А. А. Давыдов, Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки, *Функц. анализ и его прил.*, 1985, том 19, выпуск 2, 1–10

Функциональный анализ и его приложения,
1985, т. 19, вып. 2, 1—10

УДК 517.9

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ, В ОКРЕСТНОСТИ ЕГО ОСОБОЙ ТОЧКИ

А. А. Давыдов

§ 1. Введение

В настоящей работе найдены нормальные формы дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. Основной результат состоит в том, что уравнение общего положения в окрестности каждой особой точки, для которой дискриминантная кривая гладкая, приводится к нормальной форме $y = (dy/dx + kx)^2$ диффеоморфизмом плоскости (x, y) (гомеоморфизмами же можно добиться $k = -1$, $1/9$ или $1/4$).

Для гладкой функции F общего положения уравнение

$$F(x, y, p) = 0, \tag{1}$$

где $p = dy/dx$, задает в трехмерном пространстве 1-струй функций $y(x)$ (с координатами x, y, p) гладкую поверхность. Эту поверхность мы будем называть *поверхностью* этого уравнения. Отображением *складывания* этого уравнения мы будем называть проекцию вдоль оси p поверхности этого уравнения на плоскость (x, y). Критическая точка складывания называется особой точкой уравнения; особые точки уравнения образуют его *криминанту*. Проекция криминанты на плоскость (x, y) называется *дискриминантной кривой*. Каждая точка криминанты уравнения общего положения есть критическая точка, либо складка, либо сборка Уитни складывания этого уравнения.

В пространстве 1-струй определено поле контактных плоскостей $dy = p\,dx$. Особая точка уравнения $F = 0$ называется *регулярной*, если в этой точке выполнено условие гладкости криминанты $\operatorname{rank}((x, y, p) \mapsto (F, F_p)) = 2$ и криминанта не касается в этой точке контактной плоскости [1]. Нормальная форма $p^2 = x$ этого уравнения в окрестности его регулярной особой точки была найдена, по-видимому, одновременно Л. Дара [5] и Ю. А. Бродским [1], который использовал форму $p^2 = xE(x, y)$, где E — гладкая функция, полученную Р. Томом [6].

Дара в своей работе показал, что для функции F из открытого всюду плотного множества в пространстве таких функций с тонкой C^3-топологией Уитни уравнение $F = 0$ может иметь нерегулярные особые точки лишь пяти типов: хорошо сложенное седло, хорошо сложенный узел, хорошо сложенный фокус, эллиптическая сборка, гиперболическая сборка. Из этих пяти особенностей первые три мы будем называть хорошо сложенными, а последние две — собранными особенностями. Три хорошо сложенных особенности изображены на рисунках 1—3 соответственно. Обозначим через τ отображение складывания уравнения.

Это отображение имеет в нерегулярной особой точке этого уравнения критическую точку «складка Уитни» в случае хорошо сложенных и «сборка Уитни» в случае собранных особенностей. В верхнем ряду этих рисунков изображены семейства интегральных кривых *поля направлений* уравнения (1) (это поле «высекается» на поверхности этого уравнения полем контактных плоскостей $dy = p\,dx$; интегральные кривые поля направлений уравнения называются *интегральными кривыми* этого уравнения). В нижнем ряду — образы этих семейств при отображении складывания уравнения: сплошные

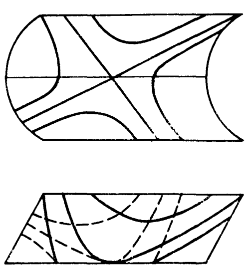

Рис. 1

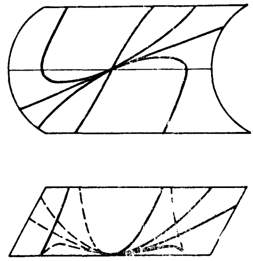

Рис. 2

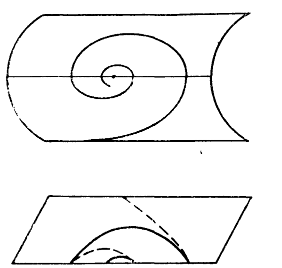

Рис. 3

линии — это образы частей интегральных кривых с одного слоя накрытия; штриховые — с другого.

В особой точке типа хорошо сложенное седло, узел и фокус поле направлений уравнения имеет невырожденную особую точку типа седло, узел и фокус соответственно. В первых двух случаях поле имеет собственные векторы, трансверсальные как к криминанте этого уравнения, так и к ядру производной отображения складывания в этой точке, и различные по модулю собственные числа.

Дара сформулировал гипотезу, что уравнение (1) локально в окрестности каждой своей хорошо сложенной особой точки топологически эквивалентно уравнению $y = (p^2 + \chi x^2)/2$ при $\chi < 0$, $0 < \chi < 1/4$ и $\chi > 1/4$ для седла, узла и фокуса соответственно, уравнению $x = p^3 - yp$ в случае эллиптической сборки, уравнению $x = p^3 + yp$ в случае гиперболической сборки.

В настоящей работе доказано, что эквивалентность трем нормальным формам хорошо сложенных особенностей действительно имеет место, причем C^∞-уравнение приводится к ним (при обычных дополнительных ограничениях, оговоренных ниже в замечании после теоремы 3, на собственные числа линеаризации поля направлений этого уравнения в особой точке) C^∞-диффеоморфизмом плоскости (x, y). Топологическая же эквивалентность «убивает» и параметр χ в каждой из этих трех нормальных форм. Таким образом, хорошо сложенные особые точки уравнения, не разрешенного относительно производной, имеют относительно диффеоморфизмов один модуль, а относительно гомеоморфизмов структурно устойчивы (как и особые точки обычных уравнений). В отношении собранных особенностей гипотеза Дара неверна; мы доказываем, что топологические нормальные формы этих особенностей должны содержать функциональные модули.

В. И. Арнольду и М. А. Леонтовичу автор признателен за внимание к работе и полезные обсуждения, позволившие упростить доказательства.

§ 2. Нормальные формы

Здесь сформулированы основные результаты работы. Всюду (если не оговорено противное) речь идет о гладких объектах (т. е. класса C^∞).

1. Хорошие инволюции. Особую точку поля направлений будем называть *невырожденной*, если в окрестности этой точки это поле можно задать векторным полем, каждое из собственных чисел линеаризации которого в этой точке отлично от 0, а отношение этих чисел — от ± 1. Направления соответствующих собственных векторов будем называть *собственными направлениями* поля направлений.

Пусть v — поле направлений, имеющее в нуле невырожденную особую точку. Инволюция, имеющая проходящую через нуль линию неподвижных точек, называется *согласованной с полем* v, если на этой линии и только на ней направления поля и его образа при инволюции одинаковы. Согласованная с полем v инволюция называется *v-хорошей*, если собственные направления поля v и производной инволюции в нуле попарно различны.

П р и м е р. На поверхности уравнения $2y = p^2 + \chi x^2$, $0 \neq \chi \neq 1/4$, за координаты возьмем x и p. Нуль — невырожденная особая точка поля направлений v этого уравнения. Инволюция $(x, p) \mapsto (x, -p)$ этой поверхности v-хорошая.

Два объекта (ростки инволюций, кривых; направления в точках и т. п.) называются *эквивалентными вдоль поля* v или *v-эквивалентными*, если они могут быть переведены один в другой C^∞-диффеоморфизмом плоскости, переводящим каждую интегральную кривую этого поля в себя.

Фиксируем поле направлений v, имеющее в нуле невырожденную особую точку.

Т е о р е м а 1. *Ростки в нуле двух v-хороших инволюций v-эквивалентны, если и только если касательные в нуле к неподвижным линиям этих инволюций можно соединить в пространстве направлений в нуле непрерывной кривой, не проходящей через собственные направления поля v в нуле.*

Из этой теоремы следует

Т е о р е м а 2. *Число классов v-эквивалентности ростков в нуле v-хороших инволюций равно двум (соответственно единице), если нуль — особая точка поля v типа седло либо узел (соответственно фокус).*

З а м е ч а н и е. v-хорошие инволюции образуют в пространстве согласованных с полем v инволюций открытое в C^1-топологии всюду плотное в C^∞-топологии множество.

2. Нормальные особые точки. *Показатель* невырожденной особой точки поля направлений определяется как отношение наибольшего по модулю собственного числа линеаризации соответствующего векторного поля к наименьшему для седла и узла и как модуль отношения мнимой части собственного числа к вещественной для фокуса; показатели сохраняются при диффеоморфизмах.

Невырожденную особую точку поля направлений типа седло (соответственно узел, фокус) будем называть C^k-нормальной, если росток в этой точке семейства интегральных кривых этого поля C^k-диффеоморфен ростку в нуле семейства фазовых кривых линейных векторных полей

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где α — показатель этой особой точки, соответственно. Для полей направлений, задаваемых этими тремя векторными полями, мы также будем использовать обозначения v_2, v_3, v_4.

Инволюция θ_1: $(x, y) \mapsto ((\alpha + 1)\, x - 2\alpha y, \quad 2x - (\alpha + 1)\, y)/(\alpha - 1)$ — — v_2- и v_3-хорошая, а инволюция θ_2: $(x, y) \mapsto (x - 2y/\alpha, \ -y)$ — v_4-хорошая, как легко проверить.

Пусть нуль — C^∞-нормальная особая точка поля v типа седло (соответственно узел, фокус) с показателем α.

Т е о р е м а 3. *Ростки в нуле поля направлений v, семейства его интегральных кривых и v-хорошей инволюции C^∞-диффеоморфизмом плоскости* *одновременно приводятся к росткам в нуле поля направлений* v_2 (*соответственно* v_3, v_4), *семейства его интегральных кривых и инволюции* θ_1 (*соответственно* θ_1, θ_2).

Замечания. Условия C^∞-нормальности, требуемые в теореме 3, почти всегда выполнены, а именно:

1. согласно теореме Зигеля, седло C^∞-нормально, если точка $(1, \alpha)$ является точкой типа (M, ν) (т. е. $\min\{|1 - m_1 - m_2\alpha|, |\alpha - m_1 - m_2\alpha|\} \geqslant M/|m|^\nu$ для всех целочисленных векторов $m = (m_1, m_2)$ с неотрицательными компонентами; $m_1 + m_2 \geqslant 2$). Известно, что мера множества точек, не являющихся ни при каком $M > 0$ точками типа (M, ν), равна нулю, если $\nu > 1$ [1];

2. узел C^∞-нормален, если его показатель не натуральное число. Для гладкого векторного поля на плоскости из открытого в C^1 всюду плотного в C^∞ множества в пространстве таких полей (в тонкой топологии Уитни) это условие выполнено в каждом из узлов этого поля;

3. невырожденный фокус всегда C^∞-нормален.

Гомеоморфизмами (C^0-диффеоморфизмами) можно «убить» и показатель α особой точки, не требуя при этом C^∞-нормальности этой точки. Пусть нуль — невырожденная особая точка поля v типа седло (соответственно узел, фокус).

Теорема 4. *Ростки в нуле поля направлений* v, *семейства его интегральных кривых и* v-*хорошей инволюции гомеоморфизмом плоскости одновременно приводятся к росткам в нуле поля направлений* v_2 (*соответственно* v_3, v_4), *семейства его интегральных кривых и инволюции* θ_1 (*соответственно* θ_1, θ_2) *при* $\alpha = -2$ (*соответственно* $\alpha = 2$, $\alpha = 1$).

В пункте 4 мы сформулируем теоремы, получающиеся применением приведенных выше результатов к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной, и в пункте 5 укажем еще две области приложения этих результатов.

3. Хорошо сложенные и собранные особенности. Локально в окрестности критической точки типа складка Уитни отображение складывания уравнения (1) определена *инволюция складывания* этого уравнения. Эта инволюция на поверхности этого уравнения переставляет точки, образы которых при отображении складывания этого уравнения одинаковы.

Нерегулярная особая точка уравнения (1), в которой складывание этого уравнения имеет критическую точку складка Уитни, называется *хорошо сложенным седлом*, *узлом*, *фокусом*, если: 1) поле направлений v этого уравнения имеет в этой точке невырожденную особую точку типа седло, узел, фокус соответственно; и 2) инволюция складывания этого уравнения (определенная локально в окрестности этой точки) v-хорошая. Эти три типа особых точек мы будем называть *хорошо сложенными* особыми точками.

В примере пункта 1 мы имеем в нуле хорошо сложенное седло, узел и фокус при $\chi < 0$, $0 < \chi < 1/4$ и $1/4 < \chi$ соответственно.

Росток инволюции складывания в хорошо сложенной особой точке уравнения (1) — хороший для поля направлений этого уравнения. Верно и обратное:

Теорема 5. *Росток в нуле пары* (*поле направлений* v *с невырожденной особой точкой в нуле*, v-*хорошая инволюция*) C^∞-*диффеоморфен ростку в хорошо сложенной особой точке пары* (*поле направлений*, *инволюция складывания*) *подходящего уравнения* (1).

Нерегулярная особая точка уравнения (1), в которой складывание этого уравнения имеет особую точку сборка Уитни, называется *собранной* особой точкой или *собранной особенностью* этого уравнения. Росток поверхности уравнения (1) в собранной особой точке этого уравнения совпадает с ростком в нуле поверхности $x = pf(x, p)$, где f — гладкая функция, $f(0, 0) = f'_p(0, 0) = 0 < f''_{pp}(0, 0)$ при подходящем выборе координат на плоскости (x, y).

Собранная особая точка называется *эллиптической* (соответственно *гиперболической*), если $f'_y(0, 0) < 0$ (соответственно $f'_y(0, 0) > 0$). Что эллиптичность и гиперболичность собранной особой точки не зависит от выбора системы координат (на плоскости (x, y)), нетрудно видеть.

Замечание. Дара показал, что для гладкой функции F из открытого всюду плотного множества таких функций в тонкой C^3-топологии Уитни уравнение (1) имеет лишь нерегулярные собранные и хорошо сложенные особые точки [5].

4. Нормальные хорошо сложенные особенности. Сложенная особая точка уравнения (1) называется *C^k-нормальной*, если эта точка — C^k-нормальная особая точка поля направлений этого уравнения. Из теоремы 3 вытекает

Теорема 6. *Образ ростка семейства интегральных кривых уравнения $F = 0$ в особой точке C^∞-нормальное хорошо сложенное седло (соответственно узел, фокус) при отображении складывания этого уравнения C^∞-диффеоморфен ростку в нуле семейства кривых*

$$|x \overset{+}{(-)} \sqrt{y}|^{-\alpha} (x/\alpha \overset{+}{(-)} \sqrt{y}) = C, \qquad C \in \mathbf{R} \tag{2a}$$

(*соответственно*

$$(|x \overset{+}{(-)} \sqrt{y}|^{-\alpha} (x/\alpha \overset{+}{(-)} \sqrt{y}) = C) \cup (x \overset{+}{(-)} \sqrt{y} = 0), \qquad C \in \mathbf{R}, \tag{3a}$$

$$\begin{cases} \overset{+}{(-)} \alpha \sqrt{y} = R \sin(\alpha \ln R + C) \\ x \overset{+}{(-)} \sqrt{y} = R \cos(\alpha \ln R + C), \quad 0 \leqslant C < 2\pi, \end{cases} \tag{4a}$$

где $R = \sqrt{(x \overset{+}{(-)} \sqrt{y})^2 + \alpha^2 y}$), *где α — показатель этой особой точки (нумерацию кривых в прообразе и образе можно выбрать одинаковой).*

Говорят, что росток уравнения $F = 0$ в точке поверхности этого уравнения *C^k-диффеоморфен* ростку уравнения $F_1 = 0$ в точке поверхности последнего уравнения, если существует C^k-диффеоморфизм окрестностей проекций этих точек на плоскость (x, y), переводящий ростки семейств фазовых кривых этих уравнений один в другой ($0 \leqslant k$; при $k = 0$ мы будем говорить, что эти ростки *топологически эквивалентны*). Из теоремы 6 следует

Теорема 7. *Росток уравнения $F = 0$ в особой точке C^∞-нормальное хорошо сложенное седло либо узел (соответственно фокус) C^∞-диффеоморфен ростку в нуле уравнения $(p + kx)^2 = y$ при $k = \alpha(\alpha + 1)^{-2}/2$ (соответственно $k = (1 + \alpha^2)/8$), где α — показатель этой особой точки.*

Замечания. А. Условия теорем 6, 7 почти всегда выполнены, что следует из замечаний предыдущих двух пунктов.

Б. Замена координат $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = 2(y + kx^2/2)$ приводит нормальную форму $(p + kx)^2 = y$ к нормальной форме Л. Дара $y = (p^2 + \chi x^2)/2$ с $\chi = 2k$; $k < 0$, $0 < k < 1/8$, $1/8 < k$ для седла, узла и фокуса соответственно.

В. Дифференциальное уравнение семейства кривых (2a) либо (3a) (соответственно (4a)) растяжением $\tilde{x} = ax$, $\tilde{y} = ay$ с $a = 4(\alpha + 1)^2/\alpha^2$ (соответственно с $a = 16/(1 + \alpha^2)^2$) приводится к нормальной форме, указанной в теореме 7.

Из теоремы 4 следует

Теорема 8. *Росток уравнения $F = 0$ в особой точке этого уравнения хорошо сложенное седло (соответственно узел, фокус) топологически эквивалентен ростку в нуле уравнения $(p - x)^2 = y$ (соответственно $(p + x/9)^2 = y$, $(p + x/4)^2 = y$).*

5. Некоторые приложения. Необходимость исследования дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, возникает например, при изучении сети предельных линий двумерной управляемой системы в окрестности границы крутой области этой системы (см. [2, 7]; утверждение о модулях в последней работе, цитируемое и в [2], неверно), при изучении особенностей асимптотических линий на поверхности (см. [2, 8]). Проиллюстрируем использование полученных результатов в этих двух случаях.

Пловец в потоке жидкости. Эта модель заимствована из [9]. На плоскости пловца поток — $(x, \beta y)$, $\beta > 2$, сносит в нуль. Сам пловец в стоячей воде может плыть в любом направлении с единичной скоростью. Спрашивается, куда он сможет попасть, если он начал плавание из заданной точки плоскости? Неравенство $x^2 + \beta^2 y^2 > 1$ задает *крутую область*, в каждой точке которой направление возможных в этой точке скоростей пловца образует угол, меньший 180°. Стороны этого угла называются *предельными направлениями* в этой точке. Таким образом, в крутой области определено двузначное *поле предельных направлений*. Интегральные кривые этого поля называются предельными линиями. Нетрудно убедиться в том, что эти линии есть в точности фазовые кривые уравнения $(x\,dy - \beta y\,dx)^2\,(x^2 + \beta^2 y^2 - 1) = (x\,dx + \beta y\,dy)^2$. Это уравнение имеет над точкой $(\pm 1, 0)$ хорошо сложенное седло с показателем $(1 - \beta)^{-1}\beta$, над точкой $(0, \pm 1/\beta)$ хорошо сложенный узел с показателем $(\beta - 1)$. Это седло C^∞-нормально, если точка $(1, (1 - \beta)^{-1}\beta)$ — точка типа (M, ν); этот узел C^∞-нормален, если число $\beta - 1$ не натуральное. При выполнении этих условий росток семейства предельных линий в точке $(\pm 1, 0)$ (соответственно $(0, \pm 1/\beta)$) C^∞-диффеоморфен ростку в нуле семейства кривых (2а) при $\alpha = (1 - \beta)^{-1}\beta$ (соответственно (3а) при $\alpha = \beta - 1$). Этот пример иллюстрирует рис. 4, символика которого отличается от символики предыдущих рисунков тонкой двойной линией — границей крутой области, жирной линией — границей множества точек, достижимых из точки S. Эта граница состоит из кусков предельных линий и имеет особенности (т. е. негладка) в точке S и в точках $(0, \pm 1/\beta)$.

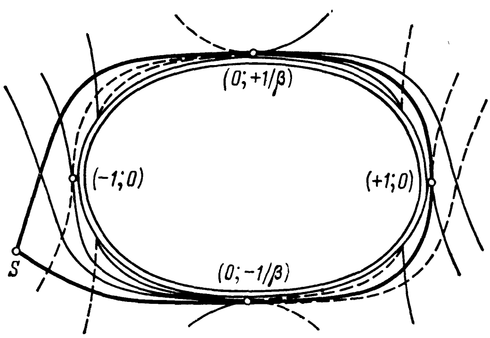

Рис. 4

Аналогичную картину образуют семейства асимптотических линий вблизи отдельных точек на кривой параболических точек поверхности общего положения. На поверхности $z = y^2 + yx^2 + Ax^4 + o((x^2 + y^2)^2)$ нуль — хорошо сложенное седло, узел или фокус сети асимптотических линий при $A < 1/4$, $1/4 < A < 25/96$, $25/96 < A$ соответственно.

6. Эллиптическая и гиперболическая сборки. Покажем, что уравнение $F = 0$ в окрестности эллиптической сборки имеет относительно топологической эквивалентности функциональные модули (в гиперболическом случае рассуждения аналогичны).

Пусть уравнение имеет особую точку эллиптическая сборка в нуле. Поверхность этого уравнения в окрестности нуля задается в подходящих координатах уравнением $x = pf(y, p)$, где f — гладкая функция, $f'_y(0, 0) < 0 = f(0, 0) = f'_p(0, 0) < f''_{pp}(0, 0)$. Рассмотрим возмущенное уравнение $x = p f_1(y, p)$, где f_1 — гладкая функция, совпадающая с f при $(p f(y, p))'_p > 0$. Сравним фазовые портреты этих двух уравнений в окрестности нуля плоскости (x, y). Росток в нуле фазового портрета первоначального уравнения топологически эквивалентен изображенному на рис. 5 (дополнительно к символике рис. 1—3 здесь тонкая двойная линия — образ криминанты, пунктирные линии — проекции частей интегральных кривых уравнения с третьего слоя накрытия).

Возмущенное уравнение имеет те же самые сплошные и штриховые линии и имеет, вообще говоря, другие пунктирные линии. Для того чтобы при гомеоморфизме сохранить семейство кривых этого рисунка, необходимо в секторе $x/2 \leqslant y \leqslant 2x$ делать раздельные гомеоморфизмы по координатам $\tilde{x} = a(x)$, $\tilde{y} = b(y)$ и для сохранения образа криминанты требовать (при x, $y \geqslant 0$) выполнения условий $b(y) = 2a(y/2)$, $a(4x) = 4a(x)$. Следовательно, ограничения всех возможных гомеоморфизмов на сектор $x/2 \leqslant y \leqslant 2x$ определяются монотонными непрерывными отображениями $a: (\mathbf{R}^+, 0) \to (\mathbf{R}^+, 0)$ со свойством $a(4x) = 4a(x)$. Но «испортить» семейство пунктирных линий мы можем на функцию двух переменных. Следовательно, даже относительно топологической эквивалентности уравнение $F = 0$ в окрестности эллиптической сборки имеет функциональные модули.

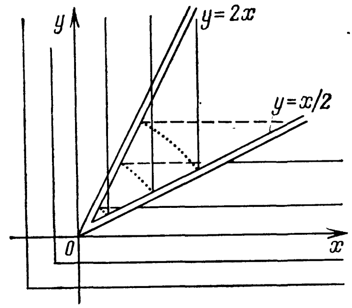

Рис. 5

З а м е ч а н и е. Проведенные рассуждения доказывают в гладком случае гипотезу Брюса. В [10] он, используя результаты [4], показал, что семейство фазовых кривых уравнения $F = 0$ в окрестности проекции собранной особой точки можно получить как образ при проекции на плоскость семейства сечений стандартного ласточкиного хвоста в $\mathbf{R}^3$ поверхностями уровня стандартной функции на $\mathbf{R}^3$. Гипотеза Брюса состоит в том, что возникающий здесь дуэт отображений (проекция, функция) имеет относительно диффеоморфизмов, сохраняющих ласточкин хвост, модули.

7. Вещественно-аналитический случай и случай конечной гладкости. Рассуждения пункта 6 в аналитическом случае не проходят. (Однако, сама гипотеза Брюса, по-видимому, верна и в этом случае.)

Утверждения теорем остаются справедливыми в вещественно-аналитическом случае и в случае конечной, но достаточно большой гладкости (класс C^k, $k \geqslant 3$). В последнем случае нормализующую замену координат можно выбрать класса гладкости C^{k-2}.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 3

1. Доказательство теоремы 1. Нужные для доказательства леммы 1, 2, 3 доказаны ниже в пп. 3, 4, 5. Пусть v — гладкое поле направлений, имеющее в нуле невырожденную особую точку.

Л е м м а 1. *Ростки в нуле двух v-хороших инволюций с одной и той же линией неподвижных точек v-эквивалентны.*

Л е м м а 2. *Ростки в нуле двух гладко вложенных касающихся в нуле кривых v-эквивалентны, если ни одно из собственных направлений поля v в нуле не касается этих кривых в нуле.*

Л е м м а 3. *Два различных направления в нуле v-эквивалентны, если и только если их можно соединить (в пространстве направлений в нуле) непрерывной кривой, не проходящей через собственные направления поля v в нуле.*

Пусть касательные в нуле к линиям неподвижных точек двух v-хороших инволюций можно соединить в пространстве направлений в нуле непрерывной кривой, не проходящей через собственные направления поля v в нуле. Тогда эти касательные v-эквивалентны по лемме 3. Следовательно, ростки в нуле линий неподвижных точек этих инволюций v-эквивалентны по лемме 2. Отсюда и получаем, что ростки в нуле этих двух инволюций v-эквивалентны по лемме 1.

Обратно, если ростки в нуле двух v-хороших инволюций v-эквивалентны, ростки в нуле линий их неподвижных точек и их направления в нуле также v-эквивалентны. Согласно лемме 3, эти направления можно соединить непрерывной кривой, не проходящей через собственные направления поля v в нуле.

2. Доказательство теоремы 3. Для фокуса теорема вытекает из теорем 1, 2. В случае седла (соответственно узла) теорема 3 вытекает из этих же теорем 1, 2 и того факта, что инволюция $(x, y) \mapsto (-x, y)$ переводит семейство фазовых кривых поля (2) (соответственно (3)) в себя, а две компоненты связности теоремы 2 одну в другую.

3. Доказательство леммы 1. *Полем (инфинитезимальной) деформации* инволюции σ называется векторное поле, значение которого в точке $\sigma(\cdot)$ есть скорость движения этой точки при изменении конечной инволюции. Очевидны

Лемма 4. *Векторное поле h является полем инфинитезимальной деформации инволюции σ, если и только если $\sigma_* h = -h$.*

Лемма 5. *Если g — деформация тождественного диффеоморфизма со скоростью h, то инволюция σ деформируется со скоростью $h - \sigma_* h$.*

(При диффеоморфизме g инволюция σ переходит в $g\sigma g^{-1}$.)

Докажем лемму 1. Пусть σ_1, σ_2 — v-хорошие инволюции, имеющие одну и ту же линию неподвижных точек. Возьмем гладкую функцию φ, $\varphi(0) = 0$, имеющую ненулевые производные в нуле по каждому из собственных направлений производной инволюции σ_1 в нуле. Локально в окрестности нуля в координатах $x = \varphi + \overset{*}{\sigma_1}\varphi$, $y = \varphi - \overset{*}{\sigma_1}\varphi$ инволюции σ_1, σ_2 имеют вид: $\sigma_1 : (x, y) \mapsto (x, -y)$; $\sigma_2 : (x, y) \mapsto (x + y^2 r(x, y), -y + y^2 s(x, y))$, где r, s — гладкие функции, так как у σ_1, σ_2 одна и та же линия неподвижных точек, и в силу v-хорошести производные этих инволюций одинаковы на этой линии при малых x, y. Следовательно, существуют координаты $\xi = x + y^2 R(x, y)$, $\eta = y + y^2 S(x, y)$, где R, S — гладкие функции, в которых инволюция σ_2 имеет вид $\sigma_2 : (\xi, \eta) \mapsto (\xi, -\eta)$.

Локально в окрестности нуля рассмотрим гладкую деформацию инволюции σ_1 в σ_2 γ_t: $(\xi_t, \eta_t) \mapsto (\xi_t, -\eta_t)$, где $\xi_t = x + ty^2 R(x, y)$, $\eta_t = y + ty^2 S(x, y)$. Имеем $\gamma_0 = \sigma_1$, $\gamma_1 = \sigma_2$. Обозначим через V_t скорость этой деформации.

Возьмем гладкое векторное поле $\tilde{v}$, задающее наше поле направлений и имеющее в нуле невырожденную особую точку. Лемма 1 будет доказана, если локально в окрестности оси t скорость деформации нам удастся представить в виде

$$V_t = f_t \tilde{v} - (\overset{*}{\gamma_t} f_t)\, \gamma_{t*} \tilde{v}, \tag{7}$$

где f_t — гладко зависящая от t гладкая функция переменных x, y. Покажем, что такое представление действительно имеет место. Разрешимость гомологического уравнения (7) относительно f_t основана на том, что поле $\tilde{v}$ и его образ под действием инволюции γ_t неколлинеарны вне линии неподвижных точек.

Скорость деформации (индекс t у обозначений опустим) V имеет на кривой $y = 0$ $(\eta = 0)$ нуль второго порядка, как нетрудно видеть. В силу леммы 4, $\gamma_* V = -V$. Следовательно,

$$V(\xi, \eta) = \eta^3 p(\xi, \eta^2)\, \partial/\partial\xi + \eta^2 q(\xi, \eta^2)\, \partial/\partial\eta, \tag{8}$$

где p, q — гладкие функции.

На линии неподвижных точек инволюции γ имеем $\gamma_* \tilde{v} = -\tilde{v}$. Следовательно,

$$\tilde{v}(\xi, \eta) = \eta l(\xi, \eta)\, \partial/\partial\xi + m(\xi, \eta)\, \partial/\partial\eta, \tag{9}$$

где l, m — гладкие функции. Представляя f в виде $f(\xi, \eta) = u(\xi, \eta^2) + \eta\omega(\xi, \eta^2)$, где u, w — функции, и подставляя это выражение для f, выражения (8), (9) для V и $\tilde{v}$ в (7), приходим к следующей системе на u, w:

$$\begin{cases} u\eta\,(l(\xi,\eta)+l(\xi,-\eta))+w\eta^2\,(l(\xi,\eta)-l(\xi,-\eta))=\eta^3p\,(\xi,\eta^2);\\ u\,(m(\xi,\eta)+m(\xi,-\eta))+w\eta\,(m(\xi,\eta)-m(\xi,-\eta))=\eta^2q\,(\xi,\eta^2).\end{cases}$$

Сокращая первое из уравнений этой системы на η, мы получим линейную систему на u, w, определитель которой имеет вид $\eta^2\,(4l\,(0,\ 0)\ m'_\eta\,(0,\ 0)+H\,(\xi,\eta^2))$, где H — гладкая функция; $H\,(0,0)=0$, так как нуль — особая точка поля $\tilde{v}$ и, в частности, $m\,(0,0)=0$; $l\,(0,0)\ m'_\eta\,(0,0)\neq 0$, так как эта особая точка невырождена. Учитывая теперь, что правая часть последней системы делится на η^2, получаем, что локально в окрестности оси t существует гладкое решение u, w этой системы. Лемма 1 доказана.

4. Доказательство леммы. 2. Пусть $\tilde{v}$ — векторное поле, задающее наше поле направлений v и имеющее в нуле невырожденную особую точку. Обозначим через g^t — отображение фазового потока этого поля за время t.

Сделаем σ-процесс с центром в нуле. Наши две кривые превратятся в две гладкие кривые, проходящие через одну точку трансверсальной им обоим вклеенной проективной прямой. Векторное поле $\tilde{v}$ продолжается в эту точку регулярно и касается вклеенной прямой. Поэтому время движения вдоль поля от одной из наших кривых по другой — гладкая функция τ точки первой кривой. Искомая v-эквивалентность есть $g^{T(\cdot)}\,(\cdot)$, где T — гладкое продолжение функции τ на плоскость. Лемма 2 доказана.

5. Доказательство леммы 3. Диффеоморфизм, переводящий в себя каждую интегральную кривую поля v, переводит в себя каждый из открытых секторов, на которые пространство направлений в нуле (это одномерное проективное пространство) разбивается собственными направлениями поля v в нуле.

Обратно, два направления из одного сектора поля $\tilde{v}=Ax+\ldots$, имеющего в нуле невырожденную особую точку, переводятся одно в другое отображением e^{At} при подходящем t, а, значит, и одним из преобразований фазового потока поля $\tilde{v}$. Лемма 3 доказана.

§ 4. Доказательство теорем 5, 8

1. Доказательство теоремы 5. Пусть гладкое поле направлений v имеет в нуле невырожденную особую точку и инволюция σ — v-хорошая. Локально в окрестности нуля систему координат x, y с центром в нуле выберем так, что в этой системе координат σ: $(x,\ y)\mapsto(x,\ -y)$. Пусть $\tilde{v}\,(x,\ y)=(yA\ (x,y^2)+y^2B\ (x,\ y^2),\ C\ (x,\ y^2)+yD\,(x,y^2))$ — гладкое векторное поле, задающее наше поле направлений и имеющее в нуле невырожденную особую точку. Локально в окрестности нуля плоскости $(\xi,\ \eta)$ дифференциальное уравнение семейства образов интегральных кривых поля v при отображении $(x,\ y)\mapsto(\xi=x,\ \eta=y^2)$ удовлетворяет требованиям теоремы. Это уравнение имеет вид

$$(A\ (\xi,\ \eta)\ d\eta/d\xi-2C\ (\xi,\ \eta))^2=\eta\ (2D\ (\xi,\ \ \eta)-B\ (\xi,\ \eta)\ d\eta/d\xi)^2.$$

Теорема 5 доказана.

2. Доказательство теоремы 8 (для седла; для узла и фокуса рассуждения аналогичны). Хотя теорема 8 и следует из теоремы 4, мы докажем ее отдельно; теорема 4 непосредственно вытекает из теорем 5, 8.

Сперва рассмотрим особую точку нормальное хорошо сложенное седло с показателем β. Не нарушая общности, считаем, что мы имеем дело с семейством кривых (2а) при $\alpha=\beta$. Пусть $C_1\,(x,\ y)$, $C_2\,(x,\ y)$ — номера фазовых кривых этого семейства, проходящих через точку $(x,\ y)$, $y\geqslant 0$ $(C_1\,(x,\ y)=(x/\beta+\sqrt{y})\,|\,x+\sqrt{y}\,|^{-\beta},\ C_2\,(x,\ \ y)=(x/\beta-\sqrt{y})\,|\,x-\sqrt{y}\,|^{-\beta})$. Определим непрерывное отображение φ_β плоскости $(x,\ y)$ на плоскость $(C_1,\ C_2)$,

φ_β: $(x,\ y) \mapsto (C_1(x,\ |y|)\operatorname{sgn}(x+\sqrt{|y|}),\ C_2(x,\ |y|)\operatorname{sgn}(x-\sqrt{|y|}))$. Это отображение гомеоморфно переводит замыкание первого (четвертого) квадранта на множество $C_1 \geqslant C_2$, а замыкание второго (третьего) квадранта на множество $C_1 \leqslant C_2$. Следовательно, отображение Φ_β, заданное формулой $\Phi_\beta = \varphi_{-2}^{-1} \circ \varphi_\beta$ на замыкании каждого из квадрантов, есть гомеоморфизм плоскости. Из определения φ_β следует, что этот гомеоморфизм отображает семейство кривых (2а) при $\alpha = \beta$ в это же семейство при $\alpha = -2$.

Чтобы построить аналогичный переводящий гомеоморфизм для произвольной особой точки хорошо сложенное седло с показателем β, нужно в окрестности нуля подходящим образом перенумеровать фазовые кривые. Гладкую систему координат на плоскости $(x,\ y)$ возьмем так, чтобы образ ростка в изучаемой особой точке поверхности уравнения $F = 0$ (соответственно замыкания объединения сепаратрис изучаемого седла) при складывании этого уравнения совпадал с ростком в нуле множества $y \geqslant 0$ (соответственно $(y = x^2) \bigcup (y = x^2/\beta^2)$). Образу при складывании этого уравнения сепаратрисы изучаемого седла присваиваем номер $C = 0$; фазовой кривой, проходящей через точку $(x,\ 0)$ при малом x, присваиваем номер $C = x\,|\,x\,|^{-\beta}/\beta$; через точку $(0,\ y)$ при малом $y > 0$ проходят две фазовые кривые: фазовой кривой проходящей через эту точку с большим (соответственно с меньшим) углом наклона к оси иксов присваиваем номер $C = -y^{(1-\beta)/2}$ (соответственно $C = y^{(1-\beta)/2}$). Теперь отображение Φ_β определяется локально в окрестности нуля точно так же, как и в случае нормального хорошо сложенного седла. Это отображение переводит росток в нуле семейства фазовых кривых нашего уравнения в росток в нуле семейства кривых (2а) при $\alpha = -2$. Теорема 8 доказана.

З а м е ч а н и е. После сдачи статьи в печать автору стали известны работы Чибрарио, А. В. Пхакадзе, А. А. Шестакова, П. В. Соколова и А. Г. Кузьмина на близкую тему; их обзор см. в [11].

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: Знание. Сер. мат., кибернетика, 1981, № 9.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
4. *Arnold V. I.* Wavefront evolution and equivariant Morse lemme.— Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, № 6, p. 557—582.
5. *Dara L.* Singularities generiques des equations differentielles multiformes.— Bol. Soc Bras. Math., 1975, v. 6, № 2, p. 95—129.
6. *Thom R.* Sur les equations differentielles multiforms et leur integrales singulieres.— Th. R. Bol. Soc. Bras. Math., 1971, v. 3, № 1, p. 1—11.
7. *Давыдов А. А.* Особенности границы достижимости в двумерных управляемых систе мах.— УМН, 1982, т. 37, вып. 3, с. 183—184.
8. *Ландис Е. Е.* Тангенциальные особенности.— Функцион. анализ и его прил., 1981 т. 15, вып. 2, с. 36—49.
9. *Мышкис А. Д.* О дифференциальных неравенствах с локально ограниченными про изводными.— Зап. мех.-мат. ф-та и Харьковского мат. о-ва, 1964, т. 30, с. 152—163
10. *Bruce I. W.* A note on first order differential equations on degree greater than one an wavefront evolution.— Bull. London Math. Soc., 1983.
11. *Кузьмин А. Г.* О поведении характеристик уравнения смешанного типа вблизи линиı вырождения. Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 11, с. 2052—2063.

Владимирский политехнический институт

Поступило в редакцию 6 июня 1984 г