

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Милюкова, И. В. Попов, Параллельные итерационные методы с факторизованными матрицами преобусловливания для эллиптических уравнений на неструктурированной треугольной сетке, *Матем. моделирование*, 2003, том 15, номер 10, 3–16

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.15.206.133

27 сентября 2024 г., 03:03:30



## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ С ФАКТОРИЗОВАННЫМИ МАТРИЦАМИ ПРЕДОБУСЛОВЛИВАНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

© *О.Ю. Милькова, И.В. Попов*

Институт математического моделирования РАН, Москва

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Гранты № 02-07-90168, 01-01-00061) и в рамках Государственного контракта № 10002-251/-17/026-023/070403-436 по Программе Президиума РАН

Предлагаются параллельные варианты двух итерационных методов решения дискретных эллиптических уравнений на неструктурированной треугольной сетке на многопроцессорной вычислительной технике с распределенной памятью. Рассматриваются методы сопряженных градиентов с предобусловливанием типа неполного разложения Холецкого и модифицированного неполного разложения Холецкого. Построение параллельных вариантов методов основано на специальном способе упорядочения узлов сетки. Теоретически и с помощью расчетов модельной задачи на умеренном числе процессоров исследуется скорость сходимости и эффективность предложенных методов.

### PARALLEL ITERATIVE METHODS WITH FACTORIZED PRECONDITIONING MATRICES FOR ELLIPTIC EQUATIONS ON UNSTRUCTURED TRIANGULAR GRID

*O. Yu. Milyukova, I. V. Popov*

Institute for Mathematical Modelling of Russ. Acad. Sci., Moscow, RUSSIA

Parallel versions of two iterative methods are proposed for solving discretized elliptic equations on unstructured triangular grid on distributed-memory parallel computers. The conjugate gradient methods with incomplete factorization type preconditioning and modified incomplete factorization type preconditioning are considered. The construction of the parallel versions of the methods is based on the special orderings of nodes of a grid. The rate of convergence and efficiency of proposed methods are investigated both theoretically and by means of calculations of model problem.

#### § 1. Введение

В настоящей работе будем рассматривать симметричную положительно определенную систему уравнений

$$Ay = f, \quad A = A^T > 0, \quad (1.1)$$

возникающую в результате аппроксимации задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \chi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = -\varphi(x), \quad (1.2)$$

в произвольной односвязной области расчета. В уравнении (1.2)  $\chi_\alpha \geq c_1 > 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ . Для аппроксимации краевой задачи будем использовать неструктурированную сетку, способ построения которой предложен в [1].

Решение уравнения (1.1) можно осуществлять итерационными методами сопряженных градиентов с факторизованной матрицей предобусловливания, например методом неполного разложения Холецкого без заполнения ICCG(0)[2], его модифицированным вариантом MICCG(0) [3], методом симметричной верхней релаксации SSORCG [4]. Для всех этих

методов матрица предобусловливания имеет вид  $B = LDL^T$ , где  $L$  – нижнетреугольная,  $D$  – диагональная матрицы.

При решении многомерных задач на многопроцессорных вычислительных системах обычно используют подход, называемый декомпозицией области или геометрическим параллелизмом [5]. Основная трудность распараллеливания алгоритмов методов ICCG(0), MICCG(0), SSORCG связана с рекурсивным характером вычислений при обращении матрицы предобусловливания и определении элементов матриц  $D$  и  $L$ . Если для аппроксимации уравнения (1.2) используется равномерная ортогональная сетка, и матрица  $A$  в системе уравнений (1.1) пятидиагональная, то для преодоления указанной выше трудности распараллеливания производилось переупорядочение узлов разностной сетки и реконструирование матрицы предобусловливания [6-10]. Такой подход увеличивает параллелизм метода, но обычно приводит к росту числа итераций с ростом числа процессоров. Наиболее удачным при распараллеливании методов ICCG(0), MICCG(0) было использование упорядочений типа Domain Decomposition ordering. Следует отметить, что распараллеливание алгоритма метода SSORCG с помощью упорядочения типа Domain Decomposition ordering приводило к неудовлетворительному результату [10].

В настоящей работе решение системы уравнений (1.1) будем проводить предобусловленными методами сопряженных градиентов, в которых матрицы предобусловливания имеют вид [5, добавление И.Е. Капорина]

$$B = (D^{-1} + A^{-})D(D^{-1} + (A^{-})^T), \quad (1.3)$$

где  $A^{-}$  – строго нижнетреугольная часть матрицы  $A$ . Диагональная матрица  $D$  выбирается либо из условия совпадения диагональных элементов матриц  $A$  и  $B$  как в методе ICCG(0) (метод VICCG - вариант ICCG(0)), либо из условия критерия равенства строчных сумм

$$Ae + \Lambda D_A e = Be, \quad (1.4)$$

как в MICCG(0) (метод VMICCG -вариант MICCG(0)). В формуле (1.4)  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $D_A$  – диагональная часть матрицы  $A$ ,  $\Lambda$  – диагональная матрица с элементами  $\sigma_i \geq 0$  малого порядка. Заметим, что в случае ортогональной равномерной сетки и пятидиагональной матрицы  $A$ , матрицы предобусловливания методов ICCG(0), MICCG(0) совпадают с матрицей  $B$ , приведенной выше. Заметим также, что такой выбор матрицы  $B$  продиктован необходимостью теоретического выбора оптимальных параметров  $\sigma_i$ , обеспечивает более простой алгоритм распараллеливания, возможность применения приема Айзенштата [5] с целью удешевить каждую итерацию. В настоящей работе прием Айзенштата не применялся.

В настоящей работе предлагаются методы PVICCG, PVMICCG - параллельные варианты предобусловленных методов сопряженных градиентов VICCG, VMICCG для решения дискретных эллиптических уравнений на неструктурированной треугольной сетке. Проводится теоретическое исследование скорости сходимости методов VMICCG, PVMICCG. Для модельной задачи, в которой используется равномерная треугольная сетка, осуществляется теоретический подбор параметров  $\sigma_i$ . С помощью расчетов модельной задачи на умеренном числе процессоров исследуется скорость сходимости и эффективность предложенных методов PVICCG, PVMICCG по сравнению с однопроцессорными вариантами VICCG, VMICCG.

## § 2. Упорядочение узлов разностной сетки и алгоритм параллельных методов PVICCG, PVMICCG

Уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$a_{ii}y_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

где  $a_{ii}$  и  $-a_{ij}$  при  $j \neq i$  - элементы матрицы  $A$ . Предположим, что для каждого  $i$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ при } j \neq i \text{ и } a_{ii} - \sum_{j \neq i} a_{ij} \geq 0. \quad (2.2)$$

Заметим, что так как  $A = A^T$ , то  $a_{ij} = a_{ji}$ . При решении системы уравнений (2.1) методом сопряженных градиентов с предобусловливателем (1.3) диагональные элементы  $d_i$  матрицы  $D$  в методе VICCG вычисляются по формулам

$$d_i^{-1} = a_{ii} - \sum_{k < i} a_{ik}^2 d_k, \quad (2.3)$$

а в методе VMICCG по формулам

$$d_i^{-1} = a_{ii}(1 + \sigma_i) - \sum_{k < i} a_{ik} d_k^1, \quad (2.4)$$

где

$$d_k^1 = d_k \sum_{j > k} a_{kj}, \quad (2.5)$$

В методе VMICCG в случае достаточно гладких коэффициентов дифференциального уравнения и неструктурированной сетки, близкой к равномерной треугольной (см. ниже), будем использовать  $\sigma_i = O(1/N)$ , где  $N$  – число узлов разностной сетки, для модельной задачи  $\sigma_i$  определяется с помощью теоретических оценок в §3. Заметим, что в методе VMICCG можно также использовать  $\sigma_i \equiv 0$ .

Как известно [6-10], существенное влияние на скорость сходимости методов ICCG(0), MICCG(0) оказывает способ упорядочения узлов разностной сетки. Поэтому первоначальное упорядочение узлов разностной сетки производилось с помощью алгоритма Катхила-Макки (КМ) (прямого) [11], имеющего целью уменьшение ширины ленты разреженной симметричной матрицы  $A$ . С уменьшением ширины ленты разреженной симметричной матрицы  $A$  уменьшается ее число обусловленности, и, следовательно, улучшается оценка числа итераций.

Как следует из изложенного в [11], при построении КМ упорядочения узлов связной области фактически строится упорядоченная структура уровней с корнем в псевдопериферийном узле, то есть узле, в котором длина структуры уровней максимальна. При заданном узле  $x$  структура уровней с корнем в  $x$  есть разбиение  $L(x)$  множества узлов  $X$ :

$$L(x) = L_0(x), L_1(x), \dots, L_{s(x)}(x),$$

такое, что

$$L_0(x) = x, \quad L_1(x) = Adj(L_0(x)), \quad L_i(x) = Adj(L_{i-1}(x)) - L_{i-2}(x), \quad i = 2, 3, \dots, s(x).$$

Здесь  $s(x)$  – длина  $L(x)$ , смежное множество  $Adj(L_{i-1}(x))$  – множество узлов  $z \in X$  таких, что  $z$  не принадлежит  $L_{i-1}(x)$ , но  $z$  является смежным в графе, соответствующем матрице  $A$ , с хотя бы одним узлом из  $L_{i-1}(x)$ . Порядок следования узлов в уровне  $L_i(x)$  определяется порядком прохождения уровня  $L_{i-1}(x)$ , причем для каждого узла  $y$  из уровня  $L_{i-1}(x)$  узлы, входящие в  $L_i(x)$  на этапе рассмотрения узла  $y$ , упорядочиваются в порядке возрастания степеней, где степень узла  $z$  – это количество узлов в  $Adj(z)$ .

С КМ упорядочением узлов сетки решалась система уравнений (1.1) на одном процессоре методами VICCG, VMICCG с использованием следующей схемы сопряженных градиентов [5]:

$$r^0 = Ay^0 - f,$$

далее для  $k = 0, 1, \dots$

$$Bw^k = r^k,$$

$$\beta_k = \frac{(w^k, r^k)}{(w^{k-1}, r^{k-1})} \quad \text{при } k \neq 0, \quad \beta_0 = 0,$$

$$p^k = w^k + \beta_k p^{k-1}, \quad (2.6)$$

$$\alpha_k = \frac{(w^k, r^k)}{(p^k, Ap^k)},$$

$$y^{k+1} = y^k - \alpha_k p^k,$$

$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k Ap^k,$$

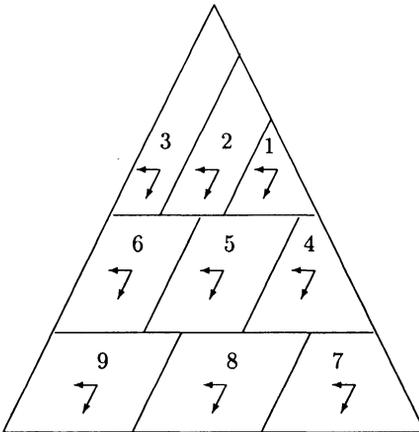
причем обращение матрицы предобусловливания происходило в два этапа:

$$\bar{w}^k = (D^{-1} + A^{-})^{-1} r^k, \quad (2.7)$$

$$w^k = (D(D^{-1} + (A^{-})^T))^{-1} \bar{w}^k. \quad (2.8)$$

Для построения параллельных вариантов методов VICCG, VMICCG использовалось упорядочение узлов разностной сетки типа Domain Decomposition ordering. В настоящей работе разбиение области расчета проводилось в два этапа. На первом этапе проводилось разбиение на  $p_2$  подобластей по линиям, соединяющим узлы сетки одного уровня в структуре уровней, полученной в результате построения КМ упорядочения узлов всей области. На втором этапе разбиения области расчета проводилось разбиение каждой подобласти, полученной на первом этапе, на  $p_1$  подобластей. При этом структура уровней была создана в результате построения КМ упорядочения узлов этой подобласти. Для того, чтобы число точек во всех подобластях было примерно одинаково, на обоих этапах разбиения разрешалось последнему уровню быть незавершенным. На рис. 1 схематически изображено разбиение треугольной области расчета на 9 подобластей.

В соответствии с описанным выше способом разбиения процессоры организовывались в двумерный массив, причем каждый процессор и соответствующая ему подобласть имели свой номер  $k$ . Порядок следования подобластей должен соответствовать введенному КМ упорядочению узлов всей области. Так например на рис. 1 номера



**Рис.1.** Схематическое изображение разбиения треугольной области расчета на подобласти в случае  $p_1 = p_2 = \sqrt{p} = 3$ .

узлов сетки возрастают справа налево и сверху вниз, а цифрами обозначены номера подобластей при разбиении области расчета на подобласти. Граничными узлами первого рода подобласти с номером  $k$  назовем узлы разностной сетки на границе этой подобласти, в шаблоне которых имеются узлы из хотя бы одной подобласти с номером  $k_p < k$ . Граничными

узлами второго рода подобласти с номером  $k$  назовем узлы разностной сетки на границе этой подобласти, в шаблоне которых имеются узлы из хотя бы одной подобласти с номером  $k_p > k$ . Множество граничных узлов второго рода в подобласти будем рассматривать в качестве разделителя. Заметим, что один и тот же узел может быть граничным узлом как первого, так и второго рода.

Следует отметить, что предложенный ниже алгоритм методов должен функционировать и при другом способе разбиения на подобласти связной области расчета.

Устанавливался следующий порядок следования узлов разностной сетки. Сначала шли все узлы разностной сетки, не принадлежащие разделителям, причем в том порядке, который был установлен при первоначальном КМ упорядочении узлов всей области, затем следовали узлы разделителей в порядке, установленном ниже при описании способа параллельной реализации. Заметим, что внутри каждой подобласти порядок следования узлов на разделителе был тем же, что при первоначальном КМ упорядочении. В случае, если два узла из множества разделителей связаны в графе матрицы  $A$  и находятся в разных подобластях, то при новом упорядочении сначала будет идти узел из подобласти с большим номером. На рис.1 порядок следования узлов сетки в каждой подобласти указан стрелками. Заметим, что можно в каждой подобласти снова строить КМ упорядочение всех узлов подобласти, кроме узлов разделителя, но, как показывают расчеты модельной задачи, количество итераций в параллельном методе будет практически тем же.

В методах PVICCG, PVMICCG матрицы предобусловливания задавались по формуле (1.3) с учетом нового способа упорядочения. В методе PVICCG диагональные элементы матрицы  $D$  определялись из условия совпадения диагональных элементов матриц  $B$  и  $A$  и вычислялись по формуле (2.3) с учетом нового способа упорядочения. В методе PVMICCG диагональные элементы матрицы  $D$  определялись из условия (1.4) и вычислялись с учетом нового порядка узлов сетки по формуле

$$d_i^{-1} = a_{ii}(1 + \sigma_i + \bar{\sigma}_i) - \sum_{k < i} a_{ik} d_k^1, \quad (2.9)$$

где  $d_k^1$  определялись в (2.5), а  $\bar{\sigma}_i \geq 0$  и может отличаться от нуля только в тех узлах подобласти, которые являются граничными узлами первого рода, в этом случае  $\bar{\sigma}_i = O(1/\sqrt{N})$ . Выбор параметров  $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$  для модельной задачи рассмотрен в §3.

**Л е м м а 2.1.** Пусть коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют условиям (2.2),  $d_i$  определяются по формулам (2.3) с учетом нового способа упорядочения. Тогда для любого  $i$  верно неравенство  $d_i > 0$ , матрица  $B$ , заданная в (1.3), (2.3), – симметричная и положительно определенная, и параллельный метод PVICCG сходится.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится аналогично доказательству леммы 2.1 из [10].

**Л е м м а 2.2.** Пусть коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют условиям (2.2),  $d_i$  определяются по формулам (2.5), (2.9) с учетом нового способа упорядочения. Пусть в каждой подобласти хотя бы для одного  $i$  справедливо неравенство  $\sigma_i + \bar{\sigma}_i > 0$ . Тогда для любого  $i$  верно неравенство  $d_i > 0$ , матрица  $B$ , заданная в (1.3), (2.9), (2.5), – симметричная и положительно определенная, и параллельный метод PVMICCG сходится.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится аналогично доказательству леммы 2.1 из [9].

Заметим, что сформулированные в лемме 2.2 условия являются достаточными. Однако, если использовать  $\sigma_i \equiv 0$  и  $\bar{\sigma}_i \equiv 0$ , то при  $p > 4$  в некоторых узлах сетки получим  $d_i^{-1} = 0$ .

Рассмотрим теперь как происходит параллельная реализация решения уравнения (1.1) методами PVICCG, PVMICCG. Сначала вычисляются значения  $d_i, d_i^1$  во всех узлах каждой подобласти, кроме узлов разделителя в установленном порядке, причем для каждого  $i$   $d_i^1$  вычисляются сразу после вычисления  $d_i$ . При этом не требуется знания информации, хранящейся в других процессорах. Для вычисления  $d_i, d_i^1$  на разделителях организуем следующий итерационный процесс. Сначала происходит пересылка значений  $d_i$  в методе PVICCG или  $d_i^1$  в методе PVMICCG в граничных узлах первого рода в подобласти

с номерами  $k_p < k$ . Далее для узлов разделителя в порядке следования индексов, установленном ранее, следует считать  $d_i$  (и  $d_i^1$ ), если одновременно выполнены условия: 1)  $d_i$  еще не посчитано; 2) в шаблоне узла с номером  $i$  нет узлов разделителя с меньшими номерами узлов сетки, в которых значения  $d_i$  еще не посчитаны; 3) в шаблоне узла с номером  $i$  нет узлов из соседней подобласти с номерами  $k_p > k$ , в которых  $d_i$  ( $d_i^1$ ) не посчитаны на предыдущих итерациях (а значит и не пересланы). Итерационный процесс завершается, когда посчитаны все  $d_i$  для всех подобластей. Можно показать, что этот итерационный процесс сходится. Для достаточно больших  $N/p$  в большинстве случаев требуется 2-3 итерации.

Итерационный процесс предобусловленного метода сопряженных градиентов (2.6) начинается с обращения матрицы предобусловливания, которое происходит в два этапа (2.7) и (2.8). При вычислении  $\bar{w}_i^k$  порядок расчета такой же, что и при вычислении диагональных элементов  $d_i$  матрицы  $D$ . Расчет на разделителях на каждой итерации осуществляется с помощью внутреннего итерационного процесса. Для уменьшения времени счета порядок расчета должен быть задан в некотором массиве во время вычисления  $d_i$ . "График" пересылок во время внутреннего итерационного процесса также может быть задан в некотором массиве во время вычисления  $d_i$ . Определение  $w_i^k$  происходит в обратном порядке. Расчет на разделителе осуществляется с помощью внутреннего итерационного процесса. Значения  $w^k$  в граничных точках всех соседних подобластей должны быть пересланы из соседних процессоров. Параллельная реализация остальных этапов схемы сопряженных градиентов (2.6) аналогична той, что использовалась в случае равномерной ортогональной сетки в [12].

### § 3. Теоретическое исследование скорости сходимости метода PVMICCG и выбор итерационных параметров для модельной задачи

Известно, что для числа итераций предобусловленного метода сопряженных градиентов справедлива оценка [3]

$$n \geq n_0 = 0.5 \ln(2/\varepsilon) \sqrt{H(B^{-1}A)}, \quad (3.1)$$

где  $H(B^{-1}A) = \lambda_{\max}(B^{-1}A)/\lambda_{\min}(B^{-1}A)$  – число обусловленности матрицы  $B^{-1}A$ , а  $\lambda_{\max}(B^{-1}A)$  и  $\lambda_{\min}(B^{-1}A)$  – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы  $(B^{-1}A)$ ,  $\varepsilon$  – требуемая относительная точность. Определим матрицу  $\hat{R}$  следующим образом:

$$\hat{R} = B - A - \Lambda D_A. \quad (3.2)$$

Используя (1.3), (2.9), (2.5), получим

$$(\hat{R}y)_i = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} d_k \sum_{j=k+1}^N a_{jk} (y_j - y_i) \text{ при } i \geq 2, \quad (\hat{R}y)_1 = 0,$$

$$(\hat{R}y, y) = \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} d_k \sum_{j=k+1}^N a_{jk} (y_j - y_i) y_i.$$

В результате несложных преобразований будем иметь

$$(\hat{R}y, y) = - \sum_{k=1}^{N-1} d_k \sum_{i=k+1}^{N-1} a_{ik} \sum_{j=i+1}^N a_{jk} (y_j - y_i)^2. \quad (3.3)$$

Очевидно,  $(\hat{R}y, y) \leq 0$ . Так как  $\sigma_i + \bar{\sigma}_i \geq 0$  для всех  $i$ , то  $\Lambda D_A \geq 0$ . Учитывая (3.2), имеем

$$((A + \hat{R})y, y) \leq (By, y) \leq ((A + \Lambda D_A)y, y). \quad (3.4)$$

**Л е м м а 3.1.** Пусть коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют условиям (2.2), матрица  $B$  задана в (1.3), элементы  $d_i$  диагональной матрицы  $D$  заданы в (2.9), (2.5),

$\sigma_i + \bar{\sigma}_i \geq 0$ , и справедливы неравенства

$$d_k \sum_{j=k+1}^N a_{jk} \leq 1/(1 + \eta), \quad (3.5)$$

где  $1 \leq k \leq N - 1$ ,  $\eta$  - произвольное положительное число. Тогда справедливо неравенство

$$(Ay, y) \leq (1 + 1/\eta)(By, y). \quad (3.6)$$

**Доказательство.** Для оценки сомножителей  $d_k$  в выражении (3.3) воспользуемся обобщенным  $\alpha - \beta - \gamma$  неравенством

$$\sum_{i=1}^{n-1} \bar{\alpha}_i \sum_{j=i+1}^n \alpha_j (v_i - v_j)^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i - t)^2, \quad (3.7)$$

справедливым для всех целых  $n \geq 2$ , вещественных  $\alpha_i \geq 0$  таких, что  $\sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$ , произвольных вещественных  $v_i, t$ . Неравенство (3.7) доказывается по индукции. В результате получим

$$-(\hat{R}y, y) \leq \sum_{k=1}^{N-1} d_k \left( \sum_{j=k+1}^N a_{jk} \right) \sum_{i=k+1}^N a_{ik} (y_i - y_k)^2$$

Воспользуемся равенством [3]

$$(Ay, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=k+1}^N a_{ik} (y_i - y_k)^2 + \sum_{k=1}^N y_k^2 (a_{kk} - \sum_{j \neq k} a_{kj}),$$

неравенствами (2.2) и (3.5), получим

$$-(\hat{R}y, y) \leq 1/(1 + \eta)(Ay, y).$$

Учитывая неравенство (3.4), получим неравенство (3.6). Лемма доказана.

Для простоты изложения дальнейшее теоретическое исследование проведем для следующей модельной задачи. Требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области, являющейся равносторонним треугольником. Построим в области расчета треугольную равномерную сетку. Во всех узлах сетки, кроме приграничных, шаблон будет семиточечным. Разностную аппроксимацию краевой задачи проведем интегроинтерполяционным методом [13]. Получим следующие значения ненулевых коэффициентов в уравнении (2.1):

$$a_{ij} = 1/\sqrt{3} = a, \text{ при } i \neq j, \quad a_{ii} = 6/\sqrt{3} = c. \quad (3.8)$$

При разбиении области расчета будем требовать, чтобы оно происходило строго по линиям, соединяющим узлы одного уровня.

В однопроцессорном методе VMICCG и в параллельном методе PVMICCG возьмем

$$\sigma_i = 0.5\alpha^2 S_6, \quad (3.9)$$

где постоянная  $\alpha > 0$  подлежит определению,  $S_6$  - площадь шестиугольника, стороны которого являются серединными перпендикулярами к отрезкам, соединяющим узлы сетки, принадлежащие шаблону узла, находящегося внутри шестиугольника. Заметим, что  $S_6 = 0.5\sqrt{3}r^2$ , где  $r$  - сторона треугольной ячейки. Как было сказано в §2 положим  $\bar{\sigma}_i = 0$  во всех узлах подобласти, которые не являются граничными узлами первого рода. В граничных узлах первого рода положим

$$\bar{\sigma}_i = \begin{cases} \alpha\sqrt{S_6}, & \text{если } t_i = 0, \\ 2\alpha\sqrt{S_6}/3 & \text{если } t_i = 1, \\ \alpha\sqrt{S_6}/3, & \text{если } t_i = 2, \\ 0, & \text{если } t_i \geq 3, \end{cases} \quad (3.10)$$

где  $t_i$  – количество элементов матрицы  $A$ , удовлетворяющих условию  $a_{ik} \neq 0$  при  $k < i$  при введенном новом упорядочении.

**Л е м м а 3.2.** Пусть в уравнения (2.1) коэффициенты заданы в (3.8), диагональные элементы  $d_i$  матрицы  $D$  определяются по формулам (2.9), (2.5), где  $\sigma_i$  заданы в (3.9),  $\bar{\sigma}_i$  заданы в (3.10). Матрица  $B$  определена в (1.3). Тогда справедливо неравенство

$$(Ay, y) \leq (1 + 1/(\alpha\sqrt{S_6}))(By, y). \quad (3.11)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу леммы 3.1 достаточно доказать справедливость неравенств

$$d_k^1 = d_k \sum_{j>k} a_{kj} \leq 1/(1 + \alpha\sqrt{S_6}) \quad (3.12)$$

для  $1 \leq k \leq N - 1$ . Заметим, что если при введенном упорядочении узлов сетки для параллельного метода для некоторого  $k$  справедливо равенство  $\sum_{j>k} a_{kj} = 0$ , то неравенство (3.12) выполнено. Доказательство неравенства (3.12) происходит с помощью индукции в каждой подобласти, причем порядок следования узлов в подобласти установлен выше. Используются формулы (2.9), (2.5), (2.2), (3.9), (3.10). Лемма доказана.

Заметим, что оценка (3.12) справедлива также для однопроцессорного метода VMICCG.

Произведем теперь оценку  $\lambda_{\min}(B^{-1}A)$ . Для этого нам потребуется следующая лемма, являющаяся обобщением леммы 13 [14, с.239] на случай двумерной односвязной области расчета и треугольной равномерной сетки.

**Л е м м а 3.3.** Пусть  $\rho_i \geq 0$  сеточная функция, заданная на треугольной равномерной сетке в односвязной области  $G$ , причем функция  $\rho_i$  не равна тождественно нулю. Для любой сеточной функции  $y_i$ , заданной на этой сетке в области  $G$  с границей  $\gamma$  и удовлетворяющей условию  $y_i = 0$  на границе  $\gamma$ , верна оценка

$$\sum_{i=1}^N \rho_i y_i^2 S_6 \leq (\max_i v_i)(Ay, y) \quad (3.13)$$

где  $v_i$  – решение системы уравнений

$$Av = \rho S_6$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится аналогично доказательству леммы 13 [14, с.239].

**Л е м м а 3.4.** Пусть в уравнениях (2.1) коэффициенты заданы в (3.8),  $d_i$  определяются по формулам (2.9), (2.5), где  $\sigma_i$  заданы в (3.9),  $\bar{\sigma}_i$  заданы в (3.10). Матрица  $B$  определена в (1.3). Тогда справедливо неравенство

$$(Ay, y) \geq (1 + 0.5\alpha^2 c/\lambda_1 + \alpha\psi(p_1, p_2))^{-1}(By, y), \quad (3.14)$$

где функция  $\psi(p_1, p_2)$  ограничена при фиксированных  $p_1, p_2$ , не зависит от  $S_6, N, \alpha$ , а  $\lambda_1 > 0$  удовлетворяет неравенству

$$\lambda_1 \sum_i y_i^2 S_6 \leq (Ay, y). \quad (3.15)$$

Доказательство. Учитывая (3.9), (3.10), имеем

$$((\Lambda D_A + A)y, y) = 0.5\alpha^2 S_6 c \sum_{i=1}^N y_i^2 + 2\alpha c/3 \sum_{i \in \omega_2} y_i^2 \sqrt{S_6} + \alpha c/3 \sum_{i \in \omega_1} y_i^2 \sqrt{S_6} + (Ay, y) \quad (3.16)$$

где  $\omega_2$  – множество граничных узлов первого рода с подобластями с меньшим  $k_2$ ,  $\omega_1$  – множество граничных узлов первого рода с подобластями с меньшим  $k_1$ .  $k_2$  – номер подобласти на первом этапе разбиения,  $k_1$  – номер подобласти на втором этапе разбиения. Для первого слагаемого в (3.16) в силу неравенства (3.15) справедливо

$$0.5\alpha^2 c S_6 \sum_i y_i^2 \leq 0.5\alpha^2 c / \lambda_1 (Ay, y).$$

Оценим второе слагаемое в (3.16).

$$2\alpha c/3 \sum_{i \in \omega_2} y_i^2 \sqrt{S_6} = 2\alpha c/3 \sum_{m=1}^{p_2-1} \sum_{i=1}^N \bar{\delta}_{lm} / \sqrt{S_6} y_i^2 S_6,$$

где  $l$  – номер уровня в структуре уровней при первоначальном КМ упорядочении, в котором находится узел  $i$ ,  $m$  – номер уровня при первоначальном упорядочении, который состоит из граничных узлов первого рода, функция  $\bar{\delta}_{lm}$  определяется следующим образом:

$$\bar{\delta}_{lm} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = m, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что  $m$  принимает  $p_2 - 1$  различных значения. Рассмотрим функцию  $\hat{G}_{im}$ , являющуюся решением задачи

$$\frac{A\hat{G}_{im}}{S_6} = \begin{cases} 1/\sqrt{S_6}, & \text{если } l = m, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\hat{G}_{im}|_\gamma = 0.$$

Рассмотрим также функцию

$$\tilde{G}_{im} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{2S}} \begin{cases} l\sqrt{S_6}(\sqrt{2S} - m\sqrt{S_6}), & \text{если } l \leq m, \\ m\sqrt{S_6}(\sqrt{2S} - l\sqrt{S_6}), & \text{если } l \geq m, \end{cases}$$

где  $S$  – площадь всей треугольной области расчета. Можно показать, что

$$\frac{A\tilde{G}_{im}}{S_6} \geq \begin{cases} 1/\sqrt{S_6}, & \text{если } l = m, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tilde{G}_{im}|_\gamma > 0$$

и, кроме того,  $\tilde{G}_{im} \leq G_1$ , где  $G_1 = \sqrt{2S}/(8a)$ , не зависит от  $S_6, N$ . Так как для коэффициентов уравнения (2.1) выполнены условия принципа максимума [13], то из теоремы сравнения следует, что

$$\hat{G}_{im} \leq \tilde{G}_{im} \leq G_1. \quad (3.17)$$

Воспользуемся оценками (3.13) и (3.17), получим

$$2\alpha c/3 \sum_{i \in \omega_2} y_i^2 \sqrt{S_6} = 2\alpha c/3 \sum_{m=1}^{p_2-1} \sum_{i=1}^N \bar{\delta}_{lm} / \sqrt{S_6} y_i^2 S_6 \leq 2\alpha c(p_2 - 1)G_1/3(Ay, y).$$

Аналогичным образом оценивается третье слагаемое в (3.16)

$$\alpha c/3 \sum_{i \in \omega_1} y_i^2 \sqrt{S_6} \leq \alpha c(p_1 - 1)G_2/3(Ay, y).$$

В результате получим

$$((\Delta D_A + A)y, y) \leq (1 + 0.5c\alpha^2/\lambda_1 + \alpha\psi(p_1, p_2))(Ay, y),$$

где функция

$$\psi(p_1, p_2) = c \max[2(p_2 - 1)G_1, (p_1 - 1)G_2]/3$$

не зависит от  $S_6$ ,  $N$ ,  $\alpha$ . Из последнего неравенства и неравенства (3.4) следует неравенство (3.14). Лемма доказана.

Из неравенств (3.14) и (3.11) следует оценка для числа обусловленности матрицы  $B^{-1}A$  в параллельном методе PVMICCG

$$H(B^{-1}A) \leq (1 + 0.5c\alpha^2/\lambda_1 + \alpha\psi(p_1, p_2))(1 + 1/(\alpha\sqrt{S_6})).$$

Заметим, что оценка для числа обусловленности матрицы  $B^{-1}A$  в однопроцессорном методе VMICCG имеет вид

$$H(B^{-1}A) \leq (1 + 0.5c\alpha^2/\lambda_1)(1 + 1/(\alpha\sqrt{S_6})).$$

Можно доказать, что

$$\lambda_1 > 16/l_1^2,$$

где  $l_1$  – сторона всей треугольной области расчета. Учитывая, что для достаточно больших  $N$  справедливо  $S_6 \approx S/N$ , имеем  $H(B^{-1}A) = O(\sqrt{N})$  в методе VMICCG и в методе PVMICCG при фиксированных  $p_1$  и  $p_2$ .

Выберем  $\alpha = \alpha_0$  так, чтобы коэффициент при  $1/\sqrt{S_6}$  в оценках для  $H(B^{-1}A)$  в методах VMICCG, PVMICCG был минимальным:

$$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{2\lambda_1/c}. \quad (3.18)$$

Из неравенства (3.1) следуют оценки для числа итераций в методе PVMICCG

$$n \geq n_0 = 0.5 \ln(2/\varepsilon) \sqrt{(2 + \alpha_0\psi(p_1, p_2))(1 + \frac{1}{\alpha_0\sqrt{S_6}})} \approx 0.5 \ln(2/\varepsilon) \sqrt{\frac{2 + \alpha_0\psi(p_1, p_2)}{\alpha_0\sqrt{S}}} \sqrt[4]{N} \quad (3.19)$$

и в методе VMICCG

$$n \geq n_0 = 0.5 \ln(2/\varepsilon) \sqrt{2(1 + 1/(\alpha_0\sqrt{S_6}))} \approx 0.5 \ln(2/\varepsilon) \sqrt{2/(\alpha_0\sqrt{S})} \sqrt[4]{N}. \quad (3.20)$$

Итак доказана

**Теорема.** Пусть в уравнениях (2.1) коэффициенты заданы в (3.8),  $d_i$  определяются по формулам (2.9), (2.5), где  $\sigma_i$  заданы в (3.9),  $\bar{\sigma}_i$  заданы в (3.10). Матрица  $B$  определена в (1.3). Тогда для числа итераций в методе PVMICCG справедлива оценка (3.19), где функция  $\psi(p_1, p_2)$  не зависит от  $S_6$ ,  $N$ , ограничена при фиксированных  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\alpha_0$  задано в (3.18),  $\lambda_1 > 0$  удовлетворяет неравенству (3.15).

Из сравнения оценок (3.19), (3.20) следует, что теоретический коэффициент возрастания числа итераций с ростом числа процессоров не зависит от  $N$ , если  $\lambda_1$  не зависит от  $N$ . Заметим, что для определения  $\lambda_1$  в неравенстве (3.15) можно воспользоваться асимптотическим свойством явного метода наискорейшего спуска [14].

Как показывают расчеты на равномерной ортогональной сетке [9], использование параметров  $\sigma_i$ ,  $\bar{\sigma}_i$ , теоретически полученных для модельной задачи, в которой  $\chi_1 \equiv \chi_2 \equiv 1$ ,

приводило к хорошим результатам при численном решении уравнения (1.2) с достаточно гладкими коэффициентами  $\chi_1, \chi_2$  в прямоугольной области расчета. Это позволяет предположить, что приведенные выше значения  $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$  могут быть использованы в расчетах задач с переменными достаточно гладкими коэффициентами в уравнении (1.2) в той же области расчета на треугольной равномерной сетке.

Пусть в связанной области произвольной формы введена неструктурированная треугольная сетка, удовлетворяющая условию Делоне, коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют условию (2.2), разбиение области расчета на подобласти происходит строго по линиям, соединяющим точки одного уровня. Пусть выполнены условия

$$\theta_1 \frac{S}{N} \leq S_i \leq \theta_2 \frac{S}{N} \quad \text{для всех } i,$$

где  $\theta_1 = O(1), \theta_2 = O(1), \theta_2/\theta_1$  невелико,  $S_i$  – площадь ячейки Дирихле [15] и

$$|\rho_i - 1| \leq k_3 h, \quad \text{где } h = \sqrt{S/N}, \quad (3.21)$$

где

$$\rho_i = \frac{\sum_{k < i} a_{ik}}{\sum_{k > i} a_{ik}}, \quad \text{причем в приграничных узлах } \rho_i = \frac{\sum_{k < i} a_{ik} + \theta_i^1}{\sum_{k > i} a_{ik} + \theta_i^2},$$

$\theta_i^1$  и  $\theta_i^2$  – суммы слагаемых "ниже" и "выше" диагонали, которые умножились на значения  $y$  в граничных точках области расчета. Пусть условие (3.21) выполнено во всех узлах сетки, не являющихся граничными узлами первого рода, кроме быть может некоторых узлов, в которых

$$|\rho_i - 1| \leq C_2, \quad \text{где } C_2 = O(1). \quad (3.22)$$

Обозначим  $\Omega$  множество узлов сетки, не являющихся граничными узлами первого рода, в которых  $\rho_i < 1$ , условие (3.21) не выполнено, а условие (3.22) выполнено. Потребуем, чтобы  $\Omega$  состояло не более чем из всех узлов конечного числа уровней при построении структуры уровней с корнем во всех псевдопериферийных узлах.

Зададим

$$\sigma_i = \begin{cases} \alpha_1 h, & \text{если } i \in \Omega, \\ \alpha_2^2 h^2, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Определим  $\bar{\sigma}_i = \alpha_1 h$  в граничных узлах первого рода, и  $\bar{\sigma}_i = 0$  в остальных узлах.

Тогда можно показать, что в методе PVMICCG

$$H(B^{-1}A) \leq (1 + \alpha_2^2/\lambda_1 + \alpha_1 \bar{\psi}(p_1, p_2) + \alpha_1 \bar{\phi}) \left(1 + \sqrt{N}/(\sqrt{S}k_5)\right),$$

где  $\bar{\phi} = O(1)$ , не зависит от  $N, p_1, p_2$ , функция  $\bar{\psi}(p_1, p_2)$  не зависит от  $N$ , при фиксированных  $p_1, p_2$  ограничена,  $\lambda_1$  – положительное число из неравенства

$$\lambda_1 S/N \sum_i a_{ii} y_i^2 \leq (Ay, y), \quad \lambda_1 = O(1),$$

$k_5 = \max(\alpha_1, 0.5\sqrt{2}\alpha_2, k_4)$ ,  $k_4 = O(1)$  зависит от  $\alpha_2$  и  $k_3$ , не зависит от  $N$ . Можно показать, что в методе VMICCG при определении  $\sigma_i$  с помощью (3.23)

$$H(B^{-1}A) \leq (1 + \alpha_2^2/\lambda_1 + \alpha_1 \bar{\phi})(1 + \sqrt{N}/\sqrt{S}/k_5).$$

Соответствующие оценки для числа итераций в методах VMICCG, PVMICCG имеют вид

$$n \geq n_0 = 0.5 \ln(2/\varepsilon) \sqrt{(1 + \alpha_2^2/\lambda_1 + \alpha_1 \bar{\psi}(p_1, p_2) + \alpha_1 \bar{\phi}) \left(1 + \sqrt{N}/(\sqrt{S}k_5)\right)},$$

$$n \geq n_0 = 0.5 \ln(2/\varepsilon) \sqrt{(1 + \alpha_2^2/\lambda_1 + \alpha_1 \bar{\phi}) \left(1 + \sqrt{N}/(\sqrt{5}k_5)\right)}.$$

Таким образом, в этом случае в методе PVMICCG тоже сохраняется характер асимптотической зависимости числа итераций от числа узлов сетки, и скорость роста числа итераций с ростом числа процессоров ограничена при фиксированных  $p_1$ ,  $p_2$  и не зависит от  $N$ , если  $\lambda_1$  не зависит от  $N$ .

#### § 4. Результаты численных расчетов

Предложенные в настоящей работе параллельные методы были использованы для решения уравнения (2.1) с коэффициентами (3.8), являющегося разностным аналогом задачи Дирихле для уравнения Пуассона на треугольной равномерной сетке, причем  $N = 465, 1953, 8001, 32385$  в задаче 1 и  $N = 130305$  в задаче 2. Область расчета представляла собой равносторонний треугольник, вершины которого располагались в точках с координатами  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(0, \sqrt{3} - 1)$  в задаче 1 и в точках с координатами  $(-0.866025, -0.5)$ ,  $(0.866025, -0.5)$ ,  $(0, 1)$  в задаче 2. Правая часть  $f$  задавалась так, чтобы точным решением уравнения (2.1) была функция  $y = 8.2(x_1 + 1.1)(1.1 - x_1)(x_2 + 1.09)$ . Разбиение области расчета на подобласти происходило так, как описано в §2, причем  $p_1 = p_2 = \sqrt{p}$ . Расчеты проводились на двумерном массиве процессоров  $p_1 \times p_2$  32-х процессорной станции Parsytec CC и вычислительной системе МВС-1000М, содержащей 768 процессоров. Для определения необходимого числа итераций счет продолжался до выполнения условия  $(Ay^k - f, y^k - y) \leq \varepsilon^2 (Ay^0 - f, y^0 - y)$ , где  $y^0 \equiv 0$ .

При использовании методов VMICCG, PVMICCG для решения системы уравнений (2.1) параметры  $\sigma_i$ ,  $\bar{\sigma}_i$  вычислялись по формулам (3.9), (3.10), где  $\alpha = \alpha_0$  и определялась по формуле (3.18). Для определения значения  $\lambda_1$  в неравенстве (3.15) использовалось асимптотическое свойство явного метода наискорейшего спуска. Были получены следующие значения:

- при  $N = 465 - \lambda_1 \approx 26.01, \alpha_0 = 3.87$ ;
- при  $N = 1953 - \lambda_1 \approx 26.24, \alpha_0 = 3.89$ ;
- при  $N = 8001 - \lambda_1 \approx 26.30, \alpha_0 = 3.90$ ;
- при  $N = 32385 - \alpha_0 = 3.90, \lambda_1$  не вычислялось;
- в задаче 2  $\lambda_1 \approx 35.0, \alpha_0 = 4.50$ .

Как видно из результатов расчетов,  $\lambda_1$ ,  $\alpha_0$  при изменении  $N$  меняются очень мало. Следует ожидать, что коэффициент возрастания числа итераций с ростом числа процессоров в методе PVMICCG при изменении  $N$  меняется очень мало. Кроме того, следует ожидать, что если для определения  $\alpha_0$  использовать  $\lambda_1$ , полученное для другого (меньшего)  $N$ , то число итераций в методах VMICCG, PVMICG почти не изменится.

В табл.1 приведены значения числа итераций при различных значениях  $N$  и  $p$ , полученные в результате решения задачи 1 методом VICCG на одном процессоре и методом PVICCG на 9, 16, 25 процессорах ( $\varepsilon = 10^{-8}$ ). Число итераций возросло в методе PVICCG не более, чем на 12%. Как видно из табл.1, число итераций в методах VICCG, PVICCG примерно пропорционально  $\sqrt{N}$ .

В табл.2 приведены значения числа итераций при различных значениях  $N$  и  $p$ , полученные в результате решения задачи 1 методом VMICCG на одном процессоре и методом PVMICCG на 9, 16, 25 процессорах ( $\varepsilon = 10^{-8}$ ). Число итераций медленно росло с ростом числа процессоров, причем менее чем в 2 раза до 25 процессоров. Скорость роста числа итераций с ростом числа процессоров очень слабо зависела от  $N$ , число итераций в методах VICCG, PVICCG было примерно пропорционально  $\sqrt[3]{N}$ . В последней строке табл.2 приведен средний по  $N$  коэффициент возрастания числа итераций с ростом числа процессоров.

$N \backslash p$	1	9	16	25
465	24	26	27	27
1953	45	48	49	49
8001	85	89	91	90
32385	165	170	173	172

Таблица 1. Количество итераций в параллельном методе PVICCG при  $\epsilon = 10^{-8}$  для различных значений  $N, p$  при решении задачи 1.

Заметим, что скорость роста числа итераций с ростом числа процессоров в методе PVMICCG немного больше, чем в параллельном варианте MICCG(0) для разностных эллиптических уравнений на равномерных ортогональных сетках [9,10].

$N \backslash p$	1	9	16	25
465	17	27	29	30
1953	24	37	39	42
8001	33	50	54	58
32385	44	68	74	77
		1.54	1.66	1.75

Таблица 2. Количество итераций параллельного метода PVMICCG при  $\epsilon = 10^{-8}$  для различных значений  $N, p$  при решении задачи 1.

Для уменьшения скорости роста числа итераций в случае структурированной решетки процессоров можно использовать другие упорядочения узлов сетки, причем разные в разных подобластях.

При решении задачи 2 методом VICCG потребовалось 225 итераций ( $\epsilon = 10^{-6}$ ), а при использовании PVICCG потребовалось соответственно 248, 248, 249 итераций на 9, 16, 25 процессорах ( $\epsilon = 10^{-6}$ ). Эффективность метода PVICCG по сравнению с методом VICCG  $e = t_p / (t_1 p)$ , где  $t_p$  - время счета на  $p$  процессорах на параллельной вычислительной системе МВС 1000 была соответственно 91%, 86%, 74% на 9, 16, 25 процессорах. Следует отметить, что при выполнении расчетов "график" пересылок не составлялся, на каждой внутренней итерации пересылались значения во всех граничных узлах первого рода (при вычислении элементов матрицы  $D$  и  $\bar{w}^k$ ). Если сократить число пересылок благодаря использованию графика пересылок, то эффективность должна увеличиться. Заметим также, что разбиение области расчета в задаче 2 на первом этапе производилось строго по линиям, соединяющим точки одного уровня, количество внутренних итераций (т.е. итераций при расчете на разделителях) было равно 2.

Итак, в настоящей работе предложены методы PVICCG, PVMICCG – параллельные итерационные методы сопряженных градиентов с факторизованной матрицей предобуславливания для решения дискретных эллиптических уравнений на неструктурированной треугольной сетке. Произведено теоретическое исследование скорости сходимости методов PVMICCG и VMICCG. Для модельной задачи, в которой используется равномерная треугольная сетка, указан способ выбора итерационных параметров, с помощью расчетов на

умеренном числе процессоров параллельной вычислительной системы МВС 1000М произведено исследование скорости сходимости методов PVICCG, PVMICCG и эффективности метода PVICCG.

В заключение авторы выражают благодарность С.В. Полякову за проявленное внимание к работе и полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов И.В., Поляков С.В. Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей. Ж. Математ. моделирование, 2002, т.14, № 6, с. 25-35.
2. Meijerink J.A., van der Vorst H.A. An Iterative Solution Method for Linear Systems, of which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-matrix // Math. Comp. 1977, v.31, № 137, p.148-162.
3. Gustafsson I. A Class of First Order Factorization Methods // BIT. 1978, v.18, p.142-156.
4. Axelsson O. A Generalized SSOR Method // BIT. 1972, v.13, p.443-467.
5. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М.: Мир, 1991.
6. Duff I.S., Meurant G.A. The Effect of Ordering on Preconditioned Conjugate Gradients // BIT. 1989, v.29, p.635-657.
7. Eijkhout V. Analysis of Parallel Incomplete point Factorizations // Lin. Alg. Appl., 1991, v.154-156, p.723-740.
8. Doi S. On parallelism and convergence of incomplete LU factorization // Appl. Numer. Math. 1991, v.7(5), p.417-436.
9. Милькова О.Ю. Parallel approximate factorization method for solving discrete elliptic equations. // Parallel Computing. 2001, v.27, p.1365-1379.
10. Милькова О.Ю. Параллельные варианты некоторых итерационных методов с факторизованной матрицей предобуславливания. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001, т.41, № 11, с.1619-1636.
11. Джордж А., Лю Дж., Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984.
12. Милькова О.Ю. // Параллельный вариант обобщенного попеременно-треугольного метода для решения эллиптических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1998, т.38, № 12, с.2002-2012.
13. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
14. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
15. Pascal J.F., Paul-Louis G. Mesh Generation application to finite elements. Oxford: Hermes Science Publishing, 2000.

Поступила в редакцию 26.12.2002.