



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. G. Drinfeld, Degenerate affine Hecke algebras and Yangians, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1986, Volume 20, Issue 1, 69–70

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.138.125.86

November 27, 2024, 09:32:05



ВЫРОЖДЕННЫЕ АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ГЕККЕ И ЯНГИАНЫ

В. Г. Дринфельд

1. В работе [1] в связи с исследованием квантового уравнения Янга — Бакстера введен новый класс алгебр Хопфа — *янгианы*. Если \mathfrak{a} — конечномерная простая алгебра Ли над \mathbb{C} , а $c_{\lambda\mu\nu}$ — структурные константы \mathfrak{a} в базисе $\{I_\lambda\}$, ортонормированном относительно некоторого инвариантного скалярного произведения, то *янгиан* \mathfrak{a} (обозначаемый $Y(\mathfrak{a})$) порождается как ассоциативная алгебра с единицей, алгеброй \mathfrak{a} и образующими J_λ с определяющими соотношениями $[J_\lambda, J_\mu] = c_{\lambda\mu\nu} J_\nu$, $[J_\lambda, [J_\mu, J_\nu]] - [J_\lambda, [J_\mu, J_\nu]] = a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma} \{I_\alpha, I_\beta, I_\gamma\}$, $[[J_\lambda, J_\mu], [I_r, J_s]] + [[J_r, J_s], [J_\lambda, J_\mu]] = (a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma} c_{rsv} + a_{r\nu\alpha\beta\gamma} c_{\lambda\mu\nu}) \{I_\alpha, I_\beta, I_\gamma\}$, где

$$a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{24} c_{\lambda\alpha i} c_{\mu\beta j} c_{\nu\gamma k} c_{ijk}, \quad \{x_1, x_2, x_3\} = \sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k.$$

Коумножение $\Delta: Y(\mathfrak{a}) \rightarrow Y(\mathfrak{a}) \otimes Y(\mathfrak{a})$ имеет вид $\Delta(I_\lambda) = I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda$, $\Delta(J_\lambda) = J_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes J_\lambda + \frac{1}{2} c_{\lambda\mu\nu} I_\nu \otimes I_\mu$. Изучение конечномерных неприводимых представлений $Y(\mathfrak{a})$ представляет большой интерес, так как каждому такому представлению соответствует квантовая R -матрица [1].

Пусть теперь $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(N)$, \mathfrak{a} в качестве скалярного произведения в \mathfrak{a} взято $\text{Tr}(XY)$. Приведем аналог для $Y(\mathfrak{sl}(N))$ теоремы Г. Вейля о связи между представлениями $\mathfrak{sl}(N)$ и S_m . Роль S_m играет при этом алгебра Λ_m , порожденная групповой алгеброй $\mathbb{C}[S_m]$ и элементами y_1, \dots, y_m с определяющими соотношениями $gy_i = y_g i g$, $g \in S_m$, и

$$[y_i, y_j] = \frac{1}{4} \sum_{k \neq i, j} ((i, j, k) - (j, i, k)). \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем символы (i, j, k) , (j, k) и т. п. обозначают циклы в S_m . Положим $W = (\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$. Скажем, что представление $Y(\mathfrak{sl}(N))$ имеет вес m , если его ограничение на $\mathfrak{sl}(N)$ — сумма неприводимых представлений, каждое из которых входит в W . Определим $\rho_i: \mathfrak{sl}(N) \rightarrow \text{End } W$ формулой $\rho_i(I_\mu) x_1 \otimes \dots \otimes x_m = x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes I_\mu x_i \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_m$.

Т е о р е м а 1. 1) Пусть M — модуль над Λ_m , $V_M = M \otimes_{S_m} W$. Тогда существует

гомоморфизм $\pi: Y(\mathfrak{sl}(N)) \rightarrow \text{End } V_M$ такой, что $\pi(I_\mu)(x \otimes w) = x \otimes \sum_{i=1}^m \rho_i(I_\mu) w$,

$\pi(J_\mu)(x \otimes w) = \sum_{i=1}^m y_i x \otimes \rho_i(I_\mu) w$ при $x \in M$, $w \in W$. При $N > t$ функтор $M \mapsto V_M$

является эквивалентностью между категорией Λ_m -модулей и категорией представлений $Y(\mathfrak{sl}(N))$ веса m .

2) Для любых l, m существует гомоморфизм $i_{l,m}: \Lambda_l \otimes \Lambda_m \rightarrow \Lambda_{l+m}$, индуцирующий естественное вложение $S_l \times S_m \rightarrow S_{l+m}$ и такой, что

$$y_j \otimes 1 \mapsto y_j + \frac{1}{2} \sum_{k=l+1}^{l+m} (j, k), \quad 1 \otimes y_j \mapsto y_{j+l} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l (j, k).$$

Если P и Q — модули над Λ_l и Λ_m соответственно, а M — модуль над Λ_{l+m} , индуцированный модулем $P \otimes Q$ с помощью $i_{l,m}$, то $Y(\mathfrak{sl}(N))$ -модуль V_M канонически изоморфен $V_P \otimes V_Q$ (структура $Y(\mathfrak{sl}(N))$ -модуля в $V_P \otimes V_Q$ вводится с помощью Λ).

Положим $u_k = y_k - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \text{sgn}(k-l) \cdot (k, l)$. Тогда $[u_i, u_j] = 0$. Кроме того, если

положить $s_k = (k, k+1) \in S_m$, то $u_k s_k = s_k u_{k+1} + 1$, $u_{k+1} s_k = s_k u_k - 1$, $u_j s_k = s_k u_j$ при $j \neq k, k+1$. При этом $i_{l,m}(u_k \otimes 1) = u_k$, $i_{l,m}(1 \otimes u_k) = u_{k+l}$.

2. Обозначим через \mathcal{H}_m алгебру Гекке группы $\text{GL}(m, \mathbb{Q}_p)$ по отношению к подгруппе $\Gamma_0(p) = \{a_{ij} \in \text{GL}(m, \mathbb{Z}_p) \mid a_{ij} \in p\mathbb{Z}_p \text{ при } i > j\}$. И. Н. Бернштейн и А. В. Зелевинский доказали (см. [3, 4]), что \mathcal{H}_m порождается алгеброй $\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_m, x_m^{-1}]$ и обра-

вующими $T_k, 1 \leq k \leq m-1$, с определяющими соотношениями $(T_k - p)(T_k + 1) = 0, T_k T_{k+1} T_k = T_{k+1} T_k T_{k+1}, T_k T_j = T_j T_k$ при $|k - j| > 1, x_k T_k = T_k x_{k+1} - (p-1)x_{k+1}, x_{k+1} T_k = T_k x_k + (p-1)x_{k+1}, x_j T_k = T_k x_j$ при $j \neq k, k+1$. Если положить $x_k = 1 - (p-1)u_k$, разделить каждое соотношение на максимально возможную степень $p-1$, а затем формально положить $p=1$, то получится Λ_m . Поэтому из теоремы 1 и известных утверждений о связи между представлениями \mathcal{H}_m и представлениями $GL(m, \mathbb{Q}_p)$ (см. [2, 5, 6]) вытекает следующая система аналогий: конечномерные представления $Y(\mathfrak{sl}(N))$ веса m аналогичны слабо разветвленным допустимым представлениям $GL(m, \mathbb{Q}_p)$; «скручивание» представления $GL(m, \mathbb{Q}_p)$ с помощью неразветвленного квазихарактера \mathbb{Q}_p^* аналогично «скручиванию» представления $Y(\mathfrak{sl}(N))$ с помощью автоморфизма $I_\mu \mapsto I_\mu, J_\mu \mapsto J_\mu + aI_\mu, a \in \mathbb{C}$; тензорное произведение представлений $Y(\mathfrak{sl}(N))$ аналогично параболическому индуцированию; квантовая R -матрица аналогична стандартному сплетающему оператору между двумя представлениями $GL(l+m, \mathbb{Q}_p)$, полученными параболическим индуцированием из представлений $GL(l, \mathbb{Q}_p)$ и $GL(m, \mathbb{Q}_p)$.

Поскольку приведенное выше описание \mathcal{H}_m обобщено И. Н. Бернштейном на произвольные расщепимые полурешетчатые алгебраические группы над \mathbb{Q}_p (см. [3, 4]), то и конструкция вырождения \mathcal{H}_m обобщается на алгебры Гекке, соответствующие произвольным аффинным группам Вейля. Однако в общем случае неясно, что играет роль $Y(\mathfrak{sl}(N))$.

3. Существует гомоморфизм $f: \Lambda_m \rightarrow \mathbb{C}[S_m]$, тождественный на S_m и такой, что $v_k \mapsto \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (k, j)$ (f тесно связан с гомоморфизмом $Y(\mathfrak{sl}(N)) \rightarrow U\mathfrak{sl}(N)$, построенным в те-

реме 9 работы [1]). Автор не знает, можно ли получить f как предел при $p \rightarrow 1$ некоторого гомоморфизма из \mathcal{H}_m в алгебру Гекке группы S_m .

4. Пусть ρ — представление конечной группы G в векторном пространстве V над \mathbb{C} , и пусть на V заданы кососимметричные билинейные формы $a_g, g \in G$. Рассмотрим алгебру A , порожденную алгеброй $\mathbb{C}[G]$ и пространством V с определяющими соотношениями $gv g^{-1} = \rho(g)v, g \in G, v \in V$, а также $[v_1, v_2] = \sum_{g \in G} a_g(v_1, v_2) \cdot g, v_1, v_2 \in V$. Любой элемент

A представим в виде $\sum_{g \in G} g \cdot \phi(b_g), b_g \in \text{Sym}^* V$, где ϕ — естественное отображение $\text{Sym}^* V \rightarrow A$.

Скажем, что набор $\{a_g\}$ допустим, если такое представление единственно. Нетрудно показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $a_{hg^{-1}}(\rho(h)v_1, \rho(h)v_2) = a_g(v_1, v_2)$ и чтобы из неравенств $\rho(g) \neq \text{id}, a_g \neq 0$ следовало, что $\text{Ker } a_g = V^g$ и $\text{Codim } V^g = 2$, где $V^g = \{v \in V \mid \rho(g)v = v\}$. В частности, если $G = S_m, a, \rho$ — стандартное представление S_m в \mathbb{C}^m , то допустимый набор $\{a_g\}$ единствен с точностью до пропорциональности и дается формулой (1). Если G — конечная группа Кокстера, а σ — ее естественное представление, то размерность пространства допустимых наборов $\{a_g\}$ равна $\sum_L \max(0, [1/2(n(L) - 1)])$,

где L пробегает множество классов G -эквивалентности подпространств коразмерности 2 в V , а $n(L)$ — число, зеркал, содержащих L .

Результаты [7] и настоящей статьи позволяют надеяться, что аналогично связи между Λ_m и $Y(\mathfrak{sl}(N))$ существует связь между \mathcal{H}_m и квантованными аффинными алгебрами Каца—Мури типа A_n^1 (квантованные алгебры Каца—Мури введены независимо в [8 и 1]).

Автор благодарит А. В. Зелевинского за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дринфельд В. Г. — ДАН СССР, 1985, т. 283, № 5, с. 1060—1064.
2. Бернштейн И. Н., Зелевинский А. В. — УМН, 1976, т. 31, вып. 3, с. 5—70.
3. Rogawski J. D. — Invent. Math., 1985, v. 79, p. 443—465.
4. Lusztig G. — Trans. Amer. Math. Soc., 1983, v. 277, p. 623—653.
5. Borel A. — Invent. Math., 1976, v. 35, p. 233—259.
6. Matsumoto H. — Analyse harmonique dans les systemes de Tits bornologiques de type affine. — Lect. Notes Math., 1977, v. 590.
7. Jimbo M. — RIMS Preprint № 517, Kyoto Univ., 1985.
8. Jimbo M. — Lett. Math. Phys., 1985, v. 10, p. 63—69.