Е. В. Воскресенский, Асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений, *УМН*, 1985, том 40, выпуск 5, 249–250

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. В. Воскресенский

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F_1(t, x), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = F_2(t, y), \tag{2}$$

где $\dim x = \dim y = n$, $F_i \in C(D_i)$, $i = 1, 2$, $D_1 = \{(t, x)\colon T \leqslant t < +\infty, x \in R^n\}$, $D_2 = \{(t, y)\colon T \leqslant t < +\infty, y \in R^n\}$. Пусть для любых $t_0 \geqslant T$, $x_0, y_0 \in R^n$ решения $x(t\colon t_0, x_0)$, $y(t : t_0, y_0)$ определены при всех $t \geqslant t_0$.

Нами получены новые признаки асимптотической эквивалентности систем дифференциальных уравнений по Левинсону и Брауеру [1], которые обобщают теоремы из работ [1], [2], [3], и при этом существует гомеоморфизм начальных данных для соответствующих решений.

Пусть $F_1(t, x) = A(t)x + f(t, x)$ и $F_2(t, y) = A(t)y$, где $A(t)$ — $(n \times n)$-матрица, определенная и непрерывная при $t \geqslant T$, $f \in C(D_1, R^n)$. Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (2), $Y(t_0) = E$ и для $K(t, s) = Y(t)Y^{-1}(s)$ справедливо неравенство

(3) $\| K(t, s) \| \leqslant Q(t - s)$, $t \geqslant s$, $Q \in C([T, +\infty), (0, +\infty))$, $Q(\alpha_1) \leqslant Q(\alpha_2)$ при $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. Допустим, кроме того,

$$\frac{Q(t-s)}{Q(t-t_0)} \leqslant Q_1(t_0 - s), \quad Q_1 \in C((-\infty, +\infty), (0, +\infty)), \tag{4}$$

$$Q_1(\alpha_1) \leqslant Q_1(\alpha_2) \text{ при } \alpha_1 \leqslant \alpha_2.$$

Если $\mathscr{L}$ — пространство всех решений уравнения (2), $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — подпространства $\mathscr{L}$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \dot{+} \mathscr{L}_2$, то будем считать, что

$$Y(t)Y^{-1}(s) = Y(t)J_1Y^{-1}(s) + Y(t)J_2Y^{-1}(s), \tag{5}$$

где $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ — матрицы соответствующих проекторов на подпространства $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\| f(t, x) \| \leqslant \lambda(t, \| x \|)$, $\lambda \in C([T, +\infty)\times[0, +\infty), [0, +\infty))$, $\lambda(t, \alpha_1) \leqslant \lambda(t, \alpha_2)$ *при* $\forall t \in [T, +\infty)$ и $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. *Тогда если:* 1) *выполняются условия* (3), (4) *и* $\mathcal{J}(\alpha) = \int_T^{+\infty} Q_1(t_0 - s)\lambda(s, \alpha Q(s - t_0))\, ds < +\infty$ *при* $\forall \alpha \in [0, +\infty)$; 2) $\int_a^{+\infty} \frac{d\alpha}{\mathcal{J}(\alpha)} = +\infty\, (a > 0)$; 3) $q(t, \alpha) = \int_{t_0}^{t} \frac{\lambda(s, \alpha)}{\mathcal{J}(\alpha)}\, ds$ *при всех* $t \in [T, +\infty)$ *является неубывающей функцией по переменной* α, *то для решений уравнения* (1) *справедливо неравенство* $\| x(t\colon t_0, x_0) \| \leqslant D(r)\, Q(t - t_0)$, $\| x_0 \| \leqslant r$, $t \geqslant t_0 \geqslant T$, $D(r) \geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и*

$$\int_{t_0}^{t} \| Y(t)\, \mathcal{J}_1 Y^{-1}(s) \|\, \lambda(s, \alpha Q(s - t_0))\, ds = o(\alpha Q(t - t_0)) \tag{6}$$

при $t \to +\infty$ *равномерно относительно* $\alpha \geqslant 1$;

$$\int_{t_0}^{+\infty} \| \mathcal{J}_2 Y^{-1}(s) \|\, \lambda(s, \alpha Q(s - t_0))\, ds < +\infty \quad \text{при } \forall \alpha \in [0, +\infty); \tag{7}$$

$$\int_{t}^{+\infty} \| Y(t)\, \mathcal{J}_2 Y^{-1}(s) \|\, \lambda(s, \alpha Q(s - t_0))\, ds = o(\alpha Q(t - t_0)) \quad \text{при } t \to +\infty \tag{8}$$

равномерно относительно $\alpha \geqslant 1$. *Тогда уравнения* (1) *и* (2) *асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функции* $Q(t - t_0)$.

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы* 2 *и*

1) $\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leqslant \lambda_1(t, \| x_1 \|, \| x_2 \|) \| x_1 - x_2 \|$ *при* $\forall x_1, x_2 \in R^n$, $\lambda_1 \in C([T, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty), [0+\infty))$; 2) $\lambda_1(t, \alpha_1, \alpha_2) \leqslant \lambda_1(t, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2)$ *при* $\forall t \geqslant T$ и $\alpha_i \leqslant \overline{\alpha}_i$ $(i = 1,2)$; 3) *для любого решения* $y(t: t_0, y_0)$ *существует* $\overline{t}_0 \geqslant t_0$ *такое, что*

$$\int_{\overline{t}_0}^{t} \| Y(t) \mathcal{J}_1 Y^{-1}(s) \| \lambda_1(s, \alpha Q, \alpha Q)\, ds + \int_{t}^{+\infty} Q(s-t_0) \| \mathcal{J}_2 Y^{-1}(s) \| \lambda_1(s, \alpha Q, \alpha Q)\, ds \leqslant p < 1,$$

где $\alpha = \| y(t_0: \overline{t}_0, y_0) \|$, *то уравнения* (1) *и* (2) *асимптотически эквивалентны по Левинсону относительно функции* $Q(t - t_0)$.

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы* 3 *и решения уравнения* (2) *равномерно ограничены на любом множестве* $S = \{y\colon \| y \| \leqslant r\}$, *то*

$$Px(t_0) = x(t_0) + \int_{t_0}^{+\infty} \mathcal{J}_2 Y^{-1}(s) f(s, x(s: t_0, x(t_0)))\, ds = y(t_0) \tag{9}$$

является гомеоморфизмом и $x(t: t_0, x_0) = y(t: t_0, Px_0) + o(1)$ *при* $t \to +\infty$.

Теорема 5. *Если при условиях теоремы* 3 *справедливы дополнительные условия*:

$$a) \int_{t_0}^{+\infty} Q_1(t_0 - s)\, Q(s - t_0) \lambda_1(s, \quad cQ(s - t_0), \quad cQ(s - t_0))\, ds < +\infty,$$

$$b) \int_{t_0}^{+\infty} \| \mathcal{J}_2 Y^{-1}(s) \| \lambda_1(s, cQ(s - t_0), cQ(s - t_0)) ds < +\infty \text{ при любом } c \geqslant 0,$$

то (9) *является гомеоморфизмом и* $x(t: t_0, x_0) = y(t: t_0, Px_0) + o(Q(t - t_0))$ *при* $t \to +\infty$.

Автор благодарен В. А. Кондратьеву за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вокресенский Е. В. Асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений с линейным автономным первым приближением.— Comment. Math. Univ. Carolinae, 1983, v. 24, № 1, p. 31—50.

[2] Якубович В. А. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1948, т. 63, № 46, с. 363—366.

[3] Švec M. Asymptotic relationship between solutions of two systems of differential equations. — Czech. Math. J., 1974, v. 24 (99), p. 44—58.

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарева

Поступило в Правление общества
16 ноября 1983 г.