L. L. Maksimova, Restricted interpolation property in superintuitionistic logics, *Algebra Logika*, 2009, Volume 48, Number 1, 54–89

Алгебра и логика, 48, № 1 (2009), 54—89

УДК 510.64

ОГРАНИЧЕННОЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ СВОЙСТВО В СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИКАХ*)

Л. Л. МАКСИМОВА

В статье изучается ограниченное интерполяционное свойство IPR в суперинтуиционистских и в модальных логиках. Это свойство появилось в связи с исследованием проективного свойства Бета PB2 в неклассических логиках [1–5]. В цитированных работах, в частности, исследовались соотношения свойства PB2 с интерполяционными свойствами. На классах модальных и суперинтуиционистских логик проективное свойство Бета PB2 следует из интерполяционного свойства Крейга CIP и влечёт ограниченное интерполяционное свойство IPR. Напротив, PB2 не следует из IPR на классе модальных логик. Также CIP и дедуктивное интерполяционное свойство IPD не следуют из PB2, хотя в расширениях известной модальной логики S5 свойства CIP, IPD, PB2 и IPR равносильны.

Известно [6], что лишь конечное число расширений логики S4 и суперинтуиционистских логик имеют CIP. В [3] найден исчерпывающий список суперинтуиционистских логик со свойством PB2. Этот список оказался конечным. Логики с PB2 полностью описаны, доказана разрешимость PB2 на классе суперинтуиционистских исчислений [7]. Аналогичные результа-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00358, и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, грант НШ-335.2008.1.

ты для расширений модальной логики Гжегорчика Grz получены в [8], а для позитивных логик — в [4].

Однако до сих пор неизвестно, является ли конечным число суперинтуиционистских логик со свойством IPR. Аналогичная проблема остаётся открытой для модальных логик над Grz и S4.

В [4] доказано, что в позитивных логиках так же, как в суперинтуиционистских и модальных логиках, проективное свойство Бета следует из CIP и влечет IPR. В [9] доказано, что IPR и PB2 равносильны в позитивных логиках, а также в расширениях суперинтуиционистской логики KC и модальной логики Grz.2.

В данной статье мы докажем, что свойства IPR и PB2 равносильны в конечнослойных расширениях интуиционистской логики и логики Гжегорчика. Более того, мы покажем равносильность IPR и PB2 во всех модальных логиках, содержащих Grz и не содержащихся в Δ(Grz.2). Кроме того, IPR равносильно PB2 во всех суперинтуиционистских (с.и.) логиках, содержащих логику Δ(KC).

Пример модальной логики с дедуктивным интерполяционным свойством IPD, но без свойства Бета B2 (см. [6]) показывает, что IPR не эквивалентно PB2 на классе модальных логик. Однако проблема эквивалентности IPR и PB2 в расширениях модальных логик Grz, S4 и K4 остается открытой.

§ 1. Интерполяция и свойства Бета

Если $\mathbf{p}$ — список пропозициональных переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначается формула, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ — множество всех таких формул.

Пусть L — логика, $\vdash_L$ — отношение следования в логике L. Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ — попарно не пересекающиеся списки пропозициональных переменных. Мы рассматриваем языки, содержащие по крайней мере одну из констант $\top$ („истина“) или $\bot$ („ложь“). Можно определить два *интерполяционных свойства*

CIP: если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует формула $C(\mathbf{p})$ такая, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$;

IPD: если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует формула $C(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ и $C(\mathbf{p}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.

В [10] было введено *ограниченное интерполяционное свойство*

IPR: если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L C(\mathbf{p})$, то существует формула $A'(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L A'(\mathbf{p})$ и $A'(\mathbf{p}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L C(\mathbf{p})$.

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ — непересекающиеся списки переменных, не содержащие y и z. Определим два варианта *проективного свойства Бета*

PB1: если $\vdash_L A(\mathbf{x},\mathbf{q},y) \,\&\, A(\mathbf{x},\mathbf{q}',z) \to (y \leftrightarrow z)$, то $\vdash_L A(\mathbf{x},\mathbf{q},y) \to$ $\to (y \leftrightarrow B(\mathbf{x}))$ для некоторой формулы $B(\mathbf{x})$;

PB2: если $A(\mathbf{x},\mathbf{q},y), A(\mathbf{x},\mathbf{q}',z) \vdash_L (y \leftrightarrow z)$, то $A(\mathbf{x},\mathbf{q},y) \vdash_L (y \leftrightarrow$ $\leftrightarrow B(\mathbf{x}))$ для некоторой формулы $B(\mathbf{x})$.

Более слабые версии свойства Бета B1 и B2 получаются удалением $\mathbf{q},\mathbf{q}'$ в PB1 и PB2 соответственно, поэтому PB1 $\Rightarrow$ B1 и PB2 $\Rightarrow$ B2.

Интуиционистская логика Int и наиболее известные модальные логики S4 и S5, логика Гжегорчика Grz, логика доказуемости Гёделя–Леба GL, логика K4 и минимальная нормальная модальная логика K обладают свойством CIP и, следовательно, всеми остальными вышеупомянутыми свойствами. В нормальных модальных логиках через $\vdash_L$ обозначается отношение выводимости посредством правил R1: $A, A \to B/B$ и R2: $A/\Box A$, а в супернитуиционистских логиках — правила R1. Семейство нормальных расширений модальной логики L обозначается через $NE(L)$, а семейство расширений с.и. логики L — через $E(L)$.

Более подробные сведения о CIP и IPD, B1 и B2 в с.и. и модальных логиках можно найти в [6].

В семействе $NE(\mathrm{K})$ нормальных модальных логик имеет место: PB1 $\iff$ B1 $\iff$ CIP $\Rightarrow$ IPD $\Rightarrow$ IPR, PB1 $\Rightarrow$ PB2 $\Rightarrow$ IPR + B2; пары B2 и IPD, PB2 и IPD, B2 и IPR несравнимы.

В $NE(\mathrm{K4})$ имеет место: CIP $\Rightarrow$ IPD $\Rightarrow$ PB2 $\Rightarrow$ IPR.

В $NE(\mathrm{S4})$ имеет место: CIP $\Rightarrow$ IPD $\Rightarrow$ PB2 $\Rightarrow$ IPR, IPD $\not\Rightarrow$ CIP.

В $NE(\mathrm{Grz})$ имеет место: CIP $\Leftrightarrow$ IPD $\Rightarrow$ PB2 $\Rightarrow$ IPR, PB2 $\not\Rightarrow$ IPD.

В NE(S5) имеет место: CIP $\Leftrightarrow$ IPD $\Leftrightarrow$ PB2 $\Leftrightarrow$ IPR.
Все логики над Int и над Int$^+$ удовлетворяют B1 и B2, причём

для этих логик имеет место: IPD $\iff$ CIP $\Rightarrow$ PB1 $\iff$ PB2 $\Rightarrow$ IPR, PB1 $\not\Rightarrow$ CIP.

§ 2. Соотношения между суперинтуиционистскими и модальными логиками

Хорошо известно, что существует перевод T из Int в S4 [11]. Каждой логике L из NE(S4) можно поставить в соответствие её *интуиционистский фрагмент* $\rho(L) = \{A \mid T(A) \in L\}$. Напомним, что L называется *модальным напарником* логики $\rho(L)$. Для любой с.и. логики L множество $\rho^{-1}(L)$ её модальных напарников имеет наименьший элемент $\tau(L) = S4 + T(L)$ и наибольший элемент $\sigma(L)$. Более того, $\sigma(L) = \mathrm{Grz} + T(L)$ является изоморфизмом из NE(Grz) на семейство с.и. логик [12].

В [3] были описаны все с.и. логики с проективным свойством Бета PB2. Оказалось, что существует точно 16 логик, обладающих свойством PB2, все они конечно аксиоматизируемы и финитно аппроксимируемы. В [8] было доказано, что в NE(Grz) имеется в точности 13 логик со свойством PB2.

Напомним, что $\mathrm{Grz} = \mathrm{S4} + (\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p)$; $\mathrm{Grz.2} = \mathrm{Grz} + (\Box\Diamond x \to \Diamond\Box x)$; для $L \in NE(\mathrm{S4})$ выполняется

$$\Delta(L) = \mathrm{S4} + \{\Box(p \to \Box A) \vee \Box(\neg p \to \Box A) | A \in L \text{ и } p \text{ не входит в } A\}.$$

Обозначим

$$\sigma_0 = \bot,\ \sigma_{n+1} = \Box p_{n+1} \vee \Box(\Box p_{n+1} \to \sigma_n).$$

Логика $L \in NE$(S4) называется

логикой слоя $\mathbb{S}_n$, если $L \vdash \sigma_n$ и $L \nvdash \sigma_{n-1}$;

логикой конечного слоя, если L есть логика некоторого слоя $\mathbb{S}_n$ ($n \geqslant 0$);

логикой бесконечного слоя в противном случае.

Известно (см., напр., [6]), что логика из $NE(\mathrm{S4})$ локально таблична, тогда и только тогда, когда она является логикой конечного слоя. Эта классификация тесно связана с классификацией с.и. логик, которую ввёл Хосои [13]. Для любой $L \in NE(\mathrm{S4})$ модальная логика L будет логикой слоя $\mathcal{S}_n$ тогда и только тогда, когда $\rho(L)$ является с.и. логикой n-го слоя.

ТЕОРЕМА 2.1. 1) *Для любой модальной логики* $L \in NE(\mathrm{S4})$ *выполняется: если* L *имеет* IPR *или* PB2*, то* $\rho(L)$ *тоже имеет* IPR *или* PB2 *соответственно.*

2) *Если конечнослойная с.и. логика* L *имеет* IPR *или* PB2*, то* $\sigma(L)$ *тоже имеет* IPR *или* PB2 *соответственно.*

3) *Если* L *— конечнослойная модальная логика из* $NE(\mathrm{Grz})$*, то* L *имеет* IPR *или* PB2 *тогда и только тогда, когда* $\rho(L)$ *тоже имеет* IPR *или* PB2 *соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение относительно PB2 доказано в [1, предлож. 4.1]. Рассуждения для IPR аналогичны.

2) Утверждение относительно PB2 доказано в [5, теор. 2.4]. Рассуждения для IPR аналогичны.

3) Утверждение следует из пп. 1 и 2. □

ТЕОРЕМА 2.2 [5, 8]**.** *В* $NE(\mathrm{Grz})$ *существуют точно* 13 *логик с* PB2*, в том числе* 10 *конечнослойных логик и* 3 *логики бесконечного слоя.*

Рассмотрим логики бесконечного слоя. Отметим, что логики Grz и Grz.2 имеют CIP (Boolos, 1980; Rautenberg, 1983) и, следовательно, PB2. Эти логики являются модальными напарниками с.и. логик Int и KC, соответственно. Также логика $\Delta(\mathrm{Grz.2})$, которая является наибольшим модальным напарником логики $\Delta(\mathrm{KC})$, имеет PB2 (см. [8]).

Существуют три расширения логики Гжегорчика, не обладающих свойством PB2, хотя их интуиционистские фрагменты имеют PB2. Напомним некоторые обозначения с.и. логик:

$$\mathrm{KC} = \mathrm{Int} + (\neg p \vee \neg\neg p),\ \mathrm{LC} = \mathrm{Int} + (p \to q) \vee (q \to p),$$

$$\Delta(L) = \mathrm{Int} + \{p \vee (p \to A) \mid A \in L \text{ и } p \text{ не имеет вхождений в } A\}.$$

ТЕОРЕМА 2.3 [3, 5]**.** *Суперинтуиционистские логики* LC, $\Delta(\mathrm{LC})$ *и* $\Delta(\mathrm{LC})+\mathrm{KC}$ *имеют* PB2*, но никакой модальный компаньон этих логик не имеет ни* PB2*, ни* IPR.

ТЕОРЕМА 2.4 [9]**.** *Пусть* $L \in E(\mathrm{KC})$ *или* $L \in NE(\mathrm{Grz.2})$. *Тогда* L *имеет* IPR *в том и только в том случае, если* L *имеет* PB2.

В § 8 мы докажем равносильность IPR и PB2 в конечнослойных модальных логиках, содержащих Grz. Отсюда и из теоремы 2.1 вытекает равносильность IPR и PB2 в с.и. логиках конечного слоя.

§ 3. Алгебраическая интерпретация

Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между нормальными модальными логиками и многообразиями модальных алгебр, а также между с.и. логиками и многообразиями гейтинговых, или псевдобулевых, алгебр. *Модальная алгебра* — это булева алгебра $\mathbf{A} = (A, \to, \neg, \Box)$ относительно $\to$ и $\neg$, которая удовлетворяет условиям $\Box\top = \top$ и $\Box(x \to y) \leq \Box x \to \Box y$. Модальная алгебра $\mathbf{A}$ называется *топобулевой алгеброй*, или *алгеброй замыкания*, если в ней выполняются неравенства $\Box x \leq \Box\Box x$ и $\Box x \leq x$; топобулева алгебра называется *гжегорчиковой алгеброй*, если в ней выполняется условие $\Box(\Box(x \to \Box x) \to x) \leq x$. Известно, что минимальная нормальная модальная логика K характеризуется многообразием всех модальных алгебр, логика S4 — многообразием топобулевых алгебр, а Grz — многообразием гжегорчиковых алгебр.

Под *означиванием* в алгебре $\mathbf{A}$, как обычно, понимаем гомоморфизм алгебры формул в алгебру $\mathbf{A}$. Если A — формула, $\mathbf{A}$ — модальная или гейтингова алгебра, то $\mathbf{A} \models A$ означает, что тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$. Пишем $\mathbf{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$. Полагаем $V(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models L\}$. Любая нормальная модальная или с.и. логика характеризуется многообразием $V(L)$.

Напомним, что модальная или с.и. логика L обладает свойством IPD тогда и только тогда, когда многообразие $V(L)$ амальгамируемо; CIP равносильно сверхамальгамируемости многообразия $V(L)$ (см. [14, 15]). В [1] был найден алгебраический эквивалент проективного свойства Бета PB2 в модальных и с.и. логиках, а именно, была доказана равносильность PB2 и свойства SES сильной сюръективности эпиморфизмов соответствующего многообразия.

Напомним необходимые определения.

Класс V называется *амальгамируемым*, если для любых алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из V он удовлетворяет условию

AP: если $\mathbf{A}$ — общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то существуют $\mathbf{D}$ из V и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Тройка $(\mathbf{D}, \delta, \epsilon)$ называется *амальгамой* для $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

Говорим, что класс V обладает свойством SAP *сверхамальгамируемости*, если для любых алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из V выполняется условие AP и, сверх того, в алгебре $\mathbf{D}$ имеет место:

$$\delta(x) \leq \epsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \leq z \text{ и } z \leq y),$$

$$\delta(x) \geq \epsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \geq z \text{ и } z \geq y).$$

Невырожденная алгебра называется *финитно неразложимой* [15], если она не может быть представлена как конечное подпрямое произведение отличных от неё фактор-алгебр. Топобулева алгебра финитно неразложима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $\Box x \vee \Box y = \top \Rightarrow (x = \top \text{ или } y = \top)$. Топобулева алгебра является подпрямо неразложимой тогда и только тогда, когда она имеет *опремум*, т. е. такой элемент $\Omega \neq \top$, что $\Box\Omega = \Omega$ и $\Box x \leq \Omega$ для любого $x \neq \top$; легко понять, что опремум, если он существует, является единственным.

Аналогично, гейтингова алгебра является финитно неразложимой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $x \vee y = \top \Rightarrow (x = \top \text{ или } y = \top)$. Гейтингова алгебра является подпрямо неразложимой тогда и только тогда, когда она имеет *опремум*, т. е. такой элемент $\Omega \neq \top$, что $x \leq \Omega$ для любого $x \neq \top$.

Говорим, что мономорфизм $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ двух подпрямо неразложимых топобулевых алгебр *сохраняет опремум*, если он отображает опремум алгебры $\mathbf{A}$ в опремум алгебры $\mathbf{B}$. Для класса K определим свойство *ограниченной амальгамируемости*

RAP: для любых сохраняющих опремум мономорфизмов $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ подпрямо неразложимых алгебр из класса K существуют алгебра $\mathbf{D}$ из K и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\epsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \epsilon\gamma$.

Говорим, что многобразие K обладает свойством WRAP (*слабым* RAP), если RAP выполняется для любых конечных $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ из K.

Очевидно, что из AP следует RAP, а WRAP следует из RAP. Для любого многообразия K топобулевых или гейтинговых алгебр свойство RAP равносильно следующему свойству:

для любых сохраняющих опремум мономорфизмов $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ подпрямо неразложимых алгебр из K существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из K и сохраняющие опремум мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\epsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \epsilon\gamma$.

ТЕОРЕМА 3.1 [16]**.** *Для любой логики L из E*(Int) *или NE*(S4) *эквивалентны следующие условия*:

1) *L имеет* IPR;

2) *$V(L)$ имеет* RAP.

Класс алгебр V обладает *свойством сильной сюръективности эпиморфизмов*, если выполняется

SES: для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ из V таких, что $\mathbf{A}$ есть подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, и для любого $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$ существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $g : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$.

ТЕОРЕМА 3.2 [3, 5]**.** *Для любой логики L из E*(Int) *или NE*(S4) *эквивалентны следующие условия*:

1) *L обладает проективным свойством Бета*;

2) *$V(L)$ имеет* SES;

3) $V(L)$ *имеет* RAP *и класс* $FI(V(L))$ *финитно неразложимых алгебр из* $V(L)$ *имеет* SES.

§ 4. Ограниченная амальгамируемость в многообразиях гейтинговых алгебр

В этом параграфе мы укажем необходимые условия для RAP и WRAP в многообразиях гейтинговых алгебр.

По теореме 3.2, RAP следует из SES. В [3, 7] были описаны все с.и. логики со свойством PB2 и все многообразия гейтинговых алгебр со свойством SES. Приведём эти описания, напомнив предварительно некоторые определения и обозначения.

Пусть $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \supset, \neg, \top\rangle$ и $\mathbf{B} = \langle B; \&, \vee, \supset, \neg, \top\rangle$ — две гейтинговы алгебры. Говорим, что гейтингова алгебра $\mathbf{C} = \langle C; \&, \vee, \supset, \neg, \top\rangle$ является *упорядоченной суммой* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ алгебр $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, если $\mathbf{C}$ определяется следующим образом:

$C = A \cup B'$, где B' изоморфна B и $A \cap B' = \{\top_{\mathbf{A}}\} = \{\bot_{\mathbf{B'}}\}$;

C частично упорядочено отношением

$$x \leq_{\mathbf{C}} y \Leftrightarrow [(x \in A \text{ и } y \in B') \text{ или } (x, y \in A \text{ и } x \leq_{\mathbf{A}} y)$$
$$\text{или } (x, y \in B' \text{ и } x \leq_{\mathbf{B'}} y)].$$

Как следствие, $\bot_{\mathbf{C}} = \bot_{\mathbf{A}}$, $\top_{\mathbf{C}} = \top_{\mathbf{B'}}$.

Таким образом, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно рассматривать как интервалы множества $\mathbf{C}$. Вообще говоря, они не являются подалгебрами алгебры $\mathbf{C}$.

Для характеризации с.и. логик с проективным свойством Бета [3, 7] использовались следующие последовательности гейтинговых алгебр:

B_0 — двухэлементная булева алгебра,

$B_{n+1} = B_0 + B_0^n + B_0$, $C_n = B_0^n + B_0$, $L_2 = B_0$, $L_{n+1} = L_n + B_0$.

Таким образом, L_n есть n-элементная цепь.

Обозначим $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} + B_0$.

Хорошо известно, что гейтингова алгебра является подпрямо неразложимой тогда и только тогда, когда она имеет вид $\mathbf{A}^+$ для подходящей гейтинговой алгебры $\mathbf{A}$.

Напомним некоторые обозначения с.и. логик:

$$\mathrm{KC} = \mathrm{Int} + (\neg p \vee \neg\neg p),\ \mathrm{LC} = \mathrm{Int} + (p \to q) \vee (q \to p),$$

$$\Delta(L) = \mathrm{Int} + \{p \vee (p \to A) \mid A \in L \text{ и } p \text{ не имеет вхождений в } A\}.$$

В [3] было доказано, что существует в точности 16 с.и. логик с проективным свойством Бета, и дана аксиоматизация этих логик. Из них в точности 8 логик имеют CIP (см. [14]), а почти все остальные представимы как $\Delta(L)$ или $\Delta(L) + \mathrm{KC}$ для подходящей логики L с CIP.

В [7, предлож. 2.6] для каждой с.и. логики L, обладающей свойством PB2, указан класс гейтинговых алгебр, порождающий многообразие $V(L)$. Приведем эту характеризацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Многообразия, характеризующие с.и. логики со свойством* PB2, *порождаются классами конечных гейтинговых алгебр, а именно,*

H_1: Int — *всеми конечными гейтинговыми алгебрами*;

H_2: KC — *конечными алгебрами вида* $B_0 + \mathbf{A} + B_0$, *где* $\mathbf{A}$ — *конечная гейтингова алгебра*;

H_3: LP_2 — *алгебрами* C_n *для* $n \geqslant 1$;

H_4: LV — *алгеброй* C_2;

H_5: LS — *алгеброй* L_3;

H_6: LC — *алгебрами* L_n *для* $n \geqslant 2$;

H_7: Cl — *алгеброй* B_0;

H_8: For — *вырожденной булевой алгеброй*;

H_9: $\Delta(\mathrm{KC})$ — *алгебрами вида* $((B_0 + \mathbf{A}_1) \times \ldots \times (B_0 + \mathbf{A}_k)) + B_0$, *где* $k \geqslant 1$ *and* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ — *конечные гейтинговы алгебры*;

H_{10}: $\mathrm{LP}_3 = \Delta(\mathrm{LP}_2)$ — *алгебрами* $(C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_k}) + B_0$ *для любого* $k \geqslant 1$ *и произвольных* $n_1, \ldots, n_k$;

H_{11}: $\Delta(\mathrm{LV})$ — *алгебрами* $C_2^n + B_0$ *для* $n \geqslant 1$;

H_{12}: $\Delta(\mathrm{LS})$ — *алгебрами* $L_3^n + B_0$ *для* $n \geqslant 1$;

H_{13}: $\Delta(\mathrm{LC})$ — *алгебрами* $(L_{n_1} \times \ldots \times L_{n_k}) + B_0$ *для любых* $k \geqslant 1$ *и произвольных* $n_1, \ldots, n_k$;

H_{14}: $\mathrm{LP}_3 + \mathrm{KC}$ — *алгебрами* B_n *для* $n \geqslant 0$;

H_{15}: $\Delta(\mathrm{LC}) + \mathrm{KC}$ — *алгебрами* $B_0 + (L_{n_1} \times \ldots \times L_{n_k}) + B_0$ *для любых* $k \geqslant 1$ *и произвольных* $n_1, \ldots, n_k$;

H_{16}: $\mathrm{LP}_3 + \mathrm{LC}$ — *алгеброй* L_4.

Для многообразий $V(\mathrm{Int})$ и $V(\mathrm{KC})$ нам потребуются и другие порождающие совокупности. В [14] определён класс $K(\mathbf{B})$ гейтинговых алгебр по индукции:

1) $\mathbf{B} + B_0 \in K(\mathbf{B})$,

2) если $(\mathbf{B}+\mathbf{A}_1), \ldots, (\mathbf{B}+\mathbf{A}_n) \in K(\mathbf{B})$, то $(\mathbf{B}+(\mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_n)+B_0) \in \in K(\mathbf{B})$.

Следующая лемма есть часть предложения 7 из [14].

ЛЕММА 4.2. 1) *Многообразие* $V(\mathrm{Int})$ *порождается семейством* $K(E)$ *гейтинговых алгебр, где* E — *вырожденная гейтингова алгебра.*

2) *Многообразие* $V(\mathrm{KC})$ *порождается семейством* $K(B_0)$ *гейтинговых алгебр.*

Справедливо также

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Многообразие* $H_9 = V(\Delta(\mathrm{KC}))$ *порождается алгебрами вида* $((B_0 + \mathbf{A}_1^+) \times \ldots \times (B_0 + \mathbf{A}_k^+)) + B_0$, *где* $k \geqslant 1$ *и* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ — *конечные гейтинговы алгебры.*

Нам потребуется следующая характеризация многообразий $H_1 - H_{16}$.

ТЕОРЕМА 4.4 [7]**.** *Пусть* V — *произвольное многообразие гейтинговых алгебр. Тогда*

1) $V \subseteq H_1$;

2) $V \subseteq H_2 \Leftrightarrow C_2 \notin V$;

3) $V \subseteq H_3 \Leftrightarrow L_4 \notin V$;

4) $V \subseteq H_4 \Leftrightarrow L_4 \notin V$ *и* $C_3 \notin V$;

5) $V \subseteq H_5 \Leftrightarrow L_4 \notin V$ *и* $C_2 \notin V$;

6) $V \subseteq H_6 \Leftrightarrow C_2 \notin V$ *и* $B_3 \notin V$;

7) $V \subseteq H_7 \Leftrightarrow L_3 \notin V$;

8) $V = H_8 \Leftrightarrow B_0 \notin V$;

9) $V \subseteq H_9 \Leftrightarrow C_2^+ \notin V$;

10) $V \subseteq H_{10} \Leftrightarrow L_5 \notin V$;

11) $V \subseteq H_{11} \Leftrightarrow$ *все алгебры* L_5, C_3^+, D_1, D_2 *и* D_3 *не входят в* V;

12) $V \subseteq H_{12} \Leftrightarrow L_5 \notin V$ *и* $C_2^+ \notin V$;

13) $V \subseteq H_{13} \Leftrightarrow C_2^+ \notin V$ *и* $B_3^+ \notin V$;

14) $V \subseteq H_{14} \Leftrightarrow L_5 \notin V$ *и* $C_2 \notin V$;

15) $V \subseteq H_{15} \Leftrightarrow B_3^+ \notin V$ *и* $C_2 \notin V$;

16) $V \subseteq H_{16} \Leftrightarrow L_5 \notin V$, $C_2 \notin V$ *и* $B_3 \notin V$.

Для описания многообразий со свойством RAP нам потребуются следующие результаты.

ЛЕММА 4.5 [3]. *Пусть многообразие* V *гейтинговых алгебр имеет* RAP (WRAP). *Тогда*

i) *для всех (соответственно, всех конечных) невырожденных гейтинговых алгебр* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$, *если* $(\mathbf{B}+B_0+B_0) \in V$ *и* $(B_0+\mathbf{C}+B_0) \in V$, *то* $(\mathbf{B}+\mathbf{C}+B_0) \in V$;

ii) *для любых (любых конечных) гейтинговых алгебр* $\mathbf{B}$, *если* $(\mathbf{B}+ +B_0+B_0) \in V$ *и* $L_5 \in V$, *то* $(\mathbf{B}+B_0+B_0+B_0) \in V$;

iii) *если* $L_5 \in V$, *то* $L_n \in V$ *для всех* $n < \omega$.

ЛЕММА 4.6 [3]. *Пусть* V *имеет* RAP (WRAP), $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ — *любые (любые конечные) гейтинговы алгебры и* $(\mathbf{B}+B_0^{n+1}+\mathbf{C}+B_0) \in V$ *для некоторого* $n \geqslant 2$. *Тогда* $(\mathbf{B}+B_0^m+\mathbf{C}+B_0) \in V$ *для всех* $m \geqslant 1$.

ЛЕММА 4.7 [3]. *Пусть* V *имеет* RAP (WRAP), $n \geqslant 1$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ — *любые (любые конечные) гейтинговы алгебры,* $(\mathbf{B}+B_0^n+ +B_0) \in V$ *и* $(\mathbf{B}+\mathbf{C}_1^+ +B_0), \ldots, (\mathbf{B}+\mathbf{C}_n^+ +B_0) \in V$. *Тогда* $(\mathbf{B}+(\mathbf{C}_1^+ \times \ldots \times \mathbf{C}_n^+)+B_0) \in V$.

ЛЕММА 4.8 [3]. *Пусть* V *имеет* WRAP *и* $B_3 = (B_0+B_0^2+B_0) \in V$. *Тогда* $B_4 = (B_0+B_0^3+B_0) \in V$.

ЛЕММА 4.9 [3]. *Пусть* V *имеет* WRAP, $L_4 \in V$ *и* $C_2 \in V$. *Тогда* $C_3 \in V$.

ЛЕММА 4.10 [9]. *Пусть* V — *многообразие гейтинговых алгебр с* RAP. *Если три алгебры* $(B_0+B_0^2+B_0+B_0)$, $(B_0+\mathbf{A}+B_0+B_0)$ *и*

$(B_0 + \mathbf{B} + B_0 + B_0)$ *принадлежат* V, *то* $(B_0 + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + B_0 + B_0) \in V$.

ЛЕММА 4.11 [9]. *Пусть* L — *с.и. логика,* $V(L)$ *имеет* RAP *и* $(B_0 + B_0^2 + B_0 + B_0) \in V(L)$. *Тогда* $L \subseteq \mathrm{KC}$. *В частности, если* L *содержит* KC, *то* $L = \mathrm{KC}$.

§ 5. Алгебры и шкалы Крипке

В § 2 мы показали, что с.и. логика конечного слоя обладает слабым интерполяционным свойством тогда и только тогда, когда её наибольший модальный напарник обладает этим свойством. Для описания всех конечнослойных модальных логик из $NE(\mathrm{Grz})$ со свойством IPR мы воспользуемся семантикой Крипке.

Алгебраическая и семантическая характеризация любой логики из $NE(\mathrm{Grz})$ может быть получена из соответствующей характеризации её с.и. фрагмента с помощью методов, развитых в [6, 11, 12, 17, 18]. Опишем коротко эти методы.

Алгебраическая характеризация с.и. логик строится с помощью гейтинговых, или псевдобулевых, алгебр, а характеризация логик из $NE(\mathrm{S4})$ — с помощью топобулевых алгебр. Любой топобулевой алгебре $\mathbf{A}$ соответствует гейтингова алгебра $G(\mathbf{A})$, состоящая из всех открытых элементов алгебры $\mathbf{A}$. (Напомним, что элемент a называется *открытым*, если $a = \Box a$.) С другой стороны, любой гейтинговой алгебре $\mathbf{B}$ соответствует топобулева алгебра $\mathbf{s}(\mathbf{B})$, порождённая множеством $\mathbf{B}$ с помощью булевых операций. Более того, $G(\mathbf{s}(\mathbf{B})) = \mathbf{B}$, и $\mathbf{s}(\mathbf{B})$ является гжегорчиковой алгеброй.

В [12, 17] доказано, что с.и. логика L характеризуется классом K гейтинговых алгебр тогда и только тогда, когда её наибольший модальный напарник $\sigma(L)$ характеризуется классом $\{\mathbf{s}(\mathbf{B}) \mid \mathbf{B} \in K\}$ гжегорчиковых алгебр. Кроме того, L финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\sigma(L)$ финитно аппроксимируема.

Для финитно аппроксимируемых логик можно заменить модальные или гейтинговы алгебры шкалами Крипке в силу теорем представления.

Каждая конечная модальная алгебра изоморфна алгебре W^+ всех подмножеств подходящей шкалы Крипке W, а каждая конечная гейтингова алгебра — гейтинговой алгебре $B(W)$ всех конусов подходящей частично упорядоченной (ч.у.) шкалы W. Напомним, что подмножество X шкалы W называется *конусом*, если для всех $x, y \in W$ выполняется условие $x \in X \Rightarrow (x \leq y \Rightarrow y \in X)$. Говорим, что шкала W удовлетворяет суперинтуиционистской или модальной логике L, если $B(W) \models L$ (соответственно $W^+ \models L$).

Отметим, что шкала W может быть пустой. В этом случае ей соответствуют вырожденные алгебры $B(W)$ и W^+. Модальные операции на W^+ определяются равенствами (где $X \subseteq W$):

$$\Box X = \{x \mid \forall y\,(xRy \Rightarrow y \in X)\},\ \Diamond X = \{x \mid \exists y\,(xRy \text{ и } y \in X)\}.$$

Если $\mathbf{B}$ — конечная гейтингова алгебра, можно взять шкалу, состоящую из $\vee$-неразложимых элементов алгебры $\mathbf{B}$ с обратным порядком. Если $\mathbf{A}$ — конечная модальная алгебра, можно в качестве представляющей шкалы взять множество атомов алгебры $\mathbf{A}$. При этом отношение на множестве атомов удовлетворяет условию

$$aRb \iff a \leq \Diamond b.$$

Поскольку в модальных алгебрах выполняется тождество $\Diamond(x \vee y) = \Diamond(x) \vee \Diamond(y)$, операция $\Diamond$ на конечной модальной алгебре $\mathbf{A}$ однозначно определяется значениями этой операции на всех атомах алгебры $\mathbf{A}$.

В нашем случае важно, что для любой конечной гейтинговой алгебры $\mathbf{B}$ шкала, соответствующая $\mathbf{B}$, изоморфна шкале гжегорчиковой алгебры $\mathbf{s}(\mathbf{B})$. Отсюда следует

ЛЕММА 5.1. *Для любой $L \in NE(\mathrm{Grz})$ конечная ч.у. шкала Крипке $\mathbf{W} = (W, \leq)$ удовлетворяет L тогда и только тогда, когда $\mathbf{W}$ (интуиционистски) удовлетворяет интуиционистский фрагмент $\rho(L)$.*

Зафиксируем следующие последовательности ч.у. шкал Крипке ($n \geqslant 1$):

$\mathbf{Z}_n$ — множество $\{1,\ldots,n\}$ с естественным порядком;

$\mathbf{U}_{n+1}$ — множество $\{0,1,\ldots,n+1\}$, где $0RxR(n+1)$ для всех x и $\neg xRy$ для $1\leqslant x,y\leqslant n$, $x\neq y$;

$\mathbf{V}_n$ — подшкала шкалы $\mathbf{U}_{n+1}$, полученная удалением $(n+1)$.

Заметим, что можно заменить гейтингову алгебру L_{n+1} шкалой $\mathbf{Z}_n$, C_n — шкалой $\mathbf{V}_n$, B_{n+1} — шкалой $\mathbf{U}_{n+1}$; алгебры C_n^+ можно заменить шкалами $\mathbf{V}_n^*$, а B_{n+1}^+ — шкалами $\mathbf{U}_{n+1}^*$.

Также рассмотрим шкалу F_1, которая состоит из множества $\{o,a,b,c,d,u,v,w\}$ с наименьшим элементом o и максимальными элементами u,v,w; a,b,c,d — это все последователи элемента o; последователями элемента a являются u,v,w, множества последователей элементов b, c и d — это $\{u,v\}$, $\{u,w\}$ и $\{v,w\}$ соответственно.

Определим подшкалы $F_2=F_1-\{b\}$, $F_3=F_2-\{c\}$, $F_4=F_3-\{d\}$ и обозначим $D_n=B(F_n)$ для $n\leqslant 4$. Отметим, что F_4 изоморфна шкале $\mathbf{V}_3^*$.

Введём обозначения для операций над шкалами. Пусть даны шкалы W_1, W_2 с отношениями R_1, R_2 соответственно.

Шкала $W=W_1\sqcup W_2$ — *непересекающееся объединение* шкал W_1, W_2 — определяется как множество $W=W_1\cup W_2'$, где шкала $W_2'=(W_2',R_2')$ изоморфна шкале W_2 и не пересекается с W_1, с отношением $R=R_1\cup R_2'$. Если $W_1=\ldots=W_n=W$, то обозначаем $nW=W_1\sqcup\ldots\sqcup W_n$.

Шкала $W_1\Uparrow W_2$ — *последовательное объединение* шкал W_1, W_2 — определяется как множество $W=W_1\cup W_2'$, где шкала $W_2'=(W_2',R_2')$ изоморфна W_2 и не пересекается с W_1, с отношением

$$R=R_1\cup R_2'\cup\{(x,y)\mid x\in W_1,\ y\in W_2'\}.$$

Для любой шкалы W обозначим через W^* шкалу, полученную из W добавлением нового наименьшего элемента.

Легко доказывается

ЛЕММА 5.2. *Пусть* $\mathbf{A},\mathbf{B}$ *— гейтинговы алгебры,* $\mathbf{A}=B(W_1)$*,* $\mathbf{B}=B(W_2)$ *для подходящих ч.у. шкал* W_1,W_2*. Тогда*

1) *гейтингова алгебра* $\mathbf{A}^+$ *изоморфна* $B(W_1^*)$;

2) *гейтингова алгебра* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *изоморфна* $B(W_1 \sqcup W_2)$;

3) *гейтингова алгебра* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *изоморфна* $B(W_2 \Uparrow W_1)$.

Например, шкала $\mathbf{V}_2$, соответствующая гейтинговой алгебре C_2, изоморфна $(2\mathbf{Z}_1)^*$, а шкала $\mathbf{U}_3$, соответствующая гейтинговой алгебре B_3, изоморфна $\mathbf{V}_2 \Uparrow \mathbf{Z}_1$. Кроме того, $W^* = \mathbf{Z}_1 \Uparrow W$ для любой шкалы W.

Используя эту лемму, а также предложение 4.3, можно переформулировать предложение 4.1 в терминах шкал следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Многообразия гейтинговых алгебр* H_1 – H_{16} *порождаются классами конечных ч.у. шкал, а именно,*

H_1: *всеми конечными ч.у. шкалами*;

H_2: *конечными шкалами вида* $W^* \Uparrow \mathbf{Z}_1$, *где* W — *конечная ч.у. шкала*;

H_3: *шкалами* $\mathbf{V}_n$ *для* $n \geqslant 1$;

H_4: *шкалой* $\mathbf{V}_2$;

H_5: *шкалой* $\mathbf{Z}_2$;

H_6: *шкалами* $\mathbf{Z}_n$ *для* $n \geqslant 1$;

H_7: *шкалой* $\mathbf{Z}_1$;

H_8: *пустой шкалой*;

H_9: *шкалами вида* $((W_1^* \Uparrow \mathbf{Z}_1) \sqcup \ldots \sqcup (W_k^* \Uparrow \mathbf{Z}_1))^*$, *где* $k \geqslant 1$ *и* $W_1, \ldots, W_k$ — *конечные шкалы*;

H_{10}: *шкалами* $(\mathbf{V}_{n_1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{V}_{n_k})^*$ *для любого* $k \geqslant 1$ *и произвольных* $n_1, \ldots, n_k$;

H_{11}: *шкалами* $(n\mathbf{V}_2)^*$ *для* $n \geqslant 1$;

H_{12}: *шкалами* $(n\mathbf{Z}_2)^*$ *для* $n \geqslant 1$;

H_{13}: *шкалами* $(\mathbf{Z}_{n_1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{Z}_{n_k})^*$ *для любых* $k \geqslant 1$ *и произвольных* $n_1, \ldots, n_k$;

H_{14}: *шкалами* $\mathbf{U}_n$ *для* $n \geqslant 0$;

H_{15}: *шкалами* $(\mathbf{Z}_{n_1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{Z}_{n_k})^* \Uparrow \mathbf{Z}_1$ *для любых* $k \geqslant 1$ *и произвольных* $n_1, \ldots, n_k$;

H_{16}: *шкалой* $\mathbf{Z}_3$.

§ 6. Необходимые условия для ограниченной амальгамируемости

В этом параграфе мы найдем необходимые условия для RAP в терминах шкал. Пусть $T_{\mathbf{A}}$ — множество атомов алгебры $\mathbf{A}$.

ЛЕММА 6.1 [6, лемма 8.5]. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *— топобулевы алгебры,* $\mathbf{A}$ *конечна и* $i : T_{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$. *Можно продолжить* i *до мономорфизма* $i : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *в том и только том случае, если для всех* $a, b \in T_{\mathbf{A}}$ *выполняются следующие условия*:

1) $i(a) \neq \perp_{\mathbf{B}}$;

2) $\bigvee\{i(d) \mid d \in T_{\mathbf{A}}\} = \top_{\mathbf{B}}$;

3) $i(a) \,\&\, i(b) = \perp_{\mathbf{B}}$ *для* $a \neq b$;

4) $(\exists S_a \subseteq T_{\mathbf{A}})(\Diamond i(a) = \bigvee\{i(d) \mid d \in S_a\})$;

5) $a \leq \Diamond b \Leftrightarrow i(a) \leq \Diamond i(b)$.

Заменим условия 4 и 5 одним условием, а именно, из этой леммы легко вытекает

ЛЕММА 6.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *— топобулевы алгебры,* $\mathbf{A}$ *конечна и* $i : T_{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$. *Можно продолжить* i *до мономорфизма* $i : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *в том и только том случае, если для всех* $a, b \in T_{\mathbf{A}}$ *выполняются следующие условия*:

1) $i(a) \neq \perp_{\mathbf{B}}$;

2) $\bigvee\{i(d)|d \in T_{\mathbf{A}}\} = \top_{\mathbf{B}}$;

3) $i(a) \,\&\, i(b) = \perp_{\mathbf{B}}$ *для* $a \neq b$;

4) $\Diamond i(a) = \bigvee\{i(d) \mid d \in T_{\mathbf{A}}$ *и* $d \leq \Diamond a\}$.

При этом искомый мономорфизм определяется условием:

$$i\left(\bigvee_{a \in X} a\right) = \bigvee_{a \in X} i(a)$$

для любого $X \subseteq T_{\mathbf{A}}$.

Леммы 6.3–6.9 вытекают из лемм 4.5–4.11 с помощью лемм 5.1 и 5.2.

ЛЕММА 6.3. *Пусть* L *— с.и. логика или модальная логика из* $NE(\mathrm{S4})$, *а многообразие* $V(L)$ *имеет* RAP (WRAP). *Тогда*

i) *для всех (соответственно, всех конечных) непустых ч.у. шкал* W_1, W_2, *если шкалы* W_1^{**} *и* $W_2^* \Uparrow \mathbf{Z}_1$ *удовлетворяют* L, *то* $W_2^* \Uparrow W_1$ *удовлетворяет* L;

ii) *для любых (любых конечных) ч.у. шкал* W, *если шкалы* W^{**} *и* $\mathbf{Z}_4$ *удовлетворяют* L, *то шкала* W^{***} *удовлетворяет* L;

iii) *если* $\mathbf{Z}_4$ *удовлетворяет* L, *то шкалы* $\mathbf{Z}_n$ *удовлетворяют* L *для всех* $n < \omega$.

ЛЕММА 6.4. *Пусть* L — *с.и. логика или модальная логика из* $NE(\mathrm{S4})$, *а многообразие* $V(L)$ *имеет* RAP (WRAP). *Пусть* W_1, W_2 — *любые (любые конечные) ч.у. шкалы, а шкала* $W_1^* \Uparrow ((n+1)\mathbf{Z}_1) \Uparrow W_2$ *удовлетворяет* L *для некоторого* $n \geqslant 2$. *Тогда шкала* $W_1^* \Uparrow (m\mathbf{Z}_1) \Uparrow W_2$ *удовлетворяет* L *для всех* $m \geqslant 1$.

В частности, если шкала $\mathbf{V}_{n+1}$ *удовлетворяет* L *для некоторого* $n \geqslant 2$, *то шкала* $\mathbf{V}_m$ *удовлетворяет* L *для любого* $m \geqslant 1$; *если шкала* $\mathbf{U}_{n+1}$ *удовлетворяет* L *для некоторого* $n \geqslant 3$, *то шкала* $\mathbf{U}_m$ *удовлетворяет* L *для любого* $m \geqslant 2$.

ЛЕММА 6.5. *Пусть* L — *с.и. логика или модальная логика из* $NE(\mathrm{S4})$ *и многообразие* $V(L)$ *имеет* RAP (WRAP). *Пусть* $W, W_1, \ldots, W_n$ — *любые (любые конечные) ч.у. шкалы, а шкалы* $\mathbf{V}_n \Uparrow W$ *и* $W_1^{**} \Uparrow W, \ldots, W_n^{**} \Uparrow W$ *удовлетворяют* L *для некоторого* $n \geqslant 1$. *Тогда шкала* $(W_1^* \sqcup \ldots \sqcup W_n^*)^* \Uparrow W$ *удовлетворяет* L.

ЛЕММА 6.6. *Пусть* L — *с.и. логика или модальная логика из* $NE(\mathrm{S4})$, *а многообразие* $V(L)$ *имеет* WRAP. *Если шкала* $\mathbf{U}_3$ *удовлетворяет* L, *то шкала* $\mathbf{U}_4 = \mathbf{V}_3 \Uparrow \mathbf{Z}_1$ *тоже удовлетворяет* L.

ЛЕММА 6.7. *Пусть* L — *с.и. логика или модальная логика из* $NE(\mathrm{S4})$, *а многообразие* $V(L)$ *имеет* WRAP. *Если шкалы* $\mathbf{Z}_3$ *и* $\mathbf{V}_2$ *удовлетворяют* L, *то шкала* $\mathbf{V}_3$ *тоже удовлетворяет* L.

ЛЕММА 6.8. *Пусть* L — *с.и. логика или модальная логика из* $NE(\mathrm{S4})$ *и многообразие* $V(L)$ *имеет* WRAP. *Предположим также, что* W_1, W_2 — *конечные шкалы. Если три шкалы* $\mathbf{U}_3^* = (\mathbf{V}_2)^* \Uparrow \mathbf{Z}_1$, $W_1^{**} \Uparrow \mathbf{Z}_1$

и $W_2^{**} \Uparrow \mathbf{Z}_1$ *удовлетворяют* L, *то шкала* $(W_1 \sqcup W_2)^{**} \Uparrow \mathbf{Z}_1$ *тоже удовлетворяет* L.

ЛЕММА 6.9. 1) *Пусть* L *— с.и. логика,* $V(L)$ *имеет* RAP *и шкала* $\mathbf{U}_3^*$ *удовлетворяет* L. *Тогда* $L \subseteq$ КС. *В частности, если* L *содержит* КС, *то* $L =$ КС.

2) *Пусть* L *— модальная логика из* NE(S4) *и многообразие* $V(L)$ *имеет* WRAP. *Если шкала* $\mathbf{U}_3^*$ *удовлетворяет* L, *то* L *содержится в* Grz.2.

Докажем еще ряд результатов.

ЛЕММА 6.10. *Пусть* $L \in NE$(S4), $V(L)$ *имеет* WRAP *и шкала* F_4 *удовлетворяет* L. *Тогда* L *содержится в логике* $\mathrm{Grz} + \sigma_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что шкала F_4 изоморфна $\mathbf{Z}_2 \Uparrow \Uparrow (3\mathbf{Z}_1)$. По лемме 6.4 шкала $(m\mathbf{Z}_1)^{**} = \mathbf{Z}_2 \Uparrow (m\mathbf{Z}_1)$ удовлетворяет L для любого $m \geqslant 1$. Поэтому $\mathbf{V}_n$ удовлетворяет L для любого $n \geqslant 1$. Тогда по лемме 6.5 шкала $(\mathbf{V}_{m_1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{V}_{m_n})^*$ удовлетворяет L для любых $m_1, \ldots, m_n \geqslant 1$. Таким образом, все шкалы, являющиеся деревьями высоты 3, удовлетворяют L. Можно показать, что логика $\mathrm{Grz} + \sigma_3$ полна относительно этого класса шкал. Поэтому $L \subseteq \mathrm{Grz} + \sigma_3$. $\square$

ЛЕММА 6.11. *Пусть* $L \in NE$(S4), $V(L)$ *имеет* WRAP *и шкала* F_3 *удовлетворяет* L. *Тогда шкала* F_4 *тоже удовлетворяет* L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что шкала F_3 — это множество $\{o, a, d, u, v, w\}$ с наименьшим элементом o и максимальными элементами u, v, w; a, d — все последователи элемента o; последователями элемента a являются u, v, w, множество последователей элемента d — это $\{v, w\}$. Обозначим через $\mathbf{W}_0$ пятиэлементную шкалу $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, частично упорядоченную отношением $\preceq$, где

$$0 \preceq x \text{ для всех } x,\ 1 \prec 3,\ 1 \prec 4,\ 2 \prec 3,\ 2 \prec 4,$$

1 несравним с 2, а 3 несравним с 4.

Положим $\mathbf{A} = \mathbf{W}_0^+$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = F_3^+$. Атомами алгебры $\mathbf{A}$ являются одноэлементные множества $a_i = \{i\}$, $0 \leqslant i \leqslant 4$. Операция $\Diamond$ на $\mathbf{A}$ полностью определяется равенствами

$$\Diamond a_0 = a_0,\ \Diamond a_1 = a_0 \vee a_1,\ \Diamond a_2 = a_0 \vee a_2,$$

$$\Diamond a_3 = a_0 \vee a_1 \vee a_2 \vee a_3,\ \Diamond a_4 = a_0 \vee a_1 \vee a_2 \vee a_4;$$

опремум $\Omega_{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$ — это $\bigvee\limits_{1 \leqslant k \leqslant 4} a_k = \neg a_0$. Атомами алгебры F_3^+ являются o', a', d', u', v', w', где $x' = \{x\}$, а $\Diamond$ удовлетворяет соотношениям:

$$\Diamond o' = o',\ \Diamond a' = o' \vee a',\ \Diamond d' = o' \vee d',\ \Diamond u' = o' \vee a' \vee u',$$

$$\Diamond v' = o' \vee a' \vee d' \vee v',\ \Diamond w' = o' \vee a' \vee d' \vee w'.$$

Опремум этой алгебры — это $\Omega = a' \vee d' \vee u' \vee v' \vee w' = \neg o'$.

По лемме 6.2 следующие отображения $\alpha : T_{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$, $\beta : T_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ можно продолжить до мономорфизмов $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$:

$$\alpha(a_0) = o',\ \alpha(a_1) = a',\ \alpha(a_2) = d',\ \alpha(a_3) = u' \vee v',\ \alpha(a_4) = w';$$

$$\beta(a_0) = o',\ \beta(a_1) = d',\ \beta(a_2) = a',\ \beta(a_3) = w',\ \beta(a_4) = u' \vee v'.$$

Заметим, что эти мономорфизмы сохраняют опремум. По свойству RAP существуют $\mathbf{D} \in V(L)$ и мономорфизмы $\gamma : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\delta : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\gamma\alpha = \delta\beta$. В частности, получаем

$$\begin{aligned} &\gamma(o') = \delta(o'), \gamma(a') = \delta(d'), \gamma(d') = \delta(a'),\\ &\gamma(u' \vee v') = \delta(w'), \gamma(w') = \delta(u' \vee v'). \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим теперь алгебру $\mathbf{A}_0$, изоморфную алгебре F_4^+. Множество атомов этой алгебры — это $S = \{e, p, q, r, s\}$, а $\Diamond$ определяется условиями:

$$\Diamond e = e,\ \Diamond p = e \vee p,\ \Diamond x = e \vee p \vee x \text{ для } x \in \{q, r, s\}.$$

Определим отображение $\varphi : S \to \mathbf{D}$ следующим образом:

$$\overline{e} = \varphi(e) = \gamma(o'),\ \overline{p} = \varphi(p) = \gamma(a' \vee d'),\ \overline{q} = \varphi(q) = \gamma(v'),$$

$$\overline{r} = \varphi(r) = \gamma(u') \vee \delta(u'),\ \overline{s} = \varphi(s) = \delta(v').$$

В силу (1), выполняются также соотношения

$$\overline{e} = \delta(o'),\ \overline{p} = \delta(a' \vee d'),\ \overline{q} = \gamma(v') \leq \delta(w'),\ \overline{s} = \delta(v') \leq \gamma(w'). \qquad (2)$$

Теперь достаточно показать, что φ удовлетворяет условиям леммы 6.2. Тогда отображение φ можно продолжить до мономорфизма из $\mathbf{A}_0$ в $\mathbf{D}$, а значит, алгебра F_4^+ принадлежит $V(L)$, а шкала F_4 удовлетворяет L. Проверим условия леммы 6.2.

1) $\varphi(x) \neq \bot_{\mathbf{D}}$ для любого $x \in S$, т. к. γ и δ — мономорфизмы.

2) $\varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(q) \vee \varphi(r) \vee \varphi(s) = \gamma(o' \vee a' \vee d' \vee v') \vee \gamma(u') \vee \delta(u') \vee \delta(v') =$ $= \gamma(o' \vee a' \vee d' \vee v' \vee u') \vee \delta(v' \vee u') =$ (по (1)) $\gamma(o' \vee a' \vee d' \vee v' \vee u') \vee \gamma(w') =$ $= \gamma(o' \vee a' \vee d' \vee v' \vee u' \vee w') = \gamma(\top_{\mathbf{B}}) = \top_{\mathbf{D}}$.

3) Покажем, что $\varphi(x) \,\&\, \varphi(y) = \bot_{\mathbf{D}}$ для $x, y \in S$, $x \neq y$.

В самом деле,

$$\varphi(e) \,\&\, \varphi(p) = \gamma(o') \,\&\, (a' \vee d')) = \gamma(\bot_{\mathbf{B}}) = \bot_{\mathbf{D}}.$$

Равенство для остальных пар $x, y \in \{e, p, q\}$, $x \neq y$, доказывается аналогично.

Далее,

$$\varphi(p) \,\&\, \varphi(s) = \gamma(a' \vee d') \,\&\, \delta(v') = \delta(a' \vee d') \,\&\, \delta(v') = \delta(\bot_{\mathbf{C}}) = \bot_{\mathbf{D}},$$

аналогично, $\varphi(e) \,\&\, \varphi(s) = \bot_{\mathbf{D}}$.

В силу соотношений (2),

$$\varphi(q) \,\&\, \varphi(s) = \gamma(v') \,\&\, \delta(v') \leq \gamma(v') \,\&\, \gamma(w') = \gamma(v' \,\&\, w') = \bot_{\mathbf{D}}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \varphi(r) \,\&\, \varphi(e) &= (\gamma(u') \vee \delta(u')) \,\&\, \gamma(o') = (\gamma(u') \,\&\, \gamma(o')) \vee (\delta(u') \,\&\, \gamma(o') \\ &= \bot_{\mathbf{D}} \vee (\delta(u') \,\&\, \delta(o')) = \bot_{\mathbf{D}}; \end{aligned}$$

аналогично, $\varphi(r) \,\&\, \varphi(p) = \bot_{\mathbf{D}}$.

Наконец, в силу соотношений (2),

$$\varphi(r) \,\&\, \varphi(q) = (\gamma(u') \vee \delta(u')) \,\&\, \gamma(v') = \gamma(u' \,\&\, v') \vee (\delta(u') \,\&\, \gamma(v'))$$

$$\leq \bot_{\mathbf{D}} \vee (\delta(u') \,\&\, \delta(w')) = \bot_{\mathbf{D}};$$

аналогично, $\varphi(r) \,\&\, \varphi(s) = \bot_{\mathbf{D}}$.

4) Докажем, что $\Diamond\varphi(x) = \bigvee\{\varphi(y) \mid y \in S$ и $y \leq \Diamond x\}$ для всех $x \in S$.

Поскольку γ и δ — мономорфизмы, получаем:

$\Diamond\varphi(e) = \Diamond\gamma(o') = \gamma(\Diamond o') = \gamma(o') = \varphi(e)$;

$\Diamond\varphi(p) = \Diamond\gamma(a' \vee d') = \gamma(\Diamond(a' \vee d')) = \gamma(o' \vee a' \vee d') = \varphi(e) \vee \varphi(p)$;

$\Diamond\varphi(q) = \Diamond\gamma(v') = \gamma(\Diamond v') = \gamma(o' \vee a' \vee d' \vee v') = \varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(q)$;

$\Diamond\varphi(r) = \Diamond(\gamma(u') \vee \delta(u')) = \Diamond\gamma(u') \vee \Diamond\delta(u') = \gamma(o' \vee a' \vee u') \vee \delta(o' \vee a' \vee u') =$
$= (\gamma(o') \vee \delta(o')) \vee (\gamma(a') \vee \delta(a')) \vee (\gamma(u') \vee \delta(u')) = \varphi(e) \vee (\gamma(a') \vee \gamma(d')) \vee \varphi(r) =$
$= \varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(r)$;

$\Diamond\varphi(s) = \Diamond\delta(v') = \delta(\Diamond v') = \delta(o' \vee (a' \vee d') \vee v') = \delta(o') \vee \delta(a' \vee d') \vee \delta(v') =$
$= \varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(s)$. $\square$

ЛЕММА 6.12. *Пусть $L \in NE(\mathrm{S4})$, $V(L)$ имеет* WRAP *и шкала F_2 удовлетворяет L. Тогда шкала F_4 тоже удовлетворяет L.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что шкала F_2 — это множество $\{o, a, c, d, u, v, w\}$ с наименьшим элементом o и максимальными элементами u, v, w; a, c, d — все непосредственно следующие за o; последователи элемента a — это u, v, w, множество последователей элемента c — это $\{u, w\}$, а множество последователей элемента d — это $\{v, w\}$. Обозначим через $\mathbf{W}_1$ шестиэлементную шкалу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, частично упорядоченную отношением $\preceq$, где

$$0 \preceq x \text{ для всех } x,\ 1 \prec 3,\ 1 \prec 4,\ 2 \prec 3,\ 2 \prec 4,\ 5 \prec 3,\ 5 \prec 4,$$

1, 2 и 5 попарно несравнимы, а 3 несравним с 4.

Положим $\mathbf{A} = \mathbf{W}_1^+$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = F_2^+$. Атомами алгебры $\mathbf{A}$ являются одноэлементные множества $a_i = \{i\}$, $0 \leqslant i \leqslant 5$. Операция $\Diamond$ на $\mathbf{A}$ полностью определяется равенствами

$$\Diamond a_0 = a_0,\ \Diamond a_1 = a_0 \vee a_1,\ \Diamond a_2 = a_0 \vee a_2,\ \Diamond a_5 = a_0 \vee a_5,$$

$$\Diamond a_3 = a_0 \vee a_1 \vee a_2 \vee a_3,\ \Diamond a_4 = a_0 \vee a_1 \vee a_2 \vee a_4;$$

опремум $\Omega_{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$ — это $\bigvee\limits_{1\leqslant k\leqslant 5} a_k = \neg a_0$. Атомами алгебры F_2^+ являются $o', a', c', d', u', v', w'$, где $x' = \{x\}$, а $\Diamond$ удовлетворяет соотношениям:

$$\Diamond o' = o',\ \Diamond a' = o' \vee a',\ \Diamond c' = o' \vee c',\ \Diamond d' = o' \vee d',\ \Diamond u' = o' \vee a' \vee u',$$

$$\Diamond v' = o' \vee a' \vee d' \vee v',\ \Diamond w' = o' \vee a' \vee d' \vee w'.$$

Опремум этой алгебры равен $\Omega = a' \vee c' \vee d' \vee u' \vee v' \vee w' = \neg o'$.

По лемме 6.2 следующие отображения $\alpha : T_{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$, $\beta : T_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ можно продолжить до мономорфизмов $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$:

$$\alpha(a_0) = o',\ \alpha(a_1) = a',\ \alpha(a_5) = c',\ \alpha(a_2) = d',\ \alpha(a_3) = u' \vee v',\ \alpha(a_4) = w';$$

$$\beta(a_0) = o',\ \beta(a_1) = d',\ \beta(a_5) = c',\ \beta(a_2) = a',\ \beta(a_3) = w',\ \beta(a_4) = u' \vee v'.$$

Заметим, что эти мономорфизмы сохраняют опремум. По свойству RAP существуют $\mathbf{D} \in V(L)$ и мономорфизмы $\gamma : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\delta : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\gamma\alpha = \delta\beta$. В частности, получаем

$$\begin{aligned} &\gamma(o') = \delta(o'),\ \gamma(c') = \delta(c'),\ \gamma(a') = \delta(d'),\\ &\gamma(d') = \delta(a'),\ \gamma(u' \vee v') = \delta(w'),\ \gamma(w') = \delta(u' \vee v'). \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим алгебру $\mathbf{A}_0$, определённую в лемме 6.11 и изоморфную алгебре F_4^+. Множество атомов этой алгебры — это $S = \{e, p, q, r, s\}$, а $\Diamond$ определяется условиями:

$$\Diamond e = e,\ \Diamond p = e \vee p,\ \Diamond x = e \vee p \vee x \text{ для } x \in \{q, r, s\}.$$

Определим отображение $\varphi : S \to \mathbf{D}$ следующим образом:

$$\overline{e} = \varphi(e) = \gamma(o'),\ \overline{p} = \varphi(p) = \gamma(a' \vee d'),\ \overline{q} = \varphi(q) = \gamma(v'),$$

$$\overline{r} = \varphi(r) = \gamma(c') \vee \gamma(u') \vee \delta(u'),\ \overline{s} = \varphi(s) = \delta(v').$$

В силу (3), выполняются также соотношения

$$\overline{e} = \delta(o'),\ \overline{p} = \delta(a' \vee d'),\ \overline{q} = \gamma(v') \leq \delta(w'),\ \overline{s} = \delta(v') \leq \gamma(w'). \tag{4}$$

Теперь, как и в лемме 6.11, достаточно показать, что φ удовлетворяет условиям леммы 6.2. Тогда отображение φ можно продолжить до мономорфизма из $\mathbf{A}_0$ в $\mathbf{D}$. Значит, алгебра F_4^+ принадлежит $V(L)$, а шкала F_4 удовлетворяет L.

Проверим условия леммы 6.2.

1) $\varphi(x) \neq \bot_{\mathbf{D}}$ для любого $x \in S$, т.к. γ и δ — мономорфизмы.

2) $\varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(q) \vee \varphi(r) \vee \varphi(s) = \gamma(o' \vee a' \vee d' \vee v') \vee \gamma(c') \vee \gamma(u') \vee \vee \delta(u') \vee \delta(v') = \gamma(o' \vee a' \vee d' \vee v' \vee u' \vee c') \vee \delta(v' \vee u') =$ (по (3)) $\gamma(o' \vee a' \vee \vee c' \vee d' \vee v' \vee u') \vee \gamma(w') = \gamma(o' \vee a' \vee c' \vee d' \vee v' \vee u' \vee w') = \gamma(\top_{\mathbf{B}}) = \top_{\mathbf{D}}$.

3) Аналогично лемме 6.11, с использованием соотношений (4) доказывается, что $\varphi(x) \,\&\, \varphi(y) = \bot_{\mathbf{D}}$ для $x, y \in S$, $x \neq y$.

4) Докажем, что $\Diamond\varphi(x) = \bigvee\{\varphi(y) \mid y \in S$ и $y \leq \Diamond x\}$ для всех $x \in S$.

Доказательство для $x \neq r$ в точности то же, что и в лемме 6.11.

Кроме того, поскольку γ и δ — мономорфизмы, получаем:

$$\begin{aligned}\Diamond\varphi(r) &= \Diamond(\gamma(c') \vee \gamma(u') \vee \delta(u')) = \Diamond\gamma(c') \vee \Diamond\gamma(u') \vee \Diamond\delta(u') \\ &= \gamma(\Diamond c' \vee \Diamond u') \vee \delta(\Diamond u') = \gamma(o' \vee a' \vee c' \vee u') \vee \delta(o' \vee a' \vee u') \\ &= (\gamma(o') \vee \delta(o')) \vee (\gamma(a') \vee \delta(a')) \vee (\gamma(c') \vee \gamma(u') \vee \delta(u')) \\ &= \varphi(e) \vee (\gamma(a') \vee \gamma(d')) \vee \varphi(r) = \varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(r). \ \square\end{aligned}$$

ЛЕММА 6.13. *Пусть* $L \in NE(\mathrm{S4})$, $V(L)$ *имеет* WRAP *и шкала* F_1 *удовлетворяет* L. *Тогда шкала* F_2 *тоже удовлетворяет* L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что шкала F_1 — это множество $\{o, a, b, c, d, u, v, w\}$ с наименьшим элементом o и максимальными элементами u, v, w; a, b, c, d — это все непосредственно следующие за o; последователями элемента a являются u, v, w, множество последователей элемента b — это $\{u, v\}$, множество последователей элемента c — это $\{u, w\}$, а множество последователей элемента d — это $\{v, w\}$. Возьмём шкалу $\mathbf{W}_1$, введённую в доказательстве леммы 6.12. Напомним, что $\mathbf{W}_1$ — это шестиэлементная шкала $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, частично упорядоченная отношением $\preceq$, где

$$0 \preceq x \text{ для всех } x,\ 1 \prec 3,\ 1 \prec 4,\ 2 \prec 3,\ 2 \prec 4,\ 5 \prec 3,\ 5 \prec 4,$$

1, 2 и 5 попарно несравнимы, а 3 несравним с 4.

Положим $\mathbf{A} = \mathbf{W}_1^+$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = F_1^+$. Атомами алгебры $\mathbf{A}$ являются одноэлементные множества $a_i = \{i\}$, $0 \leqslant i \leqslant 5$. Операция $\Diamond$ на $\mathbf{A}$ полностью определяется равенствами

$$\Diamond a_0 = a_0,\ \Diamond a_1 = a_0 \vee a_1,\ \Diamond a_2 = a_0 \vee a_2,\ \Diamond a_5 = a_0 \vee a_5,$$

$$\Diamond a_3 = a_0 \vee a_1 \vee a_2 \vee a_3,\ \Diamond a_4 = a_0 \vee a_1 \vee a_2 \vee a_4;$$

опремум $\Omega_{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$ — это $\bigvee\limits_{1\leqslant k\leqslant 5} a_k = \neg a_0$. Атомами алгебры F_1^+ являются $o', a', b', c', d', u', v', w'$, где $x' = \{x\}$, а $\Diamond$ удовлетворяет соотношениям:

$$\Diamond o' = o',\ \Diamond a' = o' \vee a',\ \Diamond b' = o' \vee b',\ \Diamond c' = o' \vee c',\ \Diamond d' = o' \vee d',$$

$$\Diamond u' = o' \vee a' \vee b' \vee u', \Diamond v' = o' \vee a' \vee b' \vee d' \vee v',\ \Diamond w' = o' \vee a' \vee d' \vee w'.$$

Опремум этой алгебры равен $\Omega = a' \vee b' \vee c' \vee d' \vee u' \vee v' \vee w' = \neg o'$.

Тогда по лемме 6.2 следующие отображения $\alpha : T_{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$, $\beta : T_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ можно продолжить до мономорфизмов $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$:

$$\alpha(a_0) = o',\ \alpha(a_1) = a',\ \alpha(a_5) = c',\ \alpha(a_2) = d',\ \alpha(a_3) = b' \vee u' \vee v',\ \alpha(a_4) = w';$$

$$\beta(a_0) = o',\ \beta(a_1) = d',\ \beta(a_5) = c',\ \beta(a_2) = a',\ \beta(a_3) = w',\ \beta(a_4) = b' \vee u' \vee v'.$$

Заметим, что эти мономорфизмы сохраняют опремум. По свойству RAP существуют $\mathbf{D} \in V(L)$ и мономорфизмы $\gamma : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\delta : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\gamma\alpha = \delta\beta$. В частности, получаем

$$\begin{aligned} &\gamma(o') = \delta(o'),\ \gamma(c') = \delta(c'),\ \gamma(a') = \delta(d'),\\ &\gamma(d') = \delta(a'),\ \gamma(b' \vee u' \vee v') = \delta(w'),\ \gamma(w') = \delta(b' \vee u' \vee v'). \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим алгебру $\mathbf{A}_1$, изоморфную алгебре F_2^+. Множество атомов этой алгебры равно $S = \{e, p, q, r, s, t, u\}$, а $\Diamond$ определяется условиями:

$$\Diamond e = e,\ \Diamond x = e \vee x \text{ для } x \in \{p, t, u\},$$

$$\Diamond q = e \vee p \vee t \vee q,\ \Diamond r = e \vee p \vee t \vee u \vee r,\ \Diamond s = e \vee p \vee u \vee s.$$

Определим отображение $\varphi : S \to \mathbf{D}$ следующим образом:

$$\overline{e} = \varphi(e) = \gamma(o'),\ \overline{p} = \varphi(p) = \gamma(a' \vee d'),\ \overline{t} = \varphi(t) = \gamma(b'),\ \overline{u} = \varphi(u) = \delta(b'),$$

$$\overline{q} = \varphi(q) = \gamma(v'),\ \overline{r} = \varphi(r) = \gamma(c') \vee \gamma(u') \vee \delta(u'),\ \overline{s} = \varphi(s) = \delta(v').$$

В силу (5), выполняются также соотношения

$$\begin{aligned}&\overline{e}=\delta(o'),\ \overline{p}=\delta(a'\vee d'),\ \overline{t}=\gamma(b')\leq\delta(w'),\\&\overline{u}=\delta(b')\leq\gamma(w'),\ \overline{q}=\gamma(v')\leq\delta(w'),\ \overline{s}=\delta(v')\leq\gamma(w').\end{aligned}\tag{6}$$

Теперь, как и в леммах 6.11 и 6.12, достаточно показать, что φ удовлетворяет условиям леммы 6.2. Тогда отображение φ можно продолжить до мономорфизма из $\mathbf{A}_0$ в $\mathbf{D}$. Значит, алгебра F_2^+ принадлежит $V(L)$, а шкала F_2 удовлетворяет L.

Проверим условия леммы 6.2.

1) $\varphi(x)\neq\bot_{\mathbf{D}}$ для любого $x\in S$, т. к. γ и δ — мономорфизмы.

2) $\varphi(e)\vee\varphi(p)\vee\varphi(q)\vee\varphi(r)\vee\varphi(s)\vee\varphi(t)\vee\varphi(u)=$

$$\begin{aligned}&=\gamma(o'\vee a'\vee d'\vee v')\vee\gamma(c')\vee\gamma(u')\vee\delta(u')\vee\delta(v')\vee\gamma(b')\vee\delta(b')\\&=\gamma(o'\vee a'\vee d'\vee v'\vee u'\vee c'\vee b')\vee\delta(v'\vee u'\vee b')\\&=\ \text{(по (5))}\ \gamma(o'\vee a'\vee c'\vee d'\vee v'\vee u'\vee b')\vee\gamma(w')\\&=\gamma(o'\vee a'\vee b'\vee c'\vee d'\vee v'\vee u'\vee w')=\gamma(\top_{\mathbf{B}})=\top_{\mathbf{D}}.\end{aligned}$$

3) Аналогично лемме 6.11 с использованием соотношений (6) доказывается, что $\varphi(x)\mathbin{\&}\varphi(y)=\bot_{\mathbf{D}}$ для $x,y\in S$, $x\neq y$. Например, поскольку γ и δ — мономорфизмы, из $\varphi(e)=\gamma(o')=\delta(o')$ и $o'\mathbin{\&}x=\bot_{\mathbf{B}}$ для $x\in F_1-\{o'\}$ получаем $\varphi(e)\mathbin{\&}\varphi(y)=\bot_{\mathbf{D}}$ для $y\in S$, $y\neq e$; аналогично доказывается $\varphi(p)\mathbin{\&}\varphi(y)=\bot_{\mathbf{D}}$ для $y\in S$, $y\neq p$. Далее, $\varphi(t)\mathbin{\&}\varphi(u)=$ $=\gamma(b')\mathbin{\&}\delta(b')\leq\gamma(b')\mathbin{\&}\gamma(w')=\bot_{\mathbf{D}}$; аналогично, $\varphi(t)\mathbin{\&}\varphi(s)=\bot_{\mathbf{D}}$. Очевидно, $\varphi(t)\mathbin{\&}\varphi(q)=\bot_{\mathbf{D}}$ и

$$\begin{aligned}\varphi(t)\mathbin{\&}\varphi(r)&=\gamma(b')\mathbin{\&}(\gamma(u')\vee\delta(u')\vee\gamma(c'))\\&=\gamma(b')\mathbin{\&}\delta(u')\leq\gamma(b')\mathbin{\&}\gamma(w')=\bot_{\mathbf{D}}.\end{aligned}$$

Покажем, что $\varphi(u)\mathbin{\&}\varphi(y)=\bot_{\mathbf{D}}$ для $y\in\{q,r,s\}$. Имеем

$$\begin{aligned}&\varphi(u)\mathbin{\&}(\varphi(q)\vee\varphi(r)\vee\varphi(s))=\\&=\delta(b')\mathbin{\&}\gamma(w')\mathbin{\&}(\gamma(v')\vee\delta(v')\vee\gamma(u')\vee\delta(u')\vee\gamma(c'))=\bot_{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

по закону дистрибутивности. Остальные соотношения проверяются аналогично.

4) Докажем, что $\Diamond\varphi(x) = \bigvee\{\varphi(y) \mid y \in S$ и $y \le \Diamond x\}$ для всех $x \in S$.

Поскольку γ и δ — мономорфизмы, получаем:

$$\Diamond\varphi(e) = \Diamond\gamma(o') = \gamma(\Diamond o') = \gamma(o') = \varphi(e);$$
$$\Diamond\varphi(p) = \Diamond\gamma(a' \vee d') = \gamma(\Diamond(a' \vee d')) = \gamma(o' \vee a' \vee d') = \varphi(e) \vee \varphi(p);$$
$$\begin{aligned}\Diamond\varphi(q) &= \Diamond\gamma(v') = \gamma(\Diamond v') = \gamma(o' \vee a' \vee d' \vee b' \vee v')\\ &= \varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(t) \vee \varphi(q);\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\Diamond\varphi(r) &= \Diamond(\gamma(c')\gamma(u') \vee \delta(u')) = \Diamond\gamma(c') \vee \Diamond\gamma(u') \vee \Diamond\delta(u')\\ &= \gamma(o' \vee c' \vee a' \vee b' \vee u') \vee \delta(o' \vee a' \vee b' \vee u')\\ &= (\gamma(o') \vee \delta(o')) \vee (\gamma(a') \vee \delta(a')) \vee \gamma(b') \vee \delta(b') \vee (\gamma(c') \vee \gamma(u') \vee \delta(u'))\\ &= \varphi(e) \vee (\gamma(a') \vee \gamma(d')) \vee \varphi(t) \vee \varphi(u) \vee \varphi(r)\\ &= \varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(t) \vee \varphi(u) \vee \varphi(r);\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\Diamond\varphi(s) &= \Diamond\delta(v') = \delta(\Diamond v') = \delta(o' \vee (a' \vee d') \vee b' \vee v')\\ &= \delta(o') \vee \delta(a' \vee d') \vee \delta(b') \vee \delta(v') = \varphi(e) \vee \varphi(p) \vee \varphi(u) \vee \varphi(s);\end{aligned}$$
$$\Diamond\varphi(t) = \Diamond\gamma(b') = \gamma(\Diamond b') = \gamma(o' \vee b') = \gamma(o') \vee \gamma(b') = \varphi(e) \vee \varphi(t);$$
$$\Diamond\varphi(u) = \Diamond\delta(b') = \delta(\Diamond b') = \delta(o' \vee b') = \delta(o') \vee \delta(b') = \varphi(e) \vee \varphi(u). \ \square$$

§ 7. Логики с PB2 в $NE(\mathrm{Grz})$

Для исследования ограниченного интерполяционного свойства в модальных логиках нам требуется более подробное описание логик с PB2. Напомним, что существует в точности тринадцать нормальных расширений логики Grz с проективным свойством Бета [8], в том числе, бесконечнослойные логики Grz, Grz.2 и Δ(Grz.2) и десять логик конечных слоев.

Приведём аналог для [8, предлож. 7.1]. Поскольку финитно аппроксимируемая с.и. логика и её модальный напарник из $NE(\mathrm{Grz})$ характеризуются одним и тем же классом конечных шкал, из предложения 4.1 выводится (здесь нумерация модальных логик отличается от нумерации их с.и. фрагментов) следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Логики со свойством* PB2 *в* $NE(\mathrm{Grz})$ *характеризуются классами конечных ч.у. шкал, а именно,*

1) $PG_1 = \mathrm{Grz}$: *всеми конечными ч.у.шкалами*;

2) $PG_2 = \mathrm{Grz.2}$: *шкалами вида* $W^* \Uparrow \mathbf{Z}_1$, *где* W *— конечная шкала*;

3) $PG_3 = \Delta(\mathrm{Grz.2})$: *шкалами вида* $((W_1^* \Uparrow \mathbf{Z}_1) \sqcup \ldots \sqcup (W_k^* \Uparrow \mathbf{Z}_1))^*$, *где* $k \geqslant 1$ *и* $W_1, \ldots, W_k$ *— конечные шкалы*;

4) $PG_4 = \mathrm{Grz} + \sigma_3$: *шкалами* $(\mathbf{V}_{n_1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{V}_{n_k})^*$ *для любого* $k \geqslant 1$ *и произвольных* $n_1, \ldots, n_k$;

5) $PG_5 = \mathrm{Grz.2} + \sigma_3$: *шкалами* $\mathbf{U}_n$ *для* $n \geqslant 1$;

6) $PG_6 = \Delta(\mathrm{Grz.2} + \sigma_2)$: *шкалами* $(n\mathbf{Z}_2)^*$ *для* $n \geqslant 1$;

7) $PG_7 = \Delta(\mathrm{Grz} + \sigma_2 + (\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p) \to \Box(\Box p \leftrightarrow \Box\neg\Box q))$: *шкалами* $(n\mathbf{V}_2)^*$ *для* $n \geqslant 1$;

8) $PG_8 = \mathrm{Grz} + \sigma_3 + (\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p))$: *шкалой* $\mathbf{Z}_3$;

9) $PG_9 = \mathrm{Grz} + \sigma_2$: *шкалами* $\mathbf{V}_n$ *для* $n \geqslant 1$;

10) $PG_{10} = \mathrm{Grz} + \sigma_2 + (\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p) \to \Box(\Box p \leftrightarrow \Box\neg\Box q)$: *шкалой* $\mathbf{V}_2$;

11) $PG_{11} = \mathrm{Grz.2} + \sigma_2$: *шкалой* $\mathbf{Z}_2$;

12) $PG_{12} = \mathrm{Grz} + \sigma_1$: *шкалой* $\mathbf{Z}_1$;

13) $PG_{13} = \mathrm{Grz} + \bot$: *пустой шкалой.*

Переходя от с.и. логик к их модальным напарникам, а от алгебр к шкалам, из теоремы 4.4 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Для любой логики* $L \in NE(\mathrm{Grz})$ *выполняются соотношения*:

1) $L \supseteq PG_1$;

2) $L \supseteq PG_2 \Leftrightarrow \mathbf{V}_2 \not\models A$;

3) $L \supseteq PG_3 \Leftrightarrow \mathbf{V}_2^* \not\models A$;

4) $L \supseteq PG_4 \Leftrightarrow \mathbf{Z}_4 \not\models A$;

5) $L \supseteq PG_5 \Leftrightarrow \mathbf{V}_2 \not\models A$ *и* $\mathbf{Z}_4 \not\models A$;

6) $L \supseteq PG_6 \Leftrightarrow \mathbf{V}_2^* \not\models A$ *и* $\mathbf{Z}_4 \not\models A$;

7) $L \supseteq PG_7 \Leftrightarrow A$ *опровержима в каждой из* $\mathbf{Z}_4, \mathbf{V}_3^*, F_1, F_2$ *и* F_3;

8) $L \supseteq PG_8 \Leftrightarrow A$ *опровержима в каждой из* $\mathbf{Z}_4, \mathbf{V}_2$ *и* $\mathbf{U}_3$;

9) $L \supseteq PG_9 \Leftrightarrow \mathbf{Z}_3 \not\models A$;

10) $L \supseteq PG_{10} \Leftrightarrow \mathbf{V}_3 \not\models A$ *и* $\mathbf{Z}_3 \not\models A$;

11) $L \supseteq PG_{11} \Leftrightarrow \mathbf{V}_2 \not\models A$ *и* $\mathbf{Z}_3 \not\models A$;

12) $L \supseteq PG_{12} \Leftrightarrow \mathbf{Z}_2 \not\models A$;

13) $L \supseteq PG_{13} \Leftrightarrow \mathbf{Z}_1 \not\models A$.

§ 8. Логики конечных слоев

Докажем, что в логиках конечных слоев IPR равносильно PB2.

Если $L \in NE(\mathrm{Grz})$, L имеет IPR и L — логика бесконечного слоя, то L содержится в Grz.2 (см. [19, теор. 5.6]). Это верно не только для бесконечнослойных логик, но также для логик, начиная с 4-го слоя. Поэтому для доказательства эквивалентности IPR и PB2 в конечнослойных логиках достаточно рассмотреть логики конечных слоев с номерами 1, 2, 3.

ТЕРЕМА 8.1. *Пусть* $L \in NE(\mathrm{Grz})$, L *— логика конечного слоя,* L *имеет* IPR*. Тогда* L *имеет* PB2*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть логика L конечного слоя имеет IPR. По п. iii леммы 6.3 шкала $\mathbf{Z}_4$ не может удовлетворять L.

Если L содержит Grz.2, то L имеет PB2 по [9]. Пусть $L \in NE(\mathrm{Grz})$ — любая логика, не содержащая Grz.2. По п. 2 предложения 7.2 шкала $\mathbf{V}_2$ удовлетворяет L. Если L характеризуется этой шкалой, то L совпадает с логикой PG_{10} из предложения 7.1, которая имеет CIP и PB2. Если L не совпадает с PG_{10}, то по п. 10 предложения 7.2 по крайней мере одна из шкал $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{Z}_3$ удовлетворяет L.

Если L — логика 2-го слоя, то $\mathbf{Z}_3$ не удовлетворяет L, а значит, $\mathbf{V}_3$ удовлетворяет L. По лемме 6.4 шкалы $\mathbf{V}_m$ удовлетворяют L для любого $m \geqslant 1$. По п. 9 предложения 7.1 логика L содержится в наименьшей логике 2-го слоя из $NE(\mathrm{Grz})$, а именно, в логике $PG_9 = \mathrm{Grz} + \sigma_2$, а значит, совпадает с ней, поэтому имеет CIP и PB2.

Пусть L — логика 3-го слоя и L не содержит Grz.2. Тогда шкала $\mathbf{V}_2$ удовлетворяет L. Учитывая, что $\mathbf{Z}_3$ удовлетворяет L, по лемме 6.7 получаем, что шкала $\mathbf{V}_3$ удовлетворяет L. По лемме 6.4 шкалы $\mathbf{V}_n$ удовлетворяют L для любого n.

Применяя лемму 6.5 при пустом W и $W_1 = \ldots = W_n = \mathbf{Z}_1$, заключаем, что шкалы $(n\mathbf{Z}_2)^*$ удовлетворяют L для любого n. Тогда все шкалы, характеризующие логику PG_6 из п. 6 предложения 7.1, удовлетворяют L, а значит, $L \subseteq PG_6$. Если $L = PG_6$, то L имеет PB2.

Допустим, $L \subset PG_6$. По п. 6 предложения 7.2 получаем, что $\mathbf{V}_2^*$ или $\mathbf{Z}_4$ удовлетворяет L. Поскольку L — логика 3-го слоя, $\mathbf{Z}_4$ не удовлетворяет L, а следовательно, $\mathbf{V}_2^*$ удовлетворяет L. Так как $\mathbf{V}_n$ удовлетворяет L для любого n, опять используем лемму 6.5 при пустом W и $W_1 = \ldots = W_n = 2\mathbf{Z}_1$ и заключаем, что шкалы $(n\mathbf{V}_2)^*$ удовлетворяют L для любого n. Значит, все шкалы, характеризующие логику PG_7 из п. 7 предложения 7.1, удовлетворяют L, откуда $L \subseteq PG_7$. Если $L = PG_7$, то L имеет PB2.

Допустим, $L \subset PG_7$. Из предложения 7.2 вытекает, что по крайней мере одна из шкал F_1–F_4 удовлетворяет L. Рассмотрим четыре случая.

Случай 1: F_4 удовлетворяет L. По лемме 6.10, L содержится в наименьшей логике 3-го слоя Grz$+\sigma_3$. Следовательно, сама L есть наименьшая логика 3-го слоя, а значит, имеет PB2.

Случай 2: F_3 удовлетворяет L. По лемме 6.11, F_4 тоже удовлетворяет L, и этот случай сводится к случаю 1.

Случай 3: F_2 удовлетворяет L. По лемме 6.12, F_4 тоже удовлетворяет L, и этот случай сводится к случаю 1.

Случай 4: F_1 удовлетворяет L. По лемме 6.13, F_2 тоже удовлетворяет L, и этот случай сводится к случаю 3. □

От модальных логик над Grz переходим к с.и. логикам. Из теорем 8.1 и 2.1 (п. 3) следует основной результат этого параграфа:

ТЕОРЕМА 8.2. *Для любой конечнослойной логики над* Int *или* Grz *свойства* IPR *и* PB2 *равносильны.*

§ 9. Логики бесконечных слоев над Grz

Используя леммы из § 2, теорему 8.1 нетрудно распространить на более широкий класс модальных логик.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть логика L содержит* Grz *и не содержится в* Δ(Grz.2). *Логика L имеет* IPR *в том и только том случае, если L имеет* PB2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L — логика над Grz, L имеет IPR. Если L — логика конечного слоя, то она имеет PB2 по теореме 8.1.

Пусть L — логика бесконечного слоя. Так как L имеет IPR, $L \subseteq$ Grz.2 (см. [19]). Если $L =$ Grz.2, то она имеет PB2.

Пусть $L \neq$ Grz.2. Тогда $\mathbf{V}_2$ удовлетворяет L по п. 2 предложения 7.2. По лемме 6.7 шкала $\mathbf{V}_3$ также удовлетворяет L. По лемме 6.4 шкалы $\mathbf{V}_n$ удовлетворяют L для всех n. Все шкалы для Grz.2 удовлетворяют L, и по п. 2 предложения 7.1 все конечные шкалы вида $(W^{**} \Uparrow \mathbf{Z}_1)$ удовлетворяют L. По лемме 6.5 (при пустом W) получим, что все конечные шкалы вида $((W_1^* \Uparrow \mathbf{Z}_1) \sqcup \ldots \sqcup (W_n^* \Uparrow \mathbf{Z}_1))^*$ удовлетворяют L. По п. 3 предложения 7.1 логика Δ(Grz.2) характеризуется классом таких шкал, а значит, $L \subseteq \Delta$(Grz.2). Если выполняется равенство, то L имеет PB2. $\square$

Таким образом, проблема описания логик с IPR остаётся нерешённой только для логик, строго содержащихся в Δ(Grz.2).

§ 10. Суперинтуиционистские логики

Напомним, что IPR равносильно PB2 во всех с.и. логиках, содержащих логику KC. Расширим класс таких логик. В добавление к теореме 8.2 имеет место

ТЕОРЕМА 10.1. *Пусть L — с.и. логика, содержащая* Δ(KC). *Логика L имеет* IPR *в том и только том случае, если L имеет* PB2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L содержит Δ(KC) и имеет IPR. Если L — логика конечного слоя, то L имеет PB2 по теореме 8.2.

Пусть L — логика бесконечного слоя. Тогда $L \subseteq$ LC. Если $L =$ LC, то L имеет PB2. Пусть L строго содержится в LC. По п. 6 теореме 4.4 по крайней мере одна из гейтинговых алгебр C_2 и B_3 принадлежит $V(L)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $B_3 \in V(L)$, $C_2 \notin V(L)$. По п. 2 теоремы 4.4, L содержит KC. Поэтому L имеет PB2 (см. [9]). По предложению 4.1 лишь две логики с PB2 из E(KC) удовлетворяют условиям $L \subseteq$ LC и $B_3 \in V(L)$, поэтому L совпадает с KC или Δ(LC) + KC.

Случай 2: $C_2 \in V(L)$. По леммам 4.6 и 4.9, $C_n \in V(L)$ для любого n. Учитывая, что $L_n \in V(L)$ для любого n, по лемме 4.7 получаем, что $(L_{i_1} \times \ldots \times L_{i_k}) + B_0 \in V(L)$ для любых $i_1, \ldots, i_k$. Отсюда, по предложению 4.1, $L \subseteq \Delta$(LC). Если $L = \Delta$(LC), то L имеет PB2.

Пусть $L \subset \Delta$(LC). По п. 5 теоремы 4.4 по крайней мере одна из ПБА C_2^+, B_3^+ принадлежит $V(L)$. Поскольку $L \supseteq \Delta$(KC) и по п. 8 теоремы 4.4, $C_2^+ \notin V(L)$, поэтому

$$B_3^+ \in V(L).$$

Рассмотрим логику $L' = L +$KC. Логика L имеет IPR, а L' получается из L добавлением L-консервативных аксиом, поэтому логика L' также имеет IPR (см. [6]). Поскольку L' содержит KC, L' имеет PB2 ввиду эквивалентности IPR и PB2 над KC (см. [9]). Кроме того, $B_3^+ \in V(L')$, т. к. аксиомы логики KC выполняются в B_3^+. Единственная логика со свойством PB2 над KC, удовлетворяющая этому условию, — это логика KC, поэтому $L' =$ KC. Таким образом, $L +$ KC = KC, а значит, Δ(KC) $\subseteq L \subseteq$ KC.

Вспомним теперь, что $C_n \in V(L)$ для любого n. Кроме того, для любой конечной ПБА $\mathbf{A}$ выполняется $B_0 + \mathbf{A} + B_0 + B_0 \in V(\mathrm{KC}) \subseteq V(L)$. По лемме 4.7 получаем, что $((B_0 + \mathbf{A}_1 + B_0) \times \ldots \times (B_0 + \mathbf{A}_k + B_0)) + B_0 \in$ $\in V(L)$ для любых конечных ПБА $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$. Отсюда, по предложению 4.1, получаем, что $L \subseteq \Delta$(KC).

Таким образом, $L = \Delta$(KC), а значит, L имеет PB2. $\square$

Вопрос об описании логик с IPR остался нерешённым для бесконечнослойных с.и. логик, не содержащих Δ(KC).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. *Пусть с.и. логика L имеет* IPR *и удовлетворяет условию: для любой конечной гейтинговой алгебры*

$$\mathbf{A}^+ \in V(L) \Rightarrow \mathbf{A}^{++} \in V(L). \tag{7}$$

Тогда L совпадает с одной из логик LC, KC *или* Int, *а значит, имеет* CIP.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при указанном условии выполняется $L \subseteq \mathrm{LC}$. Если $L = \mathrm{LC}$, то L имеет CIP. Допустим, что $L \subset \mathrm{LC}$. Тогда $C_2 \in V(L)$ или $B_3 \in V(L)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $C_2 \notin V(L)$. Тогда $B_3 \in V(L)$. Кроме того, L содержит KC по п. 2 теоремы 4.4. По [9], L имеет PB2, а значит, совпадает с одной из логик KC или $\Delta(\mathrm{LC}) + \mathrm{KC}$. По условию (7) получаем $B_3^+ \in V(L)$. Поскольку $B_3^+ \notin V(\Delta(\mathrm{LC}) + \mathrm{KC})$, отсюда $L = \mathrm{KC}$, а значит, L имеет CIP.

Случай 2: $C_2 \in V(L)$. Поскольку $L_4 \in V(L)$ и по лемме 4.9, $C_3 \in V(L)$, а по лемме 4.6 получаем, что $C_n \in V(L)$ для любого n. По условию (7) и лемме 4.7 (где $\mathbf{B}$ — единичная алгебра E), получим, что все алгебры из класса $K(E)$, порождающего многообразие всех гейтинговых алгебр (см. лемму 4.2), принадлежат $V(L)$, а значит, L совпадает с Int. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 10.3. *Логика* $\mathrm{KP} = \mathrm{Int} + (\neg A \to (B \vee C)) \to (\neg A \to \to B) \vee (\neg A \to C)$ *не имеет* IPR.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить условие (7). $\square$

Условие (7) не является необходимым для того, чтобы с.и. логика с IPR имела PB2. Сформулируем необходимое и достаточное условие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.4. *Суперинтуиционистская логика L с* IPR *имеет* PB2 *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию: для любой гейтинговой алгебры* $\mathbf{A}$ *и конечной гейтинговой алгебры* $\mathbf{B}^+$, *которая является гомоморфным образом алгебры* $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}^+ \in V(L) \Rightarrow \mathbf{B}^{++} \in V(L). \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если L имеет PB2, то она имеет IPR. Кроме того, по [3, теор. 4.4] выполняется условие (8).

Докажем обратное. Пусть L имеет IPR. Если L содержит $\Delta(\mathrm{KC})$ или L — логика конечного слоя, то она имеет PB2 по доказанному выше. Пусть L — логика бесконечного слоя, не содержит $\Delta(\mathrm{KC})$ и удовлетворяет условию (8). Сформулируем аналоги [3, лемма 7.1, предлож. 7.2].

Для любого многообразия $V(L)$ гейтинговых алгебр положим

$$V^{-}(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A}^{+} \in V(L)\}.$$

Легко видеть, что класс $V^{-}(L)$ содержится в $V(L)$ и замкнут относительно взятия подалгебр. Вообще говоря, он не замкнут относительно взятия декартовых произведений и гомоморфных образов.

ЛЕММА 10.5. *Пусть с.и. логика L имеет* IPR. *Тогда*

i) *класс $V^{-}(L)$ амальгамируем;*

ii) *если $V(L)$ содержит алгебру C_3, то класс $V^{-}(L)$ замкнут относительно конечных произведений подпрямо неразложимых гейтинговых алгебр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство повторяет [3, док-во леммы 7.1]. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.6. *Пусть с.и. логика L имеет* IPR *и удовлетворяет условию* (8)*. Если $V(L)$ содержит алгебру C_3, то $L = \Delta(L')$ для подходящей L' с* CIP.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет [3, док-во предлож. 7.2]. Надо только заменить ссылку на теорему 4.4 ссылкой на условие (8). □

Продолжим доказательство предложения 10.4. По п. 8 предложения 4.4 гейтингова алгебра C_2^{+} принадлежит $V(L)$, а значит, C_2 принадлежит $V(L)$. Поскольку $L_5 \in V(L)$ и по лемме 4.9, выполняется $C_3 \in V(L)$. По предложению 10.6 получаем, что $L = \Delta(L')$ для подходящей L' с CIP. Однако все такие логики имеют PB2 (см. [3]). □

Пока неясно, является ли условие (8) независимым. На настоящий момент автору не известен пример с.и. логики с IPR, не имеющей PB2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Л. Максимова*, Проективные свойства Бета в модальных и суперинтуиционистских логиках, Алгебра и логика, **38**, № 3 (1999), 316—333.
2. *Л. Л. Максимова*, Суперинтуиционистские логики и проективное свойство Бета, Алгебра и логика, **38**, № 6 (1999), 680—696.

3. *L. Maksimova*, Intuitionistic logic and implicit definability, Ann. Pure Appl. Logic, **105**, Nos. 1-3 (2000), 83—102.
4. *Л. Л. Максимова*, Неявная определимость и позитивные логики, Алгебра и логика, **42**, № 1 (2003), 65—93.
5. *Л. Л. Максимова*, Определимость в нормальных расширениях логики S4, Алгебра и логика, **43**, № 4 (2004), 387—410.
6. *D. M. Gabbay, L. Maksimova*, Interpolation and definability. Modal and intuitionistic logics (Oxford Logic Guides, **46**; Oxford Sci. Publ.), Oxford, Clarendon Press, 2005.
7. *Л. Л. Максимова*, Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинговых алгебр, Алгебра и логика, **40**, № 3 (2001), 290—301.
8. *L. Maksimova*, Projective Beth property in extensions of Grzegorczyk logic, Stud. Log., **83**, Nos. 1-3 (2006), 365–391.
9. *Л. Л. Максимова*, Проективное свойство Бета и интерполяция в позитивных и близких к ним логиках, Алгебра и логика, **45**, № 1 (2006), 85—113.
10. *L. Maksimova*, Restricted interpolation in modal logics, in: Ph. Balbiani (ed.) et al., Advances in modal logic, vol. 4, London, King's College Publ., 2003, 297—311.
11. *H. Rasiowa, R. Sikorski*, The mathematics of metamathematics, Warszawa, PWN, 1963.
12. *W. Blok*, Varieties of interior algebras, PhD Thesis, Univ. Amsterdam, 1976.
13. *T. Hosoi*, On intermediate logics I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. Ia, **14** (1967), 293—312.
14. *Л. Л. Максимова*, Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр, Алгебра и логика, **16**, № 6 (1977), 643—681.
15. *Л. Л. Максимова*, Модальные логики и многообразия модальных алгебр: свойство Бета, интерполяция и амальгамируемость, Алгебра и логика, **31**, № 2 (1992), 145—166.
16. *Л. Л. Максимова*, Ограниченная интерполяция и проективное свойство Бета в эквациональной логике, Алгебра и логика, 42, № 6 (2003), 712—726.
17. *Л. Л. Максимова, В. В. Рыбаков*, О решётке нормальных модальных логик, Алгебра и логика, **13**, № 2 (1974), 188—216.

18. *A. Chagrov, M. Zakharyaschev*, Modal logics (Oxford Logic Guides, **35**), Oxford, Clarendon Press, 1997.

19. *L. L. Maksimova*, Projective Beth's properties in infinite slice extensions of the modal logic K4, in: F. Wolter (ed.) et al., Advances in modal logic, vol. 3, Singapore, World Sci. Publ., 2002, 349—363.

Поступило 6 марта 2007 г.

Адрес автора:

МАКСИМОВА Лариса Львовна, Ин-т матем. СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: lmaksi@math.nsc.ru