L. L. Maksimova, Definability in Normal Extensions of S4, *Algebra Logika*, 2004, Volume 43, Number 4, 387–410

Алгебра и логика, 43, N 4 (2004), 387—410

УДК 510.64

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В НОРМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ЛОГИКИ S4*)

Л. Л. МАКСИМОВА

Теорема Бета о неявной определимости [1] послужила источником большого числа исследований, посвященных соотношениям между неявной и явной определимостью в различных теориях [2]. Взаимосвязи между различными вариантами свойства Бета и интерполяционного свойства широко изучались (см., напр., [2—5]).

В [6] были рассмотрены две версии PB1 и PB2 проективного свойства Бета и доказано, что в нормальных модальных логиках свойство PB1 эквивалентно интерполяционному свойству Крейга CIP. В настоящей статье подробно рассмотрим более слабое свойство PB2 в семействе NE(S4) нормальных расширений модальной логики S4. Ранее было установлено, что PB2 следует из интерполяционного свойства IPD; здесь мы докажем, что обратное неверно. Мы отметим сходство и различие между модальными и суперинтуиционистскими логиками по отношению к свойству PB2 и применим результаты, относящиеся к PB2 в суперинтуиционистских логиках [7, 8], для исследования PB2 в NE(S4). Мы докажем, что для любого локально табличного расширения L логики Гжегорчика Grz логика L имеет PB2 тогда и только тогда, когда ее интуиционистский фрагмент имеет проективное свойство Бета. Однако это не имеет места для логик из NE(Grz), не являющихся локально табличными. Например, логика Grz.3

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 03-06-80178.

не имеет PB2, хотя ее интуиционистский фрагмент имеет CIP и, как следствие, PB2. Как было доказано ранее [6], PB2 в нормальной модальной логике равносильно свойству сильной сюръективности эпиморфизмов соответствующего многообразия модальных алгебр. Таким образом, можно переписать все результаты, относящиеся к PB2, в алгебраических терминах. В частности, в многообразиях топобулевых алгебр свойство амальгамируемости имплицирует сильную сюръективность эпиморфизмов, но не эквивалентно ей.

В этой статье мы получим удобный критерий справедливости проективного свойства Бета PB2 в нормальных расширениях модальной логики K4, близкий аналогичному критерию для суперинтуиционистских логик, который используем для исследования семейства расширений модальной логики S4. Известно, что любой модальной логике, содержащей модальную логику S4, соответствует ее интуиционистский фрагмент, представляющий собой суперинтуиционистскую логику. Любой суперинтуиционистской логике соответствует класс ее модальных напарников — нормальных расширений логики S4, имеющих исходную логику своим интуиционистским фрагментом. Указанный класс всегда имеет наименьший и наибольший элементы, причем наибольший является расширением логики Гжегорчика Grz. В [9] показано, что свойство PB2 сохраняется при переходе от расширений логики S4 к их интуиционистским фрагментам. Здесь же докажем существование суперинтуиционистских логик, обладающих свойством PB2, но не имеющих модальных напарников со свойством PB2.

С помощью найденного в статье критерия мы докажем, что число расширений логики Гжегорчика со свойством PB2 не превосходит 13. Используя описание всех суперинтуиционистских логик с проективным свойством Бета, полученное в [8], мы найдем все локально табличные расширения логики Гжегорчика со свойством PB2.

§ 1. Определения

Если $\mathbf{p}$ — список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначается формула, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ — множество всех таких формул. Пусть L — логика, $\vdash_L$ — отношение выводимости в L. Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ — попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие x и y, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ имеют одинаковую длину, $A(\mathbf{p},\mathbf{q},x)$ — формула. Говорим, что логика L обладает *проективным свойством Бета* PB1, если из $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q},x)\,\&\,A(\mathbf{p},\mathbf{q}',y) \to (x \leftrightarrow y)$ следует $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q},x) \to (x \leftrightarrow B(\mathbf{p}))$ для некоторой формулы $B(\mathbf{p})$. Далее, L обладает *проективным свойством Бета* PB2, если из $A(\mathbf{p},\mathbf{q},x), A(\mathbf{p},\mathbf{q}',y) \vdash_L x \leftrightarrow y$ следует $A(\mathbf{p},\mathbf{q},x) \vdash_L x \leftrightarrow B(\mathbf{p})$ для некоторой формулы $B(\mathbf{p})$; L обладает *свойством Бета* B1, если из $\vdash_L A(\mathbf{p},x)\,\&\,A(\mathbf{p},y) \to (x \leftrightarrow y)$ следует $\vdash_L A(\mathbf{p},x) \to (x \leftrightarrow B(\mathbf{p}))$ для подходящей формулы $B(\mathbf{p})$; L обладает *свойством Бета* B2, если из $A(\mathbf{p},x), A(\mathbf{p},y) \vdash_L x \leftrightarrow y$ следует $A(\mathbf{p},x) \vdash_L x \leftrightarrow B(\mathbf{p})$ для некоторой формулы $B(\mathbf{p})$.

Очевидно, что B1 является частным случаем PB1, а B2 — частным случаем PB2.

Свойства Бета тесно связаны с *интерполяционными свойствами*

CIP: если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$;

IPD: если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ и $C(\mathbf{p}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$
(где списки $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ попарно не пересекаются).

Известно, что CIP влечет IPD во всех нормальных модальных логиках; кроме того, из IPD следует PB2 в нормальных расширениях логики K4 (см. [6]). Свойства B1 и PB1 эквивалентны CIP, а B2 выполняется для всех расширений логики K4 (см. [5]).

Наиболее известные модальные логики, такие как системы Льюиса S4 и S5, логика Гжегорчика Grz, логика доказуемости Геделя–Леба GL, логика K4 и минимальная нормальная модальная логика K, обладают свойством CIP, а следовательно, всеми остальными вышеупомянутыми свойствами. При этом предполагается, что в языке присутствует хотя бы одна пропозициональная константа $\top$ (”истина“) или $\bot$ (”ложь“). В противном случае легко было бы опровергнуть свойство B1, так как формула $y\,\&\,z \to (y \leftrightarrow z)$ доказуема во всех этих системах, но нет такой формулы

B без переменных, чтобы была доказуема формула $y \to (y \leftrightarrow B)$.

Под *нормальной модальной логикой* мы понимаем множество модальных формул, содержащее все тавтологии классической пропозициональной логики и аксиомы вида $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, а также замкнутое относительно правил R1: $A, A \to B/B$; R2: $A/\Box A$ и правила подстановки. Если L — нормальная модальная логика, через $\vdash_L$ обозначается отношение выводимости в L посредством правил R1 и R2; через K — минимальная нормальная модальная логика. Множество нормальных модальных логик, содержащих данную нормальную модальную логику L, обозначим через $\mathrm{NE}(L)$. Напомним некоторые стандартные обозначения логик из NE(K):

$\mathrm{K4} = \mathrm{K} + (\Box p \to \Box\Box p)$,

$\mathrm{S4} = \mathrm{K4} + (\Box p \to p)$,

$\mathrm{S5} = \mathrm{S4} + (p \to \Box\Diamond p)$,

$\mathrm{S4.1} = \mathrm{S4} + (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p)$,

$\mathrm{S4.2} = \mathrm{S4} + (\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p)$,

$\mathrm{S4.1.2} = \mathrm{S4} + (\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box p)$,

$\mathrm{S4.3} = \mathrm{S4} + \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$;

$\mathrm{Grz} = \mathrm{S4} + (\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p)$;

$\mathrm{Grz.2} = \mathrm{Grz} + \mathrm{S4.2}$ и т. д.

Определяем $[*]A = A \,\&\, \Box A$.

Известно, что в нормальных расширениях логики K4 справедливы следующие леммы.

ЛЕММА 1.1 (о дедукции)**.** *Для любых L из* NE(K4), *множества формул Γ и формул A, B выполняются следующие условия*:

а) *если* $\Gamma, A \vdash_L B$, *то* $\Gamma \vdash_L [*]A \to B$;

б) $\Gamma \vdash_L A$ *в том и только том случае, если существуют формулы* $A_1, \dots, A_k$ *из* Γ *такие, что* $L \vdash ([*]A_1 \,\&\, \dots \,\&\, [*]A_k) \to A$.

ЛЕММА 1.2. *В* K4 *для всех* $n, m \geqslant 0$ *доказуемы следующие формулы*:

а) $\Box(A \,\&\, B) \leftrightarrow (\Box A \,\&\, \Box B)$, б) $[*](A \mathbin{\&} B) \leftrightarrow ([*]A \mathbin{\&} [*]B)$,

в) $[*][*]A \leftrightarrow [*]A$.

В [10] было замечено, что свойства CIP и IPD сохраняются при переходе от модальной логики L к ее расширениям, аксиоматизируемым L-консервативными формулами. Формула $A(p)$ от одной переменной p называется *L-консервативной*, если она удовлетворяет условию

$A(\bot),\ A(p_1), \ldots, A(p_n) \vdash_L B(p_1, \ldots, p_n)$ для любой формулы $B(p_1, \ldots, p_n)$.

В случае модальных логик это условие сводится к совокупности двух условий:

$$A(\bot), A(p), A(q) \vdash_L A(p \to q), \quad A(\bot), A(p) \vdash_L A(\Box p).$$

Имеет место

ЛЕММА 1.3. *Если* $L \in \mathrm{NE(K)}$ *имеет* CIP, IPD, B2 *или* PB2, Ax *— любое множество L-консервативных формул, то* $L + Ax$ *тоже обладает тем же свойством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для CIP утверждение доказано в [10]. Доказательство для остальных свойств аналогично и основывается на сведении $L + Ax$ к L. Мы рассмотрим здесь лишь свойство PB2 для случая, когда множество Ax содержит одну формулу $A(p)$. Тогда

$$\vdash_{L+Ax} B(p_1, \ldots, p_n) \Leftrightarrow A(\bot),\ A(p_1),\ \ldots,\ A(p_n) \vdash_L B(p_1, \ldots, p_n).$$

Пусть L имеет PB2, а $A = A(p)$ — L-консервативная формула, и

$$B(p, q, x),\ B(p, q', y) \vdash_{L+Ax} x \leftrightarrow y.$$

Тогда

$$A(\bot),\ A(p),\ A(q),\ A(x),\ A(q'),\ A(y),\ B(p, q, x),\ B(p, q', y) \vdash_L x \leftrightarrow y.$$

Так как L имеет PB2, существует формула $C(p)$ такая, что

$$A(\bot),\ A(p),\ A(q),\ A(x),\ B(p, q, x) \vdash_L x \leftrightarrow C(p).$$

Поэтому

$$B(p,q,x) \vdash_{L+Ax} x \leftrightarrow C(p),$$

что и требовалось.

Отсюда вытекает

ЛЕММА 1.4. *Если* $L \in$ NE(S4) *имеет* CIP, IPD *или* PB2, *то* $L +$ $+$ S4.1 *и* S4.1.2 *обладают тем же свойством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что аксиомы логик S4.1 и S4.1.2, а именно, формулы $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ и $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box p$ являются S4-консервативными. Поэтому утверждение следует из леммы 1.3.

§ 2. Свойство PB2 в L и в $\rho(L)$

Хорошо известно [11], что существует перевод T из Int в S4. Каждой логике L из NE(S4) можно поставить в соответствие ее *интуиционистский фрагмент* $\rho(L) = \{A \mid T(A) \in L\}$; напомним, что L называется *модальным напарником* логики $\rho(L)$. Для любой суперинтуиционистской логики L множество $\rho^{-1}(L)$ ее модальных напарников имеет наименьший $\tau(L) = \mathrm{S4} + T(L)$ и наибольший $\sigma(L)$ элементы. Более того, $\sigma(L) = \mathrm{Grz} + T(L)$ является изоморфизмом из NE(Grz) на семейство суперинтуиционистских логик [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть* $L \in$ NE(S4). *Если* L *имеет* PB2, *то ее интуиционистский фрагмент* $\rho(L)$ *также имеет* PB2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО содержится в [9, предлож. 4.1].

В [8] были описаны все суперинтуиционистские логики со свойством PB2. Оказалось, что существуют в точности шестнадцать суперинтуиционистских логик со свойством PB2, причем все они конечно аксиоматизируемы и финитно аппроксимируемы. Отсюда сразу вытекает, что в NE(Grz) существует не более шестнадцати логик с PB2. Ниже станет видно, что это число можно уменьшить до тринадцати.

С другой стороны, мы докажем свойство PB2 для двенадцати логик из NE(Grz), а именно, для Grz и Grz.2, а также для десяти локально табличных расширений логики Grz, которые являются модальными напарниками суперинтуиционистских логик с PB2.

Положим

$$\sigma_0 = \bot, \quad \sigma_{n+1} = \Box(\Box p_{n+1} \vee \Box(\Box p_{n+1} \to \sigma_n)).$$

Говорим, что логика $L \in$ NE(S4) является *логикой слоя* $\mathcal{S}_n$ если $L \vdash \sigma_n$ и $L \nvdash \sigma_{n-1}$. Логика из NE(S4) является локально табличной в том и только том случае, если это логика некоторого конечного слоя (см., напр., [13]). С другой стороны, $L \in$ NE(S4) является бесконечнослойной тогда и только тогда, когда $L \subseteq \mathrm{Grz.3} = \mathrm{Grz} + \Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p)$.

Эта классификация тесно связана с классификацией суперинтуиционистских логик, построенной в [14]. Для любой $L \in$ NE(S4) модальная логика L является логикой слоя $\mathcal{S}_n$ тогда и только тогда, когда $\rho(L)$ — суперинтуиционистская логика n-го слоя.

Из [13, предлож. 4.1] вытекает следующая

ЛЕММА 2.2. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо* $\mathrm{Grz} + \sigma_n \vdash x \leftrightarrow \leftrightarrow \vee\{\alpha_i \,\&\, \neg\beta_i \mid i > 0, 2i \leqslant n+2\}$, *где* $\beta_1 = \bot$, $\alpha_i = \Box(x \vee \beta_i)$, $\beta_{i+1} = \Box(x \to \alpha_i)$.

Также нам потребуется

ЛЕММА 2.3 [13]**.** *Пусть* D *— модальная формула такая, что перед каждым вхождением переменной имеется* $\Box$. *Тогда существует формула* D' *от тех же переменных и без модальностей такая, что* $\mathrm{S4} \vdash \Box D \leftrightarrow \leftrightarrow T(D')$.

Напомним определение перевода T: $T(p) = \Box p$ для любой попозициональной переменной p, $T(A \,\&\, B) = T(A) \,\&\, T(B)$, $T(A \vee B) = T(A) \vee T(B)$, $T(A \to B) = \Box(T(A) \to T(B))$, $T(\neg A) = \Box\neg T(A)$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть* L *— локально табличное расширение логики* Grz. *Если* $\rho(L)$ *имеет* PB2, *то* L *также имеет* PB2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [8] было доказано, что каждая суперинтуиционистская логика конечного слоя, имеющая проективное свойство Бета, принадлежит слою с некоторым номером n, где $0 \leqslant n \leqslant 3$. Из предложения 2.1 следует, что любое конечнослойное расширение L логики S4, имеющее РВ2, должно принадлежать слою $\mathcal{S}_n$ для некоторого $0 \leqslant n \leqslant 3$. Значит, $L \vdash \sigma_3$. По лемме 2.2 получаем

$$\mathrm{Grz} + \sigma_3 \vdash x \leftrightarrow \Box x \vee (\neg\Box(x \to \Box x) \mathbin{\&} \Box(x \vee \Box(x \to \Box x))). \tag{1}$$

Положим

$$f(z) = \Box z_1 \vee (\neg\Box z_2 \mathbin{\&} \Box z_3). \tag{2}$$

Пусть теперь

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x), A(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \vdash_L x \leftrightarrow y. \tag{3}$$

Подставляя $f(z)$ вместо z для любой переменной z, получаем

$$A(f(\mathbf{p}), f(\mathbf{q}), f(x)), A(f(\mathbf{p}), f(\mathbf{q}'), f(y)) \vdash_L (f(x) \leftrightarrow f(y).$$

Далее выводим

Γ_1, $\Gamma_1' \vdash_L \Box x_1 \leftrightarrow \Box y_1$, где $\Gamma_1 = \Gamma_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, x_1, x_2, x_3)$ — это конъюнкция формул $A(f(\mathbf{p}), f(\mathbf{q}), f(x))$ и $\Box(\Box f(x) \leftrightarrow \Box x_1)$, а $\Gamma_1' = \Gamma_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{q}_1', \mathbf{q}_2', \mathbf{q}_3', y_1, y_2, y_3)$;

Γ_2, $\Gamma_2' \vdash_L \Box x_2 \leftrightarrow \Box y_2$, где $\Gamma_2 = \Gamma_1 \mathbin{\&} \Box(\Box(f(x) \to \Box f(x)) \leftrightarrow \Box x_2)$ и $\Gamma_2' = \Gamma_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{q}_1', \mathbf{q}_2', \mathbf{q}_3', y_1, y_2, y_3)$;

Γ_3, $\Gamma_3' \vdash_L \Box x_3 \leftrightarrow \Box y_3$, где $\Gamma_3 = \Gamma_2 \mathbin{\&} \Box(\Box(f(x) \vee \Box(f(x) \to \Box f(x))) \leftrightarrow \leftrightarrow \Box x_3)$ и $\Gamma_3' = \Gamma_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{q}_1', \mathbf{q}_2', \mathbf{q}_3', y_1, y_2, y_3)$.

По теореме дедукции в нормальных расширениях логики S4 имеем

$$L \vdash \Box(\Box\Gamma_3 \mathbin{\&} \Box\Gamma_3' \to \Box(\Box x_i \leftrightarrow \Box y_i)),\ i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Так как перед всеми вхождениями переменных стоит $\Box$, можно применить лемму 2.3 и заменить (4) на

$$L \vdash \Box(T(\Phi) \mathbin{\&} T(\Phi') \to \Box(T(x_i) \leftrightarrow T(y_i))),\ i = 1, 2, 3, \tag{5}$$

для подходящей формулы Φ такой, что $\mathrm{S4} \vdash \Box\Gamma_3 \leftrightarrow T(\Phi)$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathrm{S4} \vdash T(\Phi) \leftrightarrow \Box A(f(\mathbf{p}), f(\mathbf{q}), f(x)) &\mathbin{\&} \Box(\Box f(x) \leftrightarrow \Box x_1) \\ &\mathbin{\&} \Box(\Box(f(x) \to \Box f(x)) \leftrightarrow \Box x_2) \\ &\mathbin{\&} \Box(\Box(f(x) \vee \Box(f(x) \to \Box f(x))) \leftrightarrow \Box x_3). \end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно,

$$\rho(L) \vdash \Phi \,\&\, \Phi' \to (x_i \leftrightarrow y_i),\ i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Напомним, что по условию $\rho(L)$ имеет РВ2, значит, для $i = 1, 2, 3$ существуют формулы $C_i = C_i(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ такие, что

$$\rho(L) \vdash \Phi \to (x_i \leftrightarrow C_i). \tag{8}$$

Тогда

$$L \vdash T(\Phi) \to (\Box x_i \leftrightarrow T(C_i)),\ i = 1, 2, 3, \tag{9}$$

поэтому

$$L \vdash T(\Phi) \to (f(x) \leftrightarrow (T(C_1) \vee (\neg T(C_2) \,\&\, T(C_3)))). \tag{10}$$

Пусть z — любая переменная из списка $\mathbf{p}, \mathbf{q}, x$. Рассмотрим подстановку $\Box z$ вместо z_1, $\Box(z \to \Box z)$ вместо z_2, $\Box(z \vee \Box(z \to \Box z))$ вместо z_3. По лемме 2.2 для этой подстановки s справедливо

$L \vdash s(f(z)) \leftrightarrow z,$

$L \vdash \Box(\Box s(f(x)) \leftrightarrow \Box s(x_1)),$

$L \vdash \Box(\Box s(f(x) \to \Box f(x)) \leftrightarrow \Box s(x_2)),$

$L \vdash \Box(\Box s(f(x) \vee \Box(f(x) \to \Box f(x))) \leftrightarrow \Box s(x_3)).$

Тогда из (6) по теореме о замене получим

$$L \vdash s(T(\Phi)) \leftrightarrow \Box A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x),$$

а из (10)

$$L \vdash \Box A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x) \to (x \leftrightarrow C(\mathbf{p})),$$

где через $C(\mathbf{p})$ обозначается результат подстановки s в $T(C_1) \vee$ $\vee (\neg T(C_2) \,\&\, T(C_3))$.

В [8] доказано, что в точности десять суперинтуиционистских логик конечных слоев обладают свойством РВ2. В качестве следствия из [8, теор. 7.5] получается

ТЕОРЕМА 2.5. *В* NE(Grz) *существуют в точности десять локально табличных логик со свойством* РВ2. *Они могут быть аксиоматизированы добавлением к* Grz *следующих аксиом:*

1) σ_3,

2) $\sigma_3, \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$,

3) σ_3, $\Box r \vee \Box(\Box r \to \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p) \vee \Box(p \leftrightarrow \Box\neg\Box q))$,

4) σ_3, $\Box r \vee \Box(\Box r \to \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p))$,

5) $\sigma_3, \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$,

6) σ_2,

7) σ_2, $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p) \vee \Box(p \leftrightarrow \Box\neg\Box q)$,

8) $\sigma_2, \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$,

9) $p \to \Box p$,

10) $\bot$.

Напомним, что только пять из этих логик имеют IPD (а также CIP), а именно, логики с номерами 6–10.

В § 5 покажем, что теорема 2.4 в общем случае неверна. А именно, существуют расширения логики Гжегорчика, не обладающие свойством PB2, но имеющие интуиционистский фрагмент со свойством PB2. Более того, укажем суперинтуиционистские логики со свойством PB2, вообще не имеющие модальных напарников с этим свойством.

§ 3. Свойство PB2 и ограниченная амальгамируемость

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между нормальными модальными логиками и многообразиями модальных алгебр. *Модальная алгебра* — это алгебра $\mathbf{A} = (A, \to, \neg, \Box)$, которая является булевой алгеброй относительно $\to$ и $\neg$ и, кроме того, удовлетворяет условиям $\Box\top = \top$ и $\Box(x \to y) \leq \Box x \to \Box y$. Модальная алгебра $\mathbf{A}$ называется *транзитивной*, если в ней выполняется неравенство $\Box x \leq \Box\Box x$, *топобулевой алгеброй*, или *алгеброй замыкания*, если в ней выполняется $\Box x \leq x$; топобулева алгебра, удовлетворяющая условию $x \leq \Box\neg\Box\neg x$, называется *эпистемической*, или *e-алгеброй*. Известно, что минимальная нормальная модальная логика K характеризуется многообразием всех модальных алгебр, логика K4 — многообразием транзитивных алгебр, S4 — многообразием топобулевых алгебр, а S5 — многообразием e-алгебр.

Под *означиванием* в алгебре $\mathbf{A}$, как обычно, понимаем гомоморфизм алгебры формул в алгебру $\mathbf{A}$.

Если A — формула, $\mathbf{A}$ — модальная алгебра, то $\mathbf{A} \models A$ означает, что тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$. Пишем $\mathbf{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$. Полагаем $V(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models L\}$. Любая нормальная модальная логика характеризуется многообразием $V(L)$.

Напомним, что модальная логика L обладает свойством IPD тогда и только тогда, когда многообразие $V(L)$ амальгамируемо; CIP равносильно сверхамальгамируемости многообразия $V(L)$ (см. [5]).

В [9] найден алгебраический эквивалент проективного свойства Бета PB2 в модальных и суперинтуиционистских логиках, а именно, доказана его равносильность свойству SES сильной сюръективности эпиморфизмов соответствующего многообразия. Позднее результат был обобщен на широкий класс алгебраизуемых логик в [16]. Связь между различными вариантами интерполяции и амальгамируемости также распространяется на широкий класс логик [4, 17, 18].

Напомним необходимые определения. Класс V называется *амальгамируемым*, если для любых алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ из V выполняется условие

AP: если $\mathbf{A}$ — общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то существуют $\mathbf{D}$ из V и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Тройка $(\mathbf{D}, \delta, \varepsilon)$ называется *амальгамой* для $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

Говорим, что класс V обладает свойством SAP *сверхамальгамируемости*, если для любых алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ из V выполняется условие AP и, сверх того, в алгебре $\mathbf{D}$

$$\delta(x) \leq \varepsilon(y) \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbf{A})(x \leq z \text{ и } z \leq y),$$

$$\delta(x) \geq \varepsilon(y) \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbf{A})(x \geq z \text{ и } z \geq y).$$

Невырожденная алгебра называется *финитно неразложимой* [5], если она не может быть представлена как конечное подпрямое произведение отличных от нее фактор-алгебр. Транзитивная модальная алгебра финитно неразложима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$[*]x \vee [*]y = \top \Rightarrow (x = \top$ или $y = \top)$, где $[*]x = x \,\&\, \Box x$. Транзитивная алгебра является подпрямо неразложимой тогда и только тогда, когда она имеет *опремум*, т. е. такой элемент $\Omega \neq \top$, что $[*]\Omega = \Omega$ и $[*]x \leq \Omega$ для любого $x \neq \top$; легко видеть, что опремум, если он существует, является единственным.

Говорим, что мономорфизм $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ двух подпрямо неразложимых транзитивных алгебр *сохраняет опремум*, если он отображает опремум алгебры $\mathbf{A}$ в опремум алгебры $\mathbf{B}$. Для класса K определим свойство *ограниченной амальгамируемости*

RAP*: для любых сохраняющих опремум мономорфизмов $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ подпрямо неразложимых алгебр из класса K существуют алгебра $\mathbf{D}$ из K и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$.

Очевидно, что из AP следует RAP* и для любого многообразия K топобулевых алгебр свойство RAP* равносильно следующему:

для любых подпрямо неразложимых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in K$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ и все три алгебры имеют общий опремум, существуют алгебра $\mathbf{D}$ из K и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Легко доказывается

ЛЕММА 3.1. *Для любого многообразия K топобулевых алгебр* RAP* *равносильно следующему свойству*:

для любых сохраняющих опремум мономорфизмов $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ подпрямо неразложимых алгебр из K существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из K и сохраняющие опремум мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$.

Класс алгебр V обладает *свойством сильной сюръективности эпиморфизмов*, если выполняется свойство

SES: для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ из V таких, что $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{B}$, и для любого $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$ существуют алгебра $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $g : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$.

Отметим, что в случае, когда V является многообразием, SES эквивалентно следующему свойству:

для любых алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ из $V(L)$, мономорфизма $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $x \in \in \mathbf{B} - \alpha(\mathbf{A})$ существуют алгебра $\mathbf{C} \in V(L)$ и мономорфизмы $\beta : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, $\gamma : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ такие, что $\beta\alpha = \gamma\alpha$ и $\beta(x) \neq \gamma(x)$.

Это свойство было введено в [6].

ТЕОРЕМА 3.2 [9]**.** *Пусть L — нормальная модальная логика. Она обладает свойством Бета* PB2 *в том и только том случае, если $V(L)$ обладает свойством* SES.

ТЕОРЕМА 3.3 [9]**.** *Для любой нормальной модальной логики L эквивалентны следующие условия*:

1) *L обладает свойством* PB2;

2) *для любых финитно неразложимых, конечно порожденных алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из $V(L)$, мономорфизмов $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ и $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$ если $\neg(\exists z \in \mathbf{A})(x = \beta(z) \,\&\, \gamma(z) = y)$, то существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из $V(L)$ и гомоморфизмы $\delta : \mathbf{B} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{B} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x, y) \neq \varepsilon(x, y)$ и $\delta(\beta(z), \gamma(z)) = \varepsilon(\beta(z), \gamma(z))$ для всех $z \in \mathbf{A}$.*

ТЕОРЕМА 3.4. *Если многообразие транзитивных алгебр имеет свойство* SES, *то оно имеет* RAP*.

Найдем алгебраический эквивалент проективного свойства Бета PB2 в расширениях логики K4. В [11] показано, что существует взаимнооднозначное соответствие между конгруэнциями на модальной алгебре и открытыми фильтрами этой алгебры. Фильтр ∇ называется *открытым*, если он удовлетворяет условию $x \in \nabla \Rightarrow \Box x \in \nabla$. Открытому фильтру ∇ соответствует конгруенция

$$x \sim_{\nabla} y \rightleftharpoons (x \to y) \,\&\, (y \to x) \in \nabla.$$

Обозначаем $\mathbf{A}/\nabla \rightleftharpoons \mathbf{A}/\sim_{\nabla}$. Если Θ — конгруэнция, то $\nabla(\Theta) \rightleftharpoons \{x \mid x\Theta\top\}$ является открытым фильтром, причем $\sim_{\nabla(\Theta)}$ совпадает с Θ.

Открытый фильтр ∇ называется *I-простым*, если он не представим в виде пересечения конечного числа отличных от него открытых фильтров.

В случае транзитивных алгебр это условие равносильно такому: если $([*]x \vee \vee[*]y) \in \nabla$, то $x \in \nabla$ или $y \in \nabla$.

ЛЕММА 3.5 [5]**.** *Для любой транзитивной алгебры* $\mathbf{A}$ *выполняются условия*:

а) $\mathbf{A}$ *финитно неразложима тогда и только тогда, когда единичный фильтр* $\nabla = \{\top\}$ *является* I*-простым, т. е.* $\mathbf{A}$ *вполне связна*;

б) $\mathbf{A}$ *подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *имеет опремум.*

ЛЕММА 3.6 [5]**.** *Для любых транзитивной алгебры* $\mathbf{A}$ *и открытого фильтра* ∇ *на* $\mathbf{A}$ *эквивалентны следующие условия*:

а) *фильтр* ∇ *является* I*-простым,*

б) $\mathbf{A}/\nabla$ *финитно неразложима.*

ЛЕММА 3.7 [19]**.** *Пусть* $\mathbf{A}$ *— транзитивная алгебра,* $a, b \in \mathbf{A}$*,* $a = [*]a$ *и* $b = [*]b$*. Если* $a \not\leq b$*, то существуют подпрямо неразложимая* $\mathbf{C}$ *с опремумом* Ω *и гомоморфизм* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *такой, что* $f(a) = \top$ *и* $f(b) = \Omega$*.*

ЛЕММА 3.8 [19]**.** *Пусть* $\mathbf{A}$ *— подпрямо неразложимая транзитивная алгебра с опремумом* Ω*,* h *— гомоморфизм из* $\mathbf{A}$ *в* $\mathbf{B}$ *такой, что* $h(\Omega) < \top$*. Тогда* h *является мономорфизмом.*

Докажем критерий справедливости проективного свойства Бета в расширениях логики K4.

ТЕОРЕМА 3.9. *Для любой логики* L *из* NE(K4) *эквивалентны следующие условия*:

1) L *обладает проективным свойством Бета*;

2) $V(L)$ *имеет* SES;

3) $V(L)$ *имеет* RAP* *и класс* FI$(V(L))$ *финитно неразложимых алгебр из* $V(L)$ *имеет* SES.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$ справедлива по теореме 3.2. Далее, если $V(L)$ имеет SES, то и FI$(V(L))$ имеет SES. По теореме 3.4 получаем $2 \Rightarrow 3$.

$3 \Rightarrow 1$. Покажем, что из условия 3 вытекает условие 2 теоремы 3.3. Так как $V(L)$ — многообразие, достаточно показать это для случая, когда β, γ — тождественные мономорфизмы. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — финитно неразложимые алгебры из $V(L)$, $\mathbf{A}$ — общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$, причем $\neg(\exists z \in \mathbf{A})(b = z$ и $z = c)$. Возможны три случая.

(i) $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Так как $\mathrm{FI}(V(L))$ имеет SES, существуют $\mathbf{D} \in V(L)$ и гомоморфизмы $g, h : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$. Для $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$ полагаем

$$\delta(x, y) = g(x), \quad \varepsilon(x, y) = h(x).$$

Очевидно, $\delta(b, c) \neq \varepsilon(b, c)$ и $\delta(z, z) = \varepsilon(z, z)$ для всех z из $\mathbf{A}$.

(ii) $c \in \mathbf{C} - \mathbf{A}$. Аналогично случаю (i).

(iii) $b, c \in \mathbf{A}$. В этом случае $b \neq c$, тогда $d = [*](b \leftrightarrow c) \neq \top$, и по лемме Цорна существует открытый фильтр Φ на $\mathbf{B}$, максимальный среди открытых фильтров, не содержащих d. Тогда Φ является I-простым и d/Φ — опремум в $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$. Множество $\Phi_0 = \Phi \cap \mathbf{A}$ снова не содержит d, и можно расширить его до максимального открытого фильтра Ψ на $\mathbf{C}$, не содержащего d.

Покажем, что

$$\Phi \cap \mathbf{A} = \Psi \cap \mathbf{A}. \tag{11}$$

Допустим, что, напротив, существует $a \in (\Psi \cap \mathbf{A}) - \Phi_0$. Тогда $[*]a \notin \Phi$. Поскольку Φ максимальный, найдется $y \in \Phi$ такой, что $[*]y \,\&\, [*]a \leq d$. Отсюда $[*]y \leq [*]a \to d$, $[*]a \to d \in \Phi$ и $[*]a \to d \in \Phi \cap \mathbf{A} \subseteq \Psi$. Получаем $[*]a \,\&\, ([*]a \to d) \in \Psi$, т. е. $d \in \Psi$ — противоречие. Итак, (11) доказано.

Алгебры $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$ и $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}/\Psi$ — подпрямо неразложимые с опремумами $\Omega_1 = d/\Phi$ и $\Omega_2 = d/\Psi$ соответственно. Алгебра $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/\Phi_0$ также подпрямо неразложима, $\Omega = d/\Phi_0$ — ее предпоследний элемент. Легко видеть из (11), что естественные отображения $\beta(x/\Phi_0) = x/\Phi$ и $\gamma(x/\Phi_0) = x/\Psi$ являются мономорфизмами из $\mathbf{A}_1$ в $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{C}_1$, причем $\beta(\Omega) = \Omega_1$ и $\gamma(\Omega) = \Omega_2$. Ввиду RAP* существуют $\mathbf{D}$ из $V(L)$ и мономорфизмы $g : \mathbf{B_1} \to \mathbf{D}$, $h : \mathbf{C_1} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(\beta(z)) = h(\gamma(z))$ для всех $z \in \mathbf{A}_1$.

Теперь для $x \in \mathbf{B}, y \in \mathbf{C}$ определим:

$$\delta(x, y) = g(x/\Phi), \quad \varepsilon(x, y) = h(y/\Psi).$$

Для всех $z \in \mathbf{A}$ имеем

$$\delta(z, z) = g(z/\Phi) = g\beta(z/\Phi_0) = h\gamma(z/\Phi_0) = h(z/\Psi) = \varepsilon(z, z),$$

т. е. $\delta(z, z) = \varepsilon(z, z)$ для всех $z \in \mathbf{A}$. Кроме того, $g(d/\Phi) \neq \top$, поэтому $g(b/\Phi) \neq g(c/\Phi)$. Следовательно, $\delta(b, c) = g(b/\Phi) \neq g(c/\Phi) = \delta(c, c) = \varepsilon(c, c) = \varepsilon(b, c)$, т. е. $\delta(b, c) \neq \varepsilon(b, c)$. Теорема доказана.

§ 4. Проективное свойство Бета в расширениях логики S4

Мы видели, что в любом многообразии V транзитивных алгебр свойство SES влечет ограниченную амальгамируемость класса подпрямо неразложимых алгебр из V. Из нижеследующей теоремы 4.3 вытекает, что из RAP* не следует AP даже в многообразиях топобулевых алгебр.

Тем не менее, теорема 3.9 позволяет переписать некоторые леммы (напр., 6 и 7) из [17], заменив в них условие амальгамируемости на ограниченную амальгамируемость. Напомним, что V_n — это конечная топобулева алгебра, имеющая n атомов и удовлетворяющая условиям $\Box\top = \top$ и $\Box x = \bot$ для $x \neq \top$; U_{n+1} имеет $n + 1$ атом $a_1, \dots, a_n, b$ и $\Box\top = \top$, $\Box x = b$ для $x \geq b$, $\Box x = \bot$ в остальных случаях.

ЛЕММА 4.1. *Пусть многообразие V топобулевых алгебр имеет* RAP* *и содержит U_{n+1} для некоторого $n \geqslant 3$. Тогда $U_m \in V$ для всех $m > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что мономорфизмы из [17, док-во леммы 6] сохраняют опремум.

Та же аргументация применяется при доказательстве следующего обобщения леммы 7 из [17].

ЛЕММА 4.2. *Пусть многообразие V топобулевых алгебр имеет* RAP* *и содержит алгебру V_n для некоторого $n \geqslant 3$. Тогда $V_m \in V$ для всех $m > 0$.*

С использованием теоремы 3.9 доказывается

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть* $L_1, L_2 \in \mathrm{NE(S4)}$ *имеют* РВ2 *и* $L_2 \supseteq \mathrm{S5}$. *Тогда логики* $L_1 + L_2$ *и* $L_1 \cap L_2$ *имеют* РВ2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема сразу следует из леммы 4.4 и предложения 4.5.

ЛЕММА 4.4. *Пусть* $L_1, L_2 \in \mathrm{NE(S4)}$ *имеют* РВ2 *и* $L_2 \supseteq \mathrm{S5}$. *Тогда* $L_1 + L_2$ *имеет* РВ2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = L_1 + L_2$. Если L_1, L_2 сравнимы, то доказывать нечего. Допустим, L_1 и L_2 несравнимы, тогда L_1 не содержится в S5. Известно, что любое собственное расширение логики S5 совпадает с одной из логик $L(V_m)$ для некоторого m, а сама S5 полна относительно класса алгебр $\{V_m \mid m \geqslant 0\}$. По лемме 4.2 получаем, что $V_3 \notin V(L_1)$, тогда логика $L_1 + \mathrm{S5}$ и, тем более, логика L совпадает с одной из трех логик $L(V_2)$, $L(V_1)$ или Fm, которые имеют РВ2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Пусть* $L_1, L_2 \in \mathrm{NE(S4)}$ *имеют* РВ2 *и* $L_2 \supseteq \mathrm{S5}$. *Тогда* $L_1 \cap L_2$ *имеет* РВ2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = L_1 \cap L_2$, докажем, что выполняется условие 3 теоремы 3.9. Пусть $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \in \mathrm{FI}(V(L))$. Тогда $\mathbf{B} \in \mathrm{FI}(V(L_1))$ или $\mathbf{B} \in \mathrm{FI}(V(L_2))$, поэтому выполняется SES для $\mathrm{FI}(V(L))$.

Проверим RAP*. Допустим, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ из $V(L)$, алгебры $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ подпрямо неразложимы и имеют общий опремум. Если $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V(L_1)$ или $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V(L_2)$, то существует общее расширение в $V(L_1)$ или в $V(L_2)$, так как оба многообразия имеют RAP*.

Предположим, что $\mathbf{B} \in V(L_1) - V(L_2)$, $\mathbf{C} \in V(L_2) - V(L_1)$. Тогда логики L_1 и L_2 несравнимы. Так как $\mathbf{C} \models \mathrm{S5}$, опремум Ω алгебры $\mathbf{C}$ равен $\perp$. Тогда и опремум алгебры $\mathbf{B}$ равен $\perp$, откуда $\mathbf{B} \models \mathrm{S5}$. Получаем $\mathbf{B} \models L_1 + \mathrm{S5}$.

Теперь имеем $L_2 \subseteq L_1 + \mathrm{S5}$ или $L_1 + \mathrm{S5} \subseteq L_2 + \mathrm{S5} = L_2$, так как все расширения логики S5 линейно упорядочены по включению. Однако второе неравенство не может выполняться, поскольку L_1 и L_2 несравнимы. Поэтому $L_2 \subseteq L_1 + \mathrm{S5}$, тогда $\mathbf{B} \in V(L_1 + \mathrm{S5}) \subseteq V(L_2)$, получаем противоречие с $\mathbf{B} \notin V(L_2)$. Предложение доказано.

ЛЕММА 4.6. *Если* $L \supseteq \mathrm{S5}$, *то* $V(L)$ *имеет* SES *тогда и только тогда, когда* $V(L)$ *имеет* RAP*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически в [9, предлож. 3.7] доказано, что для любого расширения логики S5 класс FGFI($V(L)$) имеет SES, поэтому SES в $V(L)$ сводится к RAP*.

§ 5. PB2 и бесконечнослойные логики

Теорема 2.4 показывает, что у каждой конечнослойной суперинтуиционистской логики, обладающей свойством PB2, есть хотя бы один модальный напарник со свойством PB2. Докажем теперь, что существуют суперинтуиционистские логики со свойством PB2, не имеющие модальных напарников с этим свойством. Напомним обозначения суперинтуиционистских логик:

$\mathrm{KC} = \mathrm{Int} + (\neg p \vee \neg\neg p)$, $\mathrm{LC} = \mathrm{Int} + (p \to q) \vee (q \to p)$,

$\Delta(L) = \mathrm{Int} + \{p \vee (p \to A) \mid A \in L$ и p не входит в $A\}$.

Из предложения 2.1 и из основного результата статьи [8] следует, что если L — бесконечнослойная логика со свойством PB2, то $\rho(L)$ является одной из шести бесконечнослойных суперинтуиционистских логик с PB2, а именно, Int, KC, Δ(KC), LC, Δ(LC), Δ(LC)+KC. Докажем, что на самом деле $\rho(L)$ не может быть среди последних трех логик, для этого используем идеи из [20].

ТЕОРЕМА 5.1. *Модальные напарники логик* LC, Δ(LC), *и* Δ(LC)+ +KC *не имеют* PB2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если $\rho(L) \in \{\mathrm{LC}, \Delta(\mathrm{LC}), \Delta(\mathrm{LC}) + \mathrm{KC}\}$, то $\tau(\Delta(\mathrm{LC})) \subseteq L \subseteq \mathrm{Grz.3}$, где $\tau(\Delta(\mathrm{LC})) = \mathrm{S4} + T(r \vee \vee(r \supset (p \supset q) \vee (q \supset p)))$ — наименьший модальный напарник логики Δ(LC). Поэтому требуемое непосредственно вытекает из двух следующих лемм.

ЛЕММА 5.2. *Пусть* $\mathbf{F}$ *— пятиэлементная частично упорядоченная шкала* $\{a, b, c', c'', d\}$, *где* $a < b < c < d$, $b < c' < d$, *причем* c *и* c' *несравнимы. Тогда* $\mathbf{F}$ *не удовлетворяет* $\tau(\Delta(\mathrm{LC}))$.

ЛЕММА 5.3. *Если* $L \subseteq \mathrm{Grz.3}$ *имеет* PB2, *то шкала* $\mathbf{F}$ *из леммы* 5.2 *удовлетворяет* L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 5.2. Известно, что если предупорядоченная шкала $\mathbf{W}$ удовлетворяет $L \in \mathrm{NE(S4)}$, то она также удовлетворяет $\rho(L)$, если рассматривать $\mathbf{W}$ как интуиционистскую шкалу. Поэтому если F удовлетворяет $\tau(\Delta(\mathrm{LC}))$, то в ней общезначима $\rho(\tau(\Delta(\mathrm{LC}))) = \Delta(\mathrm{LC})$. Легко показать, что в этом случае подшкала $\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \{a\}$ должна удовлетворять LC, что неверно. Получили противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 5.3. Допустим, что $\mathrm{S4} \subseteq L \subseteq \mathrm{Grz.3}$ и L имеет PB2. Тогда $\mathbf{W}^+ \in V(L)$, где $\mathbf{W} = (W, \preceq)$, $W = \{a, b, c\} \cup N$, $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $a \prec b \prec c$, $c \prec x$ для всех $x \in N$ и $x \preceq y \Leftrightarrow x \geq y$ для всех $x, y \in N$. Заметим, что $\mathbf{B} = \mathbf{W}^+$ подпрямо неразложима и $\Omega = W - \{a\}$ — ее опремум. Возьмем подшкалу $\mathbf{W}_0 = \mathbf{W} - \{c\}$. Можно показать, что для любого неглавного ультрафильтра Φ на N отображение

$$i_\Phi(X) = \begin{cases} X \cup \{c\}, & \text{если } (X \cap N) \in \Phi, \\ X & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $X \subseteq \mathbf{W}_0$, является мономорфизмом из $\mathbf{A} = \mathbf{W}_0^+$ в $\mathbf{W}^+$, который сохраняет опремум. Теперь возьмем два неглавных ультрафильтра Φ и Ψ на N таких, что множество Even четных чисел принадлежит фильтру Φ, а его дополнение Odd — фильтру Ψ. Тогда $\beta = i_\Phi$ и $\gamma = i_\Psi$ являются мономорфизмами из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$ и в $\mathbf{C} = \mathbf{B}$, и можно применить теорему 3.9. Следовательно, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из $V(L)$ и сохраняющие опремум мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$.

Покажем, что $\mathbf{F}^+$ вложима в $\mathbf{D}$. Для этого определим отображение $\alpha : \mathbf{F} \to \mathbf{D}$ по правилу

$\alpha(a) = \beta(\{a\})$, $\alpha(b) = \beta(\{b\})$, $\alpha(c') = \beta(\{c\})$, $\alpha(c'') = \gamma(\{c\})$, $\alpha(d) = \beta(N) \,\&\, \gamma(N)$.

Тогда α удовлетворяет условиям

$$
\begin{array}{ll}
1)\ \alpha(x) > \bot \text{ для всех } x \in F; & 4)\ x \leq y \Rightarrow \alpha(x) \leq \Diamond\alpha(y);\\
2)\ \vee\{\alpha(x) \mid x \in F\} = \top; & 5)\ x \not\leq y \Rightarrow \alpha(x) \leq \neg\Diamond\alpha(y).\\
3)\ \alpha(x)\,\&\,\alpha(y) = \bot \text{ для } x \neq y; &
\end{array}
$$

Положим

$$\alpha'(X) = \vee\{\alpha(x) \mid x \in X\} \text{ для } X \subseteq F.$$

Нетрудно проверить, что α' является мономорфизмом из $\mathbf{F}^+$ в $\mathbf{D}$. Поэтому $\mathbf{F}^+ \in V(L)$ и $\mathbf{F} \models L$, что и требовалось.

Кроме того, отсюда следует и

ТЕОРЕМА 5.4. *Если* $L \in \mathrm{NE(S4)}$ *— бесконечнослойная логика со свойством* PB2, *то* $L \subseteq \mathrm{Grz.2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L \in \mathrm{NE(S4)}$ — бесконечнослойная логика со свойством PB2. Как отмечено в начале параграфа, $\rho(L)$ попадает в список из шести суперинтуиционистских логик со свойством PB2. Ввиду теоремы 5.1, $\rho(L)$ должна быть одной из трех логик Int, KC и Δ(KC). Заметим, что KC является наибольшей из этих трех логик. Значит, L содержится в наибольшем модальном напарнике логики KC, то есть в Grz.2.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *В семействе* NE(Grz) *существуют не более тринадцати логик с* PB2, *и среди них по меньшей мере двенадцать действительно имеют* PB2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [12] доказано, что NE(Grz) совпадает с множеством наибольших модальных напарников суперинтуиционистских логик. Все суперинтуиционистские логики с PB2 были найдены в [8]. Из предложения 2.1 и теоремы 5.1 следует, что не более тринадцати логик из NE(Grz) могут иметь PB2. С другой стороны, десять логик из теоремы 2.5 действительно, имеют PB2. Также известно, что Grz (см. [21]) и Grz.2 (см. [22]) имеют интерполяционное свойство и, следовательно, тоже обладают PB2.

В отдельной статье мы докажем, что и наибольший модальный напарник логики Δ(KC) обладает свойством PB2.

§ 6. Заключение

Подведем итоги. Каждая логика из NE(S4), имеющая PB2, должна быть модальным напарником одной из шестнадцати суперинтуиционистских логик с этим свойством. По теореме 5.1 три суперинтуиционистские логики с PB2 вообще не имеют модальных напарников с PB2. Противоречивая логика имеет точно одного напарника $\mathrm{S4} + \{\bot\}$; очевидно, что он имеет PB2.

Модальные напарники классической логики Cl — это в точности расширения логики S5. В [9] было доказано, что в NE(S5) свойства PB2 и CIP равносильны; таким образом, в точности три модальных напарника логики Cl имеют PB2, а именно: S5, $\mathrm{S4} + (p \leftrightarrow \Box p)$ и логика $L(V_2)$, которая характеризуется двухэлементной шкалой X_2 с тотальным отношением R. Что касается остальных классов $\rho^{-1}(L)$, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Для любой промежуточной логики* $L \neq \neq \mathrm{Cl}$*, у которой имеется модальный напарник со свойством* PB2*, существуют по меньшей мере три модальных напарника с* PB2*, из которых два не имеют* IPD.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим: если модальная логика L_0 имеет PB2, то $L_1 = L_0 + \mathrm{Grz.1}$ также имеет PB2 по лемме 1.4. По теореме 4.3 логики $L_1 \cap \mathrm{S5}$ и $L_1 \cap L(V_2)$ также обладают свойством PB2. Если $\rho(L_0) \neq \mathrm{Cl}$, то L_1 несравнима с логиками S5 и $L(V_2)$. Из [17] известно, что пересечение двух несравнимых логик из NE(S4) никогда не имеет IPD.

Далее, $\rho(L_1) = \rho(L_0) + \rho(\mathrm{S4.1}) = \rho(L_0) + \mathrm{Int} = \rho(L_0)$, $\rho(L_1 \cap \mathrm{S5}) = = \rho(L_1) \cap \rho(\mathrm{S5}) = \rho(L_0) \cap \mathrm{Cl} = \rho(L_0)$, а также $\rho(L_1 \cap L(V_2)) = \rho(L_0)$. Ясно, что $L_1 \subseteq L_1 \cap L(V_2) \subseteq L_1 \cap \mathrm{S5}$ и все три логики различны.

Из этого предложения следует, что логики с PB2, не имеющие IPD, можно найти во втором, третьем, а также в бесконечном слоях. Что касается расширений логики Grz, то такие логики есть только в третьем и в бесконечном слоях. Как уже отмечено, IPD влечет PB2 во всех расширениях логики K4 и, тем более, в логиках из NE(S4).

Напомним [8], что в NE(S4) существует лишь конечное число логик со свойством IPD (CIP). Все они конечно аксиоматизируемы и финитно аппроксимируемы, а свойства IPD и CIP разрешимы над S4. Аналогичные результаты справедливы, если рассматривать свойства CIP, IPD и PB2 над Grz или над интуиционистской логикой. Остается открытой проблема, справедливы ли аналогичные результаты для свойства PB2 над S4. Неизвестно, какова мощность множества логик со свойством PB2 в NE(S4), является ли она конечной или бесконечной, существует ли расширение логики S4 со свойством PB2, которое не является конечно аксиоматизируемым или финитно аппроксимируемым, разрешимо ли свойство PB2 над S4.

Для сравнения напомним, что множество расширений известной модальной логики GL Геделя–Леба, обладающих интерполяционным свойством CIP, имеет мощность континуума. Среди них существуют логики, которые не являются ни конечно аксиоматизируемыми, ни финитно аппроксимируемыми. Кроме того, CIP неразрешимо над GL.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. W. Beth*, On Padoa's method in the theory of definitions, Indag. Math., **15**, N 4 (1953), 330—339.
2. *J. Barwise, S. Feferman* (eds.), Model-theoretic logics, New York, Springer-Verlag, 1985.
3. *W. Craig*, Three uses of Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory, J. Symb. Log., **22**, N 3 (1957), 269—285.
4. *I. Sain*, Beth's and Craig's properties via epimorphisms and amalgamation in algebraic logic, in: C. H. Bergman, R. D. Maddux, D. I. Pigozzi (eds.), Algebraic logic and universal algebra in computer science (Lect. Notes Comput. Sci., **425**), Berlin a. o., Springer-Verlag, 1990, 209—226.
5. *Л. Л. Максимова*, Модальные логики и многообразия модальных алгебр: свойство Бета, интерполяция и амальгамируемость, Алгебра и логика, **31**, N 2 (1992), 145—166.

6. *L. Maksimova*, Explicit and implicit definability in modal and related logics, Bull. Sect. Logic, **27**, N 1/2 (1998), 36—39.
7. *Л. Л. Максимова*, Суперинтуиционистские логики и проективное свойство Бета, Алгебра и логика, **38**, N 6 (1999), 680—696.
8. *L. L. Maksimova*, Intuitionistic logic and implicit definability, Ann. Pure Appl. Log., **105**, N 1-3 (2000), 83—102.
9. *Л. Л. Максимова*, Проективное свойство Бета в модальных и суперинтуиционистских логиках, Алгебра и логика, **38**, N 3 (1999), 316—333.
10. *Л. Л. Максимова*, Об интерполяции в модальных логиках, в сб. "Неклассические логики", Кишинев, Штиинца, 1987, 40—56.
11. *H. Rasiowa, R. Sikorski*, The mathematics of metamathematics, Warszawa, PWN, 1963.
12. *W. Blok*, Varieties of interior algebras, PhD Thesis, Amsterdam, 1976.
13. *Л. Л. Максимова*, Модальные логики конечных слоев, Алгебра и логика, **14**, N 3 (1975), 304—319.
14. *T. Hosoi*, On intermediate logics I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. Ia, **14** (1967), 293—312.
15. *L. Maksimova*, Interpolation properties in superintuitionistic logics, Stud. Log., **38**, N 4 (1979), 419—428.
16. *E. Hoogland*, Algebraic characterisations of various Beth definability properties, Stud. Log., **65**, N 1 (2000), 91—112.
17. *Л. Л. Максимова*, Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр, Алгебра и логика, **18**, N 5 (1979), 556—586.
18. *J. Czelakowski*, Logical matrices and the amalgamation property, Stud. Log., **41**, N 4 (1982), 329—341.
19. *L. L. Maksimova*, Projective Beth's properties in infinite slice extensions of the modal logic K4, in: F. Wolter (ed.) et al., Advances in modal logic, vol. 3, Proc. 3rd AiML workshop, Singapore, World Scientific Publ., 2002, 349—363.
20. *Л. Л. Максимова*, Отсутствие интерполяционного свойства у модальных напарников логики Даммета, Алгебра и логика, **21**, N 6 (1982), 690—694.
21. *G. Boolos*, On systems of modal logic with provability interpretations, Theoria, **46**, N 1 (1980), 7—18.

22. *W. Rautenberg*, Modal tableau calculi and interpolation, J. Philos. Log., **12** (1983), 403—423.

Поступило 16 апреля 2003 г.

Адрес автора:

МАКСИМОВА Лариса Львовна, Институт математики СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: lmaksi@math.nsc.ru