = I_{13}^{-1}$ непрерывен, откуда следует, что $\tau' \geqslant \tau'''$ и, стало быть, $\tau' = \tau'''$. Точно так же проверяется, что $\tau'' = \tau'''$, откуда $\tau' = \tau''$. Теорема доказана.

Теорема 2.1 оставляет в стороне вопрос о существовании в пространстве $\mathfrak{E}$ хотя бы одной топологии Фреше, (лево-, право-)подчиняющей G-метрику. Как показывает приводимый ниже пример, такая топология не всегда существует.

Пусть пространство $\mathfrak{E}$ есть линейная оболочка всех функций от x вида x^t, где $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Рассмотрим G-метрику, определенную в $\mathfrak{E}$ следующим образом. Сопоставим каждому иррациональному числу α $(0 < \alpha < 1)$ его разложение в бесконечную цепную дробь

$$\alpha = [m_1,\ m_2,\ \ldots] = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cdots}},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ — натуральные числа. Кроме того, занумеруем каким-либо образом все рациональные числа $r_1,\ r_2, \ldots;\ 0 \leqslant r_k \leqslant 1\ \ (k = 1,\ 2, \ldots)$.

Положим теперь для любых иррациональных α и β и любых рациональных r_j и r_k из отрезка $[0,\ 1]$:

$$G(x^\alpha,\ x^\beta) = 0, \quad G(x^{r_j},\ x^{r_k}) = 0,$$

$$G(x^{r_k},\ x^\alpha) = G(x^\alpha,\ x^{r_k}) = m_k \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\alpha = [m_1,\ m_2, \ldots, m_k, \ldots]$. На линейных комбинациях функций x^t доопределим G как эрмитово-билинейную форму и рассмотрим G-метрику в $\mathfrak{E}$.

Покажем, что *не существует топологии* τ, *задаваемой счетным семейством полунорм и подчиняющей данную G-метрику*. Допустив противное, предположим, что такое семейство $\{p_n(x)\}_1^\infty$ существует. Не уменьшая общности, можно считать, что $p_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant \ldots$ $(x \in \mathfrak{E})$. Тогда из τ-непрерывности функционалов $h_u(v) = \overline{G(u,\ v)}$ $(u \in \mathfrak{E})$ и предложения 1° следует существование таких положительных $C(u)$ и натуральных n_u, что при всех $v \in$

$$\ldots v)| \leqslant C(u)\, p_{n_u}(v).$$

В частности,

$$|G(x^\alpha,\ r^k)| \leqslant C(x^\alpha)\, p_{n(\alpha)}(x^{r_k}) \qquad (n(\alpha) \equiv n_{x^\alpha}).$$

Введем обозначение $\varphi_{nk} = p_n^2(x^{r_k})$. Тогда для $\alpha = [m_1,\ m_2, \ldots, m_k, \ldots]$

$$m^2 \leqslant C^2(x^\alpha)\varphi_{n(\alpha)k}.$$

Рассмотрим теперь иррациональное число $\alpha=[m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots]$, где

$$m_k=\Big[\sum_{i,\,j\leqslant k}\varphi_{ij}\Big]+k \qquad ([a] \text{ — целая часть } a).$$

При $k>n(\alpha)$ справедливо неравенство $m_k>\varphi_{n(\alpha)k}$ и, следовательно,

$$m_k^2\leqslant C^2(x^\alpha)\,m_k \qquad (k>n(\alpha)),$$

что невозможно при достаточно больших k.

5. Мы будем говорить, что полунормируемая топология τ *мажорирует G-метрику*, если

$$|G(x, y)|\leqslant Cp(x)\,p(y) \qquad (x, y\in\mathfrak{E}),$$

где $p(x)$ — полунорма, задающая в G-пространстве $\mathfrak{E}$ топологию τ, а $C>0$. *Если топология τ мажорирует G-метрику, то она является подчиняющей топологией.* Обратное, вообще говоря, неверно, в чем убеждает нас следующий пример.

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим неограниченный самосопряженный оператор $A=A^*$ с областью определения $\mathfrak{D}(A)\equiv\mathfrak{E}$. Зададим в $\mathfrak{E}$ G°-метрику, положив

$$G(x, y)=(Ax, y) \qquad (x, y\in\mathfrak{E}).$$

Легко видеть, что топология в $\mathfrak{E}$, задаваемая нормой $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$, подчиняет такую G-метрику, в то же время не мажорируя ее.

Однако в полных нормированных пространствах дело обстоит иначе. А именно имеет место следующая

Теорема 2.2. *Всякая банахова топология ($\mathfrak{B}$-топология), подчиняющая G-метрику, мажорирует эту G-метрику.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$-топология G-пространства $\mathfrak{E}$ определяется нормой $\|x\|$ $(x\in\mathfrak{E})$. Поскольку эта топология является подчиняющей G-метрику, имеет место неравенство

$$|G(x, y)|\leqslant C(y)\,\|x\| \qquad (x, y\in\mathfrak{E}), \tag{2.4}$$

где $C(y)=\sup\limits_{\|x\|=1}|G(x, y)|$. Так как функционалы $p_y(x)=|G(x, y)|$ $(x\in\mathfrak{E})$ выпуклы и $\mathfrak{B}$-непрерывны, то согласно известной лемме И. М. Гельфанда (см., например, [56], стр. 59) функционал $C(y)$ также $\mathfrak{B}$-непрерывен, т. е.

$$|C(y)|\leqslant \mathrm{const}\cdot\|y\| \qquad (y\in\mathfrak{E}).$$

Внеся эту оценку в (2.4), получим утверждаемое.

Заметим, что если топология τ мажорирует G-метрику, то форма $G(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных x, y. Из теоремы 2.2, в частности, следует, что из $\mathfrak{B}$-непрерывности $G(x, y)$ по каждой из переменных x и y в отдельности вытекает ее непрерывность по совокупности этих переменных. Это же справедливо не только в $\mathfrak{B}$-пространствах, но и в $\mathfrak{F}$-пространствах (ср. [50]), что является следствием одной весьма общей теоремы ([51], гл. III, § 4.1, предложение 2).

Если мажорирующая G-метрику топология τ является предгильбертовой в пространстве $\mathfrak{E}$ и задается там скалярным произведением $H(x, y)$ $(x, y\in\mathfrak{E})$, то форма H называется *эрмитово-неотрицательной мажорантой* данной G-метрики. Таким образом, форма $H(x, y)$ будет эрмитово-неотрицательной мажорантой для G-метрики тогда и только тогда, когда

$$|G(x, y)|^2 \leqslant CH(x, x)H(y, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E},\ C > 0).$$

Можно показать ([56], стр. 64), что для выполнения этого условия достаточно оценки

$$|G(x, x)| \leqslant C_1 H(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{E},\ C_1 > 0).$$

Если $H(x, x) > 0$ при $x \neq 0$, то мы будем говорить об *эрмитово-положительной мажоранте G-метрики*. Ясно, что такая мажоранта порождает в G-пространстве $\mathfrak{E}$ отделимую предгильбертову топологию, вообще говоря неполную. Пополнив обычным образом пространство $\mathfrak{E}$ по этой топологии, мы получим гильбертово пространство $\widetilde{\mathfrak{E}}$ с $\widetilde{G}$-метрикой, где $\widetilde{G}(x, y)$ — продолжение формы $G(x, y)$ по непрерывности на $\widetilde{\mathfrak{E}}$. Однако построенное таким образом $\widetilde{G}$-пространство $\widetilde{\mathfrak{E}}$ может оказаться вырожденным даже в том случае, когда $G(x, y)$ невырождена. В § 3, п. 4 будет указан один важный случай, когда подобное пополнение не приводит к вырождению G-метрики.

6. Для сокращения речи условимся в дальнейшем пространство $\mathfrak{E}$ с G-метрикой, подчиненной топологии $\mathfrak{B}$-пространства ($\mathfrak{H}$-пространства), просто именовать *банаховым* (*гильбертовым*) *пространством с G-метрикой* или, короче, ($\mathfrak{B}$, G)-*пространством* (($\mathfrak{H}$, G)-*пространством*).

В п. 5 мы выяснили, что для того, чтобы $\mathfrak{B}$-пространство $\mathfrak{E}$ было ($\mathfrak{B}$, G)-пространством, необходимо и достаточно, чтобы

$$|G(x, y)| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\| \qquad (C > 0;\ x, y \in \mathfrak{E}). \tag{2.5}$$

Отнесем теперь каждому вектору $x \in \mathfrak{E}$ линейный функционал

$$h_x = h_x(y) = \overline{G(x, y)} \in \mathfrak{E}^*,$$

где, как обычно, $\mathfrak{E}^*$ — пространство, сопряженное с (комплексным) $\mathfrak{B}$-пространством $\mathfrak{E}$.

Рассмотрим теперь линейный оператор $G^{\text{л}}$, действующий из $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{E}^*$ и относящий вектору $x \in \mathfrak{E}$ функционал $h_x \in \mathfrak{E}^* : h_x = G^{\text{л}}x$. Оператор $G^{\text{л}}$ назовем *левым оператором Грама формы* $G(x, y)$ *на* $\mathfrak{E}$. Из (2.5) следует, что

$$\|G^{\text{л}}x\| = \|h_x\| = \sup_{\|y\|=1} |G(x, y)| \leqslant C\,\|x\| \qquad (x \in \mathfrak{E}),$$

т. е. $G^{\text{л}}$ — ограниченный оператор. Если ввести для функционалов $h \in \mathfrak{E}^*$ и векторов $y \in \mathfrak{E}$ обозначение

$$\overline{h(y)} = (h, y),$$

то для формы $G(x, y)$ получим представление

$$G(x, y) = \overline{h_x(y)} = (h_x, y) = (G^{\text{п}}x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}),$$

оправдывающее нашу терминологию.

Совершенно аналогично можно ввести *правый оператор Грама* $G^{\text{п}}$ *формы* $G(x, y)$ *на* $\mathfrak{E}$ и получить представление

$$G(x, y) = (x, G^{\text{п}}y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

Здесь линейный непрерывный оператор $G^{п}$ относит каждому вектору $y \in \mathfrak{E}$ линейный функционал $G^{п}y = f_y = f_y(x) = G(x, y) \in \mathfrak{E}^*$, а через (x, f) обозначено число

$$f(x) = \overline{(f, x)} \qquad (x \in \mathfrak{E},\ f \in \mathfrak{E}^*).$$

В частном случае эрмитовой G-метрики, очевидно, $G^{л} = G^{п} \equiv G$. В этом случае мы будем говорить просто об *операторе Грама G формы $G(x, y)$ на $\mathfrak{E}$*:

$$G(x, y) = (Gx, y) = (x, Gy) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

7. Введенные выше определения становятся особенно естественными, если $\mathfrak{E}$ есть $(\mathfrak{H}, G)$-пространство. В этом случае $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}$ и символ $(x, f) = \overline{(f, x)}$ означает обычное скалярное произведение $(x, f \in \mathfrak{E})$, так что формула

$$G(x, y) = (G^{л}x, y) = (x, G^{п}y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2.6}$$

выражает известную теорему о представлении ограниченного билинейного функционала в гильбертовом пространстве ([56], стр. 63), причем ограниченные операторы $G^{л}$ и $G^{п}$ взаимно сопряжены:

$$(G^{л})^* = G^{п}, \qquad (G^{п})^* = G^{л}.$$

Из (2.6) видно, между прочим, что левая (правая) невырожденность пространства $\mathfrak{E}$ равносильна отсутствию у оператора $G^{л}$ $(G^{п})$ собственного значения $\lambda = 0$.

Перейдем теперь к более детальному рассмотрению $(\mathfrak{H}, G^{э})$-пространств. В этом случае $G = G^*$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{E}$. Его спектр $\sigma(G)$ представляет собой ограниченное замкнутое множество действительных чисел. Если $0 \notin \sigma(G)$, то оператор G непрерывно обратим и его спектральное разложение имеет вид

$$G = \int_{m}^{-\varepsilon} \lambda\, dE_\lambda + \int_{\varepsilon}^{M} \lambda\, dE_\lambda \qquad (\varepsilon > 0,\ E_m = 0,\ E_M = I). \tag{2.7}$$

3°. *Если $0 \notin \sigma(G)$, то рассматриваемую в $\mathfrak{E}$ гильбертову топологию τ со скалярным произведением (x, y) можно заменить равносильной гильбертовой топологией τ' со скалярным произведением $(x, y)'$, по отношению к которому оператор Грама формы $G(x, y)$ приобретает вид*

$$G' = P_+ - P_- \equiv J,$$

где P_+, P_- — ортопроекторы (ортогональность по отношению к скалярному произведению $(x, y)'$), причем $P_+P_- = 0$, $P_+ + P_- = I$.

Для доказательства достаточно выбрать $P_- = E_0$, $P_+ = I - E_0$, где E_λ — введенное выше разложение единицы оператора G, и положить

$$(x, y)' = (GP_+x, y) - (GP_-x, y) = (GJx, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}). \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) теперь легко следует

$$\varepsilon(x, x) \leqslant (x, x)' \leqslant \|GJ\|(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{E}),$$

т. е. эквивалентность топологий τ и τ'.

Ортогональность (самосопряженность) проектора P_+ (а значит, и P_-) в скалярном произведении $(x, y)'$ проверяется непосредственно: поскольку G коммутирует с $P_+=I-E_0$, то

$$(P_+x, y)'=(GP_+x, y)=(P_+Gx, y)=(Gx, P_+y)=(x, P_+y)'.$$

Наконец, легко видеть, что $J^2=I$ и, стало быть,

$$G(x, y)=(Gx, y)=(GJ^2x, y)=(Jx, y)' \qquad (x, y\in\mathfrak{E}).$$

В дальнейшем разобранный только что случай, когда эрмитов оператор Грама формы $G(x, y)$ имеет вид $G=J=P_+-P_-$, играет важную роль (см. § 6). Гильбертово пространство $\mathfrak{E}$ в этом случае мы будем называть *пространством с J-метрикой* или *J-пространством*.

Наконец, возможен случай, когда заданная J-метрика такова, что $\varkappa=\min(\dim P_+, \dim P_-)<\infty$. Число $\varkappa$ назовем *рангом индефинитности* J-метрики, а пространство $\mathfrak{E}$ с такой J-метрикой обозначим $\Pi_\varkappa$ (для определенности в дальнейшем будем считать $\varkappa=\dim P_+$).

Пространство $\Pi_\varkappa$ допускает также аксиоматическое описание, которое мы приведем в § 3, п. 4. Кроме того, как мы увидим ниже, один из результатов § 6 позволит по-новому охарактеризовать пространства $\Pi_\varkappa$ среди всех J-пространств (теорема 6.5).

8. Топология τ в $\mathfrak{E}$ называется *лево (право-)согласующейся с G-метрикой*, если она является лево(право-)подчиняющей и имеет место теорема Фреше — Рисса: любой линейный τ-непрерывный функционал $f(x)$ $(x\in\mathfrak{E})$ представим в виде

$$f(x)=G(x, y_0) \tag{2.9}$$

(соответственно $f(x)=\overline{G(y_0,x)}$) при некотором $y_0\in\mathfrak{E}$.

Единственность таких представлений, очевидно, эквивалентна соответствующей невырожденности $\mathfrak{E}$.

Теорема 2.3. *Топология $\tau_0^{л}(\mathfrak{E},G)$ $(\tau_0^{п}(\mathfrak{E},G))$ является слабейшей топологией, лево(право-)согласующейся с G-метрикой.*

Доказательство проведем для топологии $\tau_0^{л}=\tau_0^{л}(\mathfrak{E}, G)$. Если линейный функционал $f(x)$ непрерывен в этой топологии, то на основании предложения 1° найдутся такие векторы $y_1, \ldots, y_n\in\mathfrak{E}$ и такое число M, что

$$|f(x)|\leqslant M\max_{1\leqslant i\leqslant n}|G(x, y_i)|.$$

Отсюда следует, что если

$$G(x, y_i)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{2.10}$$

то $f(x)=0$. Если (2.10) справедливо при всех $x\in\mathfrak{E}$, то $f=0$ и, следовательно, представление (2.9) имеет место при $y_0=0$.

Допустим теперь, что (2.10) верно не при всех $x\in\mathfrak{E}$. Рассмотрим множество n-мерных векторов

$$\overline{g}_x=\{G(x, y_1), \ldots, G(x, y_n)\}.$$

Пусть $x_1, \ldots, x_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ таковы, что векторы $\bar{g}_{x_1}, \ldots, \bar{g}_{x_n}$ линейно независимы, а при произвольном x вектор $\bar{g}_x$ является их линейной комбинацией:

$$\bar{g}_x = \lambda_1 \bar{g}_{x_1} + \ldots + \lambda_k \bar{g}_{x_k} \qquad (\lambda_j = \lambda_j(x), \ j = 1, 2, \ldots, k).$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} G(x, y_i) &= G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, \ y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ G(x - (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k), y_i) &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{2.11}$$

откуда, как было пояснено в начале доказательства, вытекает равенство

$$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k). \tag{2.12}$$

Пусть теперь $\mu_1, \ldots, \mu_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\mu_1 G(x_j, y_1) + \ldots + \mu_n G(x_j, y_n) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

которая совместна, так как строки ее коэффициентов линейно независимы. Тогда справедливо равенство

$$G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, \ \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n) = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k). \tag{2.13}$$

Но из (2.11) следует, что

$$G(x, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n) = G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, \ \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n). \tag{2.14}$$

Учитывая (2.12), (2.13) и (2.14), получим, что для произвольного x

$$f(x) = G(x, \ \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n),$$

т. е. справедливо представление (2.9) при

$$y_0 = \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n.$$

Так как на основании предложения 2° $\tau_0^{\text{л}}$ является слабейшей топологией, левоподчиняющей G-метрику, то теорема 2.3 доказана.

Топология, согласующаяся с G-метрикой, как будет показано ниже, определяется, вообще говоря, неоднозначно. В важном для приложений случае рефлексивного $\mathfrak{B}$-пространства с G-метрикой (($\mathfrak{B}^r$, G)-*пространства*) мы укажем сильнейшую из таких топологий. Для этого нам понадобится следующая

Т е о р е м а 2.4 [1]). *Если локально выпуклые топологии τ' и τ'' в $\mathfrak{E}$ лево (право-)согласуются с G-метрикой и при этом τ' полунормируема, то*

$$\tau' \geqslant \tau''. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть τ' задается полунормой $p(x)$, а τ'' — семейством полунорм $p_\alpha(x)$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ и эти топологии левосогласуются

---

[1]) Теорема 2.4 остается справедливой и тогда, когда τ' задается счетной системой полунорм, т. е. метризуема (ср. [51], гл. IV, § 2, предложение 6, где все изложение проводится для отделимых топологий; в этом случае τ' является так называемой топологией Макки).

с G-метрикой. Если (2.15) неверно, то существует такая τ''-окрестность $\mathfrak{U}^{(\varepsilon)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(0)$, что для любой τ'-окрестности $\mathfrak{B}^{\delta}(0)$ множество

$$\mathfrak{R}_{\delta}=\mathfrak{B}^{\delta}(0)\setminus\mathfrak{U}^{\varepsilon}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(0)$$

непусто.

Возьмем $x_n\in\mathfrak{R}_{1/n}$. Очевидно, найдется такое натуральное $k_0\leqslant k$, что для бесконечного множества натуральных чисел n_i справедливы неравенства

$$p(x_{n_i})<\frac{1}{n_i}, \qquad p_0(x_{n_i})\equiv p_{\alpha_{k_0}}(x_{n_i})\geqslant\varepsilon.$$

Положим $y_i=n_ix_{n_i}$. Тогда

$$p(y_i)<1 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.16}$$

$$p_0(y_i)\geqslant\varepsilon n_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.17}$$

Рассмотрим теперь в $\mathfrak{E}$ линеал $\mathfrak{L}_0$, состоящий из тех векторов $x\in\mathfrak{E}$, для которых $p_0(x)=0$. Образуем фактор-пространство $\widetilde{\mathfrak{E}}=\mathfrak{E}/\mathfrak{L}_0$ и для $X\in\mathfrak{E}$ введем норму $\|X\|=p_0(x)$, где $x\in X$. Легко видеть, что таким образом $\|X\|$ определяется однозначно и, следовательно, $\widetilde{\mathfrak{E}}$ превращается в нормированное пространство. Пусть $F(X)$ — произвольный линейный непрерывный функционал в $\widetilde{\mathfrak{E}}$ $(F\in\widetilde{\mathfrak{E}}^*)$: $|F(X)|\leqslant\|F\|\,\|X\|$. Определим линейный функционал $f(x)$ в пространстве $\mathfrak{E}$ по формуле

$$f(x)=F(X)\ \text{для}\ x\in X.$$

Очевидно,

$$|f(x)|\leqslant\|F\|\,p_0(x)$$

и, значит, на основании 1° $f(x)$ τ''-непрерывен. Следовательно, существует такое y_0, что $f(x)\equiv G(x,y_0)$, откуда вытекает τ'-непрерывность функционала $f(x)$. Воспользовавшись снова предложением 1°, получим, что при всех $x\in\mathfrak{E}$

$$|f(x)|\leqslant M_f p(x)$$

для некоторого $M_f>0$. Следовательно, на основании (2.16) $|f(y_i)|\leqslant M_f$ и, стало быть,

$$|F(Y_i)|\leqslant M_f \qquad (y_i\in Y_i\in\widetilde{\mathfrak{E}}, i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, для каждого $F\in\widetilde{\mathfrak{E}}^*$ ограничено множество чисел $\{F(Y_i)\}$, а следовательно, на основании теоремы Банаха — Штейнгауза (см. [57], стр. 255) в $\widetilde{\mathfrak{E}}$ ограничено множество $\{Y_i\}$. Но это противоречит неравенствам

$$\|Y_i\|\geqslant\varepsilon n_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots),$$

являющимся следствиями (2.17). Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (2.15). Таким образом, теорема 2.4 доказана.

Следствие. *Если две полунормируемые топологии лево(право-)-согласуются с G-метрикой, то эти топологии равносильны.*

Предположим теперь, что $\mathfrak{E}$ есть $(\mathfrak{B},G)$-пространство и пусть $G^{\text{л}}$ и $G^{\text{п}}$ соответственно левый и правый операторы Грама формы $G(x, y)$ (см. п. 6). Определим в $\mathfrak{E}$ две полунормируемые топологии: $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ с полунормой $p^{\text{л}}(x) = \|G^{\text{л}}x\|$ и $\tau_1^{\text{п}}(\mathfrak{E}, G)$ с полунормой $p^{\text{п}}(x) = \|G^{\text{п}}x\|$.

Теорема 2.5. *В $(\mathfrak{B}^r, G)$-пространстве $\mathfrak{E}$ топология $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ $(\tau_1^{\text{п}}(\mathfrak{E}, G))$ является сильнейшей из локально выпуклых топологий, лево(право-)согласующихся с G-метрикой.*

Доказательство. То, что $\tau_1^{\text{л}} = \tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ левоподчиняет G-метрику, следует из неравенства (обозначения см. в п. 6)

$$|G(x, y)| = |h_x(y)| \leqslant \|h_x\| \|y\| = \|G^{\text{л}}x\| \|y\| = \|y\| p^{\text{л}}(x).$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольный $\tau_1^{\text{л}}$-непрерывный функционал в $\mathfrak{E}$:

$$|f(x)| \leqslant C_f p^{\text{л}}(x). \tag{2.18}$$

Определим на $\mathfrak{R}(G^{\text{л}}) (\subset \mathfrak{E}^*)$ области значений оператора $G^{\text{л}}$ функционал $F(h)$ равенством

$$F(h) = f(x), \quad \text{если} \quad h = G^{\text{л}}x. \tag{2.19}$$

Функционал F однозначен, так как из равенства $G^{\text{л}}x_1 = G^{\text{л}}x_2$ следует, что $p^{\text{л}}(x_1 - x_2) = \|G^{\text{л}}(x_1 - x_2)\| = 0$, и, значит, на основании (2.18) $f(x_1) = f(x_2)$. Линейность функционала F очевидна. Поскольку при $h \in \mathfrak{R}(G^{\text{л}})$, $h = G^{\text{л}}x$ имеем

$$|F(h)| = |f(x)| \leqslant C_f \|G^{\text{л}}x\| = C_f \|h\|,$$

то, воспользовавшись аналогом теоремы Хана — Банаха для комплексных пространств (см. [51], стр. 139), расширим F до непрерывного функционала в $\mathfrak{E}^*$. Так как $\mathfrak{E}$ рефлексивно, то найдется такой вектор $y_0 \in \mathfrak{E}$, что для $h \in \mathfrak{E}^*$

$$F(h) = \overline{h(y_0)}.$$

Используя (2.19), получим, что при $x \in \mathfrak{E}$

$$f(x) = \overline{h(y_0)} = (h, y_0) = (G^{\text{л}}x, y_0) = G(x, y_0),$$

т. е. для функционала f справедливо представление (2.9). Таким образом, топология $\tau_1^{\text{л}}$ левосогласуется с G-метрикой, а так как $\tau_1^{\text{л}}$ полунормируема, то на основании теоремы 2.4 она является сильнейшей из таких топологий.

Следствие. *Для того чтобы в $(\mathfrak{B}^r, G)$-пространстве $\mathfrak{E}$ некоторая локально выпуклая топология τ лево(право-)согласовалась с G-метрикой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G) \leqslant \tau \leqslant \tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$$
$$(\tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{E}, G) \leqslant \tau \leqslant \tau_1^{\text{п}}(\mathfrak{E}, G)).$$

Заметим, что, как показывает пример пространства $\mathfrak{E} = C(0, 1)$ с G-метрикой, порождаемой формой

$$G(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt \qquad (x, y \in \mathfrak{E}),$$

требование рефлексивности $\mathfrak{E}$ в теореме 2.5 существенно.

§ 3. Линеалы и подпространства в G-пространствах

1. Пусть $\mathfrak{E}$ — некоторое G-пространство. Мы рассмотрим его сперва чисто алгебраически, т. е. безотносительно к какой-либо топологии. Простоты ради G-метрику будем считать эрмитовой, хотя, как увидит читатель, наши рассуждения остаются по большей части справедливыми и в общем случае, если только вместо G-ортогональности, изотропности, невырожденности и т. д. иметь в виду соответственно левую (правую) G-ортогональность, изотропность, невырожденность и т. д. В тех же пунктах, где эрмитовость G-метрики существенна (как, например, пп. 2, 3, 4), мы ее специально оговариваем.

Невырожденный линеал $\mathfrak{L}\,(\subset\mathfrak{E})$ назовем *максимальным невырожденным*, если он не содержится ни в каком другом невырожденном линеале из $\mathfrak{E}$. Имеет место следующий *принцип максимальности*:

1°. *Всякий невырожденный линеал $\mathfrak{L}\,(\subset\mathfrak{E})$ содержится в некотором максимальном невырожденном линеале.*

В самом деле, если $\{\mathfrak{L}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — вполне упорядоченное относительно включения $\mathfrak{L}_\alpha\subset\mathfrak{L}_\beta$ семейство линеалов из $\mathfrak{E}$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in A}\mathfrak{L}_\alpha$ есть снова линеал, причем невырожденный, если все $\mathfrak{L}_\alpha\,(\alpha\in A)$ невырождены.

Таким образом, множество всех невырожденных линеалов индуктивно упорядочено по включению, и для установления 1° остается применить лемму Цорна.

G-ортогональным дополнением множества $\mathfrak{M}\,(\subset\mathfrak{E})$ называется множество $\mathfrak{M}'$ всех векторов из $\mathfrak{E}$, G-ортогональных к $\mathfrak{M}$. Легко видеть, что $\mathfrak{M}'$ — линеал. Если $\mathfrak{L}$ — линеал из $\mathfrak{E}$, то $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}'$ есть, очевидно, изотропный линеал для $\mathfrak{L}$, так что условие невырожденности линеала $\mathfrak{L}$ записывается: $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}'=\{0\}$. Для G-ортогональных дополнений имеют место некоторые очевидные свойства, как, например:

$$\mathfrak{L}\subset(\mathfrak{L}')'=\mathfrak{L}''. \tag{3.1}$$

$$\text{Если }\ \mathfrak{L}\subset\mathfrak{M},\ \text{ то }\ \mathfrak{L}'\supset\mathfrak{M}',\ \text{ а }\ \mathfrak{L}''\subset\mathfrak{M}'', \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{L}'''=\mathfrak{L}', \tag{3.3}$$

$$(\mathfrak{L}+\mathfrak{M})'=\mathfrak{L}'\cap\mathfrak{M}', \tag{3.4}$$

$$(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M})'\supset\mathfrak{L}'+\mathfrak{M}'. \tag{3.5}$$

Поясним, что в двух последних формулах, как и всюду в дальнейшем, знаком «$+$» обозначено алгебраическое сложение множеств, т. е. $\mathfrak{L}+\mathfrak{M}$ — это то же, что (линейная оболочка) л. о. $\{\mathfrak{L},\mathfrak{M}\}$. Если при этом $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}=\{0\}$, то $\mathfrak{L}+\mathfrak{M}=\mathfrak{L}\dot{+}\mathfrak{M}$, т. е. сумма прямая. Формулы (3.1) — (3.5) справедливы, очевидно, не только для линеалов, а для любых множеств $\mathfrak{L},\mathfrak{M}\subset\mathfrak{E}$.

Линеал $\mathfrak{E}_0=\mathfrak{E}'$ есть изотропный линеал пространства $\mathfrak{E}$ (§ 2, п. 1), и для любого линеала $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{L}'\supset\mathfrak{E}_0. \tag{3.6}$$

2°. *Линеал* $\mathfrak{L}$ $(\subset)$ $\mathfrak{E}$ *является максимальным невырожденным тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{L} \dot{+} \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}. \tag{3.7}$$

В самом деле, невырожденность $\mathfrak{L}$ непосредственно следует из определения изотропного линеала $\mathfrak{E}_0$ в $\mathfrak{E}$ и прямого разложения (3.7), причем $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}_0$. Если $\mathfrak{L}_1$ — невырожденный линеал и $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_1$, то $\mathfrak{L}_1' \subset \mathfrak{L}' = \mathfrak{E}_0$, так что в силу (3.6) $\mathfrak{L}_1' = \mathfrak{E}_0$. Но $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_1' = \{0\}$, так что $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{E}_0 = \{0\}$ и $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$, т. е. $\mathfrak{L}$ — максимальный невырожденный линеал.

Обратно, если линеал $\mathfrak{L}$ максимальный невырожденный, то $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{E}_0 = \{0\}$. Представим $\mathfrak{E}$ в виде прямой суммы (см., например, [58], стр. 9):

$$\mathfrak{E} = (\mathfrak{L} \dot{+} \mathfrak{E}_0) \dot{+} \mathfrak{M} = (\mathfrak{L} \dot{+} \mathfrak{M}) \dot{+} \mathfrak{E}_0,$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторый линеал. По доказанному выше отсюда следует, что $\mathfrak{L} \dot{+} \mathfrak{M}$ — максимальный невырожденный линеал, но поскольку уже $\mathfrak{L}$ обладал этим свойством, то $\mathfrak{M} = \{0\}$ и разложение (3.7) установлено.

Из предложений 1° и 2° ясно, что «выделение» из $\mathfrak{E}$ изотропного линеала $\mathfrak{E}_0$ с помощью разложения вида (3.7) не является однозначным. Впрочем, этот факт очевиден даже для конечномерного (скажем, двумерного) пространства $\mathfrak{E}$ с одномерным изотропным линеалом $\mathfrak{E}_0$ [1]).

2. В случае эрмитовой G-метрики число $G(x, x)$ для любого $x \in \mathfrak{E}$ вещественно. В зависимости от того, положительно оно, отрицательно или равно нулю, вектор x назовем *положительным*, *отрицательным* или *нулевым* соответственно. Линеал $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$, все векторы x $(\neq 0)$ которого положительны (отрицательны, нулевые), назовем *положительным* (*отрицательным*, *нулевым*) линеалом. Положительные и отрицательные линеалы из $\mathfrak{E}$ объединим названием *дефинитные* линеалы. Естественным образом определяются *неотрицательные* и *неположительные* линеалы, а также *максимальные* положительные (отрицательные, неотрицательные, неположительные, нулевые) линеалы из $\mathfrak{E}$. Для каждой из перечисленных выше категорий линеалов имеет место соответствующий *принцип максимальности*, доказываемый совершенно аналогично предложению 1°.

Пусть пространство $\mathfrak{E}$ допускает разложение в прямую G-ортогональную сумму

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dot{+} \mathfrak{E}_+ \dot{+} \mathfrak{E}_-,$$

где $\mathfrak{E}_0$ — изотропный, а $\mathfrak{E}_+$ и $\mathfrak{E}_-$ — положительный и отрицательный в $\mathfrak{E}$ линеалы соответственно. Такое разложение мы назовем *каноническим разложением* пространства $\mathfrak{E}$. Легко видеть, что *компоненты* $\mathfrak{E}_+$ *и* $\mathfrak{E}_-$ *канонического разложения являются максимальными положительным и отрицательным линеалами в* $\mathfrak{E}$ *соответственно.*

Простейший пример канонического разложения доставляет $(\mathfrak{H}, G^э)$- пространство $\mathfrak{E}$, в котором

$$G(x, y) = (Gx, y),$$

[1]) Последнее обстоятельство не помешало А. Ульману ([42], §2) утверждать однозначность разложения (3.7).

где оператор Грама G — ограниченный эрмитов оператор в $\mathfrak{E}$. Если спектральное разложение G имеет вид

$$G = \int_m^M \lambda\, dE_\lambda \qquad (E_{\lambda-0} = E_\lambda; \quad m < \lambda \leqslant M),$$

то ортопроекторы

$$P_- = \int_m^0 dE_\lambda, \qquad P_0 = E_{+0} - E_0, \qquad P_+ = \int_{+0}^M dE_\lambda$$

определяют три взаимно ортогональных (в гильбертовой $\mathfrak{H}$-метрике) подпространства $\mathfrak{E}_0 = P_0\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}_- = P_-\mathfrak{E}$. Нетрудно понять, что эти три подпространства $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ задают каноническое (а значит, ортогональное и в G-метрике) разложение гильбертова пространства $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dot{+} \mathfrak{E}_+ \dot{+} \mathfrak{E}_-$ (см., например, [11]). В частном случае, когда $\mathfrak{E}_0 = \{0\}$ и, более того, интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ свободен от спектра оператора G, этот пример уже встречался выше, в § 2, п. 7, где он привел нас к понятию J-метрики.

3. Вопрос о каноническом разложении $G^э$-пространства $\mathfrak{E}$ тесно связан с упоминавшейся в § 2, п. 5 проблемой мажорант. В самом деле, если пространство $\mathfrak{E}$ допускает каноническое разложение

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dot{+} \mathfrak{E}_+ \dot{+} \mathfrak{E}_-, \tag{3.8}$$

о эрмитова билинейная форма $H(x,y)$, заданная соотношениями

$$H(x, y) = G(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{E}_+;$$
$$H(x, y) = -G(x,y), \qquad x, y \in \mathfrak{E}_-;$$
$$H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_0) = H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_+) = H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_-) = H(\mathfrak{E}_+, \mathfrak{E}_-) = 0,$$

является неотрицательной мажорантой для формы $G(x,y)$. В частности, если $\mathfrak{E}_0 = \{0\}$, то $H(x, y)$ — эрмитово-положительная мажоранта. Если же $\mathfrak{E}_0 \neq \{0\}$, то для построения эрмитово-положительной мажоранты достаточно прибавить к $H(x, y)$ любую эрмитово-положительную на $\mathfrak{E}$ форму.

Итак, *каноническое разложение* (3.8) *приводит к эрмитово-положительным мажорантам данной G-метрики.* Поэтому пример немажорируемой G-метрики, приведенный в § 2, п. 4, показывает, в частности, что *существуют G-пространства, не допускающие канонических разложений*[1]. В связи с этим возникает проблема: *допускает ли хотя бы одно каноническое разложение произвольное $G^э$-пространство с мажорируемой G-метрикой?* Ответ на этот вопрос, как мы видели в п. 2, утвердителен, если для данной G-метрики существует эрмитово-положительная мажоранта $H(x,y)$, порождающая в $\mathfrak{E}$ полную гильбертову топологию. Если же $H(x, y)$ порождает (неполную) предгильбертову топологию, то задача сильно осложняется.

---

[1]) Примечание при корректуре. Как нам стало известно, более простой пример «неразложимого» пространства был приведен в работе [65] еще в 1946 г. Анализ этого примера показывает, что построенная в нем G-метрика является немажорируемой (ср. §2, пп. 4,5).

4. Пусть $\mathfrak{E}$ — невырожденное $G^э$-пространство, допускающее каноническое разложение

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dot{+} \mathfrak{E}_-.$$

Пространства $\mathfrak{E}_+$ и $\mathfrak{E}_-$ являются отделимыми предгильбертовыми пространствами по отношению к скалярным произведениям $G(x, y)$ и $-G(x, y)$ соответственно. В случае их полноты пространство $\mathfrak{E}$ будет (полным) гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\left.\begin{array}{c} (x, y) = G(x_+, y_+) - G(x_-, y_-) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}), \\ x = x_+ + x_-, \; y = y_+ + y_-, \qquad x_+, y_+ \in \mathfrak{E}_+, \qquad x_-, y_- \in \mathfrak{E}_-, \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

а $\mathfrak{E}_+$ и $\mathfrak{E}_-$ — его взаимно ортогональными (замкнутыми) подпространствами. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathfrak{E}$ есть просто гильбертово пространство с J-метрикой (см. § 2, п. 7).

Если же хотя бы одно из пространств $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ не является полным, то путем обычного их пополнения и непрерывного продолжения формы $G(x, y)$ мы снова придем к пространству с J-метрикой. Это же пространство мы получим, очевидно, если сразу пополним все $\mathfrak{E}$ по скалярному произведению (3.9) и непрерывно относительно (3.9) продолжим форму $G(x, y)$.

Описанная процедура позволяет, в частности, по-новому взглянуть на пространства $\Pi_\varkappa$ (см. § 2, п. 7). Последние можно задавать аксиоматически следующим образом. Пусть задано $G^э$-пространство $\mathfrak{E}$, обладающее свойствами:

I. $\mathfrak{E}$ невырождено.

II. $\mathfrak{E}$ содержит $\varkappa$-мерный $(0 < \varkappa < \infty)$ положительный линеал и не содержит положительных линеалов большей размерности (предполагается, что $2\varkappa \leqslant \dim \mathfrak{E} \leqslant \infty$).

Из этих двух требований немедленно вытекает (см., например, [7]) каноническое разложение $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dot{+} \mathfrak{E}_-$, где $\dim \mathfrak{E}_+ = \varkappa$. Если окажется, что $\mathfrak{E}_-$ — полное гильбертово пространство (относительно нормы $\|x\| = |G(x, x)|^{1/2}$, $x \in \mathfrak{E}_-$), то $\mathfrak{E}$ есть пространство $\Pi_\varkappa$. В противном случае мы придем к пространству $\Pi_\varkappa$, предварительно пополнив $\mathfrak{E}$ только что описанным способом (ср. [7], теорема 1.4).

5. Пусть τ — произвольная топология, подчиняющая (§ 2, п. 3) данную G-метрику в G-пространстве $\mathfrak{E}$. В силу τ-непрерывности всех функционалов $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ (соответственно $h_{x_0}(y) = \overline{G(x_0, y)}$) *$G$-ортогональное дополнение $\mathfrak{M}'$ любого множества $\mathfrak{M}$ $(\subset \mathfrak{E})$ всегда τ-замкнуто* (§ 2, п. 2). Более того, легко видеть, что

$$(\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)})' = \overline{(\mathfrak{M}')}^{(\tau)} = \mathfrak{M}'. \tag{3.10}$$

Заметим, что, не нарушая этого соотношения, в первом члене можно заменить множество $\mathfrak{M}$ его линейной оболочкой. Впрочем, и в приводимой ниже теореме 3.1 вместо линеала $\mathfrak{L}$ можно брать произвольное множество из $\mathfrak{E}$, но тогда под $\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}$ нужно понимать τ-замкнутую линейную оболочку $\mathfrak{L}$.

Теорема 3.1. *Если τ — произвольная согласующаяся с G-метрикой топология в $\mathfrak{E}$, а $\mathfrak{L}$ — произвольный линеал из $\mathfrak{E}$, то $\mathfrak{L}''$ совпадает с τ-замыканием линеала $\mathfrak{L}$:*

$$\mathfrak{L}'' = \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}.$$

Доказательство. Напомним прежде всего, что согласующаяся с G-метрикой τ-топология подчиняет эту метрику (§ 2, п. 8) и потому, в силу сказанного в начале настоящего пункта, $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}''$ τ-замкнуты. А так как $\mathfrak{L}'' \supset \mathfrak{L}$, то

$$\mathfrak{L}'' \supset \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}.$$

Для того чтобы установить справедливость обратного включения, возьмем $x_0 \notin \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}$. Это значит, что существует такая τ-окрестность $\mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(x_0)$, определяемая системой неравенств

$$p_{\alpha_i}(x - x_0) < \delta \quad (i = 1, \ldots, k)$$

(полунормы $p_\alpha(x)$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ задают топологию τ в $\mathfrak{E}$ (§ 2, п. 2)), что $\mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(x_0) \cap \mathfrak{L}$ пусто. Иначе говоря, если полунорма $p(x)$ определяется равенством

$$p(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} p_{\alpha_i}(x),$$

то

$$\inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x' - x_0) \geqslant \delta. \tag{3.11}$$

Рассмотрим на $\mathfrak{E}$ функционал

$$q(x) = \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x - x') \tag{3.12}$$

и докажем, что $q(x)$ — полунорма. Действительно,

α) $q(x) \geqslant 0$.

β) $q(\lambda x) = \inf\limits_{x' \in \mathfrak{L}} p(\lambda x - x') = \inf\limits_{x' \in \mathfrak{L}} p(\lambda x - \lambda x') =$

$$= |\lambda| \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x - x') = |\lambda|\, q(x).$$

γ) Если $x_1, x_2 \in \mathfrak{E}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x_1', x_2' \in \mathfrak{L}$, что

$$p(x_1 - x_1') < q(x_1) + \varepsilon, \qquad p(x_2 - x_2') < q(x_2) + \varepsilon.$$

Положим $x' = x_1' + x_2' \in \mathfrak{L}$. Тогда

$$q(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1 + x_2 - x') \leqslant p(x_1 - x_1') + p(x_2 - x_2') < q(x_1) + q(x_2) + 2\varepsilon$$

и, в силу произвольности ε,

$$q(x_1 + x_2) \leqslant q(x_1) + q(x_2).$$

Рассмотрим теперь одномерный линеал $\mathfrak{L}_0 = \{x_0\}$ и определим на $\mathfrak{L}_0$ линейный функционал $f(x)$ равенством

$$f(\alpha x_0) = \alpha\delta.$$

Так как $q(\alpha x_0) = |\alpha|\, q(x_0)$, а в силу (3.11) и (3.12) $q(x_0) \geqslant \delta$, то на $\mathfrak{L}_0$

$$|f(x)| \leqslant q(x). \tag{3.13}$$

По теореме Хана — Банаха $f(x)$ можно распространить на все $\mathfrak{E}$ с сохранением (3.13). Из (3.12) следует, что $q(x) \leqslant p(x)$ и, следовательно (§ 2, 1°),

$f(x)$ τ-непрерывен. Так как τ согласуется с G, то найдется такой вектор $y_0 \in \mathfrak{E}$, что

$$f(x) = G(x, y_0).$$

В силу (3.12) $q(x) = 0$ при $x \in \mathfrak{L}$, и следовательно, из (3.13) вытекает, что для $x \in \mathfrak{L}$ $G(x, y_0) = f(x) = 0$ или $y_0 \in \mathfrak{L}'$. Так как $G(x_0, y_0) = f(x_0) = \delta \neq 0$, то $x_0 \notin (\mathfrak{L}')' = \mathfrak{L}''$. Таким образом, доказано, что из $x_0 \notin \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}$ следует $x_0 \notin \mathfrak{L}''$, или

$$\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} \supseteq \mathfrak{L}''.$$

Теорема доказана.

Как следствие получим:

3°. *Для того чтобы $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы линеал $\mathfrak{L}$ был τ-замкнутым, где τ—топология, согласующаяся с G-метрикой.*

В других терминах достаточные условия для равенства $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$ будут получены ниже, в § 4.

Мы будем говорить, что $\mathfrak{L}$ — *τ-плотный линеал в* $\mathfrak{E}$, если

$$\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}.$$

4°. *Для того чтобы линеал $\mathfrak{L}$ был τ-плотным в $\mathfrak{E}$ (τ — топология, согласующаяся с G на $\mathfrak{E}$), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}' \; (= \mathfrak{E}_0), \tag{3.14}$$

где $\mathfrak{E}_0$ — изотропный в $\mathfrak{E}$ линеал. В частности, если $\mathfrak{E}$ невырождено, то (3.14) *принимает вид*

$$\mathfrak{L}' = \{0\}.$$

В самом деле, если $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}'$, то $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{E}'' = \mathfrak{E}$, т. е. $\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}$. Обратно, из $\mathfrak{L}'' = \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}$ следует $\mathfrak{L}''' = \mathfrak{E}'$, а стало быть (см. (3.3)), $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}'$.

5°. *Сумма $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ тогда и только тогда τ-плотна в $\mathfrak{E}$ (предположения о τ те же, что в 4°), когда каждый изотропный в $\mathfrak{L}''$ вектор изотропен в $\mathfrak{E}$ (т. е. $\mathfrak{L}'' \cap (\mathfrak{L}'')' = \mathfrak{E}_0$). В частности, если $\mathfrak{E}$ невырождено, то условие сводится к невырожденности $\mathfrak{L}''$.*

Доказательство следует из предложения 4° и правил (3.4), (3.3).

Критериям *равенства* $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{E}$ посвящена значительная часть § 4 (а для дефинитных линеалов $\mathfrak{L}$ — и § 5).

6. Этот пункт мы посвятим свойствам нулевых линеалов $G^{\text{э}}$-пространств (см. п. 2). При этом доказательства приводятся лишь в тех случаях, когда результаты являются новыми. Доказательства остальных фактов читатель может найти в статье Э. Шайбе [50], откуда они и почерпнуты.

6°. *Линеал $\mathfrak{L}$ $(\subseteq \mathfrak{E})$ является изотропным для $\mathfrak{L}'$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}$ — нулевой линеал и $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$.*

Для облегчения проверки этого и последующих предложений напомним, что всякий нулевой линеал $\mathfrak{L}$ характеризуется соотношением $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}'$.

Теорема 3.2. *Нулевой линеал $\mathfrak{L}$ $(\subseteq \mathfrak{E})$ является максимальным нулевым тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$, а $\mathfrak{L}'$ — семидефинитный (т. е. неотрицательный либо неположительный) линеал.*

Следствие. *Всякий максимальный нулевой линеал* $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ *является либо максимальным неотрицательным, либо максимальным неположительным линеалом, либо, наконец, обладает обоими этими свойствами одновременно.*

В самом деле, предположив противное, мы немедленно получим, что $\mathfrak{L}'$ содержит как положительные, так и отрицательные векторы, вопреки теореме 3.2.

Нулевой линеал $\mathfrak{L}\,(\subset \mathfrak{E})$, являющийся одновременно максимальным неотрицательным и максимальным неположительным линеалом, назовем *гипермаксимальным.*

Теорема 3.3. *Линеал* $\mathfrak{L}\,(\subset \mathfrak{E})$ *является гипермаксимальным нулевым тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}'$.

Доказательство. Как и для всякого нулевого линеала, для гипермаксимального линеала $\mathfrak{L}$ имеем $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}'$, причем, в силу максимальности $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ семидефинитен (теорема 3.2). Но в силу гипермаксимальности $\mathfrak{L}$, очевидно, $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}'$.

Обратно, пусть $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}'$. Тогда $\mathfrak{L}$ — нулевой линеал, а в силу предложения 3° и теоремы 3.2 — максимальный нулевой линеал. Но он также и гипермаксимален, ибо в противном случае $\mathfrak{L}'$ содержал бы положительные или отрицательные векторы. Теорема доказана.

Дальнейшие предложения связаны с рассмотрением пар нулевых линеалов $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1\subset\mathfrak{E}$. Для любой такой пары справедливы тождества

$$(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)\cap(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'=\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}'+\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}_1', \tag{3.15}$$

$$\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'=(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}')\cap(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1'). \tag{3.16}$$

Два нулевых линеала $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$ назовем *кососвязанными*, если

$$\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}_1'=\{0\}.$$

Из тождества (3.15) немедленно следует предложение

7°. *Нулевые линеалы* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1\,(\subset\mathfrak{E})$ *кососвязаны тогда и только тогда, когда линеал* $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$ *невырожден.*

В свою очередь из (3.16) следует:

8°. *Для нулевых линеалов* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1$ $(\subset\mathfrak{E})$ *утверждения*

α) $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'=\mathfrak{E}$ *и*

β) $\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1'=\mathfrak{E}$

равносильны.

Заметим, что из α) (или β)) в случае невырожденности $\mathfrak{E}$ получаются как следствия соотношения:

γ) $\mathfrak{L}'$ *и* $\mathfrak{L}_1'$ *кососвязаны, т. е.* $\mathfrak{L}'\cap\mathfrak{L}_1''=\mathfrak{L}''\cap\mathfrak{L}_1'=\{0\}$;

δ) $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$ *невырожден и* $(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)''=\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$;

ε) $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}_1=\mathfrak{L}_1''$, *а* $\mathfrak{L}$ *и* $\mathfrak{L}_1$ *кососвязаны*;

ζ) $(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'$ *невырожден и*

$$\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)';\qquad \mathfrak{L}_1'=\mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'.$$

Однако содержащаяся в § 8 работы [50] Э. Шайбе теорема 6 относительно равносильности в невырожденном $\mathfrak{E}$ всех шести соотношений α) — ζ) явно ошибочна.

В самом деле, если заключения $\zeta) \to \varepsilon) \to \gamma)$ и $\delta) \to \varepsilon)$ сравнительно легко проверяемы, то выводы $\gamma) \to \beta)$, $\gamma) \to \varepsilon)$ неверны, в чем легко убедиться на простых примерах хотя бы в (гильбертовом) J-пространстве $\mathfrak{E}$. Достаточно, например, взять (замкнутые) нулевые подпространства $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{E}$, удовлетворяющие условию $\beta)$ (или $\varepsilon)$), а потом заменить их любыми незамкнутыми линеалами, плотными соответственно в $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$. При этом соотношения $\beta)$ и $\varepsilon)$ нарушатся, а $\gamma)$ сохранится (ошибка в доказательстве Э. Шайбе как раз и состоит в том, что предполагается очевидным соотношение $\gamma) \to \beta)$). Заметим, что в силу предложения 4° из $\gamma)$ следует только τ-плотность сумм $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1'$ в $\mathfrak{E}$ (τ—любая согласующаяся с G топология). Неправильно также заключение $\delta) \to \alpha)$, однако его опровержение требует некоторых средств, развитых ниже в § 6, п. 3.

Ошибочность теоремы 6 ([50], § 8) повлекла за собой некоторые неправильные утверждения в последующих теоремах 7 и 8 той же работы, имеющих тем не менее и некоторое положительное содержание, которое мы кратко изложим.

Рассматривается невырожденное $G^э$-пространство $\mathfrak{E}$, допускающее каноническое разложение $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dot{+} \mathfrak{E}_-$. Через $Q_\pm$ обозначим операторы («G-проекторы»), относящие каждому вектору $x \in \mathfrak{E}$ его составляющую $x_\pm \in \mathfrak{E}_\pm$ соответственно. Оператор $T = Q_+ - Q_-$ обладает, очевидно, свойством инволюции: $T^2 = I$ — тождественный оператор. Кроме того, он сохраняет инвариантной форму G («G-изометрия»):

$$G(Tx,\ Ty) = G(x,\ y) \qquad (x,\ y \in \mathfrak{E}).$$

Теорема 3.4. *Построенная выше инволюция T обладает следующими свойствами:*

1) *Для любого линеала $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) алгебраические размерности (мощности базисов Хаммеля [58]) $\mathfrak{L}$ и $T\mathfrak{L}$ совпадают. Если линеал $\mathfrak{L}$ нулевой (соответственно максимальный нулевой, соответственно $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$), то тем же свойством обладает соответственно и $T\mathfrak{L}$.*

2) *Если $\mathfrak{L}$ — нулевой линеал, то отображения $\mathfrak{L} \to \mathfrak{E}_\pm$ с помощью проекторов $Q_\pm$ взаимно однозначны. Линеал $\mathfrak{L} + T\mathfrak{L}$ допускает каноническое разложение*

$$\mathfrak{L} + T\mathfrak{L} = Q_+\mathfrak{L} \dot{+} Q_-\mathfrak{L},$$

причем $Q_+\mathfrak{L}$ и $Q_-\mathfrak{L}$ G-изометричны (т. е. изоморфны с сохранением G-метрики) после изменения знака G-метрики на $Q_-\mathfrak{L}$.

3) *Если $\mathfrak{L}$ — нулевой линеал, то $(\mathfrak{L} + T\mathfrak{L})''$ невырожден, иными словами, $(\mathfrak{L} + T\mathfrak{L}) + (\mathfrak{L} + T\mathfrak{L})'$ τ-плотно в $\mathfrak{E}$* (ср. 5°).

Таким образом, инволюция T дает способ построения по нулевому линеалу $\mathfrak{L}$ кососвязанного с ним нулевого линеала $T\mathfrak{L}$. Этот метод, в частности, всегда применим в невырожденных $(\mathfrak{H},\ G^э)$-пространствах $\mathfrak{E}$, поскольку последние допускают канонические разложения. В частности, в J-пространствах просто $T = J$ (см. § 6, ср. также [7], лемма 2.3).

7. Переходя к рассмотрению линеалов в $(\mathfrak{H}, G)$-пространстве $\mathfrak{E}$, прежде всего остановимся на подпространствах, т. е. на замкнутых (в $\mathfrak{H}$-метрике)

линеалах $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}$. Пусть $P_{\mathfrak{M}}$ — ортопроектор из $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{M}$. Рассмотрим действующий в $\mathfrak{M}$ ограниченный оператор $G_{\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}} G$, где G — оператор Грама данной G-метрики в $\mathfrak{E}$ (§ 2 п. 6). Легко понять, что G-метрика индуцирует в $\mathfrak{M}$ $G_{\mathfrak{M}}$-метрику, так что $\mathfrak{M}$ есть $(\mathfrak{H}, G_{\mathfrak{M}})$-пространство. С другой стороны, $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как локально выпуклое топологическое пространство с топологией $\tau_1(\mathfrak{M}, G_{\mathfrak{M}})$ (§ 2, п. 8), определяемой полунормой

$$p_{\mathfrak{M}}(x) = \| G_{\mathfrak{M}} x \|.$$

Подпространство $\mathfrak{M}$ ($\subset \mathfrak{E}$) назовем *правильным* [1]), если $p_{\mathfrak{M}}(x)$ есть норма и притом нормы $p_{\mathfrak{M}}(x)$ и $\|x\|$ на $\mathfrak{M}$ эквивалентны. Из этого определения очевидным образом вытекает предложение

9°. *Для того чтобы подпространство $\mathfrak{M}$ ($\subset \mathfrak{E}$) было правильным, необходимо и достаточно, чтобы оператор Грама $G_{\mathfrak{M}}$ в $\mathfrak{M}$ был непрерывно обратимым.*

Как следует из классической теоремы Банаха, этот критерий можно сформулировать в других терминах: *подпространство $\mathfrak{M}$ правильно тогда и только тогда, когда $p_{\mathfrak{M}}(x)$ есть норма в $\mathfrak{M}$ и в этой норме $\mathfrak{M}$ полно.*

Другой важный класс подпространств выделяется следующим определением: подпространство $\mathfrak{M}$ ($\subset \mathfrak{E}$) называется *относительно правильным,* если полунормы $p_{\mathfrak{M}}(x) = \| G_{\mathfrak{M}} x\|$ и $p_{\mathfrak{E}}(x) = \| Gx \|$ задают на $\mathfrak{M}$ равносильные топологии $\tau_1(\mathfrak{M}, G_{\mathfrak{M}})$ и $\tau_1(\mathfrak{E}, G)$.

10°. *Всякое правильное подпространство $\mathfrak{M}$ ($\subset \mathfrak{E}$) относительно правильно. Обратное справедливо в том и только том случае, когда всё $\mathfrak{E}$ правильно.*

Первое утверждение вытекает из оценок

$$\| G_{\mathfrak{M}} x \| = \| P_{\mathfrak{M}} G x \| \leqslant \| Gx \| \leqslant \| G \| \, \| x \|,$$

которые в случае правильности $\mathfrak{M}$ дополняются неравенством $\alpha \| x \| \leqslant \leqslant \| G_{\mathfrak{M}} x \|$ $(\alpha > 0)$. Обратно, если для всякого относительно правильного $\mathfrak{M}$ имеем $\alpha \| x \| \leqslant \| G_{\mathfrak{M}} x \|$ $(\alpha > 0,\ x \in \mathfrak{M})$, то, в частности, для $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}$ получаем

$$\alpha \| x \| \leqslant \| Gx \| \leqslant \| G \| \, \| x \|,$$

т. е. $\mathfrak{E}$ правильно. Наконец, если дано, что $\mathfrak{M}$ относительно правильно, а $\mathfrak{E}$ правильно, то ясно, что и $\mathfrak{M}$ правильно.

Понятия правильности и относительной правильности можно сформулировать и в других терминах. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ назовем *асимптотически изотропной в* $\mathfrak{M}$, если $(Gx_n, y) \to 0$ $(n \to \infty)$ равномерно относительно всех $y \in \mathfrak{M}$ с $\| y \| = 1$. Из того, что $\| G_{\mathfrak{M}} x \| = \sup\limits_{\|y\|=1,\, y \in \mathfrak{M}} |(G_{\mathfrak{M}} x, y)|$, следует:

[1]) В случае неэрмитовой G-метрики следует различать полунормы $\| G^*_{\mathfrak{M}} x \|$ и $\| G_{\mathfrak{M}} x \|$ (ср. [32]) и сообразно этому рассматривать «правоправильные» и «левоправильные» подпространства. Простоты ради мы снова ограничиваемся случаем $G^* = G$.

11°. *Последовательность* $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ *асимптотически изотропна в* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{n\to\infty} \| G_{\mathfrak{M}} x_n \| = 0$.

Отсюда непосредственно вытекает:

12°. *Для того чтобы подпространство* $\mathfrak{M}$ $(\subset \mathfrak{C})$ *было относительно правильным, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность, асимптотически изотропная в* $\mathfrak{M}$, *была асимптотически изотропной в* $\mathfrak{C}$.

13°. *Для того чтобы подпространство* $\mathfrak{M}$ $(\subset \mathfrak{C})$ *было правильным, необходимо и достаточно, чтобы каждая асимптотически изотропная в* $\mathfrak{M}$ *последовательность* $\{x_n\}$ *сходилась к нулю.*

Заметим, что в определении асимптотически изотропных в $\mathfrak{M}$ последовательностей $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ нигде не использован тот факт, что $\mathfrak{M}$ — подпространство. Распространив это определение на любые линеалы $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{C})$, мы можем, заменив в предложениях 12° и 13° подпространство $\mathfrak{M}$ линеалом $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{C})$, принять их за определения *относительно правильных и правильных линеалов в* $\mathfrak{C}$.

Теорема 3.5. *Линеал* $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{C})$ *и его (гильбертово) замыкание* $\overline{\mathfrak{L}}$ *могут быть правильными (соответственно относительно правильными) только одновременно.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что всякая последовательность, асимптотически изотропная в $\mathfrak{L}$, является асимптотически изотропной и в $\overline{\mathfrak{L}}$. В самом деле, пусть $\{x_n\}$ $(\subset \mathfrak{L})$ — асимптотически изотропна в $\mathfrak{L}$. Для любого вектора $\tilde{y} \in \overline{\mathfrak{L}}$ с $\|\tilde{y}\| = 1$ найдется аппроксимирующая последовательность $\{y_m\} \subset \mathfrak{L}$ $(\lim\limits_{m\to\infty} \| y_m - \tilde{y} \| = 0)$ с $\| y_m \| = 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$. В силу асимптотической изотропности $\{x_n\}$ в $\mathfrak{L}$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех $m = 1, 2, \ldots$

$$|(Gx_n, y_m)| < \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ (для каждого фиксированного $n > N_\varepsilon$), получаем

$$|(Gx_n, \tilde{y})| \leqslant \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon),$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (Gx_n, \tilde{y}) = 0$ равномерно относительно $\tilde{y}$ с $\|\tilde{y}\| = 1$.

Пусть теперь $\overline{\mathfrak{L}}$ — правильное подпространство, а $\{x_n\}$ — асимптотически изотропная последовательность в $\mathfrak{L}$. Тогда из доказанного только что факта и предложения 13° имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \| = 0$, и, стало быть, линеал $\mathfrak{L}$ правилен. Если же $\overline{\mathfrak{L}}$ относительно правильно, то такое же рассуждение с применением предложения 12° показывает, что и $\mathfrak{L}$ относительно правилен.

Обратно, пусть линеал $\mathfrak{L}$ правилен (относительно правилен), а $\{x_n\}$ — асимптотически изотропная в $\overline{\mathfrak{L}}$ последовательность. Выберем в $\mathfrak{L}$ последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ так, чтобы $\| x_n - \tilde{x}_n \| < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для любого $y \in \mathfrak{L}$ с $\| y \| = 1$ имеем

$$|(G_{\overline{\mathfrak{L}}} \tilde{x}_n, y)| \leqslant |(G_{\overline{\mathfrak{L}}} x_n, y)| + |(G_{\overline{\mathfrak{L}}} (\tilde{x}_n - x_n), y)|.$$

В последней сумме оба слагаемых при $n \to \infty$ стремятся к нулю равномерно относительно y: первое — в силу асимптотической изотропности $\{x_n\}$ в $\overline{\mathfrak{L}}$, второе — в силу неравенства

$$|(G_{\overline{\mathfrak{L}}}(\tilde{x}_n - x_n),\ y)| \leqslant \| G_{\overline{\mathfrak{L}}} \| \, \| \tilde{x}_n - x_n \| < \frac{1}{n} \| G_{\overline{\mathfrak{L}}} \| \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ асимптотически изотропна в $\mathfrak{L}$. В случае правильности $\mathfrak{L}$ отсюда следует, что $\| \tilde{x}_n \| \to 0$ при $n \to \infty$, откуда $\| x_n \| \to 0$, т. е. $\overline{\mathfrak{L}}$ правильно. Если же $\mathfrak{L}$ относительно правильно, то $\{\tilde{x}_n\}$ асимптотически изотропна в $\mathfrak{E}$. По 11° это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| G\tilde{x}_n \| = 0$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} \| Gx_n \| = 0$, так что и $\overline{\mathfrak{L}}$ относительно правильно. Теорема доказана полностью.

Роль, которую играют правильные и относительно правильные линеалы и подпространства в $(\mathfrak{H},\ G)$-пространствах, выясняется ниже (см. § 4, п. 2, § 5, п. 5, § 6, пп. 1, 3, 4).

§ 4. Теория G-проектирования

1. Известно, какую важную роль играет операция ортогонального проектирования вектора на подпространство в теории гильбертовых пространств. В этом параграфе будет подробно изучена аналогичная операция в G-пространствах.

Пусть $\mathfrak{E}$ — G-пространство, $\mathfrak{L}$ — линеал из $\mathfrak{E}$. Вектор y_1 $(\in \mathfrak{L})$ называется *правой (левой) G-проекцией вектора $y_0 \in \mathfrak{E}$ на линеал $\mathfrak{L}$*, если вектор $y_0 - y_1$ G-ортогонален справа (слева) к $\mathfrak{L}$, т. е. если $G(x,\ y_0 - y_1) = 0$ $(G(y_0 - y_1,\ x) = 0)$ для всех $x \in \mathfrak{L}$.

Общую схему для получения теорем существования G-проекций[1]) доставляет следующая

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$, а τ — какая-нибудь левосогласующаяся с G на $\mathfrak{L}$ топология. Тогда для того, чтобы существовала правая G-проекция вектора y_0 на $\mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы функционал*

$$f_{y_0}(x) = G(x,\ y_0)$$

был τ-непрерывен.

Доказательство. Если y_1 — правая G-проекция вектора y_0 на $\mathfrak{L}$, то $G(x,\ y_0 - y_1) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{L}$ и, следовательно,

$$f_{y_0}(x) = G(x,\ y_1) \qquad (x \in \mathfrak{L}).$$

Так как τ левосогласуется с G на $\mathfrak{L}$, то функционал $f_{y_0}(x)$ τ-непрерывен.

Пусть теперь для некоторого $y_0 \in \mathfrak{E}$ функционал $f_{y_0}(x) = G(x,\ y_0)$ τ-непрерывен. Тогда, вследствие левосогласованности топологии τ с G на $\mathfrak{L}$, найдется такой вектор $y_1 \in \mathfrak{L}$, что $f_{y_0}(x) = G(x, y_1)$, $G(x, y_0) = G(x, y_1)$, $G(x,\ y_0 - y_1) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{L}$, то есть y_1 является G-проекцией вектора y_0 на $\mathfrak{L}$.

[1]) В дальнейшем все теоремы формулируются для правых G-проекций. Для левых G-проекций формулировки совершенно аналогичны.

В частности, если $\tau_0^{\text{л}} = \tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G)$ — введенная в § 2 слабейшая из топологий, левосогласующихся с G-метрикой на $\mathfrak{L}$ (см. теорему 2.3), то из теоремы 4.1 следует:

1°. *Для существования правой G-проекции вектора $y_0 \in \mathfrak{E}$ на линеал $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ необходимо и достаточно, чтобы функционал $f_{y_0}(x)$ был $\tau_0^{\text{л}}$-непрерывным на $\mathfrak{L}$.*

Если $\mathfrak{L}$ является $(\mathfrak{B}^r, G)$-пространством, т. е. если в $\mathfrak{L}$ может быть задана рефлексивная банахова топология, подчиняющая G-метрику на $\mathfrak{L}$, то, воспользовавшись теоремой 2.5, получим:

2°. *Для существования правой G-проекции вектора $y_0 \in \mathfrak{E}$ на подпространство $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ необходимо и достаточно, чтобы функционал $f_{y_0}(x)$ был непрерывен на $\mathfrak{L}$ в топологии $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G)$* (см. § 2, п. 8).

В случае $(\mathfrak{B}^r, G)$-пространства $\mathfrak{L}$, естественно, можно пользоваться как предложением 2°, так и предложением 1°. При этом в силу теоремы 2.5 предложение 2° удобно использовать при доказательстве существования G-проекции, а 1° — на основании теоремы 2.3 — при доказательстве ее отсутствия.

В том случае, когда $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ являются $(\mathfrak{H}, G)$-пространствами, можно сформулировать признак G-проектируемости вектора $y_0 \in \mathfrak{E}$ на подпространство $\mathfrak{L}$ в ином виде. С этой целью обозначим через $P_{\mathfrak{L}}$ гильбертов ортопроектор в $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{L}$, а через $G_{\mathfrak{L}}$ — левый оператор Грама формы $G(x, y) = (Gx, y)$ на подпространстве $\mathfrak{L}$ (§ 3, п. 7):

$$G(x, y) = (G_{\mathfrak{L}}x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{L}).$$

На основании 2° для существования правой G-проекции вектора $y_0 \in \mathfrak{E}$ на $\mathfrak{L}$ необходимо и достаточно, чтобы функционал $f_{y_0}(x) = (Gx, y_0)$ был $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G)$-непрерывен на $\mathfrak{L}$, то есть непрерывен на $\mathfrak{L}$ относительно полунормы

$$p^{\text{л}}(x) = \sup_{\|y\|=1,\, y\in\mathfrak{L}} |G(x, y)| = \sup_{\|y\|=1,\, y\in\mathfrak{L}} |(G_{\mathfrak{L}}x, y)| = \|G_{\mathfrak{L}}x\| = \sqrt{(G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}x, x)} =$$
$$= \|H_{\mathfrak{L}}x\| = \sup_{\|y\|=1,\, y\in\mathfrak{L}} |H_{\mathfrak{L}}(x, y)| \quad (H_{\mathfrak{L}}(x, y) = (H_{\mathfrak{L}}x, y); x, y \in \mathfrak{L}),$$

где $H_{\mathfrak{L}}$ — какой-либо самосопряженный оператор в $\mathfrak{L}$, обладающий тем свойством, что $H_{\mathfrak{L}}^2 = G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$, в частности, $H_{\mathfrak{L}} = \sqrt{G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}}$. Но вследствие теоремы 2.5 топология $\tau_1(\mathfrak{L}, H_{\mathfrak{L}})$, порождаемая на $\mathfrak{L}$ полунормой $\|H_{\mathfrak{L}}x\|$, согласуется с $H_{\mathfrak{L}}$-метрикой на $\mathfrak{L}$. Отсюда вытекает, что правая G-проекция вектора y_0 на $\mathfrak{L}$ существует тогда и только тогда, когда функционал $f_{y_0}(x)$ представим на $\mathfrak{L}$ в виде $f_{y_0}(x) = (H_{\mathfrak{L}}x, y_1)$ $(y_1 \in \mathfrak{L})$, т. е. для всех $x \in \mathfrak{L}$

$$(Gx, y_0) = (H_{\mathfrak{L}}x, y_1), \qquad (x, P_{\mathfrak{L}}G^*y_0) = (x, H_{\mathfrak{L}}y_1).$$

Последнее возможно в том и только в том случае, когда $P_{\mathfrak{L}}G^*y_0 \in \mathfrak{R}(H_{\mathfrak{L}})$. Таким образом, справедливо предложение

3°. *Для того чтобы вектор y_0 имел правую G-проекцию на подпространство $\mathfrak{L}$ из $(\mathfrak{H}, G)$-пространства $\mathfrak{E}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_m^M \frac{1}{\lambda^2} d\| E_\lambda^{(\mathfrak{L})} G^* y_0 \|^2 < \infty, \tag{4.1}$$

где $E_\lambda^{(\mathfrak{L})}$ $(E_m^{(\mathfrak{L})} = 0,\ E_M^{(\mathfrak{L})} = P_{\mathfrak{L}})$ — *«разложение единицы» самосопряженного оператора* $H_{\mathfrak{L}}$, $H_{\mathfrak{L}}^2 = G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$.

Очевидно, если $\mathfrak{L}$ — пространство с эрмитовой G-метрикой, то можно взять $H_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{L}}$, так что в этом случае $E_\lambda^{(\mathfrak{L})}$—«разложение единицы» оператора $G_{\mathfrak{L}}$. В случае же неэрмитовой на $\mathfrak{L}$ G-метрики более удобным, чем (4.1), является условие

$$\int_0^{M^2} \frac{1}{\lambda} d\| \widetilde{E}_\lambda^{(\mathfrak{L})} G^* y_0 \|^2 < \infty,$$

где $\widetilde{E}_\lambda^{(\mathfrak{L})}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant M^2)$ — «разложение единицы» оператора $G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$. Другие признаки существования G-проекций см. в п. 4 настоящего параграфа, а также в § 5.

Заметим, что вопрос о единственности G-проекций в случае общей G-метрики не представляет никаких трудностей и решается точно так же, как в конечномерном случае (ср. [12]). А именно, легко проверить, что *для того, чтобы вектор $y \in \mathfrak{E}$ имел не более одной правой G-проекции на линеал $\mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы линеал $\mathfrak{L}$ был правоневырожденным.* Если же это условие не выполнено и y_1 — какая-нибудь правая G-проекция вектора y на $\mathfrak{L}$, то любая другая его правая G-проекция $\tilde{y}_1$ на $\mathfrak{L}$ находится по формуле

$$\tilde{y}_1 = y_1 + x_0,$$

где x_0 — произвольный правоизотропный вектор из $\mathfrak{L}$.

2. Линеал $\mathfrak{L}$ из G-пространства $\mathfrak{E}$ называется (*право-*)*проекционно-полным*, если каждый вектор y $(\in \mathfrak{E})$ имеет правую G-проекцию на $\mathfrak{L}$.

Т е о р е м а 4.2. *Для того чтобы линеал $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ был проекционно-полным, необходимо и достаточно, чтобы на $\mathfrak{L}$ были эквивалентны топологии $\tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{E}, G)$ и $\tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{L}, G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что на $\mathfrak{L}$

$$\tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{E}, G) \geqslant \tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{L}, G). \tag{4.2}$$

Действительно, каждая $\tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{L}, G)$-окрестность

$$\mathfrak{U}(0) = \{x \in \mathfrak{L},\ |G(x, y_1)| < \varepsilon,\ \ldots,\ |G(x, y_n)| < \varepsilon,\ y_1,\ \ldots,\ y_n \in \mathfrak{L}\}$$

является одновременно $\tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{E}, G)$-окрестностью нуля в $\mathfrak{L}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{L}$ проекционно-полно. Тогда каждая $\tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{E}, G)$-окрестность в $\mathfrak{L}$, содержащая те и только те $x \in \mathfrak{L}$, для которых $|G(x, y_i)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ y_i \in \mathfrak{E})$, является $\tau_0^{\text{п}}(\mathfrak{L}, G)$-окрестностью, определяемой системой неравенств $|G(x, y_i')| < \varepsilon$, где y_i' — правая G-проекция вектора y_i $(i=1, \ldots, n)$ на $\mathfrak{L}$. Таким образом, $\tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G) \geqslant \tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$, и из (4.2) следует, что $\tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G) = \tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ на $\mathfrak{L}$. Необходимость условия теоремы доказана.

Обратно, пусть на $\mathfrak{L}$ эквивалентны топологии $\tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G)$ и $\tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$. Пусть y — произвольный вектор из $\mathfrak{E}$. Тогда функционал

$$f_y(x) = G(x,y) \qquad (x \in \mathfrak{L})$$

$\tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{E},G)$-непрерывен, а следовательно, и $\tau_0^{\text{л}}(\mathfrak{L},G)$-непрерывен. Отсюда вследствие 1° вытекает существование правой G-проекции вектора y на $\mathfrak{L}$. Теорема доказана.

В том случае, когда $\mathfrak{L}$ — подпространство $(\mathfrak{B}^r,G)$-пространства $\mathfrak{E}$, можно дать другой критерий проекционной полноты. Именно справедлива следующая

Т е о р е м а 4.3. *Для проекционной полноты подпространства $\mathfrak{L}$ из $(\mathfrak{B}^r, G)$-пространства $\mathfrak{E}$ необходимо и достаточно, чтобы на $\mathfrak{L}$ были эквивалентны топологии $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ и $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\mathfrak{L}$ проекционно-полно. Докажем, что $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ левосогласуется с G на $\mathfrak{L}$. Так как всякий функционал $f_y(x) = G(x, y)$ является $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$-непрерывным, то остается показать, что всякий $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$-непрерывный на $\mathfrak{L}$ функционал $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = G(x, y_f), \tag{4.3}$$

где $y_f \in \mathfrak{L}$.

Пусть $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ задается полунормой $p(x)$ $(x \in \mathfrak{E})$ и функционал $f(x)$ $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$-непрерывен на $\mathfrak{L}$, т. е. справедливо неравенство

$$|f(x)| \leqslant Cp(x) \quad (x \in \mathfrak{L}). \tag{4.4}$$

По теореме Хана — Банаха для комплексных пространств $f(x)$ можно распространить на все $\mathfrak{E}$ с сохранением (4.4); таким образом, $f(x)$ окажется продолженным до $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$-непрерывного во всем $\mathfrak{E}$ функционала. Так как топология $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ левосогласуется с G на $\mathfrak{E}$ (теорема 2.5), то существует такой вектор $y_0 \in \mathfrak{E}$, что

$$f(x) = G(x, y_0) \qquad (x \in \mathfrak{E}).$$

Если y_f — правая G-проекция вектора y_0 на $\mathfrak{L}$, то на $\mathfrak{L}$ справедливо равенство (4.3) и, значит, $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ левосогласуется с G на $\mathfrak{L}$. Так как $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G)$ обладает тем же свойством, то на основании следствия теоремы 2.4 топологии $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{L}, G)$ и $\tau_1^{\text{л}}(\mathfrak{E}, G)$ на $\mathfrak{L}$ равносильны. Необходимость условия теоремы доказана. Что касается достаточности, то она проверяется точно так же, как в предыдущей теореме.

Вспоминая определение относительно правильного подпространства (§ 3, п. 7), можно сформулировать теорему 4.3, например, для $(\mathfrak{H}, G^{\text{э}})$-пространств $\mathfrak{E}$ так: *для того чтобы подпространство $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ было проекционно-полным, необходимо и достаточно, чтобы оно было относительно правильным.* Отсюда, в частности, следует (см. § 3, 10°), что *правильность* *является условием, достаточным для проекционной полноты подпространства* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$.

3. С понятием проекционной полноты тесно связан вопрос о представлении G-пространства $\mathfrak{E}$ в виде суммы G-ортогональных линеалов. Чтобы не усложнять изложения, мы в этом пункте ограничимся случаем эрмитовой G-метрики в $\mathfrak{E}$.

4°. *Если* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ — *G-ортогональные линеалы* ($G(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})=0$) *и*

$$\mathfrak{M}+\mathfrak{N}=\mathfrak{E}, \tag{4.5}$$

то $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *проекционно-полны. Если при этом* $\mathfrak{E}$ *невырождено, то невырождены* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{M}'=\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'=\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}'$ — *G-ортогональное дополнение линеала* $\mathfrak{M}$ *в* $\mathfrak{E}$ (см. п. 1, § 3)).

Для доказательства возьмем произвольный $x \in \mathfrak{E}$. Из (4.5) следует, что $x=x_1+x_2$, где $x_1 \in \mathfrak{M}$, $x_2 \in \mathfrak{N}$, т. е. $G(\mathfrak{M}, x-x_1)=0$. Таким образом, x_1 является G-проекцией вектора x на $\mathfrak{M}$, и значит, $\mathfrak{M}$ — проекционно-полный линеал. Пусть теперь $\mathfrak{E}$ невырождено. Тогда $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ также невырождены в силу того, что каждый изотропный вектор в $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{N}$ был бы изотропным в $\mathfrak{E}$. Для того чтобы установить справедливость равенства $\mathfrak{M}'=\mathfrak{N}$, достаточно показать, что из $G(x, \mathfrak{M})=0$ вытекает $x \in \mathfrak{N}$. Но если это не так, то $x=x_1+x_2$, где $0 \neq x_1 \in \mathfrak{M}$, $x_2 \in \mathfrak{N}$, $G(x_1, \mathfrak{M})=0$, и x_1 оказывается изотропным вектором в $\mathfrak{M}$.

В известном смысле обратным является следующее предложение:

5°. *Если линеал* $\mathfrak{L}$ *проекционно-полон в* $\mathfrak{E}$, *то*

$$\mathfrak{L}+\mathfrak{L}'=\mathfrak{E} \tag{4.6}$$

и, следовательно, линеал $\mathfrak{L}'$ *также проекционно-полон. Если при этом* $\mathfrak{E}$ *невырождено, то невырожденными являются* $\mathfrak{L}$ *и* $\mathfrak{L}'$, *и сумма* (4.6) *прямая. Кроме того,* $\mathfrak{L}''=\mathfrak{L}$.

Действительно, если $\mathfrak{L}$ проекционно-полон и x — произвольный вектор из $\mathfrak{E}$, x_1 — его G-проекция на $\mathfrak{L}$, то $x=x_1+(x-x_1)$ ($x_1 \in \mathfrak{L}$, $x-x_1 \in \mathfrak{L}'$), и (4.6) доказано. Остальные утверждения 5° непосредственно следуют из 4°.

Мы видим, что если $\mathfrak{L}$ — проекционно-полный линеал в невырожденном G-пространстве $\mathfrak{E}$, то

$$\mathfrak{L}''=\mathfrak{L}. \tag{4.7}$$

Напомним, что условие, необходимое и достаточное для справедливости равенства (4.7), было установлено в § 3, 3°. Из (4.7) и теоремы 3.1 следует:

6°. *Всякий проекционно-полный линеал замкнут в любой согласующейся с* G, *а следовательно, и в любой подчиняющей* G *топологии в* $\mathfrak{E}$.

4. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый линеал в G-пространстве $\mathfrak{E}$. Оператор $Q_{\mathfrak{L}}$, ставящий в соответствие каждому вектору $x \in \mathfrak{E}$ множество (возможно, пустое) его правых G-проекций на $\mathfrak{L}$, мы будем называть *правым G-проектором на* $\mathfrak{L}$.

7°. *Если* $\mathfrak{L}$ — *область значений ограниченного линейного оператора* T, *действующего в* ($\mathfrak{H}$, G)*-пространстве* $\mathfrak{E}$, *то правый G-проектор* $Q_{\mathfrak{L}}$ *на* $\mathfrak{L}$

вычисляется по формуле [1])

$$\left.\begin{aligned} Q_{\mathfrak{L}} = T\,(T^*G^*T)^{-1}\,T^*G^* \\ (G\,(x,\,y) = (Gx,\,y),\ x,\,y \in \mathfrak{E}). \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Для доказательства заметим, что если $x \in \mathfrak{E}$, а $y \in Q_{\mathfrak{L}}x$, то для любого $z \in \mathfrak{L}\,(z = Th_1,\ h_1 \in \mathfrak{E})$

$$(Gz,\, y - x) = 0, \qquad (GTh_1,\, y - x) = 0,$$

откуда

$$T^*G^*y = T^*G^*x.$$

Так как $y \in \mathfrak{L}$, то $y = Th$ для некоторого $h \in \mathfrak{E}$. Следовательно, $T^*G^*Th = T^*G^*x$, откуда $h \in (T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x$ и

$$y = Th \in T\,(T^*G^*T)^{-1}\,T^*G^*x.$$

Обратно, если $y \in T\,(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x$ для некоторого $x \in \mathfrak{E}$, то $y \in \mathfrak{L}$, $y = Th$, где

$$h \in (T^*G^*T)^{-1}\,T^*G^*x, \qquad (T^*G^*T)\,h = T^*G^*x.$$

Если $z = Th_1$ — произвольный вектор из $\mathfrak{L}\,(h_1 \in \mathfrak{E})$, то

$$(Gz,\, y - x) = (GTh_1,\, y - x) = (GTh_1,\, Th - x) = (h_1,\, T^*G^*Th - T^*G^*x) = 0$$

и, стало быть, $y \in Q_{\mathfrak{L}}x$. Таким образом, доказано, что $y \in Q_{\mathfrak{L}}x$ тогда и только тогда, когда $y \in T\,(T^*G^*T)^{-1}\,T^*G^*x$ для любого $x \in \mathfrak{E}$, откуда вытекает справедливость предложения 6°.

Рассмотрим теперь произвольное (замкнутое) подпространство $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$, и пусть $P_{\mathfrak{L}}$ — гильбертов ортопроектор на $\mathfrak{L}$. Поскольку областью значений $P_{\mathfrak{L}}$ служит $\mathfrak{L}$, то, воспользовавшись 6°, получим

$$Q_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}}\,(P_{\mathfrak{L}}G^*P_{\mathfrak{L}})^{-1}\,P_{\mathfrak{L}}G^*.$$

Рассмотрим $G_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}}GP_{\mathfrak{L}}$ — оператор Грама формы $G\,(x,\,y)$ на $\mathfrak{L}$ (§ 3, п. 7). Так как $P_{\mathfrak{L}}\,(P_{\mathfrak{L}}GP_{\mathfrak{L}})^{-1} = G_{\mathfrak{L}}^{-1}$, то

$$Q_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{L}}^{*-1}P_{\mathfrak{L}}G^*.$$

Отсюда непосредственно вытекают следующие результаты относительно существования и единственности G-проекций в $(\mathfrak{H},G)$-пространстве $\mathfrak{E}$:

α) *Для того чтобы каждый вектор из $\mathfrak{E}$ имел не более одной правой G-проекции на подпространство $\mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы на $\mathfrak{L}$ оператор $G_{\mathfrak{L}}^*$ не аннулировался.*

β) *Для того чтобы вектор $x \in \mathfrak{E}$ имел хотя бы одну правую G-проекцию на подпространство $\mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $P_{\mathfrak{L}}\,G^*x \in \in \mathfrak{R}\,(G_{\mathfrak{L}}^*)$.*

γ) *Подпространство $\mathfrak{L}\,(\subset \mathfrak{E})$ является проекционно-полным тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{R}\,(P_{\mathfrak{L}}G^*) = \mathfrak{R}\,(G_{\mathfrak{L}}^*).$$

Иногда бывает удобнее пользоваться предложениями α), β), γ) в несколько ином виде. Ограничимся случаем эрмитовой формы $G\,(x,\,y) = (Gx,\,y)$,

---

[1]) Здесь мы под A^{-1} понимаем оператор, ставящий в соответствие каждому $x \in \mathfrak{E}$ множество (возможно, пустое) всех его прообразов y $(Ay = x)$.

и пусть в соответствии с представлением $\mathfrak{E}$ в виде $\mathfrak{H}$-ортогональной суммы

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$$

оператор G изображается в виде матрицы

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Тогда:

α') *Для того чтобы каждый вектор из* $\mathfrak{E}$ *имел не более одной G-проекции на* $\mathfrak{L}$, *необходимо и достаточно, чтобы* G_{11} *не аннулировался на* $\mathfrak{L}$.

β') *Для того чтобы* $x \in \mathfrak{E}$ *имел хотя бы одну G-проекцию на* $\mathfrak{L}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$G_{12} P_{\mathfrak{M}} x \in \mathfrak{R}(G_{11}).$$

γ') *Подпространство* $\mathfrak{L}$ *проекционно-полно тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{R}(G_{12}) \subset \mathfrak{R}(G_{11}).$$

Воспользовавшись β'), легко построить пример такого собственного подпространства $\mathfrak{L}$ из некоторого невырожденного $(\mathfrak{H}, G)$-пространства $\mathfrak{E}$, что его G-ортогональное дополнение $\mathfrak{L}'$ состоит из одного вектора 0. Для этого достаточно выбрать G так, чтобы G_{11}, G_{22} и G_{12} не аннулировались на своих областях определения и $\mathfrak{R}(G_{11}) \cap \mathfrak{R}(G_{12}) = \{0\}$ (проще всего удовлетворить этим условиям, если взять $\dim \mathfrak{M} = 1$; при этом нетрудно так выбрать G_{12}, чтобы G-метрика на $\mathfrak{E}$ оказалась даже положительной).

Таким образом, мы видим, что прямая сумма $\mathfrak{L} \dot{+} \mathfrak{L}'$ может не быть плотной в гильбертовом пространстве $\mathfrak{E}$ и, значит, в предложении 5°, § 3 существенно, чтобы топология τ была согласующейся с G (а не произвольной подчиняющей).

§ 5. Дефинитные линеалы в пространствах с эрмитово-билинейной метрикой

На протяжении всего § 5 G-метрика, заданная в G-пространстве $\mathfrak{E}$, если не оговорено противное, предполагается эрмитовой.

1. Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольный дефинитный линеал в G-пространстве $\mathfrak{E}$. Положим $\operatorname{sign} \mathfrak{L} = -1$ или $+1$ для отрицательных и положительных линеалов $\mathfrak{L}$ соответственно. Дефинитность формы $G(x, y)$ на линеале $\mathfrak{L}$ позволяет ввести в $\mathfrak{L}$ *топологию* $\tau_2 = \tau_2(\mathfrak{L}, G)$ отделимого предгильбертова пространства, определив скалярное произведение

$$(x, y) = \operatorname{sign} \mathfrak{L} \cdot G(x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{L}). \tag{5.1}$$

Таким образом, τ_2-норма имеет вид

$$|x| = |G(x, x)|^{1/2} \qquad (x \in \mathfrak{L}).$$

Совершенно очевидно, что τ_2-топология подчиняет (и мажорирует) G-метрику в $\mathfrak{L}$ (§ 2, п. 5).

Поскольку τ_2-топология является весьма естественной для дефинитных линеалов, представляет интерес решение некоторых задач для этих линеалов (G-проектирование, проекционная полнота, правильность и др.)

в терминах этой топологии. Отправным пунктом здесь снова, как и в § 4, оказывается вопрос о непрерывности линейных функционалов $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ ($x \in \mathfrak{L}$, y_0 — произвольный фиксированный элемент из $\mathfrak{E}$), но теперь уже — в топологии τ_2.

Если функционал $f_y(x) = G(x, y)$ τ_2-непрерывен на $\mathfrak{L}$ при любом $y \in \mathfrak{E}$, то дефинитный линеал $\mathfrak{L}$ назовем *регулярным*. Если же хотя бы для одного $y_0 \in \mathfrak{E}$ функционал $f_{y_0}(x)$ ($x \in \mathfrak{L}$) разрывен в τ_2-топологии, то линеал $\mathfrak{L}$ назовем *сингулярным*.

Очевидно, что любой конечномерный дефинитный линеал, а также любой линеал в пространстве с дефинитной G-метрикой всегда регулярен. В общем же случае это не так (см. ниже п. 4).

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) — *дефинитный линеал. Для того чтобы функционал* $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ ($x \in \mathfrak{L}$, $y_0 \in \mathfrak{E}$) *был* τ_2-*непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы*

$$m(y_0) = \inf_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) > -\infty \qquad (\operatorname{sign} \mathfrak{L} = 1), \tag{5.2}$$

$$M(y_0) = \sup_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) < \infty \qquad (\operatorname{sign} \mathfrak{L} = -1). \tag{5.2'}$$

Таким образом, дефинитный линеал $\mathfrak{L}$ *регулярен тогда и только тогда, когда условие* (5.2) (*соответственно* (5.2′)) *выполняется для всех* $y_0 \in \mathfrak{E}$.

Норма τ_2-*непрерывного функционала* $f_{y_0}(x)$ *выражается через величины* $m(y_0)$ *и* $M(y_0)$ *по формулам*

$$|f_{y_0}|^2 = G(y_0, y_0) - m(y_0) \qquad (\operatorname{sign} \mathfrak{L} = 1), \tag{5.3}$$

$$|f_{y_0}|^2 = M(y_0) - G(y_0, y_0) \qquad (\operatorname{sign} \mathfrak{L} = -1) \tag{5.3'}$$

соответственно.

Доказательство можно провести, очевидно, ограничившись случаем положительного линеала ($\operatorname{sign} \mathfrak{L} = 1$), ибо случай $\operatorname{sign} \mathfrak{L} = -1$ сводится к предыдущему простым изменением знака исходной G-метрики.

Необходимость. Пусть функционал $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ τ_2-непрерывен, т. е.

$$|G(x, y_0)| \leqslant C|x| \qquad (x \in \mathfrak{L}).$$

Тогда для любого $x \in \mathfrak{L}$ (см. (5.1))

$$G(x - y_0, x - y_0) = (x, x) - 2\operatorname{Re} G(x, y_0) + G(y_0, y_0) \geqslant$$
$$\geqslant |x|^2 - 2C|x| + G(y_0, y_0) = (|x| - C)^2 + G(y_0, y_0) - C^2 \geqslant G(y_0, y_0) - C^2 > -\infty.$$

Стало быть,

$$m(y_0) = \inf_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) > -\infty.$$

Заметим, что выбрав, в частности, $C = |f_{y_0}|$, имеем

$$m(y_0) \geqslant G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2. \tag{5.4}$$

Достаточность. Пусть $m(y_0) = \inf_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) > -\infty$. Тогда для любого $x \in \mathfrak{L}$ с $|x| = 1$

$$m(y_0) \leqslant G(x - y_0, x - y_0) = 1 - 2\operatorname{Re} G(x, y_0) + G(y_0, y_0).$$

откуда

$$\operatorname{Re} G(x, y_0) \leqslant \frac{1}{2} C_0, \tag{5.5}$$

где $C_0 = 1 + G(y_0, y_0) - m(y_0)$. Заменив в (5.5) x на $(-x)$ ($|-x| = 1$ по-прежнему), имеем

$$-\operatorname{Re} G(x, y_0) \leqslant \frac{1}{2} C_0. \tag{5.6}$$

Сопоставляя (5.5) и (5.6), получаем для любых $x \in \mathfrak{L}$ с $|x| = 1$

$$|\operatorname{Re} G(x, y_0)| \leqslant \frac{1}{2} C_0. \tag{5.7}$$

Заменив здесь x на $(-ix)$ (снова $|-ix| = 1$), имеем

$$|\operatorname{Im} G(x, y_0)| \leqslant \frac{1}{2} C_0. \tag{5.8}$$

Наконец, из (5.7) и (5.8) следует

$$|G(x, y_0)| \leqslant C_0 \qquad (x \in \mathfrak{L},\ |x| = 1),$$

т. е. функционал $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ τ_2-непрерывен.

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы (формулу (5.3)), выберем последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{L}$, удовлетворяющую следующим трем условиям:

а) $|x_n| = |f_{y_0}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — нормировка.

б) Для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N(\varepsilon)$

$$|f_{y_0}(x_n)| = |G(x_n, y_0)| \geqslant |f_{y_0}|^2 - \frac{\varepsilon}{2}$$

(это возможно по определению нормы $|f_{y_0}|$).

в) $\operatorname{Re} G(x_n, y_0) = |G(x_n, y_0)|$ $\qquad (n = 1, 2, \ldots)$;

это достигается умножением каждого x_n на скаляр $\exp\{-i \arg G(x_n, y_0)\}$ (при этом свойства а) и б) не нарушаются).

Теперь при $n > N(\varepsilon)$ в силу а), б) и в)

$$m(y_0) \leqslant G(x_n - y_0, x_n - y_0) = |f_{y_0}|^2 - 2|G(x_n, y_0)| + G(y_0, y_0) \leqslant$$
$$\leqslant |f_{y_0}|^2 - 2|f_{y_0}|^2 + \varepsilon + G(y_0, y_0) = G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2 + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$m(y_0) \leqslant G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2,$$

что в сочетании с (5.4) дает

$$m(y_0) = G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2. \tag{5.3}$$

Теорема 5.1 доказана полностью.

С л е д с т в и е. *Для существования G-проекции вектора y_0 $(\in \mathfrak{G})$ на дефинитный линеал $\mathfrak{L}$ необходимо и достаточно, чтобы конечный $\inf\limits_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) = m(y_0)$ (соответственно $\sup\limits_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) = M(y_0)$) достигался на некотором элементе $x_0 \in \mathfrak{L}$, который и является G-проекцией y_0 на $\mathfrak{L}$.*

В самом деле, пусть x_0 — G-проекция y_0 на $\mathfrak{L}$ $(\operatorname{sign} \mathfrak{L} = +1)$. Тогда для всех $x \in \mathfrak{L}$

$$f_{y_0}(x) = G(x, y_0) = G(x, x_0) = (x, x_0),$$

т. е. $|f_{y_0}|=|x_0|$. Отсюда в силу (5.3)

$$m(y_0)=G(y_0, y_0)-|f_{y_0}|^2=G(y_0, y_0)-G(x_0, x_0)=G(x_0-y_0, x_0-y_0).$$

Обратно, пусть $m(y_0)=G(x_0-y_0, x_0-y_0)$ $(x\in\mathfrak{L})$. Заметим, во-первых, что если для некоторого $z\in\mathfrak{C}$ $m(z)=G(z, z)$, то в силу (5.3) $|f_z|=0$, т. е. $f_z(x)=G(x, z)=0$ $(x\in\mathfrak{L})$. Во-вторых, для любого $x\in\mathfrak{L}$, очевидно, $m(y_0)=m(y_0-x)$. Таким образом,

$$m(y_0-x_0)=m(y_0)=G(y_0-x_0, y_0-x_0),$$

откуда $G(x, y_0-x_0)=0$ $(x\in\mathfrak{L})$, т. е. x_0 есть G-проекция y_0 на $\mathfrak{L}$.

Из полученного нами следствия теоремы 5.1 непосредственно вытекает соответствующий критерий проекционной полноты дефинитного линеала, формулировку которого мы опускаем.

2. Теорема 5.1 и ее следствие приводят к новому критерию G-проектируемости на дефинитный линеал $\mathfrak{L}$ и соответствующему критерию проекционной полноты $\mathfrak{L}$.

Теорема 5.2. *Для существования G-проекции x_0 вектора $y_0\in\mathfrak{C}$ на дефинитный линеал $\mathfrak{L}$ необходимо и достаточно, чтобы функционал $f_{y_0}(x)=G(x, y_0)$ был τ_2-непрерывен и для вектора $x_0\in\mathfrak{L}$ с $|x_0|=|f_{y_0}|$ достигалось равенство*

$$G(x_0, y_0)=|f_{y_0}|^2\cdot\operatorname{sign}\mathfrak{L}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Снова ограничимся случаем $\operatorname{sign}\mathfrak{L}=1$.

Необходимость условия (5.9) тривиальна, ибо для G-проекции $x_0\in\mathfrak{L}$ вектора $y_0\in\mathfrak{C}$ имеем

$$f_{y_0}(x)=G(x, y_0)=G(x, x_0)=(x, x_0) \qquad (x\in\mathfrak{L}),$$

откуда $|f_{y_0}|=|x_0|$ и $G(x_0, y_0)=(x_0, x_0)=|f_{y_0}|^2$.

Достаточность. Пусть $x_0\in\mathfrak{L}$ и $|x_0|=|f_{y_0}|$, а $G(x_0, y_0)=|f_{y_0}|^2$. Тогда с учетом (5.3)

$$G(x_0-y_0, x_0-y_0)=|x_0|^2-2|f_{y_0}|^2+G(y_0, y_0)=G(y_0, y_0)-|f_{y_0}|^2=m(y_0),$$

и на основании следствия из теоремы 5.1 вектор x_0 есть G-проекция y_0 на $\mathfrak{L}$.

Следствие. *Для проекционной полноты дефинитного линеала $\mathfrak{L}\,(\subset\mathfrak{C})$ необходимо и достаточно, чтобы он был регулярным и для любого $y_0\in\mathfrak{C}$ нашелся бы вектор x_0 $(|x_0|=|f_{y_0}|)$, удовлетворяющий условию* (5.9).

Примечание. Достаточность условия теоремы 5.2 (а значит, и всю теорему) можно доказать и непосредственно, минуя теорему 5.1.

В самом деле, в силу теоремы Фреше — Рисса τ_2-непрерывный функционал $f_{y_0}(x)=G(x, y_0)$ допускает представление $f_{y_0}(x)=(x, \tilde{x}_0)$, где $\tilde{x}_0$ — некоторый «идеальный» элемент гильбертова пространства $\tilde{\mathfrak{L}}$, полученного пополнением отделимого предгильбертова пространства $\mathfrak{L}$. При этом, как известно, $|f_{y_0}|=|\tilde{x}_0|$. С другой стороны, по условию существует такой вектор $x_0\in\mathfrak{L}$ с $|x_0|=|f_{y_0}|$, что $G(x_0, y_0)=|f_{y_0}|^2=|\tilde{x}_0|^2$. Но тогда

$$|f_{y_0}|^2=G(x_0, y_0)=(x_0, \tilde{x}_0)\leqslant|x_0|\,|\tilde{x}_0|=|f_{y_0}|^2,$$

т. е. векторы $\widetilde{x}_0$ и x_0 коллинеарны: $\widetilde{x}_0 = \lambda x_0 \in \mathfrak{L}$. Легко видеть, что в данном случае $\lambda = 1$, так что $G(x, y_0) = (x, x_0) = G(x, x_0)$ для всех $x \in \mathfrak{L}$.

Изложенный вариант доказательства теоремы 5.2 имеет то преимущество, что в нем нигде не используется эрмитовость G-метрики. Дефинитные же линеалы и τ_2-топологию в них можно рассматривать и в произвольных G-пространствах. В этом случае G-проекции в теореме 5.2 следует понимать как правые G-проекции. Аналогичный результат справедлив и для левых G-проекций.

Из теоремы Фреше — Рисса немедленно следует, что *регулярность и τ_2-полнота дефинитного линеала $\mathfrak{L}\,(\subset \mathfrak{G})$ достаточны для его проекционной полноты.* В то же время τ_2-полнота, в отличие от регулярности, не является необходимым условием проекционной полноты, что видно из тривиальных примеров [1]).

3. Теорема 5.1, дающая критерий регулярности дефинитного линеала $\mathfrak{L}\,(\subset \mathfrak{G})$, оставляет открытым вопрос о существовании сингулярных (т. е. не регулярных) линеалов. Как выясняется ниже, примеры сингулярных линеалов, по крайней мере в пространствах $\Pi_\varkappa$, известны уже сравнительно давно (см. [8]). Однако совсем недавно этот вопрос снова привлек к себе внимание в связи с отдельными ошибочными высказываниями в ряде статей по теоретической физике.

А. Ульман в своей статье [42] совершенно справедливо критикует работу [41] Р. Асколи и Э. Минарди за то, что эти авторы упустили из виду неединственность канонического разложения невырожденного G-пространства $\mathfrak{G}$. В то же время сам А. Ульман вслед за Р. Асколи и Э. Минарди повторяет неправильное утверждение о единственности разложения всякого G-пространства $\mathfrak{G}$ на максимальный невырожденный и изотропный линеалы, о чем уже говорилось выше (§ 3, п. 1).

Так же неправомерно, как и некоторые другие авторы, употребляя термин «гильбертово пространство с индефинитной метрикой» (см. § 1, п. 3), А. Ульман ([42], [43]), в отличие от своих предшественников, сознает необходимость строгой аксиоматизации рассматриваемых пространств и введения в них определенной топологии. В частности, он ограничивается рассмотрением невырожденного G-пространства $\mathfrak{G}$ и вводит в качестве дополнительного требования постулат, который в принятой нами терминологии звучит так:

(U) *Вместе со всяким дефинитным линеалом $\mathfrak{L}$ пространство $\mathfrak{G}$ содержит также его τ_2-пополнение $\widetilde{\mathfrak{L}}$.*

Исходя из своего постулата (U), Ульман приходит к теореме о возможности канонического разложения пространства $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_+ \dot{+} \mathfrak{G}_-, \tag{5.10}$$

где $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$ — τ_2-полные G-ортогональные дефинитные линеалы ($\operatorname{sign} \mathfrak{G}_\pm = \pm 1$). Таким образом, $\mathfrak{G}$ оказывается по существу J-пространством. Но, как указано ниже (§ 6, теорема 6.5), последнее обстоятельство при условии бесконечной размерности подпространств $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$ несовместимо с постулатом (U) [2]).

Анализ доказательства А. Ульманом существования канонического разложения (5.10) обнаруживает следующий источник его ошибок: в доказательстве неявно предпола-

---

[1]) Достаточно, скажем, рассмотреть G-пространство $\mathfrak{G}$, допускающее каноническое разложение (см. § 3, п. 2) $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_+ \dot{+} \mathfrak{G}_-$, где $\mathfrak{G}_+$ — неполное отделимое предгильбертово пространство (в τ_2-топологии). Очевидно, $\mathfrak{G}_+$ (как и $\mathfrak{G}_-$) проекционно-полно.

[2]) Случай $\mathfrak{G} = \Pi_\varkappa$, когда справедлив постулат (U), следует в этой связи считать тривиальным.

гается, что всякий τ_2-полный дефинитный линеал регулярен. Как видно из приводимых ниже теорем (в частности, теоремы 5.5), это утверждение ошибочно.

4. В настоящем пункте мы излагаем ряд теорем относительно сингулярных линеалов, опуская при этом те доказательства, которые уже были опубликованы ранее.

Теорема 5.3 ([47], [49]). *Всякое невырожденное бесконечномерное G-пространство $\mathfrak{E}$ с индефинитной G-метрикой содержит сингулярные линеалы.*

Заметим, что условие невырожденности $\mathfrak{E}$ (в отличие от двух других требований — бесконечномерности и индефинитности G-метрики) не является существенным. Важно, чтобы после разложения $\mathfrak{E}$ на изотропный $(\mathfrak{E}_0)$ и невырожденный $(\mathfrak{E}_1)$ линеалы $(\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dot{+} \mathfrak{E}_1)$ (см. § 3, п. 1) $\mathfrak{E}_1$ не оказался конечномерным.

Теорема 5.4 ([49]). *Пусть $\mathfrak{L}$ — дефинитный линеал в невырожденном G-пространстве $\mathfrak{E}$. Для того чтобы $\mathfrak{L}$ был сингулярным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}_1$ — линеал, допускающий пополнение до пространства Π_1* (см. § 3, п. 4), *после которого замыкание $\overline{\mathfrak{L}}$ линеала $\mathfrak{L}$ по норме пространства Π_1 оказывается вырожденным подпространством.*

Упоминаемый в теореме 5.4 линеал $\mathfrak{E}_1$ при доказательстве необходимости условия строится эффективно: он представляет собой линейную оболочку линеала $\mathfrak{L}$ и того вектора $y_0 \in \mathfrak{E}$, для которого функционал $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ τ_2-разрывен. Доказательство же достаточности условия, как и доказательство [49] теоремы 5.3, опирается на следующие вспомогательные предложения.

1°. *Пусть $\mathfrak{E}$ — любое нормированное $G^э$-пространство с нормой $\|x\|$ $(x \in \mathfrak{E})$, мажорирующей G-метрику:*

$$|G(x, y)| \leqslant C \|x\| \|y\| \qquad (x, y \in \mathfrak{E}). \tag{5.11}$$

Если $\mathfrak{L} (\subset \mathfrak{E})$ — дефинитный линеал, то для τ_2-непрерывности функционала $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ необходимо, чтобы вектор y_0 был G-ортогонален ко всем изотропным векторам подпространства $\overline{\mathfrak{L}}$ (замыкания $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{E}$ по норме $\|x\|$).

В самом деле, пусть $x_0 (\neq 0)$ — изотропный вектор из $\overline{\mathfrak{L}}$, а $G(x_0, y_0) \neq 0$. Аппроксимируем x_0 последовательностью $\{x_n\} \subset \mathfrak{L} : \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$. В силу мажорации (5.11)

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} |G(x_n, x_n)|^{1/2} = |G(x_0, x_0)|^{1/2} = 0.$$

В то же время

$$\lim_{n\to\infty} f_{y_0}(x_n) = \lim_{n\to\infty} G(x_n, y_0) = G(x_0, y_0) = 0,$$

т. е. функционал $f_{y_0}(x)$ разрывен в τ_2-топологии.

Замечание. Как видно из доказательства, предложение 1° остается справедливым и в случае мажорации G-метрики любой полунормируемой топологией (см. § 2, п. 5). Напомним, что в случае, когда $\mathfrak{E}$ есть $(\mathfrak{B}, G)$-пространство, оценка (5.11) эквивалентна требованию подчинения G-метрики $\mathfrak{B}$-топологии (теорема 2.2). Если же $\mathfrak{E} = \Pi_\varkappa$, то можно показать [49], что условие предложения 1° также достаточно для τ_2-непрерывности $f_{y_0}(x)$.

2°. *Если $\mathfrak{L}$ — дефинитный линеал в невырожденном нормированном $G^э$-пространстве $\mathfrak{E}$ с мажорацией* (5.11), *а замыкание $\overline{\mathfrak{L}}$ в $\mathfrak{E}$ вырождено, то $\mathfrak{L}$ сингулярен.*

Это непосредственно следует из 1°, если учесть, что для любого изотропного в $\overline{\mathfrak{L}}$ вектора $x_0 (\neq 0)$ в силу невырожденности $\mathfrak{E}$ найдется вектор $y_0 \in \mathfrak{E}$ такой, что $G(x_0, y_0) \neq 0$.

Предложения 1° и 2° позволяют при доказательстве теоремы 5.3 осуществить эффективное построение сингулярного линеала $\mathfrak{L}$.

Общую характеризацию τ_2-полных сингулярных линеалов G-пространства $\mathfrak{E}$ дает

Теорема 5.5 ([49]). *Для того чтобы сингулярный линеал $\mathfrak{L} (\subset \mathfrak{E})$ был τ_2-полным, необходимо и достаточно, чтобы после G-изометрического вложения $\mathfrak{L}$ в пространство Π_1 (согласно теореме* 5.4) *его замыкание $\overline{\mathfrak{L}}$ в Π_1 допускало разложение в прямую сумму $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \dot{+} \{x_0\}$, где $\{x_0\}$ — одномерное подпространство, натянутое на изотропном векторе $x_0 (\neq 0)$ подпространства $\overline{\mathfrak{L}}$.*

Из этой теоремы немедленно следует существование τ_2-полных сингулярных линеалов, во всяком случае в любом бесконечномерном $\mathfrak{H}$-пространстве с индефинитной $G^э$-метрикой, чем опровергается гипотеза А. Ульмана, упомянутая в п. 3. В самом деле, в наших предположениях пространство $\mathfrak{E}$ всегда содержит (замкнутые) семидефинитные подпространства $\mathfrak{M}$, изотропные линеалы которых одномерны. Если $\mathfrak{M}$ — такое подпространство, а $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \dot{+} \{x_0\}$ есть его разложение в прямую сумму изотропного ($\{x_0\}$) и плотного в $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{L}$) линеалов (см. [8], стр. 421), то в силу предложения 2° линеал $\mathfrak{L}$ сингулярен, а в силу теоремы 5.5 он τ_2-полон.

5. В заключение приведем несколько предложений о τ_2-полноте и регулярности дефинитных линеалов и подпространств в нормированных $G^э$-пространствах и, в частности, в $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространствах.

Теорема 5.6. *В невырожденном нормированном $G^э$-пространстве $\mathfrak{E}$ при условии* (5.11) *всякий дефинитный линеал $\mathfrak{L}$ и его замыкание $\overline{\mathfrak{L}}$ могут быть регулярными только одновременно.*

Доказательство. То, что в случае регулярности (а стало быть, и дефинитности) подпространства $\overline{\mathfrak{L}}$ линеал $\mathfrak{L}$ также регулярен, тривиально.

Обратно, пусть $\mathfrak{L}$ — регулярный дефинитный линеал. В силу предложения 2° подпространство $\overline{\mathfrak{L}}$ невырождено (дефинитно). Если бы оно было сингулярным, то существовали бы вектор $y_0 \in \mathfrak{E}$, число $\alpha > 0$ и последовательность $\{x_n\} \subset \overline{\mathfrak{L}}$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$, а

$$|G(x_n, y_0)| > a \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Теперь достаточно взять последовательность $\{x'_n\} \subset \mathfrak{L}$ такую, например, чтобы $\| x_n - x'_n \| < \frac{\alpha}{2 \| y_0 \| Cn}$ $(n=1, 2, \ldots)$, и мы получим (с учетом (5.11)):

$$\lim_{n\to\infty} | x'_n | = 0, \ | G(x'_n, y_0) | \geqslant | G(x_n, y_0) | - | G(x_n - x'_n, y_0) | > \frac{\alpha}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

А это означает, что линеал $\mathfrak{L}$ сингулярен, вопреки предположению.

Переходя к $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространствам, используем понятия правильности подпространства и линеала, введенные в § 3, п. 7. Прежде всего заметим, что из предложения 9° § 3 следует:

3°. *Дефинитное подпространство $\mathfrak{M}$ в $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространстве τ_2-полно в том и только том случае, когда оно правильно.*

В самом деле, если $G_{\mathfrak{M}}$ — оператор Грама G-метрики в $\mathfrak{M}$ (простоты ради будем считать $\operatorname{sign} \mathfrak{M} = +1$), то $G_{\mathfrak{M}}$ и $G_{\mathfrak{M}}^{1/2}$ могут быть непрерывно обратимыми только одновременно. Но непрерывная обратимость $G_{\mathfrak{M}}$ эквивалентна правильности $\mathfrak{M}$, а то же свойство оператора $G_{\mathfrak{M}}^{1/2}$ равносильно τ_2-полноте $\mathfrak{M}$. Последнее непосредственно вытекает из теоремы Банаха и соотношения

$$| x |^2 = (Gx, x) = (G_{\mathfrak{M}} x, x) = (G_{\mathfrak{M}}^{1/2} x, G_{\mathfrak{M}}^{1/2} x) = \| G_{\mathfrak{M}}^{1/2} x \|^2 \qquad (x \in \mathfrak{M}).$$

Теорема 5.7. *В невырожденном $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространстве $\mathfrak{E}$ для регулярности τ_2-полного дефинитного линеала $\mathfrak{L}$ необходимо и достаточно, чтобы он был ($\mathfrak{H}$-замкнутым) подпространством.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathfrak{L}$ — дефинитное τ_2-полное подпространство из $\mathfrak{E}$. В силу предложения 3° $\mathfrak{L}$ — правильное подпространство. Но тогда $\mathfrak{L}$ проекционно-полно (§ 4, п. 2) и, стало быть, регулярно (теорема 5.2, следствие).

Необходимость. Предположим, что $\mathfrak{L}$ регулярен, но не замкнут, а $\overline{\mathfrak{L}}$ — его замыкание. Множество $\overline{\mathfrak{L}} \setminus \mathfrak{L}$ непусто. Возьмем $y_0 \in \overline{\mathfrak{L}} \setminus \mathfrak{L}$. Поскольку в силу τ_2-полноты и регулярности линеал $\mathfrak{L}$ проекционно-полон (п. 2), рассмотрим G-проекцию $x_0 (\in \mathfrak{L})$ вектора y_0 на $\mathfrak{L}$. Вектор $z_0 = y_0 - x_0$ $(\in \overline{\mathfrak{L}})$ G-ортогонален к $\mathfrak{L}$, а значит, и к $\overline{\mathfrak{L}}$. В частности, $(Gz_0, x_0) = 0$ и $(Gz_0, y_0) = 0$, так что $(Gz_0, z_0) = (Gz_0, y_0 - x_0) = 0$.

С другой стороны, в силу регулярности $\mathfrak{L}$ подпространство $\overline{\mathfrak{L}}$ дефинитно (предложение 2°), откуда следует, что $z_0 = 0$, а $y_0 = x_0 \in \mathfrak{L}$. Мы пришли к противоречию с предположением $y_0 \in \overline{\mathfrak{L}} \setminus \mathfrak{L}$. Теорема доказана.

В § 6 будет показано (см. п. 4), что в J-пространствах теорема 5.7 допускает в известном смысле обращение: *дефинитное* (*замкнутое*) *подпространство регулярно тогда и только тогда, когда оно τ_2-полно* (*т. е. правильно* — см. предложение 3°)[1]).

Отсюда получается предложение

4°. *Для дефинитных линеалов $\mathfrak{L}$ в J-пространствах понятия регулярности и правильности совпадают.*

[1]) Разумеется, в $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространствах это уже неверно. Достаточно рассмотреть $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространство $\mathfrak{E}$ с положительным оператором Грама G, для которого G^{-1} неограничен. Тогда само $\mathfrak{E}$ регулярно, но не правильно (не τ_2-полно).

В самом деле, если $\mathfrak{L}$ — регулярный дефинитный линеал из $\mathfrak{E}$, то регулярно и его замыкание $\overline{\mathfrak{L}}$ (теорема 5.6) и, стало быть, $\overline{\mathfrak{L}}$ правильно. Но тогда правилен и $\mathfrak{L}$ (теорема 3.5).

Обратно, если линеал $\mathfrak{L}$ правилен, то правильно и $\overline{\mathfrak{L}}$. В силу дефинитности $\mathfrak{L}$ подпространство $\overline{\mathfrak{L}}$ семидефинитно, а в силу своей правильности оно дефинитно (§ 3, 9°). Так как при этом оно и проекционно-полно (§ 4, п. 2), то $\overline{\mathfrak{L}}$ регулярно (теорема 5.2, следствие), а с ним регулярен и линеал $\mathfrak{L}$.

§ 6. Пространства с J-метрикой

Настоящий параграф посвящен подробному изучению J-пространств (§ 2, п. 7), т. е. таких ($\mathfrak{H}$, $G^э$)-пространств, в которых G-метрика задается при помощи оператора Грама $G \equiv J = P_+ - P_-$ (P_+ и P_- — гильбертовы ортопроекторы, $P_+ + P_- = I$). Как показано в § 2, 3°, любое ($\mathfrak{H}$, $G^э$)-пространство $\mathfrak{E}$ с ограниченно обратимым оператором Грама G может быть преобразовано в J-пространство путем замены гильбертовой метрики ($\mathfrak{H}$-метрики) в $\mathfrak{E}$ некоторой ей равносильной.

1. Существенное значение для дальнейшего имеет следующее очевидное предложение (см. § 2, п. 8):

1°. *$\mathfrak{H}$-топология в J-пространстве $\mathfrak{E}$ согласуется с J-метрикой на $\mathfrak{E}$ и, следовательно, является τ_1-топологией на* $\mathfrak{E}$ $(\tau_1 = \tau_1(\mathfrak{E}, G) = \tau_1(\mathfrak{E}, J))$.

Отсюда и из теоремы 3.1 вытекает:

2°. *Каков бы ни был линеал $\mathfrak{L}$ из J-пространства $\mathfrak{E}$, всегда $\mathfrak{L}'' = \overline{\mathfrak{L}}$, где $\overline{\mathfrak{L}}$ — $\mathfrak{H}$-замыкание $\mathfrak{L}$. В частности, если $\mathfrak{L}$ — подпространство, то $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$.*

Воспользовавшись 1° и § 3, 5°, убедимся в справедливости следующего утверждения:

3°. *Если $\mathfrak{L}$ — линеал в J-пространстве $\mathfrak{E}$, то для плотности линеала $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ в $\mathfrak{E}$ ($\overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'} = \mathfrak{E}$) необходимо и достаточно, чтобы подпространство $\overline{\mathfrak{L}}$ ($= \mathfrak{L}''$) было невырождено. В частности, если $\mathfrak{L}$ — подпространство, то $\overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'} = \mathfrak{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}$ невырождено.*

Из § 4, 6° вытекает, что незамкнутый линеал $\mathfrak{L}$ в J-пространстве $\mathfrak{E}$ не может быть проекционно-полным. Что же касается замкнутых линеалов, т. е. подпространств $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$, то (теорема 4.3) для проекционной полноты $\mathfrak{L}$ необходима и достаточна равносильность на $\mathfrak{L}$ топологий $\tau_1(\mathfrak{L}, J)$ и $\tau_1(\mathfrak{E}, J)$, а так как $\tau_1(\mathfrak{E}, J)$ на основании 1° совпадает с $\mathfrak{H}$-топологией в $\mathfrak{E}$, то доказано следующее предложение:

4°. *Подпространство $\mathfrak{L}$ J-пространства $\mathfrak{E}$ проекционно-полно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}$ правильно* (§ 3, п. 7).

Для дефинитных подпространств $\mathfrak{L}$ предложение 4° может быть переформулировано вследствие § 5, 3° так:

5°. *Дефинитное подпространство проекционно-полно тогда и только тогда, когда оно τ_2-полно.*

2. Положим $\mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_- = P_-\mathfrak{E}$, тогда справедливо равенство

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \oplus \mathfrak{E}_-,$$

являющееся каноническим разложением (§ 3, п. 2) пространства $\mathfrak{E}$.

6°. *Пусть* $\mathfrak{L}$ — *произвольный неотрицательный* (*неположительный*) *линеал в* J*-пространстве* $\mathfrak{E}$. *Тогда проектор* P_+ (*проектор* P_-) *осуществляет линейное и* $\mathfrak{H}$*-гомеоморфное* (*т. е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное в* $\mathfrak{H}$*-топологии*) *отображение* $\mathfrak{L}$ *на* $P_+\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}_+$ ($P_-\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}_-$).

Доказательство проведем для неотрицательного линеала $\mathfrak{L}$. Взаимная однозначность отображения P_+ линеала $\mathfrak{L}$ на $P_+\mathfrak{L}$ видна из того, что из $P_+x=0$ для $x\in\mathfrak{L}$ вытекает $x=P_-x$ и в силу неотрицательности $\mathfrak{L}$ $x=0$. Что касается непрерывности обратного отображения $P_+\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{L}$, то она вытекает из неравенства

$$\|x\|^2=\|P_+x\|^2+\|P_-x\|^2\leqslant 2\|P_+x\|^2,$$

справедливого для любого $x\in\mathfrak{L}$ в силу соотношения

$$0\leqslant G(x, x)=(Jx, x)=\|P_+x\|^2-\|P_-x\|^2.$$

Теорема 6.1. а) *Для того чтобы неотрицательный* (*положительный*) *линеал* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *был максимальным неотрицательным* (*положительным*) *подпространством* [1]), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$P_+\mathfrak{L}=\mathfrak{E}_+. \tag{6.1}$$

б) *Для того чтобы неположительный* (*отрицательный*) *линеал* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *был максимальным неположительным* (*отрицательным*) *подпространством, необходимо и достаточно, чтобы*

$$P_-\mathfrak{L}=\mathfrak{E}_-. \tag{6.2}$$

в) *Для того чтобы нулевой линеал* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *был максимальным нулевым подпространством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из равенств* (6.1), (6.2).

Доказательство. Предположим сначала, что неотрицательный линеал $\mathfrak{L}$ удовлетворяет равенству (6.1). Если бы существовало неотрицательное подпространство $\mathfrak{L}_1\supset\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1\setminus\mathfrak{L}\neq 0$, то в силу 6° $P_+\mathfrak{L}_1\setminus\mathfrak{E}_+=$ $=P_+\mathfrak{L}_1\setminus P_+\mathfrak{L}\neq 0$, что противоречит включению $P_+\mathfrak{L}_1\subset\mathfrak{E}_+$. Так как всякое положительное (и нулевое) подпространство является неотрицательным, то достаточность условий а) и в) доказана. Достаточность б) устанавливается аналогично.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ — неотрицательное (положительное) подпространство. Если $P_+\mathfrak{L}\neq\mathfrak{E}_+$, то в силу замкнутости $P_+\mathfrak{L}$, следующей из 6°, существует $(0\neq)\,x_0\in\mathfrak{E}_+\ominus P_+\mathfrak{L}$. Нетрудно видеть, что в этом случае $\mathfrak{L}_1=\mathfrak{L}\oplus\{x_0\}$ является неотрицательным (а в случае положительности $\mathfrak{L}$ положительным) подпространством, содержащим $\mathfrak{L}$, и, следовательно, $\mathfrak{L}$ не максимально. Если же $\mathfrak{L}$ — нулевое подпространство и $P_+\mathfrak{L}\neq\mathfrak{E}_+$, $P_-\mathfrak{L}\neq\mathfrak{E}_-$, то $\mathfrak{L}\oplus$ $\oplus\{x_0+y_0\}$, где $(0\neq)\,x_0\in\mathfrak{E}_+\ominus P_+\mathfrak{L}$, $(0\neq)\,y_0\in\mathfrak{E}_-\ominus P_-\mathfrak{L}$, является нулевым подпространством, содержащим $\mathfrak{L}$, и, следовательно, $\mathfrak{L}$ не может быть максимальным нулевым. Теорема доказана.

Поскольку размерность гильбертова пространства $\mathfrak{L}$ (мощность полного ортонормированного базиса в $\mathfrak{L}$) не изменяется при линейных гомеоморфных отображениях, из 6° и теоремы 6.1 следует

---

[1]) Так мы называем максимальный неотрицательный (положительный) линеал из $\mathfrak{E}$, являющийся $\mathfrak{H}$- подпространством.

Теорема 6.2. *Все максимальные неотрицательные и положительные подпространства J-пространства $\mathfrak{E}$ имеют одну и ту же размерность, равную размерности $\mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{E}$. Все максимальные неположительные и отрицательные подпространства из $\mathfrak{E}$ имеют одну и ту же размерность, равную размерности $\mathfrak{E}_- = P_-\mathfrak{E}$. Все максимальные нулевые подпространства из $\mathfrak{E}$ имеют размерность, равную наименьшей из размерностей $\mathfrak{E}_+$ и $\mathfrak{E}_-$.*

Отсюда и из максимальности компонент канонического разложения (§ 3, п. 2) непосредственно вытекает утверждение, которое можно рассматривать как обобщение закона инерции квадратичных форм:

7°. *Если*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M}_+ \dot{+} \mathfrak{M}_-$$

—каноническое разложение J-пространства $\mathfrak{E}$, то

$$\dim \mathfrak{M}_+ = \dim \mathfrak{E}_+, \quad \dim \mathfrak{M}_- = \dim \mathfrak{E}_-.$$

3. Рассмотрим некоторый линеал $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$. Если существует линейный оператор K, отображающий $\mathfrak{E}_+$ в $\mathfrak{E}_-$, аннулирующийся на $\mathfrak{E}_-$ и обладающий тем свойством, что $\mathfrak{L}$ принадлежат те и только те векторы $x \in \mathfrak{E}$, которые представимы в виде

$$x = x_+ + Kx_+ \quad (x_+ \in \mathfrak{E}_+),$$

то будем говорить, что K является *угловым оператором линеала $\mathfrak{L}$ относительно $\mathfrak{E}_+$*. Аналогично определяется *угловой оператор линеала $\mathfrak{L}$ относительно $\mathfrak{E}_-$*.

Ниже без доказательства приводится ряд простых предложений, дающих описание расположения максимальных подпространств J-пространства $\mathfrak{E}$ при помощи углового оператора (доказательства см. в [33][1]).

Теорема 6.3. *Для того чтобы линеал $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ был максимальным неотрицательным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы угловой оператор K линеала $\mathfrak{L}$ относительно $\mathfrak{E}_+$ существовал и являлся нерастягивающим оператором: $\|K\| \leqslant 1$. При этом $\mathfrak{L}$ — максимальное положительное подпространство тогда и только тогда, когда K — сжимающий на $\mathfrak{E}_+$ ($\|Kx\| < \|x\|$ для $0 \neq x \in \mathfrak{E}_+$), а нулевое — тогда и только тогда, когда K изометричен на $\mathfrak{E}_+$ ($\|Kx\| = \|x\|$ для $x \in \mathfrak{E}_+$).*

Отсюда и из аналогичного предложения, справедливого для неположительных линеалов, следует, что *линеал $\mathfrak{L}$ является гипермаксимальным нулевым* (§ 3, п. 6) *подпространством тогда и только тогда, когда его угловой оператор изометрически отображает $\mathfrak{E}_+$ на $\mathfrak{E}_-$.*

Теорема 6.4. *Максимальное положительное (отрицательное) подпространство $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) является правильным (а следовательно, проекционно-полным* (§ 4, п. 2)) *тогда и только тогда, когда его угловой оператор K относительно $\mathfrak{E}_+$ (соответственно относительно $\mathfrak{E}_-$) удовлетворяет неравенству*

$$\|K\| < 1.$$

Заметим, что эквивалентные формулировки теорем 6.3 и 6.4 можно получить, если рассматривать вместо углового оператора K линеала $\mathfrak{L}$

[1]) В работе [33] вместо термина «угловой оператор» применяется термин «угловой коэффициент».

«косой» проектор E ($E^2=E$) на этот линеал, удовлетворяющий условиям $EP_+=E$, $P_+E=P_+$ для неотрицательного линеала и $EP_-=E$, $P_-E=P_-$ для неположительного линеала. Нетрудно видеть, что такой проектор E связан с угловым оператором K равенствами

$$E=P_++K \quad (\operatorname{sign}\mathfrak{L}\geqslant 0), \qquad E=P_-+K \qquad (\operatorname{sign}\mathfrak{L}\leqslant 0).$$

Из теоремы 6.4 вытекает следующая характеристика пространств $\Pi_\varkappa$ (§ 2, п. 7) в классе J-пространств.

Т е о р е м а 6.5. *Для того чтобы любое дефинитное (положительное или отрицательное) подпространство в J-пространстве $\mathfrak{E}$ было правильным, необходимо и достаточно, чтобы размерность хотя бы одного из подпространств $\mathfrak{E}_+$ и $\mathfrak{E}_-$ была конечной, т. е. чтобы $\mathfrak{E}$ было пространством типа $\Pi_\varkappa$ ($\varkappa=\min\{\dim\mathfrak{E}_+, \dim\mathfrak{E}_-\}$).*

Связь между угловыми операторами подпространства $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ и его J-ортогонального дополнения $\mathfrak{L}'$ дает следующее предложение:

8°. *Если K — угловой оператор подпространства $\mathfrak{L}$ относительно $\mathfrak{E}_+$, то K^* — угловой оператор подпространства $\mathfrak{L}'$ относительно $\mathfrak{E}_-$.*

Доказательство следует из того, что $x\in\mathfrak{L}'$ тогда и только тогда, когда $(Jx, x_++Kx_+)=0$, т. е. $(P_+x, x_+)=(K^*P_-x, x_+)$ для любого $x_+\in\mathfrak{E}_+$. Так как $\mathfrak{R}(K^*)\subset\mathfrak{E}_+$, то последнее равенство эквивалентно тому, что $P_+x=K^*P_-x$. Иначе говоря, $x\in\mathfrak{L}'$ тогда и только тогда, когда

$$x=K^*P_-x+P_-x,$$

а это и значит, что K^* — угловой оператор подпространства $\mathfrak{L}'$ относительно $\mathfrak{E}_-$.

Отсюда непосредственно следует

9°. *Если подпространство $\mathfrak{L}$ является максимальным неотрицательным (неположительным, положительным, отрицательным), то $\mathfrak{L}'$ — максимальное неположительное (соответственно неотрицательное, отрицательное, положительное) подпространство.*

Кроме того, из 8° и теоремы 6.4 вытекает следующее описание всех канонических разложений J-пространства $\mathfrak{E}$:

Т е о р е м а 6.6. *Для того чтобы $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ были компонентами канонического разложения J-пространства $\mathfrak{E}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{M}_+=(P_++K)\mathfrak{E}_+, \qquad \mathfrak{M}_-=(P_-+K^*)\mathfrak{E}_-, \tag{6.3}$$

где линейный оператор K удовлетворяет условиям:

$$\|K\|<1, \qquad K\mathfrak{E}_+\subset\mathfrak{E}_-, \qquad K\mathfrak{E}_-=0.$$

Покажем теперь, что *изучение произвольного подпространства $\mathfrak{L}$ из J-пространства $\mathfrak{E}$ может быть сведено к изучению максимальных подпространств.* Для этого рассмотрим такое каноническое разложение подпространства $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_+\oplus\mathfrak{L}_-\oplus\mathfrak{L}_0,$$

компоненты которого не только J-ортогональны, но и $\mathfrak{H}$-ортогональны между собой (см. § 3, п. 2). Положим

$$\mathfrak{E}_+^{(1)}=P_+\mathfrak{L}_+, \quad \mathfrak{E}_-^{(1)}=\overline{P_-\mathfrak{L}_+}, \quad \mathfrak{E}_+^{(2)}=\overline{P_+\mathfrak{L}_-}, \quad \mathfrak{E}_-^{(2)}=P_-\mathfrak{L}_-,$$

$$\mathfrak{E}_+^{(3)}=P_+\mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{E}_-^{(3)}=P_-\mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{E}^{(k)}=\mathfrak{E}_+^{(k)}\oplus\mathfrak{E}_-^{(k)} \qquad (k=1,\ 2,\ 3).$$

Если $x \in \mathfrak{L}_+$, $y \in \mathfrak{L}_-$, то

$$(P_+x, P_+y)+(P_-x, P_-y)=(x, y)=0$$

и

$$(P_+x, P_+y)-(P_-x, P_-y)=(Jx, y)=0.$$

Отсюда следует $\mathfrak{H}$-ортогональность подпространств $\mathfrak{E}_+^{(1)}$ и $\mathfrak{E}_+^{(2)}$, $\mathfrak{E}_-^{(1)}$ и $\mathfrak{E}_-^{(2)}$. Рассуждая так же, докажем в конце концов взаимную $\mathfrak{H}$-ортогональность и J-ортогональность подпространств $\mathfrak{E}^{(1)}$, $\mathfrak{E}^{(2)}$ и $\mathfrak{E}^{(3)}$. Нетрудно видеть, что в $\mathfrak{E}^{(k)}$ $(k=1, 2, 3)$ J-метрика индуцирует J_k-метрику, порожденную оператором Грама $J_k=P_+^{(k)}-P_-^{(k)}$, где $P_+^{(k)}$ и $P_-^{(k)}$ — $\mathfrak{H}$-ортопроекторы на $\mathfrak{E}_+^{(k)}$ и $\mathfrak{E}_-^{(k)}$ соответственно. На основании теоремы 6.1 подпространство $\mathfrak{L}_+$ — максимальное положительное в $\mathfrak{E}^{(1)}$, $\mathfrak{L}_-$ — максимальное отрицательное в $\mathfrak{E}^{(2)}$, $\mathfrak{L}_0$ — гипермаксимальное нулевое в $\mathfrak{E}_3$. Нетрудно видеть, что J-ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{L}$ — подпространство $\mathfrak{L}'$ — представляется в виде

$$\mathfrak{L}'=(\mathfrak{L}_+)_1'\oplus(\mathfrak{L}_-)_2'\oplus\mathfrak{L}_0\oplus\mathfrak{E}^{(4)}, \tag{6.4}$$

где $(\mathfrak{M})_k'$ — J_k-ортогональное дополнение в $\mathfrak{E}^{(k)}$ подпространства $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{E}^{(k)}$, а $\mathfrak{E}^{(4)}=\mathfrak{E}\ominus[\mathfrak{E}^{(1)}\oplus\mathfrak{E}^{(2)}\oplus\mathfrak{E}^{(3)}]$. При доказательстве (6.4) мы воспользовались тем, что на основании теоремы 3.3 $(\mathfrak{L}_0)_3'=\mathfrak{L}_0$.

4. На основании следствия теоремы 5.2 всякий проекционно-полный дефинитный линеал в G-пространстве $\mathfrak{E}$ регулярен. Для подпространств из J-пространства $\mathfrak{E}$ верно и обратное. Справедливость этого вытекает из следующего предложения.

Теорема 6.7. *Всякое неправильное дефинитное подпространство J-пространства $\mathfrak{E}$ сингулярно.*

В силу сказанного в конце п. 3 доказательство достаточно провести для максимального положительного неправильного подпространства $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$. Если K — угловой оператор $\mathfrak{L}$, то на основании теоремы 6.3

$$([P_+-K^*K]x_+, x_+)=\|x_+\|^2-\|Kx_+\|^2>0$$

для любого отличного от нуля вектора $x_+\in\mathfrak{E}_+$. Отсюда и из равенства $\|K^*K\|=\|K\|^2=1$, справедливого в силу теоремы 6.4, следует, что точка $\lambda=0$, не будучи собственным значением, является предельной точкой спектра оператора $T=P_+-K^*K$, рассматриваемого в $\mathfrak{E}_+$. Пусть E_λ $(0<\lambda\leqslant M)$ — непрерывная слева спектральная функция оператора T на $\mathfrak{E}_+$ $(E_0=0,\ E_M=P_+,\ E_{\lambda-0}=E_\lambda)$. Рассмотрим систему полуинтервалов

$$\Delta_1=\left(\frac{M}{8}, M\right], \quad \Delta_2=\left(\frac{M}{27}, \frac{M}{8}\right], \ldots, \quad \Delta_n=\left(\frac{M}{(n+1)^3}, \frac{M}{n^3}\right], \ldots$$

Из последовательности подпространств $\mathfrak{M}_k=E_{\Delta_k}\mathfrak{E}_+$ выберем подпоследовательность $\{\mathfrak{M}_{k_n}\}$ отличных от нуля (в силу того, что $\lambda=0$ — предельная точка спектра оператора T, эта подпоследовательность бесконечна). Возьмем $x_n^+\in\mathfrak{M}_{k_n}\subset\mathfrak{E}_+$, $\|x_n^+\|=1$ $(n=1, 2, \ldots)$. Очевидно,

$$(Tx_n^+, x_n^+)\leqslant\frac{1}{n^3} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Так как $(x_i^+, x_j^+)=\delta_{ij}$, то существует вектор

$$y_0^+=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_n^+\in\mathfrak{E}_+.$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$y_n=n(x_n^++Kx_n^+)\in\mathfrak{L}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как

$$(Jy_n,\ y_n)=n^2(J[x_n^++Kx_n^+],\ x_n^++Kx_n^+)=$$
$$=n^2([P_+-K^*K]x_n^+,\ x_n^+)=n^2(Tx_n^+,\ x_n^+)<\frac{1}{n},$$

то $(Jy_n,\ y_n)\to 0\ (n\to\infty)$. В то же время

$$(Jy_n,\ y_0^+)=n(x_n^+,\ y_0^+)=1\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots)$$

и, значит, функционал

$$f_{y_0^+}(x)=(Jx,\ y_0^+)$$

τ_2-разрывен. Таким образом, сингулярность подпространства $\mathfrak{L}$ доказана.

5. В настоящем пункте будет показано, что J-пространства обладают свойством «универсальности» в классе $(\mathfrak{H},\ G^э)$-пространств. Для того чтобы перейти к точным формулировкам, введем следующее определение. Мы будем говорить, что $(\mathfrak{H},\ G^э)$-пространства $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ *эквивалентны*, если существует $\mathfrak{H}$-гомеоморфное и G-изометрическое линейное отображение[1]) пространства $\mathfrak{E}_1$ на пространство $\mathfrak{E}_2$.

Теорема 6.8. *Пусть $\mathfrak{E}$ — J-пространство, для которого $\dim\mathfrak{E}_+=\dim\mathfrak{E}_-=\mathfrak{M}$. Тогда, каково бы ни было $(\mathfrak{H},\ G^э)$-пространство $\mathfrak{E}_1$ размерности $\mathfrak{N}\leqslant\mathfrak{M}$, в $\mathfrak{E}$ найдется эквивалентное ему подпространство $\mathfrak{L}$.*

Доказательство, очевидно, достаточно провести для положительного $\mathfrak{E}_1$ (см. п. 3) и $\dim\mathfrak{E}_1=\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{E}_1$ — такое $(\mathfrak{H},\ G^э)$-пространство и G-метрика в $\mathfrak{E}_1$ порождается формой $G_1(x,\ y)$, а $\mathfrak{H}$-топология — скалярным произведением $(x,\ y)_1$. Последнее, очевидно, можно выбрать так, что G_1 — оператор Грама формы $G_1(x,\ y)$ на $\mathfrak{E}_1$ — имеет норму, не превосходящую единицы. Пусть теперь U_1 — $\mathfrak{H}$-изометрическое отображение $\mathfrak{E}_1$ на $\mathfrak{E}_+$ (существующее в силу равенства $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$). Найдем самосопряженный в $\mathfrak{E}_+$ оператор A, удовлетворяющий условию

$$P_+-A^2=U_1G_1U_1^{-1},$$

что возможно в силу неравенства $\|U_1G_1U_1^{-1}\|\leqslant 1$. Положим

$$K=VA,$$

где V — произвольная $\mathfrak{H}$-изометрия $\mathfrak{E}_+$ на $\mathfrak{E}_-$. Так как $\|A\|\leqslant 1$, то и $\|K\|\leqslant 1$.

Пусть $\mathfrak{L}\ (\subset\mathfrak{E})$ — подпространство, угловой оператор которого равен K. На основании теоремы 6.3 $\mathfrak{L}$ — максимальное неотрицательное. Докажем, что $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{E}_1$ эквивалентны. Для этого заметим, что, во-первых, в силу 6° отображение $U=U_1^{-1}P_+$ является $\mathfrak{H}$-гомеоморфизмом $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{E}_1$. Во-вторых,

[1]) Отображение U мы называем G-изометрическим, если $G_2(Ux,\ Uy)=G_1(x,\ y)$ для всех $x,\ y\in\mathfrak{E}_1$ (здесь $G_i(x,\ y)$ — форма, задающая G-метрику в $\mathfrak{E}_i$).

для любых $x, y \in \mathfrak{L}$

$$(Jx, y) = ([P_+ - K^*K] P_+x, P_+y) = ([P_+ - A^2] P_+x, P_+y) =$$
$$= (G_1 U_1^{-1} P_+ x, U_1^{-1} P_+ y)_1 = (G_1 U x, U y)_1 = G_1(Ux, Uy),$$

и следовательно, отображение U G-изометрично. Теорема доказана.

6. В заключение рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся базисов в J-пространствах. При этом мы ограничимся сепарабельным случаем (несмотря на то, что аналогичные результаты могут быть сформулированы и при более общих предположениях), для того чтобы иметь возможность воспользоваться основными положениями принадлежащей Н. К. Бари [59] теории биортогональных систем в $\mathfrak{H}$-пространстве[1]).

Напомним, что две полные в сепарабельном $\mathfrak{H}$-пространстве $\mathfrak{E}$ системы векторов $\mathfrak{S} = \{e_k\}_1^\infty$ и $\mathfrak{S}^* = \{g_k\}_1^\infty$ образуют *биортогональную систему* $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*\}$, если $(e_i, g_j) = \delta_{ij}$. При этом система $\mathfrak{S}^*$ (однозначно определяющаяся по $\mathfrak{S}$) называется *сопряженной* с системой $\mathfrak{S}$. Система $\mathfrak{S}$ называется *бесселевой*, если для любого $x \in \mathfrak{E}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, g_k)|^2 < \infty,$$

и *гильбертовой*, если, каковы бы ни были числа γ_k ($k=1, 2, \ldots$), удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty,$$

найдется такой единственный вектор $x \in \mathfrak{E}$, что $(x, e_k) = \gamma_k$ ($k=1, 2, \ldots$). Известно, что если система $\mathfrak{S}$ бесселева, то система $\mathfrak{S}^*$ гильбертова. *Система $\mathfrak{S}$, являющаяся одновременно бесселевой и гильбертовой, является базисом в $\mathfrak{E}$*, т. е. любой $x \in \mathfrak{E}$ единственным образом представляется в виде сильно сходящегося ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k, \qquad \gamma_k = (x, g_k) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Такой базис называется *базисом Рисса*. Как показал И. М. Гельфанд [61], *базис $\mathfrak{S}$ есть базис Рисса тогда и только тогда, когда он остается базисом при любой перестановке векторов*. Другие равносильные определения базиса Рисса, бесселевой и гильбертовой систем см. в [59], [60].

Пусть теперь $\mathfrak{S} = \{e_k\}_1^\infty$ — полная в J-пространстве $\mathfrak{E}$ J-ортонормированная система, т. е. $(Je_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$. Положим $g_k = Je_k$, если $(Je_k, e_k) = 1$, и $g_k = -Je_k$, если $(Je_k, e_k) = -1$. Тогда система $\mathfrak{S}^* = \{g_k\}$ сопряжена с $\mathfrak{S}$. Легко видеть, что системы $\{e_k\}$ и $\{\pm Je_k\}$ бесселевы или гильбертовы одновременно. Отсюда следует

10°. *Для того чтобы полная в $\mathfrak{E}$ J-ортонормированная система $\mathfrak{S}$ была базисом Рисса в $\mathfrak{E}$, достаточно, чтобы $\mathfrak{S}$ была либо бесселевой* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |(Jx, e_k)|^2 < \infty\right.$ *для любого* $\left.x \in \mathfrak{E}\right)$, *либо гильбертовой* (*система уравнений* $(Jx, e_k) = \gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *однозначно разрешима в* $\mathfrak{E}$, *если только* $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$).

---

[1]) См. также [60].

Пусть $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ — полная J-ортонормированная система в $\mathfrak{E}$. Рассмотрим подпространства $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ — замкнутые линейные оболочки систем $\mathfrak{S}_+=\{e_k : (Je_k, e_k)=1\}$ и $\mathfrak{S}_-=\{e_k : (Je_k, e_k)=-1\}$ соответственно. Очевидно,

$$\overline{\mathfrak{M}_+ \dot{+} \mathfrak{M}_-}=\mathfrak{E}.$$

Теорема 6.9. *Для того чтобы J-ортонормированная система $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ была базисом Рисса пространства $\mathfrak{E}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{M}_+ \dot{+} \mathfrak{M}_-=\mathfrak{E},$$

т. е. чтобы $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ были компонентами канонического разложения пространства $\mathfrak{E}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{M}_+ \dot{+} \mathfrak{M}_-=\mathfrak{E}$, то любой вектор $x\in\mathfrak{E}$ представляется в виде $x=x_++x_-$ $(x_+\in\mathfrak{M}_+,\ x_-\in\mathfrak{M}_-)$. Так как системы $\mathfrak{S}_+$ и $\mathfrak{S}_-$ служат J-ортонормированными базисами в дефинитных подпространствах $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ соответственно, то

$$\sum_{e_k\in\mathfrak{S}_+}|(Jx_+, e_k)|^2<\infty, \qquad \sum_{e_k\in\mathfrak{S}_-}|(Jx_-, e_k)|^2<\infty,$$

. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(Jx, e_k)|^2<\infty.$$

Таким образом, система $\mathfrak{S}$ бесселева, и значит, по 10° $\mathfrak{S}$ — базис Рисса в $\mathfrak{E}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ — базис Рисса в $\mathfrak{E}$. Если x — произвольный вектор из $\mathfrak{E}$, то $x=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k e_k$ $(\gamma_k=\pm(Jx, e_k))$, где $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2<\infty$. Положим $\gamma_k^+=\gamma_k$, $\gamma_k^-=0$, если $e_k\in\mathfrak{S}_+$, и $\gamma_k^+=0$, $\gamma_k^-=\gamma_k$ при $e_k\in\mathfrak{S}_-$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k^+|^2<\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k^-|^2<\infty$ и, следовательно, существуют векторы $x_+=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^+e_k\in\mathfrak{M}_+$, $x_-=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^-e_k\in\mathfrak{M}_-$, откуда вытекает справедливость прямого разложения

$$\mathfrak{M}_+ \dot{+} \mathfrak{M}_-=\mathfrak{E}.$$

Из доказанной теоремы легко вытекает, что *система векторов $\mathfrak{S}$ служит J-ортонормированным базисом Рисса J-пространства $\mathfrak{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_+\cup\mathfrak{S}_-$, где $\mathfrak{S}_+$ и $\mathfrak{S}_-$ — J-ортонормированные базисы в дефинитных подпространствах $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ — компонентах канонического разложения пространства $\mathfrak{E}$.* Это предложение с учетом теоремы 6.6 дает полное описание базисов Рисса J-пространства $\mathfrak{E}$.

Что касается G-ортонормированных систем $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ $(G(e_i, e_j)=\pm\delta_{ij})$ в произвольном $G^э$-пространстве $\mathfrak{E}$, то здесь имеется лишь следующий результат Р. Неванлинна [11], приводимый нами без доказательства.

11°. *Для того чтобы для всех $x, y\in\mathfrak{E}$ имело место абсолютно сходящееся билинейное разложение*

$$G(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}G(e_i, e_i\ G(x, e_i)\,G(e_i, y),$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in \mathfrak{E}$

1) $$\sum_{i=1}^{\infty} |G(x, e_i)|^2 < \infty,$$

2) $$\sum_{i=1}^{\infty} |G(x, e_i^-)|^2 \leqslant G(x, x) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |G(x, e_i^+)|^2$$

($e_i^+ = e_i$, $e_i^- = 0$ *при* $G(e_i, e_i) = 1$; $e_i^- = e_i$, $e_i^+ = 0$ *при* $G(e_i, e_i) = -1$).

Если к тому же $G^э$*-пространство* $\mathfrak{E}$ *невырождено, то любой его элемент* x *однозначно представляется в виде ряда*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i,$$

сходящегося в норме, порожденной скалярным произведением

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} G(x, e_i) G(e_i, y).$$

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

§ 2, п. 1. G-пространства с произвольной (вообще говоря, неэрмитовой) G-метрикой в столь общей постановке рассматриваются здесь, по-видимому, впервые.

п. 2. Идея рассмотрения локально выпуклых топологий в G-пространствах принадлежит Э. Шайбе [50], который, однако, ограничился случаем эрмитовой G-метрики. Другим ограничением, налагаемым Э. Шайбе, является невырожденность пространства, влекущая за собой отделимость соответствующих топологий. Следует учесть, что терминология статьи [50] (в особенности в ее алгебраической части) расходится с нашей. В частности, невырожденные и вырожденные линеалы G-пространства $\mathfrak{E}$ Э. Шайбе называет соответственно регулярными и сингулярными подпространствами, а изотропные линеалы — радикалами.

пп. 3, 4. Предложение 2° и теорема 2.1 (оба только для случая $G^э$-метрики) имеются в [50]. Термин «топология, подчиняющая G-метрику» является новым. По существу же (в другой терминологии — ср. примечание к п. 5) $\mathfrak{H}$-топологиями, подчиняющими $G^э$-метрику, занимался еще Р. Неванлинна [11] — [13]. Однако в последней из упомянутых работ [13] изучаются равносильные и неравносильные $\mathfrak{H}$-топологии, подчиняющие заданную $G^э$-метрику, в то время как теорема 2.1 устанавливает, что все такие топологии равносильны. Очевидно, круг идей, связанных с классической теоремой С. Банаха (или «теоремой о замкнутом графике»), остался вне поля зрения Р. Неванлинна.

По поводу примера, приведенного в конце п. 4, см. следующее примечание.

п. 5. Эрмитово-неотрицательные и эрмитово-положительные мажоранты для $G^э$-метрик рассматривал впервые Р. Неванлинна [11] — [13], оставивший, однако, в стороне вопрос об их существовании для заданной $G^э$-метрики. Более общая постановка вопроса о мажорирующих полунормируемых топологиях указывается здесь впервые.

Приведенный в п. 4 пример показывает, в частности, что существуют G-метрики, не мажорируемые никакими полунормируемыми топологиями, а стало быть, и никакими эрмитово-неотрицательными мажорантами. Автор этого примера М. Л. Бродский. Замечание о том, что построенная М. Л. Бродским G-метрика не подчиняется никакой топологии, задаваемой счетным семейством полунорм, принадлежит Ю. П. Гинзбургу.

пп. 6, 7. Операторы Грама в $(\mathfrak{B}, G)$-пространствах ранее не рассматривались. В $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространствах они, по существу, встречались уже у Р. Неванлинна [11], что дало повод его ученикам и Э. Шайбе называть эти пространства *неванлинновскими*.

Бесконечномерные J-пространства были введены Ю. П. Гинзбургом [22] — [24]. Заметим, что в [50] для этих пространств применен довольно неуклюжий термин: «разность двух гильбертовых пространств». Предложение 3° принадлежит Г. Лангеру [31].

п. 8. Теорема 2.3 для случая невырожденного $G^э$-пространства имеется у Э. Шайбе [50], который за доказательством отсылает читателя к трактату Н. Бурбаки [51]. Реконструкция этого доказательства и обобщение его на случай произвольных G-пространств принадлежат Ю. П. Гинзбургу. Ему же принадлежит теорема 2.5.

§ 3, п. 1. Здесь мы следуем в изложении Э. Шайбе [50]. Нужно лишь учесть, что нулевые линеалы в [50] называются тотально сингулярными подпространствами.

п. 3. Построенная по каноническому разложению (3.8) мажоранта $H(x, y)$ является *минимальной* в том смысле, что для всех неотрицательных мажорант $H_1(x, y)$ данной $G^э$-метрики, обладающих свойством $H_1(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0) = H_1(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_+) = H_1(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_-) = H_1(\mathfrak{G}_+, \mathfrak{G}_-) = 0$, имеет место неравенство

$$H_1(x, x) \geqslant H(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{G}).$$

Такие мажоранты в $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространствах рассматривал Р. Неванлинна [11] — [13].

п. 5. Теорема 3.1 и ее следствия 3°, 4°, 5° для невырожденной $G^э$-метрики принадлежат Э. Шайбе [50], а их обобщения на произвольные G-метрики — Ю. П. Гинзбургу.

п. 6. Большинство результатов этого пункта для частного случая пространств $\Pi_\varkappa$ было известно ранее (см. [8], лемма 2.3, лемма 4.1, теорема 4.1). Кососвязанные нулевые линеалы (термин М. Г. Крейна) в пространствах $\Pi_\varkappa$ впервые встретились Л. С. Понтрягину [3], а затем применялись И. С. Иохвидовым [62], [6], [8] [1]).

Гипермаксимальные нулевые линеалы в J-пространствах рассматривал Ю. П. Гинзбург [33]. Теорема 3.3 в общих предположениях доказана И. С. Иохвидовым. Для случая J-пространств она следует из предложений работы [33].

п. 7. Асимптотически изотропные последовательности, правильные и относительно правильные подпространства были введены Ю. П. Гинзбургом [32], [33]. Обобщение этих понятий на (незамкнутые) линеалы и теорема 3.4 принадлежат И. С. Иохвидову.

Все результаты этого пункта естественно распространяются на $(\mathfrak{B}, G)$-пространства.

§ 4, п. 1. G-проекции на невырожденные подпространства пространства $\Pi_\varkappa$ рассматривал Л. С. Понтрягин [3], а вслед за ним в более общих предположениях И. С. Иохвидов и М. Г. Крейн [7], [8]. Для $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространств разработку теории G-проекций (на замкнутые подпространства) начал Р. Неванлинна [12], исследования которого продолжил его ученик И. С. Лоухиваара [15], [21]. Во второй из этих работ рассматривались уже $\mathfrak{H}$-пространства с неэрмитовой G-метрикой. Независимо от И. С. Лоухиваара более общие результаты в этом направлении были получены Ю. П. Гинзбургом [32], [52]. G-проектирование в произвольных $G^э$-пространствах впервые рассмотрел И. С. Иохвидов [48], ограничившись при этом G-проектированием на дефинитные линеалы (ср. § 5, пп. 1, 2). Разработка общей теории G-проекций принадлежит Ю. П. Гинзбургу [52].

Предложение 3° для $(\mathfrak{H}, G^э)$-пространств имеется у И. С. Лоухиваара [15]. Он же в другой статье [21] приводит весьма громоздкое условие G-проектируемости в $(\mathfrak{H}, G)$-пространствах с неэрмитовой G-метрикой, ссылаясь при этом на результаты Ф. Браудера и В. Литтмана [17] — [19].

п. 2. Понятие проекционной полноты линеала в $G^э$-пространстве содержалось по существу в работе Э. Шайбе [50]. Независимо от него это понятие и сам термин «проекционная полнота» ввел И. С. Иохвидов [48]. Теорема 4.2 для невырожденного линеала $\mathfrak{L}$ в невырожденном $G^э$-пространстве принадлежит Э. Шайбе [50], а в общем случае, как и теорема 4.3, впервые сформулирована Ю. П. Гинзбургом в [52]. Последняя теорема для случая $(\mathfrak{H}, G)$-пространства была опубликована в [32].

п. 3. Предложения этого пункта для невырожденных $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{L}$ имеются у Э. Шайбе [50].

п. 4. Предложения 7°, α), β), γ) опубликованы в [32]. Предложение β) имеется также в работе [21] И. С. Лоухиваара.

§ 5, п. 1. Понятия регулярных и сингулярных дефинитных линеалов введены И. С. Иохвидовым [48], которому, в основном, принадлежат результаты § 5.

---

[1]) П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. См. также недавно опубликованную статью Я. Богнара [63].

Грани $m(y_0)$ и $M(y_0)$ рассматривал Р. Неванлинна [12] для (замкнутых) подпространств $\mathfrak{L}$ в $(\mathfrak{H}, G^0)$-пространствах в связи с проблемой G-проектирования. В частности, при этих ограничениях им была доказана необходимость условия G-проектируемости, приведенного в следствии теоремы 5.1, и его достаточность в случае τ_2-полноты подпространства $\mathfrak{L}$.

п. 2. Теорема 5.2 в несколько иной форме была опубликована в заметке [48], последняя фраза которой содержит необоснованное утверждение о том, что из этой теоремы в силу замкнутости оператора G^{-1} якобы следует критерий G-проектируемости Ю. П. Гинзбурга ([32], теорема 2).

пп. 3, 4. К работе А. Ульмана [42] наше внимание привлек Янош Богнар, которому и принадлежит первое доказательство теоремы 4.3 [46], [47]. Мы имели возможность ознакомиться с ним в конце 1960 г. в рукописи. Тогда же М. Г. Крейном и И. С. Иохвидовым в переписке с Я. Богнаром было указано, что его доказательство теоремы 4.3 само по себе не опровергает предположения А. Ульмана, поскольку конструируемый в этом доказательстве сингулярный линеал не является τ_2-полным. Опровержение, как заметил Я. Богнар, получается из теоремы 4.3 лишь в сочетании с постулатом (U) А. Ульмана. Однако такой подход нецелесообразен, поскольку, помимо пространств $\Pi_\varkappa$, нам пока неизвестны G-пространства, где выполнялся бы постулат (U) (уже в J-пространствах, отличных от $\Pi_\varkappa$, он заведомо неверен (теорема 6.5)). Что же касается пространств $\Pi_\varkappa$, то, как следует из теоремы 4.5, для них пример, опровергающий предположение А. Ульмана, был ранее построен И. С. Иохвидовым и М. Г. Крейном ([8], стр. 421).

§ 6, п. 1. Основные результаты этого пункта по существу совпадают с теоремами, впервые опубликованными (в другой терминологии) Э. Шайбе [50].

п. 2. Предложение 6°, теоремы 6.1 и 6.2 принадлежат Ю. П. Гинзбургу [33] (ср. также Г. Лангер [31] и Э. Шайбе [50]. Предложение 7° было ранее получено Э. Шайбе [50].

п. 3. Результаты этого пункта в основном принадлежат Ю. П. Гинзбургу [32], [33]. В менее развитой форме близкие идеи о связи максимальных неотрицательных и неположительных, а также нулевых подпространств в J-пространствах с некоторыми нерастягивающими операторами были применены Р. С. Филлипсом [29] при исследовании диссипативных гиперболических систем.

Косые проекторы E на неотрицательные пространства были введены Г. Лангером [30], [31], которому принадлежит следующий результат, являющийся следствием теоремы 6.3: *для того чтобы область значений проектора E $(EP_+=E,\ P_+E=P_+)$ была максимальным неотрицательным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы* $\|E\| \leqslant \sqrt{2}$.

пп. 4, 5. Теоремы 6.7 и 6.8 доказаны Ю. П. Гинзбургом.

п. 6. Предложение 10° и теорема 6.9 принадлежат Ю. П. Гинзбургу. Предложение, менее полное, чем теорема 6.9, установлено Э. Шайбе [50] без применения теории Н. К. Бари.

Поступило в редакцию 8 января 1962 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. M. Dirac, Bakerian lecture. The physical interpretation of quantum mechanics, Proc. Roy. Soc. A 180 (1942), 1—40.

[2] W. Pauli, On Dirac's new method of field quantization, Revs. Mod. Phys. 15 (1943), 175—207.

[3] Л. С. Понтрягин, Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Изв. АН, сер. матем. 8 (1944), 243—280.

[4] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН 3, вып. 1 (23) (1948), 3—95.

[5] М. Г. Крейн, Винтовые линии в пространстве Лобачевского бесконечного числа измерений, УМН 3, вып. 3 (25) (1948), 158—160.

[6] И. С. Иохвидов, Унитарные и самосопряженные операторы в пространстве с индефинитной метрикой, диссертация, Одесса, 1950.

[7] И. С. Иохвидов и М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I, Труды Моск. матем. о-ва 5 (1956), 367—432.

[8] И. С. Иохвидов и М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II, Труды Моск. матем. о-ва 8 (1959), 413—496.

[9] М. И. Вишик, Метод ортогональных проекций для общих самосопряженных уравнений, ДАН 58 (1947), 957—960.

[10] R. Nevanlinna, Über metrische lineare Räume. II. Bilinearformen und Stetigkeit, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, **113** (1952).

[11] R. Nevanlinna, Über metrische lineare Räume. III. Theorie der Ortogonalsysteme, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, **115** (1952).

[12]. R. Nevanlinna, Über metrische lineare Räume. IV. Zur Theorie der Unterräume, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, **163** (1954).

[13] R. Nevanlinna, Über metrische lineare Räume. V. Relationen zwischen verschiedenen Metriken, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, **222** (1956).

[14] I. S. Louhivaara, Bemerkung zur Theorie der Nevanlinnaschen Räume Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, **232** (1956).

[15] I. S. Louhivaara, Zur Theorie der Unterräume in linearen Räumen mit indefiniter Metrik, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, **252** (1958).

[16] I. S. Louhivaara, Über das Dirichletsche Problem für die selbstadjungierten linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Rend. Circ. Matem Palermo, ser. II, 5 (1956), 260—273.

[17] F. E. Browder, A remark on the Dirichlet problem for non-elliptic self-adjoint partial differential equations, Rend. Circ. Mat. Palermo **6** (1957), 249—253.

[18] F. E. Browder, On the Dirichlet problem for linear non-elliptic partial differential equations. II, Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 303—308.

[19] W. Littman, Remarks on the Dirichlet problem for general linear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 145—151.

[20] C. L. Dolph, Recent developments in some non-self-adjoint problems of mathematical physics, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, № 1 (1961), 1—69.

[21] I. S. Louhivaara, Über verschiedene Metriken in linearen Räumen, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, **282** (1960).

[22] Ю. П. Гинзбург, О J-нерастягивающих оператор-функциях, ДАН **117**, № 2 (1957), 171—173.

[23] Ю. П. Гинзбург, О J-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве, Научн. зап. физ.-матем. ф-та Одесск. пед. ин-та **22**, вып. 1 (1958), 13—20.

[24] Ю. П. Гинзбург, J-нерастягивающие аналитические оператор-функции, диссертация, Одесса, 1958.

[25] М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сб. **34** (76): 1 (1954), 145—198.

[26] М. С. Бродский и М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН **13**, вып. 1 (79), (1958), 3—85.

[27] М. С. Бродский, Характеристические матрицы-функции линейных операторов, Матем. сб. **39** (81) : 2 (1956), 179—200.

[28] В. П. Потапов, Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Тр. Моск. матем. о-ва 4 (1955), 125—236.

[29] R. S. Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **90**, № 2 (1959), 193—254.

[30] Г. Лангер, О J-эрмитовых операторах, ДАН **134**, № 2 (1960), 263—266.

[31] H. Langer, Zur Spektraltheorie J-selbsadjungierter Operatoren, Math. Ann. **146** (1962), 60—85.

[32] Ю. П. Гинзбург, О проектировании в гильбертовом пространстве с билинейной метрикой, ДАН **139**, № 4 (1961), 775—778.

[33] Ю. П. Гинзбург, О подпространствах гильбертова пространства с индефинитной метрикой, Научн. зап. кафедр матем., физ. и естествознания Одесск. пед. ин-та 25, вып. 2 (1961), 3—9.

[34] K. Bleuler, Eine neue Methode zur Behandlung der longitudenalen und scalaren Photonen, Helv. Phys. Acta 23 (1950), 567—586.

[35] S. N. Gupta, Theory of longitudenal photons in quantum electrodynamics, Proc. Phys. Soc., Sect. A **63** (1950), 681—691.

[36] А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, изд. 2, М., Физматгиз, 1959.

[37] W. Heisenberg, Hilbert space II and «ghost» states of Pauli and Källén, Nuovo cimento 4, suppl. № 2 (1956), 743—747.

[38] G. Källén and W. Pauli, On mathematical structure of T. D. Lee's model of a renormalizable field theorie, Matem. Fys. Medd. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. **30**, № 7 (1955).

[39] Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, К вопросу об индефинитной метрике в квантовой теории поля, Научн. доклады высш. школы, физ.-матем. науки, № 2 (1958), 137—142.

[40] S. N. Gupta, Quantum Mechanics with an indefinite metric, Canad. J. Phys. **35** (1957), 961—968.

[41] R. Ascoli, E. Minardi, On quantum theories with indefinite metric, Nuclear Physics 9 (1958/1959), 242—254.

[42] A. Uhlmann, Schema einer Quantenmechanik mit indefiniter Metrik, Nuclear Physics 9 (1958/1959), 588—595.

[43] A. Uhlmann, Über Quantentheorien mit indefiniter Metrik, Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ., Jena, Math.-natur wiss. Reihe 8, № 4—5 (1958/1959), 361—366.

[44] L. K. Pandit, Linear vector spaces with indefinite metric, Nuovo cimento 10, suppl. № 11 (1959), 157—182.

[45] K. L. Nagy, Indefinite metric in quantum field theorie, Nuovo cimento **17**, suppl. № 1 (1960), 92—131.

[46] J. Bognár, A discontinuity of the inner product in linear spaces with an indefinite meric, «II Congr. math. hongrois, Budapest, 1960», Budapest, IIb (1961), 49—51.

[47] Я. Богнар, Об одном явлении разрывности скалярного произведения в пространствах с индефинитной метрикой, УМН **17**, вып. 1 (103) (1962), 157—159.

[48] И. С. Иохвидов, Регулярные и проекционно-полные линеалы в пространствах с общей эрмитово-билинейной метрикой, ДАН **139**, № 4 (1961), 791—794.

[49] И. С. Иохвидов, Сингулярные линеалы в пространствах с произвольной эрмитово-билинейной метрикой, УМН **17**, вып. 4 (106) (1962), 127—134.

[50] E. Scheibe, Über hermitische Formen in topologischen Vektorräumen. I, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, **294** (1960).

[51] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959.

[52] Ю. П. Гинзбург и И. С. Иохвидов, О новых результатах по геометрии и теории операторов в пространствах с общей индефинитной метрикой, Тр. IV Всесоюзного матем. съезда (1962).

[53] G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journ. reine und angew. Math. **84** (1877), 1—63.

[54] А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, М.— Л., Гостехиздат, 1948.

[55] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, «Радянська школа», 1948.

[56] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.— Л., Гостехиздат, 1950.

[57] Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.

[58] М. М. Дэй, Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961.

[59] Н. К. Бари, Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч. зап. МГУ **148**, Матем. 4 (1951), 69—107.

[60] Р. С. Гутер и П. Л. Ульянов, О новых результатах в теории ортогональных рядов, в кн.: С. Качмаж и Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.

[61] И. М. Гельфанд, Замечание к работе Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве», Уч. зап. МГУ **148**, Матем. 4 (1951), 224—225.

[62] И. С. Иохвидов, Унитарные операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Записки НИИ матем. и механ. ХГУ и Харьк. матем. о-ва **21** (1949), 79—86.

[63] J. Bognár, О существовании квадратного корня из оператора, самосопряженного относительно индефинитной метрики, Труды Матем. ин-та АН Венгрии **6**, сер. А, вып. 3 (1961), 351—363.

[64] Ф. А. Березин, О модели Ли, ДАН **143**, № 4 (1962), 811—814.

[65] L. J. Savage, The application of vectorial methods to metric geometry, Duke Math. Journ. **13** (1946), 521—528.